Sveučilište u Splitu
Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje

Algoritmi

Vježba 2

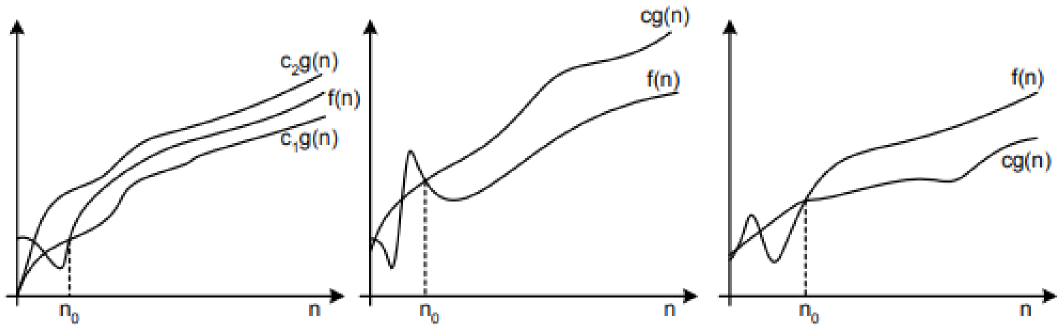
Nositelj: izv.prof.dr.sc Matko Šarić
Suradnici u nastavi:

- asistent Jurica Đerek, mag.ing.
- asistent Matija Pauković, mag.ing.

Uvod u vježbu 2

U ovoj vježbi ćemo pokazati način računanja kod O označavanja i računanje suma iz petlji.

Θ-označavanjem asimptotski ograničavamo funkciju i od gore i od dolje. Kada nas zanima samo gornja granica tada koristimo O-označavanje (notaciju).
Definicija: Za danu funkciju g(n), definiramo O(g(n)) kao skup funkcija:
O (g (n) = { f (n) :
postoje pozitivne konstante c i n_0 takve da je $0 \le f(n) \le cg(n)$ za sve $n \ge n_0$ }



$f(n) = \Theta(g(n))$ $f(n) = O(g(n))$ $f(n) = \Omega(g(n))$

Slika: Ilustracija Θ-označavanja, O-označavanja i Ω-označavanja

Algoritam s puno ugniježđenih složenih petlji se rješava tako da se svaka petlja napiše kao suma te se nakon toga izračuna ta suma.

Vježba 2

1. Pokažite da je $4n^2 + 2n - 3 = O(2n^2 - 4n + 1)$ koristeći definiciju O označavanja.

2. Promotrite sljedeći dio koda:

```
for i=1 to n do
        for j=i to 3*i+1 do
                output "izlaz"
```

Neka je T(n) broj ispisa riječi "izlaz" kao funkcija n. Izrazite T(n) kao sumu i riješite tu sumu. Napišite točno rješenje i asimptotsku granicu.

3. Promotrite sljedeći dio koda:

```
i=0
while (i <= n) do
        for j = 1 to i do
                for k = 1 to i/2
                        output («izlaz»)
        i = i + 2
```

Neka je T(n) broj ispisa riječi "izlaz" kao funkcija n. Izrazite T(n) kao sumu i riješite tu sumu. Napišite točno rješenje i asimptotsku granicu.

4. Izračunajte koliko se puta, kao funkcija od n (za $n \geq 1$), izvrši naredba output. Napišite točno rješenje i asimptotsku granicu. Pretpostavite da je n potencija broja 2.

```
i=n
while (i>=1) do
        for j = 1 to 4*i+2 do
                output("izlaz")
        i=i/2
```

Neka je T(n) broj ispisa riječi "izlaz" kao funkcija n. Izrazite T(n) kao sumu i riješite tu sumu. Napišite točno rješenje i asimptotsku granicu.

2. vježba

(1.) Pokažite da je $4n^2+2n-3=O(2n^2-4n+1)$ koristeći definiciju O označavanja

Definicija O označavanja:

→ Za danu funkciju $g(n)$ definiramo $O(g(n))$ kao skup funkcija:

$$O(g(n)) = \{ f(n): \text{postoje pozitivne konstante } c \text{ i } n_0 \text{ takve da vrijedi: } 0 \leq f(n) \leq c\,g(n) \text{ za } \forall n \geq n_0 \}$$

$$\underbrace{4n^2+2n-3}_{f(n)} = O(\underbrace{2n^2-4n+1}_{g(n)})$$

(A) $4n^2+2n-3 \leq c(2n^2-4n+1)$

(B) $4n^2+2n-3 \geq 0$

Ⓐ $4n^2+2n-3 \leq C(2n^2-4n+1)$

$\Rightarrow$ pretpostaviti C tako da vrijednost desne strane nejednakosti bude malo veća od lijeve (neka vam vrijednost zaokruženih brojeva bude vodilja)

