


Nova-studynotes / Tracking\_radar\_targets\_with\_multiple\_reflection\_points中文版 / Tracking\_radar\_targets\_with\_multiple\_reflection\_points中文版.md

 cuixh11 7.28 

History

1 contributor

321 lines (169 sloc) | 12.8 KB

# 参考如下：

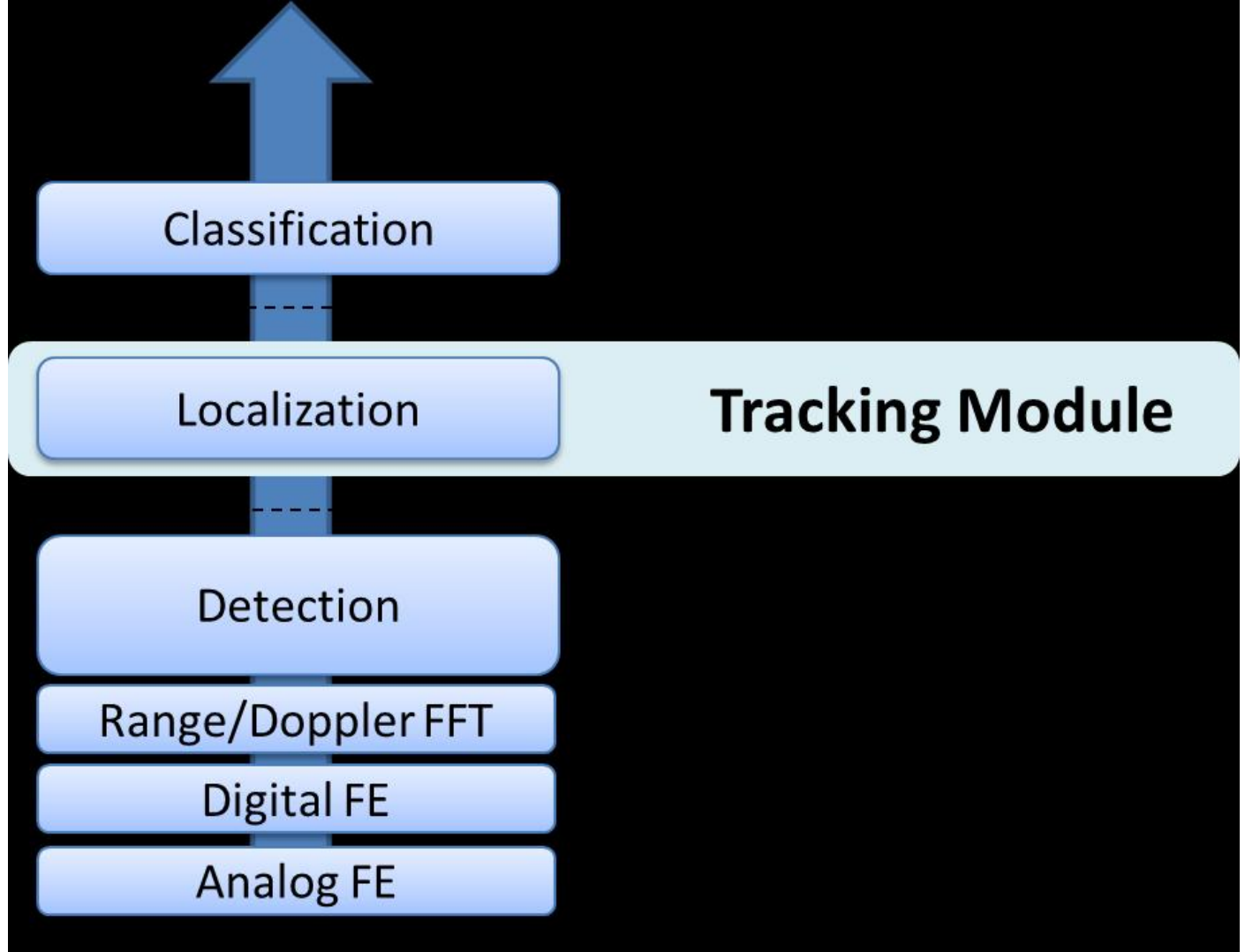
- Tracking\_radar\_targets\_with\_multiple\_reflection\_points
- 中文版Tracking\_radar\_targets\_with\_multiple\_reflection\_points
- Kalman滤波算法(线性)学习.pdf

