SIGNALI I SUSTAVI

(3. dio)

PREDAVANJA I AUDITORNE VJEŽBE

MATEMATIČKO MODELIRANJE SUSTAVA

- Kao što smo naučili, svojstvo sustava jest da prima, pohranjuje, transformira i prenosi signale.

- Već smo u uvodnom poglavlju istaknuli da nam je u konkretnim primjenama cilj:

  - odrediti, predvidjeti ili podesiti ponašanje sustava (ANALIZA sustava) ili …
  - realizirati sustav koji bi imao neka željena svojstva (SINTEZA ili dizajniranje sustava).

- Također smo naglasili da ćemo se u okviru ovog kolegija baviti analizom sustava (jer sinteza nadilazi okvire ovog temeljnog kolegija)

- Da bismo na neki način kvantitativno opisali i analizirali sustav koji nas zanima, služimo se raznim matematičkim postupcima.

- Često ćemo kroz primjere vidjeti da se ponašanje različitih realnih sustava može opisati na sličan matematički način (npr. sličnim diferencijalnim jednadžbama).

- Pogodan matematički opis nekog realnog sustava nazivamo **matematički model sustava**, a proces definiranja matematičkog modela sustava naziva se **matematičko modeliranje**.

MATEMATIČKO MODELIRANJE SUSTAVA

PRIMJER MATEMATIČKOG MODELIRANJA SUSTAVA:

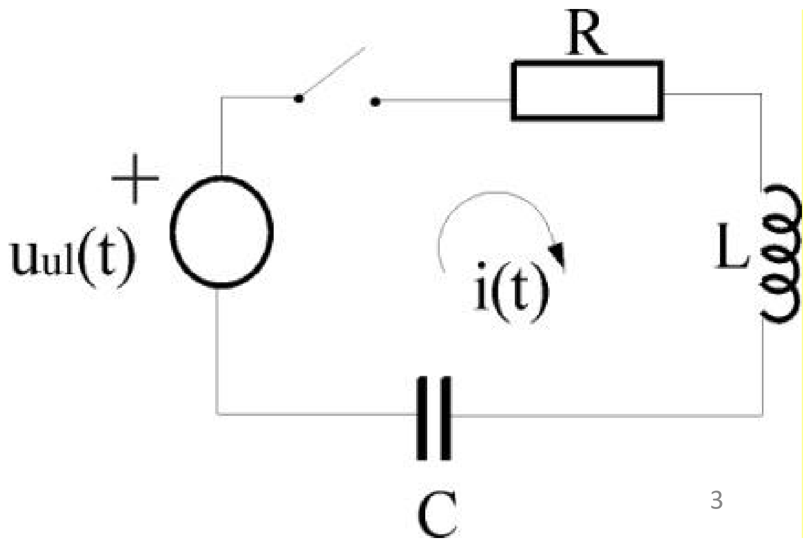
Prikažimo na jednostavnom primjeru kako se matematički modelira neki sustav: Poslužimo se RLC krugom prikazanim na slici dole.

- Neka nam je poznat valni oblik ulaznog napona, a želimo odrediti jednadžbu koja opisuje kako se ponaša struja u krugu s obzirom na promjenu ulaznog napona (tj. želimo postaviti model sustava, u kojem je napon izvora $u_{ul}(t)$ ULAZNI signal, a struja u krugu i(t) IZLAZNI signal iz sustava).

- RLC strujni krugovi su primjer široke klase veoma važnih sustava koji se mogu matematički opisati diferencijalnim jednadžbama o kojima će poslije više govoriti. Ovdje ćemo, bez da ulazimo u detalje, samo dati jednostavan primjer kako modelirati neki sustav i prikazati ga blok dijagramom.

- Prvo postavimo naponsku jednadžbu kruga (ulazni napon jednak je sumi svih padova napona u krugu):

$$u_{ul}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

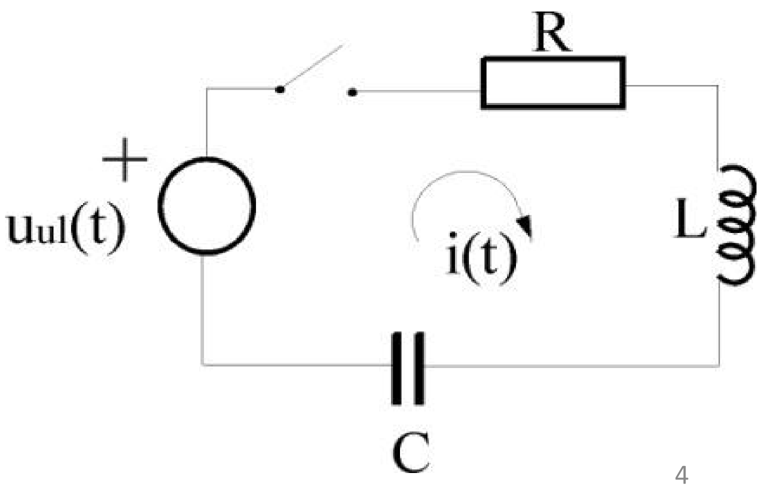


MATEMATIČKO MODELIRANJE SUSTAVA

PRIMJER MATEMATIČKOG MODELIRANJA SUSTAVA:

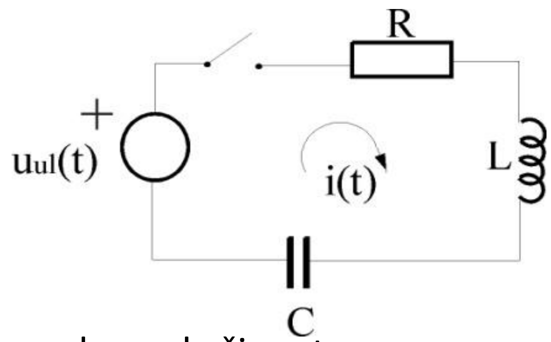
$$u_{ul}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

- Vidimo da smo dobili integro-diferencijalnu jednadžbu koju je, u principu, vrlo složeno rješavati.
- Stoga problemu pristupamo dvojako:
    - ili dodatnim deriviranjem svedemo jednadžbu na čisto diferencijalnu,
    - ili dodatnim integriranjem dobijemo jednadžbu s integralima.
- Pokažimo oba načina…….



MATEMATIČKO MODELIRANJE SUSTAVA

PRIMJER MATEMATIČKOG MODELIRANJA SUSTAVA:



1. NAČIN MODELIRANJA SUSTAVA: OPIS SUSTAVA DIFERENCIJALNOM JEDNADŽBOM

- Dakle, deriviranjem integro-diferencijalne jednadžbe koja opisuje sustav 'riješit' ćemo se integrala…pokažimo to…

$$u_{ul}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt \quad / \frac{d}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{du_{ul}(t)}{dt} = R\frac{di(t)}{dt} + L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}i(t)$$

- Sad, kad smo se 'riješili' integrala, izlučimo izlazni signal, i(t):

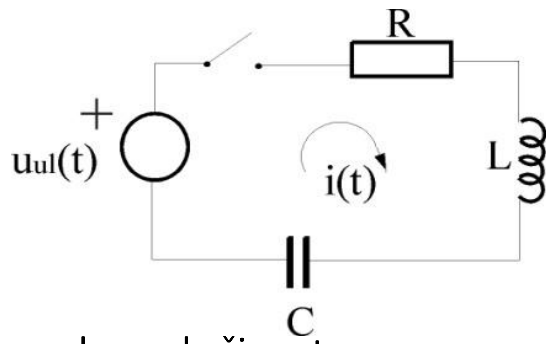
$$i(t) = -RC\frac{di(t)}{dt} - LC\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + C\frac{du_{ul}(t)}{dt}$$

- Dobili smo diferencijalnu jednadžbu u kojoj je izlaz (struja u krugu) prikazan kao funkcija prve i druge derivacije izlaza i prve derivacije ulaza (ulaznog napona).

- Prikažimo ovu jednadžbu u obliku blok dijagrama koji se vrlo često koristi u grafičkom predočavanju sustava.

MATEMATIČKO MODELIRANJE SUSTAVA

PRIMJER MATEMATIČKOG MODELIRANJA SUSTAVA:



1. NAČIN MODELIRANJA SUSTAVA: OPIS SUSTAVA DIFERENCIJALNOM JEDNADŽBOM

- Dakle, deriviranjem integro-diferencijalne jednadžbe koja opisuje sustav 'riješit' ćemo se integrala…pokažimo to…

$$u_{ul}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt \quad / \frac{d}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{du_{ul}(t)}{dt} = R\frac{di(t)}{dt} + L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}i(t)$$

- Sad, kad smo se 'riješili' integrala, izlučimo izlazni signal, i(t):

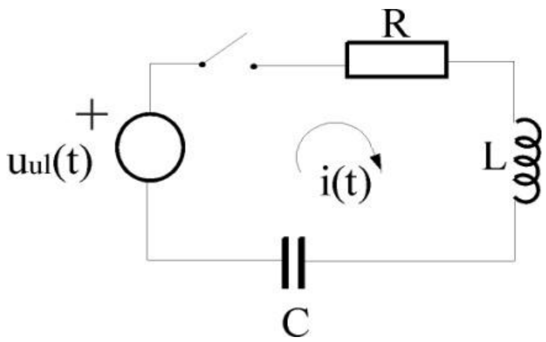
$$i(t) = -RC\frac{di(t)}{dt} - LC\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + C\frac{du_{ul}(t)}{dt}$$

- Dobili smo diferencijalnu jednadžbu u kojoj je izlaz (struja u krugu) prikazan kao funkcija prve i druge derivacije izlaza i prve derivacije ulaza (ulaznog napona).

- Prikažimo ovu jednadžbu u obliku blok dijagrama koji se vrlo često koristi u grafičkom predočavanju sustava.

MATEMATIČKO MODELIRANJE SUSTAVA

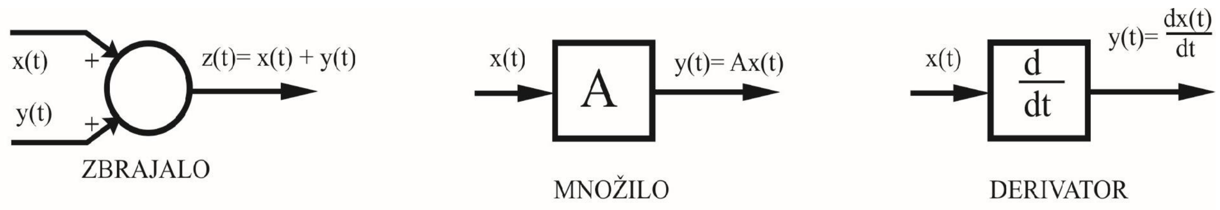
PRIMJER MATEMATIČKOG MODELIRANJA SUSTAVA:



1. NAČIN MODELIRANJA SUSTAVA: OPIS SUSTAVA DIFERENCIJALNOM JEDNADŽBOM

$$i(t) = -RC\frac{di(t)}{dt} - LC\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + C\frac{du_{ul}(t)}{dt}$$

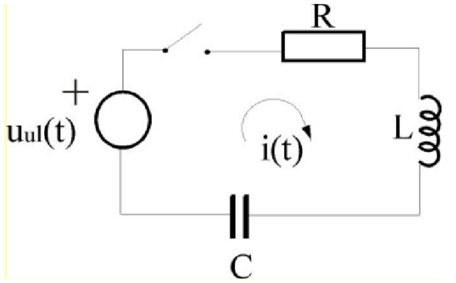
- PITANJE: U našem primjeru, koje matematičke operacije su sadržane gornjoj jednadžbi?
- ODGOVOR: Jednadžba sadrži operacije zbrajanja, množenja i deriviranja, te će i blok dijagram sustava također morati sadržavati blokove za zbrajanje, množenje s konstantom i deriviranje, prikazane na donjim slikama:



- Primjenom prikazanih blokova sa slike nacrtat ćemo blok dijagram sustava opisanog gornjom jednadžbom,
  Ima li koji dobrovoljac da pokuša nacrtati blok dijagram na ploči? ☺

MATEMATIČKO MODELIRANJE SUSTAVA

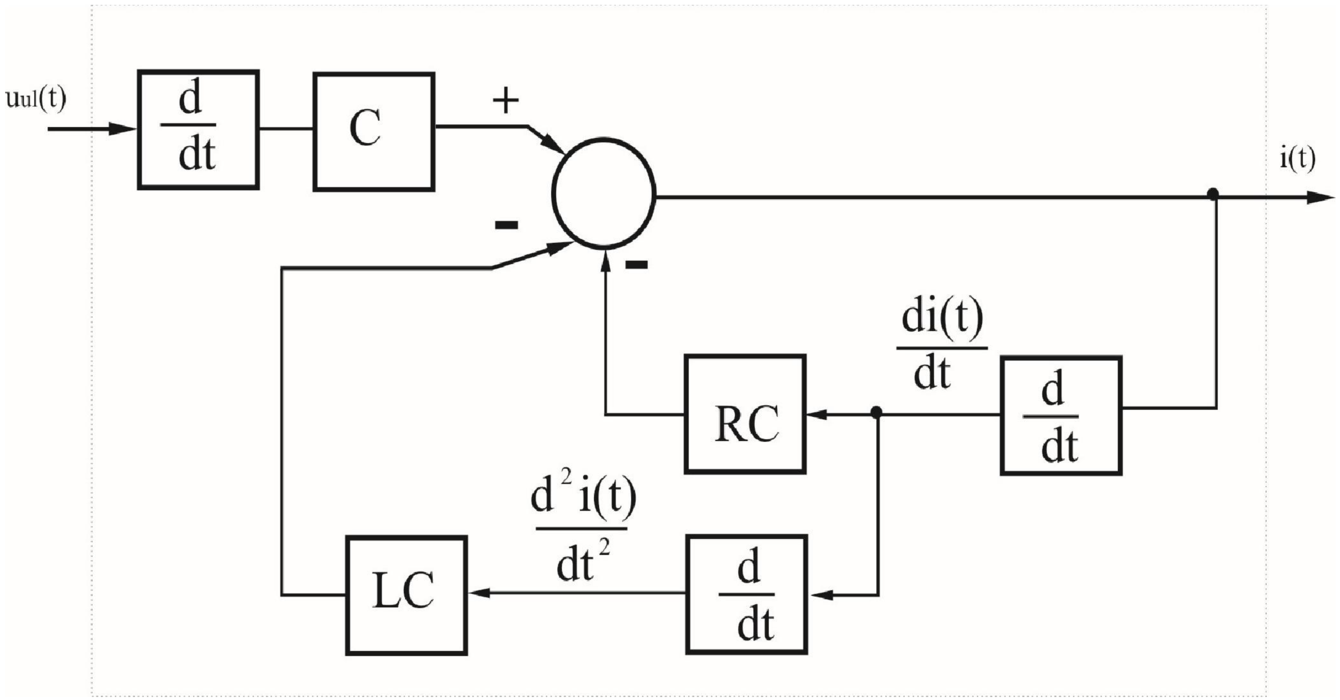
PRIMJER MATEMATIČKOG MODELIRANJA SUSTAVA:



1. NAČIN MODELIRANJA SUSTAVA: OPIS SUSTAVA DIFERENCIJALNOM JEDNADŽBOM

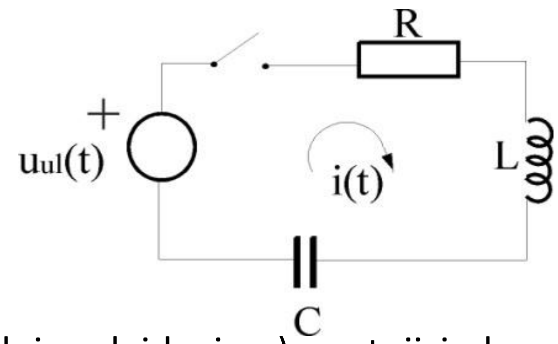
- Blok dijagram sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom: prikazan je slikom:

$$i(t) = -RC\frac{di(t)}{dt} - LC\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + C\frac{du_{ul}(t)}{dt}$$



MATEMATIČKO MODELIRANJE SUSTAVA

PRIMJER MATEMATIČKOG MODELIRANJA SUSTAVA:



2. NAČIN MODELIRANJA SUSTAVA: OPIS SUSTAVA INTEGRALNOM JEDNADŽBOM

- Međutim, u opisu sustava diferencijalnom jednadžbom (kojeg smo prikazali na prethodnim slajdovima) postoji jedan praktičan problem. Naime, derivatore kao elektroničke sklopove kompliciranije je izvesti nego integratore, a pritom su i puno osjetljiviji na šumove.

- Stoga se u modeliranju sustava puno češće koriste integratori nego derivatori. Da bismo primijenili integratore, izvedimo iz osnovne jednadžbe sustava integralnu jednadžbu, odnosno integrirajmo polaznu jednadžbu sustava. Biti će:

$$u_{ul}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt \;\; / \int dt \quad \Rightarrow \quad \int u_{ul}(t)dt = R\int i(t)dt + Li(t) + \frac{1}{C}\int (\int i(t)dt)dt$$

- Sad kad smo iz jednadžbe 'eliminirali' derivaciju (tj. ostali su nam samo integrali), opet izlučimo izlazni signal, i(t):

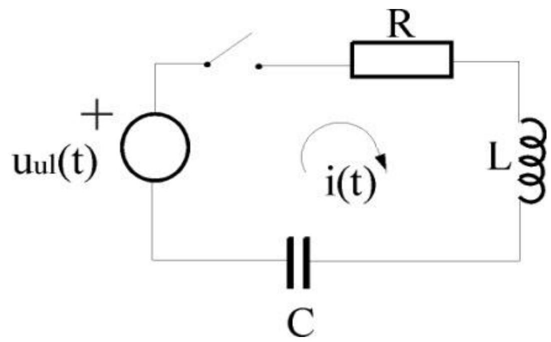
$$i(t) = -\frac{R}{L}\int i(t)dt - \frac{1}{LC}\int (\int i(t)dt)dt + \frac{1}{L}\int u_{ul}(t)dt$$

- Dobili smo integralnu jednadžbu u kojoj je izlaz prikazan kao funkcija jednostrukog i dvostrukog integrala izlaza i integrala ulaza.

