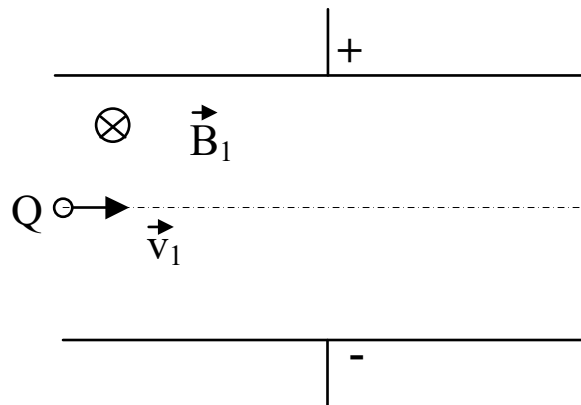


Zadatak 1:

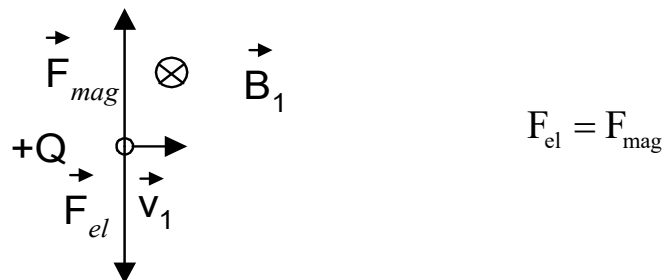
Pozitivni točkasti naboj Q giba se pravocrtno između obloga kondenzatora brzinom v . Neka, prema slici, između obloga kondenzatora vlada homogeno električno polje jakosti $E = 140,7 \text{ MV/m}$ i homogeno magnetsko polje magnetske indukcije $B = 0,5 \text{ T}$. a) Izračunajte brzinu naboja v , b) Što će se dogoditi u slučaju kad je točkasti naboj Q negativan?



1

Rješenje:

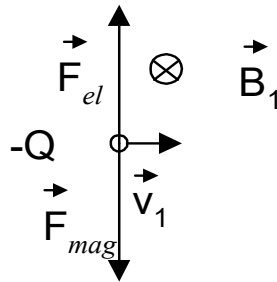
- a) U kondenzatoru na naboj djeluju električna i magnetska sila. Da bi bio zadovoljen uvjet pravocrtnog gibanja te dvije sile po iznosu moraju biti jednake:



$$Q \cdot E = Q \cdot B_1 \cdot v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{E}{B_1} = \frac{140,7 \cdot 10^6}{0,5} = 281,4 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

2

- b) U slučaju kad je naboj negativan i električna i magnetska sila mijenjaju smjer djelovanja pa opet imamo električnu i magnetsku silu čija je suma jednaka nuli, tj. naboj se i u ovom slučaju giba pravocrtno.

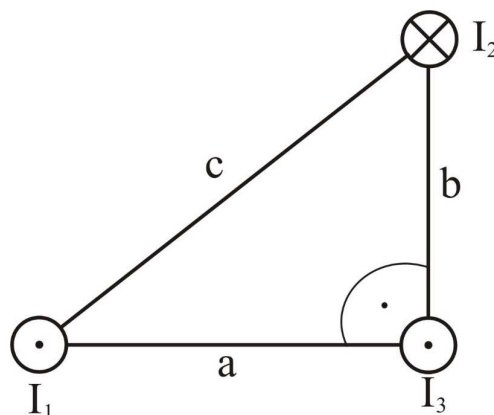


3

Zadatak 2:

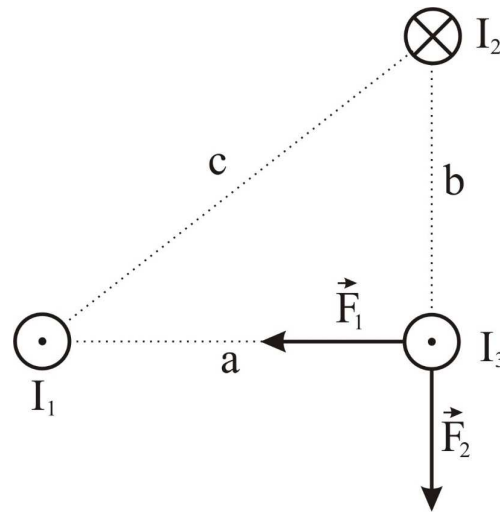
Tri beskonačno duga pravocrtna vodiča nalaze se u zraku i njima teku istosmjerne struje konstantnog iznosa. Izračunajte smjer i iznos magnetske sile kojom vodiči 1 i 2 djeluju na vodič 3.

Zadano je: $a = 4 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$, $I_1 = 100 \text{ A}$, $I_2 = 150 \text{ A}$, $I_3 = 75 \text{ A}$.



4

Rješenje:

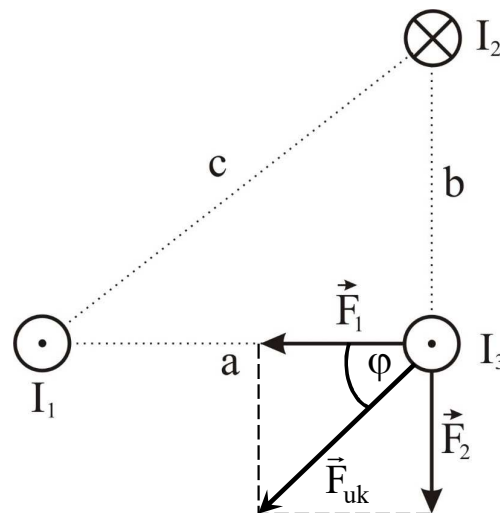


$$F_1 = \mu_0 \cdot \frac{I_1 \cdot I_3}{2 \cdot \pi \cdot a} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{100 \cdot 75}{2 \cdot \pi \cdot 0,04} = 37,5 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$$

$$F_2 = \mu_0 \cdot \frac{I_2 \cdot I_3}{2 \cdot \pi \cdot b} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{150 \cdot 75}{2 \cdot \pi \cdot 0,03} = 75 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$$

5

Rješenje:



Budući da su sile F_1 i F_2 pod kutem od 90° , ukupna sila na vodič 3 iznosi:

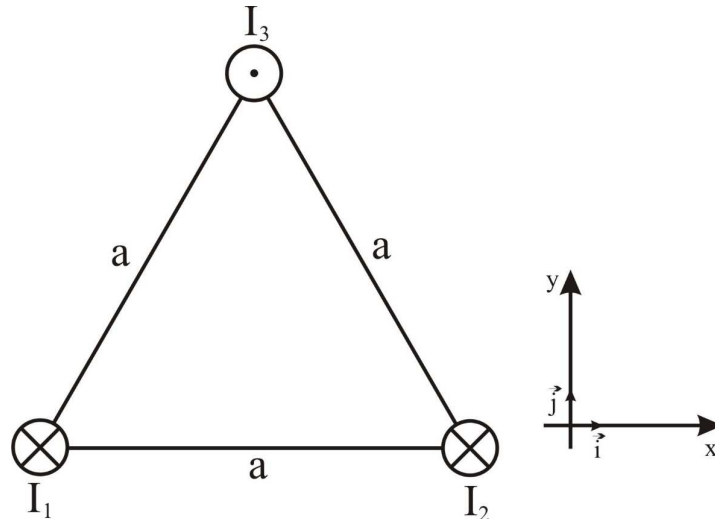
$$F_{uk} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(37,5)^2 + 75^2} = 83,85 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$$

$$\varphi = \arctg \frac{F_2}{F_1} \Rightarrow \varphi = 243,13^\circ \text{ ili } \varphi = -116,87^\circ$$

6

Zadatak 3 (ogledni ispitni primjer):

Tri beskonačno duga pravocrtna vodiča međusobno su paralelna i leže u istoj ravnini. Izračunajte iznos i smjer sile po jedinici duljine koja djeluje na vodič 2. Zadano je: $I_1 = I_2 = I_3 = 10 \text{ A}$, $a = 0,5 \text{ m}$.



Rješenje:

$$\vec{F} = -10^{-5} \cdot (2 \cdot \vec{i} + 3,464 \cdot \vec{j}) \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

\Rightarrow

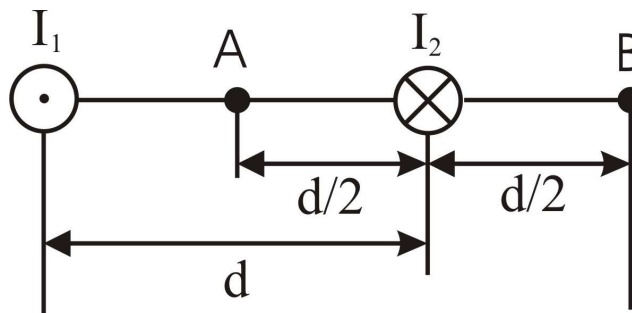
$$F = 4 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}$$

$$\varphi = -120^\circ$$

7

Zadatak 4 (ogledni ispitni primjer):

Kroz dva beskonačno duga pravocrtna vodiča teku istosmjerne struje jakosti I_1 i I_2 naznačenih smjerova. Vodiči se nalaze na međusobnoj udaljenosti d . Izračunajte magnetsku indukciju u točkama A i B. Zadano je: $I_1 = 10 \text{ A}$, $I_2 = 10 \text{ A}$, $d = 0,2 \text{ m}$.



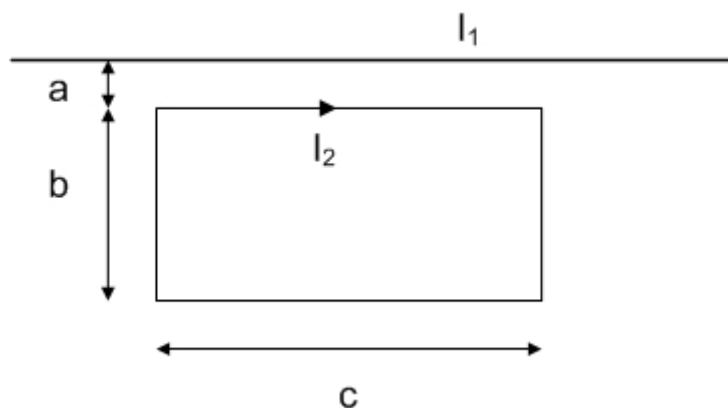
Rješenje:

$$B_A = 4 \cdot 10^{-5} \text{ T}, B_B = 1,33 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

8

Zadatak 5:

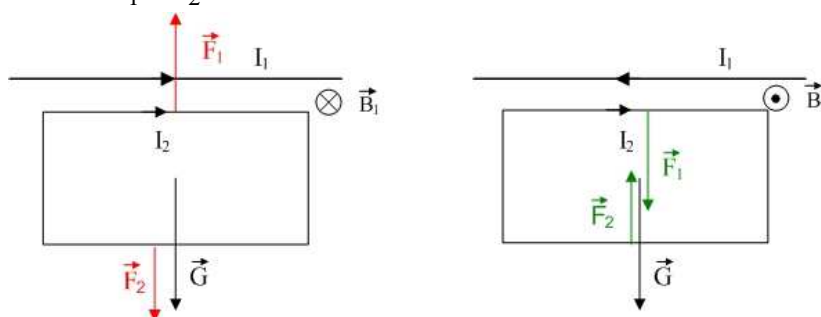
Beskonačno dugi pravocrtni vodič i kruti metalni okvir, protjecani istosmjernom strujom, smješteni su prema slici. Okvir ima težinu G . Izračunajte iznos i smjer struje I_1 kod kojeg će okvir zadržati zadani položaj. Zadano je: $G = 0,5 \text{ N}$, $I_2 = 15 \text{ A}$, $a = 1 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, $c = 50 \text{ cm}$.



