# 凸优化 第6次作业

1. 原问题

$$\max_x \frac{1}{|c^T x - d|_2} \quad \text{s.t.} \quad |Ax-b|_2 \le \lambda \iff \min_y |y|_2 \quad \text{s.t.} \quad c^T x - d = y,\ Ax - b = z,\ |z|_2 \le \lambda$$

Lagrange 函数为

$$L(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma) = |y|_2 + \alpha(c^T x - d - y) + \beta^T(Ax - b - z) + \gamma(|z|_2 - \lambda)$$

$$= -d\alpha + \beta^T b - \lambda\gamma + |y|_2 - \alpha y + \alpha c^T x + \beta^T A x - \beta^T z + \gamma |z|_2$$

可得对偶函数为

$$g(\alpha,\beta,\gamma) = -d\alpha + \beta^T b - \lambda\gamma + \inf\left(|y|_2 - \alpha y + (\alpha c^T + \beta^T A)x - \beta^T z + \gamma |z|_2\right)$$

$$= -d\alpha + \beta^T b - \lambda\gamma + \inf\left(|y|_2 - \alpha y + (\alpha c^T + \beta^T A)x\right) - \gamma \sup\left(\frac{1}{\gamma}\beta^T z - |z|_2\right)$$

故对偶问题为

$$\max_{\alpha,\beta,\gamma} -d\alpha + \beta^T b - \lambda\gamma$$

$$\text{s.t.} \quad \alpha c^T + \beta^T A = 0$$

$$\left|\frac{1}{\gamma}\beta^T\right|_2 \le 1$$

$$|\alpha|_2 \le 1$$