- Prikažimo sad jednadžbu u obliku blok dijagrama.

MATEMATIČKO MODELIRANJE SUSTAVA

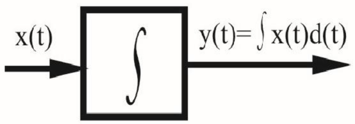
PRIMJER MATEMATIČKOG MODELIRANJA SUSTAVA:



2. NAČIN MODELIRANJA SUSTAVA: OPIS SUSTAVA INTEGRALNOM JEDNADŽBOM

$$i(t) = -\frac{R}{L}\int i(t)dt - \frac{1}{LC}\int(\int i(t)dt)dt + \frac{1}{L}\int u_{ul}(t)dt$$

- PITANJE: Koje sad sve matematičke operacije imamo u gornjoj jednadžbi?
- ODGOVOR: Sad, budući da u jednadžbi imamo i operaciju integriranja, prilikom crtanja blok dijagrama, uz blokove za zbrajanje i množenje s konstantom (koje smo već prikazali) potreban nam je i blok za integriranje (slika dole):

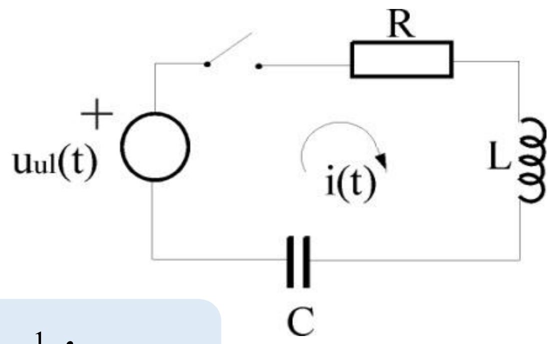


INTEGRATOR

- I, konačno, idući slajd prikazuje blok dijagram sustava opisanog integralnom jednadžbom…

MATEMATIČKO MODELIRANJE SUSTAVA

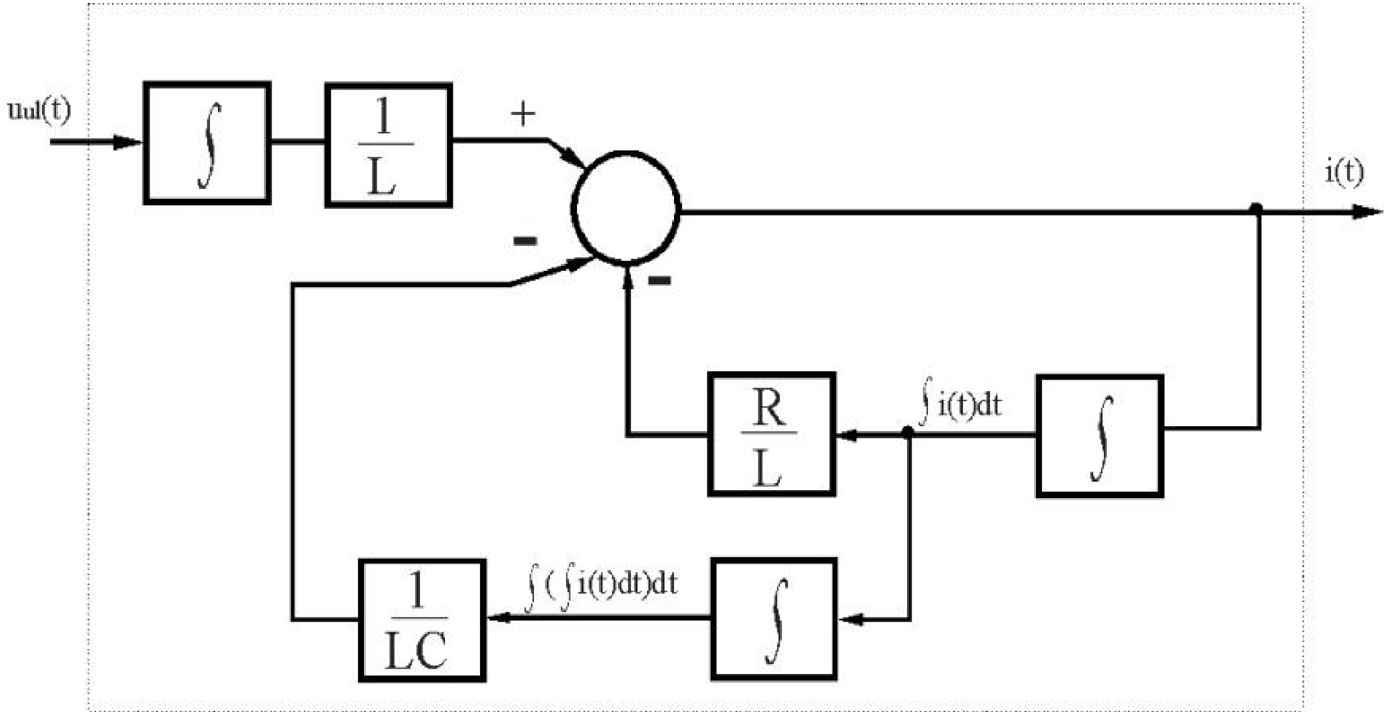
PRIMJER MATEMATIČKOG MODELIRANJA SUSTAVA:



2. NAČIN MODELIRANJA SUSTAVA: OPIS SUSTAVA INTEGRALNOM JEDNADŽBOM

- Blok dijagram sustava opisanog integralnom jednadžbom: prikazan je slikom:

$$i(t) = -\frac{R}{L}\int i(t)dt - \frac{1}{LC}\int\left(\int i(t)dt\right)dt + \frac{1}{L}\int u_{ul}(t)dt$$



MATEMATIČKO MODELIRANJE SUSTAVA

- U prethodnom primjeru upoznali smo se s modeliranjem sustava u vremenskom području (svi signali bili su funkcije vremena).

- Iako je u pitanju bio najjednostavniji mogući primjer tj. vrlo jednostavan strujni krug, za njegov opis trebala nam je integro-diferencijalna jednadžba koju uopće nije lako riješiti.

- Za rješavanje složenijih krugova (i općenito, složenijih sustava), koji se matematički opisuju 'kompliciranijim' jednadžbama, postupak se sve više komplicira.

- Stoga se često kod modeliranja sustava služimo različitim transformacijama signala koje nam olakšavaju rješavanje postavljenih jednadžbi.

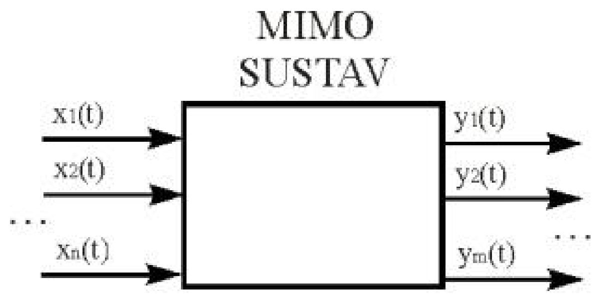
- Npr. tako se kod kontinuiranih sustava služimo tzv. Laplace-ovom transformacijom, a kod diskretnih sustava tzv. Z-transformacijom.

  - Primjenom ovih transformacija diferencijalne jednadžbe koje opisuju sustave (a pritom najčešće složene za rješavanje) pretvaraju se u jednostavne algebarske jednadžbe kojima je mnogo jednostavnije naći rješenje. Drugim riječima, operacije deriviranja i integriranja zamjenjujemo množenjem i dijeljenjem.

  - U okviru kolegija obradit ćemo Laplace-ovu transformaciju (primijenjenu na vremenski kontinuirane sustave)

MIMO i SISO SUSTAVI

- Prethodni primjer koji smo obradili prikazuje sustav s jednim ulazom (ulazni napon) i jednim izlazom (struja u krugu).
- Ovakvi sustavi (s jednim ulazom i jednim izlazom) često se nazivaju SISO sustavi (*eng.* ***S**ingle **I**nput – **S**ingle **O**utput*) i njihov općeniti blok dijagram može se prikazati kao na slici dole, lijevo.
- Također, postoje i MIMO sustavi, tj. sustavi s više ulaza i izlaza (*eng.* ***M**ultiple **I**nput, **M**ultiple **O**utput*), slika dole, desno.



- MIMO sustavi puno se češće javljaju u praksi.
- Primjerice, osobno računalo možemo promatrati kao MIMO sustav jer istovremeno može primati, pohranjivati, obrađivati i generirati različite podatke (tekst, izračune, slike, video, glazbu, itd.)

ENERGIJA I SNAGA SIGNALA

- Iz različitih primjera s kojima smo se dosad upoznali, vidimo da signali mogu predstavljati mnoge fizikalne pojave.

- U mnogim primjerima (ali ne svim) signali su povezani s fizikalnim veličinama koje pohranjuju ili oslobađaju energiju u fizikalnom sustavu. Na primjer, ako s u(t) i i(t) označimo napon na otporniku i struju koja protječe kroz otpornik R, tada će snaga koja se oslobađa na otporniku biti:

$$p(t) = u(t)i(t) = u(t)\frac{u(t)}{R} = \frac{1}{R}u^2(t)$$

- Ukupna energija koja se razvije tijekom vremenskog intervala $t_1 \leq t \leq t_2$ će biti:

$$E = \int_{t1}^{t2} p(t)dt = \frac{1}{R}\int_{t1}^{t2} u^2(t)dt$$

- PITANJE: Kako dobiti prosječnu snagu oslobođenu tijekom intervala $t = t_2 - t_1$?
- ODGOVOR: Prosječnu snagu dobit ćemo ako ukupnu energiju podijelimo s trajanjem vremenskog intervala $(t_2 - t_1)$:

$$P_{PROSJECNA} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t1}^{t2} p(t)dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\frac{1}{R}\int_{t1}^{t2} u^2(t)dt$$

ENERGIJA I SNAGA SIGNALA

- Slično, kod automobila snaga koja se izgubi uslijed trenja između kotača i ceste biti će proporcionalna kvadratu brzine:

  $p(t)=bv^2(t)$

  pri čemu je b koeficijent trenja.

- I u ovom primjeru možemo definirati ukupnu oslobođenu energiju i prosječnu snagu.

- Imajući na umu ove jednostavne fizikalne primjere, dogovorno je usvojena slična terminologija za definiranje snage i energije bilo kojeg kontinuiranog i diskretnog vremenskog signala, $x(t)$ i $x[n]$, bez obzira imali ti signali neko stvarno fizikalno značenje ili ne.

- Također, kako ćemo ubrzo vidjeti, često će biti zgodno opisivati signale pomoću kompleksnih brojeva (npr. izmjenične struje i napone prikazujemo kompleksnim brojevima).

ENERGIJA I SNAGA SIGNALA

ENERGIJA I SNAGA SIGNALA VREMENSKI KONTINUIRANOG SIGNALA

- Stoga je za kontinuirani vremenski signal x(t) prihvaćena slijedeća definicija ukupne energije tijekom intervala $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$E = \int_{t1}^{t2} |x(t)|^2 \, dt$$

gdje je |x| modul signala x (koji može biti i kompleksan).

- Prosječna snaga također se dobije dijeljenjem ukupne energije duljinom vremenskog intervala $(t_2 - t_1)$:

$$P_{PROSJECNA} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t1}^{t2} |x(t)|^2 \, dt$$

ENERGIJA I SNAGA SIGNALA VREMENSKI DISKRETNOG SIGNALA

- Slično, ukupna energija diskretnog signala x[n] tijekom diskretnog vremenskog intervala $n_1 \leq n \leq n_2$ definirana je kao:

$$E = \sum_{n=n_1}^{n_2} \left| x[n] \right|^2$$

- Prosječna snaga definira se kao:

$$P_{PROSJECNA} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} \left| x[n] \right|^2$$

ENERGIJA I SNAGA SIGNALA

- Bitno je napomenuti da se pojmovi 'snaga' i 'energija' signala koriste u apstraktnom smislu, bez obzira na to da li se uistinu odnose na fizikalnu snagu i energiju koje nalazimo u prirodi.

- Čak ako ponekad i postoji veza, relacije s prethodnog slajda najčešće će imati pogrešne jedinice.

- Na primjer, ukoliko za signal uzmemo napon na otporniku, tj. x(t) = u(t), energija u relaciji:

$$E = \int_{t1}^{t2} |x(t)|^2 dt$$

imat će jedinicu [V^2] i da bismo dobili stvarnu, fizikalnu energiju trebali bismo relaciju podijeliti s otporom u ohmima (tada bi energija poprimila stvarnu jedinicu [J (joule) =V^2/Ω]).

ENERGIJA I SNAGA SIGNALA

- U mnogim sustavima bit će nam zanimljivo izračunati snagu i energiju signala u beskonačno dugom intervalu tj. za: $-\infty < t < \infty$ ili $-\infty < n < \infty$. U tim slučajevima energija će biti:

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

(za kontinuirani signal)

$$E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

(za diskretni signal)

- Za neke signale integral ili suma u gornjim relacijama će divergirati (težit će u ∞). Primjer je signal koji ima konstantnu vrijednost, npr. x(t)=4. Za takve signale kažemo da imaju beskonačnu energiju, dok one za koje vrijedi $E_\infty<\infty$ zovemo signali s konačnom energijom.

- Na sličan način definirat ćemo prosječnu snagu signala na beskonačnom intervalu kao:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt\right)$$

(za kontinuirani signal)

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2\right)$$

(za diskretni signal)

ENERGIJA I SNAGA SIGNALA

Pomoću definicija za energiju i snagu na beskonačnom intervalu (s prethodnog slajda) možemo definirati 3 vrste signala:

- Prva vrsta signala ima konačnu ukupnu energiju ($E_\infty<\infty$).
- PITANJE: Kolika je prosječna snaga ovakvih signala?
- Prosječna snaga jest 0, budući da će, npr. u kontinuiranom slučaju, biti:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T} = 0$$

Primjer signala s konačnom energijom jest:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

Ovaj signal poprima vrijednosti na konačnom vremenskom intervalu i ima energiju $E_\infty = 1$, te prosječnu snagu $P_\infty=0$.

ENERGIJA I SNAGA SIGNALA

Pomoću definicija ze energiju i snagu na beskonačnom intervalu (s prethodnog slajda) možemo definirati 3 vrste signala:

- Druga vrsta signala ima konačnu prosječnu snagu ($P_\infty<\infty$) i slijedom toga, beskonačnu energiju ($E_\infty=\infty$).
  Primjer ovakvog signala jest x(t)=3, za koji će vrijediti:

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |3|^2 dt = \lim_{T\to\infty} (9t \Big|_{-T}^{T}) = \lim_{T\to\infty} (18T) = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} (\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |3|^2 dt) = \lim_{T\to\infty} (\frac{1}{2T} 18T) = 9$$

- Kod treće vrste signala i energija i snaga imaju beskonačne vrijednosti, primjer je x(t)=t:

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |t|^2 dt = \lim_{T\to\infty} (\frac{1}{3} t^3 \Big|_{-T}^{T}) = \lim_{T\to\infty} (\frac{2}{3} T^3) = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} (\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |t|^2 dt) = \lim_{T\to\infty} (\frac{1}{2T} \frac{2}{3} T^3) = \infty$$

ENERGIJA I SNAGA SIGNALA

Riješimo 2 zadatka iz skripte (zadaci za samostalno rješavanje, na kraju poglavlja 2):

- Zadatak: 2.3., skripta:

Odrediti P_∞ i E_∞ za svaki od slijedećih signala:

c) $x(t) = \cos(t)$

d) $x[n] = (1/2)^n u[n]$

Napomena: Na kraju 2. poglavlja skripte imate 33 zadatka za samostalno rješavanje! Konačna rješenja zadataka su priložena.

TRANSFORMACIJE NEZAVISNE VARIJABLE SIGNALA

- U ovom dijelu predavanja usredotočit ćemo se na neke osnovne transformacije vremenskih signala koje uključuju jednostavne promjene nezavisne varijable tj. vremena (vremenske osi).

- Primjenom ovih transformacija moći ćemo u naknadnim poglavljima definirati neka osnovna svojstva signala i sustava.

