360°全景球内外图像顺滑过渡算法

算法核心思想：横看成岭侧成峰，远近高低各不同！

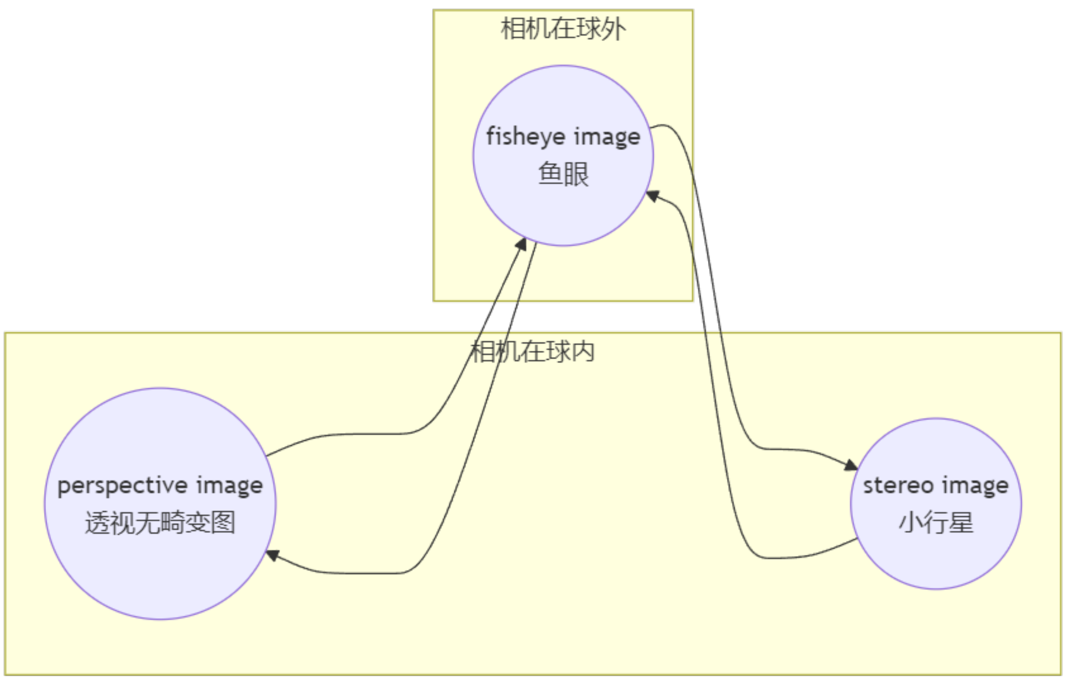
author:崔星星

cuixingxing150@gmail.com

date:2024.9.24

OverView

本示例展示了 360°全景图像在单位球面的纹理渲染平滑过渡算法，重点阐述了球体内外相机位置、方向发生突变的情况下，依旧能保证渲染图像可以平滑过渡转换，视觉上不会引起画面突变切换障碍。球体内外过渡在 3 种典型模式("fisheye","perspective","stereo")下主要表现为下图中的 4 种箭头转换关系，详细给出了算法原理和代码实践！