## 1.Introduction

### 1.1. Tracking Module

在“雷达处理”栈中，

- tracking 算法是localization 处理层的具体动作。
- Tracker将在Detection 层输入上工作，并向classification 层提供localization 信息



利用 high resolution Radar sensors 高分辨率雷达，detection 层能够感应现实 targets 的多次反射，从而提供丰富的测量 vectors 矢量集（在某些情况下，每帧数千个矢量），称为点云 Point Cloud。每个测量向量代表一个 reflection 反射点，具有 Range 范围，Azimuth 方位角和 Radial velocity 径向速度。每个测量向量是可靠性信息。

Tracking 层将输入 point cloud 点云数据，执行 target localization 目标定位，并将结果（目标列表 a Target List）报告给 classification 层。因此，tracker 跟踪器的输出是一组具有某些属性（如 position, velocity, physical dimensions, point density, 位置，速度，物理尺寸，点密度和其他特征）的可跟踪对象，分类器可以使用这些属性来进行识别决策。

## 1.2. Radar Geometry

下图显示了，在时刻  $n$  时，的 single reflection 单个反射点。现实生活中的雷达目标由多个反射点表示。每个点都由 range, angle, and radial velocity (range rate) 范围，角度和径向速度（范围率）表示：

Range  $r$ ,  $R_{min} < r < R_{max}$       Azimuth angle  $\varphi$ ,  $-\phi_{max} < \varphi < +\phi_{max}$       Radial velocity  $r$

- Range  $r$ ,  $R_{min} < r < R_{max}$
- Azimuth angle  $\varphi$ ,  $-\varphi_{max} < \varphi < +\varphi_{max}$
- Radial velocity  $\dot{r}$

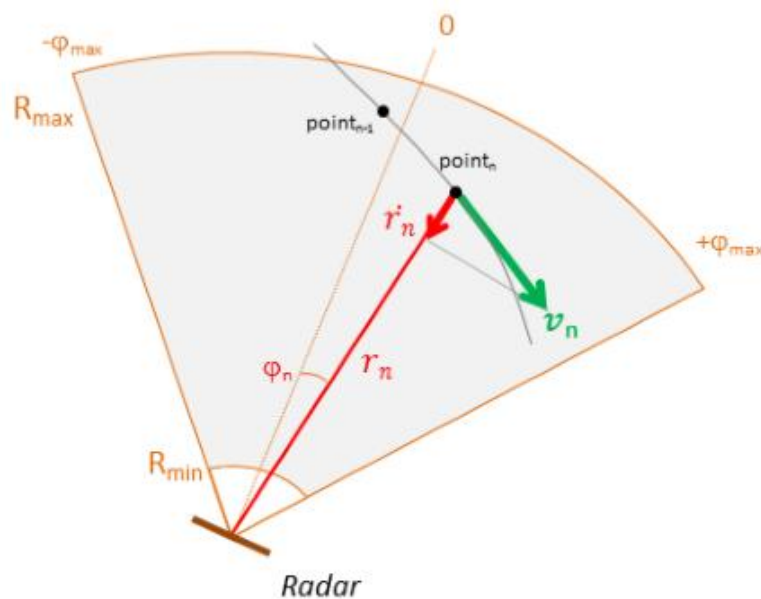


Figure 2. Radar Geometry in 2D

### 1.3. Choice of Tracking Coordinate System

为了方便目标运动推测target motion extrapolation，我们选择在 Cartesian coordinates笛卡尔系中进行跟踪。这允许简单的 Newtonian linear prediction 牛顿模型。