- **Transformacije nezavisne varijable signala (vremena):**

  - Vremenski pomak

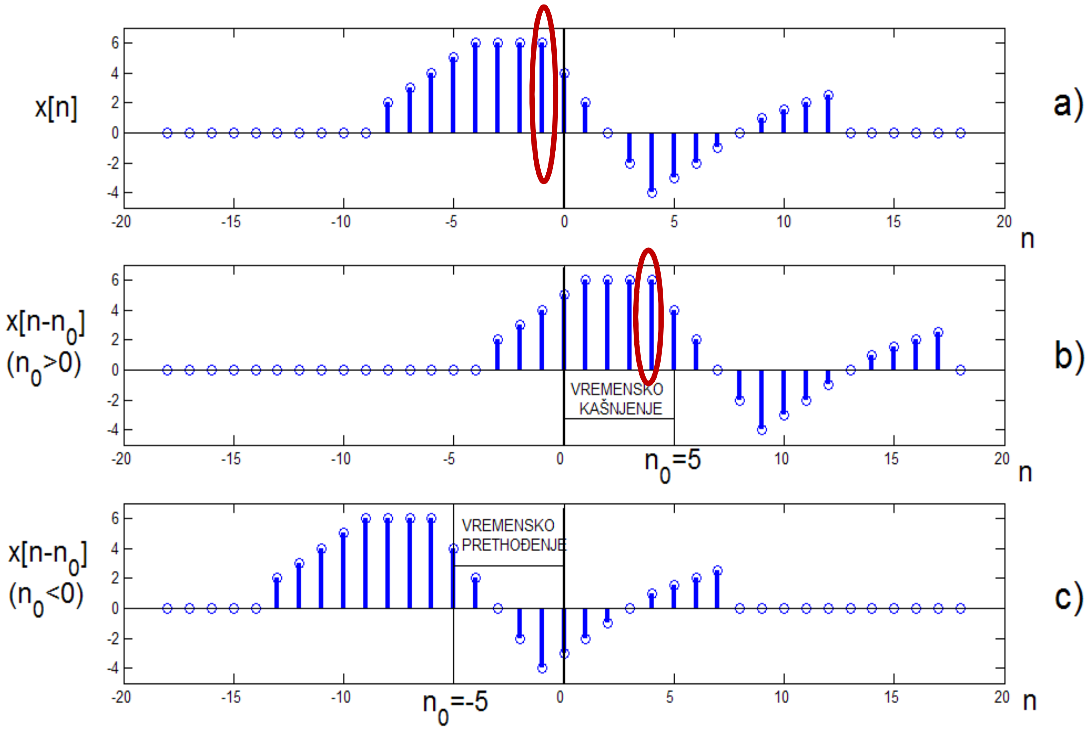
  - Vremensko obrtanje

  - Vremensko skaliranje

TRANSFORMACIJE NEZAVISNE VARIJABLE SIGNALA:

VREMENSKI POMAK

- Najjednostavniji i vrlo važan primjer transformacije nezavisne varijable jest vremenski pomak (*eng. time shift*).
- Vremenski pomak ilustriran je na donjoj slici koja prikazuje diskretne signale $x[n]$ i $x[n-n_0]$ koji imaju identičan oblik, ali su međusobno pomaknuti za n_0 uzoraka:



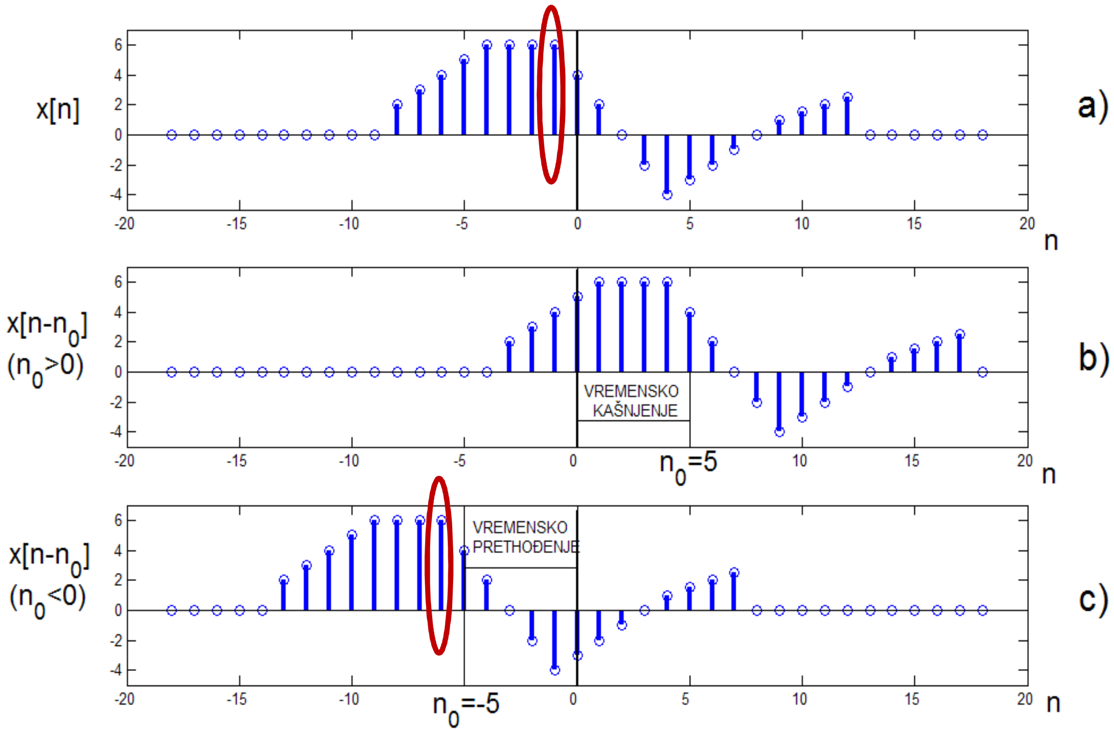
- Ako je $n_0 > 0$, signal $x[n-n_0]$ bit će na vremenskoj osi pomaknut **udesno** u odnosu na osnovni signal $x[n]$.
- Kažemo da će signal $x[n-n_0]$ kasniti za signalom $x[n]$ tj. nastupat će kasnije u vremenu (svaki uzorak od signala $x[n]$ u signalu $x[n-n_0]$ nastupit će kasnije u vremenu, Slike lijevo a) i b).
- Primjerice, promotrimo slučaj kad je npr. $n_0=5$, tj. signal $x[n-n_0] = x[n-5]$:

Uočimo uzorak signala $x[n]$ za vremenski trenutak $n = -1$; $x[-1]=6$, Slika lijevo a). Taj uzorak će u signalu $x[n-n_0] = x[n-5]$ nastupiti u trenutku $n = 4$, Slika lijevo b), tj. uzorak signala $x[n-5]$ kasni u vremenu za uzorkom signala $x[n]$ za 5 diskretnih vremenskih trenutaka (vremensko kašnjenje).

TRANSFORMACIJE NEZAVISNE VARIJABLE SIGNALA:

VREMENSKI POMAK

- Najjednostavniji i vrlo važan primjer transformacije nezavisne varijable jest vremenski pomak (*eng. time shift*).
- Vremenski pomak ilustriran je na donjoj slici koja prikazuje diskretne signale x[n] i x[n-n_0] koji imaju identičan oblik, ali su međusobno pomaknuti za n_0 uzoraka:



- Ako je $n_0 < 0$, signal x[n-n_0] bit će na vremenskoj osi pomaknut **lijevo** u odnosu na osnovni signal x[n].
- Signal x[n-n_0] prethodit će signalu x[n] tj. nastupat će ranije u vremenu (svaki uzorak signala x[n-n_0] nastupit će ranije u vremenu u odnosu na uzorak od x[n], Slike lijevo a) i c).
- Primjerice, promotrimo slučaj kad je npr. n_0 = -5, tj. signal x[n-n_0] = x[n+5]:

Opet uočimo uzorak signala x[n] za vremenski trenutak n = -1; x[-1]=6, Slika lijevo a). Taj uzorak će u signalu x[n-n_0] = x[n+5] nastupiti u trenutku n = -6, Slika lijevo c), tj. uzorak signala x[n+5] prethodi u vremenu uzorku signala x[n] za 5 diskretnih vremenskih trenutaka (vremensko prethođenje).

- Sve navedeno vrijedi i za vremenski kontinuirane signale!

TRANSFORMACIJE NEZAVISNE VARIJABLE SIGNALA:

VREMENSKI POMAK: PRIMJENA

- PITANJE: Možete li se sjetiti neke primjene iz realnog svijeta gdje je bitno npr. vremensko kašnjenje signala?

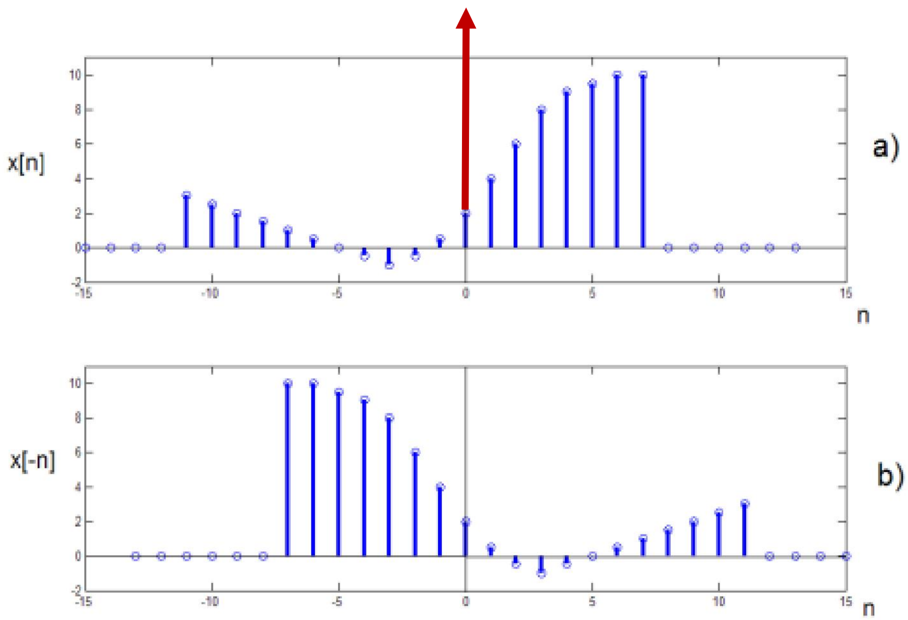
- Vremenski pomak signala susrećemo npr. kod radara, sonara i sustava za mjerenje seizmičkih signala, pri čemu prijemnici smješteni na različitim lokacijama primaju signal koji se propagira kroz različite medije (voda, zrak, stijena, itd.).

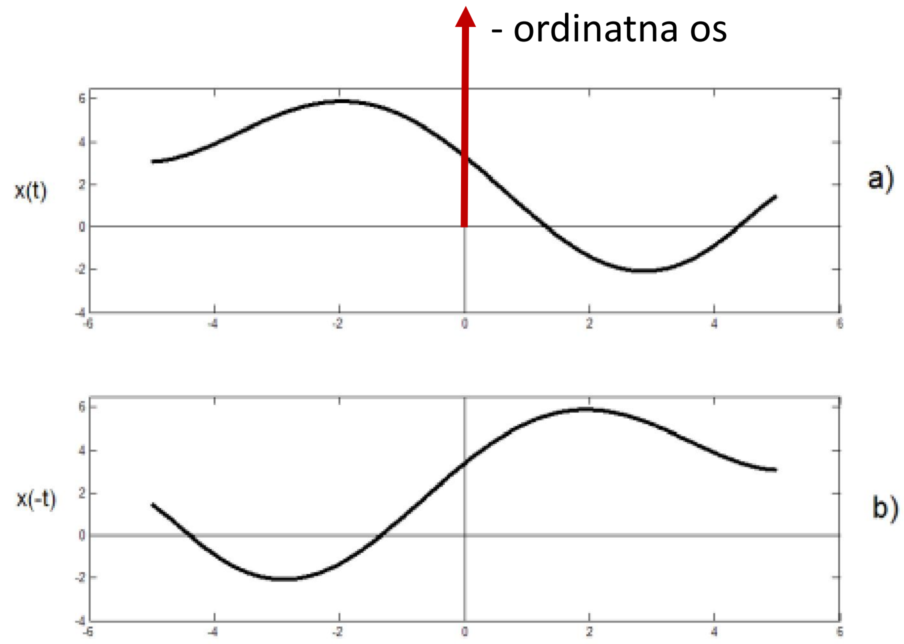
- Razlika u vremenu propagacije signala od izvora (npr. od epicentra potresa) do primjerice dva prijemnika smještena na dvije različite lokacije predstavlja vremenski pomak između signala koje su prijemnici primili.

TRANSFORMACIJE NEZAVISNE VARIJABLE SIGNALA:

VREMENSKO OBRTANJE (Zrcaljenje signala oko ordinatne osi)

- Slijedeća transformacija vremenske osi jest vremensko obrtanje (*eng. time reversal*), x(-t) i x[-n]
- Slika dolje lijevo b): x[-n] dobiven je obrtanjem signala x[n] (Slika dolje lijevo a)) oko ordinatne osi (n=0).
- Slično, kontinuirani signal x(-t) dobije se zrcaljenjem signala x(t) oko pravca t=0, Slike dolje desno a)-b).
- PRIMJER vremenskog obrtanja: Primjerice, ako signal x(t) predstavlja glazbeni zapis na kompaktnom disku, signal x(-t) bio bi zvuk koji čujemo kad se CD 'vrti unatrag'.



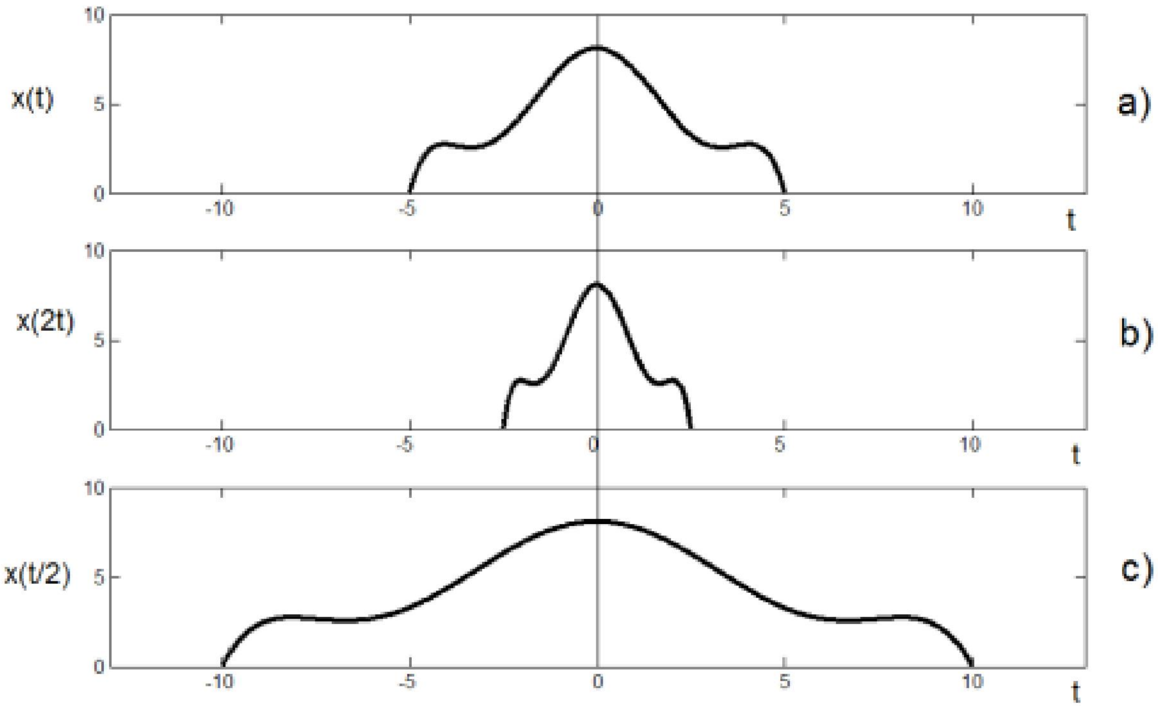


TRANSFORMACIJE NEZAVISNE VARIJABLE SIGNALA:

VREMENSKO SKALIRANJE ('Sužavanje' ili 'rastezanje' signala)

- Kod vremenskog skaliranja signal se sužava ili rasteže pri čemu također zadržava svoj osnovni oblik, Slika dolje.

- U odnosu na osnovni signal x(t), signal x(at) će biti:
  - Sužen za faktor a, ako je a > 1,
  - Rastegnut za faktor a, ako je a < 1



- Primjerice, na slici lijevo, u odnosu na osnovni signal x(t):
  - Signal x(2t) je dvostruko sužen (jer je a = 2 > 1),
  - Dok je signal x(t/2) dvostruko rastegnut (jer je a = 1/2 < 1)

- Primjerice, za t=2.5 signal x(2t) će imati vrijednost x(2*2.5)=x(5)=(pogledajmo na slici a) koliki je $x(t)|_{t=5}$)= 0. Također, za t=10 signal x(t/2) će imati vrijednost x(10/2)=x(5)=0.

- PRIMJER vremenskog skaliranja?

- Na primjeru glazbe snimljene na CD-u, koja predstavlja signal x(t), signal x(2t) predstavljao bi dvostruko ubrzanu glazbu, a x(t/2) dvostruko usporenu glazbu.

TRANSFORMACIJE NEZAVISNE VARIJABLE SIGNALA:

REZIME VREMENSKIH TRANSFORMACIJA SIGNALA:

- Da rezimiramo prethodno objašnjene vremenske transformacije (pomak, obrtanje, skaliranje), uzmimo za primjer da želimo izvršiti transformacije signala $x(t)$ tako da dobijemo signal $x(at+b)$.

- Postupit ćemo na sljedeći način:

  1. Prvo pomaknemo signal $x(t)$ za vremenski interval b (udesno za $b < 0$, odnosno ulijevo za $b > 0$) (VREMENSKI POMAK),

  2. Zatim pomaknuti signal suzimo (ako je $|a|>1$) ili rastegnemo (ako je $|a|<1$) (VREMENSKO SKALIRANJE)

  3. Konačno, pomaknuti i skalirani signal zrcalimo (ako je $a < 0$) (VREMENSKO OBRTANJE)

Napomena: Nemojte mijenjati redoslijed ovih transformacija (1. pomak, 2. skaliranje, 3. obrtanje), dobit ćete krivo rješenje!

