

# 深入洞察 OpenCV 鱼眼模型之成像投影和畸变表估计系数相互转化

崔星星 2023.9

本 Repo 实现了从原理公式上直接使用来自 OpenCV 鱼眼畸变模型的 4 个系数  $k_1, k_2, k_3, k_4$  和内参  $K$  对图像进行去畸变以及来自厂商提供的镜头畸变表与 OpenCV 鱼眼模型参数的估计互相转换。另外对 OpenCV 鱼眼模型的成像原理过程(透视投影像高 vs 畸变像高)进行了绘图分析，便于从视觉上直观感受，从而加深对 OpenCV 鱼眼镜头模型投影成像的理解。关于 pin-hole 透视镜头成像标定过程可以参阅我之前的 [Repo](#)。

## Table of Contents

Overview of Distortion Table.....	1
Overview of OpenCV fisheye Camera Model.....	1
注意误点：.....	3
总结几点：.....	4
直接根据畸变表对图像去畸变.....	4
畸变表拟合系数对图像去畸变.....	6
畸变系数推算畸变表.....	8
References.....	11

## Overview of Distortion Table

来自鱼眼镜头厂商的畸变表一般为下述形式表格，其描述了光线通过透镜在相机传感器平面成像的高度信息，一般至少含有 3 列数据，比如下面表格有“Angle”(degrees), “Real Height”(mm), “Ref Height”(mm)等。其分别表示光线入射角(光线与摄像机光轴的夹角)，实际成像高度，参考成像高度(透视投影)，这些信息足以表征此镜头的畸变扭曲程度。另外还会提供一些常量,如每个像素长度为 0.003mm, 图像尺寸 1920×1080, 畸变中心位于图像中心，进一步地，结合畸变表，可以推算相机内参矩阵  $K$ 。

Y Angle (deg)	Real Height	Ref. Height	Distortion(f-tanθ)	
0.00	0.000	0.000	0.00	%
0.10	0.005	0.005	0.00	%
0.20	0.010	0.010	0.00	%
0.30	0.015	0.015	0.00	%
0.40	0.020	0.020	0.00	%
0.50	0.025	0.026	0.00	%
0.60	0.031	0.031	0.00	%
0.70	0.036	0.036	-0.01	%
0.80	0.041	0.041	-0.01	%
0.90	0.046	0.046	-0.01	%
1.00	0.051	0.051	-0.01	%
1.10	0.056	0.056	-0.01	%