9

Rješenje:

Beskonačni pravocrtni vodič protjecan strujom stvara magnetsko polje u svojoj okolini. Za različite smjerove struje I_1 to magnetsko polje djeluje na okvir silama F_1 i F_2 :



Da bi okvir ostao u istom položaju ukupan zbroj sila mora biti jednak 0:

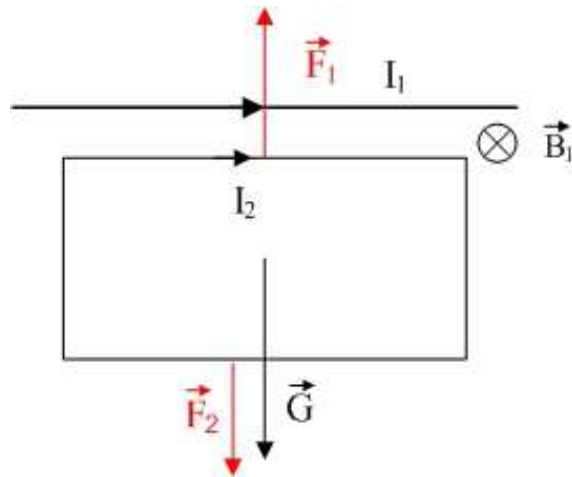
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} = 0$$

Budući da je $F_1 > F_2$, to se može postići samo u slučaju kada struja I_1 teče slijeva nadesno.

$$F_1 = F_2 + G$$

10

Izrazi za izračun F_1 i F_2 glase:



$$F_1 = B_1(a) \cdot I_2 \cdot c = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot I_2 \cdot c$$

$$F_2 = B_1(a+b) \cdot I_2 \cdot c = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot (a+b)} \cdot I_2 \cdot c$$

11

Iz uvjeta ravnoteže okvira $F_1 = F_2 + G$, računa se iznos struje I_1 :

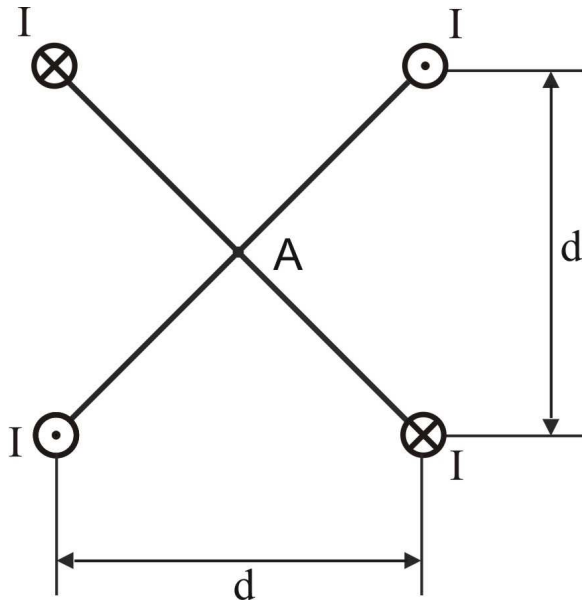
$$\mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot I_2 \cdot c = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot (a+b)} \cdot I_2 \cdot c + G$$

$$I_1 = \frac{G \cdot 2 \cdot \pi \cdot a \cdot (a+b)}{I_2 \cdot \mu_0 \cdot c \cdot b} = \frac{0,5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot (1+10)}{15 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 10} = 3,7 \text{ kA}$$

12

Zadatak 6 (ogledni ispitni primjer):

Kroz četiri beskonačno duga međusobno paralelna vodiča teku struje jakosti I u naznačenim smjerovima. Izračunajte iznos magnetske indukcije B u točki A .
Zadano je: $I = 5 \text{ A}$, $d = 20 \text{ cm}$.

**Rješenje:**

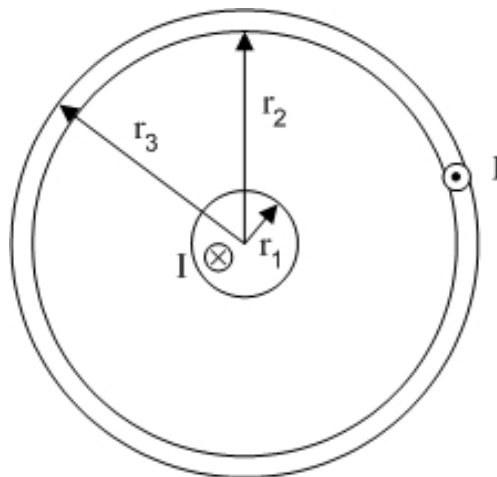
$$B_A = 0$$

Zadatak 7:

Kroz vodiče beskonačno dugog koaksijalnog kabela teče istosmjerna struja konstantnog iznosa.

- Izvedite izraze za jakost magnetskog polja u ovisnosti o udaljenosti točke promatranja od osi kabela,
- Izračunajte jakost magnetskog polja u točkama A, B, C i D.

Zadano je: $I = 25 \text{ A}$, $r_1 = 0,5 \text{ cm}$, $r_2 = 2,5 \text{ cm}$, $r_3 = 2,6 \text{ cm}$, $r_A = 0 \text{ cm}$, $r_B = 0,5 \text{ cm}$, $r_C = 2,5 \text{ cm}$, $r_D = 2,6 \text{ cm}$.



1

Rješenje:

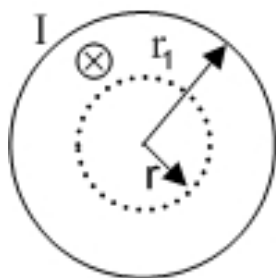
- Za koaksijalni kabel, uz uvažavanje osne simetrije, vrijedi da je:

$$H = \frac{I_{ob}}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Magnetsko polje se mijenja različito u četiri slučaja:

Za $r < r_1$, obuhvaćen je samo dio unutarnjeg vodiča:

Gustoća struje u svakoj točki je jednaka.



$$J = \frac{I}{r_1^2 \cdot \pi} = \frac{I_{ob}}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow I_{ob} = r^2 \cdot \frac{I}{r_1^2}$$

$$H = \frac{I_{ob}}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{I \cdot \frac{r^2}{r_1^2}}{2 \cdot r \cdot \pi} = I \cdot \frac{r}{2 \cdot \pi \cdot r_1^2}$$

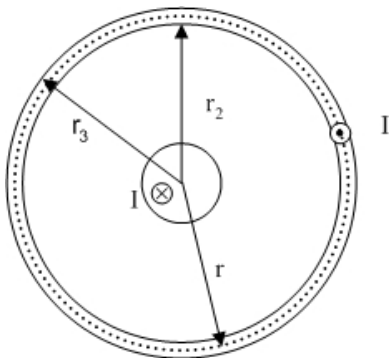
2

Za $r_1 < r < r_2$, obuhvaćen je vodič kroz koji teče struja I pa magnetsko polje iznosi:

$$H = \frac{I}{2 \cdot r \cdot \pi}$$

Za $r_2 < r < r_3$, obuhvaćen je unutrašnji vodič i dio vanjskog vodiča:

$$H \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = I - I''$$



Budući da su smjerovi struja suprotni njihovi doprinosi se oduzimaju.

$$J = \frac{I}{r_3^2 \cdot \pi - r_2^2 \cdot \pi} = \frac{I''}{r^2 \cdot \pi - r_2^2 \cdot \pi}$$

$$I'' = I \cdot \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}$$

3

$$H = \frac{I}{2 \cdot r \cdot \pi} \left(1 + \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right) - \frac{I}{2 \cdot (r_3^2 - r_2^2) \cdot \pi} \cdot r$$

Za $r > r_3$:

$$H \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = I - I$$

$$H = 0$$

4

b) Jakosti magnetskog polja u točkama A, B, C i D :

$$H_A = I \cdot \frac{r_A}{2 \cdot \pi \cdot r_1^2} = 0$$

$$H_B = \frac{I}{2 \cdot r_B \cdot \pi} = \frac{25}{2 \cdot 0,005 \cdot \pi} = 796 \text{ A/m}$$

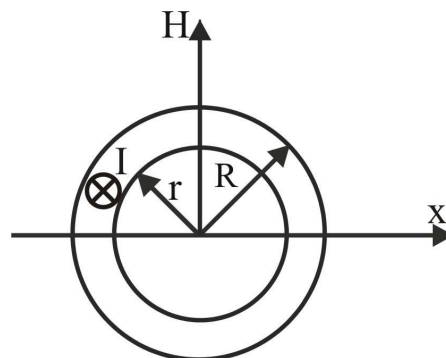
$$H_C = \frac{I}{2 \cdot r_C \cdot \pi} = \frac{25}{2 \cdot 0,025 \cdot \pi} = 159 \text{ A/m}$$

$$H_D = 0 \text{ A/m}$$

5

Zadatak 8 (ogledni ispitni primjer):

Kroz beskonačno dugi pravocrtni vodič poznatog poprečnog presjeka teče istosmjerna struja jakosti I . Gustoća struje je konstantna duž poprečnog presjeka vodiča. Odredite jakost magnetskog polja u točkama : $r_1 = r$, $r_2 = R$, $r_3 = 2 \cdot R$. Zadano je: $I = 10 \text{ A}$, $R = 2 \text{ mm}$, $r = 1 \text{ mm}$.



Rješenje:

$$H_1 = 0, H_2 = 795 \text{ A/m}, H_3 = 398 \text{ A/m}.$$

6

Zadatak 9 (ogledni ispitni primjer):

Kroz beskonačno dugi pravocrtni vodič polumjera $R = 0,5$ cm teče istosmjerna struja jakosti I . Izračunajte udaljenosti r_1 i r_2 od središta vodiča u kojima jakost magnetskog polja iznosi $H = 2 \cdot H_{\max}/3$, gdje H_{\max} jakost magnetskog polja na površini vodiča.

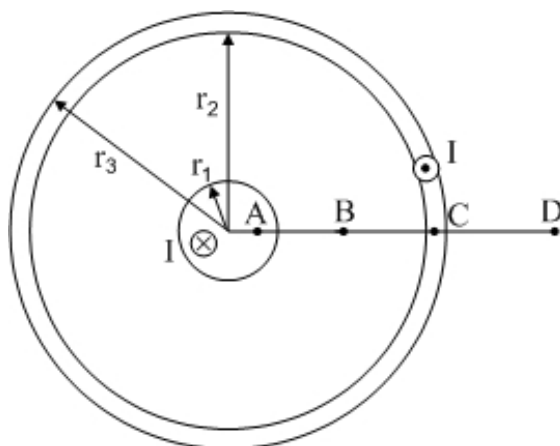
Rješenje:

$$r_1 = 0,33 \text{ cm}, r_2 = 0,75 \text{ cm}.$$

7

Zadatak 10 (ogledni ispitni primjer):

Zadan je koaksijalni kabel kod kojeg kroz unutarnji vodič teče istosmjerna struja jakosti I u jednom smjeru, a kroz vanjski vodič ta ista struja u suprotnom smjeru. Izračunajte iznos magnetsku indukciju u točkama A, B, C i D. Neka su vodiči bakreni te neka je: $I = 20$ A, $r_1 = 0,6$ cm, $r_2 = 2,6$ cm, $r_3 = 3$ cm, $r_A = 0,3$ cm, $r_B = 1,6$ cm, $r_C = 2,8$ cm, $r_D = 4,4$ cm.


Rješenje:

$$B_A = 3,33 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

$$B_B = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

$$B_C = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

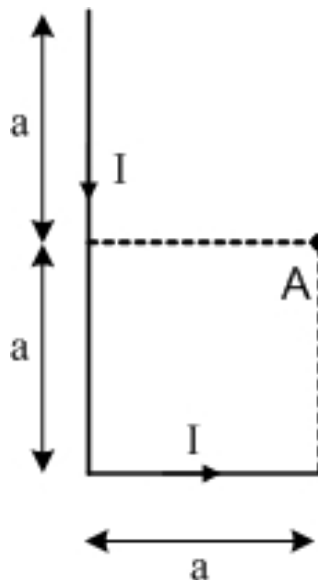
$$B_D = 0$$

8

Zadatak 11:

Kroz vodič prikazan na slici teče struja jakosti I . Odredite smjer i jakost magnetske indukcije u točki A koju stvara taj vodič. Neka je: $I = 50 \text{ A}$, $a = 1,5 \text{ m}$.

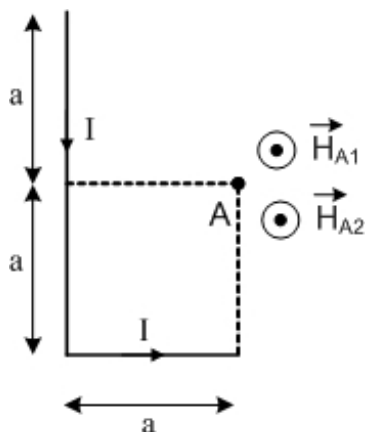
Napomena: doprinos magnetskoj indukciji od ostatka strujnog kruga se ne razmatra.



9

Rješenje:

Polje u točki stvaraju dva vodiča jedan duljine 3 m, a drugi duljine 1,5 m. Ukupna jakost magnetskog polja jednaka je vektorskom zbroju pojedinih komponenti jakosti polja:



$$\vec{H}_A = \vec{H}_{A1} + \vec{H}_{A2}$$

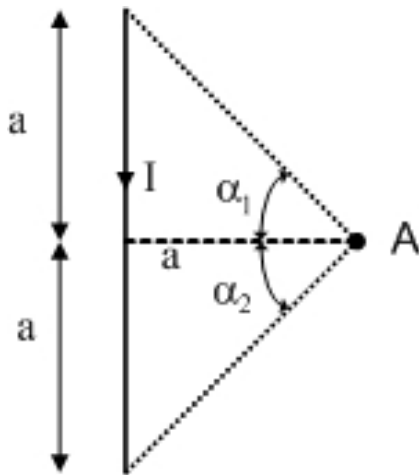
Budući da su polja istog smjera, vrijedi da je:

$$H_A = H_{A1} + H_{A2}$$

Primjenom Biot-Savart-ovog zakona mogu se izračunati iznosi jakosti magnetskog polja H_{A1} i H_{A2} .

