第 28 卷 第 11 期 计 算 机 学 报 Vol. 28 No. 11
2005 年 11 月 CHINESE JOURNAL OF COMPUTERS Nov. 2005

# 约束求解与优化技术的结合

季晓慧[1),2)] 黄 拙[1)] 张 健[1)]

[1)](中国科学院软件研究所计算机科学实验室 北京 100080)

[2)](中国科学院研究生院 北京 100049)

**摘 要** 提出了将混合约束问题转化为混合整数规划问题的方法. 用约束求解方法及混合整数规划方法共同求解混合约束问题可以令二者相互借鉴,从而促进二者求解技术的进一步发展. 同时,由混合约束问题转化而来的混合整数规划问题也可作为求解混合整数规划问题的测试问题(benchmarks).

**关键词** 约束求解;优化技术;混合约束问题;混合整数规划

**中图法分类号** TP18

# On the Integration of Constraint Programming and Optimization

JI Xiao-Hui[1),2)] HUANG Zhuo[1)] ZHANG Jian[1)]

[1)](*Laboratory of Computer Science, Institute of Software, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

[2)](*Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049)

**Abstract** Because of their complementary strengths, optimization and constraint programming can be profitably merged. But how to integrate them, especially when real variable exists, is still not well developed. A new method is presented in this paper. It transforms the constraints that contain both discrete and real variables combined by Boolean connectives into a mixed-integer optimization problem or a group of mixed-integer optimization problems. This method is a bridge that connects constraint programming and optimization together. And it may provide benchmarks for the latter.

**Keywords** constraint programming; optimization; combined constraints; mixed-integer programming

## 1 引 言

从传统的角度来看,约束求解与优化技术分属不同的领域. 前者属于计算机科学及人工智能领域,而后者则属于数学中的运筹学范畴. 但是由于二者在求解技术上的互补性[1]以及解决实际问题的需要,近年来它们在不断地互相融合. 但是二者的结合仅在有限域问题上较多,在混合约束问题及混合整数规划问题上的结合还不多见,原因之一在于二者不能表示和处理同一问题.

本文简要地介绍了约束满足问题、优化问题以及它们各自的求解技术和二者间的结合方法. 同时提出了用混合整数规划求解混合约束问题的方法,该方法将混合约束问题的成立与否与混合整数规划问题是否有解联系了起来,它的提出会为约束求解与优化技术的进一步结合起到推动作用. 同时所得的混合整数规划问题可以作为求解混合整数规划问

收稿日期:2004-12-22;修改稿收到日期:2005-08-19. 本课题得到国家自然科学基金(60125207,60421001)资助. 季晓慧,女,1977 年生,博士研究生,主要研究方向为约束求解、全局优化问题等. 黄 拙,男,1981 年生,博士研究生,主要研究方向为命题逻辑可满足性问题、一阶逻辑及硬件形式验证等. 张 健,男,1969 年生,博士,研究员,主要研究领域为自动推理、约束满足问题、程序测试及形式化方法.

E-mail:zj@ios.ac.cn.

题的标准测试问题(benchmarks).

本文第2节介绍了约束满足问题与优化问题及各自的求解技术;第3节介绍了二者之间的结合方法;第4节给出将混合约束问题转为混合整数规划问题的方法;最后对全文进行了总结.

## 2　约束满足问题与优化问题及求解方法

### 2.1　约束满足问题及其求解方法

#### 2.1.1　约束满足问题

约束满足问题(Constraint Satisfaction Problem, CSP)[2]是人工智能领域广泛研究的一类问题.它的基本组成元素为变量(Variable)$V$、变量的域(Domain)$D$以及约束(Constraint)$C$.变量的域$D$是变量可能取值的集合,变量$V_i$只能在它的域$D_i$中进行取值;约束$C$描述了变量$V$之间必须满足的关系.约束满足问题的一个解是指为各变量在它的域内取到一个值使得所有的约束都成立.一个约束满足问题可能有一个、多个或没有解.如果一个约束满足问题至少有一个解,那么它就是可满足的(satisfiable)或者说可行的(feasible);否则它就是不可满足的(unsatisfiable)或者不可行的(infeasible).

根据约束满足问题中变量的域$D$的不同,约束满足问题可以分为布尔约束满足问题、有限约束满足问题及混合约束问题.

(1)布尔约束满足问题

布尔约束满足问题要求变量只能在0或1上取值,即布尔约束满足问题的域$D$为$\{0,1\}$.它的约束$C$实际上就是一组命题逻辑公式(formula).所谓命题逻辑公式是布尔变量与逻辑连接符按照如下的规则形成的组合体[2]:

① 布尔变量是公式;

② 如果$\varphi$是公式,则$\neg\varphi$也是公式;

③ 如果$\varphi$和$\phi$是公式,则$\varphi * \phi$也是公式;

④ 只有上面四条规则生成的表达式是公式.