我们选择将测量输入保持在 polar 极坐标中以避免误差耦合coupling。我们将使用EKF来跟踪状态和测量向量之间的相关性。

Tracking 可以在2D或3D笛卡尔空间中进行。对于每个空间，我们使用CV恒定速度模型或CA恒定加速度模型。（constant velocity model or constant acceleration model）

### 1.4 2D Space Geometry

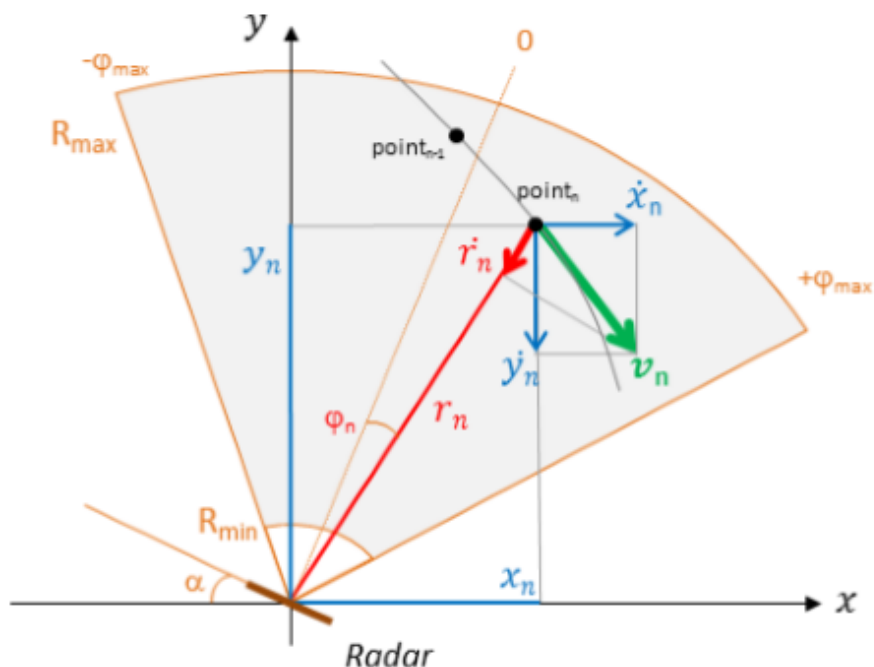


Figure 3. Tracking in 2D

<https://blog.csdn.net/djfkj52>

角位置坐标转换为笛卡尔坐标使用

$$x = r \cos (\pi/2 - (\alpha + \varphi)) = r \sin (\alpha + \varphi)$$

$$y = r \sin (\pi/2 - (\alpha + \varphi)) = r \cos (\alpha + \varphi)$$

目的是使用距离，角度和多普勒（径向速度） range, angle, and Doppler (radial velocity) 的测量(带有噪声)来跟踪对象的位置

## 1.5. 2D Space, Constant Velocity Model

### 我们使用卡尔曼滤波器来提取位置估计

卡尔曼滤波器在时刻n的状态定义为

$$s(n) = F s(n-1) + w(n)$$

其中，状态向量 $s(n)$  定义为笛卡尔坐标，匀速直线控制量为0无需控制矩阵

$x(n)$ 为点的横坐标

$y(n)$ 为点的纵坐标

$\dot{x}(n)$ 为点的横坐标速度分量

$\dot{y}(n)$ 为点的纵坐标速度分量

$\Delta t$ 为采样时间

$$s(n) \triangleq [x(n) \quad y(n) \quad \dot{x}(n) \quad \dot{y}(n)]^T,$$

F 预估转换矩阵为

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$w(n)$  是具有协方差矩阵  $Q(n)$  的大小为  $4 \times 4$  的过程噪声的向量