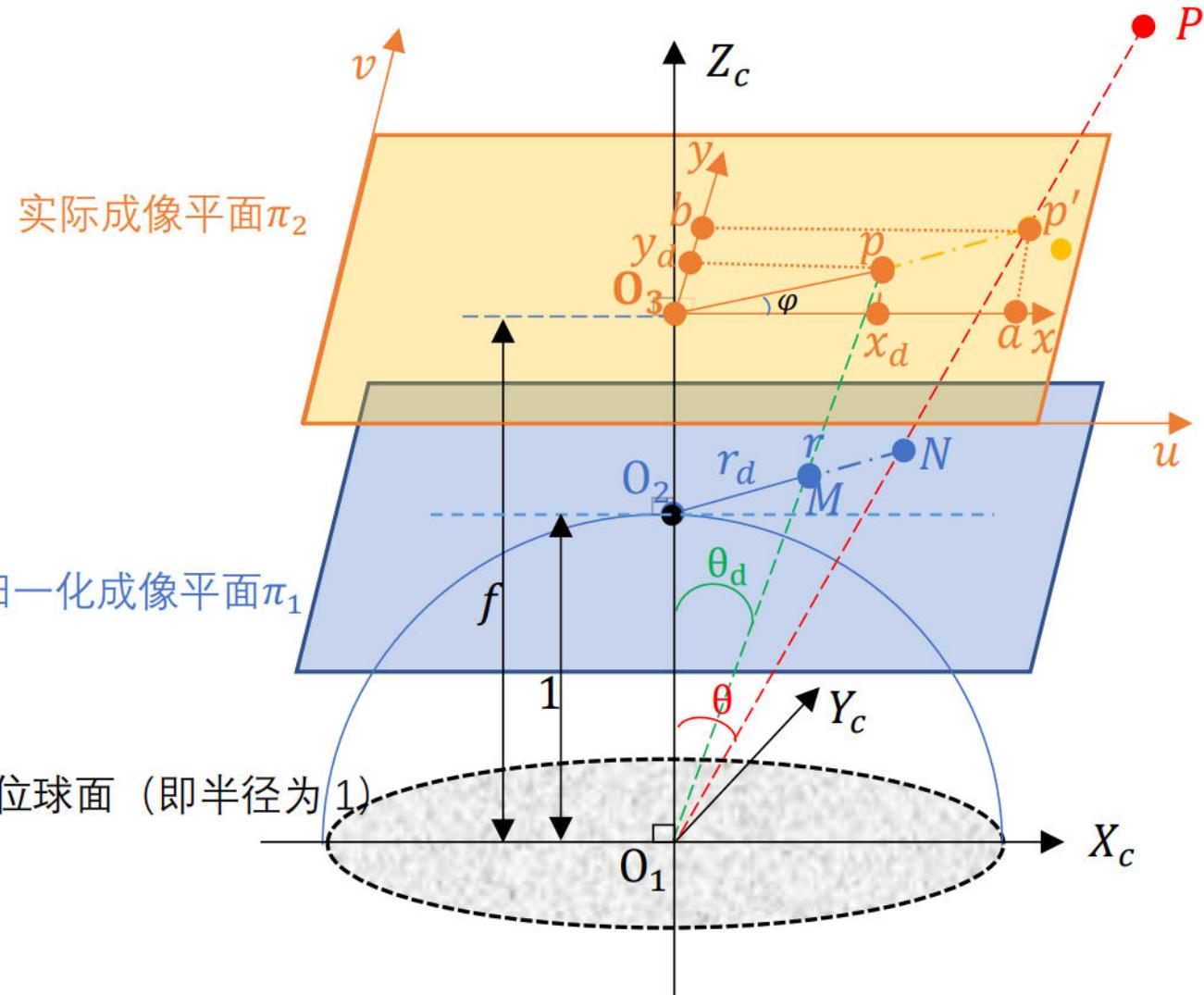
上述表格中第 1 列和第 3 列通常满足  $\text{RefH} = f * \tan(\theta)$ ,  $\theta$  对应第一列，一般从 0° 到 90° 之间，RefH 为第三列，从此式可以推算出焦距  $f$ 。

本 Repo 中所使用的畸变表格数据和此镜头录制的图像畸变数据在当前“data”文件夹下的“distortionTableFromFactory.xlsx”，“distortionImageN.png”。

## Overview of OpenCV fisheye Camera Model

关于 Fish-Eye 其实有多种投影模型，具体参考文献 6，典型有 equidistance, equisolid angle, orthogonal projection 等，根据 OpenCV 实现，其依据的论文是一种通用模型，不依赖某个具体的类型，取 9 阶系数就足以满足绝大多数镜头畸变模型。在此，也不再叙述过程，本文重点在下述原理理解和代码实践上！

根据此处 OpenCV 官方文档此处[链接](#)，导航到“Detailed Description”部分，要完全弄清楚其原理，其描述过程仍然令人有些费解，没有像 MATLAB 官方文档描述的清楚，一目了然。即使结合第三方大量博客(CSDN,知乎等，见文后 References)，也未必能阐述清楚。故结合 OpenCV 源码和论文“a generic camera model and calibration method for conventional-wide-angle and fisheye lenses”，再经过本 Repo 实践，我画出下面的成像原理图，符号和公式严格表达准确，代码运行可靠！



简单阐述下上述我绘制的图中的主要符号，坐标系  $X_cO_1Y_c$  为相机物理坐标系，蓝色平面  $\pi_1$  为归一化成像平面(离光心  $O_1$  的距离为 1)，橙色平面  $\pi_2$  为实际成像平面(离光心  $O_1$  的距离为焦距  $f$ )，点  $P$  为坐标系  $X_cO_1Y_c$  下的一外点，光线通过红色虚线射入，从绿色虚线“折射”到成像平面“引起畸变”；点  $p', N$  分别为平面  $\pi_2, \pi_1$  理想透视投影点，点  $p, M$  分别为平面  $\pi_2, \pi_1$  实际投影畸变点。另外位于平面  $\pi_1$  的  $\|O_2M\| = r_d, \|O_2N\| = r$ ，而不是平面  $\pi_2$  中的  $\|O_3p\| \neq r_d, \|O_3p'\| \neq r$ ，这在 OpenCV 文档中并没有解释清楚。