10

Polje H_{A1} :



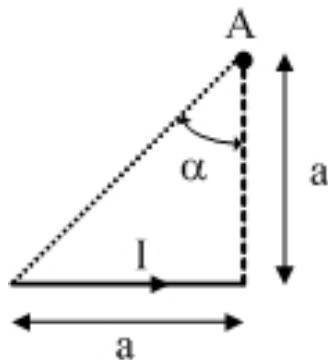
$$H_{A1} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a} \cdot (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$$

$$H_{A1} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1,5} \cdot \sqrt{2}$$

11

Polje H_{A2} :



$$H_{A2} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a} \cdot \sin \alpha$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$H_{A2} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1,5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

12

Ukupna jakost polja H_A :

$$H_A = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1,5} \cdot \sqrt{2} + \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1,5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$H_A = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1,5} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

Slijedi da je magnetska indukcija u točki A:

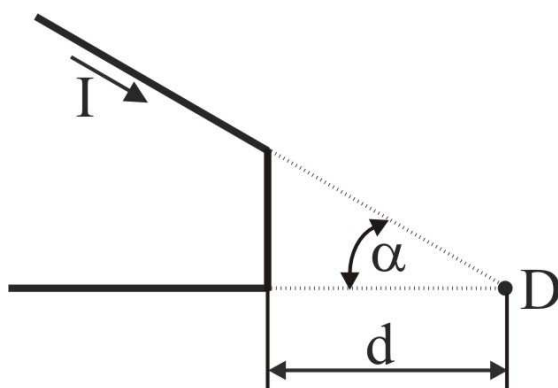
$$B_A = \mu_0 \cdot H_A = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{50}{4 \cdot \pi \cdot 1,5} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$B_A = 5 \cdot \sqrt{2} \text{ } \mu\text{T}$$

13

Zadatak 12 (ogledni ispitni primjer):

Kroz vodič zadanog kutnog profila teče istosmjerna struja jakosti I . Izračunajte iznos i smjer vektora magnetske indukcije B u točki D. Zadano je: $I = 100 \text{ A}$, $d = 5 \text{ cm}$, $\alpha = 30^\circ$.



Rješenje:

$$B_D = 10^{-4} \text{ T}$$

14

Zadatak 13:

U homogenom magnetskom polju magnetske indukcije 0,5 T giba se vodič duljine $\ell = 50$ cm brzinom $v = 30$ m/s u smjeru

- a) okomitom na silnice magnetskog polja,
- b) pod kutem od 45° u odnosu na silnice magnetskog polja.

Izračunajte iznos inducirane EMS u vodiču za oba slučaja.

Rješenje:**a) Vodič okomit na silnice**

Iznos inducirane EMS:

$$e = \vec{\ell} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$e = B \cdot \ell \cdot v \cdot \sin \alpha = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 30 \cdot \sin 90^\circ = 7,5 \text{ V}$$

1

b) Vodič pod kutem od 45°

Iznos inducirane EMS:

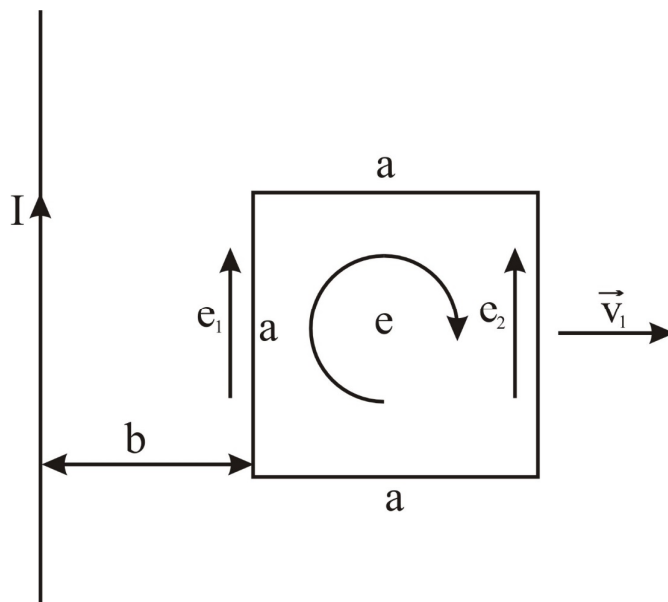
$$e = \vec{\ell} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$e = B \cdot \ell \cdot v \cdot \sin \alpha = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 30 \cdot \sin 45^\circ = 5,3 \text{ V}$$

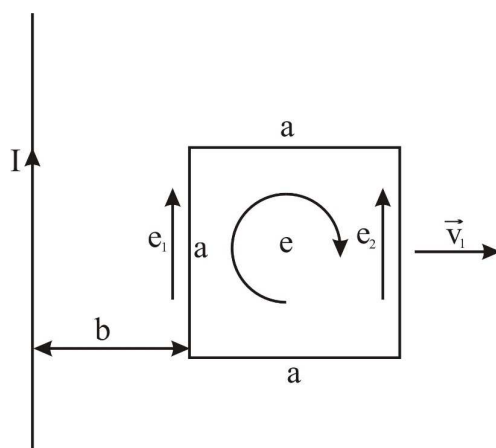
2

Zadatak 14:

Kroz beskonačno dugi pravocrtni vodič teče istosmjerna struja jakosti $I = 1 \text{ A}$. Izračunajte iznos i smjer inducirane EMS u petlji koja se giba okomito na pravocrtni vodič brzinom $v_1 = 1 \text{ m/s}$ i to u trenutku kada je $b = 1 \text{ m}$. Neka je $a = 0,1 \text{ m}$.



3

Rješenje:


$$e_1 = B_1 \cdot a \cdot v_1 = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot a \cdot v_1}{2 \cdot \pi \cdot b} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ V}$$

$$e_2 = B_2 \cdot a \cdot v_1 = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot a \cdot v_1}{2 \cdot \pi \cdot (b + a)} = 1,818 \cdot 10^{-8} \text{ V}$$

$$e_1 > e_2 \Rightarrow e = e_1 - e_2 = 1,82 \cdot 10^{-9} \text{ V}$$

4

Zadatak 15 (ogledni ispitni primjer):

Na kratki ravni vodič duljine 30 cm, koji se nalazi u homogenom magnetskom polju i okomit je na silnice polja, djeluje magnetska sila iznosa 60 N. Ako struja kroz vodič iznosi 250 A, izračunajte iznos magnetske indukcije.

Rješenje:

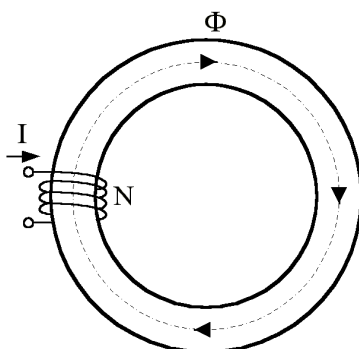
$$B = 0,8 \text{ T.}$$

Zadatak 16:

Zadan je magnetski krug s torusnom jezgrom od feromagnetskog materijala. Ako kroz tu torusnu jezgru teče magnetski tok iznosa 0,7 mVs, koliko iznosi struja kroz zavojnicu? Ako se napravi zračni raspor u torusnoj jezgri širine 1 mm, kolika struja treba teći zavojnicom da bi magnetski tok ostao isti?

Zadano je: $N = 100$ zavoja, $\ell_{FE} = 20 \text{ cm}$, $S_{FE} = 5 \text{ cm}^2$, $\Phi = 7 \cdot 10^{-4} \text{ Vs}$, tablica magnetiziranja

B [T]	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
H [A/m]	380	500	750	1200	1900



Rješenje:

a) Bez zračnog raspora

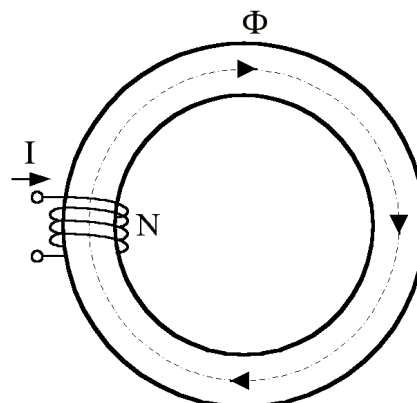
$$H_{FE} \cdot \ell_{FE} = I \cdot N$$

$$\Phi_{FE} \Rightarrow B_{FE} \Rightarrow \text{tablica magnetiziranja} \Rightarrow H_{FE}$$

$$B_{FE} = \frac{\Phi_{FE}}{S_{FE}} = \frac{7 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-4}} = 1,4 \text{ T}$$

$$B_{FE} \Rightarrow \text{tablica magnetiziranja} \Rightarrow H_{FE} = 1200 \text{ A/m}$$

$$I = \frac{H_{FE} \cdot \ell_{FE}}{N} = \frac{1200 \cdot 0,2}{100} = 2,4 \text{ A}$$



7

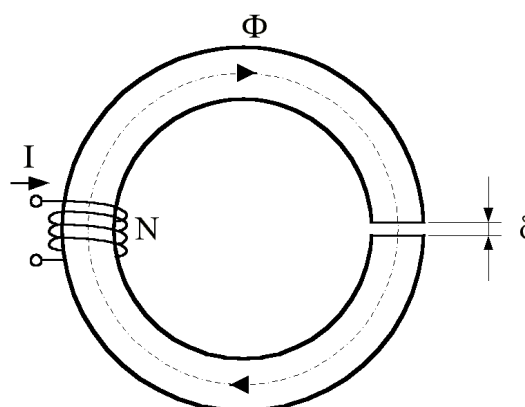
b) Sa zračnim rasporom

Duljina zračnog raspora:

$$\delta = 1 \text{ mm} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Jednadžba magnetskog kruga:

$$I \cdot N = H_{Fe} \cdot (\ell_{Fe} - \delta) + H_{\delta} \cdot \delta$$



Tok koji teče jezgrom zatvara se preko zračnog raspora pa je:

$$\Phi_{FE} = \Phi_{\delta}$$

8

Uz zanemarenje rasipanja silnica u zračnom, vrijedi da je:

$$S_{\text{FE}} = S_{\delta}$$

pa je:

$$B_{\text{FE}} = B_{\delta}$$

Dakle, vrijedi da je:

$$\Phi_{\text{FE}} = \Phi_{\delta} = \Phi = 7 \cdot 10^{-4} \text{ Vs}$$

$$B_{\delta} = B_{\text{FE}} = \frac{\Phi_{\text{FE}}}{S_{\text{FE}}} = \frac{7 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-4}} = 1,4 \text{ T}$$

9

$$H_{\text{FE}} = 1200 \text{ A/m}$$

$$H_{\delta} = \frac{B_{\delta}}{\mu_0} = \frac{1,4}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 1,114 \cdot 10^6 \text{ A/m}$$

$$I \cdot N = H_{\text{Fe}} \cdot (\ell_{\text{Fe}} - \delta) + H_{\delta} \cdot \delta$$

$$I = \frac{H_{\text{FE}} \cdot (\ell_{\text{FE}} - \delta) + H_{\delta} \cdot \delta}{N} = 13,528 \text{ A}$$

Napomena: Uočava se da i relativno mali zračni raspor zahtijeva znatno veću jakost struje, uz isti magnetski tok.

10

Zadatak 17 (ogledni ispitni primjer):

Magnetski tok $\Phi = 4 \text{ } \mu\text{Vs}$ proizvodi istosmjerna struja koja teče kroz $N = 10000$ zavoja omotanih oko cijevi savinute u obliku prstena. Promjer cijevi je $d_c = 10 \text{ cm}$, a duljina osi cijevi $\ell_c = 1,2 \text{ m}$. Kolika je jakost magnetskog polja H i jakost struje I koja proizvodi to polje?