这里$\neg$是一元连接符"非",$*$可以是任何一个二元连接符,如$\wedge$(与)、$\vee$(或)、$\rightarrow$(蕴含)等.

在布尔约束满足问题中,每一个命题逻辑公式也可称为布尔约束条件.布尔变量的取值只有"真"和"假"两种,而经由连接符连接而成的布尔约束条件也只能取"真"、"假"两个值.求解布尔约束满足问题的目的就是为该问题中的布尔变量赋值,使得该问题中的每一个布尔约束条件的值为"真".

(2)有限约束满足问题

有限约束满足问题,顾名思义,就是变量只能在有限域上取值.在有限约束满足问题中,通常不考虑约束的具体形式,而采用列出所有满足该条件的变量取值组合的形式[2].$N$皇后问题、鸽笼问题、图着色问题等都属于有限约束满足问题.

实际上,布尔约束满足问题可以看作是有限约束满足问题的特例.

(3)混合约束问题

混合约束问题中的变量可以在多个域中取值,比如变量可以取布尔值,可以在有限数值域及无限数值域上取值等.

混合约束问题实质上是对布尔约束满足问题的一种扩展.为了清晰地描述它,我们先作如下定义.

**定义1**(数值约束).　我们称形如$Exp_1\ rop\ Exp_2$的约束为数值约束,其中$Exp_1$与$Exp_2$为数学表达式,如$2x-yz$,$rop$为一数学上的关系操作符,包括$=,\neq,<,>,\leq$及$\geq$.

**定义2**(混合约束条件).　混合约束条件由布尔变量及数值约束与逻辑连接符组成,它们按照与命题逻辑公式同样的规则形成组合体.例如$a\wedge(x-y>3)\rightarrow(x+z=4)$.

**定义3**(混合约束问题).　我们称由一个或一组混合约束条件组成的问题为混合约束问题.

一个数值约束有"成立"和"不成立"两种情况,分别对应于这个数值约束的值为"真"和"假",那么混合约束条件的值就如同布尔约束条件的值一样,也只能取"真"或者"假".从而求解混合约束问题的目的就是为其中的数值和布尔变量赋值,使得该问题中的每个混合约束条件的值为"真".

下面举一个具体的例子说明混合约束问题.

**例1.**

$$\begin{cases}(x^2+y^2=2)\wedge b\wedge((x^2+y<5)\vee(y<-2))\\ \neg(y<-2)\wedge e\rightarrow f\end{cases}.$$

假设$x,y$的取值范围都为实数,那么容易验证当$x=1,y=1,b=$"真",$e=$"假",$f=$"假"时,原混合约束问题是能够成立的或者说可行的.同样可以验证当$x=0,y=-\sqrt{2},b=$"真",$e=$"真",$f=$"真"时,原混合约束问题也能够成立.但如果要求$x$的取值范围为"大于2的实数",$y$的取值范围仍为整个实数范围,那么上例这个混合约束问题就是不能够成立的,或者说是不可行的.

#### 2.1.2　约束满足问题的求解方法

总的来说,用于求解约束满足问题的方法包括完备算法与不完备算法两种.所谓完备算法是指能

够完全确定某约束满足问题是有解的还是无解的算法;而不完备的算法则在未找到解时不能确定该约束满足问题无解.

(1)完备算法

完备算法中最常用的是回溯法[3].它先为约束满足问题中的部分变量赋值,在这个部分赋值的基础上为其余的变量赋值.如果在这个部分赋值的基础上,下一个待赋值的变量找不到使得约束成立的解,则需要改变这个部分赋值中所赋的值.

回溯法常用的两种策略是:回跳(back-jumping)和向前看(look-ahead)[3].回跳就是在为下一个待赋值的变量找不到解的时候,不直接为刚赋过值的变量赋其它的值,而是经过分析,找到致使下一个变量无解的那个变量,然后为其改变所赋的值.向前看则是指在为下一个变量赋值时,通常先进行约束推导(constraint propagation)以及选择最合适的变量及变量的值.约束推导是为了减少搜索空间,而选择最合适的变量及变量的值则是为了加快搜索.有关回溯法的具体策略及其它的求解约束满足问题的完备算法,参见文献[3,4].

(2)不完备算法

求解约束满足问题的算法大多是搜索法,像回溯法就是一种全局搜索算法,即它要搜索遍整个问题空间.因此,当问题空间很大时,这种算法是不可行的.所以人们提出局部搜索法.局部搜索法以损失解的完备性为代价来提高求解效率.