点  $P(x_c, y_c, z_c)$  透视投影经归一化为平面  $\pi_1$  中的点  $N(x_n, y_n)$ ，

$$x_n = \frac{x_c}{z_c}, y_n = \frac{y_c}{z_c}$$

$$r^2 = x_n^2 + y_n^2$$

$$\theta = \text{atan}(r)$$

畸变像高：

$$r_d = \theta(1 + k_1\theta^2 + k_2\theta^4 + k_3\theta^6 + k_4\theta^8)$$

同时， $\triangle O_1O_2M$ 为直角三角形，满足，

$$r_d = 1 * \tan(\theta_d)$$

注意上述式子中的 $r_d$ 并非 OpenCV 文档中写的 $\theta_d$ ，然后计算比例因子 scale，

$$\text{scale} = \frac{r_d}{r}$$

又因 $\triangle O_1O_2N \sim \triangle O_1O_3p'$ ,  $\triangle O_1O_2M \sim \triangle O_1O_3p$ ,

$$\text{则 scale} = \frac{r_d}{r} = \frac{\|O_3p\|}{\|O_3p'\|}$$

为了得到点 $p$ 的畸变坐标 $(x_d, y_d)$ ，有，

$$x_d = \text{scale} * a$$

$$y_d = \text{scale} * b$$

设点 $O_3$ 在像素平面 uv 下的坐标为 $(U_0, V_0)$ ，在 x 轴，y 轴单位长度上的像素数为 $f_x, f_y$ ，则像素坐标为，

$$u = f_x * x_d + U_0$$

$$v = f_y * y_d + V_0$$

如果考虑错切因子 $\alpha$ ，则上式 $u = f_x * (x_d + \alpha y_d) + U_0$ ，此时内参矩阵 $K$ 即为，

$$K = \begin{bmatrix} f_x & \alpha & U_0 \\ 0 & f_y & V_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意上述步骤其实是图像去畸变的工作过程，先一一找到无畸变点对应的畸变点坐标映射，合适时候再通过插值找到对应的像素点。

如果是某个点的去畸变，则需要逆向求解上述过程，其中有已知 $\theta_d$ ，求 $\theta$ ，这就很多方法了，不在此描述。

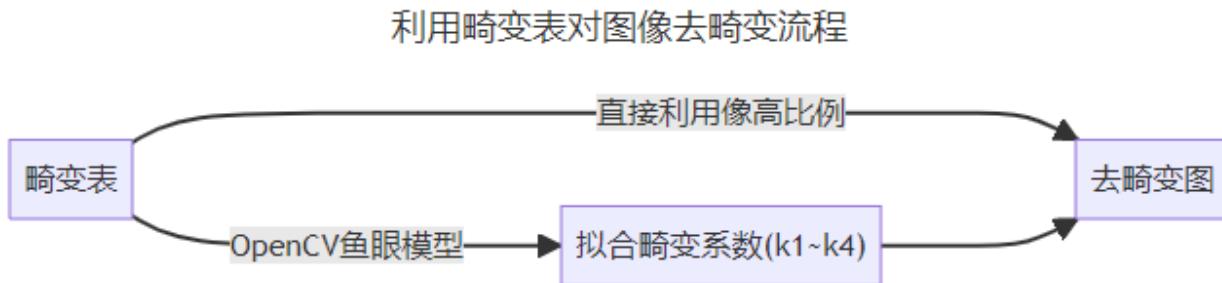
注意误区：

- $r_d$ ,  $r$  的计算分析均指在归一化平面  $\pi_1$  上进行的, 而不是实际成像平面  $\pi_2$ 。
- OpenCV 文档中写的是  $\theta_d = \theta(1 + k_1\theta^2 + k_2\theta^4 + k_3\theta^6 + k_4\theta^8)$  不准确的, 并非上述公式中的  $\theta_d$ , 这是因为 OpenCV 源码变量中把  $r_d$  中间临时变量写成了  $\theta_d$ , 而文档是根据代码自动生成的, 这就导致了描述不够准确, 但内部计算逻辑是正确的,  $\theta$  和  $\theta_d$  单位为弧度, 非度数。
- 参考文献 4 描述“畸变与焦距无关”是不完全正确的, 这在归一化成像平面  $\pi_1$  上成立, 因为有  $r_d = 1 * \tan(\theta_d)$ , 但在实际成像平面上  $\pi_2$  上不成立, 因为  $\|O_3p\| = f * \tan(\theta_d)$ ,  $\theta_d$  一定的情况下, 与焦距  $f$  成正比的。
- 参考文献 4 把平面  $\pi_1$  和平面  $\pi_2$  混为一团, 后果是牵强认为  $r_d = 1 * \tan(\theta_d) = \theta_d$ , 为了说服其成立, 认为“ $\theta_d$  趋于 0,  $r_d$  就等于  $\theta_d$ ”, 但这里根本就没有趋向于 0 的说法。

