参考如下

线性系统近似线性化

6_扩展卡尔曼滤波器_Extended Kalman Filter

扩展卡尔曼滤波（EKF）算法详细推导及仿真（Matlab）

一、概念：

（1）扩展卡尔曼滤波算法

解决非线性状态估计问题最为直接的一种处理方法，尽管EKF不是最精确的"最优"滤波器，但在过去的几十年成功地应用到许多非线性系统中。所以在学习非线性滤波问题时应该先从EKF开始。EKF算法是将非线性函数进行泰勒展开，然后省略高阶项，保留展开项的一阶项，以此来实现非线性函数线性化，最后通过卡尔曼滤波算法近似计算系统的状态估计值和方差估计值。

（2）数学上的线性化（linearization）

是找函数在特定点的线性近似，也就是函数在该点的一阶泰勒级数。在动力系统研究中，线性化是分析非线性微分方程系统或是非线性离散系统，在特定平衡点局部稳定性的一种方法。

严格的讲，实际物理原件和系统都是非线性的。叠加原理不适应于非线性系统，这给求解非线性系统带来了不便，因此需要对所研究的系统做线性化处理。

线性化是某一点附近的线性化，不是全局的线性化.

泰勒级数展开是将一个在$x=x_0$处具有n阶导数的函数f(x)，利用关于$(x-x_0)$的n次多项式逼近函数值的方法。

泰勒级数（Taylor Series），若函数f(x)在包含a的某个闭区间[b,c]上具有n阶导数，且在开区间(b,c)上具有(n+1)阶导数，则对闭区间[b,c]上任意一点x，成立下式：在x=a 点处进行线性化:

$$f(x)=f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

> 其中$f^{(n)}(a)$ 表示f(x)的n阶导数，等号后的多项式称为函数f(x)在a处的泰勒展开式，剩余的Rn(x)是泰勒公式的余项，是$(x-a)^n$的高阶无穷小。

> 余项就是展开式与原函数的误差，余项越少，误差就越小。在一定允许的范围内，余项可以忽略不计，即所谓的无穷小。
>
> 泰勒公式的余项Rn(x)可以写成以下几种不同的形式：
>
> 1、佩亚诺(Peano）余项：$R_n(x) = o[(x - x_0)^n]$
>
> 这里只需要n阶导数存在

由于高 阶无穷小，一般来说，EKF在对非线性函数做泰勒展开时，实际应用只取到一阶导，同样也能有较好的结果。取一阶导时，状态转移方程和观测方程就近似为线性方程，高斯分布的变量经过线性变换之后仍然是高斯分布，这样就能够延用标准卡尔曼滤波的框架。

如果 x-a无限趋近于0，$(x-a)^2$就会无穷小，故第三项可以忽略不记，即：

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1$$

> - 多变量系统的线性化：
>
> 假设：
>
> $$\begin{cases} \dot{x} = f([x_1, x_2], u) \\ y = g([x_1, x_2], u) \end{cases}$$
>
>
>
> 经过泰勒展开转化为线性系统后的状态空间表达式可以是：
>
> $$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\hat{u} \\ \hat{y} = C\hat{x} + D\hat{u} \end{cases}$$

二、EKF算法详细推导：

扩展卡尔曼滤波EKF的状态转移方程和观测方程为：

考虑高斯白噪声的非线性系统：

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) + w_k \\ z_k = h(x_k) + v_k \end{cases}$$

x_k为状态向量，z_k量测向量，$f(\cdot)$和$h(\cdot)$分别为系统非线性状态函数和量测函数w_k和v_k分别是零均值，协方差为Q_k和R_k的不相关高斯白噪声。

Nonlinear system

$$x_t = f(x_{t-1}, u_{t-1}, \omega_{t-1}), \omega_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, Q)$$
$$z_t = h(x_t, v_t), v_t \sim \mathcal{N}(0, R)$$

f and h are both nonlinear function

Note

The nonlinear mapping of a Gaussian distribution is not Gaussian

正态分布的随机变量通过非线性系统后就不再是正态分布的了，所以w一定要用泰勒级数多变量展开。又因为是对u是控制量，是已知的不用展开

线性化：

> 选择初始点的最佳方法是最真实值。然而由于系统误差，我们没有这个。我们从后验估计中最后一个时间步长的$\overline{x}_{t-1}$线性化了系统

Taylor Series 泰勒级数：高维度用到雅可比矩阵

Taylor Series

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0)$$

①预估

利用泰勒展开式对上式在上一次的估计值处$\overline{x}_{t-1}$展开得（多变量使用泰勒级数）

$$x_t = f(\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}, \omega_{t-1}) + A_t(x_t - \hat{x}_{t-1}) + W_t\omega_{t-1}$$