预测

$$\hat{s}(n) = F \hat{s}(n-1) + B \cdot v$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \\ \dot{x}(n) \\ \dot{y}(n) \end{bmatrix} + B \cdot v$$

$$= \begin{cases} + x(n) & + \Delta T \cdot \dot{x}(n) \\ + y(n) & + \Delta T \cdot \dot{y}(n) \\ + \dot{x}(n) \\ + \dot{y}(n) \end{cases}$$

观测:

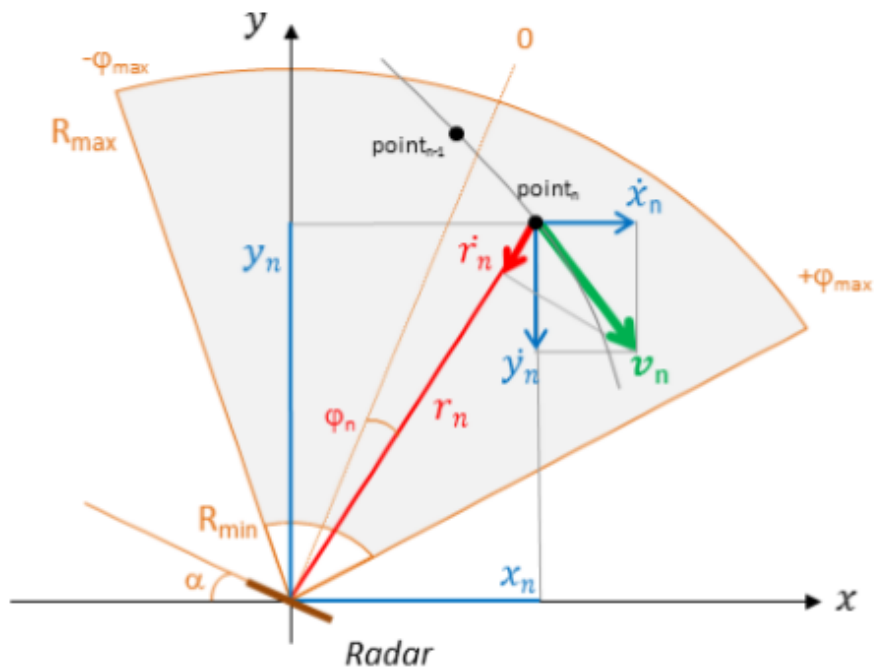


Figure 3. Tracking in 2D

<https://blog.csdn.net/djfkj52>

input 测量矢量 $\mathbf{u}(n)$  包括范围、角度和径向速度

$$\mathbf{u}(n) = [r(n) \quad \varphi(n) \quad \dot{r}(n)]^T$$

卡尔曼滤波器的状态与测量向量之间的关系表示为：

$$\mathbf{u}(n) = \mathbf{H}(\mathbf{s}(n)) + \mathbf{v}(n)$$

H预估转换矩阵为

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}(n)) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan^{-1}(x, y) - \alpha \\ \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{bmatrix}$$

其中，函数 $\tan^{-1}(x, y)$ 被定义为

$$\tan^{-1}(x, y) \triangleq \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right), & y > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & y = 0, \\ \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \pi, & y < 0. \end{cases}$$

$\mathbf{v}(n)$  是具有协方差矩阵 $\mathbf{R}(n)$  的大小为 $3 \times 3$ 测量噪声的向量,

## EKF

观测：（预估不用EKF）

在上述公式中，观测向量 $\mathbf{u}(n)$  通过非线性关系与估计状态向量 $\mathbf{s}(n)$  有非线性关系。因此，我们使用扩展卡尔曼滤波器(EKF)，它通过只保留 $H$ 的Taylor级数展开式中的第一项，简化了 $\mathbf{u}(n)$  和 $\mathbf{s}(n)$  之间的关系

$$\mathbf{u}(n) = \mathbf{H}(\mathbf{s}_{apr}(n)) + \mathbf{J}_H(\mathbf{s}_{apr}(n)) * [\mathbf{s}(n) - \mathbf{s}_{apr}(n)] + \mathbf{v}(n)$$