著名的局部搜索算法包括顾钧的算法、贪心搜索过程GSAT、禁忌搜索(tabu search)、拟人拟物法等[2].其它的还包括爬山法、模拟退火等[5].

关于完备算法与不完备算法间的详尽区别及各自的优缺点读者可参见文献[5].

### 2.2 优化问题及其求解方法

#### 2.2.1 优化问题

优化问题是数学领域的重要分支,它研究如何在众多方案中找出最优的一个.优化问题通常可以用下式进行描述:

$$\begin{aligned}&\min\quad f(x)\\&\text{s.t.}\quad g_i(x)\le 0,\ i=1,2,\cdots,m;\\&\qquad\ \ h_j(x)=0,\ j=1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

其中,$f(x)$称为目标函数,$g_i(x)$和$h_j(x)$称为约束函数.

$f(x)$,$g_i(x)$,$h_j(x)$都是$x$的线性函数的优化问题,称为线性优化问题;否则称为非线性优化问题.如果要求得到的解为整数或者部分为整数,那么该优化问题就是整数规划问题.

#### 2.2.2 优化算法

求解线性优化问题最常用的算法是单纯形法[6],它的提出标志着优化问题形成为一个独立的学科[7].

求解非线性优化问题的主要方法包括牛顿法、最小二乘法、乘子法等[7],这些算法本质上是迭代法,即给定一个初始值和迭代函数,以此初始值为起始,根据迭代函数计算出下一个值,该过程不断继续直到达到某种条件.可见这种方法十分依赖初始值的选取,在初始值选取不好的情况下,该算法有可能找不到全局最优解,甚至算法可能发散[8].因此出现了基于区间分析[9]等技术的全局优化算法[10],基于区间分析的全局优化算法本质上是分支定界法,它初始为每一个变量赋一较大区间,然后对各区间不断进行检验、折半,直到最后每一变量的区间宽度小于一定的值.

求解整数规划问题的方法主要是分支定界法、割平面法等[11].分支定界法和割平面法都是先求解整数规划问题的松弛问题,所谓松弛问题是指对原优化问题不考虑整数限制的问题;在求得松弛问题的解以后,分支定界法根据所得的变量的值,对原问题添加新的约束以形成新的子问题,而割平面法则是根据求解松弛约束的中间过程添加新的约束以形成新的子问题;对新的子问题再按照上述过程不断地求解,直到最后所得的解为整数,或者得出原优化问题没有整数最优解的结论.

另外一大类用于求解优化问题的算法为随机算法(stochastic methods)[12],包括随机搜索(random search)、禁忌搜索(tabu search)、模拟退火(simulated annealing)、演化计算(evolutionary computations)等[12].

目前,优化问题的求解,尤其是非线性全局优化问题及混合整数规划问题的求解仍是运筹学界研究的热点问题.

## 3 约束求解与优化技术的结合

### 3.1 约束求解与优化技术的结合现状

虽然约束求解与优化技术分属于不同的领域,但是二者间的相互影响却由来已久.20世纪50年代就有人尝试用基于逻辑的方法求解优化问题,只是该方法没有像整数规划方法一样得到广泛的应用[1].70年代出现的隐枚举法则是基于逻辑的方法

在求解整数规划问题上的成功应用[1].

随着整数规划求解方法的不断成熟，从 20 世纪 80 年代开始有人研究用整数规划方法来求解布尔约束满足问题. 这些学者包括 Hooker[13,14]、顾钧[15,16]等.

约束求解与优化方法的结合包括以下两个方面：

(1)约束求解与优化技术解同一问题.

严格地讲，整数的个数是无限的. 但在实际应用中，所涉及的整数的个数通常都是有限的. 因此，整数规划与有限约束满足问题都需要在有限的变量域内选取合适的值，使得变量间满足特定的约束关系，也就是说，有限约束求解与整数规划求解技术以不同的角度在解同一问题. 这样，结合它们各自的优势来解同一问题就是十分自然的. 事实上也的确有很多这类研究[17～19]，它们采用不同的方式将约束求解与优化技术结合起来.

文献[17]采用的结合方式是用两种技术同时求解同一问题，这被称为冗余建模(redundant modeling)，二者的结合体现在求解同一问题的过程中边界信息(bound information)的交换[17].

大多数学者认为，能够将有限约束求解与整数规划技术结合起来是因为二者有共同之处，同时二者又是互补的[1,17～19]. 二者的共同之处在于，它们求解问题所采用的方法本质上都是搜索法；而互补之处显而易见，就是二者求解问题的角度和优势不同. 约束求解的优势在于它剔除掉不可行空间的能力比较强，而整数规划的优势在于它能利用松弛问题尽早地缩小目标函数的范围[17～19].

