凸优化 第6次作业

1. 原问题

$$\max_x \frac{1}{|C^T x - d|_2} \quad \text{s.t. } |Ax-b|_2 \le \lambda \iff \min_y |y|_2 \quad \text{s.t. } C^T x - d = y,\ Ax - b = Z,\ |Z|_2 \le \lambda$$

Lagrange 函数为

$$L(x,y,Z,\alpha,\beta,\gamma) = |y|_2 + \alpha(C^T x - d - y) + \beta^T(Ax - b - Z) + \gamma(|Z|_2 - \lambda)$$

$$= -d\alpha + \beta^T b - \lambda\gamma - |y|_2 - \alpha y + \alpha C^T x + \beta^T A x - \beta^T Z + \gamma |Z|_2$$

可得对偶函数为

$$g(\alpha,\beta,\gamma) = -d\alpha + \beta^T b - \lambda\gamma + \inf\left(|y|_2 - \alpha y + (\alpha C^T + \beta^T A)x - \beta^T Z + \gamma |Z|_2\right)$$

$$= -d\alpha + \beta^T b - \lambda\gamma + \inf\left(|y|_2 - \alpha y + (\alpha C^T + \beta^T A)x\right) - \gamma \sup\left(\frac{1}{\gamma}\beta^T Z - |Z|_2\right)$$

故对偶问题为

$$\max_{\alpha,\beta,\gamma} -d\alpha + \beta^T b - \lambda\gamma$$

$$\text{s.t. } \alpha C^T + \beta^T A = 0$$

$$\left|\frac{1}{\gamma}\beta^T\right|_2 \le 1$$

$$|\alpha|_2 \le 1$$

2.解：原问题：

$$\min_{x_1,x_2} \quad x_1^2-x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 \geq 1$$

$$x_1^2+x_2^2 \leq 26$$

$$x_1+x_2=6$$

lagrange 函数为 $L(x,\lambda,\mu,\nu)=x_1^2-x_2-\lambda(-x_1+1)+\mu(x_1^2+x_2^2-26)+\nu(x_1+x_2-6)$

则
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1+\lambda+2\mu x_1+\nu=0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=-1+2\mu x_2+\nu=0 \\ x_1+x_2-6=0 \\ \lambda(-x_1+1)=0 \\ \mu(x_1^2+x_2^2-26)=0 \end{cases}$$ KKT条件

得
$$\begin{cases} x_1=-\frac{\lambda+\nu}{2\mu+2} \\ x_2=\frac{1-\nu}{2\mu} \\ x_1+x_2=6 \end{cases}$$

若 $\lambda \neq 0$，则 $x_1=1$ 解得 $x_1=1$，$x_2=5$，$x_1^2-x_2=-4$ 满足KKT条件

若 $\mu \neq 0$，则 $x_1^2+x_2^2=26$

若 $\lambda \neq 0$，解得 $x_1=1$，$x_2=5$，$x_1^2-x_2=-4$ 满足KKT条件

若 $\lambda=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=5$ 或 $x_1=5$，$x_2=1$ /得 $x_1^2-x_2=-4$ 或 24

若 $\lambda=0$ 且 $\mu=0$，则 $x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{13}{2}$，不满足条件

故原问题的最优解为 $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=5 \end{cases}$，最优值为 -4。