$\mathbf{s}_{apr}(n)$ 是先验估计(先验)基于 $n-1$ 次测量的状态向量

$$\mathbf{J}_H(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial r}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{y}} \end{bmatrix}.$$

计算偏导数（见下文附录）

$$\mathbf{J}_H(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & 0 \\ \frac{y}{x^2+y^2} & -\frac{x}{x^2+y^2} & 0 & 0 \\ \frac{y(\dot{x}y-\dot{y}x)}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{x(\dot{y}x-\dot{x}y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{bmatrix}$$

## 1.6. 2D Space, Constant Acceleration Model

卡尔曼滤波器在时刻 $n$ 的状态定义为

$$\mathbf{s}(n) = \mathbf{F}\mathbf{s}(n-1) + \mathbf{w}(n)$$

$$\mathbf{s}(n) = [x(n) \quad y(n) \quad \dot{x}(n) \quad \dot{y}(n) \quad \ddot{x}(n) \quad \ddot{y}(n)],$$

F预估转换矩阵为

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 & 0.5T^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T & 0 & 0.5T^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$w(n)$  是具有协方差矩阵  $Q(n)$  的大小为  $6 \times 6$  的过程噪声的向量

**观测：**

input 测量矢量  $u(n)$  包括范围、角度和径向速度

$$u(n) = [r(n) \quad \varphi(n) \quad \dot{r}(n)]^T$$

卡尔曼滤波器的状态与测量向量之间的关系表示为：

$$u(n) = H(s(n)) + v(n)$$

H为预估的极坐标转换矩阵为

$$H(s(n)) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan^{-1}(x, y) - \alpha \\ \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{bmatrix},$$

EKF

观测：（TI本案例状态方程一般是线性的，不用展开，先转换成极坐标H）

在上述公式中，观测向量  $u(n)$  通过非线性关系与估计状态向量  $s(n)$  有非线性关系。因此，我们使用扩展卡尔曼滤波器(EKF)，它通过只保留  $H$  的Taylor级数展开式中的第一项，简化了  $u(n)$  和  $s(n)$  之间的关系

$$u(n) = H(s_{apr}(n)) + J_H(s_{apr}(n)) * [s(n) - s_{apr}(n)] + v(n)$$

$s_{apr}(n)$ 是先验估计(先验)基于  $n-1$  次测量的状态向量

$$J_H(s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial r}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial r}{\partial \ddot{x}} & \frac{\partial r}{\partial \ddot{y}} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \varphi}{\partial \ddot{x}} & \frac{\partial \varphi}{\partial \ddot{y}} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \ddot{x}} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \ddot{y}} \end{bmatrix}$$



$$J_H(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{y}{x^2+y^2} & -\frac{x}{x^2+y^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{y(\dot{x}y-\dot{y}x)}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{x(\dot{y}x-\dot{x}y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 1.7. 3D Space, Geometry

