

参考:

[搞懂DFT来理解FFT](#)

DFT（离散傅里叶变换）与 FFT（快速傅里叶变换）初识

# 1.DFT的定义

傅里叶变换的定义如下：

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft}$$

离散傅里叶变换的定义来源于傅里叶变换：

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi mn/N}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{K} n}, k = 0, 1, 2, \dots, K - 1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}, k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

其中N为时域离散信号的点数，这里我们还要注意的是N虽然代表了频谱FFT后的点数，如果点数小于了时域的离散点数，那将会舍去时域的点，如果点数大于了时域的点数，那么时域的点数会补零。（这一点，暂时不管，一般来说，默认是点数等于FFT后的点数）

n为时域离散信号的编号（取值范围为0~N-1），x(n) 代表第n个DFT输出序列，即x（0）、x（1）、x（2）、x（3）。。。

m为频域信号的编号（取值范围为0~N-1），X(m) 代表第m个DFT输出序列，即X（0）、X（1）、X（2）、X（3）。。。

频域信号的点数也为N。

这里不同于一般课本上的是， $k$  的取值不再与输入信号  $n$  的长度  $0 \sim N - 1$  相同，而是自己设置。这是为了突出  $k$  的设置，本质上是为了对  $2\pi$  为周期的连续频谱离散化（DFT 是 DTFT 连续频域结果离散化处理后的结果），也即频谱采样。

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

$$W_N^{kn} = e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}, W = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$$

其中， $W$  是需要替换的旋转因子：

因此离散傅里叶变换的输入为  $N$  个离散的点（输入时域信号），输出为  $N$  个离散的点（输出频域信号，频域信号的每个点都用一个复数表示）。

根据欧拉公式：

$$e^{-jw} = \cos(w) - j\sin(w)$$

离散傅里叶变换可以写成如下形式：

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot [\cos(2\pi mn/N) - j \cdot \sin(2\pi mn/N)]$$

我们知道，复指数信号不是实信号，它在现实中是不存在的，因为它带有虚部  $i$ 。

那如何用复指数信号合成实信号呢？

答案很简单：只要两个复数共轭就好，实部相加，虚部相抵。也就是欧拉公式：

$$\begin{aligned} 8. e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta, e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \\ 9. \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

所以我们在用傅里叶级数分析信号的时候，频谱绝对是对称的，用很多对指数相反的复指数信号，就可以合成实信号，也就是说：有  $k$ ，则必然有  $-k$ ，否则无法合成实信号。

eg：如果采样到一个实数做完 FFT 之后会在两个地方有峰值，我们雷达在使用的时候只取其中一半 FFT 结果，复数做完 FFT 只有一个峰值。根据采样定理，FFT 能分辨的最高频率为采样频率的一半，所