鉴于上述二者的异同，文献[18]在搜索的过程中交替地使用这两种方法以更好地利用二者的优势. 首先，它使用约束求解，以尽量多地剔除掉不可行区域；然后，利用优化技术得到更优的条件并把它加入到问题空间中去；如此循环直到满足结束条件.

文献[19]提出了与文献[18]类似的结合方式，即在搜索的过程中先采用约束求解的方法对问题进行预处理(pre-processing)，然后再采用优化技术进一步求解. 文献[19]还对分配日程问题(assignment scheduling problem)分别单独采用约束求解与优化技术进行了求解，其结论是：在求解此类问题上，约束求解方法要优于优化技术[19].

(2)约束求解与优化技术解同一问题的不同子问题.

2.1.1 节中介绍的混合约束问题是近年来研究较多的约束满足问题，它的应用十分广泛，包括分析基于状态的需求规约[20]、生成软件的测试用例[20]、分析并行化的数据相关性问题[21]、规划机器人的路径[22]等等.

由于混合约束问题本身的结构，即既包含布尔变量，又包含数值变量，因此很多求解器将约束求解与优化技术结合起来共同求解此问题，如 Prolog Ⅲ，Prolog Ⅳ，CLP(BNR)等[17]. BoNuS[20,24]也将约束求解与优化技术结合起来求解混合约束问题，BoNuS-1[20]运用的优化技术是线性规划，BoNuS-2[23]运用的优化技术是非线性优化，它们用回溯法求解混合约束中的布尔约束条件，用优化技术求解混合约束中的数值约束.

上述求解混合约束问题的工具所使用的优化技术都是基于区间分析的[9,10]. 区间分析的优点是能够保证求解的完整性和可靠性，但它最大的问题是效率问题[10].

### 3.2　约束求解与优化技术的进一步结合

从 3.1 节可以看出，约束求解与优化技术在有限域问题上的结合是相对较多的，而在求解混合约束问题的时候只利用了基于区间分析的优化方法，因此对于混合约束问题，还需进一步结合优化算法的其它方法，如迭代法.

另一方面，我们认为在求解混合整数规划问题的时候也需进一步结合约束求解的方法.

混合整数规划[24,25]是整数规划的子问题，它只要求问题中的部分变量为整数. 求解混合整数规划问题的方法主要包括分支定界法(Branch & Bound)、非线性分解法(Benders Decomposition)及外近似法(Outer Approximation)等[24,25]. 混合整数规划，尤其是非线性混合整数规划是直到前两年才有较大发展的[24,25]，从文献上来看，大多数文献出现在 20 世纪 90 年代后半期. 因此，它的发展应该说还不是很成熟的，需要进一步借鉴其它领域，尤其是约束求解领域的方法，如可行性技术(Consistency)等.

我们可以看出，约束求解与优化技术在有限域问题上的结合较多是因为二者都能表示、处理这类问题，那么如果混合整数规划和约束求解技术也能表示和处理同类的问题，就可以期望他们之间互相借鉴，从而提高各自的求解能力.

## 4　混合约束问题向混合整数规划问题的转化

本节给出将混合约束问题转为混合整数规划问题的方法，该方法是对布尔约束满足问题转化为多

项式问题的方法[2]的扩展.

### 4.1 将布尔约束满足问题转化为多项式问题的方法

布尔约束满足问题可以通过一定的转换转化为多项式问题.表1列出了3种将包含{∧,∨,¬}的布尔约束满足问题转化为多项式问题的方法[2].

表1 将布尔约束满足问题转化为多项式问题的3种方式

| 转换方法 | 布尔变量 $a_i$ | 布尔变量的非 $\neg a_i$ | 公式 $p\vee q$ | 公式 $p\wedge q$ | $a_i=\text{True}$ | $a_i=\text{False}$ | 公式 $t$ 为真 | 公式 $t$ 为假 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_1(t)$ | $x_i$ | $1-x_i$ | $T_1(p)+T_1(q)$ | $T_1(p)*T_1(q)$ | $x_i=1$ | $x_i=0$ | $T_1(t)>=1$ | $T_1(t)<1$ |
| $T_2(t)$ | $(x_i-1)^2$ | $(x_i+1)^2$ | $T_2(p)*T_2(q)$ | $T_2(p)+T_2(q)$ | $x_i=1$ | $x_i=-1$ | $T_2(t)=0$ | $T_2(t)\ !=0$ |
| $T_3(t)$ | $1-x_i$ | $x_i$ | $T_3(p)*T_3(q)$ | $T_3(p)+T_3(q)$ | $x_i=1$ | $x_i=0$ | $T_3(t)=0$ | $T_3(t)\ !=0$ |

表1的第2～5列给出了布尔公式 $t$ 对应的3种转换方法 $T_i(t)$,后4列对应这3种转换方法,给出了布尔公式的真假与转换所得的多项式的取值之间的关系.

