浙商证券股份有限公司
ZHESHANG SECURITIES CO.LTD

金融工程

主动量化系列(一)

高 Beta 股如何演化?——中美高 Beta 股票定价特征对比分析

—量化策略—

分析师：包赞 S1230518090006
baozan@stocke.com.cn TEL: 021-80108127

◆**高 beta 带来短期股价高估的理论模型**

从交易和个体行为等微观结构出发来研究高 Beta 产生的原因是通用方法，Harrison Hong 在 2015 年也是从微观出发，来研究高 beta 股票可能带来的结果，研究显示，当投资者对未来市场或某个股票的分歧很大时，高 Beta 股对总的分歧程度更敏感，由于卖空机制的限制，导致空头情绪宣泄不足，间接增加了多头看涨情绪的占比，**导致股票在未来短期内会被高估。**

模型其它结论：

1、 **投资者对股票未来走势产生的分歧越大，高 beta 股被高估的程度越大；**
2、 **市场上被限制做空投资者占的比例越大，高 beta 股被高估的程度越大；**
3、 **Beta 本身越大，股价越容易被高估。**

美股 high beta 股票被高估：

◆**中美实证对比**

（1）**美股更价值**。整体上看，美股 high beta 组合错误定价的幅度不大，年化 4.2%左右，高 beta 股实际收益率略高于预期收益率，表明其没有被过度炒作，定价仍在合理区间，仍然有继续买入的价值。

（2）**中国更投机**：实证显示 A 股高 beta 股未来的实际收益小于预期收益，无非由以下两个原因造成，**1、中国总是低估高 beta 股；2、高 beta 股票已经被高估，导致预期收益率过大。上述两个原因，我们从直观出发，有理由相信是由第二个原因造成，即中国高 beta 股在未来被低估的表象下，是由于在成为高 beta 股的过程中，已经被过度投机、被高估了。从这点来看，在 A 股市场，买入高 beta 股票要“趁早”。**

A 股 high beta 股票被低估：

◆**对中国市场启示**

无效会向有效演化，随着有效性的提高，高 beta 股票在短期内被低估的**格局会被改变，未来高 beta 股票的收益表现会比现在好。但是，现有的高 beta 股很多由过度投机导致，未来的高 beta 股票存在的比例相对现在会减少。由于过度投机，买入高 beta 股票要“趁早”。在将来，过度投机减少，高 beta 股更多是由于其真实内在价值驱动，被低估的格局会被改变，那些业绩好、向上弹性大的股票会被适度高估，向上趋势的可持续性也会增强，长期来看，这类股票超额收益也会更显著。**

证券研究报告

正文目录

图表目录

附录:

1. 引言

风险收益的权衡是现代定价理论的基石，但是经典定价理论也是会经常出错，本文借助 Harrison Hong(参考文献 1)的研究，展示高 Beta 股票由于投机的作用会有高估（overprice）的现象。

关于 high beta 产生的原因，Baker,Bradley,Wurgler(2011)研究显示，基金经理由于超额业绩压力，会倾向于在组合中超配高 Beta 的股票，他们认为是**基准化投资造成了一些股票持续的高 beta**，这篇文章的研究是第一次提供了这个观点的最直接证明。

Jos´e Scheinkman,Wei Xiong 从交易行为的微观结构出发，认为股价上涨的过程中，投资者对股票的基本面和未来走势有分歧，由于做空限制，不看好的投资者会把股票卖给那些继续看好的投资者，这个行为会继续连锁反应下去，这些人又会把股票卖给其它更看好的投资者，当然这个交易的成功是建立在新投资者愿意付出足够高价格的基础上的，这就产生了一个显著的泡沫。一连串交易就容易产生过度交易、过度波动和超过基本面的价格。

很多文献都是从交易和个体行为等微观结构出发来研究高 Beta 产生的原因与可能带来的结果，Harrison Hong 在 2015 年也是从均衡理论出发，来研究高 beta 股票可能带来的结果。研究显示，当投资者对未来市场或某个股票产生的分歧很大时，高 Beta 股对总的分歧程度更敏感，由于卖空机制的限制，导致空头情绪宣泄不足，间接增加了多头看涨情绪的占比，导致股票在未来短期内会被高估。其具体模型会在下文展示。

本文的结构是，**第二部分展示高 beta 股票在理论上会出现高估**，然后在**第三部分提出检验高估与否的实证方法论；在第四部分，我们利用实证结果证明美国市场确实符合模型理论，且符合价值投资行为。但是中国市场高 beta 股票没有被高估的现象，反而会有明显的低估，我们阐述了这个低估是假象，因为由于过度投机，在成为高 beta 股的过程中，已经被高估。最后，我们提出了一些对中国市场的展望与建议。**

2. 高 Beta 股票在未来短期内会被高估

这一部分，我们引用 Harrison Hong(参考文献 1)的模型与证明。

我们考虑一个由大量投资者组成的经济体。有两个时期，$t=0,1$。有 N 个风险资产且无风险利率我们设置为 r 。风险资产 i 在日期 1 涨幅 $\tilde{d}_i$，由如下公式给出：

$$\forall i \in \{1,\dots,N\},\quad \tilde{d}_i = d + b_i\tilde{z} + \tilde{\epsilon}_i$$

股票 i 的公共因子是 $\tilde{z}$ ，我们有 $\mathbb{E}[\tilde{z}]=0$ 和 $\mathrm{Var}[\tilde{z}]=\sigma_z^2$ 。对于股票 i 的涨幅，其特别成分是 $\tilde{\epsilon}_i$ ，我们有 $\mathbb{E}\left[\tilde{\epsilon}_i\right]=0$ 和 $\mathrm{Var}\left[\tilde{\epsilon}_i\right]=\sigma_\epsilon^2$ 。通过定义，对任意 $i\in[1,N]$ ，$\mathrm{CoV}\left(\tilde{z},\tilde{\epsilon}_i\right)=0$ 。资产 i 的因子 beta 是 b_i 并且被假定是严格正的。

任何一个资产 i 的贡献为 $s_i=\dfrac{1}{N}$，我们假设：

$$0<b_1<b_2<\cdots<b_N$$

我们根据资产的 beta 来为它们编号，编号 i 是增加的。b 我们归一化，设定为平均数为 1 $\left(\sum_{i=1}^{N}\dfrac{b_i}{N}=1\right)$。

