Sveučilište u Splitu
Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje

# Algoritmi

Vježba 1

Nositelj: izv.prof.dr.sc Matko Šarić
Suradnici u nastavi:

- asistent Jurica Đerek, mag.ing.
- asistent Matija Pauković, mag.ing.

## Uvod u vježbu 1

Vježba 1 je uvodna vježba u problematiku određivanja složenosti algoritama i bavi se pronalaskom asimptotskih granica (rješavanja suma), odnosno, definiranjem rješenja sume te problematikom dokaza izraza indukcijom.

Prije nego se krene sa rješavanjem zadataka, poželjno je prethodno obrazložiti nekoliko temeljnih informacija. Naime, kasnije vježbe će pokazati da se algoritmi a posebice, petlje, matematički prikazuju pomoću izraza sume (Σ) sa donjom i gornjom granicom (petlja ide od donje do gornje granice). U skripti koja je dostupna na portalu kolegija, u poglavlju *2.4. Sumacije*, navedeni su različiti standardni oblici suma i pripadnih rješenja (aritmetički red, geometrijski red, harmonijski red i kvadratni red). Bitno je uočiti da izrazi za sume (na lijevoj strani jednakosti) ima izraz unutar sume te donje i gornje granice a, sa desne strane, kao rješenje sume, jest izraz koji je funkcija f(n). U analogiji, vrijednost n je npr. broj elemenata 1D niza koje je potrebno ispisati sa petljom koja tada mora imati n iteracija. Potrebno vrijeme da algoritam iz navedenog primjera ispiše sve elemente je direktno zavisno o broju elemenata tog niza, odnosno, upravo o parametru n. Rješenje sume je izraz koji nam govori o složenosti algoritma. Navedene sume su standardne i njihova rješenja su poznata. Kako postupiti kada imamo specifičan algoritam koji ima specifičan oblik sume? Odnosno, kako naći rješenje drugih specifičnih oblika suma u ne-standardnim situacijama? U ovoj problematici nam u korist idu upravo pristupi *Upotreba grubih granica* i *Aproksimiranje korištenjem integrala.* Navedeni pristupi nam omogućavaju da za dobiveni izraz sume pronađemo pripadno rješenje. Upravo ovom problematikom bavi se 1. zadatak vježbe.

Sljedeća problematika vježbe je dokaz indukcijom. Naime, u 2.,3. i 4. zadatku vidljivo je da su zadane sume ali i njihova rješenja. Kako provjeriti da li vrijedi tvrdnja da lijeva strana (izraz sa sumom) je jednak desnoj strani (izraz sa parametrom n)? Dokaz indukcijom nam upravo omogućava da kroz nekoliko koraka i hipoteza provjerimo da li vrijedi tvrdnja da je desna strana odnosno funkcija f(n) (izraz sa parametrom n) rješenje sume koja je na lijevoj strani jednakosti.

## Vježba 1

Zadatak 1

Pronađite asimptotske granice (riješite sumu) za slijedeći niz (pretpostavite da je r>=0 konstanta):

$$\sum_{i=1}^{n} i^r$$

Zadatak 2

Dokažite indukcijom da je slijedeći izraz  točan:

$$\sum_{i=1}^{n} i(i-1)(i-2) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$$ -

Zadatak 3

Pokažite indukcijom da li je slijedeći izraz točan

$$\sum_{i=1}^{n} (2 \cdot i - 1)^3 = n^2 \cdot (2 \cdot n^2 - 1)$$

Zadatak 4

Pokažite indukcijom da li je slijedeći izraz točan

$$\sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)!$$

1. Pronaći asimptotske granice (riješiti sumu)

ZADANO: $\sum_{i=1}^{n} i^r$ ; $r \geq 0$ (konst.)

PREPORUKA: Pročitati u skripti str. 12

Za rješenje može se koristiti dva pristupa.

a) Upotreba grube granice

$$\sum_{i=1}^{n} i^r = n \cdot n^r = n^{r+1} \longrightarrow \Theta(n^{r+1})$$

i iz izraza zamijenimo sa gornjom granicom

izraz za sumu zamijenimo sa gornjom granicom (u ovom slučaju n)

b) Aproksimiranje korištenjem integrala

Iz skripte vrijedi sljedeće:

$$\underbrace{\int_0^n f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^r \leq \int_1^{n+1} i^r\,di = \frac{i^{r+1}}{r+1}\Bigg|_{i=1}^{i=n+1} = \frac{(n+1)^{r+1}}{r+1} - \frac{1^{r+1}}{r+1}$$

u cijelom izrazu ovo je dominantan faktor, a ostalo su samo konstante

$r$ = konst. pa je i konst.