Rješenje:

$$H = 405,29 \text{ A/m}$$

$$I = 0,049 \text{ A}$$

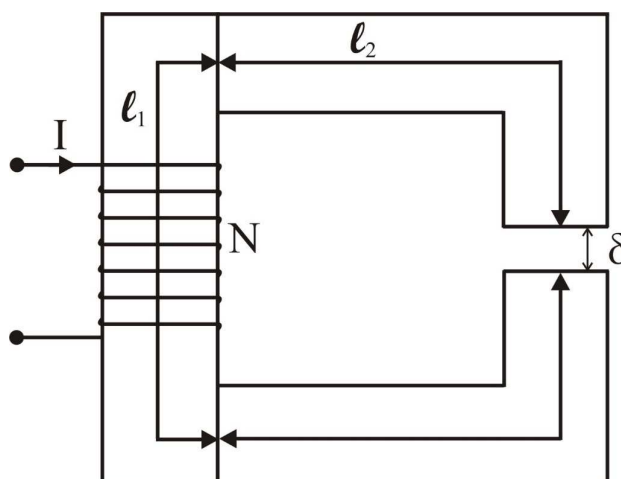
11

Zadatak 18:

Na jezgri (prema slici) koja se sastoji od dva različita materijala namotano je $N = 2000$ zavoja. Komad 2 ima zračnu pukotinu široku $\delta = 0,5 \text{ mm}$. Zadano je $S_1 = 40 \text{ cm}^2$, $S_2 = 30 \text{ cm}^2$, $\ell_1 = 0,3 \text{ m}$, $\ell_2 = 0,45 \text{ m}$.

U zračnoj pukotini silnice se šire za $x = 15 \%$. Tok kroz magnetski krug iznosi $\Phi = 3,84 \text{ mVs}$. Izračunajte MMS Θ i struju magnetiziranja I .

Relativne permabilnosti su $\mu_{r1} = 55$, $\mu_{r2} = 1415$.



12

Rješenje:

$$\Phi = B_1 \cdot S_1 = B_2 \cdot S_2 = B_\delta \cdot S_\delta \quad ; \quad S_\delta = 1,15 \cdot S_2$$

$$B_\delta = \frac{\Phi}{S_\delta} = \frac{\Phi}{1,15 \cdot S_2} = \frac{3,84 \cdot 10^{-3}}{1,15 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} = 1,113 \text{ T}$$

$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_\delta} = \frac{1,113}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 8,857 \cdot 10^5 \text{ A/m}$$

13

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1} = \frac{3,84 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-4}} = 0,96 \text{ T}$$

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0 \cdot \mu_{r1}} = \frac{0,96}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 55} = 1,39 \cdot 10^4 \text{ A/m}$$

$$B_2 = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{3,84 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 10^{-4}} = 1,28 \text{ T}$$

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0 \cdot \mu_{r2}} = \frac{1,28}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1415} = 719,85 \text{ A/m}$$

14

MMS iznosi:

$$\Theta = N \cdot I = H_1 \cdot \ell_1 + H_2 \cdot \ell_2 + H_\delta \cdot \delta = 4936,78 \text{ Az}$$

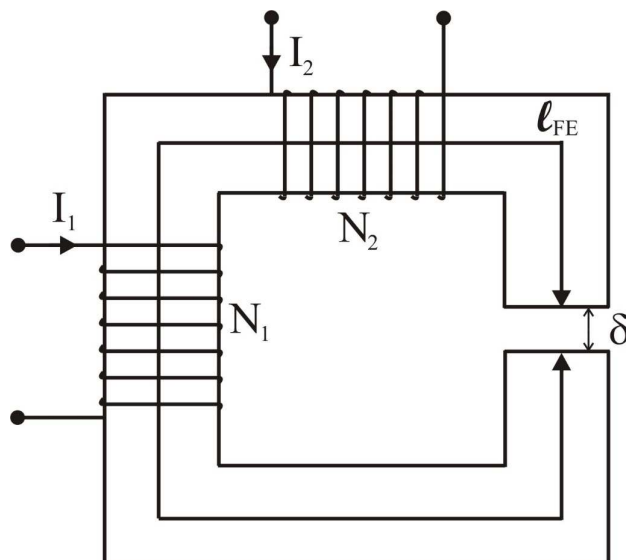
Struja magnetiziranja I iznosi:

$$I = \frac{\Theta}{N} = \frac{4936,78}{2000} = 2,468 \text{ A}$$

15

Zadatak 19 (ogledni ispitni primjer):

Za zadane smjerove uzбудnih struja, izračunajte dva različita iznosa MMS Θ_2 kod kojih magnetski tok u krugu iznositi $\Phi = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Vs}$. Zadano je: $\ell_{\text{FE}} = 20 \text{ cm}$, $\delta = 0,04 \text{ cm}$, $S = 5 \text{ cm}^2$, $\Theta_1 = 400 \text{ Az}$, $\mu_r = 18190$, $x = 0 \text{ \%}$.



Rješenje:

Postoje dva različita rješenja:

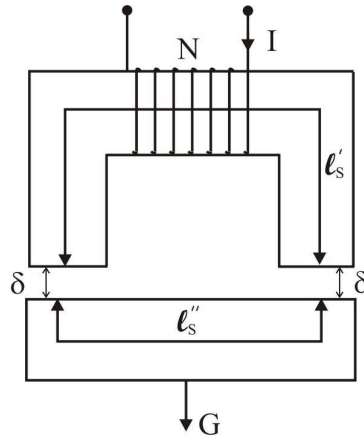
$$\Theta_2 = 793 \text{ Az}$$

$$\Theta_2 = 7 \text{ Az}$$

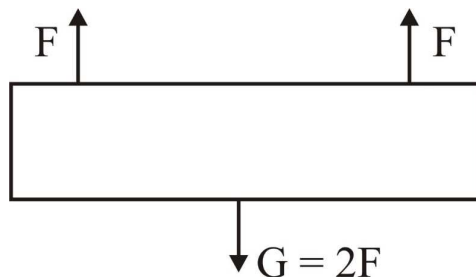
16

Zadatak 20:

Elektromagnet (prema slici) treba podići teret koji zajedno s kotvom elektromagneta teži $G = 7848 \text{ N}$. Jezgra i kotva elektromagneta su izrađene od transformatorskih limova ($\mu_r = 76580$), konstantnog poprečnog presjeka $S_{\text{Fe}} = 63 \text{ cm}^2$. Srednja duljina magnetskih silnica u željezu je $\ell_s = \ell'_s + \ell''_s = 0,6 \text{ m}$. Zračna pukotina uslijed hrapavosti površine ima ekvivalentnu širinu $\delta = 0,2 \text{ mm}$. Ako je na jezgru namotano $N=1000$ zavoja, kolika minimalna struja I treba teći kroz zavojnicu? Zanimariti proširenje silnica u zračnom rasporu.



17

Rješenje:


$$F = \frac{1}{2} \cdot B_0 \cdot H_0 \cdot S_0 = \frac{B_0^2}{2 \cdot \mu_0} \cdot S_0$$

$$G = 2 \cdot F = \frac{B_0^2}{\mu_0} \cdot S_0 \quad \Rightarrow \quad B_0 = \sqrt{\frac{G \cdot \mu_0}{S_0}} = \sqrt{\frac{7848 \cdot \mu_0}{63 \cdot 10^{-4}}} = 1,251 \text{ T}$$

$$S_0 = S_{\text{Fe}} \quad \Rightarrow \quad B_{\text{Fe}} = B_0 = 1,251 \text{ T}$$

18

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{1,251}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 9,955 \cdot 10^5 \text{ A/m}$$

$$H_{\text{Fe}} = \frac{B_{\text{Fe}}}{\mu_0 \cdot \mu_r} = \frac{1,251}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 76580} = 13 \text{ A/m}$$

$$\Theta = N \cdot I = H_{\text{Fe}} \cdot \ell_s + 2 \cdot H_0 \cdot \delta = 406 \text{ Az}$$

$$I = \frac{\Theta}{N} = \frac{406}{1000} = 0,406 \text{ A}$$

Zadatak 1:

Dva izvora izmjeničnog sinusnog napona spojena su u seriju. Odredite ukupnu EMS koju daju ovi izvori. Zadano je: $f = 50 \text{ Hz}$, $E_{\max 1} = E_{\max 2} = 100 \text{ V}$, $\varphi_1 = 30^\circ$, $\varphi_2 = 60^\circ$.

Rješenje:

Vrijedi da je:

$$e_1(t) = 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + 30^\circ) \Rightarrow \bar{E}_1 = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot e^{j30^\circ} \text{ V}$$

$$e_2(t) = 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + 60^\circ) \Rightarrow \bar{E}_2 = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot e^{j60^\circ} \text{ V}$$

Fazor ukupne EMS jednak je sumi fazora elektromotornih sila:

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2$$

1

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot e^{j30^\circ} + \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot e^{j60^\circ}$$

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \cos 30^\circ + j \cdot \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \sin 30^\circ + \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \cos 60^\circ + j \cdot \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \sin 60^\circ$$

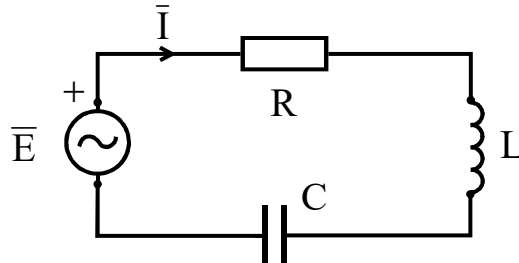
$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \frac{100}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right] + j \cdot \frac{100}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\bar{E} = 96,6 + j \cdot 96,6 = 136,6 \cdot e^{j45^\circ} \text{ V}$$

2

Zadatak 2 (ogledni ispitni primjer):

U nekom krugu nalazi se serijska kombinacija radnog otpora $R = 30 \, \Omega$, induktiviteta $L = 0,4 \, \text{H}$ i kondenzatora kapaciteta $C = 24 \, \mu\text{F}$. Ovaj krug priključen je na EMS iznosa $E = 220 \, \text{V}$, frekvencije $f = 60 \, \text{Hz}$. Kolika je jakost struje I ovog kruga i koliki je faktor snage ove RLC kombinacije?


Rješenje:

Efektivna vrijednost struje:
$$I = \frac{E}{Z} = \frac{220}{50,218} = 4,381 \, \text{A}$$

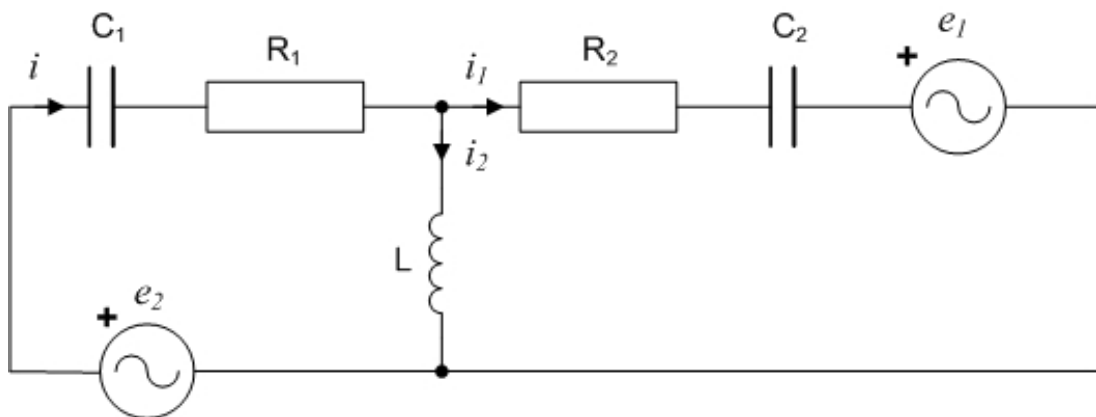
Faktor snage:
$$\cos \varphi = \cos(+53,316^\circ) = 0,5974 \, \text{ind.}$$

3

Zadatak 3:

Odredite izraz za trenutnu vrijednost napona na kondenzatoru C_1 . Zadano je:

$e_1(t) = 15 \cdot \sin(314 \cdot t - \pi/2) \, \text{V}$, $i_1(t) = 2 \cdot \sin(314 \cdot t + \pi/6) \, \text{A}$, $C_2 = 200 \, \mu\text{F}$,
 $i_2(t) = 3 \cdot \sin(314 \cdot t - \pi/3) \, \text{A}$, $R_1 = 5 \, \Omega$, $R_2 = 3 \, \Omega$, $C_1 = 1 \, \text{mF}$, $L = 7 \, \text{mH}$.