投资者被分为两组。他们中的一组占比为 α 的成员对股票有不同的意见并且不能做空。我们假设这些买方为公募基金，在实际中是被禁止做空的。因为意见不同，这些投资者被分成两组，且每组占总数的一半，A 和 B，他们在因子表现 $\tilde{z}$ 的值上有分歧。组 A 认为 $\mathbb{E}^A[\tilde{z}]=\lambda$，组 B 认为 $\mathbb{E}^B[\tilde{z}]=-\lambda$。我们假定 $\lambda>0$ ，所以在组 A 的投资者是乐观的，在组 B 的投资者是悲观的。

$1-\alpha$ 部分的投资者拥有同样的并且正确的判断，且不受限于做空。我们将这些投资者编号为 a（套利者），更具体一点假设，我们可以将这些买方称为私募基金，它们通常可以以很小的成本来做空。我们假定这些投资者具有相同的信念是为了模型方便。

投资者最大化了他们时期 1 的财富，并且有均值方差偏好：

$$U\left(\tilde{W}^k\right)=\mathbb{E}^k\left[\tilde{W}^k\right]-\frac{1}{2\gamma}\mathrm{Var}\left(\tilde{W}^k\right)$$

其中 $k\in\{a,A,B\}$，并且 γ 是投资者的风险厌恶系数。在持有股票价值大于 0 的限制下，组 A 或者 B 的投资者要最大化均值方差效用函数。

A. **均衡**

下述定理描述了均衡的特点。

定理 1：令 $\theta=\dfrac{\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}}$ 并且定义 $(u_i)_{i\in[0,N+1]}$，$u_{N+1}=0$，对 $i\in[1,N]$，我们有

$$u_i=\frac{1}{\gamma N b_i}\left(\sigma_\epsilon^2+\sigma_z^2\left(\sum_{j<i}b_j^2\right)\right)+\frac{\sigma_z^2}{\gamma}\left(\sum_{j\geq i}\frac{b_j}{N}\right),$$

并且 $u_0=\infty$。u 是严格递减的数列。令 $\bar{i}=\min\{k\in[0,N+1]\mid\lambda>u_k\}$。存在唯一的均衡，其中资产价格被如下定义：

$$P_i(1+r)=\begin{cases} d-\dfrac{1}{\gamma}\left(b_i\sigma_z^2+\dfrac{\sigma_\epsilon^2}{N}\right) & \text{for } i<\bar{i} \\ d-\dfrac{1}{\gamma}\left(b_i\sigma_z^2+\dfrac{\sigma_\epsilon^2}{N}\right)+\underbrace{\dfrac{\theta}{\gamma}\left(b_i\sigma_z^2\omega(\lambda)-\dfrac{\sigma_\epsilon^2}{N}\right)}_{\pi^i=\text{speculative premium}} & \text{for } i\geq\bar{i} \end{cases}$$

其中 $\omega(\lambda)=\dfrac{\lambda\gamma-\dfrac{\sigma_z^2}{N}\left(\sum_{i\geq\bar{i}}b_i\right)}{\sigma_z^2\left(1+\sigma_z^2\left(\sum_{i<\bar{i}}\dfrac{b_i^2}{\sigma_\epsilon^2}\right)\right)}$ 。

证明：见参考文献 1，附录有摘写。证明过程较复杂，无需过多关注。

从直觉出发，投资者对高 beta 股票未来的涨幅有更大的分歧，乐观主义这看多，悲观主义者看空，可是由于做空的限制，悲观主义者无法直接做空，导致了乐观主义交易者在交易人员中比例占优，由此给股票带来溢价。

对于均衡我们可以得到许多**比较静态结果**。首先是股价会被高估。**做空限制存在时**，对于资产 $i\geq\bar{i}$ 也就是高 beta 股票情形，**均衡价格与在做空限制不存在时的价格差别是：**

$$\pi^i=\frac{\theta}{\gamma}\left(b_i\sigma_z^2\omega(\lambda)-\frac{\sigma_\epsilon^2}{N}\right)$$

这一项我们叫它**投机溢价，由于做空限制产生的投机溢价**。

下面的结论总结了高 beta 股票投机溢价是如何随着总的意见分歧、beta 和被限制做空的个体占比的变化而变化的。

模型结论：高 beta 的资产，即 $i\geq\bar{i}$ ，会被高估。被高估的部分，我们将其定义为有做空限制时的价格和无做空限制时的价格的差值，就是上文 π 。随着总分歧也就是 λ ，beta 也就是字母 b_i ，被限制做空的个体占比 α 的增加，差值也增加，也就是被高估的程度越大。特别强调下，随着总分歧 λ 的增加，对于高 beta 的资产，其被错误定价的情况也更加严重，直白来说，遇到分歧较大的高 beta 股，不要怕，就是干！

3. 实证检验计量方法

为了检验高 beta 股票在未来短期内会不会被高估，我们需要设计一个算法，来评价和验证高估的现象到底存与否，具体算法的设计我们采用主流学术杂志的方法，先获得未来高 beta 股票的预期收益率，然后与真实收益率进行比对，如果实际收益率高于预期收益率，那么就能验证高 Beta 股票确实存在被高估的现象。

当然，上述原理的验证需要从时间序列和横截面两个维度来双重考虑，单个股票或者某个时间段都会被一些偶然随机因素干扰。对于中国市场，以沪深 300 成分股为例，美国以标普 500 成分股为例，计算区间为 20140101—20190731，滚动每日计算。具体算法下文会详细描述。

对于预期收益率的计算，就是估计单个股票的历史 alpha、beta，然后依据估计的参数，带入未来的市场收益来估计预期收益率。

$$R_{it} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} R_{mt} + \varepsilon_t$$

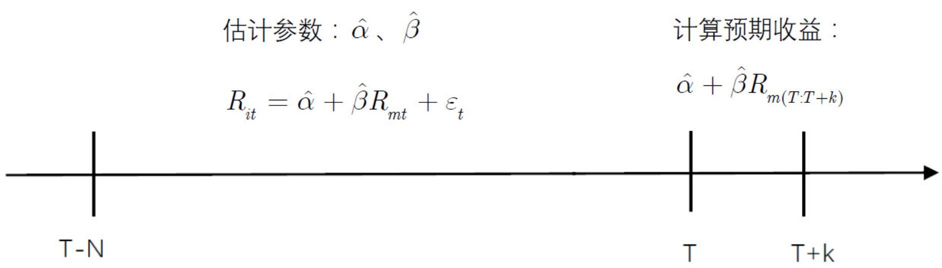
$$E(R_{i,T+1}) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} R_{m,T+1}$$