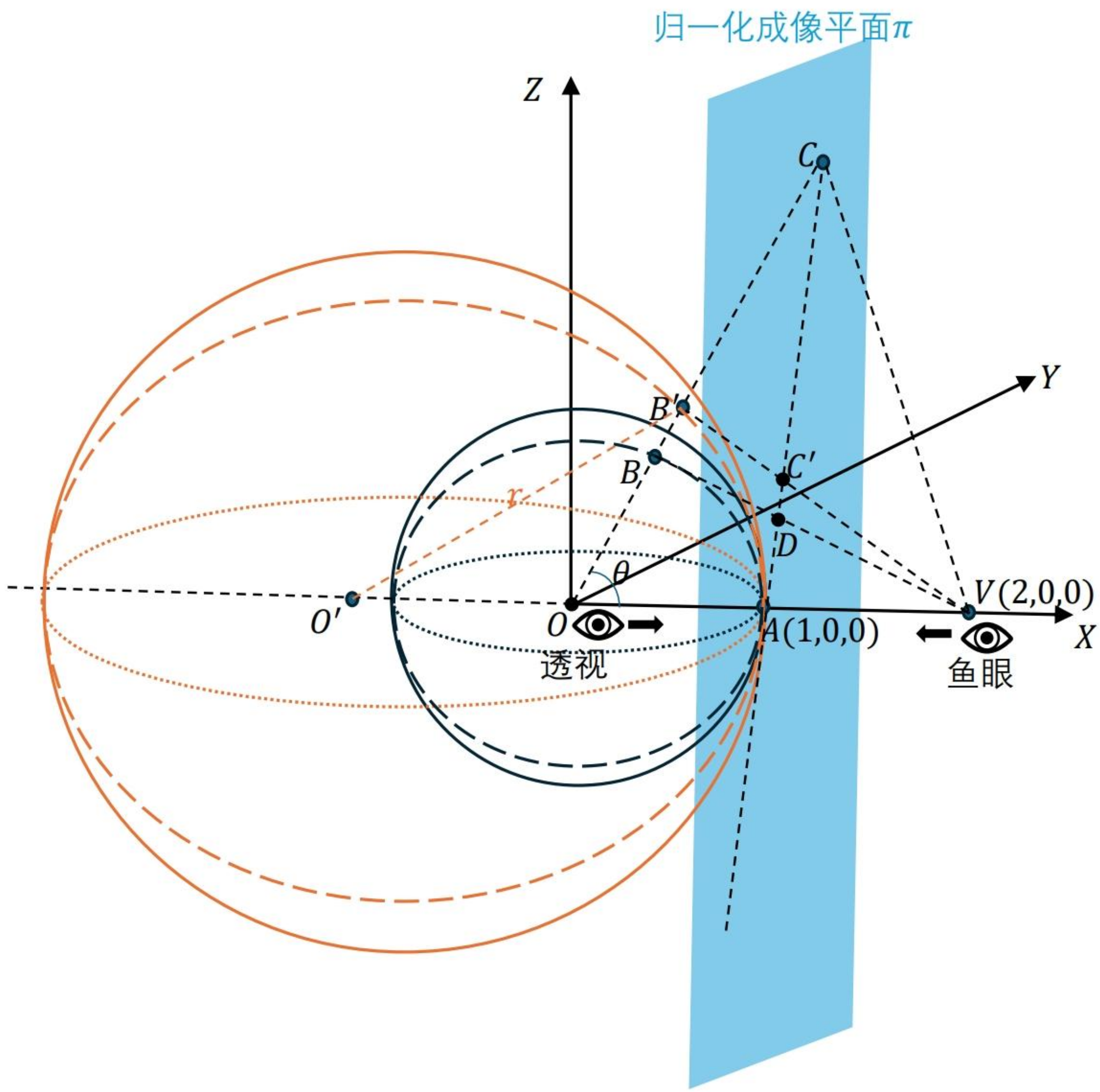


目录

透视与鱼眼相互转换

问题描述

为了能够较顺滑的在透视和鱼眼两种视角平滑过渡渲染，数学上表现为单位球体内，外之间视角变换，不能简单的对各个变量进行线性插值(仅适用球体内的小行星和透视之间的模式)，我特意画出如下成像示意图：



两种视角模式：

- 从球心$O(0,0,0)$向目标点$A(1,0,0)$方向观看，黑色的单位球面纹理在归一化成像平面π上的投影为透视无畸变投影（Gnomonic projection）
- 从点$V(2,0,0)$向目标点$A(1,0,0)$方向观看，黑色的单位球面纹理在归一化成像平面π上的投影为鱼眼投影（Fisheye Projection）

