参考:

搞懂DFT来理解FFT

DFT（离散傅里叶变换）与 FFT（快速傅里叶变换）初识

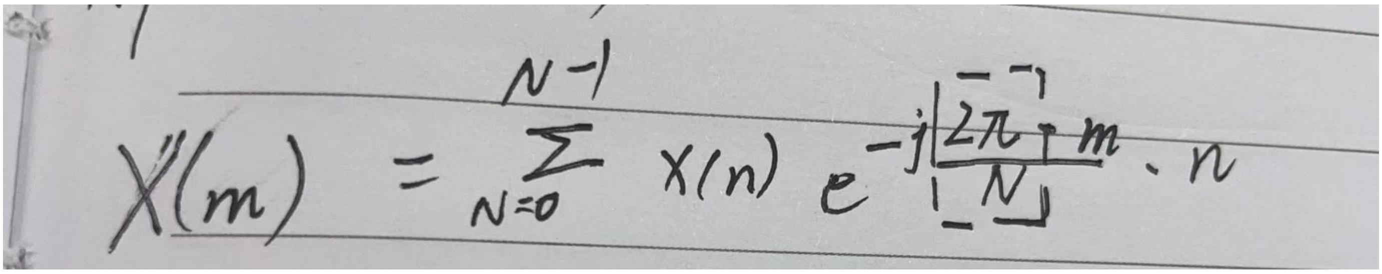
1.DFT的定义

傅里叶变换的定义如下:

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\cdot e^{-j2\pi ft}$$

离散傅里叶变换的定义来源于傅里叶变换:

$$X(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j2\pi mn/N}$$



> 其中N为时域离散信号的点数，
>
> n为时域离散信号的编号（取值范围为0~N-1），
>
> m为频域信号的编号（取值范围为0~N-1），
>
> 频域信号的点数也为N。

因此离散傅里叶变换的输入为N个离散的点（输入时域信号），输出为N个离散的点（输出频域信号，频域信号的每个点都用一个复数表示）。

根据欧拉公式:

$$e^{-jw}=cos(w)-jsin(w)$$

离散傅里叶变换可以写成如下形式:

$$X(m)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot[cos(2\pi mn/N)-j\cdot sin(2\pi mn/N)]$$

我们知道，复指数信号不是实信号，它在现实中是不存在的，因为它带有虚部 i。

那如何用复指数信号合成实信号呢?

答案很简单：只要两个复数共轭就好，实部相加，虚部相抵。也就是欧拉公式：

$$8.e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta, e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$$

$$9.\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

所以我们在用傅里叶级数分析信号的时候，频谱绝对是对称的，用很多对指数相反的复指数信号，就可以合成实信号，也就是说：有 k，则必然有 - k，否则无法合成实信号。

eg：如果采样到一个实数做完FFT之后会在两个地方有峰值，我们雷达在使用的时候只取其中一半fft结果，复数做完fft只有一个峰值。

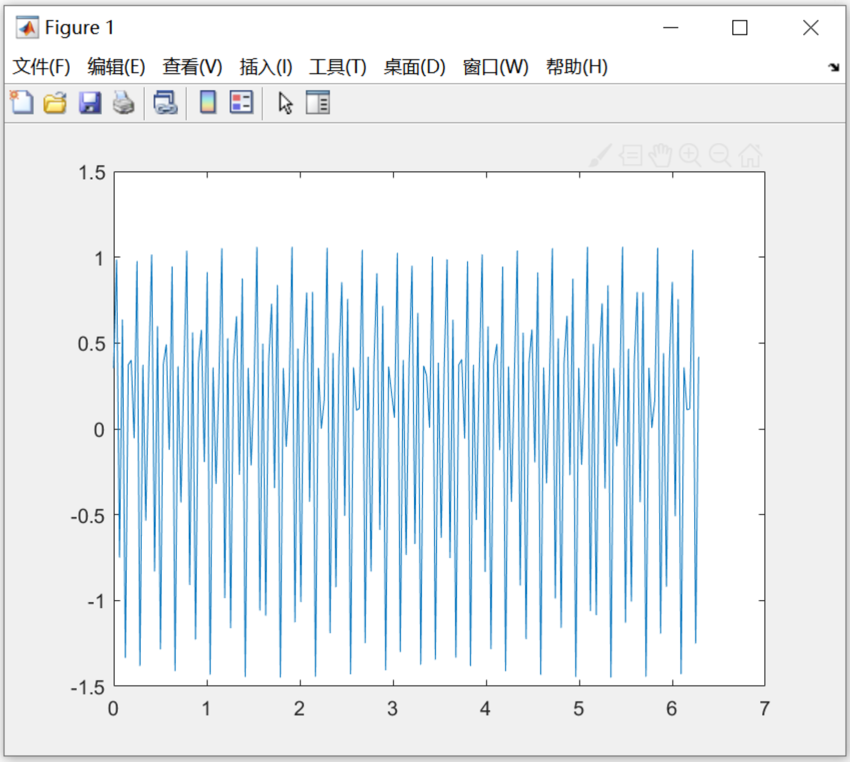
综上，出现负频率的根本原因就是傅里叶级数（变换）的最小单位是复指数信号，如果用傅里叶级数的另一种形式，把信号表示为一系列正余弦信号的组合，就不存在负频率了。