我们定义定价误差 PCE 为预期收益减去实际收益：

$$PCE_{pricing\ \ error} = E(R_{i,T+1}) - R_{i,T+1}$$

如果定价错误项 PCE 小于零，表示未来股票实际收益高于预期收益，股价被高估，相反股票被低估。

图 1：预期收益计算示意图



*资料来源：浙商证券研究所

表 1：股票组合被高估与否检验的算法流程

算法：
1、获取 T-N 日到 T 日的股票收益率序列；
2、对每只股票，计算其对于指数回归的 alpha、beta；
3、依据 beta 数字从大到小排序，前 20%分位为 high beta 组合，后 20%为 low beta 组合；
4、利用估计出来的参数（$R_{it}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}R_{mt}+\varepsilon_t$）和指数在 T+k 天的收益，获得每个股票在未来 k 天的预期收益率；
5、等权获得 high beta 组合的预期收益率和 low beta 组合的预期收益率；
6、循环上述步骤，每天计算，会获得每天的 high beta 组合预期收益、实际收益、定价误差，low beta 组合同理计算。
7、计算定价误差累积收益，查看长期以来错误定价累积收益序列情况，如果趋势向下，预期收益长期小于实际收益，表示短期内市场对 high beta 股票有高估。

*资料来源：浙商证券研究所

4. 中美市场实证结果比对分析

4.1. 美股高 beta 股票行为符合价值投资理念

图 2 描述美国市场的错误定价表现，图 high1 表示 high beta 组合持有一天，错误定价的累积收益，也就是每天预期收益减去实际收益后累积收益情况，**从图中左半边我们看到，高 beta 组合长期来看，趋势向下，说明实际收益高于预期收益，高 beta 组合确实存在在短期内被高估的现象，和理论阐述的一致。**需要说明的是，我们只考虑了组合持有 1 天、3 天、5 天，并且数据是每个交易日滚动计算的。

整体上看，美股 high beta 组合错误定价的幅度不算大，年化 4.2%左右，高 beta 股实际收益率略高于预期收益率，表明其没有被过度炒作，定价仍在合理区间，仍然有继续买入的价值。

图 2：2014-03-14 至 2019-07-24　美国市场定价误差累积收益（high1 表示持有一天）

*数据来源：浙商证券研究所

4.2. 中国高 beta 股票被过度投机

图 3 展示的是中国市场情况，高 beta 组合定价误差累积收益序列趋势向上，幅度很大，表明在 A 股市场，实际收益总是达不到定价理论的预期收益。我们回忆下预期收益计算公式：

$$E(R_{i,T+1}) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} R_{m,T+1}$$

未来的实际收益率总是小于这个预期收益，肯定是由以下两个原因造成，（1）中国总是低估高 beta 股；（2）高 beta 股票已经被高估，导致预期收益率过大。

上述两个原因，尽管第一个论证较为困难，我们从直观出发，有理由相信是由第二个原因造成，即中国高 beta 股在未来被低估的表象下，是在成为高 beta 股的过程中，已经被过度投机、被高估了。从这点来看，在 A 股市场，买入高 beta 股票要“趁早”。

整体上看，美国市场的有有效性要远高于中国市场，中国市场无论是 high beta 组合还是 low beta 组合，其错误定价的幅度要远远大于美国市场。

图 3：2014-03-19 至 2019-07-24　中国市场定价误差累积收益（high1 表示持有一天）

*数据来源：浙商证券研究所

5. 对中国市场启示

5.1. 高 beta 股的基本面特征

为了分析高 beta 股票的基本面特征，也就是哪些特征下的股票未来更容易出现高 beta 现象，我们利用沪深 300 成分股后一年度的 beta 数据来对前一年末的财务指标进行回归分析。分析显示 PB 指标、营业收入同比增长率、ROE 指标、一致预测总资产收益率平均都与股票的未来一个年度的 beta 呈现正相关。

表 2：beta 领先相关的基本面指标

指标	系数估计值	T 值	P 值
PB	0.058	3.23	0.001
营业收入同比增长率	0.057	3.15	0.002
ROE	0.070	3.93	0.000
一致预测总资产收益率平均	0.054	3.00	0.003

5.2. 慢牛格局推演

本文的结论对于行情变化的预测与判断也有所帮助，过去中国股市一直是快涨快跌，牛短熊长，一个原因就是**高 beta 股被过度投机，导致泡沫产生**。在本文之前的阐述中显示，像美国那样的有效市场，高 beta 股具备基本面基础，且上涨的过程较为温和，不仅不存在过度投机，还相对理论值来说有所低估，存在持续的买入价值。所以，未来中国市场向着有效市场演化，势必也会走美国道路，呈现慢牛格局。从微观来看，优秀的股票虽然有限，但是不同的时期总会涌现一批优秀的公司，如果市场趋于有效，这些股票会在很长的时间内逐步上涨，且过程中又有新的股票加入慢牛队伍，最终，这些股票又会通过相关性，把上涨趋势传递给更多的股票。从这个角度看，未来蛮牛的格局值得期待。

(1) 上述观点，首先我们可以用经典的 Fama 五因子定价模型来解释

如果股票呈现缓慢上涨，股票的日收益率会在一个较长的时间段内表现优秀，由于个股是因子的成分，会带动因子收益的良好表现，再通过相关系数带动全市场股票的走好。而迅速上涨则不会产生这样的效果，从定价公式来看，**其回归计算是在一个相对较长的时间的，短期收益迅速上升，最终只能被扔进个股的残差和截距项，不会产生较大的传导效应。**

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i \cdot MKT_t + s_i \cdot SMB_t + h_i \cdot HML_t + r_i \cdot RMW_t + c_i \cdot CMA_t + \varepsilon_{i,t}$$

我们变换形式，把因子层换算成个股：

$$r_{S_j,t} = \alpha_j + \sum_i f(\beta_i, s_i, h_i, r_i, c_i) \times r_{S_i,t} + \varepsilon_{j,t}$$