总结几点:

- 归一化平面  $\pi_1$  存在的目的是为了求取尺度 scale, 然后根据三角形相似原理转嫁到实际成像平面  $\pi_2$  做去畸变计算。
- 焦距不会影响畸变形状 (或外观), 影响的是尺度变化, 但尺度变化百分比保持不变。
- 4 个畸变系数  $k_1, k_2, k_3, k_4$  影响畸变形状 (或外观), 也会影响尺度大小。
- 内参矩阵  $K$  是相机物理坐标与像平面像素坐标互相转换的“过渡矩阵”, 决定着畸变中心位置坐标和坐标系转换的功能。

为了利用畸变表提供的数据对畸变图像进行去畸变, 通常有下面 2 种方式:



下面对上述 2 种方式分别进行实现。

### 直接根据畸变表对图像去畸变

主要利用畸变表中像高比例进行查表(一维插值)进行畸变量计算, 算法步骤为:

1. 根据畸变表估算内参矩阵  $K$  和人为指定无畸变图大小;
2. 利用内参矩阵  $K$  对某个无畸变图像像素坐标  $(u, v)$  转为像平面  $\pi_2$  的物理坐标  $(x, y)$ ;
3. 计算物理坐标  $(x, y)$  离原点的距离为  $\text{RefH}$ ;
4. 计算入射角  $\theta$ , 然后查表得到畸变像高距离  $r_d$ , 直接根据比例计算物理畸变点坐标  $(x_d, y_d)$ ;
5. 再次利用内参矩阵  $K$  将物理畸变点坐标  $(x_d, y_d)$  转为像素坐标  $(u_d, v_d)$ ;

6. 对所有无畸变图上的点重复 step2-5 找到像素坐标映射关系  $(u, v) \rightarrow (u_d, v_d)$ , 最后图像插值即可完成去畸变。

读取畸变视频/图像源

```
distortFrame = imread("data/distortionImage1.png");
figure;imshow(distortFrame);
title("distortion image")
```



```
distortionTablePath = "./data/distortionTable.xlsx";
sensorRatio = 0.003;% 由厂家提供, 单位 mm/pixel
```

```
cameraData = readtable(distortionTablePath, Range="A4:D804", VariableNamingRule="preserve");
head(cameraData)% 预览前面若干行数据
```

Y Angle (deg)	Real Height	Ref. Height	Distortion(f-tanθ)
0.1	0.0050939	0.005103	-0.00011259
0.2	0.010188	0.010207	-0.00048478
0.3	0.015282	0.01531	-0.0011181
0.4	0.020376	0.020414	-0.0020122
0.5	0.025469	0.025518	-0.0031675
0.6	0.030563	0.030622	-0.0045836
0.7	0.035657	0.035726	-0.0062606
0.8	0.040751	0.04083	-0.0081985

第一列为入射角, 第二列为实际畸变量长度, 单位 : mm, 第三列为理想参考投影长度, 单位 : mm.