Vidjet ćemo to na sljedećem primjeru…

TRANSFORMACIJE NEZAVISNE VARIJABLE SIGNALA:

REZIME VREMENSKIH TRANSFORMACIJA SIGNALA:

PRIMJER:

Za vremenski kontinuirani signal x(t) prikazan slikom nacrtati vremenski transformirani signal: x(-3/2*t + 1)

- Dakle, kao što smo naučili, postupit ćemo kako??? ☺

  1. Prvo vremenski pomaknemo signal x(t) za 1 (i to ulijevo jer je 1 > 0) (VREMENSKI POMAK),
  2. Zatim pomaknuti signal suzimo (jer je |3/2|>1) (VREMENSKO SKALIRANJE)
  3. Konačno, pomaknuti i skalirani signal zrcalimo (jer je -3/2 < 0) (VREMENSKO OBRTANJE)

TRANSFORMACIJE NEZAVISNE VARIJABLE SIGNALA:

REZIME VREMENSKIH TRANSFORMACIJA SIGNALA:

PRETHODNI PRIMJER, ZAKLJUČAK:

Za vremenski kontinuirani signal x(t) prikazan slikom nacrtati vremenski transformirani signal: x(-3/2*t + 1)

- Dakle, kao što smo vidjeli rješavajući zadatak, možemo postupiti na sljedeći (već opisani) način:

  1. VREMENSKI POMAK signala x(t) za 1 (ulijevo jer je 1 > 0)
  2. VREMENSKO SKALIRANJE pomaknutog signala (sužavanje signala: suzimo ga, jer je |3/2|>1)
  3. VREMENSKO OBRTANJE pomaknutog i skaliranog signala (jer je -3/2 < 0)

ILI, MOŽEMO POSTUPITI I NA OVAKAV NAČIN:

- Signal x(-3/2*t + 1) zapišemo na način: x(-3/2(t – 2/3)) i onda postupamo prema koracima:

  1. VREMENSKO OBRTANJE (zrcalimo signal)
  2. VREMENSKO SKALIRANJE zrcaljenog signala (sužavanje signala: suzimo ga, jer je |3/2|>1)
  3. VREMENSKI POMAK zrcaljenog i suženog signala za 2/3 UDESNO (jer je -2/3 < 0)!

Napomena: Zadatke možete rješavati na oba načina, ali pritom pazite da ne pogriješite!

TRANSFORMACIJE NEZAVISNE VARIJABLE SIGNALA:

REZIME VREMENSKIH TRANSFORMACIJA SIGNALA:

ZADATAK 2.5 b), skripta:

Neka signal x(t) ima vrijednost nula za $t < 3$. Za svaki od slijedećih signala odredi vrijednosti od t za koje će signal imati vrijednost 0:

a) $x(1 - t)$

b) b) $x(1 - t) + x(2 - t)$

c) $x(1 - t)x(2 - t)$

d) $x(3t)$

e) $x(t/3)$

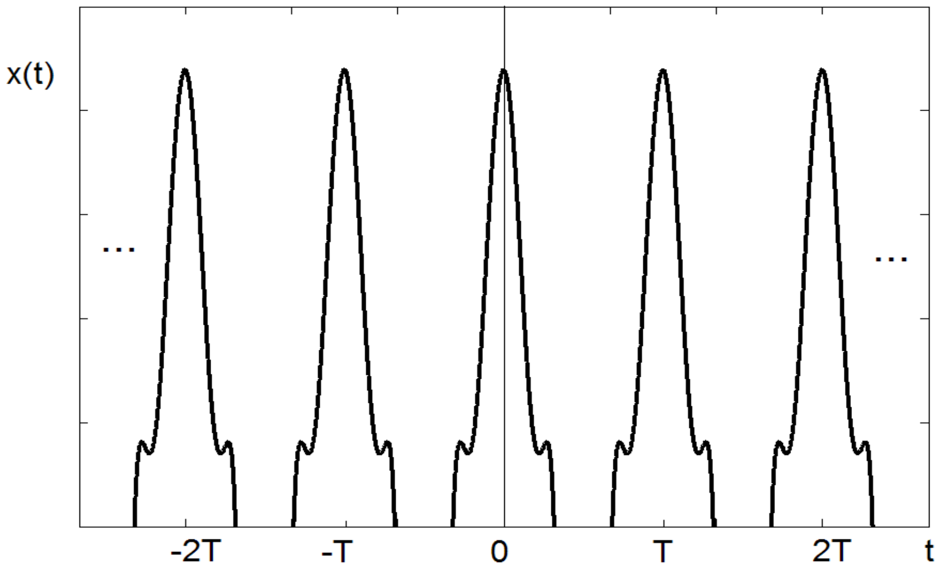
PERIODIČKI SIGNALI:

- Periodički vremenski kontinuirani signali su oni za koje postoji takva pozitivna vrijednost T za koju će vrijediti:

$$x(t) = x(t + T), \quad \text{za svaku vrijednost od } t$$

- Drugim riječima, periodički signal ima svojstvo da ostane nepromijenjen ako ga u vremenu pomaknemo za vrijednost T (period signala).

- Za takav signal kažemo da je *periodičan s periodom T*, primjer je dan na slici dole.



- Na slici vidimo da će vrijediti x(t)= x(t + mT), za svaku cjelobrojnu vrijednost m. Također, x(t) će biti periodičan i s periodima 2T, 3T, 4T, ...

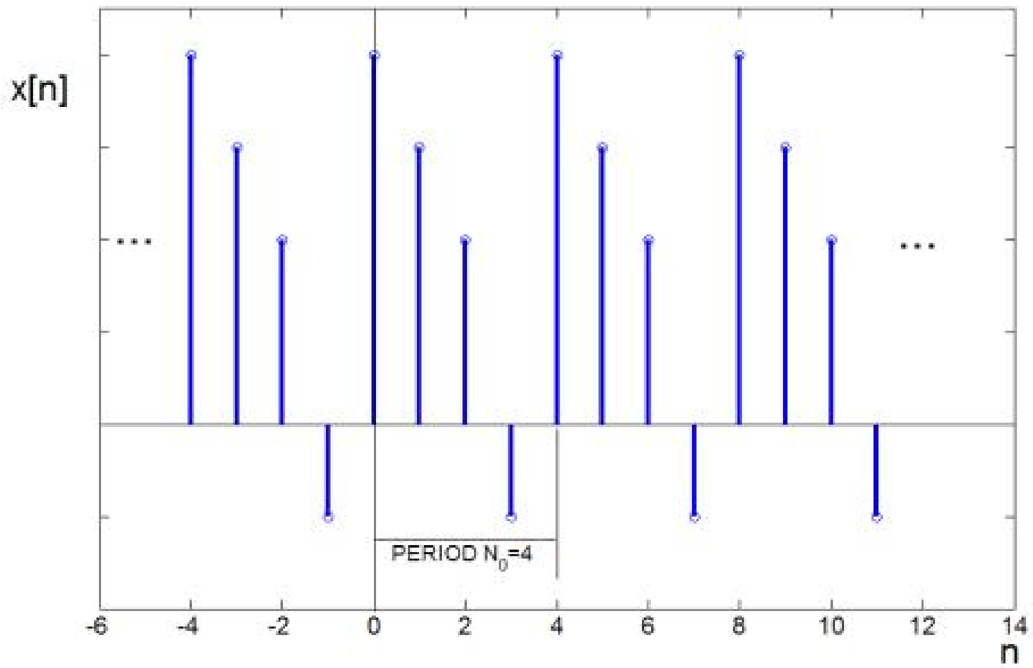
- Kažemo da je *osnovni period* T_0 signala x(t) najmanja pozitivna vrijednost od T za koju vrijedi relacija periodičnosti.

- Signale koji nisu periodički zovemo *aperiodičkim* signalima.

PERIODIČKI SIGNALI:

- Na isti način definiramo periodične signale u diskretnom području i kažemo da je vremenski diskretni signal $x[n]$ periodičan s periodom N, pri čemu je N pozitivan cijeli broj, ako vrijedi:

$$x[n] = x[n + N], \text{ za svaku vrijednost od } n$$



- Također, signal će biti periodičan i za periode 2N, 3N, ...
- Osnovni period N_0 je najmanja vrijednost od N za koju vrijedi relacija periodičnosti.
- Primjer diskretnog periodičkog signala s osnovnim periodom $N_0 = 4$ prikazan je na slici lijevo

PERIODIČKI SIGNALI:

- PRIMJER:
- Ispitajmo periodičnost signala:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t), & \text{za } t < 0 \\ \sin(t), & \text{za } t \geq 0 \end{cases}$$

- ZADATAK 2.6 b), skripta:
- Odrediti da li je signal periodičan. Ukoliko jest, odrediti osnovni period:

b) $x[n] = u[n] + u[-n]$ i $x[n] = u[n] + u[-n-1]$

PARNI I NEPARNI SIGNALI:

- Još jedna od korisnih karakteristika signala odnosi se na simetričnost s obzirom na ordinatnu os.

- Za signal $x(t)$ ili $x[n]$ kažemo da je *paran* ako zrcaljenjem signala s obzirom na ordinatnu os dobijemo identičan signal, tj. ako vrijedi slijedeće (slika dolje lijevo):

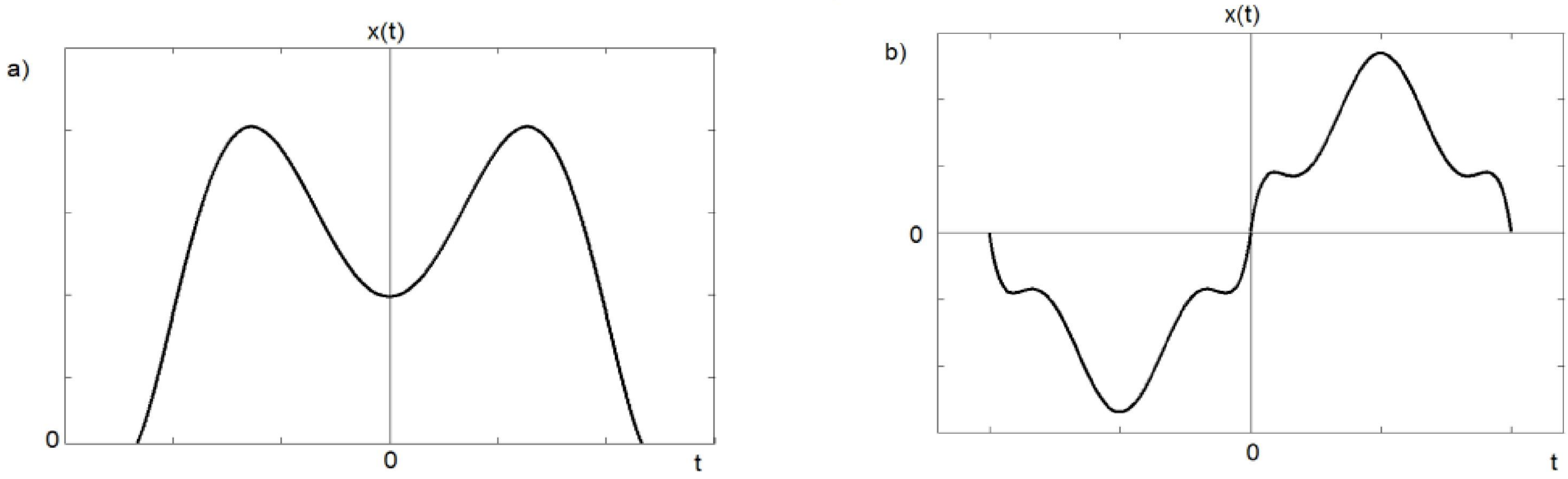
$x(-t) = x(t)$ (u kontinuiranom vremenu) odnosno:

$x[-n] = x[n]$ (u diskretnom vremenu)

- S druge strane, signal će biti *neparan* ako vrijedi (slika dolje desno – signal simetričan s obzirom na ishodište):

$x(-t) = - x(t)$ (u kontinuiranom vremenu) odnosno:

$x[-n] = - x[n]$ (u diskretnom vremenu)



PARNI I NEPARNI SIGNALI:

- Bitno je naglasiti da se svaki signal može rastaviti na parni i neparni dio, tj. svaki signal možemo zapisati kao:

$$x(t) = \mathit{Par}\{x(t)\} + \mathit{Nepar}\,\{x(t)\}$$

pri čemu su *Par*{x(t)} i *Nepar* {x(t)} parni i neparni dio signala, redom.

Parni dio može se izraziti kao:

$$Par\{x(t)\} = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$$

A neparni dio može se izraziti kao:

$$Nepar\{x(t)\} = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$$

Za diskretno vremensko područje naravno vrijede jednake relacije (samo u diskretnom vremenu)!

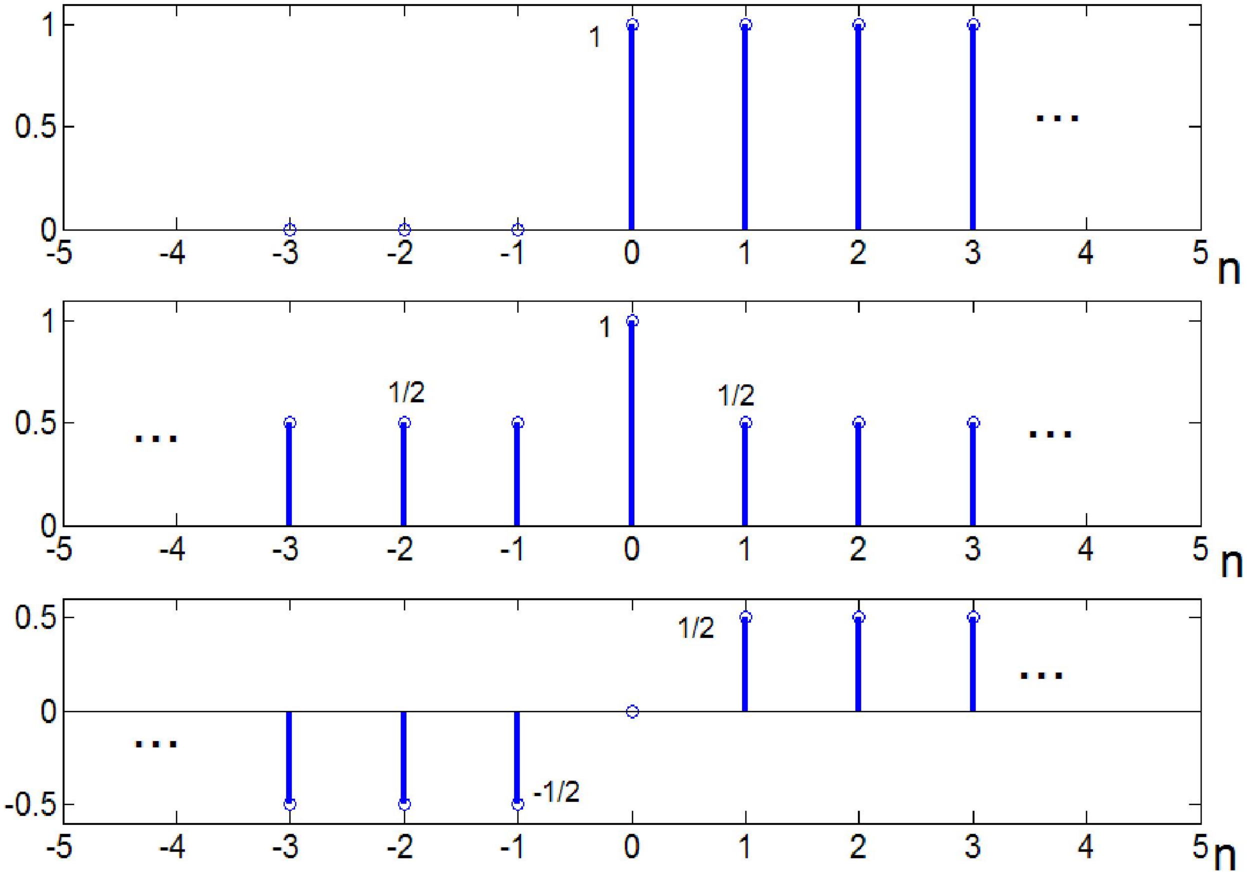
PARNI I NEPARNI SIGNALI:

- Primjer rastavljanja diskretnog vremenskog signala x[n] na parni i neparni dio prikazan je na slici dole:
- Uočite na slici da vrijedi: x[n] = *Par*{x[n]} + *Nepar* {x[n]}

$$x[n] = u[n] = \begin{cases} 1, & za\ n \geq 0 \\ 0, & za\ n < 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Par}\{x[n]\} = \begin{cases} 1/2, \mathrm{n} < 0 \\ 1, \mathrm{n} = 0 \\ 1/2, \mathrm{n} > 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Nepar}\{x[n]\} = \begin{cases} -1/2, \mathrm{n} < 0 \\ 0, \mathrm{n} = 0 \\ 1/2, \mathrm{n} > 0 \end{cases}$$



PARNI I NEPARNI SIGNALI:

- ZADATAK 2.7 a), skripta:

Za svaki od signala, odrediti intervale nezavisne varijable (tj. vremena) u kojima 1) parni, 2) neparni dio signala ima vrijednost nula:

a) $x[n] = u[n] - u[n - 4]$

OSNOVNE VRSTE SIGNALA U KONTINUIRANOM I DISKRETNOM VREMENU

- Eksponencijalni i sinusni signali (u kontinuiranom i diskretnom vremenu):
  - Realni eksponencijalni signali
  - Periodički kompleksni eksponencijalni i sinusni signali
  - Općeniti kompleksni eksponencijalni signali

- Jedinični impuls i jedinični odskočni signal (u kontinuiranom i diskretnom vremenu)

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Eksponencijalni i sinusni signali (u kontinuiranom vremenu):

- Vremenski kontinuirani *eksponencijalni signal* u općenitom obliku može se zapisati kao:

$$x(t)=Ce^{at}$$

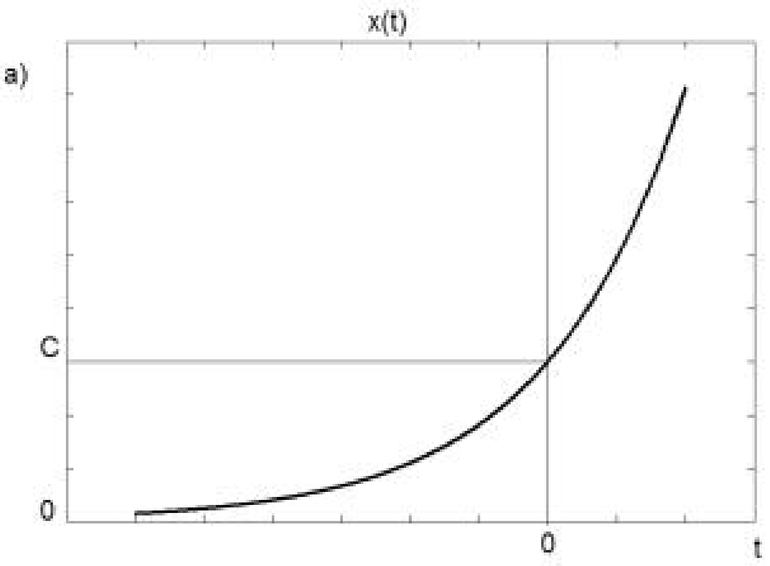
pri čemu 'C' i 'a' mogu biti realni ili kompleksni brojevi.