由于任何的布尔约束满足问题都能转换为cnf(合取范式)形式,所以以上3种转换方式对所有的布尔约束满足问题都是有效的.而事实上,以上3种方法一般也是相对于cnf形式的布尔约束满足问题来转化的.

以 $a\wedge(b\vee c)\wedge\neg b$ 为例,对应于上述的3种转化方法,它的成立对应于下面3个数学问题的成立:

(1) $x_1\times(x_2+x_3)\times(1-x_2)\geq 1$,其中,$x_i\in\{0,1\}$;

(2) $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2\times(x_3-1)^2+(x_2+1)^2=0$,其中,$x_i\in\{-1,1\}$;

(3) $(1-x_1)+(1-x_2)\times(1-x_3)+x_2=0$,其中,$x_i\in\{0,1\}$.

可以看出,如果布尔约束满足问题较复杂,那么得到的多项式也就会较复杂.所以为了简化所得的多项式,可以将约束满足问题转化为一组形式较简单的多项式.仍以 $a\wedge(b\vee c)\wedge\neg b$ 为例,对应3种转换方法,它的成立可以对应下述3组多项式问题的成立.

$$(1)\begin{cases}x_1\geq 1\\ x_2+x_3\geq 1,\text{其中},x_i\in\{0,1\};\\ 1-x_2\geq 1\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}(x_1-1)^2=0\\ (x_2-1)^2\times(x_3-1)^2=0,\text{其中},x_i\in\{-1,1\};\\ (x_2+1)^2=0\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}1-x_1=0\\ (1-x_2)\times(1-x_3)=0,\text{其中},x_i\in\{0,1\}.\\ x_2=0\end{cases}$$

从上面的3种转化我们可以看出,将布尔约束满足问题转化为多项式问题进行求解的实质是:将布尔约束满足问题的成立与转化后的数学问题的某个特定值对应起来.第2、第3种转换方法将布尔约束满足问题的"真"与多项式的取值为0对应了起来,第1种方法将布尔约束满足问题的"真"与多项式的取值大于等于1对应了起来.从转化后的形式来看,第1种转化方式所得的多项式及多项式组比第2,3种转化方式所得的多项式及多项式组简单.

### 4.2 将混合约束问题转为混合整数规划问题的基本思想

4.1节中已经指出,将布尔约束满足问题转化为多项式问题进行求解的实质是将布尔约束满足问题的成立与转化后的数学问题的某个特定值对应起来.我们提出的用混合整数规划求解混合约束问题的方法仍然遵循这个思想,即令混合约束问题的成立与转化后的混合整数规划问题的某个特定值相对应.

对于混合约束问题中的布尔变量和逻辑连接符的转化如同4.1节中所述,可以看出它们的转化是十分简单的.但是数值约束由于其复杂性则需要一系列的转化才能使其成立与否与某个特定的值对应起来,同时可能引入新的逻辑连接符(见4.3节).

本文提出的用混合整数规划求解混合约束问题的算法如下.

1. 将混合约束问题CCP中的数值约束按照4.3节中的规则进行转化,从而将CCP转化为CCP1;

2. 将CCP1中的布尔变量及连接符按照4.1节中的规则进行转化,从而将CCP1转化为混合整数规划问题 $T_i$;

3. 对 $T_i$ 进行求解,如果 $T_i$ 有与特定的值相对应的解则原混合约束问题是可行的;否则原混合约束问题是不可行的.

### 4.3 对数值约束的转化

为了说明对数值约束的转化,我们先定义转换函数.

**定义4**(转换函数). 我们称函数 $F(f(x))=\dfrac{f(x)}{|f(x)|}$ 为转换函数.

转换函数具有如下性质:当 $f(x)\leq 0$ 时,$F(f(x))=-1$;当 $f(x)>0$ 时,$F(f(x))=1$.其中 $f(x)=0$ 时,$F(f(x))=-1$ 是我们规定的.

转换函数的意义在于,对应数值约束 $f(x)>0$

的成立与否，转换函数能与两个不同的常数值 $-1$ 和 1 相对应，而这正是我们想要的性质.

有了转换函数，我们对数值约束的转化可概括如下：

(1) 将所有混合约束中的数值约束转化为 $f(x)>0$ 或者 $\neg f(x)>0$ 的形式；

(2) 将转化为 $f(x)>0$ 以及 $\neg f(x)>0$ 形式的数值约束通过转换函数与特定的常数对应起来.

上述两个步骤具体如下：

1. 将所有混合约束中的数值约束转化为 $f(x)>0$ 或者 $\neg f(x)>0$ 的形式.