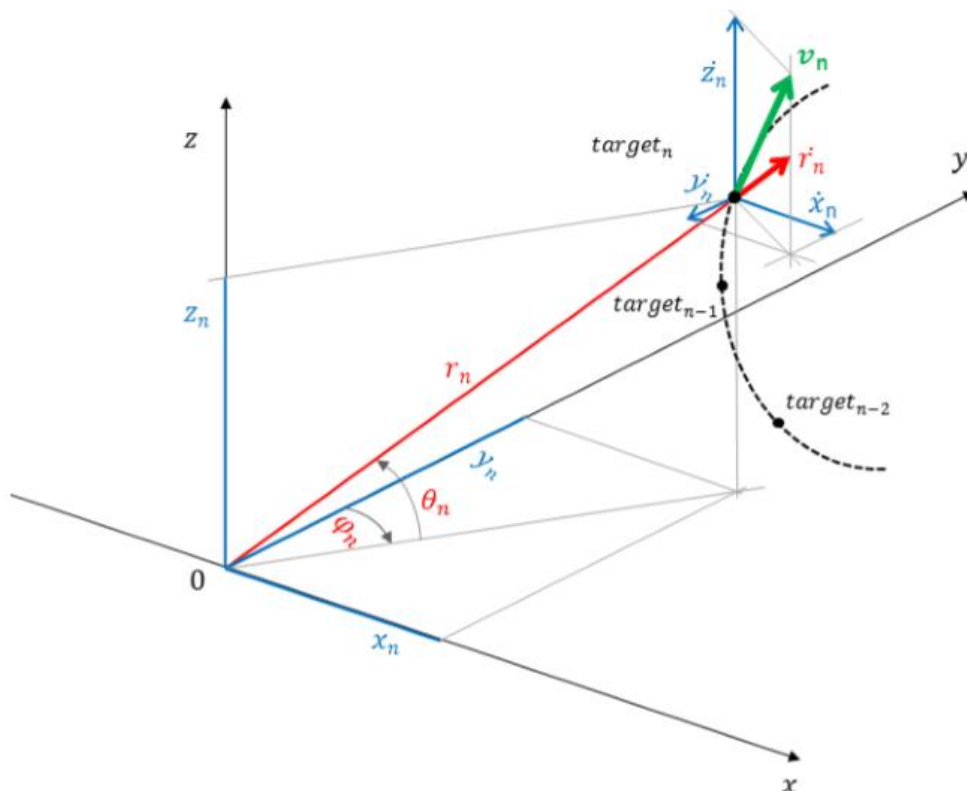


Figure 4. Tracking in 3D

<https://blog.csdn.net/djfkj52>

传感器位于原点。目标以速度向量移动。测量矢量包括距离、方位角，俯仰角和径向速度

$$\mathbf{u}(n) = [r(n) \quad \varphi(n) \quad \theta(n) \quad \dot{r}(n)]^T$$

笛卡尔坐标中的状态向量将用于恒速模型，

$$\mathbf{s}_{3DV}(n) \triangleq [x(n) \quad y(n) \quad z(n) \quad \dot{x}(n) \quad \dot{y}(n) \quad \dot{z}(n)]^T \quad (1-20)$$

恒加速度模型，

$$\mathbf{s}_{3DA}(n) \triangleq [x(n) \quad y(n) \quad z(n) \quad \dot{x}(n) \quad \dot{y}(n) \quad \dot{z}(n) \quad \ddot{x}(n) \quad \ddot{y}(n) \quad \ddot{z}(n)]^T \quad (1-21)$$

## 1.8. 3D Space, Constant Velocity Model (3DV) and Constant Acceleration (3DA) models

卡尔曼滤波器在时刻n的状态定义为

$$\mathbf{s}(n) = \mathbf{F}\mathbf{s}(n-1) + \mathbf{w}(n)$$

F预估转换矩阵为

$$\mathbf{F}_{3DV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

or

$$\mathbf{F}_{3DA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & 0.5T^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & 0.5T^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & 0.5T^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

观测:

input 测量矢量 $\mathbf{u}(n)$  包括范围、角度和径向速度

$$\mathbf{u}(n) = [r(n) \quad \varphi(n) \quad \theta(n) \quad \dot{r}(n)]^T$$

卡尔曼滤波器的状态与测量向量之间的关系表示为:

$$\mathbf{u}(n) = \mathbf{H}(\mathbf{s}(n)) + \mathbf{v}(n)$$

H为预估的极坐标转换矩阵为

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}(n)) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan^{-1}(x, y) \\ \tan^{-1}\left(z, \sqrt{x^2 + y^2}\right) \\ \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{bmatrix},$$

