凸优化 第6次作业

自硕21 崔晏菲 2021210976

1.解：原问题求覆盖椭球 $x^TQx\le 1$ 的最小超立方体，等价于求凸优化问题

$$\max \quad |x|_\infty$$
$$s.t. \quad x^TQx\le 1$$

对于 $x\in R^n$，原问题可以分解为 n 个子问题

$$\max \quad x_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$
$$s.t. \quad x^TQx\le 1$$

我们再对这 n 个最优值取 max，就得到原问题最优值。

对于 $Q=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&3&2\\1&2&3\end{pmatrix}$ 得正方形为 $|x|_\infty\le 1$。

代码在同名 .ipynb 文件下

2.解：

(1) 对 $x\in R^2$，取标准单位正方形 $|x|_\infty\le 1$。则

四个顶点为 $x_1(1,1)$，$x_2(1,-1)$，$x_3(-1,1)$，$x_4(-1,-1)$

则有 $\min \quad |x-x_1|_2+|x-x_2|_2+|x-x_3|_2+|x-x_4|_2$

解得 $x=(0,0)$ 最小距离为 $4\sqrt{2}$

(2) 对于这个问题，我们可以分两种情况讨论：

① 一个点连接了3个顶点，另一个点连接了1个顶点

② 两个点各连接2个顶点

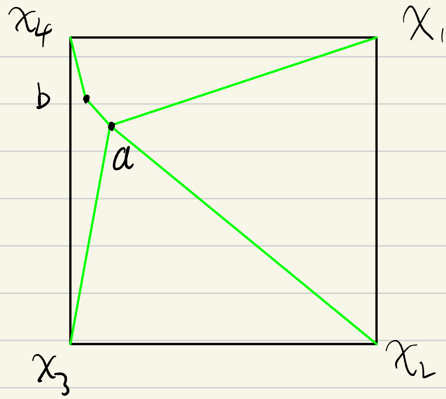
③ 一个点连接了4个顶点，另一个点没有连接点

显然，③ 等价于第(1)问，答案是 $4\sqrt{2}$

对于情况①，不失一般性

取点 a 连接 x_1, x_2, x_3

点 b 连接 x_4.



根据三角不等式，恒有

$$|x_4-a|_2 \le |b-a|_2 + |x_4-b|_2$$

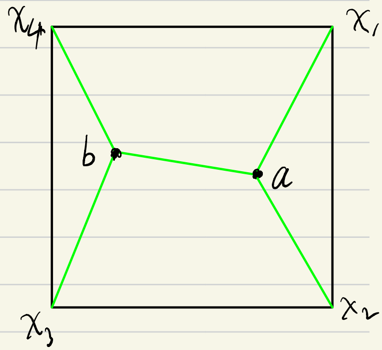
故恒有 $|x_1-a|_2+|x_2-a|_2+|x_3-a|_2+|b-a|_2+|x_4-b|$

$$\geq |x_1-a|_2+|x_2-a|_2+|x_3-a|_2+|x_4-a|_2$$

故问题也转化为上一问，答案是 $2\sqrt{2}$

对于情况②，不失一般性

取点 a 连接 x_1, x_2；点 b 连接 x_3, x_4.



则有凸优化问题

$$\min\ L(a,b)$$

$$= |a-b|_2+|a-x_1|_2+|a-x_2|_2+|b-x_3|_2+|b-x_4|_2$$

$$= \sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2} + \sum_{i=1}^{2}\sqrt{(x_a-x_i)^2+(y_a-y_i)^2} + \sum_{i=3}^{4}\sqrt{(x_b-x_i)^2+(y_b-y_i)^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial a} = \dfrac{a-b}{|a-b|_2} + \dfrac{a-x_1}{|a-x_1|_2} + \dfrac{a-x_2}{|a-x_2|_2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial b} = \dfrac{b-a}{|a-b|_2} + \dfrac{b-x_3}{|b-x_3|_2} + \dfrac{b-x_4}{|b-x_4|_2} = 0 \end{cases}$$

解得 $a(1-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ $b(\frac{\sqrt{3}}{3}-1, 0)$，最优值为 $2\sqrt{3}+2$