

凸优化 第6次作业

1. 原问题

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \frac{1}{\|C^T x - d\|_2} \\ \text{s.t.} \quad & \|Ax - b\|_2 \leq \lambda \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \min_y \quad & \|y\|_2 \\ \text{s.t.} \quad & C^T x - d = y \\ & Ax - b = z \\ & \|z\|_2 \leq \lambda \end{aligned}$$

Lagrange 函数为

$$\begin{aligned} L(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) &= \|y\|_2 + \alpha(C^T x - d - y) + \beta^T(Ax - b - z) + \gamma(\|z\|_2 - \lambda) \\ &= -d\alpha + \beta^T b - \lambda\gamma - \|y\|_2 - \alpha y + \alpha C^T x + \beta^T Ax - \beta^T z + \gamma\|z\|_2 \end{aligned}$$

可得对偶函数为

$$\begin{aligned} g(\alpha, \beta, \gamma) &= -d\alpha + \beta^T b - \lambda\gamma + \inf_x [\|y\|_2 - \alpha y + (\alpha C^T + \beta^T A)x - \beta^T z + \gamma\|z\|_2] \\ &= -d\alpha + \beta^T b - \lambda\gamma + \inf_x (\|y\|_2 - \alpha y + (\alpha C^T + \beta^T A)x) - \gamma \sup_z (\frac{1}{\gamma} \beta^T z - \|z\|_2) \end{aligned}$$

故对偶问题为

$$\begin{aligned} \max_{\alpha, \beta, \gamma} \quad & -d\alpha + \beta^T b - \lambda\gamma \\ \text{s.t.} \quad & \alpha C^T + \beta^T A = 0 \\ & \left| \frac{1}{\gamma} \beta^T \right|_2 \leq 1 \\ & |\alpha|_2 \leq 1 \end{aligned}$$