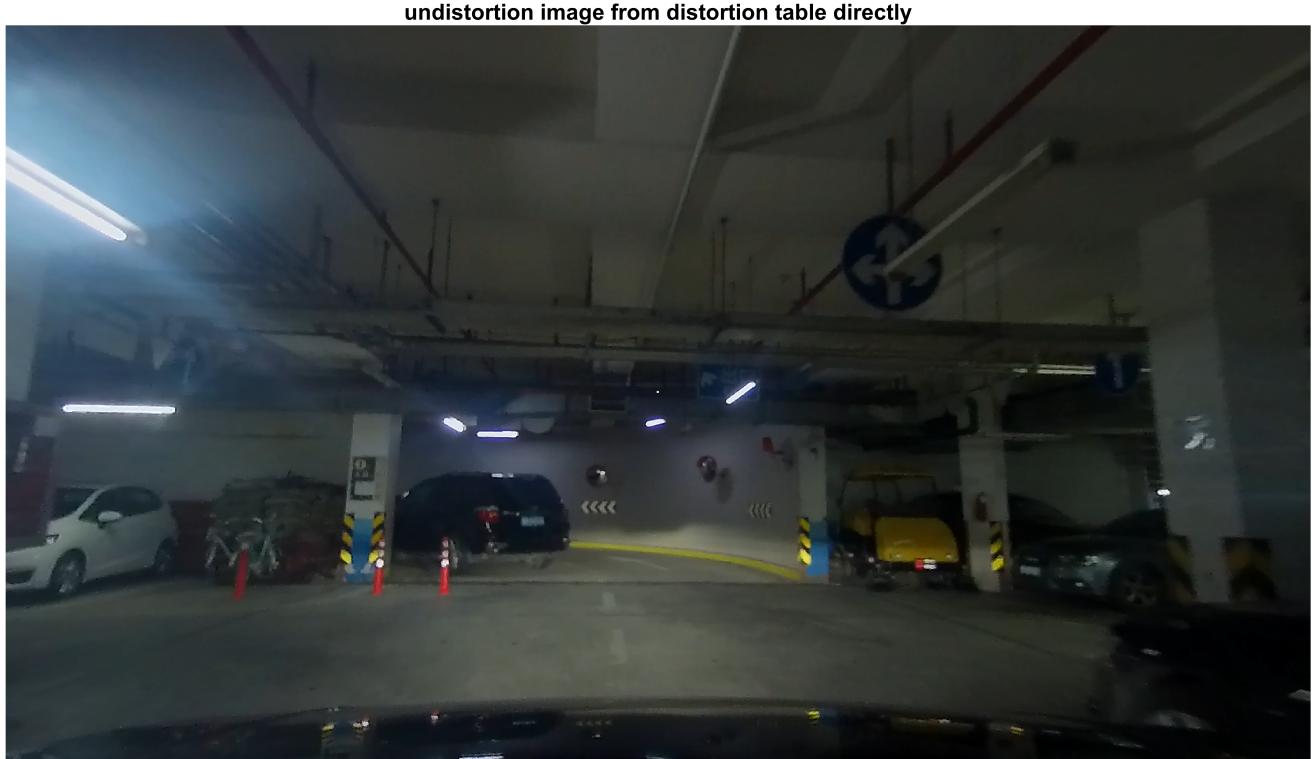
```
angleIn = cameraData{:,1};% 入射角
```

```

focal = mean(cameraData{:,3}./tand(angleIn));% 焦距, 单位:mm
angleOut = atan2d(cameraData{:,2},focal);% 出射角
cameraDataIn = table(angleIn,angleOut,VariableNames = ["angle","angle_d"]);
[h,w,~] = size(distortFrame);

K = [focal/sensorRatio,0,w/2;
      0,focal/sensorRatio,h/2;
      0,0,1];
undistortImg = undistortFisheyeImgFromTable(distortFrame,K,cameraDataIn,OutputView="same");
figure;
imshow(undistortImg);
title("undistortion image from distortion table directly")

```



## 畸变表拟合系数对图像去畸变

先对畸变表中的像高按照归一化平面 $\pi_1$ 进行像高的转换，然后根据畸变公式进行系数拟合，最后根据比例进行查表(一维插值)进行畸变量计算，算法步骤为：

1. 根据畸变表数据(实际焦距 $f$ 下的像高)换算为归一化平面 $\pi_1$ 的像高；
2. 按照畸变公式进行系数拟合得到 $k_1 \sim k_4$ ,同时估算内参矩阵 $K$ 和人为指定无畸变图大小;
3. 利用内参矩阵 $K$ 对某个无畸变图像像素坐标 $(u, v)$ 转为像平面 $\pi_1$ 的物理坐标 $(x, y)$ ；
4. 计算物理坐标 $(x, y)$ 离原点的距离为 RefH；
5. 计算入射角 $\theta$ ，然后根据畸变公式得到畸变像高距离 $r_d$ ,随后根据比例计算物理畸变点坐标 $(x_d, y_d)$ ；
6. 再次利用内参矩阵 $K$ 将物理畸变点坐标 $(x_d, y_d)$ 转为像素坐标 $(u_d, v_d)$ ；

7. 对所有无畸变图上的点重复 step2-5 找到像素坐标映射关系  $(u, v) \rightarrow (u_d, v_d)$ , 最后图像插值即可完成去畸变。

```
r_d = 1./focal*cameraData{:,2};% 求归一化平面上的 r_d  
thetaRadian = deg2rad(angleIn);% 度数转为弧度
```

