最长递增子序列实验报告

一、实验环境

操作系统：Windows10 专业版 64 位
处理器：Intel(R) Core(TM) i7-8700 @3.2GHZ
内存：16G
编程语言： Java 1.8

二、算法描述

1. 单调递增

在本次实验中将单调递增理解为严格单调递增，即不允许有两个数相等，在本次实验中如没有特别说明，所有的单调递增都是严格单调递增。

单调递增函数的定义：设函数f(x)的定义域为 I，如果对于定义域 I 某个区间 D 上的任意两个自变量的值x_1, x_2，当$x_1 < x_2$时，都有$\mathrm{f}(x_1) < \mathrm{f}(x_2)$，那么就说函数f(x)在区间 D 上是增函数。

2. 算法描述

动态规划 O(n^2)

记以 a_i 结尾的最长单调递增子序列长度为 A_i，输入数组为 N，我们可以得到以下递推式：

$$\mathrm{A}_i = \max(\mathrm{A}_k) + 1 \quad, \mathrm{k} < \mathrm{i}, \mathrm{N[k]} < \mathrm{N[i]}$$

在计算 Ai 时，我们需要遍历所有的$\mathrm{k} < \mathrm{i}$，比较$\mathrm{N[k]}, \mathrm{N[i]}$，如果$\mathrm{N[k]} < \mathrm{N[i]}$，那么$\mathrm{A}_k + 1$就是一个候选的递增子序列长度，找出$\mathrm{A}_k + 1$的最大值就可以找到最长递增子序列长度。由于遍历 i 到 N 长度的复杂度为 O(n)，遍历 K 到 i 的复杂度也为 O(n)，所以该算法最终的复杂度为 O(n^2)。

算法的关键代码为：

```
for (int i = 1; i < numbers.length; i++) {
        maxLen[i] = 1; //用来描述 Ai
        tags[i] = -1;//用来保存以 i 结尾最长子序列前一个数的位置
        for (int j = 0; j < i; j++) {
                if (numbers[j] < numbers[i]) {//如果 N[k]<N[i]
```

```
                int length = maxLen[j]+1;
                if (length > maxLen[i]) {
                    maxLen[i] = length;//更新 Ai 并保存前一个数的位置
                    tags[i] = j;
                    if (length > maxLength) {
                        maxIndex = i;
                        maxLength = length;
                    }
                }
            };
    }
}
```

贪心算法 O(lgn)

由题目的提示，一个长度为 i 的候选子序列的尾元素至少不比一个长度为 i-1 的候选子序列的尾元素小，换句话说，对于一个固定长度为 i 的递增子序列，只有尾元素尽可能小，我们才更有可能找到第 i+1 个元素放到这个子序列后面成为更长的递增子序列。再换句话说，如果出现了多种长度为 i 的递增子序列，我们优先选择尾元素最小的那种，这样在后面找到更长递增子序列的概率会更大。

要实现这种方法，我们需要建立一个临时数组 minTail，第 i 个位置用来保存长度为 i 的递增子序列的最小尾元素的位置。需要一个临时变量 maxLen 用来记录现在已经构造的最长递增子序列。依次遍历 N 的每个元素 ai，如果 ai 比现在可以构造的最长子序列的尾元素还要大，即 ai>N[minTail[maxLen]]，就说明我们可以构造一个更长的最长子序列，这时可以设置 minTail[maxLen+1]=i，maxLen=maxLen+1，如果 ai<N[minTail[maxLen]]，说明如果要构造一个长度不超过 maxLen 的递增子序列，尾元素可以更小，我们需要找到一个合适长度的递增子序列，将尾元素替换为 a_i。因为“一个长度为 i 的候选子序列的尾元素至少不比一个长度为 i-1 的候选子序列的尾元素小”，所以我们需要找到满足 ai<N[minTail[j]]的最小的 j，将 j-1 替换为 i，换句话说，minTail 标记的元素的值必须是递增的。

由于 minTail 标记的元素值是有序的，所有找到一个合适的插入位置可以使用二分查找，算法复杂度为 O(lgn)，遍历一遍所有的元素算法复杂度为 O(n)，该算法最终复杂度为 O(nlgn)。