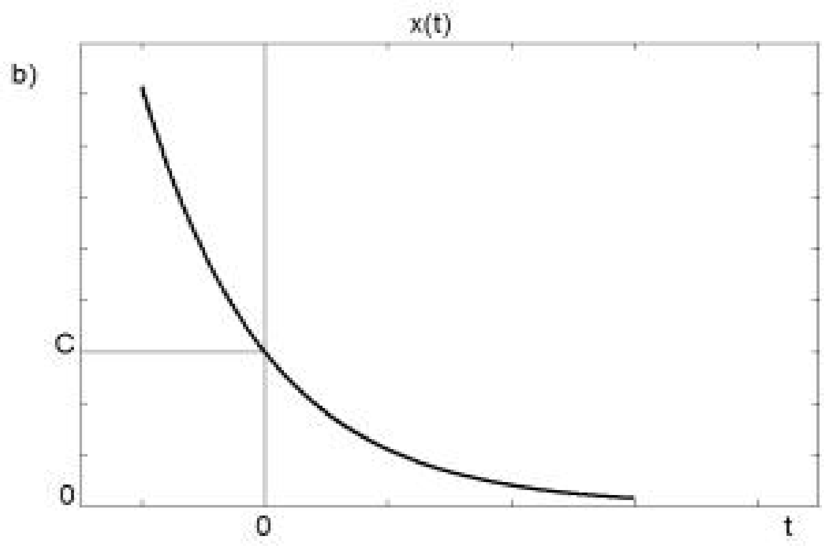
- Ovisno o vrijednostima ovih parametara (C i a), eksponencijalna funkcija može imati nekoliko različitih karakteristika, tj. razlikovat ćemo nekoliko različitih vrsta signala....

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Eksponencijalni i sinusni signali (u kontinuiranom vremenu): REALNI EKSPONENCIJALNI SIGNALI

U signalu: $x(t) = Ce^{at}$:

- Ako su 'C' i 'a' realni brojevi, signal x(t) nazivamo realna eksponencijala.
- Ako parameter 'a' ima pozitivnu vrijednost, tada x(t) s vremenom raste, Slika dolje lijevo. Ovakav oblik signala susrećemo u mnogim fizikalnim procesima kao što su lančana reakcija u atomskoj eksploziji, složene kemijske reakcije i dr.





- Ako je a<0, signal x(t) nazivamo padajuća eksponencijala, Slika desno i također ga susrećemo u mnogim procesima kao što je radioaktivno raspadanje, odziv RC krugova ili prigušenih mehaničkih sustava.

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Eksponencijalni i sinusni signali (u kontinuiranom vremenu): PERIODIČKI KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI SIGNALI

U signalu: $x(t) = Ce^{at}$:

- Ako parametar 'C' ima realnu vrijednost (označit ćemo je s A), a parametar 'a' čisto imaginarnu vrijednost (označit ćemo je s $j\omega_0$), oblik signala će biti:

$$x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$$

(ovakav signal često nazivamo kompleksna eksponencijala)

- Svojstvo ovog signala jest periodičnost. Odredimo osnovni period. Prisjetimo se, bi signal x(t) bio periodičan, mora vrijediti:

$x(t) = x(t + T)$, za svaku vrijednost od t, tj. u ovom slučaju: $Ae^{j\omega_0 t} = Ae^{j\omega_0 (t+T)}$

odnosno: $Ae^{j\omega_0 t} = Ae^{j\omega_0 t}e^{j\omega_0 T}$

Da bi gornja jednakost bila zadovoljena, mora vrijediti što??? $\longrightarrow$ $e^{j\omega_0 T} = 1$

PITANJE: Za koje vrijednosti T će gornja jednakost biti zadovoljena, tj. što će biti period signala??? ☺

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Eksponencijalni i sinusni signali (u kontinuiranom vremenu): PERIODIČKI KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI SIGNALI

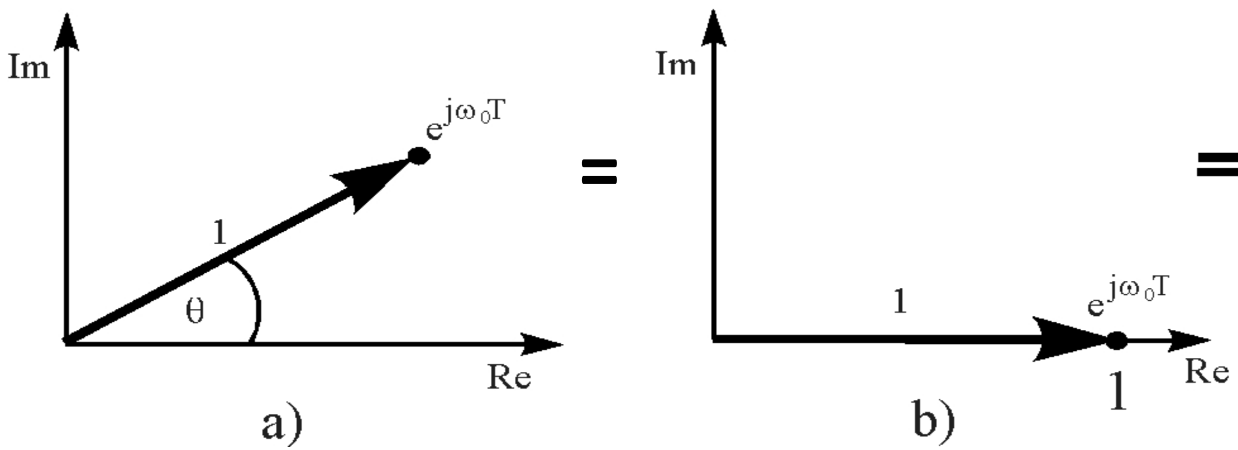
Dakle, da bi jednakost bila zadovoljena, mora vrijediti: $$e^{j\omega_0 T} = 1$$

PITANJE: Za koje vrijednosti T će gornja jednakost biti zadovoljena, tj. što će biti period signala???

ODGOVOR:

$e^{j\omega_0 T}$ jest kompleksni broj. Prisjetimo se prikaza kompleksnih brojeva kao vektora u kompleksnoj ravnini....

$e^{j\omega_0 T}$ jest kompleksni broj koji ima modul 1 i kut nagiba prema realnoj osi $\theta=\omega_0 T$, slika dolje lijevo:



$$\Longrightarrow$$

$$e^{j\omega_0 T} = 1 \Rightarrow$$

$$\theta = \omega_0 T = 2n\pi \quad (\text{za } n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

Dakle, period kompleksne eksponencijale će biti:

$$T = \frac{2n\pi}{\omega_0}$$

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Eksponencijalni i sinusni signali (u kontinuiranom vremenu): PERIODIČKI KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI SIGNALI

- Osnovni period T_0 (definiran kao najmanja pozitivna vrijednost od T) će biti:

$$\mathrm{T}_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

- a viši periodi će biti: $\pm\frac{4\pi}{|\omega_0|}, \pm\frac{6\pi}{|\omega_0|}, \pm\frac{8\pi}{|\omega_0|},$

- Također, signal $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 \mathrm{t}}$ će imati isti osnovni period.

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Eksponencijalni i sinusni signali (u kontinuiranom vremenu): PERIODIČKI KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI SIGNALI

- Primjenom Eulerove relacije kompleksna eksponencijala može se prikazati kao suma dva sinusoidalna signala na način:

$$Ae^{j\omega_0 t} = A\cos(\omega_0 t) + j\,A\sin(\omega_0 t)$$

- Također, vrijedit će:

$$Ae^{-j\omega_0 t} = A\cos(\omega_0 t) - j\,A\sin(\omega_0 t)$$

- Sumirajmo gornje relacije i izlučimo $\cos(\omega_0 t)$. Bit će:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

- Ako oduzmemo gornje relacije i izlučimo $\sin(\omega_0 t)$, bit će:

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

- Pokazali smo kako osnovne trigonometrijske funkcije sin i cos možemo prikazati pomoću kompleksne eksponencijale.

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Eksponencijalni i sinusni signali (u kontinuiranom vremenu): PERIODIČKI KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI SIGNALI

- Dakle, došli smo do još jednog osnovnog signala koji se često koristi u analizi sustava; *sinusoidalnog signala* kojeg u općem obliku zapisujemo kao:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta) \qquad (\textit{sinusni signal})$$

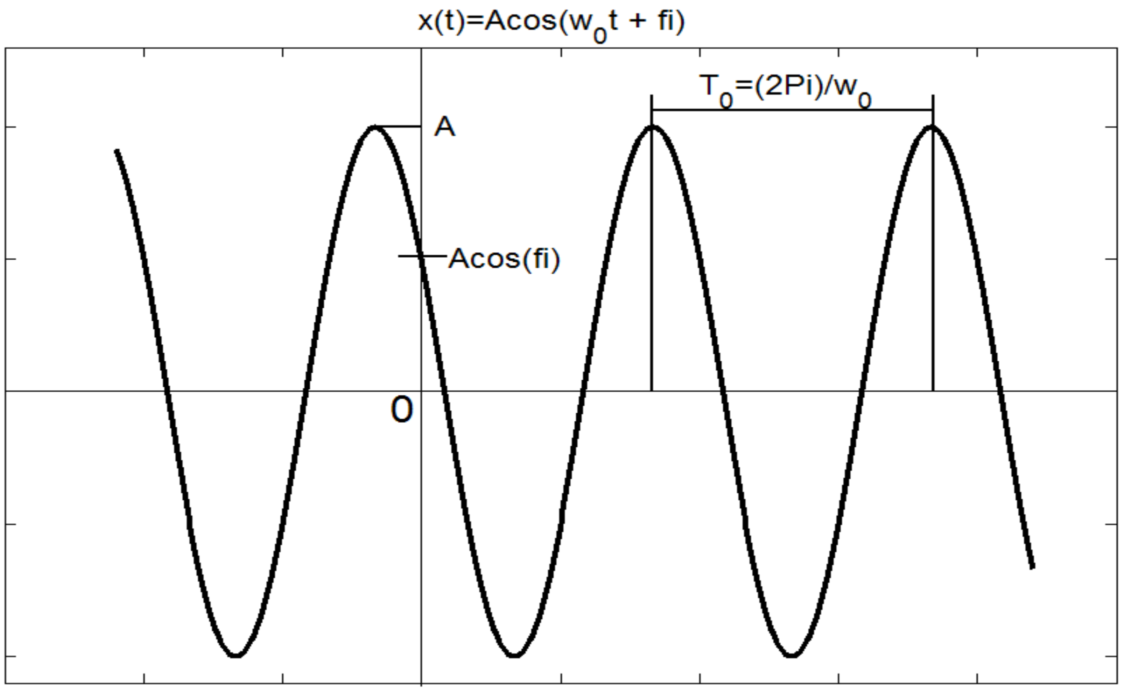
ili

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) \qquad (\textit{kosinusni signal})$$

- pri čemu parametre 'A', 'ω_0' i 'θ' nazivamo amplituda, kružna frekvencija i faza signala, redom.
- Uz sekundu kao jedinicu vremena, jedinice od θ i ω_0 bit će radijani, [rad] i radijani po sekundi, [rad/s], redom.
- Kružnu frekvenciju je uobičajeno pisati i kao $\omega_0 = 2\pi f_0$, pri čemu frekvencija f_0 ima jedinicu 1/s, odnosno Hertz, [Hz].
- Sinusoidalan signal ima isti osnovni period T_0 kao i kompleksna eksponencijala, dan izrazom: $$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Eksponencijalni i sinusni signali (u kontinuiranom vremenu): PERIODIČKI KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI SIGNALI

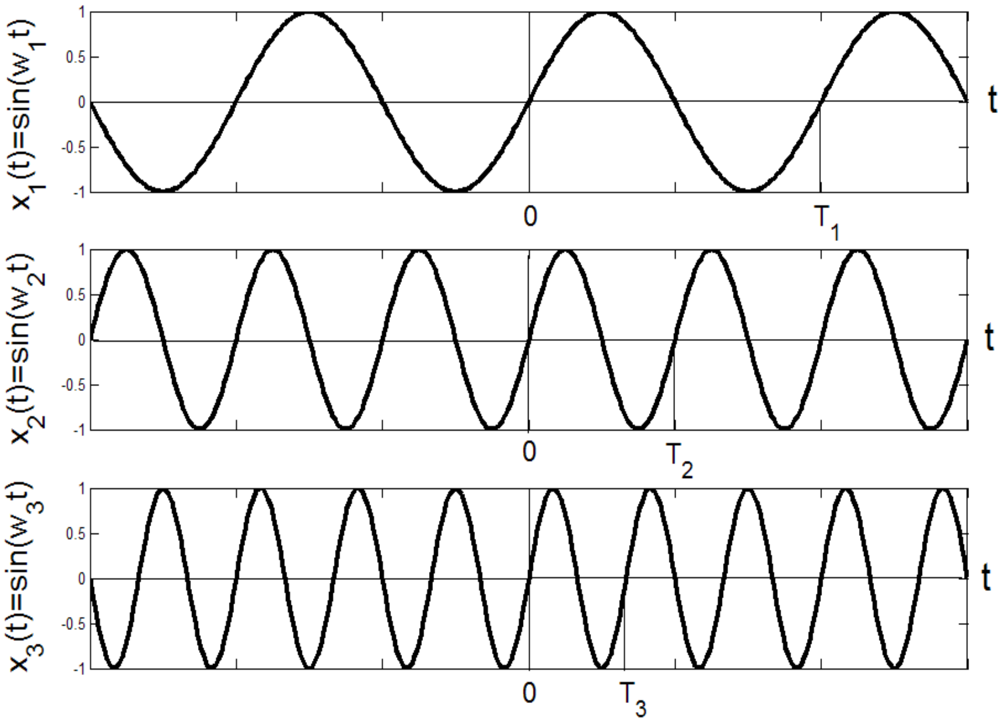
- Vremenski kontinuirani kosinusoidalan signal, $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$:



- Signale koji se ponašaju po sinusnom zakonu također često susrećemo prirodi, npr. odziv idealnog titrajnog LC kruga ima sinusni oblik,
- ili odziv jednostavnog mehaničkog sustava koji se sastoji od mase obješene na oprugu.
- I zvučni (audio) signal koji odgovara čistom glazbenom tonu također je sinusni signal.

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Eksponencijalni i sinusni signali (u kontinuiranom vremenu): PERIODIČKI KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI SIGNALI

- Iz relacije $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$ vidimo da je osnovni period sinusoidalnog signala ili kompleksne eksponencijale, T_0 inverzno proporcionalan s $|\omega_0|$ (odnosno s osnovnom kružnom frekvencijom). Slika dolje ilustrira što to znači:



- kako povećavamo frekvenciju ω ($\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$), time povećavamo brzinu osciliranja signala tj. smanjujeno period T ($T_1 > T_2 > T_3$). Vrijedi i obrnuto, tj. u slučaju smanjivanja frekvencije, raste period.

Odnos između osnovne frekvencije i perioda za vremenski kontinuirani sinusoidalan signal:
$\omega_2 = 2\omega_1$ i $\omega_3 = 3\omega_1$, te posljedično: $T_2 = (1/2)T_1$ i $T_3 = (1/3)T_1$

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Eksponencijalni i sinusni signali (u kontinuiranom vremenu): PERIODIČKI KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI SIGNALI

- ENERGIJA I SNAGA sinusoidalnih i kompleksno eksponencijalnih signala:

- Svi periodički signali, uključujući sinusoidalne i kompleksno eksponencijalne, imaju beskonačnu ukupnu energiju i konačnu prosječnu snagu.