4

Rješenje:

Fazor napona na kondenzatoru C_1 opisan je izrazom:

$$\bar{U}_{C1} = \bar{I} \cdot \bar{Z}_{C1}$$

gdje je:

$$\bar{Z}_{C1} = -jX_{C1} = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_1} = -j \cdot \frac{1}{314 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = -j \cdot 3,2 \, \Omega$$

Prema slici vrijedi da je:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$

Iz zadanih izraza za struje u vremenskom području, slijede fazori struja:

$$i_1(t) = 2 \cdot \sin(314 \cdot t + \pi/6) \quad \Rightarrow \quad \bar{I}_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot e^{j30^\circ}$$

$$i_2(t) = 3 \cdot \sin(314 \cdot t - \pi/3) \quad \Rightarrow \quad \bar{I}_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j60^\circ}$$

Nakon uvrštenja prethodno definiranih fazora, slijedi da je fazor ukupne struje:

$$\bar{I} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot e^{j30^\circ} + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j60^\circ}$$

$$\bar{I} = \frac{2}{\sqrt{2}} (\cos 30^\circ + j \cdot \sin 30^\circ) + \frac{3}{\sqrt{2}} (\cos(-60^\circ) + j \cdot \sin(-60^\circ))$$

$$\bar{I} = 2,29 - j \cdot 1,13 = 2,54 \cdot e^{-j26,31^\circ} \text{ A}$$

Fazor napona na kondenzatoru C_1 iznosi:

$$\bar{U}_{C1} = 2,54 \cdot e^{-j \cdot 26,31^\circ} \cdot 3,2 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ} = 8,16 \cdot e^{-j \cdot 116,31^\circ} \text{ V}$$

Napona na kondenzatoru C_1 u vremenskom području opisan je sljedećim izrazom

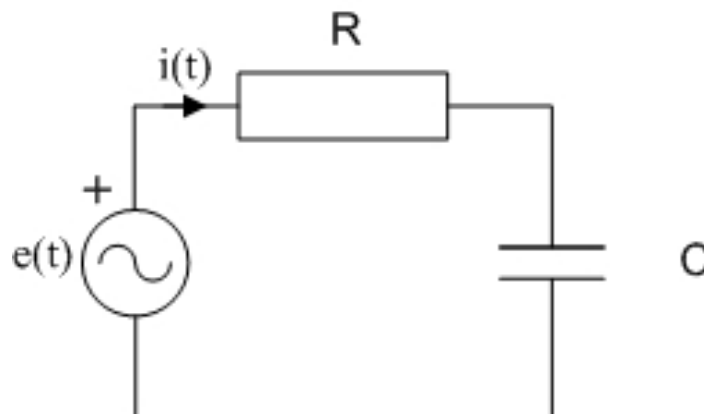
$$u_{C1}(t) = 8,16 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314 \cdot t - 116,31^\circ) \text{ V}$$

Zadatak 4:

Serijski spojeni otpor R i kondenzator C priključeni su na izvor izmjenične EMS $e(t) = 150 \cdot \sin(10^4 \cdot t) \text{ V}$. Zadano je: $R = 20 \, \Omega$, $C = 5 \, \mu\text{F}$.

Potrebno je izračunati:

- Impedanciju u kompleksnom obliku,
- Fazor struje i i izraz za struju u vremenskom području,
- Fazore napone na otporu i kondenzatoru.



Rješenje:
a) Impedancija strujnog kruga

$$\bar{Z} = R - j \cdot X_C = R - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$\bar{Z} = 20 - j \cdot \frac{1}{10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 20 - j \cdot 20 \, \Omega$$

$$\bar{Z} = 20 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ} \, \Omega$$

b) Fazor struje i izraz za struju u vremenskom području

Fazor EMS izvora:

$$e(t) = 150 \cdot \sin(10^4 \cdot t) \Rightarrow \bar{E} = \frac{150}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} \, V$$

9

Fazor struje se određuje pomoću Ohmovog zakona:

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{\frac{150}{\sqrt{2}} \cdot e^{j0^\circ}}{20\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ}} = \frac{150}{20\sqrt{2}} \cdot e^{j45^\circ} = 3,75 \cdot e^{j45^\circ} \, A$$

U vremenskom području struja ima oblik:

$$i(t) = I \cdot \sqrt{2} \sin(\omega \cdot t + \varphi_i) = 3,75 \cdot \sqrt{2} \sin(10^4 \cdot t + 45^\circ) \, A$$

c) Fazori napona na otporu i kondenzatoru:

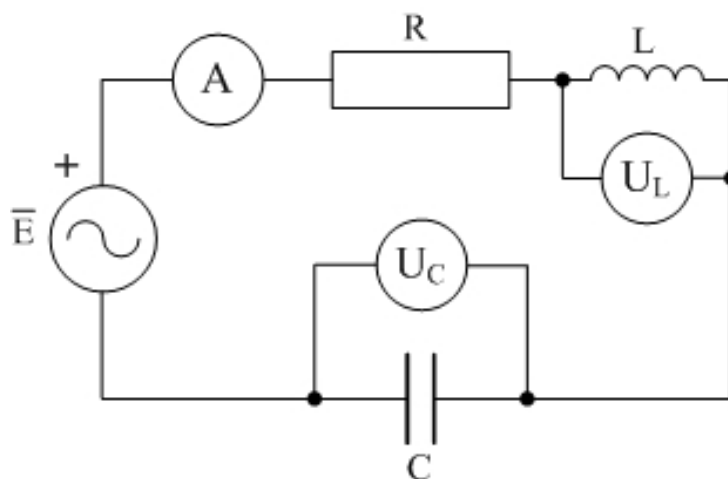
$$\bar{U}_R = \bar{I} \cdot \bar{Z}_R = \bar{I} \cdot R = 3,75 \cdot e^{j45^\circ} \cdot 20 \cdot e^{j0^\circ} = 75 \cdot e^{j45^\circ} \, V$$

$$\bar{U}_C = \bar{I} \cdot \bar{Z}_C = -j \cdot X_C \cdot \bar{I} = 3,75 \cdot e^{j45^\circ} \cdot 20 \cdot e^{-j90^\circ} = 75 \cdot e^{-j45^\circ} \, V$$

10

Zadatak 5:

Za serijski RLC krug izračunajte R , L , C i $\cos \varphi$ ako je zadano: $U_L = 660 \text{ V}$, $E = 200 \text{ V}$, $U_C = 500 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $I = 11 \text{ A}$.



11

Rješenje:

Iz poznatih efektivnih vrijednosti napona slijedi da je:

$$U_C = I \cdot X_C = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \Rightarrow C = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot U_C} = \frac{11}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 500} = 70 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$U_L = I \cdot X_L = I \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \Rightarrow L = \frac{U_L}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot I} = \frac{660}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 11} = 0,19 \text{ H}$$

Impedancija strujnog kruga iznosi:

$$Z = \frac{E}{I} = \frac{200}{11} = 18,18 \Omega$$

12

Kompleksni izraz za impedanciju glasi:

$$\bar{Z} = R + j \cdot (X_L - X_C)$$

odakle slijedi da je:

$$Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$$

Iz prethodnog izraza, slijedi da je radni otpor:

$$R = \sqrt{Z^2 - (X_L - X_C)^2} = \sqrt{Z^2 - \left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot L - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}\right)^2} = 11,33 \, \Omega$$

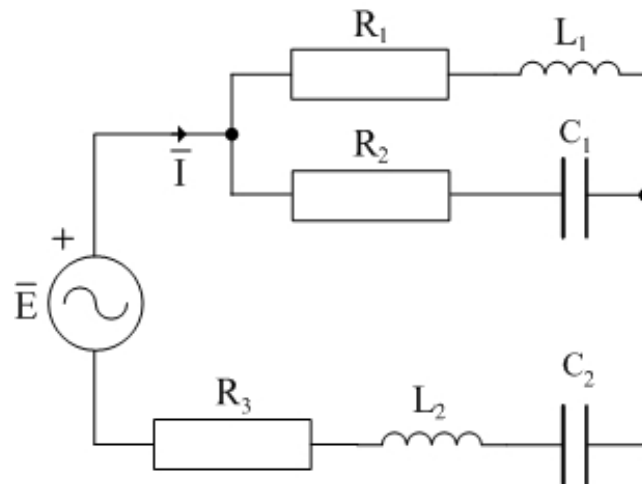
Faktor snage za $U_L > U_C$, odnosno za $X_L > X_C$ je:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{11,33}{18,18} = 0,62 \text{ ind.}$$

13

Zadatak 6:

Za zadanu mrežu, izračunajte ukupnu impedanciju Z , faktor snage i jakost struje izvora. Zadano je: $E = 220 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $R_1 = R_2 = 10 \, \Omega$, $R_3 = 10 \, \Omega$, $L_1 = 25,46 \text{ mH}$, $L_2 = 38,2 \text{ mH}$, $C_1 = 455 \, \mu\text{F}$, $C_2 = 796 \, \mu\text{F}$.



14

Rješenje:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 100 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

$$\bar{Z}_1 = R_1 + j\omega \cdot L_1 = 10 + j8 = 12,806 \cdot e^{j38,66^\circ} \Omega$$

$$\bar{Z}_2 = R_2 - j\frac{1}{\omega \cdot C_1} = 10 - j7 = 12,207 \cdot e^{-j34,992^\circ} \Omega$$

$$\bar{Z}_3 = R_3 + j\left(\omega \cdot L_2 - \frac{1}{\omega \cdot C_2}\right) = 6 + j8 = 10 \cdot e^{j53,13^\circ} \Omega$$

$$\bar{Z}_{12} = \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{12,806 \cdot e^{j38,66^\circ} \cdot 12,207 \cdot e^{-j34,992^\circ}}{10 + 10 + j(8 - 7)}$$

15

$$\bar{Z}_{12} = \frac{156,322 \cdot e^{j3,668^\circ}}{20,025 e^{j2,862^\circ}} = 7,806 \cdot e^{j0,806^\circ} = 7,805 + j0,11 \Omega$$

$$\bar{Z}_{uk} = \bar{Z}_{12} + \bar{Z}_3 = 7,805 + j0,11 + 6 + j8 = 13,805 + j8,11 \Omega$$

$$\bar{Z}_{uk} = 16,01 \cdot e^{j30,433^\circ} \Omega$$

Neka je fazni kut EMS jednak nuli.

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_{uk}} = \frac{220 \cdot e^{j0^\circ}}{16,01 \cdot e^{j30,433^\circ}} = 13,741 \cdot e^{-j30,433^\circ} \text{ A}$$

Faktor snage: $\cos \varphi = \cos(+30,433^\circ) = 0,86222 \text{ ind.}$

16

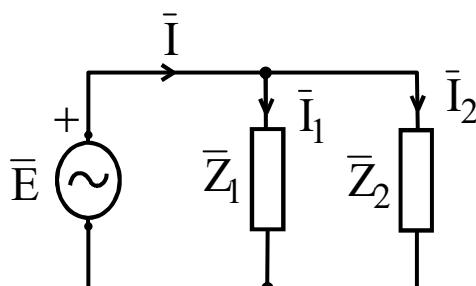
Zadatak 7:

Dva paralelno vezana trošila se napajaju iz izvora sinusne izmjenične struje.

Jakost struje prvog trošila $I_1 = 2,5$ A, a njegov faktor snage $\cos \varphi_1 = 0,75$ ind.

Ukupna jakost struje obaju trošila je $I = 4$ A, uz faktor snage $\cos \varphi = 0,62$ ind.

Izračunajte jakost struje drugog trošila I_2 i njegov faktor snage $\cos \varphi_2$.


Rješenje:

$$\cos \varphi_1 = 0,75 \text{ ind.} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 41,41^\circ$$

$$\cos \varphi = 0,62 \text{ ind.} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 51,684^\circ$$

Neka je fazni kut EMS jednak nuli.

$$\bar{I}_1 = 2,5 \cdot e^{-j41,41^\circ} = 1,875 - j1,654 \text{ A}$$

$$\bar{I} = 4 \cdot e^{-j51,684^\circ} = 2,48 - j3,138 \text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I} - \bar{I}_1 = 2,48 - j3,138 - 1,875 + j1,654 \text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = 0,605 - j1,484 = 1,603 \cdot e^{-j67,82^\circ} \text{ A}$$

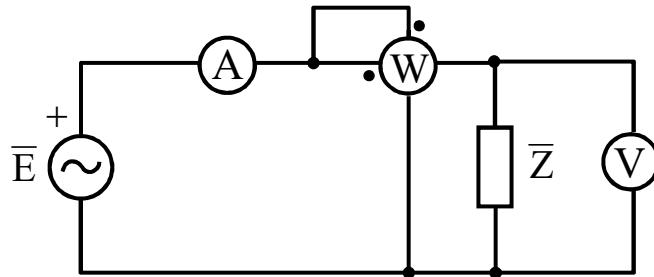
$$\Rightarrow I_2 = 1,603 \text{ A}$$

$$\Rightarrow \varphi_2 = +67,82^\circ$$

$$\cos \varphi_2 = \cos(+67,82^\circ) = 0,37751 \text{ ind.}$$

Zadatak 8:

Izračunati impedanciju i faktor snage jednofaznog trošila ako instrumenti spojeni prema slici pokazuju: $I = 10 \text{ A}$, $U = 400 \text{ V}$, $P = 3 \text{ kW}$.



1

Rješenje:

Radna snaga koju mjeri vatmetar jest radna snaga na impedanciji:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

Iz ovog izraza moguće je odrediti faktor snage:

$$\cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{3000}{400 \cdot 10} = 0,75$$

Iznos impedancije može se izračunati iz poznatog napona i struje na impedanciji:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{400}{10} = 40 \, \Omega$$

Impedancija osim iznosa određena je i faznim kutom, tj.