所以，$r_{S_i,t}$ 的上涨会带动$r_{S_j,t}$，反过来又会影响自身和其它股票，最终蝴蝶效应影响整个股市。

（2）我们也可通过模拟实验来证明**个股波动较小的慢涨更容易造成慢牛格局**

由于股票间存在相关性，我们来证明**波动更小的个股慢涨**会给**不涨的个股**带来更大的 beta，也就是更大的相关性，**长期以及很多个股的慢涨最终会“拉起”不涨的个股，最后形成全市场慢牛格局**。当然这个问题的证明是可以有理论推演的，为了节省精力，我们通过实验模拟来证明。

实验设计：

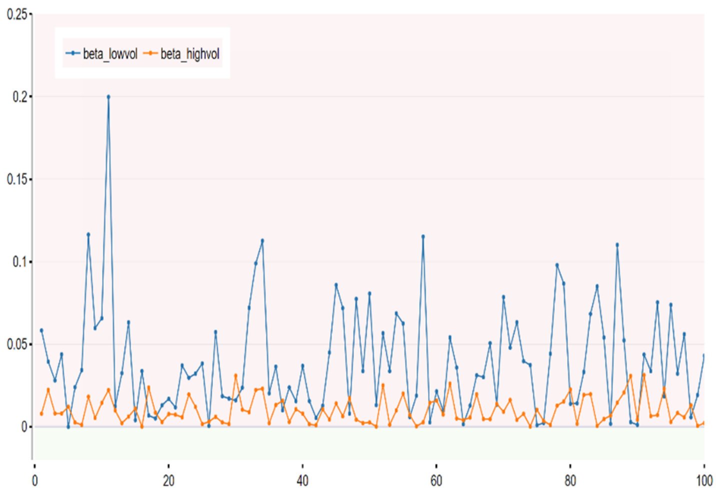
1、生成波动较小的慢涨个股，取名收益率序列 1 号。日收益服从均值为 1%、波动率为 1%的正态分布，样本量 250；

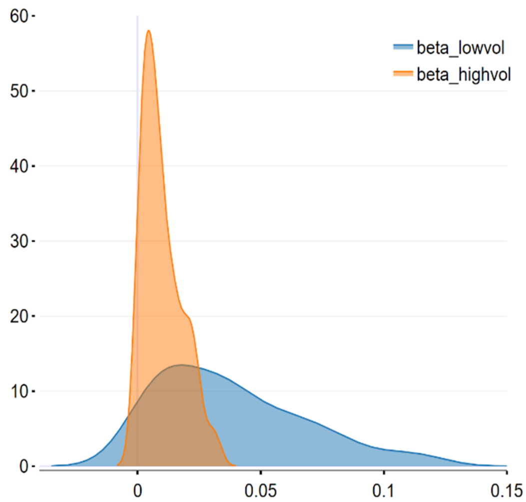
2、生成波动较大的个股，涨幅和 1 号相同，取名收益率序列 2 号。日收益服从均值为 1%、波动率为 3%的正太分布，样本量 250；

3、生成不涨的个股，取名收益率序列 y，日收益服从均值为 0%、波动率为 1%的正态分布，样本量 250；

4、用 y 和 1 号和 2 号回归，重复多次，看相同涨幅下波动大的股票和波动小的股票对不涨股票的影响，也就是看他们 beta 的大小。

图 4：实验结果展示（低波动股票的“拉动”作用更强）





数据来源：浙商证券研究所

5.3. 对个股投资的建议

我们回忆下 Harrison 理论模型的结论：

1、 投资者对股票未来走势产生的分歧越大，高 beta 股被高估的程度越大；

2、 市场上被限制做空投资者占的比例越大，高 beta 股被高估的程度越大；

3、 Beta 本身越大，股价越容易被高估。

本文借用 Harrison 理论模型，阐述了高 beta 股票会在未来短期被高估，而且我们的实证检验显示美国市场规律和理论模型一致，且实证显示美股错误定价的幅度远小于中国市场。近年来，A 股有效性也在逐步提高，相信中国股市未来也会越来越有效，越来越符合上述“理论”规律。

无效会向有效演化，随着有效性的提高，高 beta 股票在短期内被低估的格局会被改变，**未来高 beta 股票的收益表现会比现在好。但是，现有的高 beta 股很多由过度投机导致，未来的高 beta 股票存在的比例相对现在会减少。由于过度投机，买入高 beta 股票要“趁早”。在将来，过度投机减少，高 beta 股更多是由于其真实内在价值驱动，被低估的格局会被改变，那些业绩好、向上弹性大的股票会被适度高估，向上趋势的可持续性也会增强，长期来看，这类股票超额收益也会更显著。**

投资方面的建议是：

（1） 买入业绩优秀且高 Beta 股票，攫取被高估收益；
（2） 不惧怕对未来预期收益有较大分歧的股票；
（3） 现阶段，买入高 beta 股票要趁早；
（4） 防范可以做空且做空势力较强这类股票的风险。

附录

1、参考文献

[1] Hong, Harrison G. and Sraer, David Alexandre, 2015, Speculative Betas, Journal of Finance

[2] Scheinkman, Jose A., and Wei Xiong, 2003, Overconfidence and speculative bubbles, Journal of Political Economy 111,1183－1219.

[3] Baker, M., B. Bradley, and J. Wurgler ,2011, Benchmarks as Limits to Arbitrage: Understanding the Low Volatility Anomaly, Financial Analysts Journal 67, 40-54.