由前面分析的畸变像高公式, 对归一化平面  $\pi_1$  上每一个入射角  $\theta(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ , 有下述等式成立,

$$\begin{cases} \theta_1 + k_1\theta_1^3 + k_2\theta_1^5 + k_3\theta_1^7 + k_4\theta_1^9 = r_{d1} \\ \theta_2 + k_1\theta_2^3 + k_2\theta_2^5 + k_3\theta_2^7 + k_4\theta_2^9 = r_{d2} \\ \vdots \\ \theta_n + k_1\theta_n^3 + k_2\theta_n^5 + k_3\theta_n^7 + k_4\theta_n^9 = r_{dn} \end{cases}$$

写为矩阵形式, 为,

$$\begin{bmatrix} \theta_1^3 & \theta_1^5 & \theta_1^7 & \theta_1^9 \\ \theta_2^3 & \theta_2^5 & \theta_2^7 & \theta_2^9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_n^3 & \theta_n^5 & \theta_n^7 & \theta_n^9 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{d1} - \theta_1 \\ r_{d2} - \theta_2 \\ \vdots \\ r_{dn} - \theta_n \end{bmatrix}$$

典型为  $A * x = b$ , 最小二乘解为  $x = A \setminus b$ .

```
A = [thetaRadian.^3,thetaRadian.^5,thetaRadian.^7,thetaRadian.^9];  
b = r_d-thetaRadian;  
opencvCoeffs = A\b;  
disp("最小二乘拟合 OpenCV 鱼眼模型畸变系数为(k1~k4) : "+strjoin(string(opencvCoeffs)',","))
```

最小二乘拟合 OpenCV 鱼眼模型畸变系数为(k1~k4) : -0.10493,0.015032,-0.013603,0.0030601

```
newCameraMatrixK = K;  
newImageSize = size(distortFrame,[1,2]);% [height,width]  
[mapX,mapY] = initUndistortRectifyMapOpenCV(K, opencvCoeffs,newCameraMatrixK,newImageSize);
```

mapX, mapY 即为映射  $(u, v) \rightarrow (u_d, v_d)$  的关系坐标。

```
undistortImg2 = images.internal.interp2d(distortFrame,mapX,mapY,"linear",255, false);  
figure;  
imshow(undistortImg2)  
title("undistortion image from fit opencv fisheye model coefficient")
```



可以看出两种方法效果图一致，主要区别就是尺度 scale 计算方式不同，一个是直接查表得到 scale，另一个是拟合公式求 scale，没有明显的本质区别。

### 畸变系数推算畸变表

有时厂商提供了镜头畸变表，并且我们也通过 OpenCV 标定了该镜头得到内参矩阵  $K$  和畸变系数  $k_1 \sim k_4$ ，但我们要想验证我们的标定算法与厂商提供的畸变表“差距”有多大，那也可以通过畸变系数推算畸变表，然后绘制像高曲线进行比对，从而确保双向验证参数的准确性和一致性。

为实验方便，直接采用上节拟合的畸变系数  $k_1 \sim k_4$  和估计的内参矩阵  $K$  作为我们的“标定参数”结果，反推上述的畸变表 cameraData 数据，注意这里已知  $\theta$ ，求像高。

```
disp("标定内参矩阵 K : ");
```

标定内参矩阵 K :

```
disp(newCameraMatrixK);
```

```
974.6782      0  960.0000
    0  974.6782  540.0000
    0      0     1.0000
```

```
disp("标定的畸变系数为(k1~k4) : "+strjoin(string(opencvCoeffs'),","))
```