EKF

观测：（TI本案例状态方程一般是线性的，不用展开，先转换成极坐标H）

在上述公式中，观测向量 $\mathbf{u}(n)$  通过非线性关系与估计状态向量 $\mathbf{s}(n)$  有非线性关系。因此，我们使用扩展卡尔曼滤波器(EKF)，它通过只保留 $\mathbf{H}$ 的Taylor级数展开式中的第一项，简化了 $\mathbf{u}(n)$  和 $\mathbf{s}(n)$  之间的关系

$$\mathbf{u}(n) = \mathbf{H}(\mathbf{s}_{apr}(n)) + \mathbf{J}_H(\mathbf{s}_{apr}(n)) * [\mathbf{s}(n) - \mathbf{s}_{apr}(n)] + \mathbf{v}(n)$$

$\mathbf{s}_{apr}(n)$ 是先验估计(先验)基于n-1次测量的状态向量

$$\mathbf{J}_H(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial r}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial r}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial r}{\partial \dot{z}} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{z}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} & \frac{\partial \theta}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \theta}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \theta}{\partial \dot{z}} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{z}} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{J}_H(\mathbf{s}_{3DA}) = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{y}{x^2+y^2} & -\frac{x}{x^2+y^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{x}{r^2} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{y}{r^2} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{y(\dot{x}y - \dot{y}x) + z(\dot{x}z - \dot{z}x)}{r^3} & \frac{x(\dot{y}x - \dot{x}y) + z(\dot{y}z - \dot{z}y)}{r^3} & \frac{x(\dot{z}x - \dot{x}z) + y(\dot{z}y - \dot{y}z)}{r^3} & \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_H(\mathbf{s}_{3DA}) = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{y}{x^2+y^2} & -\frac{x}{x^2+y^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{x}{r^2} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{y}{r^2} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{y(\dot{x}y - \dot{y}x) + z(\dot{x}z - \dot{z}x)}{r^3} & \frac{x(\dot{y}x - \dot{x}y) + z(\dot{y}z - \dot{z}y)}{r^3} & \frac{x(\dot{z}x - \dot{x}z) + y(\dot{z}y - \dot{y}z)}{r^3} & \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.Kalman Filter Operations

## 2.1. Prediction Step

## 2.2. Update Step

## 2.3. Design of Process Noise Matrix

---

$Q(n)$  的选择对于卡尔曼滤波器的行为很重要。如果太小，则滤波器在其预测模型中会过分自信，并且会偏离实际解。如果太大，则滤波器会受到测量噪声的太大影响，并且表现欠佳。

运动系统（可以使用牛顿运动方程式建模的系统）是连续的，即它们的输入和输出可以在任意时间点变化。但是，此处使用的卡尔曼滤波器是离散的。我们定期对系统进行采样。因此，我们必须在上式中找到噪声项的离散表示。这取决于我们对噪声行为做出的假设。我们将考虑两种不同的噪声模型。

### 2.3.1. Continuous White Noise Model 连续白噪声模型

---

假设我们需要对position, velocity, and acceleration位置，速度和加速度进行建模。然后我们可以假设每个离散时间步长的加速度都是恒定的(CA)。当然，系统中存在过程噪声，因此加速度实际上不是恒定的。跟踪的物体会由于外部未建模的力而随着时间改变加速度。在本节中，我们将假设加速度以连续时间零均值白噪声变化(CV)。

由于噪声不断变化，我们将需要integrate 结合以获得针对所选discretization interval 离散化间隔的discrete noise 离散噪声。我们在这里不做证明，但是噪声离散化的方程是

$$Q = \int_0^{\Delta t} F(t)Q_c F^T(t)dt,$$

$Q$ 是连续噪声。

$F(t)Q_c F^T(t)$ 是在 $t$ 时刻基于 $F$ 的连续噪声的投影

我们想知道在离散间隔 $\Delta t$ 中向系统添加了多少噪声，因此我们在间隔 $[0, \Delta t]$ 上对该表达式进行积分。

对于二阶牛顿系统，基本矩阵是

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2/2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