以，如果进行N点的fft，实际上有用的点数为n+1点（N为奇数或者偶数的情况下有用的点数均相同）。

综上，出现负频率的根本原因就是傅里叶级数（变换）的最小单位是复指数信号，如果用傅里叶级数的另一种形式，把信号表示为一系列正余弦信号的组合，就不存在负频率了。

## 2.DFT的实例分析

假设时域的连续信号如下：即1000Hz和2000Hz两个正弦信号的叠加。来看看采样过程得到的DFT（FFT）结果。

它含有

①0V 的直流分量（注：信号的直流分量就是信号的平均值），

②频率为 1000Hz、相位为 0度、幅度为1V 的交流信号，

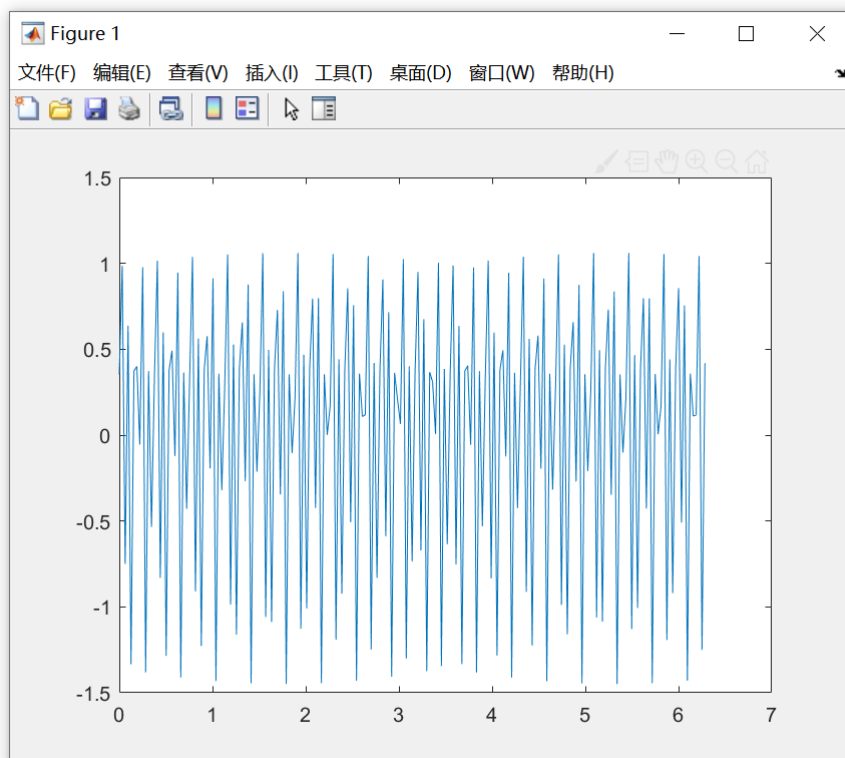
以及一个

③频率为 2000Hz、相位为  $3\pi/4$ 度、幅度为 0.5V 的交流信号。

4.频率为 0Hz 的交流信号。

用数学表达式就是如下：

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + 0.5\sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + 3\pi/4)$$