标定的畸变系数为(k1~k4) : -0.10493,0.015032,-0.013603,0.0030601

```
% 入射角是从 0.1°逐渐变化到 90°，转为弧度制
theta = deg2rad(angleIn);
```

```

RefX = tan(theta);
RefX = filloutliers(RefX,"nearest","mean");% 过滤填充异常点, tan90 接近无限大
RefY = 0;
RefH = abs(RefX).*sign(tan(theta)); % 单位:mm

% 再计算拟合像高
r_d = theta.*(1+opencvCoeffs(1)*theta.^2+opencvCoeffs(2)*theta.^4+...
    opencvCoeffs(3)*theta.^6+opencvCoeffs(4)*theta.^8);

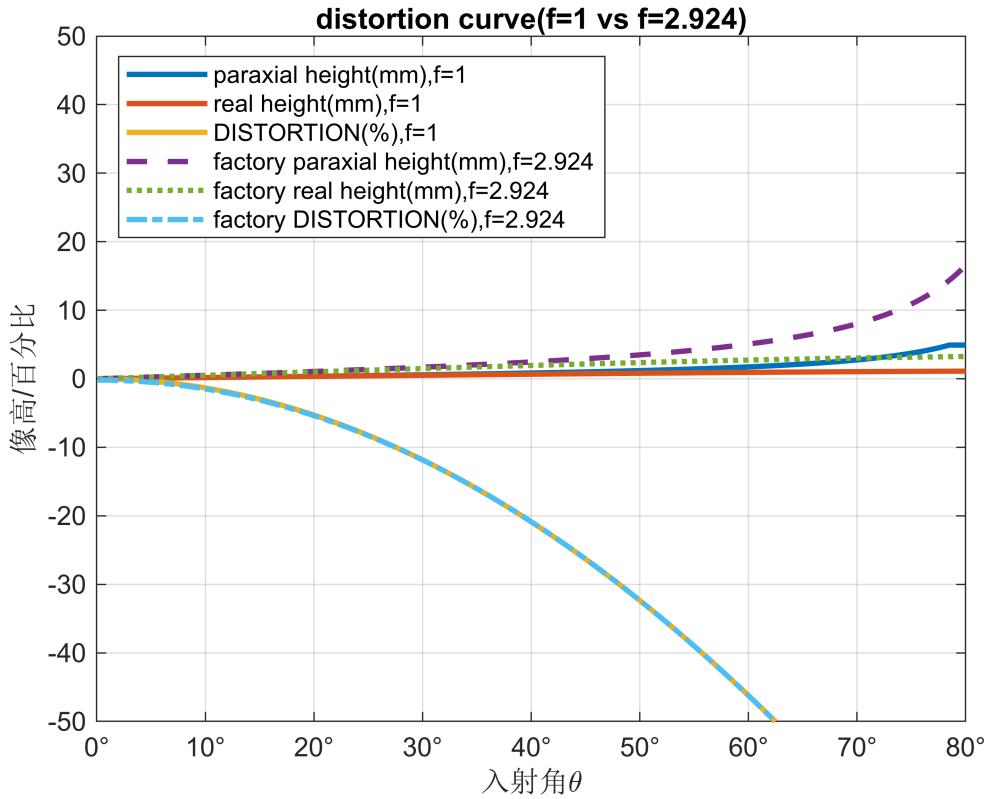
scale = r_d./RefH;
RealX = RefX.*scale;
RealY = RefY.*scale;
r_d = sqrt(RealX.^2+RealY.^2);

% 绘制参考像高 vs 实际像高 vs 百分比误差
figure;
plot(rad2deg(theta),RefH, ...
    rad2deg(theta),r_d, ...
    rad2deg(theta),(r_d-RefH)./RefH*100, ...
    LineWidth=2)
hold on;grid on;

plot(cameraData{:,1},cameraData{:,3},"--",... % Ref height
    cameraData{:,1},cameraData{:,2},":",... % Real height
    cameraData{:,1},(cameraData{:,2}-cameraData{:,3})./cameraData{:,3}*100,"-.", ...
    LineWidth=2)

f = mean([newCameraMatrixK(1,1),newCameraMatrixK(2,2)])*sensorRatio;
legend(["paraxial height(mm),f=1", "real height(mm),f=1", "DISTORTION(%),f=1", ...
    "factory paraxial height(mm),f="+string(f), "factory real height(mm),f="+string(f), ...
    "factory DISTORTION(%),f="+string(f)],Location="northwest");
ax = gca;
ax.YLim = [-50,50];
ax.XAxis.TickLabelFormat = '%g\x00B0';% 'degrees'
xlabel("入射角\theta");
ylabel("像高/百分比");
title("distortion curve(f=1 vs f="+string(mean(f))+")");