2、定理证明（摘自附录 1）

I 模型

A. 静态设定

我们考虑一个由大量投资者组成的经济体。有两个时期，$t=0,1$。有 N 个风险资产且无风险利率我们设置为 r 。风险资产 i 在日期 1 发放分红 $\tilde{d}_i$，由如下公式给出：

$$\forall i \in \{1,\ldots,N\}, \quad \tilde{d}_i = d + b_i\tilde{z} + \tilde{\epsilon}_i$$

股票 i 的分红的公共因子是 $\tilde{z}$，我们有 $\mathbb{E}[\tilde{z}]=0$ 和 $\mathrm{Var}[\tilde{z}]=\sigma_z^2$。对于股票 i 的分红其特别成分是 $\tilde{\epsilon}_i$，我们有 $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_i]=0$ 和 $\mathrm{Var}[\tilde{\epsilon}_i]=\sigma_\epsilon^2$。通过定义，对任意 $i \in [1,N]$，$\mathrm{CoV}(\tilde{z},\tilde{\epsilon}_i)=0$。资产 i 的现金流 beta 是 b_i 并且被假定是严格正的。任何一个资产 i 的贡献为 $s_i=\frac{1}{N}$，我们假设

$$0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_N$$

我们根据资产的现金流 beta 来为它们编号，编号 i 是增加的。共享平均权重 b 我们设定为 1 $\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{b_i}{N}=1\right)$。

投资者被分为两组。他们中的一部分 α 怀有不同的信念并且不能做空。我们称这些买方为共同基金，在实际中是被禁止做空的。这些投资者被分成两组，且每组占总数的一半。A 和 B，他们在总冲击 $\tilde{z}$ 的值上有分歧。组 A 认为 $\mathbb{E}^A[\tilde{z}]=\lambda$，组 B 认为 $\mathbb{E}^B[\tilde{z}]=-\lambda$。我们假定 $\lambda>0$ 所以在组 A 的投资者是乐观的在组 B 的投资者是悲观的。

$1-\alpha$ 部分的投资者拥有同样的并且正确的观念并且不受限于做空。我们将这些投资者编号为 a（套利者），更具体一点，我们可以将这些买方称为对冲基金，它们通常可以以很小的成本来做空。我们假定这些投资者具有相同的信念是方便解释的。非约束的投资者的异质先验性被从总体中冲出，因此对于资产均衡价格没有影响。

投资者最大化了他们时期 1 的财富，并且有均值方差偏好：

$$U\left(\tilde{W}^{k}\right)=\mathbb{E}^{k}\left[\tilde{W}^{k}\right]-\frac{1}{2\gamma}\operatorname{Var}\left(\tilde{W}^{k}\right)$$

其中 $k\in\{a,A,B\}$ 并且 γ 是投资者的风险承受系数。在手内握有的股票价值大于 0 的限制下，组 A 或者 B 的投资者要最大化均值方差偏好。

B. 均衡

下述定理描述了均衡的特点。

定理 1：令 $\theta=\frac{\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}}$ 并且定义 $(u_i)_{i\in[0,N+1]}$，$u_{N+1}=0$，对 $i\in[1,N]$，我们有

$$u_i=\frac{1}{\gamma N b_i}\left(\sigma_\epsilon^2+\sigma_z^2\left(\sum_{j<i}b_j^2\right)\right)+\frac{\sigma_z^2}{\gamma}\left(\sum_{j\geq i}\frac{b_j}{N}\right)$$，并且 $u_0=\infty$。

u 是严格递减的数列。令 $\bar{i}=\min\left\{k\in[0,N+1]\,|\,\lambda>u_k\right\}$。存在唯一的均衡，其中资产价格被如下定义：

$$P_i(1+r)=\begin{cases} d-\frac{1}{\gamma}\left(b_i\sigma_z^2+\frac{\sigma_\epsilon^2}{N}\right) & \text{for } i<\bar{i} \\ d-\frac{1}{\gamma}\left(b_i\sigma_z^2+\frac{\sigma_\epsilon^2}{N}\right)+\underbrace{\frac{\theta}{\gamma}\left(b_i\sigma_z^2\omega(\lambda)-\frac{\sigma_\epsilon^2}{N}\right)}_{\pi^i=\text{ speculative premium}} & \text{for } i\geq\bar{i} \end{cases}$$

其中 $\omega(\lambda)=\dfrac{\lambda\gamma-\frac{\sigma_z^2}{N}\left(\sum_{i\geq\bar{i}}b_i\right)}{\sigma_z^2\left(1+\sigma_z^2\left(\sum_{i<\bar{i}}\frac{b_i^2}{\sigma_\epsilon^2}\right)\right)}$。

证明：见网络附件部分 I.A.

均衡的一个主要逻辑是投资者们对于期望分红的对应高 b_i 的资产对低 b_i 的资产产生的分歧。超过一定水平的 b_i 后，投资者完全不同意悲观主义者，即在组 B 的投资者，将最优做空这些股票。然而，由于限制他们不能做空。这些有高 b 的股票因此会产生溢价，因为乐观主义者可以做多而悲观主义者不能做空来抵消带来的溢价。随着总的分歧增加，边际资产—被组 B 排除的投资者排除的资产—的现金流 beta 下降，然后更大一部分的资产被高估。

对于均衡我们可以得到许多比较静态结果。第一与资产被过高估值有关。等做空限制存在时，对于资产 $i\geq\bar{i}$，均衡价格与在做空限制不存在时（即共同基金可以做空）的价格的差别是：

$$\pi^i = \frac{\theta}{\gamma}\left(b_i\sigma_z^2\omega(\lambda) - \frac{\sigma_\epsilon^2}{N}\right)$$

这一项我们叫它投机溢价，由于做空限制产生的投资溢价。下面的推论研究了该投机溢价是如何随着总分歧，现金流 beta 和被限制做空的个体所占百分比的变化而变化的。

推论 1： 有高现金流 beta 的资产，即 $i \geq \overline{i}$ ，是被高估的（相比于没有做空限制的情况下），被高估的部分，我们将其定义为有做空限制时的价格和无做空限制时的价格的差值，随着总分歧，现金流 b_i ，被限制做空的个体所占百分比 α 的增加，差值也增加。除此之外，随着总分歧 λ 的增加，对于有高 beta 的资产，其被错误定价的情况也更加严重。

证明：见网络附件部分 I.B.