- Odredimo npr. energiju i snagu signala: $x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$ tijekom jednog perioda:

$$E_{period} = \int_0^{T_0} \left|Ae^{j\omega_0 t}\right|^2 dt = A^2 \int_0^{T_0} \left|e^{j\omega_0 t}\right|^2 dt = A^2 \int_0^{T_0} 1 * dt = A^2 T_0$$

$$P_{period} = \frac{1}{T_0} E_{period} = A^2$$

- Budući da signal ima beskonačno mnogo perioda, ukupna energija E_∞ koju dobijemo kad integriranje provedemo na intervalu t=<-∞,∞> poprima beskonačnu vrijednost. Međutim, svi periodi signala imaju isti oblik. Budući da prosječna snaga signala za svaki period ima vrijednost A^2, prosječna snaga za n perioda opet će imati istu vrijednost, tj:

$$P_{n\_perioda} = \frac{1}{nT_0} E_{n\_perioda} = \frac{1}{nT_0} \int_0^{nT_0} \left|Ae^{j\omega_0 t}\right|^2 dt = \frac{1}{nT_0} A^2 \int_0^{nT_0} \left|e^{j\omega_0 t}\right|^2 dt = \frac{1}{nT_0} A^2 nT_0 = A^2$$

- Stoga će i prosječna snaga signala na beskonačnom vremenskom intervalu imati istu vrijednost, tj:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left|Ae^{j\omega_0 t}\right|^2 dt\right) = A^2$$

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Eksponencijalni i sinusni signali (u kontinuiranom vremenu): PERIODIČKI KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI SIGNALI

- PRIMJER:
- Ponekad će biti zgodno prikazati sumu dviju kompleksnih eksponencijala kao produkt sinusoidalnog signala i kompleksne eksponencijale.
- Primjerice, želimo odrediti i nacrtati modul signala zadanog kao:

$$x(t) = e^{j2t} + e^{j9t}$$

- NAPOMENA: Općenite vremenski kontinuirane kompleksne eksponencijalne signale (koje nismo ovdje obradili) proučiti u skripti…

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski diskretni eksponencijalni i sinusni signali

- Vremenski diskretni *eksponencijalni signal* u općenitom obliku prikazujemo kao:

$$x[n] = C\alpha^n$$

pri čemu 'C' i 'α' mogu biti realni ili kompleksni brojevi. x[n] možemo prikazati i na način:

$$x[n] = Ce^{an}$$

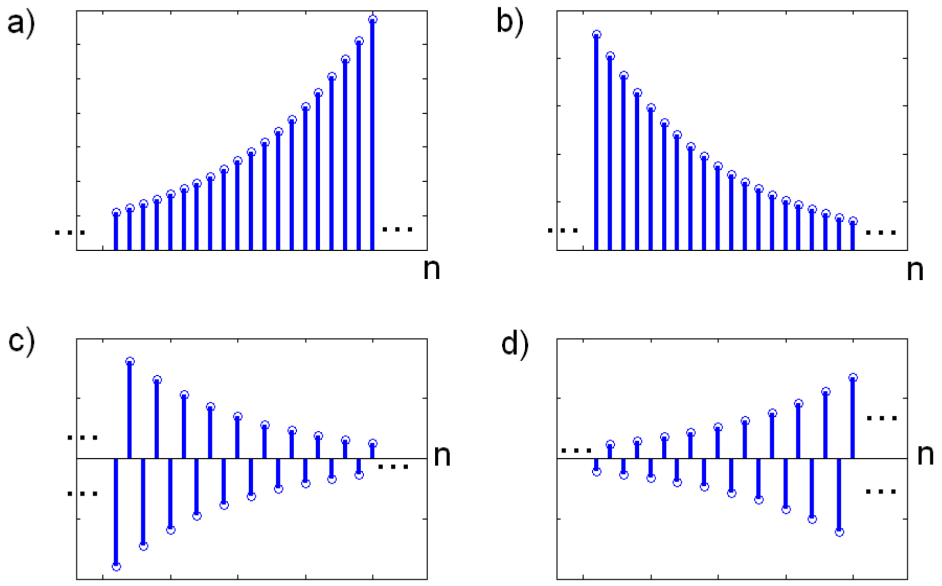
pri čemu je: $\alpha = e^a$

- Iako je oblik diskretnog signala dan relacijom $x[n] = Ce^{an}$ sličniji kontinuiranoj eksponencijali, često će nam biti prikladnije koristiti oblik $C\alpha^n$.

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski diskretni eksponencijalni i sinusni signali:

REALNI EKSPONENCIJALNI DISKRETNI SIGNALI

- Ako su 'C' i 'α' realni brojevi, signal $C\alpha^n$ zovemo REALNI EKSPONENCIJALNI DISKRETNI SIGNAL
- Takav signal može imati više oblika, kako je prikazano na slici dolje.
- Ako je $|\alpha| > 1$, amplituda signala eksponencijalno raste s porastom diskretnog vremena n, Slika a).



- Za $|\alpha| < 1$, amplituda signala eksponencijalno pada, Slika b).
- Nadalje, ako je α pozitivan sve vrijednosti signala $C\alpha^n$ imaju isti predznak, Slike a) i b)
- Dok za negativan α vrijednosti signala alterniraju (mijenjaju se u predznaku tj. susjedne vrijednosti signala imaju različit predznak), Slike c) i d).

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski diskretni eksponencijalni i sinusni signali:

KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI DISKRETNI SIGNALI

- Ako je 'C' realan (označit ćemo ga s A), a parametar 'a' čisto imaginaran (označit ćemo ga s $j\omega_0$), signal x[n] će biti:

$$x[n] = Ae^{j\omega_0 n}$$

- Kao i u kontinuiranom slučaju, ovaj signal je usko povezan sa sinusoidalnim signalom:

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta)$$

- Pitanje: Budući da je diskretno vrijeme n bezdimenzionalno, koje su jedinice za ω_0 i θ? Odgovor: radijani, rad.

- Kao i u kontinuiranom slučaju, primijenit ćemo Eulerovu relaciju da bismo povezali kompleksnu eksponencijalu i sinusoidalne signale:

$$\mathrm{A}e^{j\omega_0 \mathrm{n}} = \mathrm{A}\cos(\omega_0 \mathrm{n}) + j\mathrm{A}\sin(\omega_0 \mathrm{n})$$

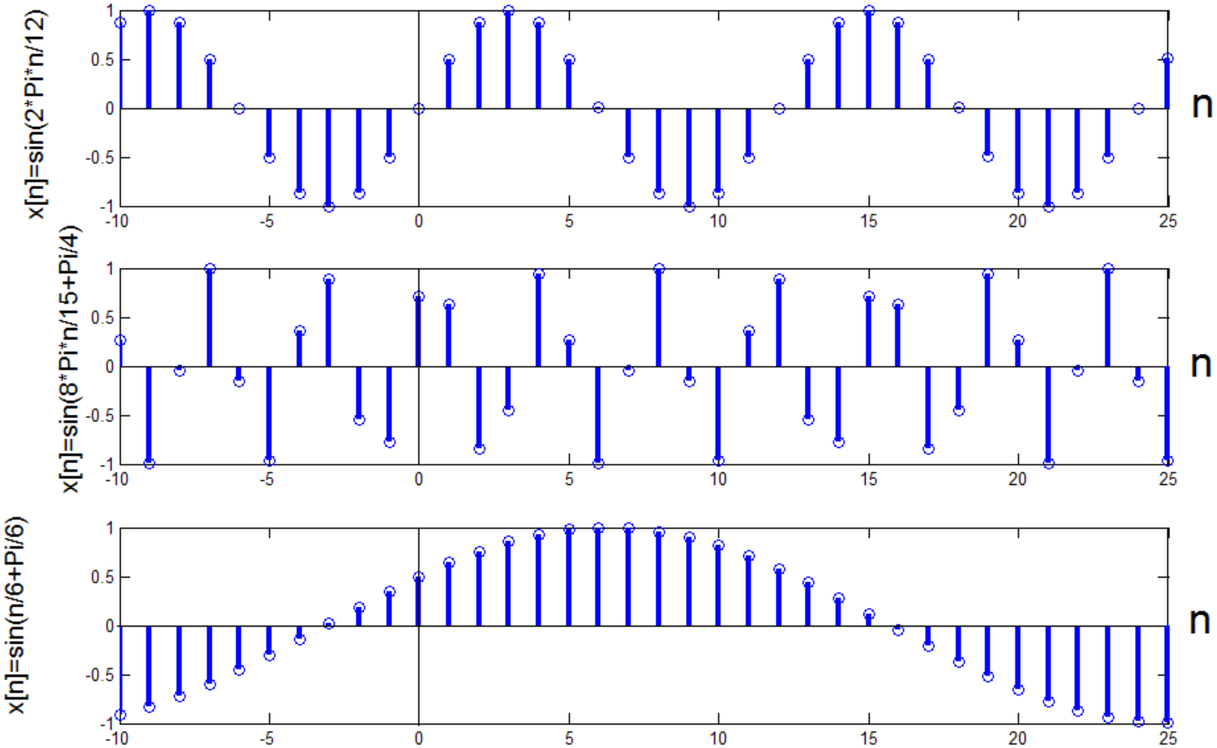
Odnosno:

$$\mathrm{A}\cos(\omega_0 \mathrm{n} + \theta) = \frac{\mathrm{A}}{2} e^{j\theta} e^{j\omega_0 \mathrm{n}} + \frac{\mathrm{A}}{2} e^{-j\theta} e^{-j\omega_0 \mathrm{n}}$$

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski diskretni eksponencijalni i sinusni signali:

KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI DISKRETNI SIGNALI

- Tri primjera sinusoidalna diskretna signala prikazana su na doljoj slici:



- NAPOMENA: Općenite vremenski diskretne kompleksne eksponencijalne signale (koje nismo ovdje obradili) proučiti u skripti…

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski diskretni eksponencijalni i sinusni signali:
KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI DISKRETNI SIGNALI

- Uz mnoge sličnosti između vremenski kontinuiranih i diskretnih kompleksnih eksponencijalnih i sinusnih signala, postoji i nekoliko bitnih razlika.

- Kad smo obrađivali kontinuirane kompleksne eksponencijale ($e^{j\omega_0 t}$) i sinusne signale ($\sin(\omega_0 t)$ i $\cos(\omega_0 t)$), izveli smo sljedeće zaključke:

    1) porastom vrijednosti ω_0 raste i brzina osciliranja signala, tj. za svake dvije međusobno različite vrijednosti ω_0, signali će međusobno biti različiti.

    2) signal je periodičan za bilo koju vrijednost frekvencije ω_0

- Međutim, prethodna dva navedena svojstva koja vrijede za kontinuirane signale, neće nužno vrijediti i u diskretnom vremenu (tj. za signale: $e^{j\omega_0 n}$ i $\sin(\omega_0 n)$ i $\cos(\omega_0 n)$)!

- Odnosno, prvo svojstvo neće uopće vrijediti, a drugo samo pod određenim uvjetima (tj. diskretne kompleksne eksponencijale i sinusni signali bit će periodični samo pod određenim uvjetima)

- Dokažimo obje tvrdnje…

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski diskretni eksponencijalni i sinusni signali:

KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI DISKRETNI SIGNALI

- Dakle, dokažimo prvo da za diskretne signale : $e^{j\omega_0 n}$ te $\sin(\omega_0 n)$ i $\cos(\omega_0 n)$ neće vrijediti svojstvo: ''Porastom vrijednosti ω_0 raste i brzina osciliranja signala, tj. za svake dvije međusobno različite vrijednosti ω_0, signali će međusobno biti različiti''.

- Promotrimo diskretnu kompleksnu eksponencijalu s frekvencijom $\omega_0+2\pi$:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0+2\pi)\mathrm{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\mathrm{n}} = 1 * \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\mathrm{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\mathrm{n}}$$

- analogno, vrijedit će:

$$\cos((\omega_0+2\pi)n) = \cos(\omega_0 n)$$

- Iz gornjih relacija vidimo da su signali na frekvenciji $\omega_0+2\pi$ isti kao na frekvenciji ω_0, tj. imamo sasvim drugačiju situaciju nego kod kontinuiranih signala gdje su signali $e^{j\omega_0 t}$ (i analogno, $\sin(\omega_0 t)$ i $\cos(\omega_0 t)$) međusobno različiti za različite frekvencije ω_0.

- Dakle, u diskretnom vremenu, signali s frekvencijom ω_0 su isti kao signali s frekvencijama $(\omega_0 \pm 2\pi)$, $(\omega_0 \pm 4\pi)$, $(\omega_0 \pm 6\pi)$...

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski diskretni eksponencijalni i sinusni signali:

KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI DISKRETNI SIGNALI

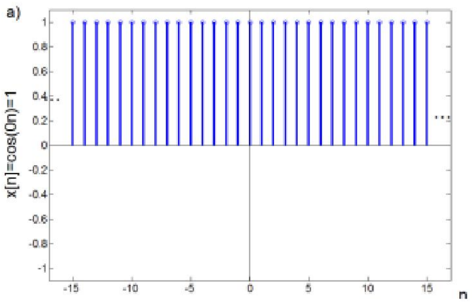
- Stoga, kad promatramo diskretne kompleksne eksponencijale i sinusoide, u obzir uzimamo samo frekvencijski interval širine 2π, unutar kojeg biramo vrijednost ω_0.
- Iako, uzimajući u obzir relaciju: $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0+2\pi)\mathrm{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\mathrm{n}} = 1 * \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\mathrm{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\mathrm{n}}$ možemo uzeti bilo koji interval širine 2π, najčešće biramo interval $0 \leq \omega_0 < 2\pi$ ili $-\pi \leq \omega_0 < \pi$.
- Stoga signali $e^{j\omega_0 n}$ i $\sin(\omega_0 n)$ i $\cos(\omega_0 n)$ ne osciliraju sve brže s porastom ω_0.
- Umjesto toga (kao što ćemo prikazati na slici na idućem slajdu) dešava se sljedeće:
- Kako povećavamo ω_0, počevši od vrijednosti 0, signal sve brže oscilira, dok ne dostignemo $\omega_0 = \pi$.
- Kad ω_0 nastavi rasti iznad π, oscilacije se počinju usporavati dok ω_0 ne dosegne 2π.
- Za $\omega_0 = 2\pi$ dobijemo signal istog oblika kao kad je $\omega_0=0$.
- Stoga niskofrekventni (tj. sporo oscilirajući) diskretni sinusni i kompleksni eksponencijalni signali imaju frekvencije ω_0 bliske vrijednostima 0, 2π, 4π, 6π..., dok su kod visokofrekventnih (brzo oscilirajućih) diskretnih signala ω_0 bliske vrijednostima π, 3π, 5π...

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski diskretni eksponencijalni i sinusni signali:

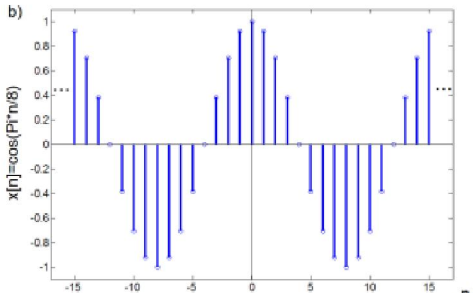
KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI DISKRETNI SIGNALI

Diskretni sinusoidalni signali $x[n]=\cos(\omega_0 n)$, za različite frekvencije, $\omega_0 = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{8}, 2\pi$:

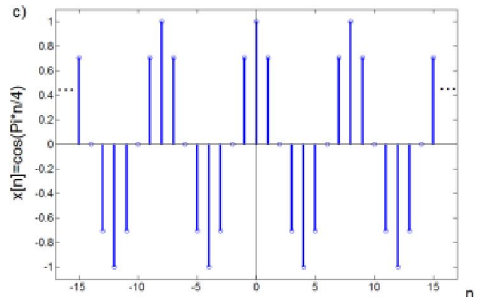
$\omega_0=0$:



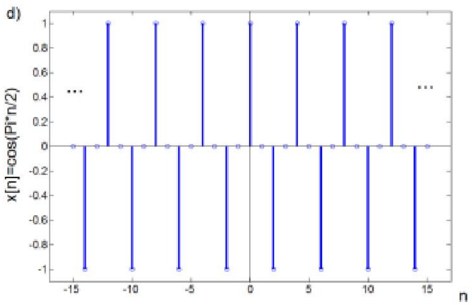
$\omega_0=\pi/8$:



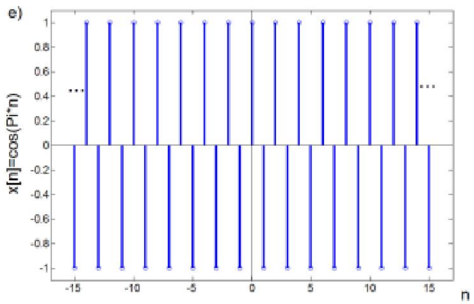
$\omega_0=\pi/4$:



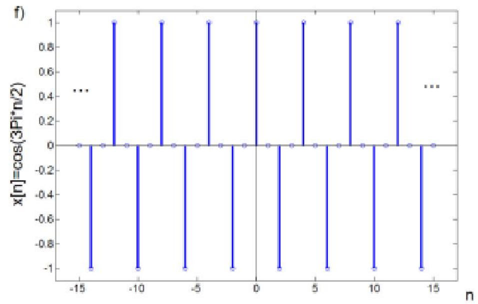
$\omega_0=\pi/2$:



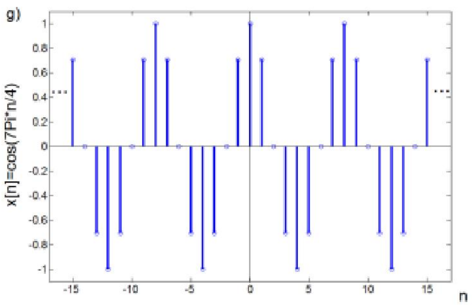
$\omega_0=\pi$:



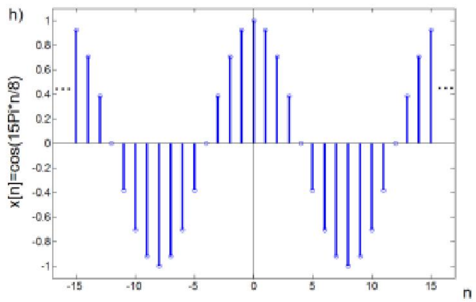
$\omega_0=3\pi/2$:



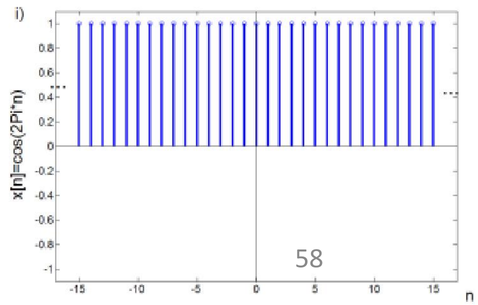
$\omega_0=7\pi/4$:



$\omega_0=15\pi/8$:



$\omega_0=2\pi$:



OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski diskretni eksponencijalni i sinusni signali:

KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI DISKRETNI SIGNALI

Periodičnost diskretnih kompleksnih eksponencijalnih i sinusnih signala:

- Sljedeće svojstvo koje želimo razmotriti jest periodičnost diskretnih kompleksnih eksponencijala i sinusoida.
- Da bi signali : $e^{j\omega_0 n}$ te, analogno, $\sin(\omega_0 n)$ i $\cos(\omega_0 n)$ bili periodični s periodom $N > 0$, treba vrijediti:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0(\mathrm{n}+\mathrm{N})} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 \mathrm{n}}$$

te, analogno:

$$\cos(\omega_0(n+N)) = \cos(\omega_0 n)$$

Odnosno, treba biti zadovoljeno:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 \mathrm{N}} = 1$$

te, analogno:

$$\cos(\omega_0 N) = 1$$

Da bi ove jednakosti bile zadovoljena, $\omega_0 N$ mora biti višekratnik od 2π, tj. mora postojati takav cjelobrojni m da vrijedi:

$$\omega_0 N = m2\pi$$

ili, ekvivalentno:

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{N}}$$

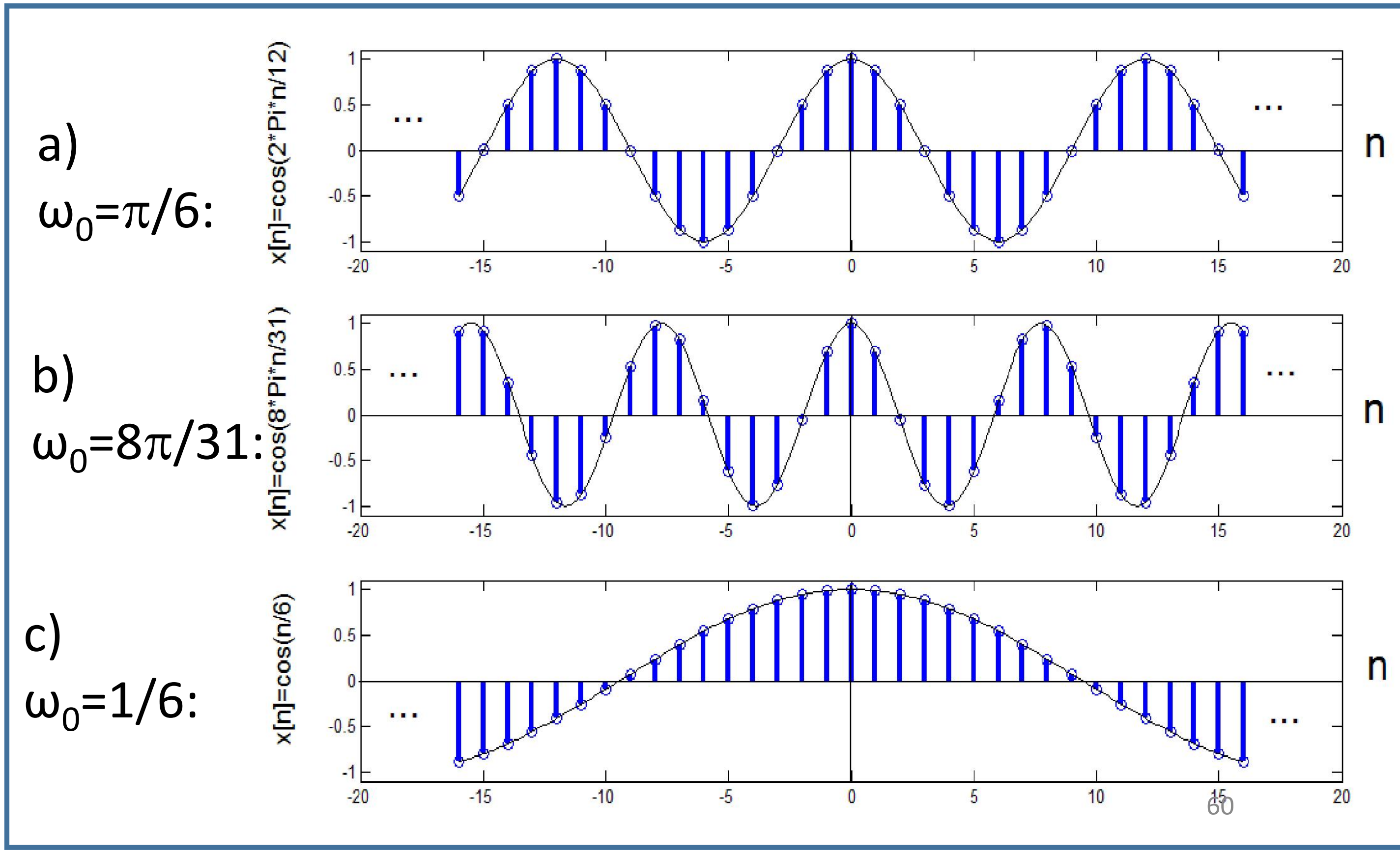
UVJET PERIODIČNOSTI diskretnih kompleksnih eksponencijalnih i sinusnih signala

Periodičnost diskretnih kompleksnih eksponencijalnih i sinusnih signala:

- Dakle, uvjet periodičnosti diskretnih kompleksnih eksponencijalnih i sinusnih signala: $$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{N}}$$

nalaže da $\omega_0/2\pi$ bude razlomak s cjelobrojnim brojnikom i nazivnikom, u suprotnom signali nisu periodički.

Primjerice, signali na Slikama a) i b) su periodički, a signal na Slici c) NIJE periodičan (iako se na slici možda i čini)…dokazat ćemo naknadno, u primjeru…



OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski diskretni eksponencijalni i sinusni signali:

KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI DISKRETNI SIGNALI

Periodičnost diskretnih kompleksnih eksponencijalnih i sinusnih signala:

- Odredimo još osnovni period periodičnih diskretnih kompleksnih eksponencijalnih i sinusnih signala:

- Razmotrimo periodičku eksponencijalu x[n]= $e^{j\omega_0 n}$, uz $\omega_0 \neq 0$. Kako smo upravo vidjeli, ω_0 mora zadovoljavati relaciju:

$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$ za cjelobrojne vrijednosti m i N, pri čemu je N>0.

- Stoga signal: $e^{j\omega_0 n}$ možemo zapisati kao: $e^{j(\frac{m}{N}2\pi)n}$

- Osnovni period N_0 ćemo definirati kao najmanju cjelobrojnu vrijednost za koju će vrijediti:

$$e^{j(\frac{m}{N}2\pi)(n+N_0)} = e^{j(\frac{m}{N}2\pi)n}$$

tj. mora vrijediti:

$$e^{j(\frac{m}{N}2\pi)N_0} = 1$$

Ova relacija će vrijediti ako je zadovoljeno: $\frac{m}{N}2\pi N_0 = k2\pi$

Odnosno, osnovni period N_0 će biti: $N_0 = k\frac{N}{m}$

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski diskretni eksponencijalni i sinusni signali:

KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI DISKRETNI SIGNALI

Periodičnost diskretnih kompleksnih eksponencijalnih i sinusnih signala:

- Dakle, izveli smo da će osnovni period N_0 biti: $N_0 = k\dfrac{N}{m}$
- Budući da je osnovni period definiran kao najmanji mogući period, moramo odabrati takav minimalan k da razlomak: kN/m ima cjelobrojnu vrijednost.
- N i m mogu imati neki najveći zajednički djelitelj kojeg ćemo označiti s nzd(N,m) koji definiramo kao najveći cjelobrojni broj kojim su djeljivi N i m. Primjerice, nzd(2,3)=1; nzd(2,4)=2; nzd(8,12)=4.
- Podijelimo brojnik i nazivnik u relaciji: $N_0 = k\dfrac{N}{m}$ s nzd(N,m). Biti će:

$$N_0 = k\frac{\dfrac{N}{\mathrm{nzd}(N,m)}}{\dfrac{m}{\mathrm{nzd}(N,m)}} \quad \Rightarrow$$

Budući da su brojnik i nazivnik u relaciji lijevo cjelobrojni, te budući da tražimo minimalnu cjelobrojnu vrijednost za N_0, minimalan k će iznositi:

$$k = \frac{m}{\mathrm{nzd}(N,m)}$$

I konačno, osnovni period N_0 će biti: $$N_0 = \frac{N}{\mathrm{nzd}(N,m)}$$

NAPOMENA: Izveli smo osnovni period za diskretnu kompleksnu eksponencijalu, ali, naravno, isti izraz vrijedi i za diskretne sinusne signale.

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski diskretni eksponencijalni i sinusni signali:

KOMPLEKSNI EKSPONENCIJALNI I SINUSNI DISKRETNI SIGNALI

Periodičnost diskretnih kompleksnih eksponencijalnih i sinusnih signala:

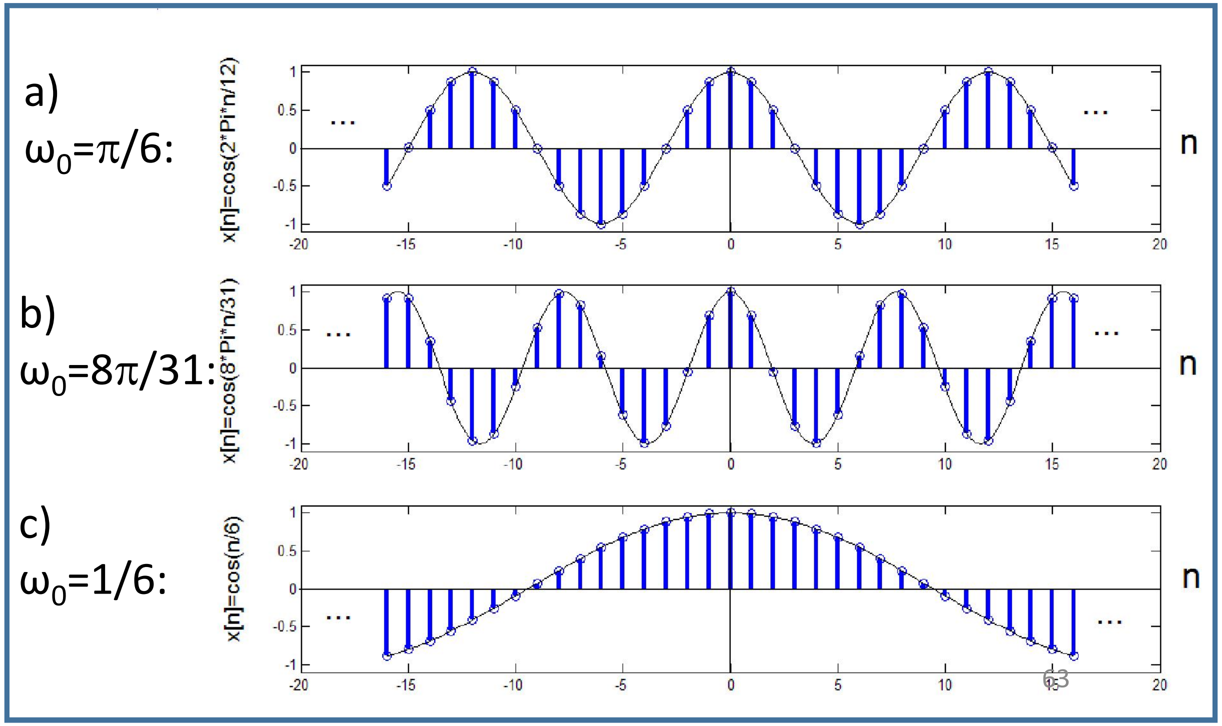
PRIMJER:

Primjenom uvjeta periodičnosti i izraza za određivanje osnovnog perioda, provjerimo da li su signali periodični te odredimo osnovni period (ukoliko su periodični):

a) $x[n]=\cos(2\pi n/12)$;

b) $x[n]=\cos(8\pi n/31)$;

c) $x[n]=\cos(n/6)$.



NAPOMENA:

Proučiti u skripti riješene primjere: 2.7 i 2.8!

Također, odrediti osnovni period signala:

$x[n] = \cos(2\pi n/3) + \cos(3\pi n/4)$ (sličan primjeru 2.8!)

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: PERIODIČNOST VREMENSKI KONTINUIRANIH I DISKRETNIH KOMPLEKSNIH EKSPONENCIJALNIH I SINUSNIH SIGNALA

ZADACI:

Provjeriti periodičnost sljedećih kontinuiranih i diskretnih signala i (ukoliko su periodični) odrediti osnovni period:

Skripta, 2.6 a) $x(t) = 2e^{j(t + \pi/8)}u(t)$

Skripta, 2.9 a) $x(t) = je^{j10t}$ b) $x(t) = e^{(-1 + j)t}$ e) $x[n] = 3e^{j3/5(n + ½)}$

Skripta, 2.10 $x(t) = 2\cos(10t + 1) – \sin(4t - 1)$

Skripta, 2.11 $x[n] = 1 + e^{j4\pi n/7} - e^{j2\pi n/5}$

Skripta, 2.25 e) $x(t) = Par\{\sin(4\pi t)u(t)\}$

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: PERIODIČNOST VREMENSKI KONTINUIRANIH I DISKRETNIH KOMPLEKSNIH EKSPONENCIJALNIH I SINUSNIH SIGNALA

ZADATAK ZA DOMAĆI RAD:

Zadan je signal:

$x(t) = 10e^{j18t} + 10e^{j6t}$

a) Odrediti period signala x(t)
b) Odrediti modul signala x(t) i period modula
c) Odrediti energiju i snagu jednog perioda signala x(t)
d) Odrediti energiju i snagu jednog perioda <u>modula</u> signala x(t)
e) Odrediti E_∞ i P_∞ (odnosno energiju i snagu signala x(t) na beskonačnom intervalu)

Rješenje:

a) $T = \pi/3$; b) modul (x(t)) = 20* modul (cos(6t)); period modula: $\pi/6$;
c) $E_{\text{period signala } x(t)} = 200 * \pi/3$, $P_{\text{period signala } x(t)} = 200$
d) $E_{\text{period MODULA signala } x(t)} = 100 * \pi/3$, $P_{\text{period MODULA signala } x(t)} = 200$
e) $E_\infty = \infty$; $P_\infty = 200$

Uočite iz rješenja 2 činjenice: - period signala x(t) i period modula signala x(t) nije ista stvar!
- snaga uvijek ima istu vrijednost!

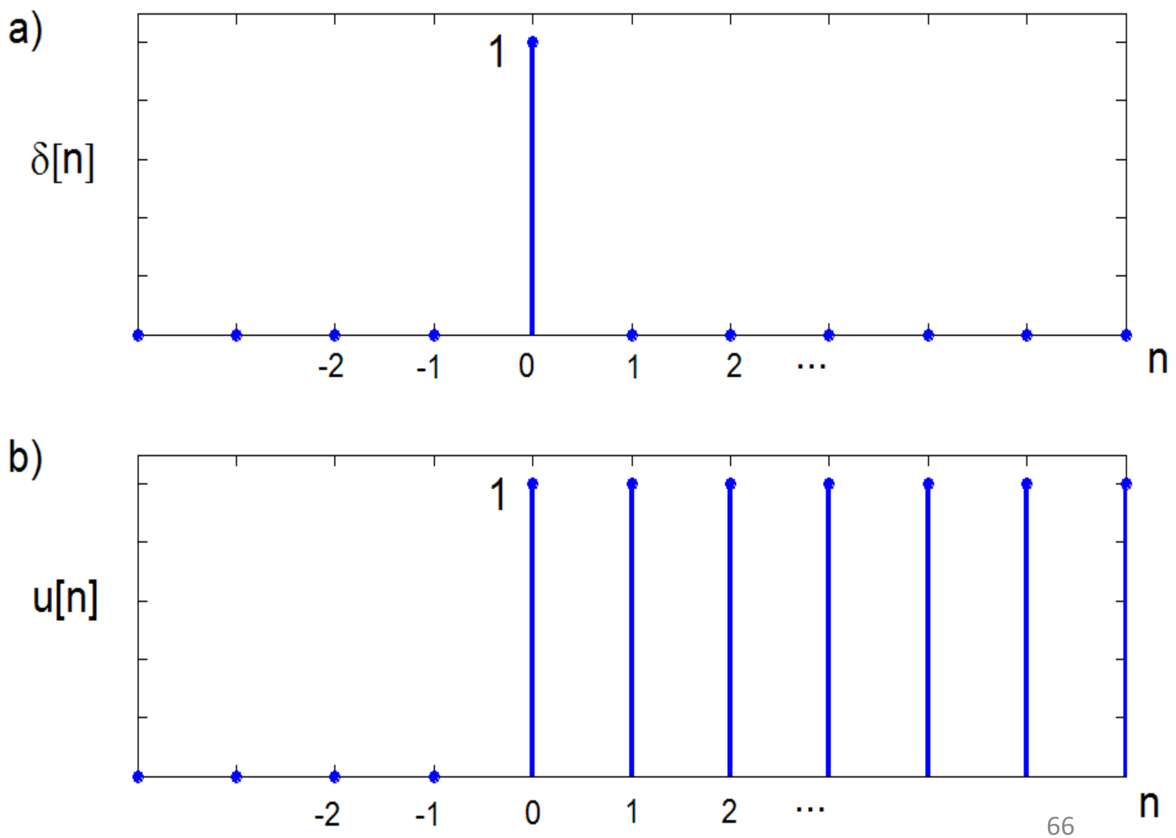
OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski diskretni jedinični impuls i jedinični odskočni signal