具体为

$f_1(x)>f_2(x)$ 转化为 $f_1(x)-f_2(x)>0$，

$f_1(x)<f_2(x)$ 转化为 $f_2(x)-f_1(x)>0$，

$f_1(x)\leq f_2(x)$ 转化为 $\neg(f_1(x)>f_2(x))$，

进一步转化为 $\neg(f_1(x)-f_2(x)>0)$.

$f_1(x)\geq f_2(x)$ 转化为 $\neg(f_1(x)<f_2(x))$，

进一步转化为 $\neg(f_2(x)-f_1(x)>0)$.

$f_1(x)=f_2(x)$ 转化为 $(f_1(x)\geq f_2(x))\wedge(f_1(x)\leq f_2(x))$，

进一步转化为 $\neg(f_2(x)-f_1(x)>0)\wedge\neg(f_1(x)-f_2(x)>0)$.

$f_1(x)\neq f_2(x)$ 转化为 $(f_1(x)>f_2(x))\vee(f_1(x)<f_2(x))$，

进一步转化为 $(f_1(x)-f_2(x)>0)\vee(f_2(x)-f_1(x)>0)$.

2. 将转化为 $f(x)>0$ 以及 $\neg f(x)>0$ 形式的数值约束通过转换函数与特定的常数值对应起来.

在表 1 中，如果将布尔变量 $a_i$ 及布尔变量的非 $\neg a_i$ 看作是原布尔约束满足问题中的基本元素 $Elem_b$，那么在 3 种转换后，就可将与 $Elem_b$ 相对应的数学转换式（与 $a_i$ 对应的分别为 $x_i$，$(x_i-1)^2$ 及 $1-x_i$；与 $\neg a_i$ 对应的分别为 $1-x_i$，$(x_i+1)^2$ 及 $x_i$）看作为数学问题中的基本元素 $Elem_m$，那么有下面的结论：

在转化 1 中，有

$$\begin{cases} Elem_b=\text{True 对应于 } Elem_m=1 \\ Elem_b=\text{False 对应于 } Elem_m=0 \end{cases}.$$

在转化 2 中，有

$$\begin{cases} Elem_b=\text{True 对应于 } Elem_m=0 \\ Elem_b=\text{False 对应于 } Elem_m=4 \end{cases}.$$

在转化 3 中，有

$$\begin{cases} Elem_b=\text{True 对应于 } Elem_m=0 \\ Elem_b=\text{False 对应于 } Elem_m=1 \end{cases}.$$

也就是说，对应于将布尔约束满足问题转化为多项式问题的 3 种方法，转化后所得的数学问题的基本组成元素的值分别与 1 和 0，0 和 4 以及 0 和 1 相对应.

因此，为了保证将混合约束问题转化为数学问题后，其基本组成元素在取值上的一致性，我们采取下述 3 种方式将 $f(x)>0$ 以及 $\neg f(x)>0$ 形式的数值约束与特定值对应起来：

(a) 对应于将布尔约束满足问题转化为多项式问题的方法 1：

$$\text{将 } f(x)>0 \text{ 转化为 } \frac{1}{2}+\frac{1}{2}F(f(x)),$$

$$\text{将 } \neg(f(x)>0) \text{ 转化为 } \frac{1}{2}-\frac{1}{2}F(f(x)).$$

(b) 对应于将布尔约束满足问题转化为多项式问题的方法 2：

$$\text{将 } f(x)>0 \text{ 转化为 } 2-2F(f(x)),$$

$$\text{将 } \neg(f(x)>0) \text{ 转化为 } 2+2F(f(x)).$$

(c) 对应于将布尔约束满足问题转化为多项式问题的方法 3：

$$\text{将 } f(x)>0 \text{ 转化为 } \frac{1}{2}-\frac{1}{2}F(f(x)),$$

$$\text{将 } \neg(f(x)>0) \text{ 转化为 } \frac{1}{2}+\frac{1}{2}F(f(x)).$$

那么，经由上述 1～2(a) 或者 1～2(b) 或者 1～2(c) 就将数值约束的"真"和"假"与特定的数值 1 和 0，0 和 4 以及 0 和 1 对应了起来.

### 4.4　举例及讨论

有了 4.3 节中对数值约束的处理，对应于布尔约束满足问题转化为多项式问题的 3 种方法，有 3 种用于求解混合约束问题的混合整数规划方法. 我们以

$$\begin{cases} (x^2+y^2=2)\wedge b\wedge(c\vee(y<-2)) \\ (y\geq-2)\wedge e \end{cases}$$

为例，说明本文提出的用混合整数规划求解混合约束问题的方法.

