

1、证明每个元素 $A[i]$ 出现在 B 中任何位置的概率是 $1/n$ ，然后说明排列结果不是均匀随机排列。

(1) 假设 $A[i]$ 出现在 B 中 j 位置的事件为 A_{ij} ，则

$$\Pr(A_{ij}) = \Pr(\text{dest} \% n = j) = \Pr((\text{offset} + i) \% n = j) = \Pr(\text{offset} = j - i) + \Pr(\text{offset} = kn + j - i) \quad k \geq 1$$

如果 $i < j$ ，则 $\Pr(A_{ij}) = \Pr(\text{offset} = j - i) = 1/n$;

如果 $i \geq j$ ，则 $\Pr(A_{ij}) = \Pr(\text{offset} = n + j - i) = 1/n$;

所以 $\Pr(A_{ij}) = 1/n$

(2) 假设 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ ， A 元素所有的排列有 $3! = 6$ 种，由该算法产生的排列每种可能性应为 $1/6$ 。

而 $\text{offset} = \text{RANDOM}(1, 3)$ 产生的 3 元组合有 $3^3 = 27$ 种，每种组合都对应着一种排列，因为 $27/6 = 3$ ，这 27 种组合不能被平均分给 6 种排列，所以这 6 种排列的概率必然不相等，所以该排列不是均匀随机排列。

2、证明：在过程 PERMUTE-BY-SORTING 的数组中，所有元素都唯一的概率至少是 $1 - 1/n$ 。

设所有元素都唯一的事件为 X 。

$$\begin{aligned} \Pr(X) &= 1 \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) \left(1 - \frac{2}{n^3}\right) \left(1 - \frac{3}{n^3}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n^3}\right) \\ &\geq \frac{(n^3 - n)^n}{(n^3)^n} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \\ &= C_n^0 1^n \left(-\frac{1}{n^2}\right)^0 + C_n^1 1^{n-1} \left(-\frac{1}{n^2}\right)^1 + \cdots + C_n^n 1^0 \left(-\frac{1}{n^2}\right)^n \\ &\geq C_n^0 1^n \left(-\frac{1}{n^2}\right)^0 + C_n^1 1^{n-1} \left(-\frac{1}{n^2}\right)^1 \\ &= 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

因此所有元素都唯一的概率至少是 $1 - 1/n$