我们以 $f_s=8000\text{Hz}$ 的采样频率对 $x(t)$ 信号进行采样采256个点(8个点采样点太少, 做不成fft峰值), 由于采样频率为8000Hz因此采样周期  $t_s = 1/8000\text{s}$ , 共采样 $0.032\text{s}$ 。因此离散信号为:

$$x(n) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot n \cdot t_s) + 0.5\sin(2\pi \cdot 2000 \cdot n \cdot t_s + 3\pi/4)$$

$$x(n) = \sin(2\pi \cdot n/8) + 0.5\sin(2\pi \cdot 2 \cdot n/8 + 3\pi/4)$$

采样率 (记为 $f_s$ ) : 每秒采样的点数, 单位为Hz

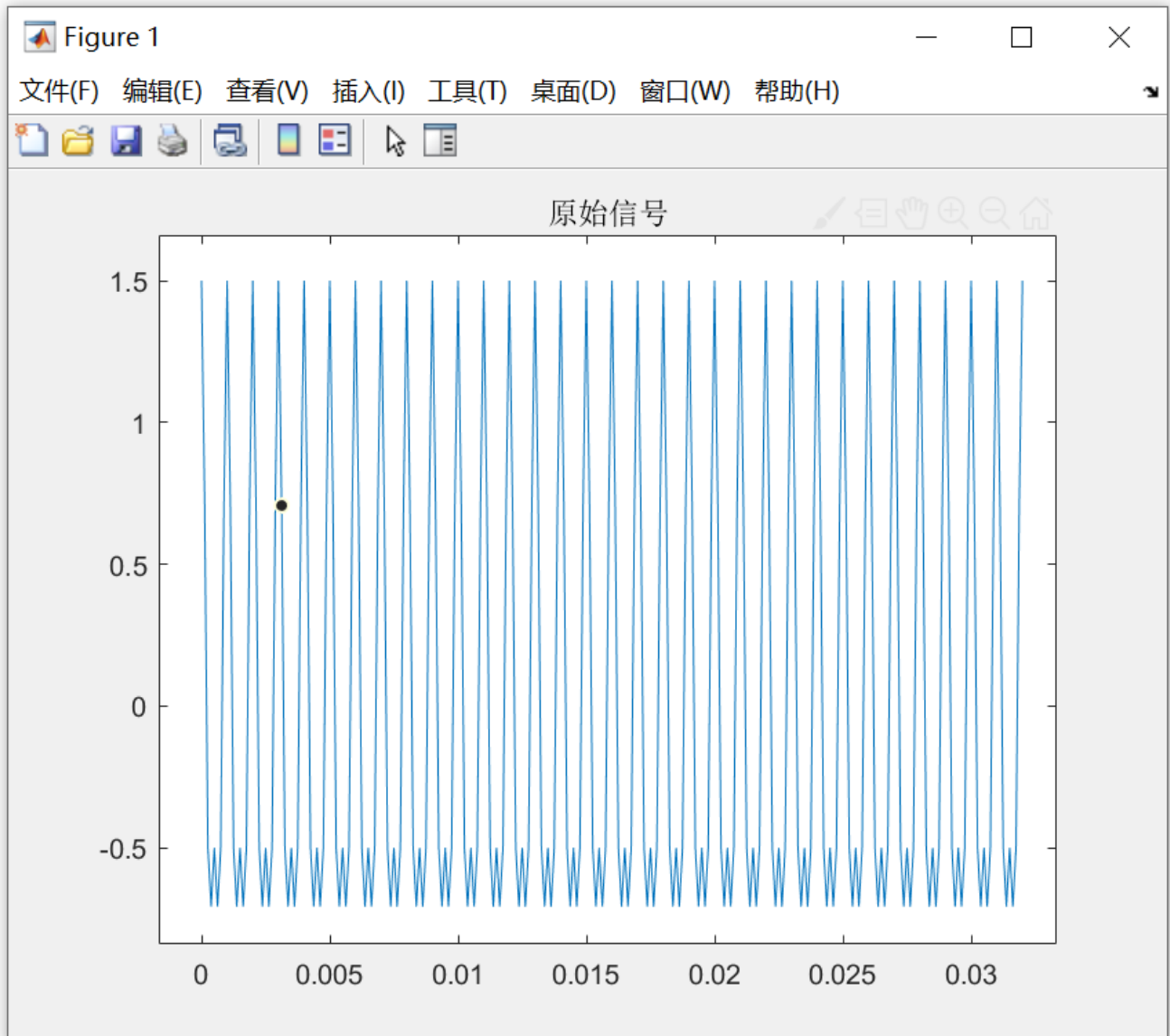
采样间隔 ( $t_s$ ) : 采样间隔为采样率的倒数, 即 $t_s = 1/f_s$ ; 意思就是每采一个点需要多长时间

