# 凸优化 第5次作业

1.解: $\min\limits_{x} \|Ax-b\|_2^2+\|x\|_1$

记 $f(x)=\|Ax-b\|_2^2+\|x\|_1$

$= (Ax-b)^T(Ax-b)+\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

Lagrange 函数为

$L(x)=(Ax-b)^T(Ax-b)+\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

$\nabla L = 2A^T(Ax-b)+2\eta(x)-\vec{1}$ 其中 $\eta$ 是阶跃函数. $\eta(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$

$\nabla L=0$ 得 $A^T(Ax-b)+2\eta(x)-\vec{1}=0$

得 $A^TAx+2\eta(x)=\vec{1}+A^Tb$

即 $x=(A^TA)^{-1}(\vec{1}+A^Tb-2\eta(x))$

这就是原问题的对偶问题

---

2.解 $\min\limits_{x,z\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|x\|_2^2+\frac{1}{2}\|Az-b\|_2^2$

s.t. $x-z=c$

Lagrange 函数为

$L(x,z,\lambda)=\frac{1}{2}\|x\|_2^2+\frac{1}{2}\|Az-b\|_2^2+\lambda(x-z-c)$

$=\frac{1}{2}x^Tx+\frac{1}{2}(Az-b)^T(Az-b)+\lambda(x-z-c)$

$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=x+\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}=A^T(Az-b)-\lambda=0\\ x-z=c\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-\lambda\\ z=(A^TA)^{-1}(\lambda+A^Tb)\\ x=z+c\end{cases}$

故Lagrange对偶问题为 $\max\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\lambda^T\lambda+\frac{1}{2}((A^T)^{-1}\lambda)^T((A^T)^{-1}\lambda)$

s.t. $-\lambda=(A^TA)^{-1}(\lambda+A^Tb)+c$

解得 $-\lambda = (A^TA)^{-1}(\lambda + A^Tb) + c$

即 $((A^TA)^{-1} + I)\lambda = -c - A^{-1}b$

即 $\lambda = -(A^TA^{-1} + I)^{-1}(A^{-1}b + c)$

即 $x = (A^TA^{-1} + I)^{-1}(A^{-1}b + c)$