要在上述两种模式之间使得观察图像平滑过渡，那么每个投影像素点坐标要连续变化，即不能突变，表现在投影成像平面π上的无畸变点 C(从点 O 看，点 B 在平面π上的投影点)和畸变点 D(从点 V 看，点 B 在平面π上的投影点)之间的顺滑过渡。橙色大球体是一个半径$r \in [1, \mathrm{inf}]$范围，球心O'位于 X 负半轴，并且始终与点 A 相切不断变化的球体。黑色小球体是一个半径为 1，位置始终固定的单位球体，其表面纹理为一副 360° equirectangular 类型全景渲染图像，点 B 为单位球体纹理表面上任意一点，在点 O 沿着视线方向看，即延长 OB 与橙色大球体表面相交于点B',与平面π相交于点 C，连接点B'和点 V，与平面π相交于点C'，当橙色大球体半径逐渐变动时，那么点C'即为过渡变化点。由简单的几何关系可知，点 C,C',D,A 四点始终共线。

相应地，**单位球体上弧**$\widehat{\mathrm{AB}}$**的纹理映射到橙色大球体上弧**$\widehat{\mathrm{AB}'}$**,这样从点** V **看，实际点** B **在平面**π**上的投影点看起来像是从虚拟点**B'**投影到点**C'**产生的，从而达到了图像像素点顺滑过渡的效果！**

问题求解

现问题变为：已知点 B 坐标为(x_0, y_0, z_0),摄像机视场角为θ，即图中$\angle \mathrm{COV} = \theta$，$\|O'B'\| = r$，求虚拟点$B'$的坐标$(x, y, z)$。

在$\triangle O'\mathrm{OB}'$中，设$\|OB'\| = l$,利用三角形余弦公式，可知：

$$r^2 = (r-1)^2 + l^2 - 2l(r-1)\cos(\pi - \theta)$$

可求解 l(只有一个有效解)，然后利用等比关系，进而可求解得到点B'的坐标如下：

$$\begin{cases} x = & l * \cos(\theta) \\ y = & \dfrac{y_0 * l * \cos(\theta)}{x_0} \\ z = & \dfrac{z_0 * l * \cos(\theta)}{x_0} \end{cases}$$

代码实践

公式推导

```
syms r l theta
equ = r.^2==(r-1).^2+l.^2-2*l*(r-1).*cos(pi-theta)
```

equ = $r^2 = (r-1)^2 + l^2 + 2\,l\cos(\theta)\;(r-1)$

```
sol = solve(equ,l)
```

sol =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) + \sqrt{r^2\cos(\theta)^2 - 2\,r\cos(\theta)^2 + 2\,r + \cos(\theta)^2 - 1} - r\cos(\theta) \\ \cos(\theta) - \sqrt{r^2\cos(\theta)^2 - 2\,r\cos(\theta)^2 + 2\,r + \cos(\theta)^2 - 1} - r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

从求解的结果 sol 看出有 2 个解，取其中一个有效解：

```
l = sol(1)
```

l = $\cos(\theta) + \sqrt{r^2\cos(\theta)^2 - 2\,r\cos(\theta)^2 + 2\,r + \cos(\theta)^2 - 1} - r\cos(\theta)$

带入最终公式，得到点B'的坐标(x, y, z)如下：

```
syms x_0 y_0 z_0
x = l*cos(theta)
```

x = $\cos(\theta)\left(\cos(\theta) + \sqrt{r^2\cos(\theta)^2 - 2\,r\cos(\theta)^2 + 2\,r + \cos(\theta)^2 - 1} - r\cos(\theta)\right)$

```
y = y_0*x/x_0
```

y =

$$\frac{y_0\cos(\theta)\left(\cos(\theta) + \sqrt{r^2\cos(\theta)^2 - 2\,r\cos(\theta)^2 + 2\,r + \cos(\theta)^2 - 1} - r\cos(\theta)\right)}{x_0}$$

```
z = z_0*x/x_0
```