对应于 3 种数值转换方式，上例的成立分别对应于下面 3 个数学问题的成立：

(1) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}F(2-x^2-y^2)\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}F(x^2+y^2-2)\right) x_2\left(x_3+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}F(-y-2)\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}F(-y-2)\right)x_5\geq 1$，其中，$x_i\in\{0,1\}$，$x,y\in\{$实数$\}$.

(2) $(2+2F(2-x^2-y^2))+(2+2F(x^2+y^2-2))+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2(2-2F(-y-2))+(2+2F(-y-2))+(x_5-1)^2=0$，其中，$x_i\in\{-1,1\}$，$x,y\in\{$实数$\}$.

(3) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}F(2-x^2-y^2)\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}F(x^2+y^2-2)\right)+(1-x_2)+(1-x_3)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}F(-y-2)\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}F(-y-2)\right)+(1-x_5)=0$，其中，$x_i\in\{0,1\}$，$x,y\in\{$实数$\}$.

在此，$F(f(x))$是转换函数. 不难验证，$x=1$，$y=1$，$x_2=1$，$x_3=1$，$x_5=1$是上面3个式子成立的一个解，而此解也正是原混合约束问题的一个解，$x_2=1$，$x_3=1$，$x_5=1$意味着布尔变量$b,c,e$分别取"真"值.

可以看出，第2、第3种方法对应的数学问题为无约束的混合整数规划问题，第1种方法得到的数学问题可以看作是目标函数为0，其本身为约束函数的混合整数规划问题.

同样，为了得到较简单的多项式，可将上例转化为下述多项式组的成立：

$$(1)\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}F(2-x^2-y^2)\geq 1\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}F(x^2+y^2-2)\geq 1\\ x_2\geq 1\\ x_3+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}F(-y-2)\geq 1\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}F(-y-2)\geq 1\\ x_5\geq 1\end{cases},$$

其中，$x_i\in\{0,1\}$.

$$(2)\begin{cases}2+2F(2-x^2-y^2)=0\\ 2+2F(x^2+y^2-2)=0\\ (x_2-1)^2=0\\ (x_3-1)^2\times(2-2F(-y-2))=0\\ 2+2F(-y-2)=0\\ (x_5-1)^2=0\end{cases},$$

其中，$x_i\in\{-1,1\}$.

$$(3)\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}F(2-x^2-y^2)=0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}F(x^2+y^2-2)=0\\ 1-x_2=0\\ (1-x_3)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}F(-y-2)\right)=0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}F(-y-2)=0\\ 1-x_5=0\end{cases},$$

其中，$x_i\in\{0,1\}$.

对于第2,3组多项式，其中的每一个多项式都可以看作是一个无约束的混合整数规划问题，也可以将它们看作是和第一组多项式一样，目标函数为0，本身为约束的混合整数规划问题.

应该说，将混合约束问题转化为一组多项式比转化为单个多项式得到的混合整数规划问题要简单.

事实上，我们选取的转换函数$F(f(x))=\frac{f(x)}{|f(x)|}$是有一定缺点的，即当$f(x)=0$时，$F(f(x))$是没有定义的. 为了求解的需要，我们人为地规定当$f(x)=0$时，$F(f(x))=-1$. 在具体实现时，当遇到$\frac{0}{|0|}$时，我们需要判断此种情况是否是由转换函数引起的，如果是，则令其等于$-1$；否则，按照数学上的规定，是没有意义的.

我们认为用混合整数规划方法求解混合约束问题并不是最优的，3.1节中所述的将约束求解与优化技术结合起来的方法更好. 之所以提出用混合整数规划方法求解混合约束问题，是希望在用多种方法求解混合约束问题的过程中，能够发现各方法的优点与缺点，从而促进各方法的进一步融合. 另外，我们认为，可以将转化所得的混合整数规划问题作为求解混合整数规划问题的标准测试问题(benchmarks).

## 5 结 论

本文介绍了约束满足问题、优化问题以及二者的求解方法，并对二者的结合方式进行了简要综述，同时给出将混合约束问题转为混合整数规划问题的方法. 该方法的提出将会进一步推动约束求解与优化技术的结合，同时所得的混合整数规划问题可以作为求解整数规划问题的标准测试问题(benchmarks).