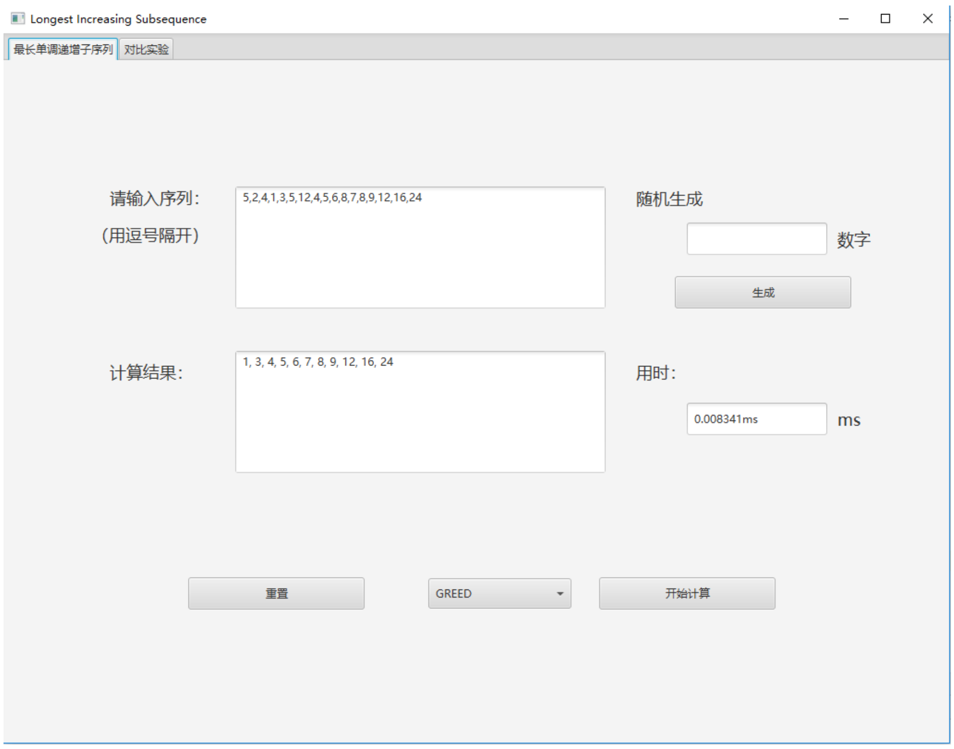
算法的关键代码如下：

```
for (int i = 1; i < numbers.length; i++) {
    if (numbers[i] > numbers[minTailIndex[maxLen-1]]) {//如果大于最大的尾元素
        minTailIndex[maxLen++] = i;                //说明可以构造更长的子序列
        tags[i] = maxLen; //记录第 i 个元素可以构造子序列长度，用于寻找最终子序列
    }
    else { //否则使用二分查找找出替换的位置
        int replaceIndex = binarySearch(numbers, minTailIndex, 0,maxLen-1,numbers[i]);
        tags[i] = tags[minTailIndex[replaceIndex]];
        minTailIndex[replaceIndex] = i;
```