- Jedan od najjednostavnijih diskretnih signala jest jedinični impuls (često ga nazivamo i jedinični uzorak te Dirac-ov ili delta impuls), Slika a), kojeg definiramo kao:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

- Jedinični odskočni signal (često ga zovemo i step signal), Slika b), definiramo kao:

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski diskretni jedinični impuls i jedinični odskočni signal

- Dirac-ov impuls i jedinični odskočni signal (step signal) usko su povezani:

- Dirac-ov impuls možemo prikazati kao prvu diferenciju step signala, odnosno kao razliku step signala i vremenski pomaknutog step signala (udesno za jedan uzorak), tj:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

- Obrnuto, diskretni step signal može se prikazati kao beskonačna suma Dirac-ovih impulsa , tj:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski diskretni jedinični impuls i jedinični odskočni signal

- Dirac-ov impuls može se upotrijebiti za uzorkovanje nekog signala u vremenskom trenutku n=0. Naime, budući da je $\delta[n]$ različit od nule (i jednak 1) samo za n = 0, vrijedit će:

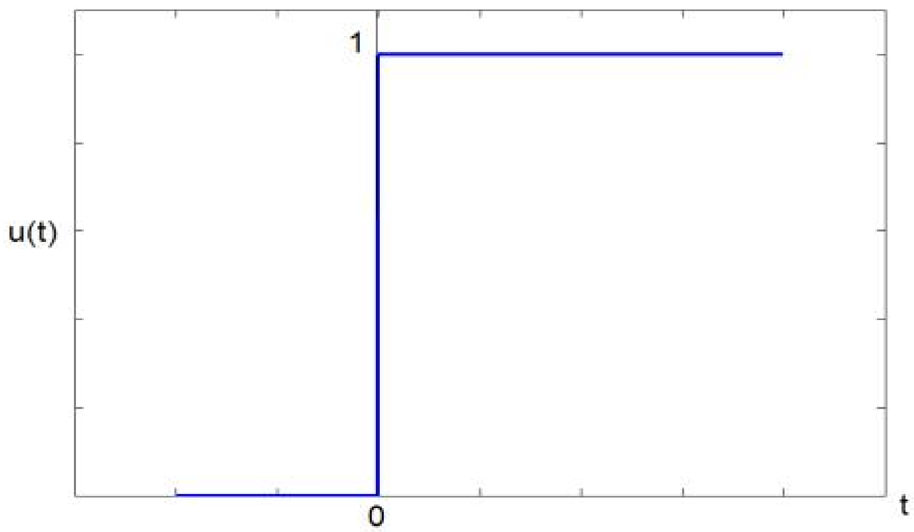
$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

- Još općenitije, ako promotrimo pomaknuti jedinični impuls $\delta[n-n_0]$ u trenutku $n = n_0$, vrijedit će:

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$$

- Ovo svojstvo uzorkovanja koje posjeduje jedinični impuls bit će nam od osobite važnosti u narednim poglavljima.

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski kontinuirani jedinični impuls i jedinični odskočni signal



- Vremenski kontinuirani jedinični odskočni signal (ili step signal) definira se na sličan način kao i u diskretnom vremenu, odnosno (Slika desno):

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases}$$

- Primijetimo na Slici da step signal (funkcija) ima diskontinuitet u vremenu t=0 (tj. 'skok' sa 0 na 1).

- Vremenski kontinuirani jedinični impuls (ili Dirac-ov impuls), $\delta(t)$ povezan je sa step signalom na sličan način kao što su povezani u diskretnom vremenu. Naime, kontinuirani step signal definiramo kao beskonačni integral jediničnog impulsa (dok je, prisjetimo se, u diskretnom vremenu, step signal bio beskonačna suma pomaknutih Dirac-ovih impulsa):

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$$

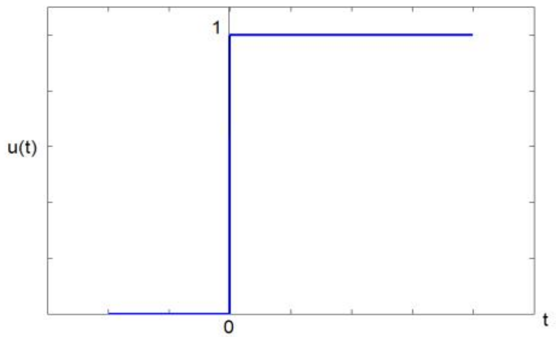
OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski kontinuirani jedinični impuls i jedinični odskočni signal

- Iz prethodne relacije $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$ također možemo dobiti izraz za Dirac-ov impuls, δ(t), tj. slijedi da je Dirac-ov impuls

  prva derivacija kontinuiranog step signala:

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

- Međutim, kod deriviranja kontinuiranog step signala postoje određene poteškoće s obzirom da u(t) ima diskontinuitet u t=0, te stoga nije derivabilan. Odnosno, postavlja se pitanje kako derivirati step signal (Slika dolje)? Ideje??? ☺

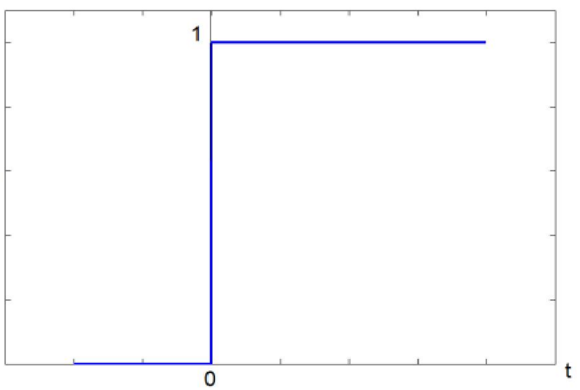


Poslužit ćemo se 'trikom'...

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski kontinuirani jedinični impuls i jedinični odskočni signal

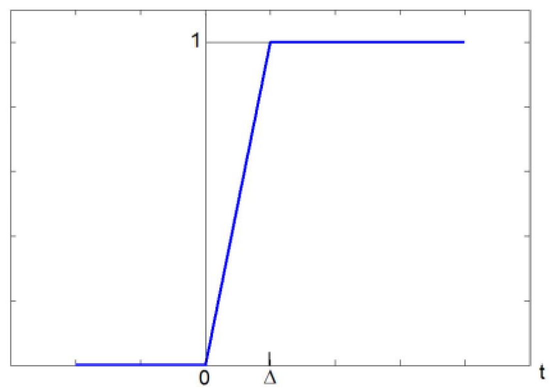
- Funkciju u(t) (Slika dolje lijevo) aproksimirat ćemo funkcijom $u_\Delta(t)$, prikazanom na Slici dolje desno, koja raste iz vrijednosti 0 u 1 u kratkom vremenskom intervalu Δ.

u(t)



aproksimacija step signala u(t)

$u_\Delta(t)$



- Stoga step signal u(t) možemo smatrati idealizacijom od $u_\Delta(t)$, kad interval Δ teži u nulu, tj. možemo pisati:

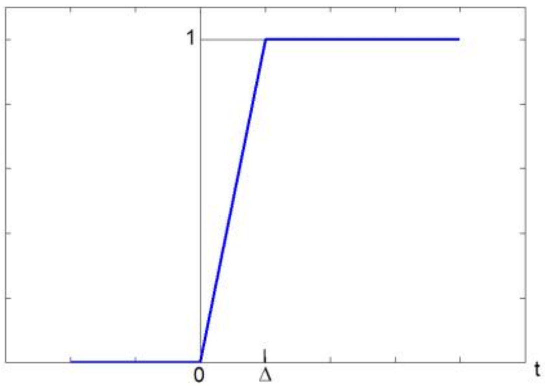
$$u(t) = u_\Delta(t)\Big|_{\Delta \to 0}$$

- Pritom je signal $u_\Delta(t)$ derivabilan (jer nema diskontinuiteta). Stoga ga derivirajmo…

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski kontinuirani jedinični impuls i jedinični odskočni signal

- Derivacija signala $u_\Delta(t)$ prikazana je Slikom desno. Ovaj signal označit ćemo kao: $\delta_\Delta(t)$, tj. vrijedi: $\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}$

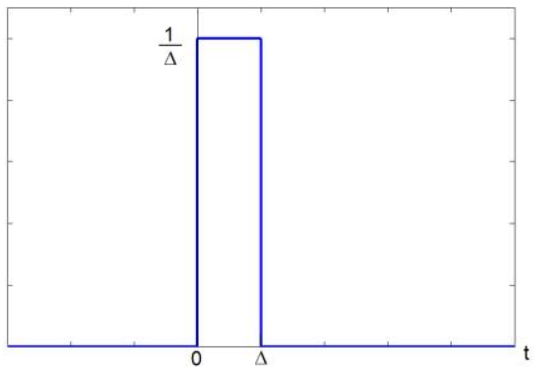
$u_\Delta(t)$



Derivacija signala $u_\Delta(t)$, tj:

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}$$

$\delta_\Delta(t)$



- Primijetimo da $\delta_\Delta(t)$ predstavlja impuls trajanja Δ koji uvijek ima jediničnu površinu, bez obzira na vrijednost Δ (odnosno, površina pravokutnog impulsa jest: $\Delta * (1/\Delta) = 1$, vidi Sliku desno).

- Kad Δ teži u nulu, impuls $d_\Delta(t)$ postaje sve uži i viši, pri čemu zadržava vrijednost površine 1. Sad jedinični impuls $\delta(t)$ možemo definirati kao:

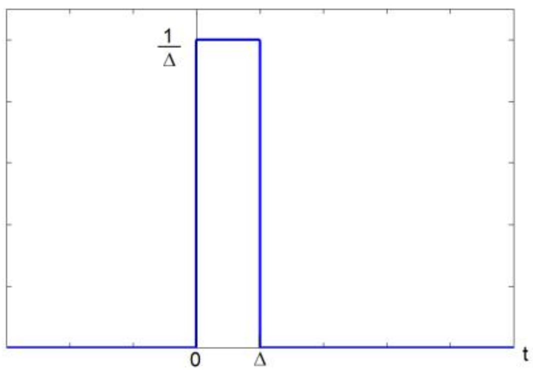
$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

tj. smatrati ga idealizacijom impulsa $\delta_\Delta(t)$, kad trajanje impulsa Δ postaje zanemarivo malo.

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski kontinuirani jedinični impuls i jedinični odskočni signal

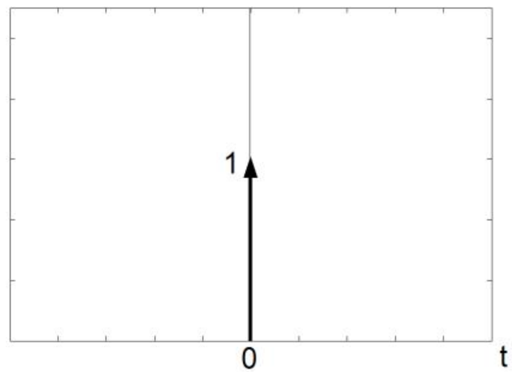
- Budući da vremenski kontinuirani Dirac-ov impuls, $\delta(t)$ nema trajanja, ali ima jediničnu površinu, grafički ga prikazujemo na način prikazan Slikom dolje desno, pri čemu strelica predstavlja puls beskonačno kratkog trajanja, koncentriranog u trenutku t=0, dok visina strelice i '1' pored strelice označavaju površinu impulsa.

$\delta_{\Delta}(t)$



$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_{\Delta}(t)$$

$\delta(t)$

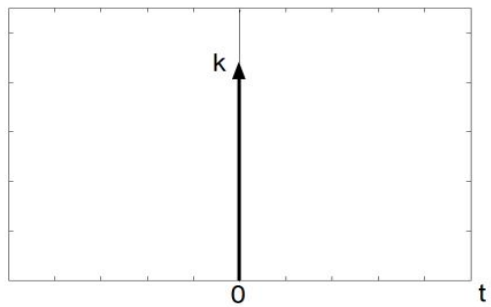


- Još općenitije, skalirani impuls $k\delta(t)$ imat će površinu k, te će vrijediti:

$$\int_{-\infty}^{t} k\delta(\tau)d\tau = ku(t)$$

- Skalirani impuls s površinom k prikazan je na Slici desno, pri čemu visina strelice označava površinu skaliranog impulsa.

$k\delta(t)$

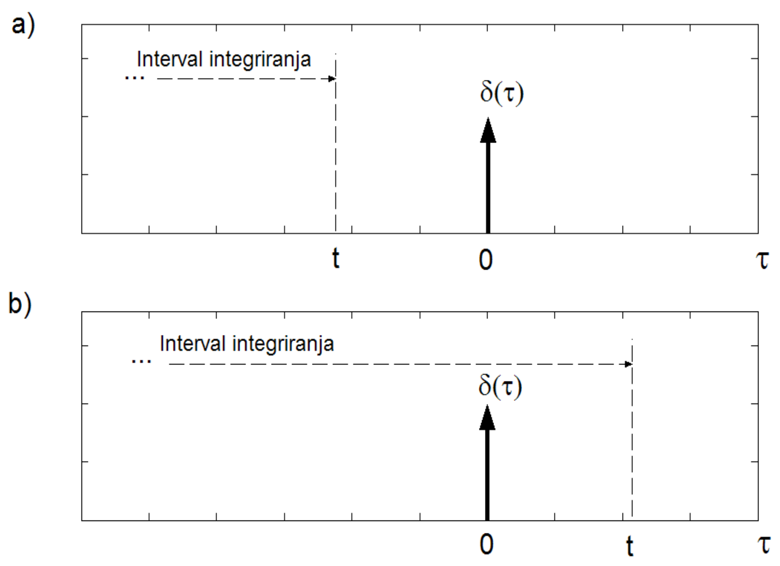


OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski kontinuirani jedinični impuls i jedinični odskočni signal

- Kako smo već naveli, veza između step signala i Dirac-ovog impulsa jest:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Grafički prikaz gornje relacije dan je slikom:

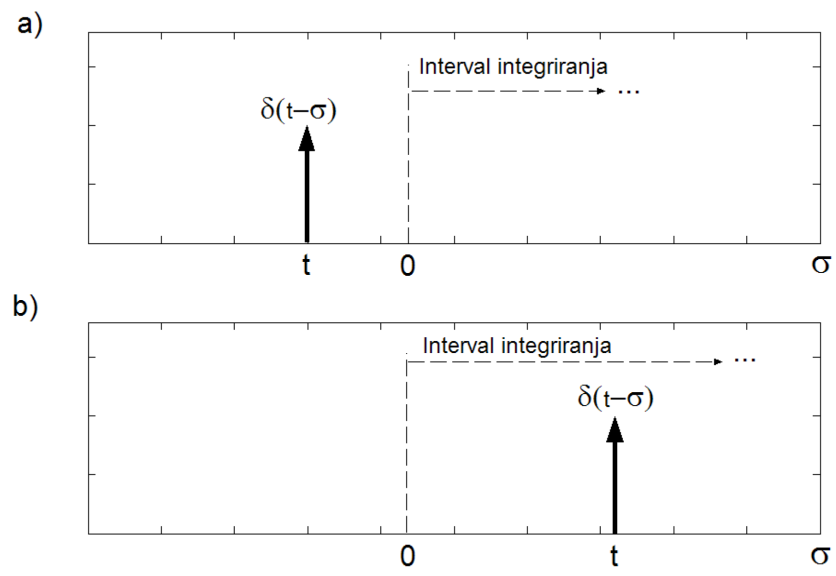


a) t<0, b) t>0

- S druge strane, jednostavnom supstitucijom varijabli (vidjeti u skripti), relaciju lijevo možemo napisati i na ovaj (češće korišten način):

$$u(t) = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\sigma)d\sigma = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Grafički prikaz gornje relacije dan je slikom:

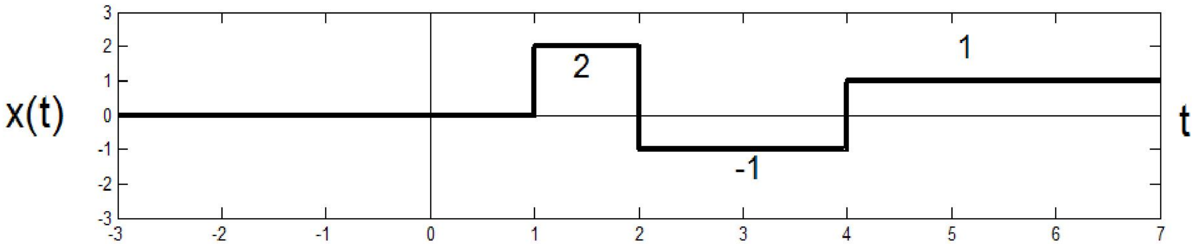


a) t<0, b) t>0

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski kontinuirani jedinični impuls i jedinični odskočni signal

- PRIMJER:

  Odrediti i nacrtati derivaciju signala x(t) prikazanog na Slici dolje. Rezultat provjeriti na način da se derivirani signal integrira (tj. da se dobije originalni signal, x(t)).



- ZADATAK 2.13, skripta:

  Zadan je vremenski kontinuirani signal x(t) = $\delta(t + 2) - \delta(t - 2)$. Odrediti E_∞ za signal koje se dobije kao:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

OSNOVNE VRSTE SIGNALA: Vremenski kontinuirani jedinični impuls i jedinični odskočni signal

- PRIMJER:

Zadan je signal: $x[n] = \sum_{k=-4}^{4} k\delta[n-k]$

a) Nacrtati signal x[n]
b) Odrediti i nacrtati signal: x[-2n - 4]
c) Odrediti E_∞ signala x[-2n - 4]

- PRIMJER:

Zadan je signal x(t) = 3u(t + 2) – 3u(t – 5).

a) Nacrtati signal x(t)
b) Odrediti E_∞ signala y(t) koje se dobije kao: $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$