拉格朗日乘子法详解（Lagrange multiplier）学习笔记

参考如下:

> 视频参考：
>
> 文档参考 :拉格朗日乘子法详解（Lagrange multiplier）

学习进度

- [ ] 拉格朗日乘子核心和用途
- [ ] 最优化问题

一、拉格朗日乘子的核心和用途

核心：

极值点处，函数和约束条件一定相切，梯度一定共线（同向or反向）！！！

以此为思想基础构建拉格朗日函数，把等式约束条件和不等式约束都通过引入拉格朗日乘子（就是个系数）整合到一个新函数里，使得原本的复杂的多约束优化问题变成了最简单的无约束优化问题，直接对构造出的拉格朗日函数的所有变量（包括原本的变量x_i, i = 1 , 2 ... , m 和新引入的乘子变量 $\lambda_{k} $,u_j , j = 1 , 2 ... , n , k = 1 , 2 ... , l） 求偏导等于零，得到的就是最终解。

> 拉格朗日乘子法的求解流程大概包括以下几个步骤： 1. 构造拉格朗日函数 2. 解变量的偏导方程 3. 代入目标函数即可

用途：

求解含有等式约束的最优化问题的局部最优解！！（极值点不一定是最小点，所以不是全局最小哟）；对于含有不等式约束的问题，要用到扩展的拉格朗日乘数法。

二、最优化问题

按照约束条件的有无和类别可分为三类：

（一）“无约束" 优化问题 直接对所有m 个变量求偏导，令偏导等于0，联立方程组求出来的点就可能是极值点，具体是不是那就代到原函数里看看是不是比周围的值都小就行。

$$\frac{\vartheta F}{x_i} = 0$$

补充注解：

> 偏导等于0只是极值点的必要条件，所以可能是。 直观地看，极值点左右的导数一定异号，又因为函数连续，所以极值点的导数只能为0。 必要条件：满足必要条件不能说明一定是；不满足则一定不是！！ 充分条件：满足充分条件则一定是；不满足则给出的信息为0

下面（二）（三）类优化问题都是通过构造拉格朗日函数把问题转化为第（一）类的。

（二）“等式约束” 优化问题 目标函数（待优化的函数）为f(x),约束条件为$h_k\ (x)$, k = 1 , 2 ... , l 问题建模为

$$min f(x) \quad s.t. \quad h_k(x) = 0$$

> “s.t.”，指 subject to，受限制于....。

这时候我们构建拉格朗日函数： 为什么这么构建参见知乎这个回答，很好理解，就因为梯度共线： 一个等式约束欸但表示对理解共线最有帮助：

$$\triangledown f(x^*) + \lambda \triangledown h(x^*) = 0$$

> x^*为极值点

多个等式约束则表示为：

$$\nabla f(x^*) + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \triangledown h_k(x^*) = 0$$

即

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k h_k(k)$$

> L(x,λ)即拉格朗日函数，λ_k 是拉格朗日乘子.

上面的公式实际上就是下面拉格朗日函数对x求偏导的结果。

这时就成了第一类的无约束优化了，只是变量增多了L个，同第一类问题，分别对m + l 个变量求偏导，得出来的解代入目标函数就ok了！

$$\frac{\delta F}{\lambda_k} = 0$$

(三)“等式约束+不等式约束”优化问题 这是最复杂也最常见的一种模型。先不讨论！！！