采样时间 ( $t$ ) : 采样 $N$ 个点需要多长时间, 即 $t = N/f_s$

采样点数( $N$ ):  $N = f_s \cdot t$

频率分辨率( $\Delta f$ ):  $\Delta f = f_s / N$

可以得到的离散信号为:  $x(0)=1.5000$ ,  $x(1)=0.7071$ ,  $x(2)=-0.5000$ ,  $x(3)=-0.7071$ ,  $x(4)=-0.5000$ ,  $x(5)=-0.7071$ ,  $x(6)=-0.5000$ , , , ,  $x(255)= 1.5000$ 如下图所示。



视角一：计算DFT的过程中，将正/余弦表达式中的 $n$ 作为自变量。

根据上述DFT计算欧拉公式，各个频率成分的计算方法如下所示：

$$X(n) = \sum_{m=0}^{255} x(n) \cdot [\cos(2\pi \cdot m \cdot n/8) - j \cdot \sin(2\pi \cdot m \cdot n/8)]$$

for  $i=(0:255)$

计算 $X(i)$ 的实部的过程是使用 $x(n)$ 信号中的255个点，与 $m=i$ 时的 $\cos(2\pi \cdot i \cdot n/8)$ 信号中的8个点做点积和；

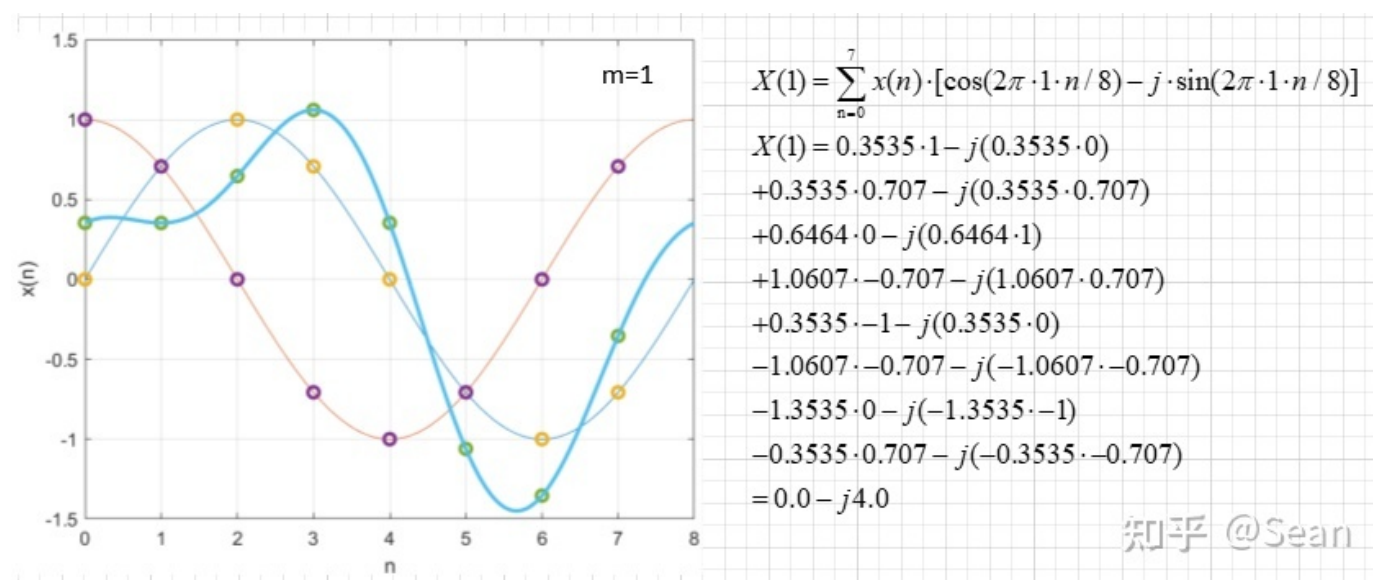
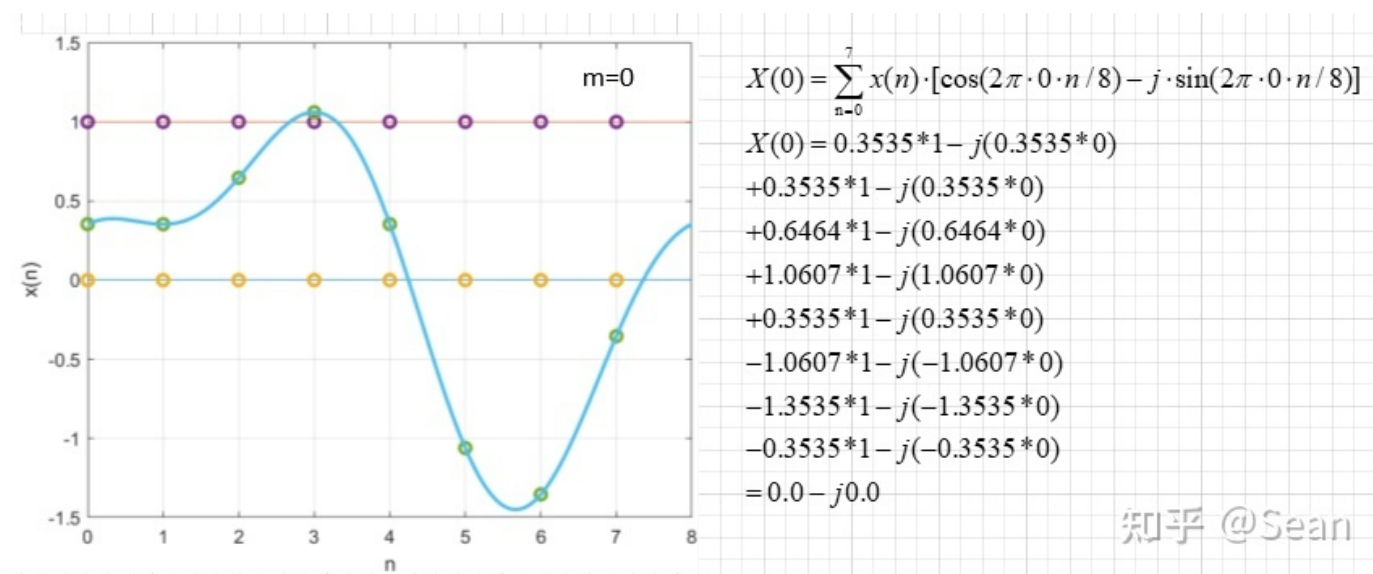
计算 $X(i)$ 的虚部的过程是使用 $x(n)$ 信号中的8个点，与 $m=i$ 时的 $\cos(2\pi \cdot i \cdot n/8)$ 信号中的8个点做点积和；

每个DFT输出项 $X(n)$ 都是所有时间值信号值序列和复杂的正弦波形式 $\cos(\varphi)-j\sin(\varphi)$ 点对点相乘后所有项的累加和。

最终DFT的结果为：

$X(0)=$  ,  $X(1)=$  ,  $X(2)=$  ,  $X(3)=$  ,

$X(4)=$  ,  $X(5)=$  ,  $X(6)=$  ,  $X(7)=$  , ...,  $X(255)=$



## m的含义

通过观察上图。可以发现， $m=1$ 意味着8个点内包含一个周期的正余弦信号，由于实例中的采样周期 $t_s=1/8000s$ ，因此 $m=1$ 对应的正余弦信号的周期为 $1/1000s$ ，因此 $m=1$ 对应的正余弦信号的频率为 $1000Hz$ 。

同理 $m=2$ 对应频率为 $2000Hz$ ； $m=3$ 对应频率为 $3000Hz$ ；...