z =

$$\frac{z_0\cos(\theta)\left(\cos(\theta) + \sqrt{r^2\cos(\theta)^2 - 2\,r\cos(\theta)^2 + 2\,r + \cos(\theta)^2 - 1} - r\cos(\theta)\right)}{x_0}$$

```
x = subs(x,theta,pi/6)
```

x =

$$\frac{\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}\,r}{2} + \sqrt{\frac{3\,r^2}{4} + \frac{r}{2} - \frac{1}{4}}\right)}{2}$$

```
vpa(limit(x,r,inf))
```

ans = 1.0

当$\theta = \frac{\pi}{6}$，r趋向于无穷大时，可以看到比较接近成像平面π了，就更接近于透视视图。

算法实现

把上述推导出的点B'的坐标(x, y, z)公式代入计算，并任意读取一副 360° equirectangular 类型全景图像并进行渲染，动态透视转换鱼眼效果如下：

```
%% 演示透视转鱼眼，光滑过渡效果！
[X,Y,Z] = sphere(50);
figure(Position=[20,20,800,800]);
ax = gca;
% mesh(ax,X,Y,Z)
hold(ax,"on");
ax.DataAspectRatio = [1,1,1];
axis(ax,"off");
```

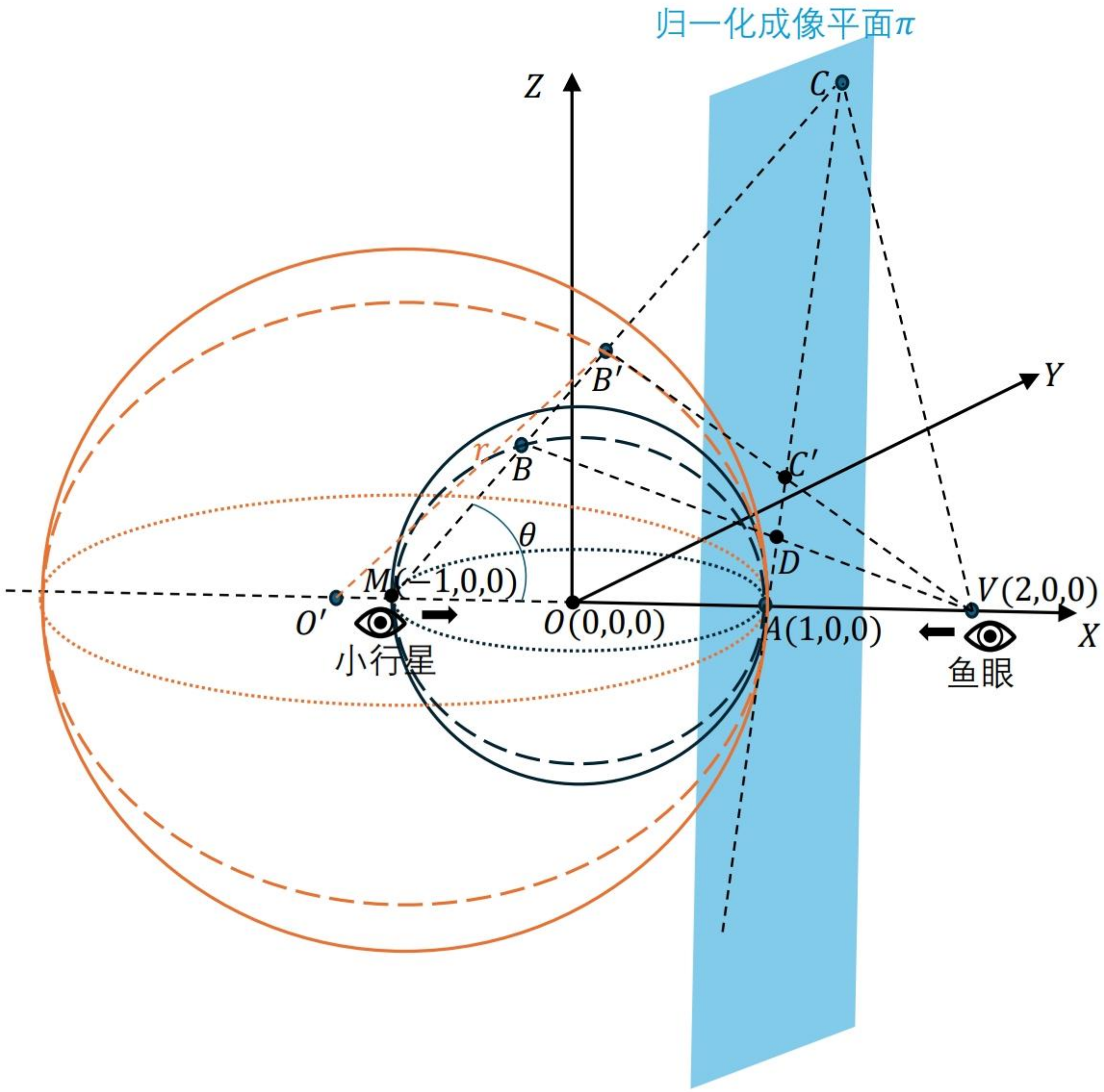
```
%% 纹理
frame = imread("https://raw.githubusercontent.com/cuixing158/360-panorama-viewer-app/main/data/360panorama.jpg");
s = surf(ax,X,Y,Z,frame,'FaceColor','texture','EdgeColor','none');
ax.Projection="perspective";
ax.CameraPosition = [2,0,0];
ax.CameraViewAngle=60;
ax.CameraUpVector = [0,0,-1];
ax.CameraTarget = [1,0,0];

maskCoord = s.XData>cosd(180/2);
XData = s.XData(maskCoord);
YData = s.YData(maskCoord);
ZData = s.ZData(maskCoord);

theta = acosd(XData);
k = 0.01:0.05:1;
for r = 1./k
    % 根据上述公式计算
    x = cosd(theta).*(cosd(theta) + sqrt(r.^2.*cosd(theta).^2 - 2*r.*cosd(theta).^2
+ 2*r + cosd(theta).^2 - 1) - r.*cosd(theta));
    y = (YData.*x)./XData;
    z = (ZData.*x)./XData;

    s.XData(maskCoord) = x;
    s.YData(maskCoord) = y;
    s.ZData(maskCoord) = z;

    drawnow;
end
```