Assuming $\omega_{t-1} = 0$, we get $\tilde{x}_t = f(\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}, 0)$

$$A_t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}}$$

$$W_t = \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)_{\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}}$$

假设我们已知 k时刻状态估计值 $\hat{x}_{k|k}$和估计方差 $P_{k|k}$，

我们将非线性函数 $f(x_k)$在$\hat{x}_{k|k}$处进行一阶泰勒展开可 得：

$$f(x_k) = f(\hat{x}_{k|k}) + \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{x_k = \hat{x}_{k|k}} (x_k - \hat{x}_{k|k}) + o(x_k - \hat{x}_{k|k})$$

其中 $o(x_k - \hat{x}_{k|k})$为高阶项，我们定义 $\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{x_k = \hat{x}_{k|k}} = F_k$，忽略高阶项，状态方程 可以化简为：

$$x_{k+1} = f(\hat{x}_{k|k}) + F_k(x_k - \hat{x}_{k|k}) + w_k$$

一步状态预测： $\hat{x}_{k+1|k} = \mathrm{E}[f(\hat{x}_{k|k}) + F_k(x_k - \hat{x}_{k|k}) + w_k] = f(\hat{x}_{k|k})$

一步预测协方差：

$$\begin{aligned} P_{k+1|k} &= \mathrm{E}[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})^{\mathrm{T}}] \\ &= \mathrm{E}\{[F_k(x_k - \hat{x}_{k|k}) + w_k][F_k(x_k - \hat{x}_{k|k}) + w_k]^{\mathrm{T}}\} \\ &= F_k P_{k|k} F_k^{\mathrm{T}} + \mathrm{Q}_{\mathrm{k}} \end{aligned}$$

②观测

$$z_t = h(\tilde{x}, v_t) + H_t(x_t - \tilde{x}_t) + V_t v_t$$

Linearization at $\tilde{x}_t$

Assuming $v_t = 0$, we get $\tilde{z}_t = h(\tilde{x}_t, 0)$

$$H_t = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{\tilde{x}_t}$$

$$V_t = \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_{\tilde{x}_t}$$

$$\omega_t \sim \mathcal{N}(0, Q)$$
$$W_t \omega_t \sim \mathcal{N}(0, W_t Q W_t^{\mathrm{T}})$$
$$V_t v_t \sim \mathcal{N}(0, V_t R V_t^{\mathrm{T}})$$

预测

$$\hat{x}_t^- = F\hat{x}_{t-1} + Bu_{t-1}$$

$$P_t^- = FP_{t-1}F^T + Q$$

更新

$$K_t = P_t^- H^T \left(HP_t^- H^T + R\right)^{-1}$$

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t^- + K_t(z_t - H\hat{x}_t^-)$$

$$P_t = (I - K_t H)P_t^-$$

↓

Summary

propagation		correction	
prior	$\hat{x}_t^- = f(\hat{x}_{t-1} + u_{t-1}, 0)$	Kalman gain	$K_t = (P_t^- H^\top)(HP_t^- H^\top + V_{t-1}RV_{t-1}^\top)^{-1}$
prior error covariance	$P_t^- = AP_{t-1}A^\top + W_{t-1}QW_{t-1}^\top$	posterior estimation	$\hat{x}_t = \hat{x}_t^- + K_t(z_t - h(\hat{x}_t^-))$
		update error covariance	$P_t = (I - K_t H)P_t^-$

三、EKF的不足

运动及观察模型用泰勒级数的一阶展开近似成线性模型，忽略了高阶项，不可避免的引入线性误差，甚至导致滤波器发散。有如下误差补偿方法：

泰勒近似使得状态预测必然存在误差：

1补偿状态预测中的误差，附加“人为过程噪声”，即通过增大过程噪声协方差来实现这一点。 2扩大状态预测协方差矩阵，用标量加权因子φ>1乘状态预测协方差矩阵 3利用对角矩阵φ=diag(sqrt(φ_i)), φ_i>1 来乘以状态预测协方差矩阵

其实无论增大过程噪声协方差还是状态预测协方差矩阵，都是为了增大kalman增益，即状态预测是不准的，我要减小一步状态预测在状态更新中的权重。

雅克比矩阵（一阶）及海塞矩阵（二阶）计算困难。二阶EKF的性能要好于一阶的，而二阶以上的性能相比于二阶并没有太大的提高，所以超过二阶以上的EKF一般不采用。但二阶EKF的性能虽好，但计算量大，一般情况下不用