2.DFT的实例分析

假设时域的连续信号为,如下：即1000Hz和2000Hz两个正弦信号的叠加。来看看不同采样过程得到的DFT（FFT）结果。

> 它含有
>
> ①0V 的直流分量（注：信号的直流分量就是信号的平均值），
>
> ②频率为 1000Hz、相位为 0度、幅度为1V 的交流信号，
>
> 以及一个
>
> ③频率为 2000Hz、相位为 3*pi\4度、幅度为 0.5V 的交流信号。
>
> 用数学表达式就是如下：

$$x(t)=sin(2\pi\cdot 1000\cdot t)+0.5sin(2\pi\cdot 2000\cdot t+3\pi/4)$$

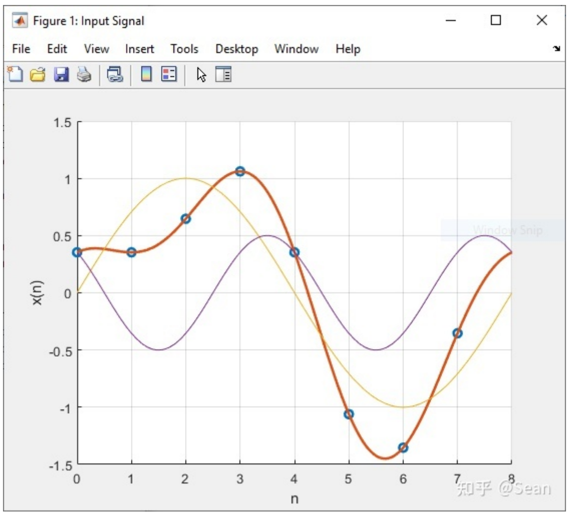


我们以fs=8000HZ的采样频率对x(t)信号进行采样采8个点，由于采样频率为8000HZ因此采样周期ts=1/8000s,采样0.001s。因此离散信号为：

$$x(n) = sin(2\pi \cdot 1000 \cdot n \cdot ts) + 0.5sin(2\pi \cdot 2000 \cdot n \cdot ts + 3\pi/4)$$

$$x(n) = sin(2\pi \cdot n/8) + 0.5sin(2\pi \cdot 2 \cdot n/8 + 3\pi/4)$$

可以得到的离散信号为：x(0)=0.3535, x(1)=0.3535, x(2)=0.6464, x(3)=1.0607, x(4)=0.3535, x(5)=-1.0607, x(6)=-1.3535, x(7)=-0.3535，，，，x(800)=如下图所示。



假设采样点为n=0,1,2,3,4,5,6,7，，，800

n-1 = fs * t

在 第n点的频率分量得频率为

2pi×Fn=2pi*(n-1)Fs/N

Fn=(n-1)*Fs/N

1000×800/8000=100 2000×800/8000=200

从matlab-FFT模值图上的结果我们可以看出峰值就是出现在100和200这两个x（n）上，与上面的计算结果实相符的

视角一：计算DFT的过程中，将正/余弦表达式中的n作为自变量.

