第12次作业

自硕21 崔昊菲 2021210976

1. 证明：假设凸集 C 的所有内点组成的集合 $\tilde{C}$ 不是凸集，

即 $\exists x_1, x_2 \in \tilde{C}, \alpha \in [0,1]$, s.t. $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \notin \tilde{C}$

由于 C 是凸集 则 $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in C$

记 $x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$

则对 x_0，有 $\forall \delta > 0$，$U(x_0, \delta) \subseteq C$

故取 $\varepsilon < \delta$，则 $U(x_0, \varepsilon) \subseteq C$

这与假设矛盾！ 故 C 的内部也是凸集。

2、证明：由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是对数凸函数，则有

$$\ln f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha \ln f(x) + (1-\alpha)\ln f(y)$$

$$\ln g(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha \ln g(x) + (1-\alpha)\ln f(y)$$

即 $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq f^{\alpha}(x) f^{(1-\alpha)}(y)$

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq g^{\alpha}(x) g^{(1-\alpha)}(y)$$

得 $(f+g)(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq f^{\alpha}(x) f^{(1-\alpha)}(y) + g^{\alpha}(x) g^{(1-\alpha)}(y)$

根据柯西不等式有

$$f^{\alpha}(x) f^{(1-\alpha)}(y) + g^{\alpha}(x) g^{(1-\alpha)}(y) \leq \sqrt{(f^{2\alpha}+g^{2\alpha})(x)\cdot(f^{2(1-\alpha)}+g^{2(1-\alpha)})(y)}$$

由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可以取对数，故 $f(x), g(x) > 0$ 恒成立

故 $(f^{2\alpha}+g^{2\alpha})x = f^{2\alpha}(x) + g^{2\alpha}(x) \leq f^{2\alpha}(x) + g^{2\alpha}(x) + 2f^{\alpha}(x)g^{\alpha}(x) = (f+g)^{2\alpha}(x)$

同理 $(f^{2(1-\alpha)}+g^{2(1-\alpha)})(y) \leq (f+g)^{2(1-\alpha)}(y)$

故 $\sqrt{(f^{2\alpha}+g^{2\alpha})(x)\cdot(f^{2(1-\alpha)}+g^{2(1-\alpha)})(y)} \leq (f+g)^{\alpha}(x)\cdot(f+g)^{(1-\alpha)}(y)$

故 $(f+g)(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq (f+g)^{\alpha}(x)\cdot(f+g)^{(1-\alpha)}(y)$ 证毕。

3.解：

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = -\sum_{i=1}^{m}\ln(1-a_i^Tx) - \sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i^2)$$

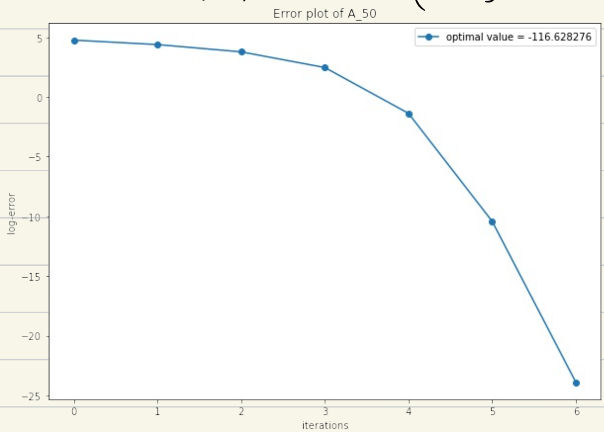
$$\text{s.t.}\quad a_i^Tx<1,\ i=1,\cdots,m$$

$$|x_i|<1,\ i=1,\cdots n$$

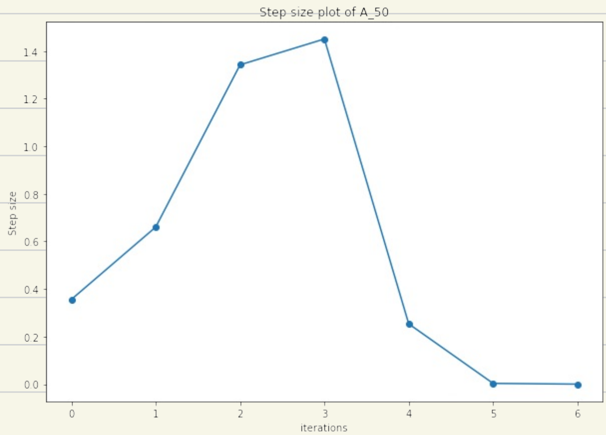
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m}\frac{a_{ki}}{1-a_k^Tx} + \frac{2x_i}{1-x_i^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m}\frac{a_{ki}a_{kj}}{(1-a_k^Tx)^2} + \delta_{ij}\frac{2(1+x_i^2)}{(1-x_i^2)^2}$$

$n=50$时：

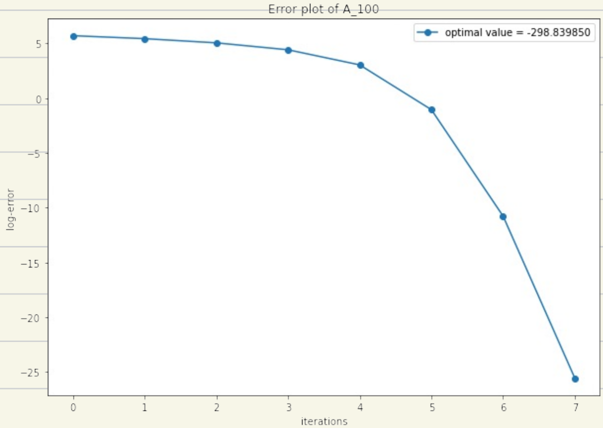


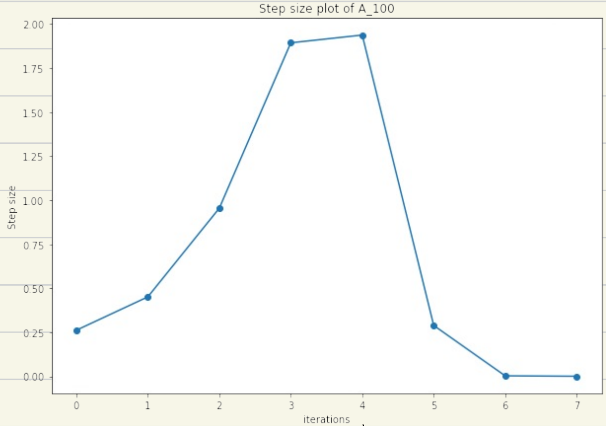
最优值约为 -116.628276



$n=100$时:

最优值约为 -298.839850





这两个题的最优解都在定义域区间的边界上，很容易一不小心就越过定义域。Backtarcking 方法的参数需要仔细调整，我设置的 $alpha = \frac{1}{2}$，$Beta = 0.9999$，这样接近于牛顿法。

可以看到在最后的迭代上，步长都接近于 0，但是 log-error 显著下降，这说明接近了最优值。