上述代码演示了透视转鱼眼的顺滑效果，但当曲率 k 反向变化时候，那么就可以得到鱼眼到透视的转换顺滑。

小行星与鱼眼相互转换

问题描述

类似地，小行星和鱼眼之间的转换关系我画出如下成像示意图：



两种视角模式：

- 从点$M(-1,0,0)$向目标点$A(1,0,0)$方向观看，黑色的单位球面纹理在归一化成像平面π上的投影为透视小行星投影（Stereographic projection）
- 从点$V(2,0,0)$向目标点$A(1,0,0)$方向观看，黑色的单位球面纹理在归一化成像平面π上的投影为鱼眼投影（Fisheye Projection）

要在上述两种模式之间使得观察图像平滑过渡，那么每个投影像素点坐标同样要连续变化，即不能突变，表现在投影成像平面π上的无畸变点C(从点M看，点B在平面π上的投影点)和畸变点D(从点V看，点B在平面π上的投影点，当然如果点B能被点V看到的话)之间的顺滑过渡。橙色大球体仍然是一个半径$r \in [1, \inf]$范围，球心O'位于X负半轴，并且始终与点A相切不断变化的球体。黑色小球体是一个半径为 1，位置始终固定的单位球体，其表面纹理为一副 360° equirectangular 类型全景渲染图像，点B为单位球体纹理表面上任意一点（除点M外），在点M沿着视线方向看，即延长 MB 与橙色大球体表面相交于点B',与平面π相交于点C，连接点B'和点V，与平面π相交于点C'，当橙色大球体半径逐渐变动时，那么点C'即为过渡变化点。同样，由简单的几何关系可知，点C,C',D,A四点始终共线。