根据上述DFT计算欧拉公式，各个频率成分的计算方法如下所示：

$$X(m) = \sum_{0}^{7} x(n) \cdot [cos(2\pi \cdot m \cdot n/8) - j \cdot sin(2\pi \cdot m \cdot n/8)]$$

计算X(i)的实部的过程是使用x(n)信号中的8个点，与m=i时的$cos(2\pi \cdot i \cdot n/8)$ 信号中的8个点做点积；

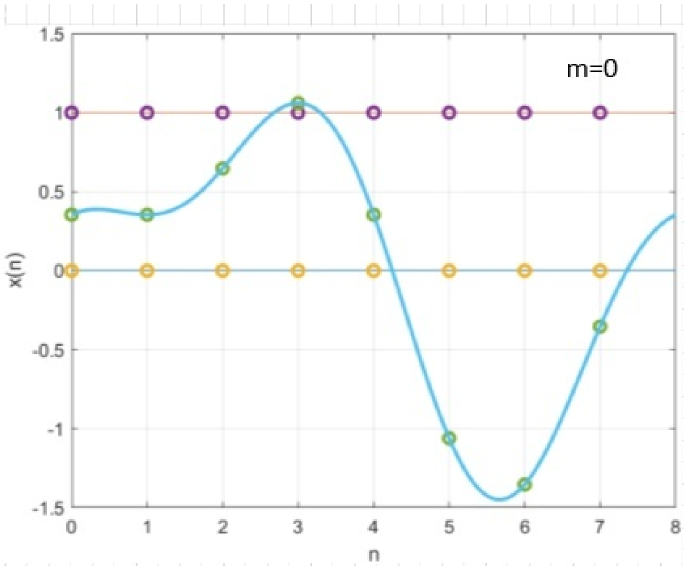
计算X(i)的虚部的过程是使用x(n)信号中的8个点，与m=i时的 $cos(2\pi \cdot i \cdot n/8)$信号中的8个点做点积；