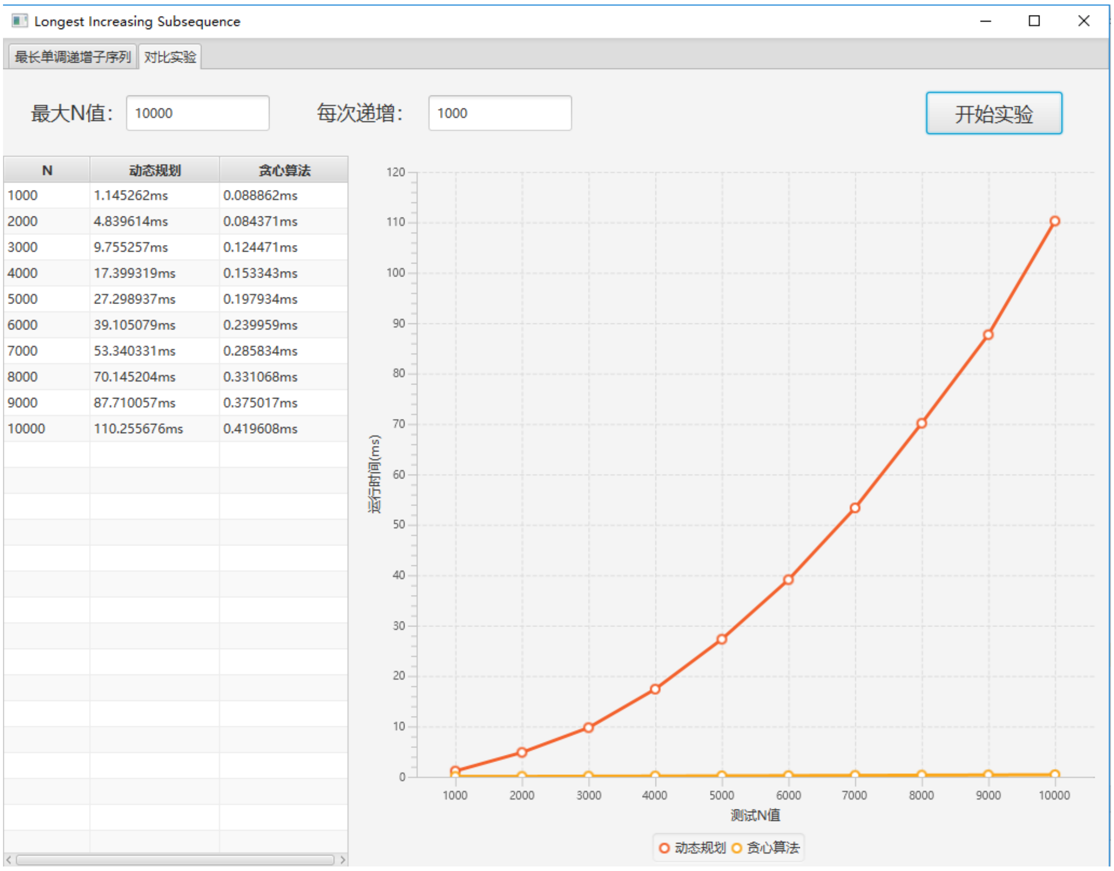
```
    }
}
```

三、实验界面

实验程序可以手动输入序列，也可以随机生成 0~2^{31}-1 范围内的整数序列，可以自由选择贪心算法和动态规划算法，结果显示找到的一个最长子序列和计算时间。



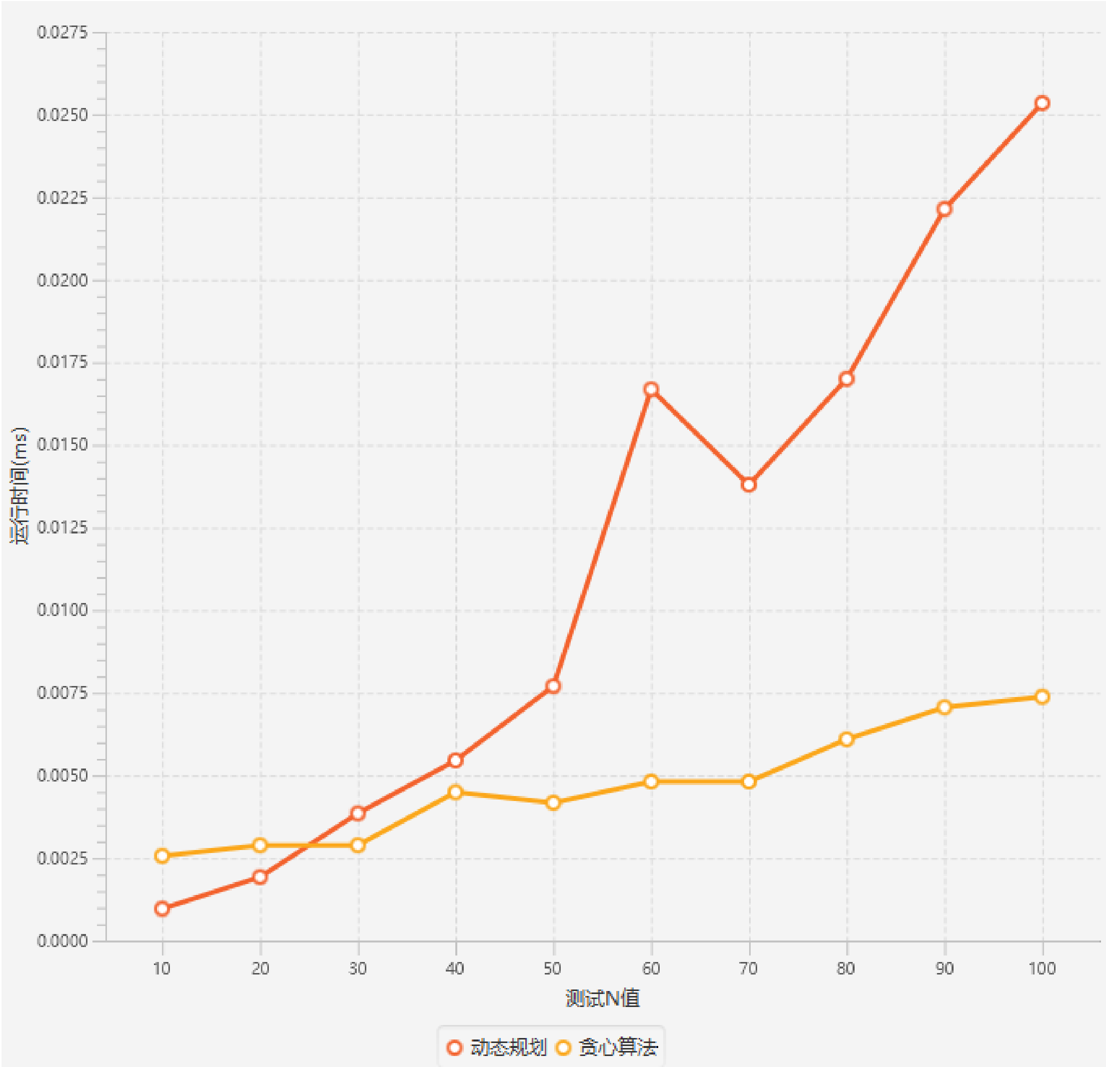
除此以外，实验程序也支持实验对比，实验对比两种算法的界面如下：



四、实验结果

1. 10~100 数据量

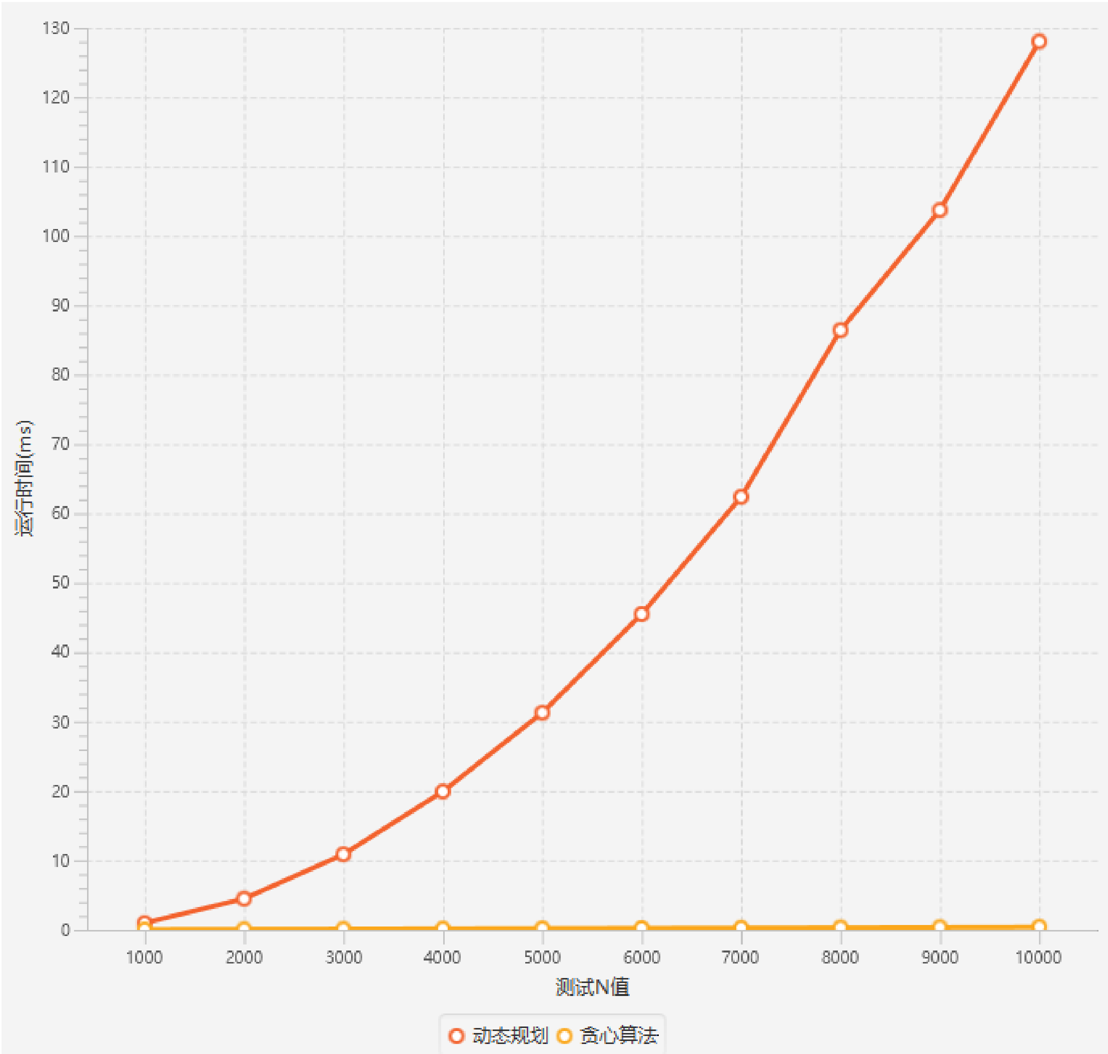
N	动态规划	贪心算法
10	9.63E-4ms	0.002566ms
20	0.001925ms	0.002887ms
30	0.00385ms	0.002887ms
40	0.005454ms	0.004491ms
50	0.007699ms	0.00417ms
60	0.016682ms	0.004812ms
70	0.013795ms	0.004812ms
80	0.017002ms	0.006096ms
90	0.022135ms	0.007058ms
100	0.025344ms	0.007378ms