$(n+1)^{r+1}$ → u raspisu preko binomnog poučka dobije se izraz sa različitim koeficijentima ali od svih koeficijenata, dominantan je $n^{r+1}$

Prema tome, $\frac{(n+1)^{r+1}}{r+1} - \frac{1^{r+1}}{r+1} \sim n^{r+1} \rightarrow \Theta(n^{r+1})$

a) i b) pristup mora imati isto rješenje.

2. Indukcijom dokazati da vrijedi sljedeći izraz:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i(i-1)(i-2)}_{L} = \underbrace{\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}}_{D}$$

- Što izraz tvrdi? → Tvrdi da je rješenje sume na L strani upravo izraz na D strani.

- Kako dokazemo da vrijedi L=D? → Upotrebom indukcije

- Dokazivanje indukcijom se radi u više koraka:

1. Promatramo neki dovoljno mali $n = n_0$ $(=i)$ i provjerimo da li vrijedi hipoteza $HI(n_0)$

$n = n_0 = i = 1$ (probamo sa 1) $\rightarrow$ $1\underbrace{(1-1)}_{\varnothing}(1-2) = \frac{(1+1)\overbrace{(1-1)}^{\varnothing}(1-2)}{4}$

$\varnothing = \varnothing$

$L = D$ ✓

- Tek kada smo dokazali $HI(n_0)$ u prvom koraku, krećemo na drugi korak.

2. Drugi korak ima više podkoraka:

a) definiramo izraz za hipotezu $HI(n-1)$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i-1)(i-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$$

$n \rightarrow n-1$

Umjesto n kako je zadano u zadatku, pokažimo kako izgleda desna strana izraza ako umjesto n uvrstimo $n-1$

b) izraz za $HI(n)$ je isti kao i zadani:

$$\sum_{i=1}^{n} i(i-1)(i-2) = \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{4}$$

c) $$\underbrace{\underbrace{\frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{4}}_{HI(n)}}_{L} = \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}}_{HI(n-1)} + \underbrace{n(n-1)(n-2)}_{\text{u izrazu za sumu iz zadatka, umjesto } i \text{ uvrstimo } i=n \text{ (gornja granica)}} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) + 4n(n-1)(n-2)}{4} = \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{4}}_{D}$$

Rješenje izraza na L strani je jednako D strani

L = D ✓

Ovime smo dokazali da je izraz D rješenje sume (izraza) na L strani.

③ Indukcijom dokazati da vrijedi sljedeći izraz:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

1) $HI(n_0) \to \quad n = n_0 = i = 1 \to \quad (2\cdot 1-1)^3 = 1^2(2\cdot 1^2-1)$

$$1^3 = 1^2\cdot 1$$

$$1 = 1$$

$$L = D \checkmark$$

2) a) $HI(n-1) \to \quad \sum_{i=1}^{n-1}(2i-1)^3 = (n-1)^2(2(n-1)^2-1)$

$n \to n-1$

b) $HI(n) \to \quad \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

c) $$\underbrace{\underbrace{n^2(2n^2-1)}_{HI(n)}}_{L} = \underbrace{(n-1)^2(2(n-1)^2-1)}_{HI(n-1)} + \underbrace{(2n-1)^3}_{\text{iz } \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3;\ k\to n} =$$

$$= (n^2-2n+1)(2n^2-4n-2-1)(8n^3-12n^2+6n-1) =$$

$= \ldots\ldots$ nakon sređivanja izraza $=$

$$= 2n^4 - n^2 =$$

$$= \underbrace{n^2(2n^2-1)}_{D} \Rightarrow L = D \checkmark$$

4. Indukcijom dokazati da vrijedi sljedeći izraz:

$$\sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)!$$

1) $HI(n_0) \rightarrow n = n_0 = i = 1 \rightarrow 1 \cdot (1!) = (1+1)!$

$1 \neq 2$

$L \neq D$

S obzirom da nam $HI(n_0)$ ne vrijedi ($L \neq D$), nema potrebe ići na sljedeće korake i može se tvrditi da $(n+1)!$ nije rješenje sume $\sum_{i=1}^{n} i(i!)$