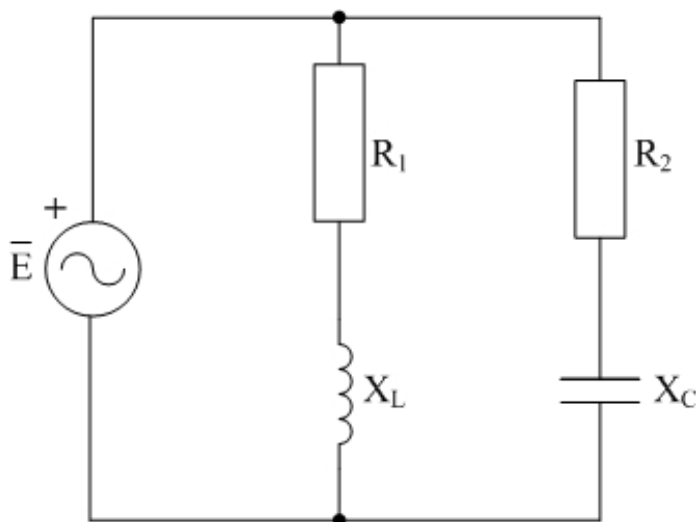
$$\cos \varphi = 0,75 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm 41,4^\circ$$

$$\bar{Z} = 40 \cdot e^{\pm j41,41^\circ} \, \Omega$$

2

Zadatak 9:

U strujnom krugu prema slici izračunajte sve struje, radnu snagu izvora te snagu na otporima R_1 i R_2 . Zadano je: $R_1 = 10 \, \Omega$, $R_2 = 15 \, \Omega$, $X_L = 20 \, \Omega$, $X_C = 15 \, \Omega$, $E = 200 \, \text{V}$.



3

Rješenje:

Neka je fazni kut EMS jednak nuli.

Struja izvora jednaka je sumi struja u paralelnim granama:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$

gdje je:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}}{R_1 + jX_L} = \frac{200}{10 + j20} = 4 - j8 = 8,94 \cdot e^{-j63,4^\circ} \, \text{A}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{R_2 - jX_C} = \frac{200}{15 - j15} = 6,67 + j6,67 = 9,43 \cdot e^{j45^\circ} \, \text{A}$$

4

Slijedi da je:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 4 - j8 + 6,67 + j6,67 = 10,67 - j1,33 = 10,75e^{-j7,1} \text{ A}$$

Konjugirano kompleksna vrijednost struje je:

$$\bar{I}^* = 10,75e^{+j7,1} \text{ A}$$

Snaga izvora je:

$$P = \operatorname{Re}\{\bar{E} \cdot \bar{I}^*\} = \operatorname{Re}\{200 \cdot 10,75 \cdot e^{j7,1^\circ}\} = \operatorname{Re}\{2150 \cdot e^{j7,1^\circ}\} = 2133 \text{ W}$$

Snage na otporima R_1 i R_2 su:

$$P_1 = I_1^2 \cdot R_1 = 8,94^2 \cdot 10 = 800 \text{ W}$$

$$P_2 = I_2^2 \cdot R_2 = 9,43^2 \cdot 15 = 1333 \text{ W}$$

5

Napomena:

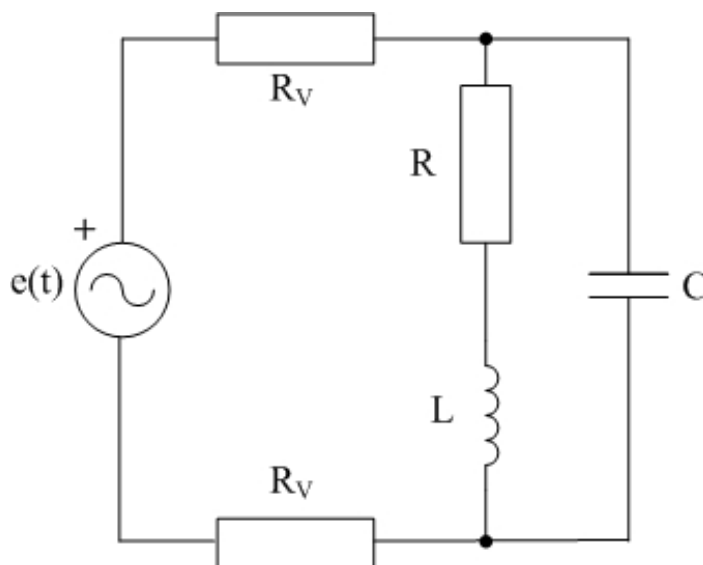
Sva radna snaga koju daje izvor troši samo na radnim otporima R_1 i R_2 :

$$P = P_1 + P_2 = 800 + 1333 = 2133 \text{ W}$$

6

Zadatak 10:

Za strujni krug prema slici treba odrediti struju, jalovu, radnu i prividnu snagu koju daje izvor te snagu gubitaka u vodičima R_V . Zadano je: $R_V = 2 \, \Omega$, $C = 26,525 \, \mu\text{F}$, $L = 26,525 \, \text{mH}$, $R = 20 \, \Omega$, $e(t) = 311 \cdot \sin(377 \cdot t) \, \text{V}$.



7

Rješenje:

Iz zadane $e(t)$ proizlazi da je fazni kut EMS jednak nuli.

Vrijedi da je:

$$E = \frac{E_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 220 \, \text{V} \quad \Rightarrow \quad \bar{E} = 220 \cdot e^{j0^\circ} \, \text{V}$$

$$\bar{Z} = R_V + (R + jX_L) \parallel (-jX_C) + R_V$$

Iz zadanih podataka slijedi da su reaktancije:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{377 \cdot 26,525 \cdot 10^{-6}} = 100 \, \Omega$$

$$X_L = \omega \cdot L = 377 \cdot 26,525 \cdot 10^{-3} = 10 \, \Omega$$

8

Ukupna impedancija je:

$$\bar{Z} = 2 \cdot 2 + \frac{(20 + j \cdot 10) \cdot (-j \cdot 100)}{20 + j \cdot 10 - j \cdot 100} = 27,53 + j \cdot 5,88 = 28,15 \cdot e^{j12,06^\circ} \Omega$$

pa je uz pretpostavku da je fazni kut EMS nula:

$$\bar{I} = \frac{220}{28,15 \cdot e^{j12,06^\circ}} = 7,815 \cdot e^{-j12,06^\circ} \text{ A} \Rightarrow i(t) = 10,808 \cdot \sin(377 \cdot t - 12,06^\circ) \text{ A}$$

Gubici u vodičima iznose:

$$P_V = 2 \cdot I^2 \cdot R_V = 244,3 \text{ W}$$

Prividna snaga izvora je:

$$S = E \cdot I = 220 \cdot 7,815 = 1719,3 \text{ VA}$$

9

Radna snaga izvora je:

$$P = E \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$\varphi = +12,06^\circ \Rightarrow P = 220 \cdot 7,815 \cdot \cos(12,06^\circ) = 1681,35 \text{ W}$$

Jalova snaga izvora je:

$$Q = E \cdot I \cdot \sin \varphi = 220 \cdot 7,815 \cdot \sin(12,06^\circ) = 359,22 \text{ VAr}$$

ili

$$Q = +\sqrt{S^2 - P^2} = 359,22 \text{ VAr}$$

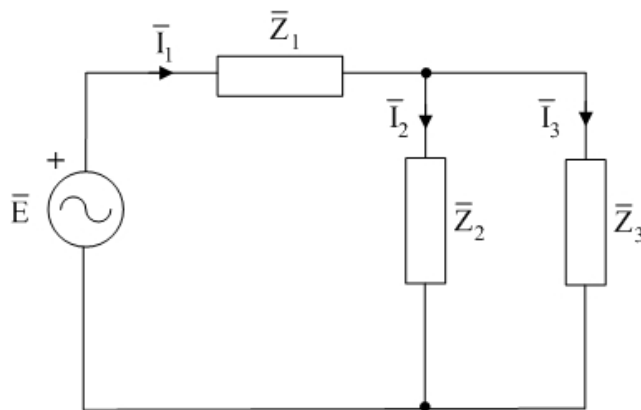
Radna snaga na otporu R je:

$$P_R = P - P_V = 1681,35 - 244,3 = 1437,05 \text{ W}$$

10

Zadatak 11 (ogledni ispitni primjer):

U spoju prema slici zadano je: $\bar{E} = 20 \cdot e^{j0^\circ} \text{ V}$, $\bar{Z}_1 = 4 + j8 \, \Omega$, $\bar{Z}_2 = 10 \cdot e^{j37^\circ} \, \Omega$, $\bar{Z}_3 = 3 - j4 \, \Omega$. Izračunajte: I_1 , I_2 , I_3 i radnu snagu izvora P .

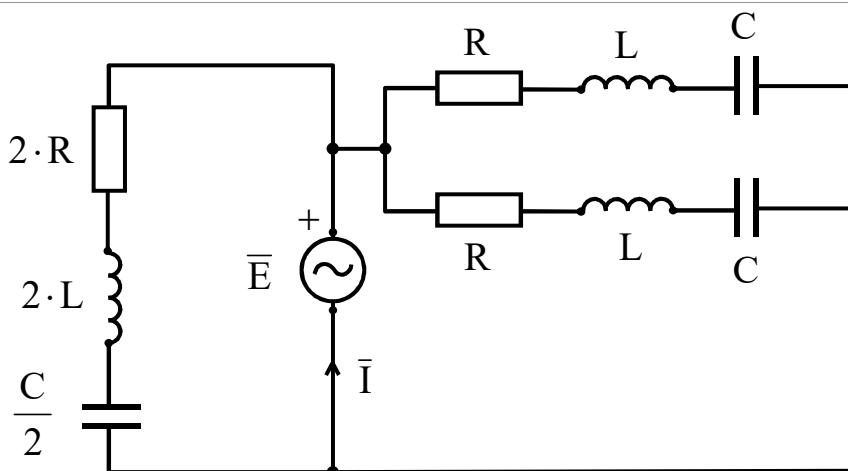

Rješenje:

$$I_1 = 2 \text{ A}, I_2 = 0,9 \text{ A}, I_3 = 1,8 \text{ A}, P = 32 \text{ W}.$$

11

Zadatak 12 (ogledni ispitni primjer):

Izračunajte prividnu, radnu i jalovu snagu koju daje izvor. Zadano je: $E = 220 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $R = 10 \, \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$, $C = 300 \, \mu\text{F}$.

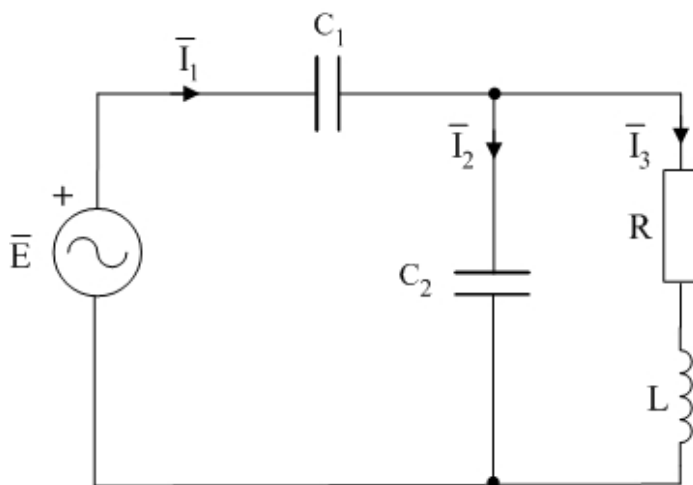

Rješenje:

$$S = 5241,5 \text{ VA}, P = 2270,55 \text{ W}, Q = 4724,18 \text{ VAr}.$$

12

Zadatak 13 (ogledni ispitni primjer):

Za spoj prema slici zadano je: $R = 1 \, \Omega$, $L = 0,02 \, \text{mH}$, $C_1 = 10 \, \mu\text{F}$, $C_2 = 5 \, \mu\text{F}$, $U_{C1} = 5 \, \text{V}$, $\omega = 10^5 \, \text{s}^{-1}$. Izračunajte E , I_2 i I_3 .