## 参 考 文 献


1 Hooker J. N.. Logic, optimization and constraint programming. INFORMS Journal on Computing, 2002, 14(4): 295～321

2 Zhang J.. Deciding the Satisfiability of Logical Formulas-Methods, Tools and Applications. Beijing: Science Press, 2000(in Chinese)
(张 健. 逻辑公式的可满足性判定-方法、工具及应用. 北京：科学出版社, 2000)

3 Dechter R.. Constraint Processing. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2003

4 Kumar V.. Algorithms for constraint satisfaction problems: A survey. AI Magazine, 1992, 13(1): 32～44

5 Freuder E. C., Dechter R., Ginsberg M. L., Selman B., Tsang E. P. K.. Systematic versus stochastic constraint satisfaction. In: Proceedings of the IJCAI95, Montreal, 1995, 2027～2032

6 Dantzig G.. Linear Programming and Extensions. New Jersey: Princeton University Press, 1963

7 Yuan Ya-Xiang, Sun Wen-Yu. Theory and Methods for Optimization. Beijing: Science Press, 2001(in Chinese)
**(袁亚湘,孙文瑜. 最优化理论与方法. 北京:科学出版社,** 2001)

8 Hentenryck P. V., Michel L., Deville Y.. Numerica: A Modeling Language for Global Optimization. Cambridge: The MIT Press, 1997

9 Moore R. E.. Methods and Applications of Interval Analysis. Philadelphia: SIAM Publishers, 1979

10 Horst R., Paralos P. M.. Handbook of Global Optimization. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1995

11 Tang Huan-Wen, Qin Xue-Zhi. Optimization Methods. DaLian: Dalian University of Technology Press, 1994(in Chinese)
**(唐焕文,秦学志. 最优化方法. 大连:大连理工大学出版社,** 1994)

12 Mendivii F., Shonkwiler R., Spruill M. C.. Optimization by stochastic methods. Institute of Technology Atlanta, Georgia: Technical Report: GA 30332, 1999

13 Hooker J. N.. A quantitative approach to logic inference. Decision Support Systems, 1988, 4(1): 45～69

14 Hooker J. N.. Resolution vs. cutting plane solution of inference problems: Some computational experience. Operations Research Letters, 1988, 7(1): 1～7

15 Gu J.. Global optimization for satisfiablility (SAT) problem. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 1994, 6(3): 361～381

16 Gu J., Gu Q., Du D.. On optimizing the satisfiability (SAT) problem. Journal of Computer Science and Technology, 1999, 14(1): 1～17

17 Hentenryck P. V.. Constraint and integer programming in OPL. INFORMS Journal on Computing, 2002, 14(4): 345～372

18 Hooker J. N., Ottosson G., Thorsteinsson E. S., Kim H. J.. A scheme for unifying optimization and constraint satisfaction methods. Knowledge Engineering Review, 2000, 15(1): 11～30

19 Dowman D., Little K., Mitra J., Zaffalon G.. Constraint logic programming and integer programming approaches and their collaboration in solving an assignment scheduling problem. Constraints, 1997, 1(3): 245～264

20 Zhang J.. Specification analysis and test data generation by solving Boolean combination of numeric constraints. In: Proceedings of the 1st Asia-Pacific Conference on Quality Software (APAQS 2000), Hong Kong, 2000, 267～274

21 Pugh W.. The Omega test: A fast and practical integer programming algorithm for dependence analysis. In: Proceedings of the 1991 ACM/IEEE conference on Supercomputing, Albuquerque, New Mexico, 1991, 4～13

22 Wang Y. Lane D. M.. Solving a generalized constrained optimization problem with both logic AND and OR relationships by a mathematical transformation and its application to robot path planning. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part C: Application and Reviews, 2000, 30(4): 525～536

23 Ji X., Zhang J.. Solving Boolean combinations of nonlinear numerical constraints. Journal of Software, 2005, 16(5): 659～668

24 Bussieck M. R., Pruessner A.. Mixed-integer nonlinear programming. SIAG/OPT Newsletter: Views & News, 2003, 14(1): 19～22

25 Grossmann I. E.. Review of nonlinear mixed-integer and disjunctive programming techniques. Optimization and Engineering, 2002, 3(3): 227～252



**JI Xiao-Hui**, born in 1977, Ph. D. candidate. Her research work mainly focuses on constraint programming, global optimization, etc.

**HUANG Zhuo**, born in 1981, Ph. D. candidate. His research work mainly focuses on propositional logic satisfiability, first-order logic, hardware formal verification, etc.

**ZHANG Jian**, born in 1969, Ph. D., professor. His research work mainly focuses on automated reasoning, constraint satisfaction, program testing and formal methods.


**Background**

This project is supported by the National Natural Science Foundation of China under grants No. 60125207 and No. 60421001. It aims to increase the efficiency in solving constraints. Boolean combinations of numerical constraints are an important part in constraints problems. We have presented a method that combines constraint programming and optimization method together to solve such constraints. Now we can even solve those problems that contain nonlinear numerical constraints. In this paper, we present a method that solves the combined constraints only by optimization method. This will facilitate the integration of the constraint programming and optimization method, and which is certainly beneficial for both research fields.