由实验可知，数据量较小时两种方法差别不大，数据量小于 40 时运行时间基本都在 0.005ms 以下，当数据量超过 50 时贪心算法运行时间就确保小于动态规划的时间。

2. 1000~10000 数据量

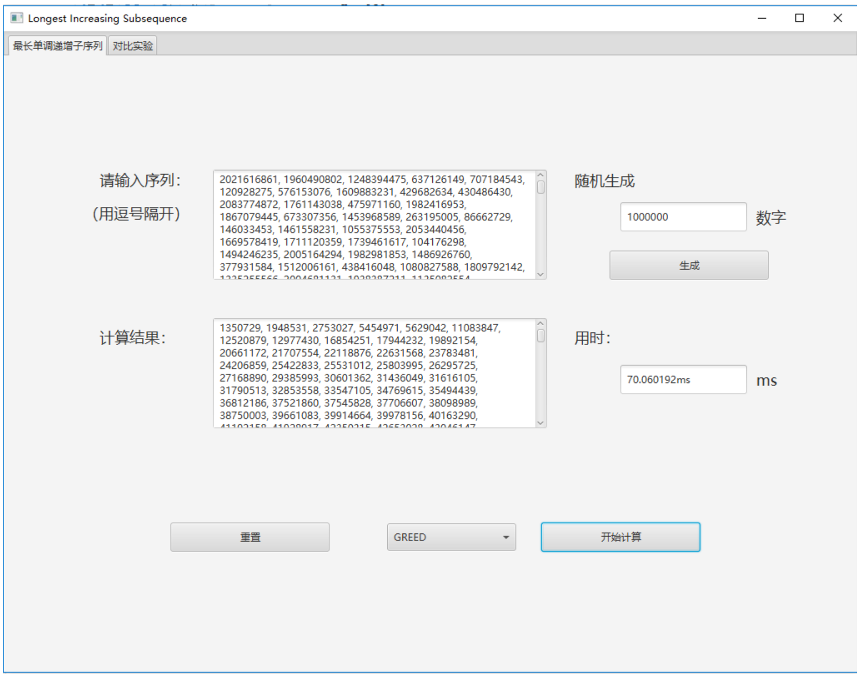
N	动态规划	贪心算法
1000	0.972991ms	0.034326ms
2000	4.470371ms	0.069614ms
3000	10.865231ms	0.107147ms
4000	19.922423ms	0.146286ms
5000	31.281689ms	0.187669ms
6000	45.489673ms	0.233544ms
7000	62.392391ms	0.277494ms
8000	86.411131ms	0.317915ms
9000	103.714851ms	0.357694ms
10000	128.027124ms	0.403248ms



数据量逐渐扩大之后贪心算法与动态规划的运行时间差距剧烈扩大，尽管两种算法的理论运行时间差距只是 $O(n^2)$与 $O(n\lg n)$，但在实际运行时间上贪心算法的效率确高出很多。3.

3. 最长子序列结果演示


请输入序列：
(用逗号隔开)
10,24,56,1,5,9,45,12,32,13,16,19,54,56,55,61,5,3
随机生成
数字
生成
计算结果：
1, 5, 9, 12, 13, 16, 19, 54, 55, 61
用时：
0.004492ms
ms
重置
GREED
开始计算


Longest Increasing Subsequence
最长单调递增子序列
对比实验
请输入序列：
(用逗号隔开)
随机生成
1000000
数字
生成
计算结果：
用时：
70.060192ms
ms
重置
GREED
开始计算