```



实线为推算的像高曲线与厂商提供畸变表像高曲线(虚线)不重合？

Oops！原来是在不同成像平面上像高差异导致的(就是最上面分析的平面 $\pi_1$ ,  $\pi_2$ )，他们的畸变百分比是一致的！再看下下面焦距弥补导致的像高曲线变化。

```
% 转换到实际 f 的焦距成像平面上的像高
RefH = f.*RefH;
r_d = f.*r_d;

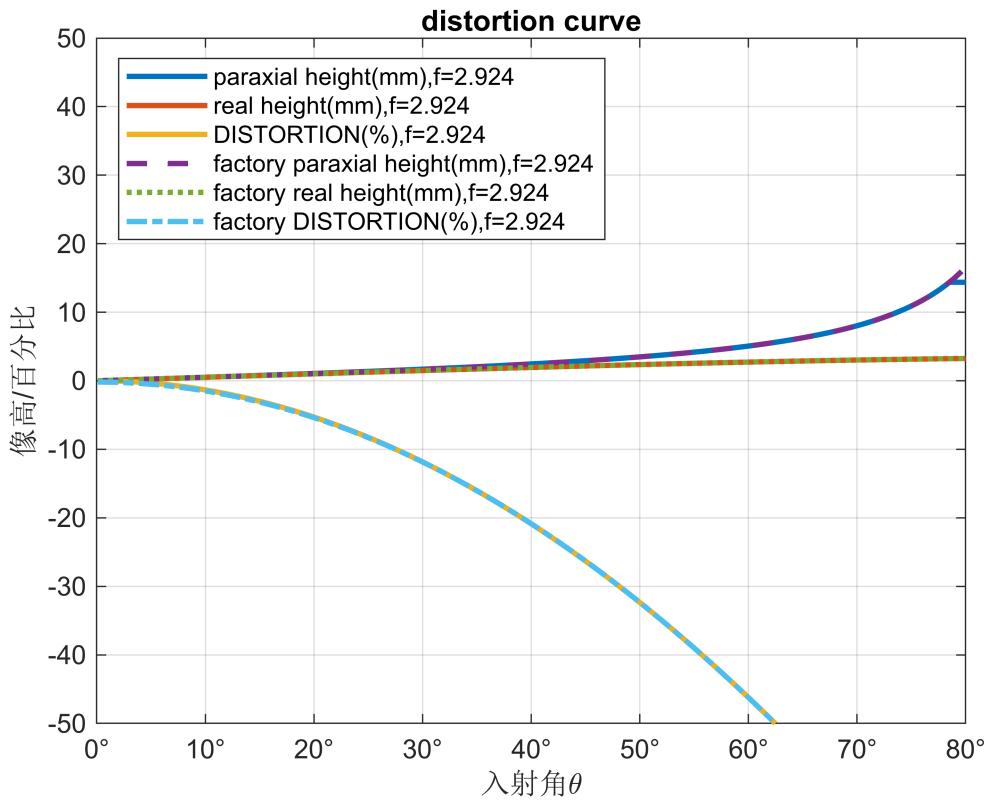
% 绘制厂商结果对比图
figure;
plot(rad2deg(theta),RefH,...)
plot(rad2deg(theta),r_d,...)
plot(rad2deg(theta),(r_d-RefH)./RefH*100,...)
LineWidth=2)
hold on;grid on;

plot(cameraData{:,1},cameraData{:,3},"--",... % Ref height
     cameraData{:,1},cameraData{:,2},":",... % Real height
     cameraData{:,1},(cameraData{:,2}-cameraData{:,3})./cameraData{:,3}*100,"-.",
     LineWidth=2)
legend(["paraxial height(mm),f="+string(f),"real height(mm),f="+string(f),"DISTORTION(%),f="+string(f),
        "factory paraxial height(mm),f="+string(f),"factory real height(mm),f="+string(f),...
        "factory DISTORTION(%),f="+string(f)],Location="northwest");
ax = gca;
ax.YLim = [-50,50];
```

```

ax.XAxis.TickLabelFormat = '%g\x00B0';% 'degrees'
xlabel("入射角\theta");
ylabel("像高/百分比");
title("distortion curve");

```



```
writematrix([rad2deg(theta),r_d,RefH],"backupDistortionTable.xlsx")
```

现在为实际焦距  $f$  下的成像像高，符合预期期望。

## References

1. [Fisheye camera model](#)
2. Juho Kannala and Sami Brandt. A generic camera model and calibration method for conventional, wide-angle, and fish-eye lenses. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 28:1335–40, 09 2006.
3. [常用相机投影及畸变模型（针孔|广角|鱼眼）](#)
4. [鱼眼镜头的成像原理到畸变矫正（完整版）](#)
5. [What are the main references to the fish-eye camera model in OpenCV3.0.0dev?](#)
6. [Fisheye Projection](#)