相应地，单位球体上弧$\widehat{\mathrm{AB}}$的纹理映射到橙色大球体上弧$\widehat{\mathrm{AB}'}$,这样从点V看，实际点B在平面π上的投影点看起来像是从虚拟点B'投影到点C'产生的，从而达到了图像像素点顺滑过渡的效果！

问题求解

现问题变为：已知点B坐标为(x_0, y_0, z_0),摄像机视场角为θ，即图中$\angle \mathrm{CMV} = \theta$，$\|MB'\| = r$，求虚拟点$B'$的坐标$(x, y, z)$。

在$\triangle O'M\mathrm{B}'$中，设$\|MB'\| = l$,同样，利用三角形余弦公式，可知：

$$r^2 = (r-2)^2 + l^2 - 2l(r-2)\cos(\pi - \theta)$$

可求解l(只有一个有效解)，然后利用等比关系，进而可求解得到点B'的坐标如下：

$$\begin{cases} x = & l * \cos(\theta) - 1 \\ \dfrac{y-0}{y_0-0} = & \dfrac{x+1}{x_0+1} \\ \dfrac{z-0}{z_0-0} = & \dfrac{x+1}{x_0+1} \end{cases}$$

上述公式是假定球心O'在单位球体外，如果在单位球内或者位于点M，不妨碍上述公式计算的正确性(读者可自行验证)。

代码实践

公式推导

```
syms r l theta
equ = r.^2==(r-2).^2+l.^2-2*l*(r-2).*cos(pi-theta)
```

equ = $r^2 = (r-2)^2 + l^2 + 2\,l\cos(\theta)\;(r-2)$

```


sol = solve(equ,l)
```

sol =

$$\begin{pmatrix} 2\cos(\theta) - \sqrt{r^2\cos(\theta)^2 - 4\,r\cos(\theta)^2 + 4\,r + 4\cos(\theta)^2 - 4} - r\cos(\theta) \\ 2\cos(\theta) + \sqrt{r^2\cos(\theta)^2 - 4\,r\cos(\theta)^2 + 4\,r + 4\cos(\theta)^2 - 4} - r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

从求解的结果 sol 看出有 2 个解，取有效的那个解：

```
l = sol(2)
```

l = $2\cos(\theta) + \sqrt{r^2\cos(\theta)^2 - 4\,r\cos(\theta)^2 + 4\,r + 4\cos(\theta)^2 - 4} - r\cos(\theta)$

带入最终公式，得到点B'的坐标(x, y, z)如下：

```
syms x_0 y_0 z_0
x = l*cos(theta)-1
```

x = $\cos(\theta)\ \left(2\cos(\theta)+\sqrt{r^2\cos(\theta)^2-4\,r\cos(\theta)^2+4\,r+4\cos(\theta)^2-4}-r\cos(\theta)\right)-1$

```
y = y_0*(x+1)/(x_0+1)
```

y =

$$\frac{y_0\cos(\theta)\ \left(2\cos(\theta)+\sqrt{r^2\cos(\theta)^2-4\,r\cos(\theta)^2+4\,r+4\cos(\theta)^2-4}-r\cos(\theta)\right)}{x_0+1}$$

```
z = z_0*(x+1)/(x_0+1)
```

z =

$$\frac{z_0\cos(\theta)\ \left(2\cos(\theta)+\sqrt{r^2\cos(\theta)^2-4\,r\cos(\theta)^2+4\,r+4\cos(\theta)^2-4}-r\cos(\theta)\right)}{x_0+1}$$

```
x = subs(x,theta,pi/3 )
```

x =

$$\frac{\sqrt{\frac{r^2}{4}+3\,r-3}}{2}-\frac{r}{4}-\frac{1}{2}$$

```
limit(x,r,inf)
```