最终DFT的结果为：

X(0)=0.0-j0.0，X(1)=0.0-j4.0，X(2)=1.414+j1.414，X(3)=0.0+j0.0，

X(4)=0.0-j0.0，X(5)=0.0-j0.0，X(6)=1.414-j1.414，X(7)=0.0+j4.0,,,

，DFT的结果X(m)代表的是频率为Fn=(n-1)*Fs/N 的频率“分量”， X(m) 的模与辐角表征了Fn的频率“分量”的幅度与相位。

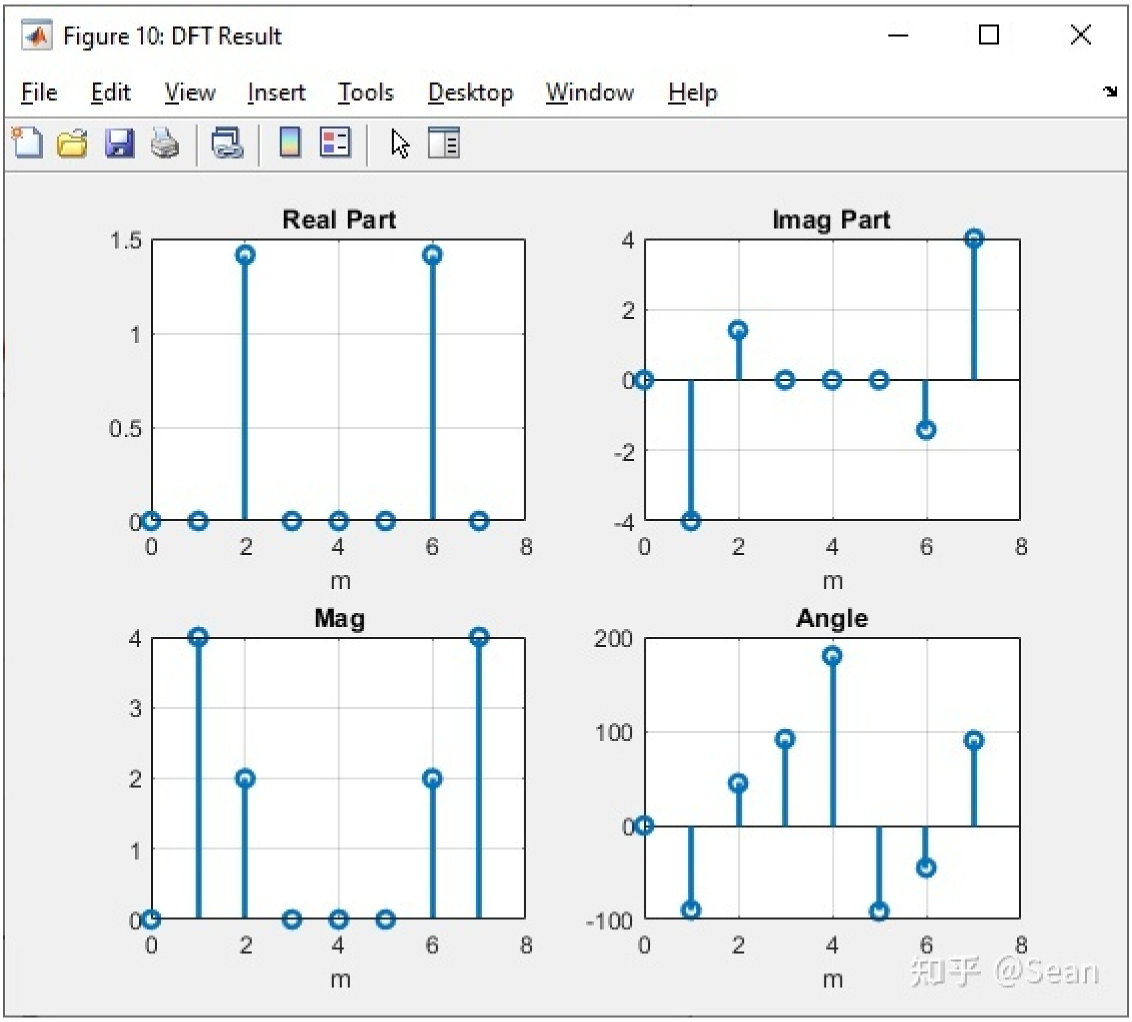


$$X(0) = \sum_{n=0}^{7} x(n) \cdot [\cos(2\pi \cdot 0 \cdot n/8) - j \cdot \sin(2\pi \cdot 0 \cdot n/8)]$$

$$\begin{aligned} X(0) = {} & 0.3535*1 - j(0.3535*0) \\ & +0.3535*1 - j(0.3535*0) \\ & +0.6464*1 - j(0.6464*0) \\ & +1.0607*1 - j(1.0607*0) \\ & +0.3535*1 - j(0.3535*0) \\ & -1.0607*1 - j(-1.0607*0) \\ & -1.3535*1 - j(-1.3535*0) \\ & -0.3535*1 - j(-0.3535*0) \\ & = 0.0 - j0.0 \end{aligned}$$

3.DFT结果

分别画出频域信号的Real Part（实部），Imag Part（虚部），Mag（幅值），Angle（相位角），如下图所示。



4.DFT的共轭对称性

首先我们可以发现DFT结果的Mag存在如下规律：

Mag(5)=Mag(3)，Mag(6)=Mag(2)，Mag(7)=Mag(1)；

观察DFT结果的Real Part存在如下规律：

Re Part(5)=Re Part(3)，Re Part(6)=Re Part(2)，Re Part(7)=Re Part(1)；

观察DFT结果的Imag Part存在如下规律：

Im Part(5)=-Im Part(3)，Im Part(6)=-Im Part(2)，Im Part(7)=-Im Part(1)；

这三条规律引出了DFT的一个重要性质：共轭对称性，即X(m)=X*(N-m)。

由于DFT的共轭对称性，因此DFT结果中的后N/2-1个元素是冗余的，因此我们也可以说DFT的输出是N/2+1个虚数。这解释了当输入信号有N个点，一些第三方工具计算的DFT的结果是N+2个点，N+2个点对应了N/2+1个虚数（一个虚数包含一个实部一个虚部）。