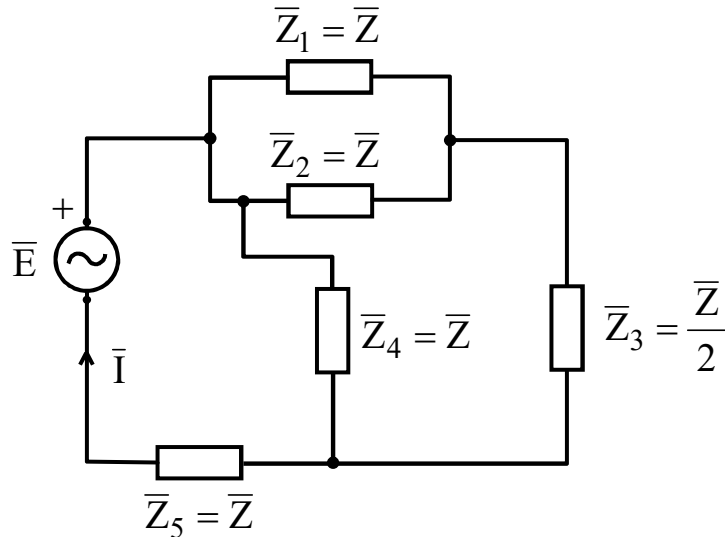
Rješenje:

$$E = 25 \, \text{V}, I_2 = 11,2 \, \text{A}, I_3 = 10 \, \text{A}.$$

Zadatak 14:

Izračunajte prividnu, radnu i jalovu snagu koju daje izvor. Zadano je:

$$\bar{E} = 220 \cdot e^{j0^\circ} \text{ V}, \bar{Z} = 100 \cdot e^{j30^\circ} \Omega.$$



1

Rješenje:

$$\bar{Z}_{12} = \frac{\bar{Z}}{2} ; \bar{Z}_{123} = \bar{Z}_{12} + \bar{Z}_3 = \bar{Z} ; \bar{Z}_{1234} = \bar{Z}_{123} \parallel \bar{Z}_4 = \frac{\bar{Z}}{2}$$

$$\bar{Z}_{uk} = \bar{Z}_{1234} + \bar{Z}_5 = \frac{3}{2} \cdot \bar{Z} = 150 \cdot e^{j30^\circ} \Omega$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_{uk}} = \frac{220}{150 \cdot e^{j30^\circ}} = 1,467 \cdot e^{-j30^\circ} \text{ A}$$

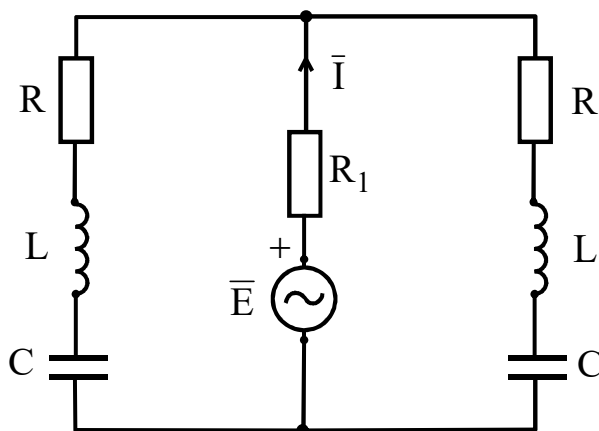
$$\begin{aligned} \bar{S} &= \bar{E} \cdot \bar{I}^* = 220 \cdot 1,467 \cdot e^{j30^\circ} = 322,74 \cdot e^{j30^\circ} = \\ &= 279,501 + j \cdot 161,37 = P + j \cdot Q \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = 322,74 \text{ VA} ; P = 279,501 \text{ W} ; Q = 161,37 \text{ VAr}$$

2

Zadatak 15 (ogledni ispitni primjer) :

Izračunajte snagu koja se troši na radnom otporu R_1 . Zadano je: $E = 220 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $R = 10 \Omega$, $L = 0,15 \text{ H}$, $C = 100 \mu\text{F}$, $R_1 = 15 \Omega$.



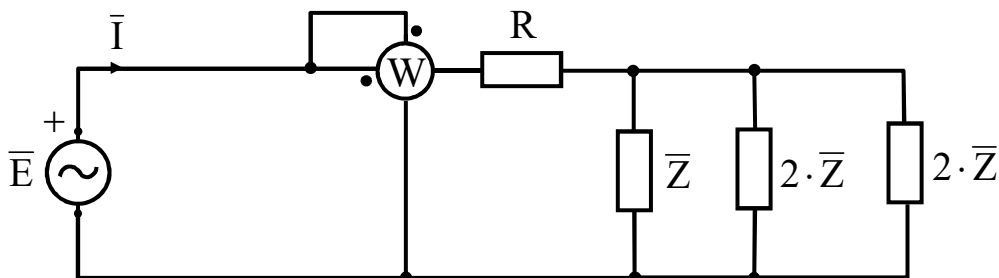
Rješenje:

$$P_1 = 1583,63 \text{ W}$$

3

Zadatak 16 (ogledni ispitni primjer) :

Izračunajte snagu koju pokazuje vatmetar. Zadano je: $R = 10 \Omega$, $f = 50 \text{ Hz}$, $\bar{E} = 220 \cdot e^{j0^\circ} \text{ V}$, $\bar{Z} = 20 \cdot e^{j45^\circ} \Omega$.



Rješenje:

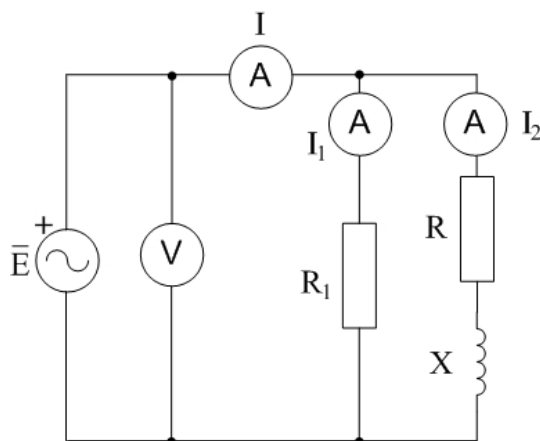
$$P = 2420 \text{ W}$$

4

Zadatak 17 (ogledni ispitni primjer):

Instrumenti uključeni u mrežu na slici pokazuju da je: $U = 200 \text{ V}$, $I = 37,9 \text{ A}$ i $I_1 = I_2 = 20 \text{ A}$. Treba izračunati:

- R i X
- Radnu snagu na otporniku R .



Rješenje:

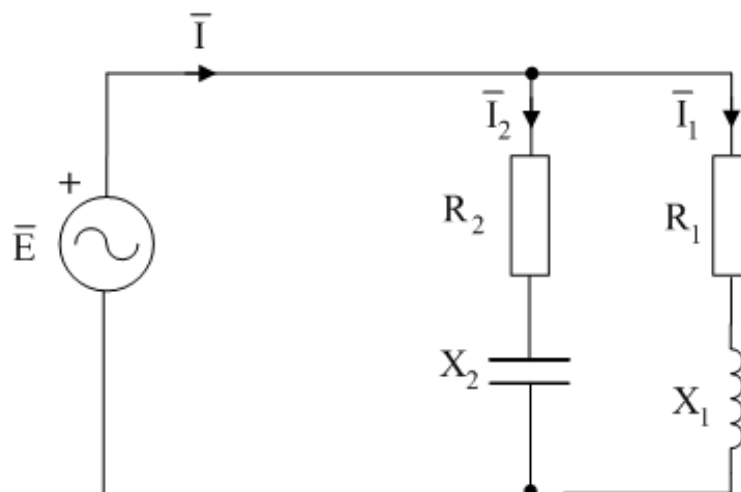
a) $R = 7,95 \Omega$, $X = 6,06 \Omega$

b) $P = 3180 \text{ W}$.

5

Zadatak 18 (ogledni ispitni primjer):

Mreža prema slici zadana je sa: $\bar{Z}_1 = 2 + j2 \Omega$, $\bar{Z}_2 = 2 - j4 \Omega$, $I_2 = 5 \text{ A}$. Izračunajte jakost struje I .



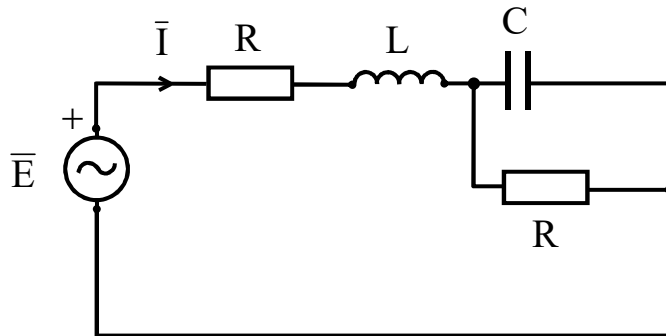
Rješenje:

$I = 7,9 \text{ A}$

6

Zadatak 19:

Izračunajte induktivitet L za koji je radna snaga koju daje izvor tri puta veća od jalove snage izvora ($P = 3 \cdot Q$). Nakon toga izračunajte EMS izvora E kod kojeg je prividna snaga izvora $S = 100 \text{ VA}$. Zadano je: $f = 50 \text{ Hz}$, $C = 1 \mu\text{F}$, $R = 10 \Omega$.



7

Rješenje:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = 3183,1 \Omega$$

$$\bar{Z}_{RC} = \frac{R \cdot (-jX_C)}{R + (-jX_C)} = \frac{10 \cdot 3183,1 \cdot e^{-j90^\circ}}{10 - j3183,1} = \frac{31831 \cdot e^{-j90^\circ}}{3183,12 \cdot e^{-j89,82^\circ}}$$

$$\bar{Z}_{RC} = 10 \cdot e^{-j0,18^\circ} = 10 - j \cdot 0,0314 \Omega$$

$$\bar{Z}_{uk} = R + j\omega L + \bar{Z}_{RC} = 20 + j \cdot (100 \cdot \pi \cdot L - 0,0314) \Omega$$

8

$$P = 3 \cdot Q \Rightarrow 20 = 3 \cdot (100 \cdot \pi \cdot L - 0,0314)$$

$$\Rightarrow L = 0,02132 \text{ H}$$

$$\bar{Z}_{\text{uk}} = 20 + j(100 \cdot \pi \cdot 0,02132 - 0,0314) = 21,082 \cdot e^{j18,434^\circ} \Omega$$

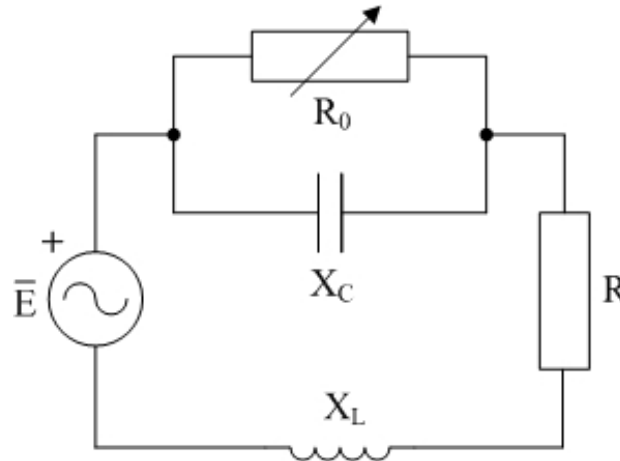
$$S = E \cdot I = \frac{E^2}{Z} \Rightarrow E = \sqrt{S \cdot Z} = \sqrt{100 \cdot 21,082} = 45,915 \text{ V}$$

Zadatak 20:

U spoju prema slici potrebno je izračunati:

- R_0 za kojeg će krug biti u rezonanciji,
- Struju izvora u slučaju rezonancije.

Zadano je: $E = 100 \text{ V}$, $R = 15 \Omega$, $X_L = 5 \Omega$, $X_C = 10 \Omega$.



1

Rješenje:

$$\bar{Z} = (-jX_C \parallel R_0) + R + jX_L = \frac{R_0 \cdot (-jX_C)}{R_0 - jX_C} \cdot \frac{R_0 + jX_C}{R_0 + jX_C} + R + jX_L$$

$$\bar{Z} = \frac{R_0^2 \cdot (-jX_C) + R_0 \cdot X_C^2}{R_0^2 + X_C^2} + R + jX_L$$

$$\bar{Z} = R + \frac{R_0 \cdot X_C^2}{R_0^2 + X_C^2} + j \left(X_L - \frac{R_0^2 \cdot X_C}{R_0^2 + X_C^2} \right)$$

Iz uvjeta za serijsku rezonanciju moguće je odrediti otpor R_0 :

$$\text{Imag}(\bar{Z}) = 0$$

2

$$X_L - \frac{R_0^2 \cdot X_C}{R_0^2 + X_C^2} = 0 \Rightarrow R_0 = \sqrt{\frac{X_C^2 \cdot X_L}{X_C - X_L}} = \sqrt{\frac{10^2 \cdot 5}{10 - 5}} = 10 \Omega$$

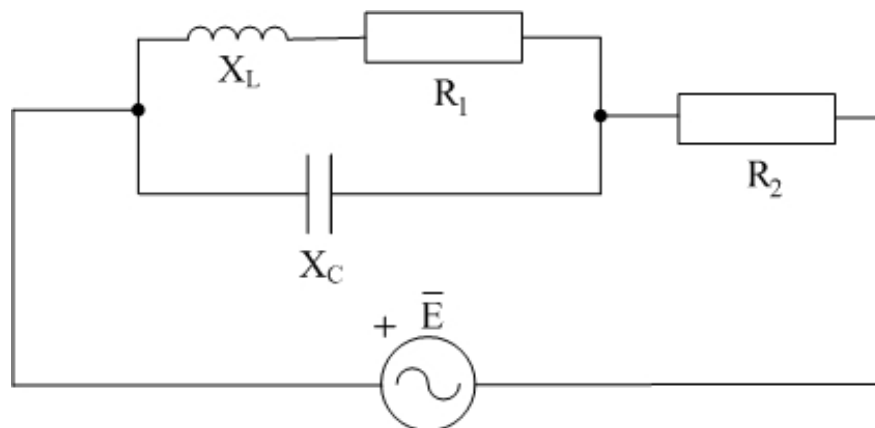
Struja u slučaju rezonanciji je:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R + \frac{R_0 \cdot X_C^2}{R_0^2 + X_C^2}} = \frac{100}{15 + \frac{10 \cdot 10^2}{10^2 + 10^2}} = 5 \text{ A}$$

3

Zadatak 21 (ogledni ispitni primjer):

Za koju će vrijednost X_C u mreži nastupiti rezonancija, ako je zadano:
 $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 15 \Omega$, $X_L = 10 \Omega$?



