Subiectul 5

Problema 1 *(a) Scrieţi formula de interpolare Hermite cu nodurile a ş b duble.*

(b) Deduceţi o formulă de cuadratură integrând termen cu termen formula de la punctul (a).

(c) Deduceţi formula repetată corespunzătoare.

Soluţie.

(a) Tabela cu diferenţe divizate este

z	D^0	D^1	D^2	D^3
a	$f(a)$	$f'(a)$	$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{(b-a)^2}$	$\frac{(b-a)(f'(b)+f'(a))-2(f(b)-f(a))}{(b-a)^3}$
a	$f(a)$	$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	$\frac{(b-a)f'(b)-f(b)+f(a)}{(b-a)^2}$	
b	$f(b)$	$f'(b)$		
b	$f(b)$			

$$\begin{aligned}
H_3(f) &= f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 \frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{(b-a)^2} \\
&\quad + (x-a)^2(x-b)\frac{(b-a)(f'(b)+f'(a))-2(f(b)-f(a))}{(b-a)^3} \\
R_3(f) &= \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{4!} f^{(4)}(\xi i)
\end{aligned}$$

(b) Integrând termen cu termen formula se obţine

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\, x = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{(b-a)^2}{12}\left[f'(a)-f'(b)\right] + \frac{(b-a)^5}{720} f^{(4)}(\xi).$$

(c) Formula repetată este

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\, x = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1}(a+kh) + f(b)\right] + \frac{(b-a)^2}{12n^2}\left[f'(a)-f'(b)\right] + \frac{(b-a)^5}{720n^4} f^{(4)}(\zeta).$$

■

Problema 2 *Deduceţi o metodă pentru calculul lui $\sqrt{a}$, $a>0$, considerând doi paşi ai metodei lui Newton. Ce ordin are metoda? Implementaţi metoda în MATLAB şi calculaţi $\sqrt{3}$ cu precizia* eps *(epsilon-ul maşinii).*

Soluţie. Aplicăm metoda lui Newton funcţiei $f(x) = x^2 - a$. După doi paşi ai metodei se obţine (1p)

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) + \frac{a}{x_n + \frac{a}{x_n}}.$$

Scris sub forma de iteraţie de punct fix avem

$$x = \psi(x) = \frac{1}{4}\left(x + \frac{a}{x}\right) + \frac{a}{x + \frac{a}{x}}.$$

Se observă că

$$\begin{aligned}
\psi\left(\sqrt{a}\right) &= \sqrt{a}\\
\psi'\left(\sqrt{a}\right) &= 0\\
\psi''\left(\sqrt{a}\right) &= 0\\
\psi'''\left(\sqrt{a}\right) &= 0\\
\psi^{(4)}\left(\sqrt{a}\right) &= \frac{3}{a^{3/2}},
\end{aligned}$$

adică $\mathrm{ord}\psi = 4$. ■

```
function y=Bakhshali(a)
x0=(a+1)/2; t=x0+a/x0;
x1=1/4*t+a/t;
while x1<x0
    x0=x1;
    t=x0+a/x0;
    x1=1/4*t+a/t;
end
y=(x0+x1)/2;
end
```

Subiectul 6

Problema 3 *Se consideră diviziunea* $\Delta : a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

(a) *Deduceţi o metodă de calcul al unui spline cubic* $s \in S_3^1(\Delta)$ *care verifică condiţiile* $s(x_i) = f(x_i)$, $s'(x_i) = f'(x_i)$.

(b) *Deduceţi formula de cuadratură corespunzătoare integrând termen cu termen formula de la punctul (a).*

(c) *Implementaţi în MATLAB metodele de la (a) şi (b).*

Soluţie.

(a) Pe fiecare subinterval spline-ul este polinomul de interpolare Hermite de gradul 3 (vezi subiectul 5). Fie $f_i = f(x_i)$ şi $m_i = f'(x_i)$. Pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ avem: $s|_{[x_i,x_{i+1}]} = p_i$,

$$p_i(x) = f_i + (x - x_i)m_i + (x - x_i)^2 \frac{f\left[x_i, x_{i+1}\right] - m_i}{\Delta x_i} \tag{1}$$

$$+ (x - x_i)^2(x - x_{i+1}) \frac{m_{i+1} + m_i - 2f\left[x_i, x_{i+1}\right]}{\left(\Delta x_i\right)^2}. \tag{2}$$

Restul pe acest interval este

$$R_i = \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i+1})^2}{4!} f^{(4)}(\xi_i).$$

