

Integrare numerică

Radu T. Trîmbițaș

6 mai 2021

1 Formule repetate

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă pe $[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, $h = (b - a)/n$ și nodurile echidistante $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Formula repetată a trapezului:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right] + R_1(f),$$

unde

$$R_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Formula repetată a lui Simpson:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=1}^m f(x_{2k-1}) \right] + R_2(f),$$

unde $n = 2m$; $h = (b - a)/(2m)$; $x_k = a + kh$; $k = 0, 1, \dots, 2m$, iar

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880m^4} f^{(4)}(\xi).$$

Formula dreptunghiurilor:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + R_1(f)$$

unde

$$R_1(f) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

2 Cuadraturi adaptive

Fie $\text{met}(a, b, f, n)$ o formulă repetată oarecare. Ideea este de a împărți $[a, b]$ în subintervale și de a folosi un număr mic de noduri pe subintervalele pe care oscilația lui f este lentă și un număr mai mare de puncte pe subintervalele pe care oscilația lui f este mai rapidă. Algoritmul este de tip divide and conquer:

```
function adaptquad(a, b:real; f, met:funct; tol:real):real;
  if |met(a, b, f, m)-met(a, b, f, 2m)| < tol
    then adaptquad:=met(a, b, f, 2 * m)
    else adaptquad:=adaptquad(a, (a + b)/2, f, tol)+
      adaptquad((a + b)/2, b, f, tol);
end
```

Cantitatea m este o constantă convenabilă (4 sau 5).

3 Metoda lui Romberg

Se bazează pe metoda trapezelor și pe extrapolarea Richardson. Fie $h_1 = b - a$. Vom utiliza formulele

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2} [f(a) + f(b)] = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \quad (1)$$

$$R_{k,1} = \frac{1}{2} \left[R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f \left(a + \left(i - \frac{1}{2} \right) h_{k-1} \right) \right], \quad k = \overline{2, n} \quad (2)$$

$$R_{k,j} = \frac{4^{j-1} R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, \quad k = \overline{2, n} \quad (3)$$

$$h_k = \frac{h_{k-1}}{2} = \frac{b-a}{2^{k-1}}. \quad (4)$$

Exemplu. Aproximați $\int_0^\pi \sin x dx$ prin metoda lui Romberg, $\varepsilon = 10^{-1}$.

Soluție.

$$I = \int_0^\pi \sin x dx = 2$$

$$R_{1,1} = \frac{\pi}{2} (0 + 0) = 0$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2} \left(R_{1,1} + \pi \sin \frac{\pi}{2} \right) = 1.571$$

$$R_{2,2} = 1.571 + (1,571 - 0)/3 = 2.094$$

$$(R_{2,2} - R_{1,1}) > 0.1$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2} \left[R_{2,1} + \frac{\pi}{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right] = 1.895$$

$$R_{3,2} = 1,895 + \frac{1.895 - 1.571}{3} = 2.004$$

$$R_{3,3} = 2.004 + (2.004 - 2.094)/15 = 1.999$$

$$|R_{3,3} - R_{2,2}| < 0.1$$

Valoarea exactă a integralei este $I = 2$. Pentru formula trapezelor cu același număr de argumente se obține $I \approx 1,895$, iar pentru formula repetată a lui Simpson cu 4 noduri, $I \approx 2.005$.

Calculule se pot realiza în mod tabelar.

$$\begin{array}{ccccccc} R_{1,1} & & & & & & \\ R_{2,1} & R_{2,2} & & & & & \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ R_{n,1} & R_{n,2} & R_{n,3} & \dots & R_{n,n} & & \end{array}$$

Un posibil criteriu de oprire este $|R_{n,n} - R_{n-1,n-1}| < \varepsilon$.

4 Cuadraturi adaptive II

Coloana a doua din metoda lui Romberg corespunde aproximării prin metoda lui Simpson. Notăm

$$S_{k,1} = R_{k,2}.$$

Coloana a treia este deci o combinație a două aproximante de tip Simpson:

$$S_{k,2} = S_{k,1} + \frac{S_{k,1} - S_{k-1,1}}{15} = R_{k,2} + \frac{R_{k,2} - R_{k-1,2}}{15}.$$

Relația

$$S_{k,2} = S_{k,1} + \frac{S_{k,1} - S_{k-1,1}}{15}, \quad (5)$$

va fi folosită la elaborarea unui algoritm de quadratură adaptivă. Fie $c = (a + b)/2$. Formula elementară a lui Simpson este

$$S = \frac{h}{6} (f(a) + 4f(c) + f(b)).$$

Pentru două subintervale se obține

$$S_2 = \frac{h}{12} (f(a) + 4f(d) + 2f(c) + 4f(e) + f(b)),$$

unde $d = (a + c)/2$ și $e = (c + b)/2$. Cantitatea Q se obține aplicând (5) celor două aproximante:

$$Q = S_2 + (S_2 - S)/15.$$

Putem să dam acum un algoritm recursiv pentru aproximarea integralei. Funcția *adquad* evaluează integrandul aplicând regula lui Simpson. Ea apelează recursiv *quadstep* și aplică extrapolarea. Descrierea se dă în algoritmul 1.

Algorithm 1 Cuadratură adaptivă bazată pe metoda lui Simpson și extrapolare

Intrare: funcția f , intervalul $[a, b]$, eroarea ε

Ieșire: Valoarea aproximativă a integralei

```

function adquad( $f, a, b, \varepsilon$ ) : real
   $c := (a + b)/2$ ;
   $fa = f(a)$ ;  $fb := f(b)$ ;  $fc := f(c)$ ;
   $Q := \text{quadstep}(f, a, b, \varepsilon, fa, fc, fb)$ ;
  return  $Q$ ;
function quadstep( $f, a, b, \varepsilon, fa, fc, fb$ ) : real
   $h := b - a$ ;  $c := (a + b)/2$ ;
   $fd := f((a + c)/2)$ ;  $fe := f((c + b)/2)$ ;
   $Q1 := h/6 * (fa + 4 * fc + fb)$ ;
   $Q2 := h/12 * (fa + 4 * fb + 2 * fc + 4 * fe + fb)$ ;
  if  $|Q1 - Q2| < \varepsilon$  then
     $Q := Q2 + (Q2 - Q1)/15$ ;
  else
     $Qa := \text{quadstep}(f, a, c, \varepsilon, fa, fd, fc)$ ;
     $Qb := \text{quadstep}(f, c, b, \varepsilon, fc, fe, fb)$ ;
     $Q := Qa + Qb$ ;
  end if
  return  $Q$ ;

```

5 Probleme

1. Implementați formula repetată a trapezului, dreptunghiului și a lui Simpson.
2. Concepeți o reprezentare grafică intuitivă pentru formula trapezelor și formula repetată a lui Simpson (facultativ).
3. Implementați o metoda de cuadratură adaptivă pentru formula repetată a lui Simpson, una pentru metoda trapezelor și una pentru metoda dreptunghiurilor.
4. Implementați metoda lui Romberg.
5. Implementați `adquad`, algoritmul 1.

6 Probleme practice

1. Generați formule Newton-Cotes închise pentru un număr de noduri dat.
2. Testați rutinele de integrare de la această temă pentru diverse funcții a caror primitivă nu este exprimabilă prin funcții elementare și comparați rezultatele cu cele furnizate de funcțiile MATLAB `quad` și `integral`.