我们现在将连续噪声定义为

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Phi_s$$

$\Phi_s$ 是白噪声的频谱密度。

这可以导出，但超出了当前的任务范围。

在实践中，我们通常不知道噪声的频谱密度 spectral density of the noise，因此这变成了“工程”因素-我们通过实验调整这个数字，直到滤波器达到预期效果为止。

我们可以看到，将乘以的矩阵有效地将功率谱密度分配给了加速度项。

这很有道理；我们假设系统具有恒定的加速度，但噪声引起的变化除外。噪音会改变加速度。

计算积分，我们得到

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^5}{20} & \frac{\Delta t^4}{8} & \frac{\Delta t^3}{6} \\ \frac{\Delta t^4}{8} & \frac{\Delta t^3}{3} & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{6} & \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t \end{bmatrix} \Phi_s$$

外推回到6个状态

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^5}{20} & 0 & \frac{\Delta t^4}{8} & 0 & \frac{\Delta t^3}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^5}{20} & 0 & \frac{\Delta t^4}{8} & 0 & \frac{\Delta t^3}{6} \\ \frac{\Delta t^4}{8} & 0 & \frac{\Delta t^3}{3} & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^4}{8} & 0 & \frac{\Delta t^3}{3} & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{6} & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^3}{6} & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & \Delta t \end{bmatrix} \Phi_s$$

<https://blog.csdn.net/djfkj52>

### 2.3.2. Piecewise White Noise Model 分段白噪声模型

噪声的另一种模型假设最高阶项（例如，加速度）在每个时间段的持续时间内是恒定的，但在每个时间段都不同，并且每个时间段之间都是不相关的。换句话说，每个时间步长的加速度都有不连续的跳跃。这与上面的模型有细微的差别，在上面的模型中，我们假定最后一项施加了一个连续变化的噪声信号。

我们将此建模为

$$f(x) = Fx + \Gamma w$$

其中 $\Gamma$  是系统的噪声增益gain of the system，而 $w$ 是恒定的分段加速度（或速度或加速度，等等）。

For the second order system 二阶系统

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在一个时间段内，加速度的变化为 $w(t)$ ，速度的变化为 $w(t) \Delta t$ ，位置变化为 $w(t) \Delta t^2 / 2$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Delta t^2 / 2 \\ \Delta t \\ 1 \end{bmatrix}$$

The covariance of the process noise is 过程噪声的协方差为

$$Q = E[\Gamma w(t) w(t) \Gamma^T] = \Gamma \sigma_v^2 \Gamma^T$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta t^2 & \Delta t \\ \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t & 1 \end{bmatrix} \sigma_v^2$$

<https://blog.csdn.net/djfkj52>

目前尚不清楚该模型是否比连续模型更正确-两者都近似于实际物体所发生的情况。只有经验和实验才能指导适当的模型。可以预期，任何一个模型都能提供合理的结果，但通常一个模型的性能会优于另一个模型。

第二个模型的优点是我们可以用 $\sigma^2$ 建模噪声，可以用运动和期望的误差量来描述噪声。第一个模型要求我们指定频谱密度，这不是很直观，但是由于噪声是在整个时间段内积分的，因此它更容易处理变化的时间样本。但是，这些不是固定的规则-根据测试过滤器的性能和/或您对物理模型行为的了解，使用任何模型（或您自己设计的模型）。

一个好的经验法则是将 $\sigma$ 设置为 $0.5 \Delta a$ 至 $\Delta a$ ，

其中 $\Delta a$ 是加速度在采样周期之间变化的最大值。

实际上，我们选择一个数字，对数据进行模拟，然后选择一个合适的值。