ans = 1

当给定$\theta=\frac{\pi}{3}$时候，r趋向于无穷大时候，x坐标越靠近归一化成像平面，就更接近于小行星视图。

算法实现

把上述推导出的点B'的坐标(x,y,z)公式代入计算，并任意读取一副 360° equirectangular 类型全景图像并进行渲染，动态鱼眼转小行星效果如下：

```
%% 演示鱼眼转小行星，光滑过渡效果！
[X,Y,Z] = sphere(50);
fig = figure(Position=[20,20,800,800]);
ax = gca;
% mesh(ax,X,Y,Z)
hold(ax,"on");
ax.DataAspectRatio = [1,1,1];
axis(ax,"off")
littlePlanetFov = 150; % 小行星视场角，越大图像越夸张
fisheyeFov = 60; % 鱼眼摄像机观察单位球的视场角

% 纹理和设置相机参数
frame = imread("https://raw.githubusercontent.com/cuixing158/360-panorama-viewer-app/main/data/360panorama.jpg");
s = surf(ax,X,Y,Z,frame,'FaceColor','texture','EdgeColor','none');
```

```
ax.Projection="perspective";
ax.CameraPosition = [2,0,0];
ax.CameraUpVector = [0,0,-1];
ax.CameraTarget = [1,0,0];
ax.CameraViewAngle = littlePlanetFov;

% 旋转一定角度，让其有代表性的小行星图
direction = [0,1,0];
rotate(s,direction,90);% 正 90 度对应地面，-90 度对应天空

% 对 x 正半轴的坐标点做变换即可
maskCoord = s.XData>cosd(360/2);
XData = s.XData(maskCoord);
YData = s.YData(maskCoord);
ZData = s.ZData(maskCoord);

norma = sqrt((XData+1).^2+YData.^2+ZData.^2);
normb = 1;
theta = acosd((XData+1)./(norma*normb));

k = 1:-0.02:0.01;% 曲率变化范围
fovQuerys = interp1([k(1),k(end)],[fisheyeFov,littlePlanetFov],k);
idx = 1;
for r = 1./k
    % 根据上述公式计算
    x = cosd(theta).*(2*cosd(theta) + sqrt(r.^2.*cosd(theta).^2 -
4*r.*cosd(theta).^2 + 4*r + 4*cosd(theta).^2 - 4) - r.*cosd(theta)) - 1;
    y = (YData.*(x+1))./(XData+1);
    z = (ZData.*(x+1))./(XData+1);

    s.XData(maskCoord) = x;
    s.YData(maskCoord) = y;
    s.ZData(maskCoord) = z;

    ax.CameraViewAngle = fovQuerys(idx);
    drawnow;
    idx = idx+1;
end
```

上面动画在小行星视图变化太快，鱼眼视图比较缓慢，怎么做到“快进慢出”？下面对曲率 k 进行对数变换，使动画的小行星变化不要太快。

```
k = logspace(0,-2,50);% 对数变化
fovQuerys = interp1([k(1),k(end)],[fisheyeFov,littlePlanetFov],k);
idx = 1;
for r = 1./k
    % 根据上述公式计算
```

```
    x = cosd(theta).*(2*cosd(theta) + sqrt(r.^2.*cosd(theta).^2 -
4*r.*cosd(theta).^2 + 4*r + 4*cosd(theta).^2 - 4) - r.*cosd(theta)) - 1;
    y = (YData.*(x+1))./(XData+1);
    z = (ZData.*(x+1))./(XData+1);

    s.XData(maskCoord) = x;
    s.YData(maskCoord) = y;
    s.ZData(maskCoord) = z;

    ax.CameraViewAngle = fovQuerys(idx);
    drawnow;
    idx = idx+1;
end
```

同样，上述代码演示了鱼眼转小行星的顺滑效果，但当曲率 k 反向变化时候，那么就可以得到小行星转鱼眼的转换顺滑。