因此当采样频率为 $f_s$ 时，如果进行的是 $N$ 点的DFT，则得到的频域信号的频率单位为 $f_s/N$ ，频域信号中的第0个点的频率为0HZ，第1个点的频率为 $f_s/N$ ，第 $i$ 个点的频率为 $i \cdot f_s/N$ 。

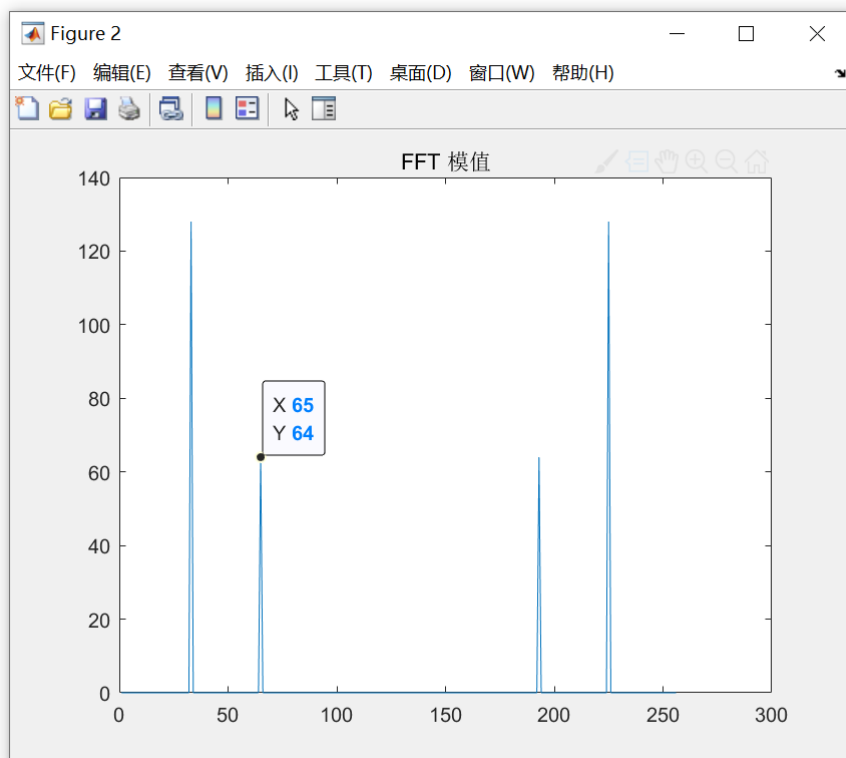
DFT的结果 $X(n)$ 代表的是频率为 $F_n = k \cdot f_s/N$  的频率“分量”， $X(n)$  的模与辐角代表了 $F_n$ 的频率“分量”的幅度与相位。