定理 1 证明：

我们在允许不同的分红情况下得到定理 1 中的模型。定理 1 可以被证明为一种特殊情况，即 $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_i^2$ ，我们假定资产根据 β / σ^2 的升序来排列。

我们首先设定一个均衡框架。之后我们检查其确实是一个均衡而且是唯一均衡。令 $\overline{i} \in [2, N]$ 并且令 μ_i^m 是资产 i 被组 m 拥有的数量，其中 $m \in \{a, A, B\}$ 。考虑一个均衡，在该均衡下，组 B 的人做多资产 $i < \overline{i}$ ，并且对于 $i \geq \overline{i}$ 的资产不持有（即 $\mu_i^B = 0$ ），组 A 的投资者做多资产 $i \in [1, N]$。因为组 A 的人做多所有的资产，他们的效用函数对持有资产数量求导满足下面一阶导条件：

$$\forall i \in [1, N]: \quad d + \lambda b_i - P_i(1+r) = \frac{1}{\gamma}\left(\left(\sum_{k=1}^{N} b_k \mu_k^A\right) b_i \sigma_z^2 + \mu_i^A \sigma_i^2\right)$$

因为组 B 的投资者只做多资产 $i < \overline{i}$ ，所以他们的效用函数对持有资产数量求导满足下面一阶导条件：

$$\forall i \in [1, \overline{i} - 1], \quad d - \lambda b_i - P_i(1+r) = \frac{1}{\gamma}\left(\left(\sum_{k=1}^{\overline{i}-1} b_k \mu_k^B\right) b_i \sigma_z^2 + \mu_i^B \sigma_i^2\right)$$

对于资产 $i \geq \overline{i}$ ，组 B 的投资者们不持有所以 $\mu_i^B = 0$ 。对于这些资产，它们对于组 B 的边际效用一定是严格负的（否则，组 B 的投资者们一定会增持）。这等价于：

$$\forall i \geq \overline{i}, \quad d - \lambda b_i - P_i(1+r) - \frac{1}{\gamma}\left(\left(\sum_{k=1}^{\overline{i}-1} b_k \mu_k^B\right) b_i \sigma_z^2\right) < 0$$

最后，对于套利者不存在做空的限制，他们的持有总是满足下面的一阶导条件：

$$\forall i \in [1,N], \quad d - P_i(1+r) = \frac{1}{\gamma}\left(\left(\sum_{k=1}^{N} b_k \mu_k^a\right) b_i \sigma_z^2 + \mu_i^a \sigma_i^2\right)$$

对于资产 i 市场出清条件为 $\alpha \dfrac{\mu_i^A + \mu_i^B}{2} + (1-\alpha)\mu_i^a = \dfrac{1}{N}$。对于资产 $i < \bar{i}$，我们将组 a ，A 和 B 的一阶导条件相加。对于资产 $i \geq \bar{i}$，我们将组 a 和组 A 的一阶导条件相加，根据投资组别所占总投资者比例进行加权（组 A 有 $\dfrac{\alpha}{2}$，组 B 有 $\dfrac{\alpha}{2}$，组 a 有 $1-\alpha$），结果如下：

$$\begin{cases} d - P_i(1+r) = \dfrac{1}{\gamma}\left(b_i \sigma_z^2 + \dfrac{\sigma_i^2}{N}\right) & \text{for } i < \bar{i} \\ \left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(d - P_i(1+r)\right) + \dfrac{\alpha}{2}\lambda b_i = \dfrac{1}{\gamma}\left(b_i \sigma_z^2 + \dfrac{\sigma_i^2}{N} - \dfrac{\alpha}{2}\sigma_z^2 b_i \displaystyle\sum_{k=1}^{\bar{i}-1} b_k \mu_k^B\right) & \text{for } i \geq \bar{i} \end{cases} \tag{1}$$

令 $S^B = \sum_{k=1}^{\bar{i}-1} b_k \mu_k^B$ ，其中 S^B，代表了组 B 投资者的对于因子 $\tilde{z}$ 的敞口。我们来找一个 S^B 的表达式。我们从组 B 的一阶导条件入手，此时 $k < \bar{i}$ ，将其均衡价格带入（1）的第一个表达式中，我们得到（1）中的第一个等式变为：

$$\forall k < \bar{i}, \quad -\lambda\gamma b_k + b_k \sigma_z^2 + \frac{\sigma_k^2}{N} = S^B b_k \sigma_z^2 + \mu_k^B \sigma_k^2$$

我们现在将上式的等式两边同时乘以 b_k，同时除以 σ_k^2，然后将资产 $k < \bar{i}$ 的该等式相加我们得到：

$$S^B = -\lambda\gamma\left(\sum_{k<\bar{i}} \frac{b_k^2}{\sigma_k^2}\right) - S\sigma_z^2\left(\sum_{k<\bar{i}} \frac{b_k^2}{\sigma_k^2}\right) + \sigma_z^2\left(\sum_{k<\bar{i}} \frac{b_k^2}{\sigma_k^2}\right) + \sum_{k<\bar{i}} \frac{b_k}{N}$$

从上面的表达式，我们可以得到 S^B 如下：

$$S^B = 1 - \frac{\left(\displaystyle\sum_{k\geq\bar{i}} \frac{b_k}{N}\right) + \lambda\gamma\left(\displaystyle\sum_{k<\bar{i}} \frac{b_k^2}{\sigma_k^2}\right)}{1 + \sigma_z^2\left(\displaystyle\sum_{k<\bar{i}} \frac{b_k^2}{\sigma_k^2}\right)}$$

现在我们有一个 S^B 的闭合解，我们把它代入（1）中的等式 2。定义 $\theta = \dfrac{\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}}$。对于资产 $i \geq \bar{i}$ 的价格我们有：

$$P_i(1+r) = d - \frac{1}{\gamma}\left(b_i \sigma_z^2 + \frac{\sigma_i^2}{N}\right) + \frac{\theta}{\gamma}\left(b_i \sigma_z^2 \frac{\lambda\gamma - \sigma_z^2 \displaystyle\sum_{k\geq\bar{i}} \frac{b_k}{N}}{\sigma_z^2\left(1 + \sigma_z^2\left(\displaystyle\sum_{k<\bar{i}} \frac{b_k^2}{\sigma_i^2}\right)\right)} - \frac{\sigma_i^2}{N}\right)$$

当 $i<\bar{i}$ ，（1）中的第一个等式为我们提供了一个简单的价格表达式：

$$P_i(1+r)=d-\frac{1}{\gamma}\left(b_i\sigma_z^2+\frac{\sigma_i^2}{N}\right)$$

为了得到所提出的均衡确实是一个均衡的条件（即 $\bar{i}$ 是边际资产），我们需要得到组 B 投资者的均衡持有数量：

$$\mu_i^{B,\star}=\begin{cases}\dfrac{1}{N}+\dfrac{b_i}{\sigma_i^2}\left(\dfrac{\sigma_z^2\left(\sum\limits_{i\geq\bar{i}}\dfrac{b_i}{N}\right)-\lambda\gamma}{1+\sigma_z^2\left(\sum\limits_{i<\bar{i}}\dfrac{b_i^2}{\sigma_i^2}\right)}\right) & \text{for } i<\bar{i}\\ 0 \text{ for } i\geq\bar{i} & \end{cases}$$