De asemenea,

$$p_i(x) = d_i + c_i(x - x_i) + b_i(x - x_i)^2 + a_i(x - x_i)^3. \tag{3}$$

Identificâd coeficienţii obţinem

$$\begin{aligned} d_i &= f_i \\ c_i &= m_i \\ b_i &= \frac{f\left[x_i, x_{i+1}\right] - m_i}{\Delta x_i} - a_i \Delta x_i \\ a_i &= \frac{m_{i+1} + m_i - 2f\left[x_i, x_{i+1}\right]}{\left(\Delta x_i\right)^2} \end{aligned}$$

(b) Integrând termen cu termen se obţine pentru un subinterval

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \mathrm{d}\, x = \frac{\Delta x_i}{2} \left(f_i + f_{i+1}\right) + \frac{\left(\Delta x_i\right)^2}{12} \left(m_i - m_{i+1}\right) + \frac{\left(\Delta x_i\right)^5}{720} f^{(4)}\left(\xi_i\right)$$

Formula repetată este

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}\, x = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{\Delta x_i}{2} \left(f_i + f_{i+1}\right) + \frac{\left(\Delta x_i\right)^2}{12} \left(m_i - m_{i+1}\right)\right] + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left(\Delta x_i\right)^5}{720} f^{(4)}\left(\xi_i\right)$$

Dacă diviziunea este echidistantă se obţine

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}\, x = \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1}(a + kh) + f(b)\right] + \frac{(b-a)^2}{12n^2} \left[f'(a) - f'(b)\right] + \frac{(b-a)^5}{720n^4} f^{(4)}\left(\zeta\right).$$

Integrând termen cu termen (3)

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_i(x) \mathrm{d}\, x = d_i \Delta x_i + c_i \frac{\left(\Delta x_i\right)^2}{2} + b_i \frac{\left(\Delta x_i\right)^3}{3} + a_i \frac{\left(\Delta x_i\right)^4}{4}$$

(c) Pentru punctul (a) funcţia `Hermitespline` dă coeficienţii, iar `valspline` dă valoarea spline-ului. Pentru calculul integralei se modifică rutina de evaluare.

■

```
function [a,b,c,d]=Hermitespline(x,f,fd)
%HERMITESPLINE - Coeficienti spline Hermite

n=length(x);
if any(diff(x)<0), [x,ind]=sort(x); else ind=1:n; end
y=f(ind); m=fd(ind); x=x(:); y=y(:); m=m(:);
dx=diff(x);  ddiv=diff(y)./dx;
d=y(1:end-1);
c=m(1:end-1);
a=[(m(2:end)+m(1:end-1)-2*ddiv)./(dx.^2)];
b=[(ddiv-m(1:end-1))./dx-dx.*a];

function z=valspline(x,a,b,c,d,t)
%evaluare spline
%apel z=evalspline(x,a,b,c,d,t)
%z - valorile
%t - punctele in care se face evaluarea
%x - nodurile
%a,b,c,d - coeficientii
n=length(x);
x=x(:); t=t(:);
k = ones(size(t));
for j = 2:n-1
    k(x(j) <= t) = j;
end
% Evaluare interpolant
s = t - x(k);
z = d(k) + s.*(c(k) + s.*(b(k) + s.*a(k)));

function vi=intspline(xa,b,c,d,cs,cd)
%INTSPLINE integrala unui spline
% a, b, c, d -coeficientii
% cs,cd - capetele intervalului
% x - diviziunea

vI=0;
for k=1:length(a)-1
    pu=polyint([a(k),b(k),c(k),d(k)]);
    vI=vI+diff(polyval(pu,x(k:k+1)));
end
```

Problema 4 *Deduceţi o metodă pentru calculul lui $\frac{1}{\sqrt{a}}$, care nu utilizează împărţiri.*

Soluţie. Pornim de la ecuaţia $f(x) = \frac{1}{x^2} - a = 0$. Aplicând metoda lui Newton se obţine relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = x_n \frac{\left(3 - ax_n^2\right)}{2} = 0.5 x_n \left(3 - ax_n^2\right)$$

Avem $f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x^2} - a\right) = \frac{6}{x^4} > 0$ pentru $x \neq 0$. Vom lua x_0 astfel încât $f(x_0) > 0$. Din inegalitatea mediilor rezultă

$$\sqrt{a} < \frac{a+1}{2} \Longrightarrow \frac{2}{a+1} > a.$$

Alegem

$$x_0 = \frac{2}{a+1}.$$

Criteriul de oprire: stricarea monotoniei, normal $x_{n+1} > x_n$, oprire $x_{n+1} \leq x_n$.
■