采样点为 $n=0,1,2,3,4,5,6,7,8, \dots, 255$  有  $n = f_s \times t$

在 第 $k$ 点的频率分量得频率为  $F_n = k \cdot F_s/N$

$F_n$ 为对应的信号的频率

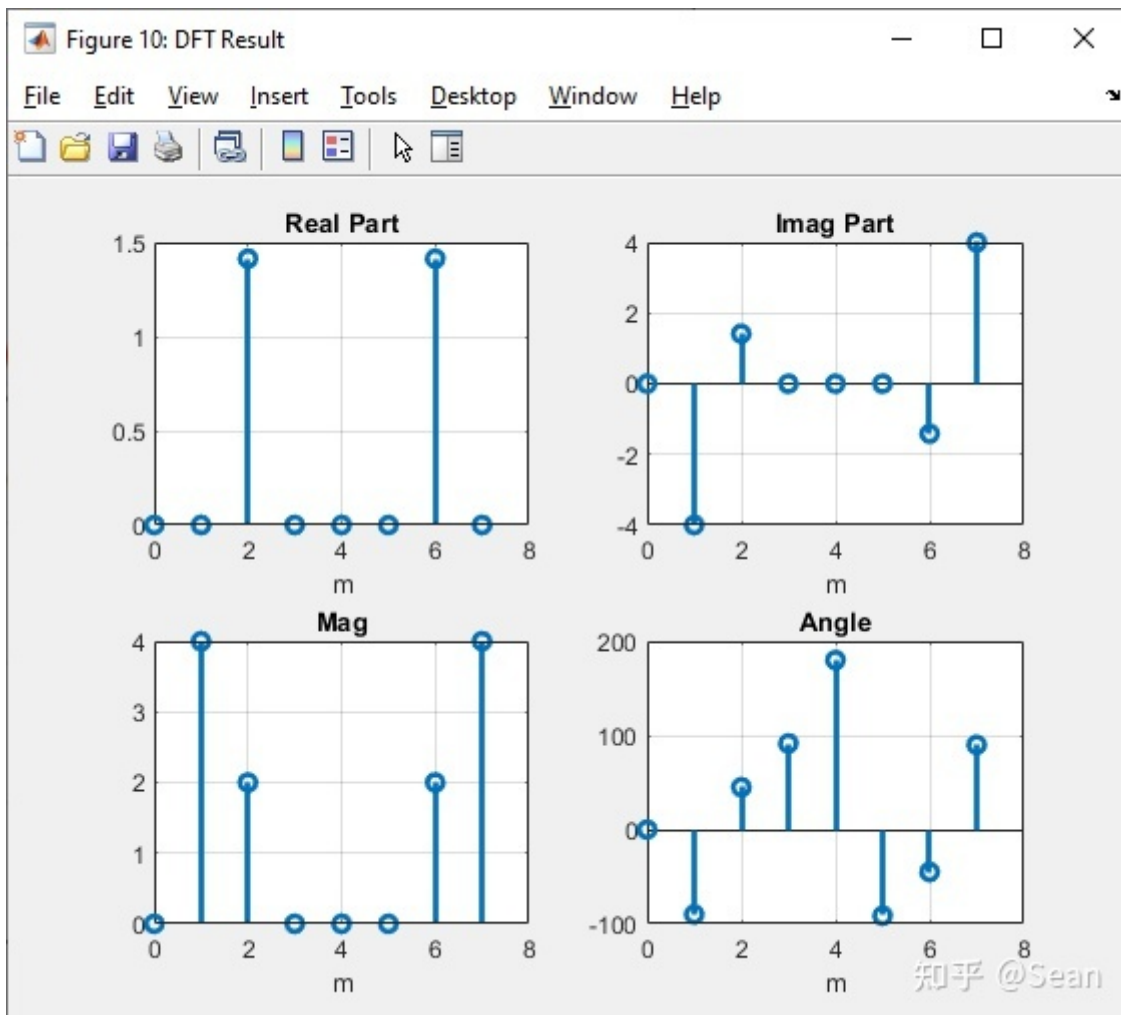
$k$ :  $1000 \times 256/8000=32$   $2000 \times 256/8000=64$



从matlab-FFT模值图上的结果我们可以看出峰值就是出现在33和65这两个 $x(n)$ 上，与上面的计算结果实相符的

### 3.DFT结果

分别画出频域信号的Real Part（实部），Imag Part（虚部），Mag（幅值），Angle（相位角），如下图所示。



## 4.DFT的共轭对称性

首先我们可以发现DFT结果的Mag存在如下规律：

$$\text{Mag}(5)=\text{Mag}(3), \text{Mag}(6)=\text{Mag}(2), \text{Mag}(7)=\text{Mag}(1);$$

观察DFT结果的Real Part存在如下规律：

$$\text{Re Part}(5)=\text{Re Part}(3), \text{Re Part}(6)=\text{Re Part}(2), \text{Re Part}(7)=\text{Re Part}(1);$$

观察DFT结果的Imag Part存在如下规律：

$$\text{Im Part}(5)=-\text{Im Part}(3), \text{Im Part}(6)=-\text{Im Part}(2), \text{Im Part}(7)=-\text{Im Part}(1);$$

这三条规律引出了DFT的一个重要性质：共轭对称性，即 $X(m)=X^*(N-m)$ 。

由于DFT的共轭对称性，因此DFT结果中的后 $N/2-1$ 个元素是冗余的，因此我们也可以说DFT的输出是 $N/2+1$ 个虚数。这解释了当输入信号有 $N$ 个点，一些第三方工具计算的DFT的结果是 $N+2$ 个点， $N+2$ 个点对应了 $N/2+1$ 个虚数（一个虚数包含一个实部一个虚部）。