我们现在准备去研究均衡确实是一个均衡的条件。对于资产 $\bar{i}$ ，当且仅当 $\dfrac{\partial U^B}{\partial\mu_{\bar{i}}^B}\left(\mu^{B,\star}\right)<0$ 和 $\mu_{\bar{i}-1}^B\geq 0$ ，其中 $\mu^{B,\star}$ 是上面得到的组 B 投资者的持有资产数量。对于悲观主义个体，投资于资产 $\bar{i}$ 的边际效用等于 $\pi_{\bar{i}}>0$ ，因此 $\bar{i}$ 是边际资产当且仅当

$$\frac{\sigma_z^2}{\gamma N}\sum_{k\geq\bar{i}}b_k+\frac{1}{\gamma N\dfrac{b_{\bar{i}-1}}{\sigma_{\bar{i}-1}^2}}\left(1+\sigma_z^2\sum_{k<\bar{i}}\frac{b_k^2}{\sigma_k^2}\right)\geq\lambda>\frac{\sigma_z^2}{\gamma N}\sum_{k\geq\bar{i}}b_k+\frac{1}{\gamma N\dfrac{b_{\bar{i}}}{\sigma_i^2}}\left(1+\sigma_z^2\sum_{k<\bar{i}}\frac{b_k^2}{\sigma_k^2}\right)$$

令 $u_k=\dfrac{1}{\gamma N\dfrac{b_k}{\sigma_k}}\left(1+\sigma_z^2\left(\sum\limits_{i<k}\dfrac{b_i^2}{\sigma_i^2}\right)\right)+\dfrac{\sigma_z^2}{\gamma}\left(\sum\limits_{i\geq k}\dfrac{b_i}{N}\right)$。明显，$u_k$ 是严格递减数列：

$$\begin{aligned}u_{i-1}-u_i&=\frac{1}{\gamma N\dfrac{b_{i-1}}{\sigma_{i-1}^2}}\left(1+\sigma_z^2\left(\sum_{j<i-1}\frac{b_j^2}{\sigma_j^2}\right)\right)+\frac{\sigma_z^2}{\gamma}\left(\sum_{j\geq i-1}\frac{b_j}{N}\right)-\frac{1}{\gamma N\dfrac{b_i}{\sigma_i^2}}\left(1+\sigma_z^2\left(\sum_{j<i}\frac{b_j^2}{\sigma_j^2}\right)\right)-\frac{\sigma_z^2}{\gamma}\left(\sum_{j\geq i}\frac{b_j}{N}\right)\\&=\frac{1}{\gamma N}\left(1+\sigma_z^2\left(\sum_{j<i-1}\frac{b_j^2}{\sigma_j^2}\right)\right)\left(\frac{\sigma_{i-1}^2}{b_{i-1}}-\frac{\sigma_i^2}{b_i}\right)-\frac{1}{\gamma N\dfrac{b_i}{\sigma_i^2}}\sigma_z^2\frac{b_{i-1}^2}{\sigma_{i-1}^2}+\frac{\sigma_z^2}{\gamma N}b_{i-1}\\&=\frac{1}{\gamma N}\left(1+\sigma_z^2\left(\sum_{j<i-1}\frac{b_j^2}{\sigma_j^2}\right)\right)\left(\frac{\sigma_{i-1}^2}{b_{i-1}}-\frac{\sigma_i^2}{b_i}\right)+\frac{\sigma_z^2}{\gamma N}\frac{b_{i-1}^2}{\sigma_{i-1}^2}\left(\frac{\sigma_{i-1}^2}{b_{i-1}}-\frac{\sigma_i^2}{b_i}\right)\\&=\frac{1}{\gamma N}\left(1+\sigma_z^2\left(\sum_{j<i}\frac{b_j^2}{\sigma_j^2}\right)\right)\left(\frac{\sigma_{i-1}^2}{b_{i-1}}-\frac{\sigma_i^2}{b_i}\right)>0\end{aligned}$$

定义 $u_0=+\infty$ 和 $u_{N+1}=0$。然后数列 $\left(u_i\right)_{i\in[0,N+1]}$ 属于 $\square^{+}$，并且边际资产被简单地定义为 $\bar{i}=\min\left\{k\mid\lambda>u_k\right\}$。

我们知道$\overline{i}>0$因为$u_0=+\infty$。如果$\overline{i}=N+1$，然后组B的投资者做多除了$i\geq\overline{i}$的所有资产。如果$\overline{i}\in[1,n]$，均衡就有所提出的结构，即投资者B仅仅做多资产$i<\overline{i}$。

我们目前假定$\overline{i}>1$。当$\overline{i}=1$，该均衡是可以很容易得到的，即所有的资产都被高估了，在这个情况下，$S^B=0$然后我们有：

$$d-(1+r)P_i=\frac{1}{\gamma}(1+\theta)\left(b_i\sigma_z^2+\frac{\sigma_\epsilon^2}{N}\right)-\theta\lambda b_i$$

这和我们在定理 1 中得到的公式相关，其中我们定义$\sum_{i<1}b_i^2=0$。除此之外，当且仅当$\mu_1^{B,\star}<0$时，$\overline{i}=1$是一个均衡，等价于$\lambda<u_N$，如定理所述。

我们现在来展示这个均衡是唯一的。令$J=j\,|\,\mu_j^B>0-\mathrm{J}$是悲观主义者做多的资产集合。在这种情况下，资产价格如下：

$$P_i(1+r)=\begin{cases} d-\dfrac{1}{\gamma}\left(b_i\sigma_z^2+\dfrac{\sigma_\epsilon^2}{N}\right) & \text{for } i\in J \\ d-\dfrac{1}{\gamma}\left(b_i\sigma_z^2+\dfrac{\sigma_i^2}{N}\right)+\underbrace{\dfrac{\theta}{\gamma}\left(b_i\left(\dfrac{\lambda\gamma-\dfrac{\sigma_z^2}{N}\left(\sum_{i\notin J}b_i\right)}{1+\sigma_z^2\left(\sum_{i\in J}\dfrac{b_i^2}{\sigma_i^2}\right)}\right)-\dfrac{\sigma_i^2}{N}\right)}_{\pi^i=\text{speculative premium}} & \text{for } i\notin J \end{cases}$$