Rješenje:

$$X_C = 20 \Omega$$

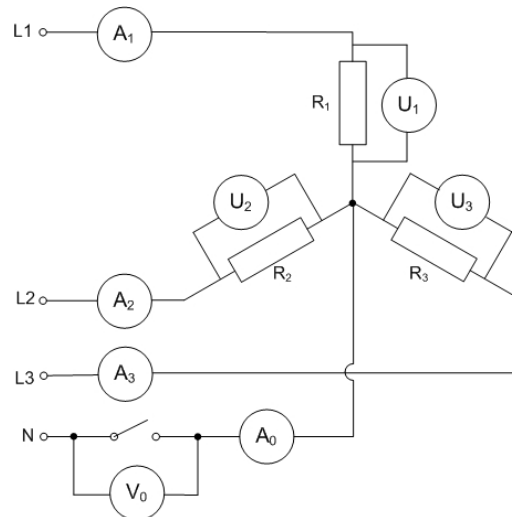
4

Zadatak 22:

Zadana je mreža prema slici koja je priključena na trofazni simetrični izvor linijskog napona U_ℓ . Odredite pokazivanja instrumenata za sljedeće slučajeve:

- jednak teret u svim fazama uz uključenu sklopku u neutralnom vodiču,
- prekid faze C uz uključenu sklopku u neutralnom vodiču,
- prekid faze C uz isključenu sklopku u neutralnom vodiču,

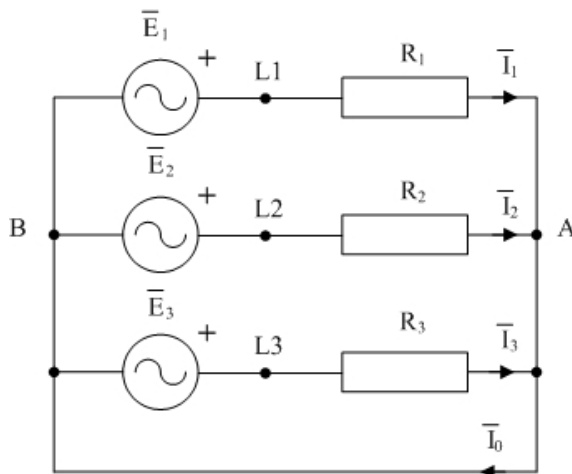
Zadano je: $U_\ell = 173 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \Omega$.



5

Rješenje:

- Jednak teret u svim fazama uz uključenu sklopku u neutralnom vodiču



Naponi izvora:

$$\bar{E}_1 = 100 \cdot e^{j0^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{E}_2 = 100 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{E}_3 = 100 \cdot e^{j120^\circ} \text{ V}$$

S obzirom da je riječ o simetričnom trošilu s neutralnim vodičem:

$$\bar{U}_{AB} = 0$$

Naponi na trošilima su:

$$\bar{U}_1 = \bar{E}_1 = 100 \cdot e^{j0^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{U}_2 = \bar{E}_2 = 100 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{U}_3 = \bar{E}_3 = 100 \cdot e^{j120^\circ} \text{ V}$$

6

Iz poznatih napona na trošilima moguće je odrediti struje:

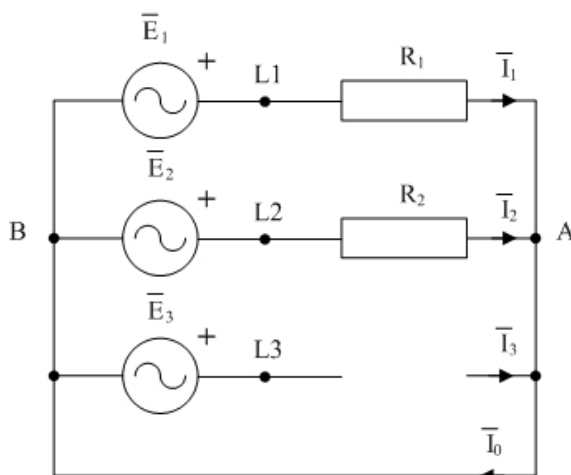
$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{R_1} = \frac{100 \cdot e^{j0^\circ}}{10} = 10 \cdot e^{j0^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_2}{R_2} = \frac{100 \cdot e^{-j120^\circ}}{10} = 10 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_3}{R_3} = \frac{100 \cdot e^{j120^\circ}}{10} = 10 \cdot e^{j120^\circ} \text{ A}$$

7

b) prekid faze C uz uključenu sklopku u neutralnomvodu



Zbog postojećeg neutralnog voda vrijedi:

$$\bar{U}_{AB} = 0$$

Napon na trošilima:

$$\bar{U}_1 = \bar{E}_1 = 100 \cdot e^{j0^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{U}_2 = \bar{E}_2 = 100 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{U}_3 = \bar{E}_3 = 100 \cdot e^{j120^\circ} \text{ V}$$

Struje su:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{R_1} = \frac{100 \cdot e^{j0^\circ}}{10} = 10 \cdot e^{j0^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_2}{R_2} = \frac{100 \cdot e^{-j120^\circ}}{10} = 10 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{I}_3 = 0 \text{ A}$$

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 10 \cdot e^{-j60^\circ} \text{ A}$$

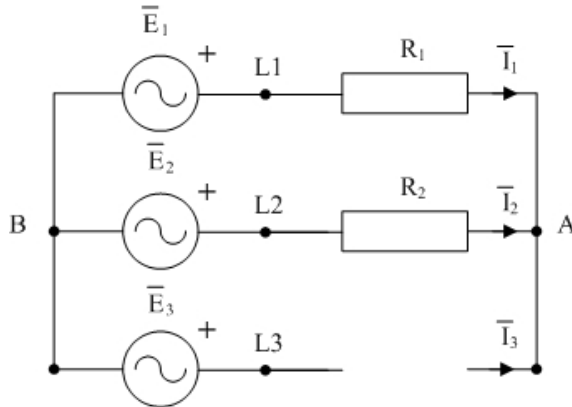
8

c) prekid faze C uz isključenu sklopku u neutralnomvodu

Mreža nema neutralni vod pa vrijedi:

$$\bar{U}_{AB} \neq 0$$

Napon na trošilima nije jednak naponu izvora:



$$\bar{U}_1 = \bar{E}_1 - \bar{U}_{AB}$$

$$\bar{U}_2 = \bar{E}_2 - \bar{U}_{AB}$$

$$\bar{U}_3 = \bar{E}_3 - \bar{U}_{AB}$$

Da bi se odredili naponi na trošilima potrebno je odrediti napon između zvjezdišta trofaznog trošila i izvora. Taj napon se određuje pomoću Millman-ovog teorema :

9

$$\bar{U}_{AB} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{R_A} + \frac{\bar{E}_2}{R_B}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}} = \frac{\frac{100 \cdot e^{j0^\circ}}{10} + \frac{100 \cdot e^{-j120^\circ}}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}} = 50 \cdot e^{-j60^\circ} \text{ V}$$

Naponi na trošilima iznose:

$$\bar{U}_1 = \bar{E}_1 - \bar{U}_{AB} = 100 \cdot e^{j0^\circ} - 50 \cdot e^{-j60^\circ} = 86,6 \cdot e^{j30^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{U}_2 = \bar{E}_2 - \bar{U}_{AB} = 100 \cdot e^{-j120^\circ} - 50 \cdot e^{-j60^\circ} = 86,6 \cdot e^{-j150^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{U}_3 = \bar{E}_3 - \bar{U}_{AB} = 100 \cdot e^{j120^\circ} - 50 \cdot e^{-j60^\circ} = 150 \cdot e^{j120^\circ} \text{ V}$$

10

Struje u mreži su:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{R_1} = \frac{86,6 \cdot e^{j30^\circ}}{10} = 8,66 \cdot e^{j30^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_2}{R_2} = \frac{86,6 \cdot e^{-j150^\circ}}{10} = 8,66 \cdot e^{-j150^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{I}_3 = 0 \cdot e^{j0^\circ} \text{ A}$$

Zadatak 23:

Trofazni električni bojler ima tri jednaka grijača radnog otpora $R = 30 \ \Omega$ i induktiviteta $L = 0,01 \text{ H}$. Bojler je spojen na krutu mrežu (linijskog) napona 380 V, frekvencije 50 Hz. Izračunajte prividnu, radnu i jalovu snagu bojlera ako su grijači spojeni:

- U zvijezdu,
- U trokut.

Rješenje:

U oba slučaja:

$$\bar{Z} = 30 + j \cdot 100 \cdot \pi \cdot 0,01 = 30 + j \cdot \pi = 30,164 \cdot e^{j5,978^\circ} \ \Omega$$

$$\Rightarrow Z = 30,164 \ \Omega$$

a) Spoj u zvijezdu

$$S = 3 \cdot U_f \cdot I_f = \frac{U_1^2}{Z} = \frac{380^2}{30,164} = 4787,16 \text{ VA}$$

$$P = S \cdot \cos \varphi = 4787,16 \cdot \cos 5,978^\circ = 4761,13 \text{ W}$$

$$Q = S \cdot \sin \varphi = 4787,16 \cdot \sin 5,978^\circ = 498,57 \text{ VAr}$$

b) Spoj u trokut

$$S = 3 \cdot 4787,16 = 14,361 \text{ kVA}$$

$$P = 3 \cdot 4761,13 = 14,283 \text{ kW}$$

$$Q = 3 \cdot 498,57 = 1,496 \text{ kVAr}$$

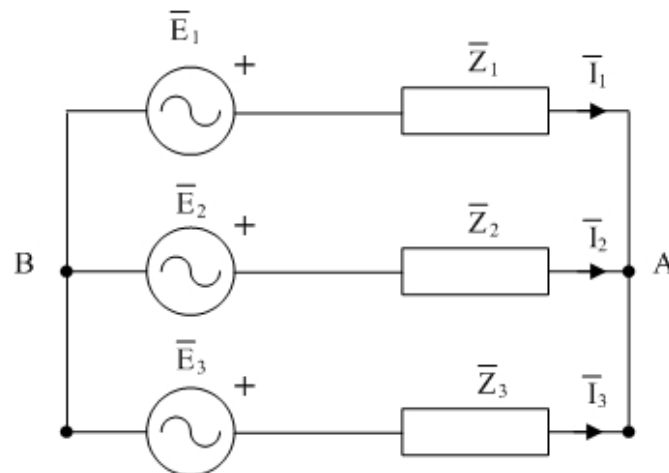
13

Zadatak 24 (ogledni ispitni primjer):

Za spoj prema slici zadano je: $\bar{E}_1 = 220 \cdot e^{j0^\circ} \text{ V}$, $\bar{E}_2 = 220 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ V}$,

$\bar{E}_3 = 220 \cdot e^{j120^\circ} \text{ V}$, $\bar{Z}_1 = 10 \cdot e^{j30^\circ} \Omega$, $\bar{Z}_2 = 20 \cdot e^{-j45^\circ} \Omega$, $\bar{Z}_3 = 5 \cdot e^{j60^\circ} \Omega$.

Millmanovom metodom izračunajte struje: I_1 , I_2 i I_3 .



Rješenje: $\bar{I}_1 = 19,95 \cdot e^{-j74,88^\circ} \text{ A}$, $\bar{I}_2 = 19,06 \cdot e^{-j74,65^\circ} \text{ A}$,

$\bar{I}_3 = 39,01 \cdot e^{j105,23^\circ} \text{ A}$.

14