悲观主义者持有资产的数量为：

$$\mu_i^{B,\star}=\begin{cases} \dfrac{1}{N}+\dfrac{b_i}{\sigma_i^2}\left(\dfrac{\sigma_z^2\left(\sum_{i\notin J}\dfrac{b_i}{N}\right)-\lambda\gamma}{1+\sigma_z^2\left(\sum_{i\in J}\dfrac{b_i^2}{\sigma_i^2}\right)}\right) & \text{for } i\in J \\ 0 \text{ for } i\notin J \end{cases}$$

这暗示着对于$i\in J$，我们需要有$\frac{b_j}{\sigma_j^2}\left(\frac{\lambda\gamma-\sigma_z^2\left(\sum_{i\notin J}\frac{b_i}{N}\right)}{1+\sigma_z^2\left(\sum_{i\in J}\frac{b_i^2}{\sigma_i^2}\right)}\right)<\frac{1}{N}$，对于$i\notin J$，我们有$b_i\left(\frac{\lambda\gamma-\frac{\sigma_z^2}{N}\left(\sum_{i\notin J}b_i\right)}{1+\sigma_z^2\left(\sum_{i\in J}\frac{b_i^2}{\sigma_i^2}\right)}\right)>\frac{\sigma_i^2}{N}$。

因此对于所有的$i\in J$和所有的$i\notin J$：

$$\frac{b_i}{\sigma_i^2} > \frac{1}{N}\left(\frac{1+\sigma_z^2\left(\sum_{i\in J}\frac{b_i^2}{\sigma_i^2}\right)}{\lambda\gamma-\sigma_z^2\left(\sum_{i\notin J}\frac{b_i}{N}\right)}\right) > \frac{b_j}{\sigma_j^2}$$

该均衡结构是切断的一种必要形式因此我们的均衡是唯一的。

推论 1 证明：

证明：推论 1 描绘了高估价格的特点。资产 $i \geq \overline{i}$ 的高估价格被定义为均衡资产价格与不存在做空限制及投资理念差异情况下资产价格之间的差值。高估价格就等于投机溢价：

$$\forall i \geq \overline{i}, \quad Overpricing^i = \pi^i = \frac{\theta}{\gamma}\left(b_i\sigma_z^2\omega(\lambda) - \frac{\sigma_i^2}{N}\right)$$

通过均衡的定义，$\lambda > u_{\overline{i}}$（等价于 $\frac{b_{\overline{i}}}{\sigma_{\overline{i}}^2}\sigma_z^2\omega(\lambda) > \frac{1}{N}$）。因为资产是按照 $\frac{b_i}{\sigma_i^2}$ 的升序来排的，这就暗示了对于 $i \geq \overline{i}$，$\pi^i > 0$，资产 $i \geq \overline{i}$ 是被高估的。错误定价会随着被做空限制的投资者数量 α 增加而加剧，因为 θ 是 α 的严格增函数。错误估计的价格也会随着 b_i 增加而增加，随着 σ_i^2 的减少而增加，这些我们·都可以从错误估价的定义中得出：

$$\forall j > i \geq \overline{i}, \quad Overpricing^j - Overpricing^i = \frac{\theta}{\gamma}\sigma_z^2\omega(\lambda)\left(b_j - b_i\right)$$

股票投资评级说明

以报告日后的 6 个月内，证券相对于沪深 300 指数的涨跌幅为标准，定义如下：
1、买入 ：相对于沪深 300 指数表现 ＋20％以上；
2、增持 ：相对于沪深 300 指数表现 ＋10％～＋20％；
3、中性 ：相对于沪深 300 指数表现－10％～＋10％之间波动；
4、减持 ：相对于沪深 300 指数表现－10％以下。

行业的投资评级：

以报告日后的 6 个月内，行业指数相对于沪深 300 指数的涨跌幅为标准，定义如下：
1、看好 ：行业指数相对于沪深 300 指数表现＋10%以上；
2、中性 ：行业指数相对于沪深 300 指数表现－10%～＋10%以上；
3、看淡 ：行业指数相对于沪深 300 指数表现－10%以下。
我们在此提醒您，不同证券研究机构采用不同的评级术语及评级标准。我们采用的是相对评级体系，表示投资的相对比重。
建议：投资者买入或者卖出证券的决定取决于个人的实际情况，比如当前的持仓结构以及其他需要考虑的因素。投资者不应仅仅依靠投资评级来推断结论

法律声明及风险提示

本报告由浙商证券股份有限公司（已具备中国证监会批复的证券投资咨询业务资格，经营许可证编号为：Z39833000）制作。本报告中的信息均来源于我们认为可靠的已公开资料，但浙商证券股份有限公司及其关联机构（以下统称“本公司”）对这些信息的真实性、准确性及完整性不作任何保证，也不保证所包含的信息和建议不发生任何变更。本公司没有将变更的信息和建议向报告所有接收者进行更新的义务。

本报告仅供本公司的客户作参考之用。本公司不会因接收人收到本报告而视其为本公司的当然客户。

本报告仅反映报告作者的出具日的观点和判断，在任何情况下，本报告中的信息或所表述的意见均不构成对任何人的投资建议，投资者应当对本报告中的信息和意见进行独立评估，并应同时考量各自的投资目的、财务状况和特定需求。对依据或者使用本报告所造成的一切后果，本公司及/或其关联人员均不承担任何法律责任。

本公司的交易人员以及其他专业人士可能会依据不同假设和标准、采用不同的分析方法而口头或书面发表与本报告意见及建议不一致的市场评论和/或交易观点。本公司没有将此意见及建议向报告所有接收者进行更新的义务。本公司的资产管理部门、自营部门以及其他投资业务部门可能独立做出与本报告中的意见或建议不一致的投资决策。

浙商证券研究所

上海市杨高南路 729 号陆家嘴世纪金融广场 1 号楼 29 层
邮政编码：200120
电话：(8621)80108518
传真：(8621)80106010
浙商证券研究所：http://research.stocke.com.cn