$C=3$

$4n^2+2n-3 \leq 3(2n^2-4n+1)$

$4n^2+2n-3 \leq 6n^2-12n+3$

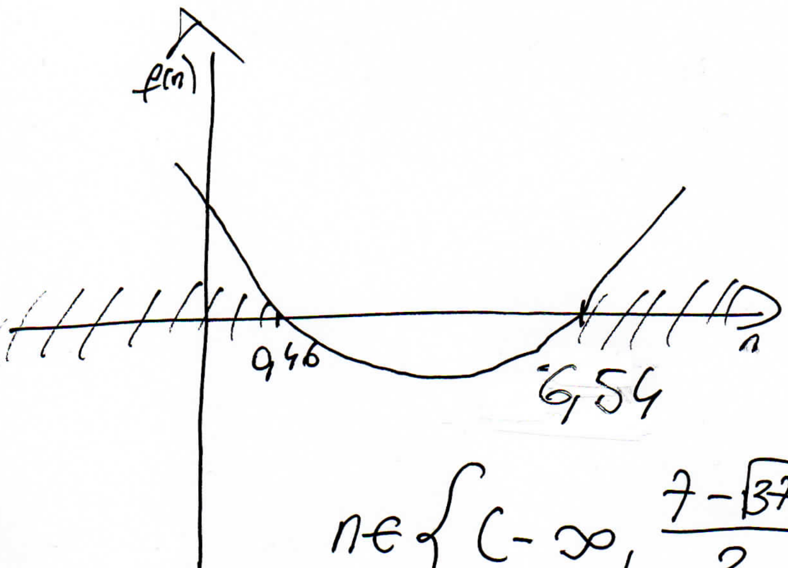
$-2n^2+14n-6 \leq 0 \quad / :(-2)$

$n^2-7n+3 \geq 0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$n_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-4\cdot 3}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{37}}{2}$$

$$n_1=\frac{7-\sqrt{37}}{2}\approx 0,46 \qquad n_2=\frac{7+\sqrt{37}}{2}\approx 6,54$$



$$n\in\left\{\left(-\infty,\frac{7-\sqrt{37}}{2}\right]\cup\left[\frac{7+\sqrt{37}}{2},+\infty\right)\right\}$$

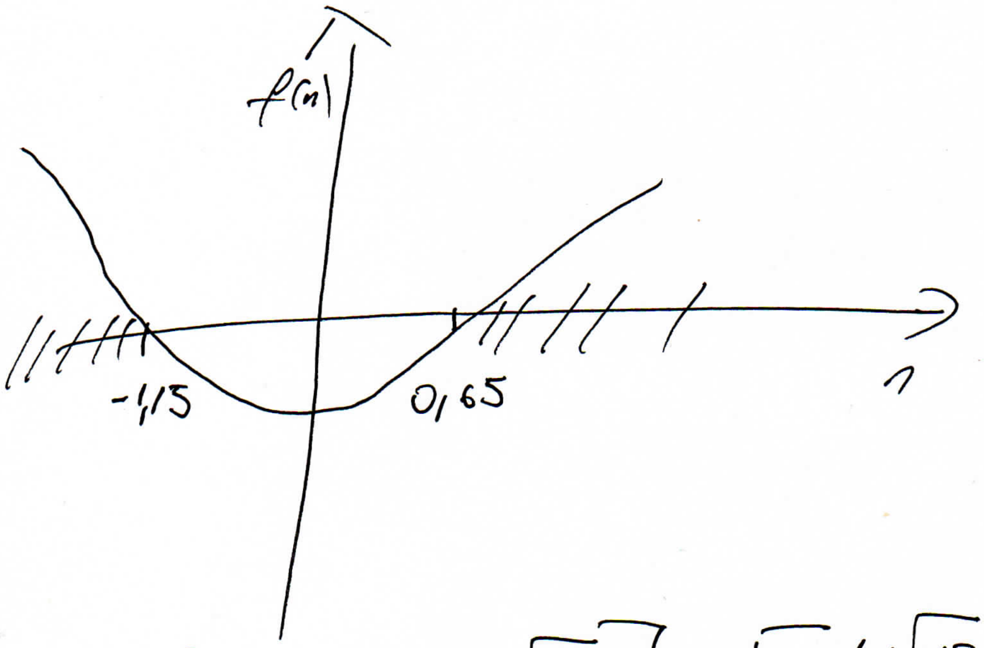
(B) $4n^2+2n-3 \geq 0$

$$n_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\cdot 4\cdot(-3)}}{8} = \frac{-2\pm\sqrt{52}}{8} = \frac{-2\pm\sqrt{4\cdot 13}}{8} =$$

$$= \frac{-2\pm 2\sqrt{13}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{4}$$

$$n_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{4} \qquad n_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{4}$$

$$n_1 \approx -1{,}15 \qquad n_2 \approx 0{,}65$$



$$n \in \left\{ \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{13}}{4}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{4}, +\infty\right) \right\}$$

(A) + (B) $\qquad n \geq \frac{7+\sqrt{37}}{2}$

$$\underline{n_0 = 7}$$

② Promotrite sljedeći dio koda:

$$T(n)\left\{\begin{array}{l}\text{for } i=1 \text{ to } n \text{ do}\\ \quad M(i)\left\{\begin{array}{l}\text{for } j=i \text{ to } 3*i+1 \text{ do}\\ \quad\quad \text{output "izlaz"}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Neka je $T(n)$ broj ispisa riječi „izlaz" kao funkcija n. Izrazite $T(n)$ kao sumu i riješite tu sumu. Napišite točno rješenje i asimptotsku granicu.

$\boxed{\text{petlja} \Longleftrightarrow \text{suma}}$

→ vrijeme izvršavanja unutar petlje je konstantno!

$$M(i)=\sum_{j=i}^{3i+1} 1$$

$$i=1 \longrightarrow \sum_{j=1}^{3\cdot 1+1=4} 1 = 1+1+1+1 = 4$$

$$i=2 \Rightarrow \sum_{j=2}^{3\cdot 2+1=7} 1 = 1+1+1+1+1+1 = 6$$

$$i=3 \rightarrow \sum_{j=3}^{10} 1 = 1+1+1+1+1+1+1+1 = 8$$

$$M(i) = \sum_{j=i}^{3i+1} 1 = 3i+1 - (i-1) = 2i+2$$

gornja granica

Ako oduzmemo gornju od donje granice, dobit ćemo broj koji je za 1 manji od broja vrtnji petlje.
Npr. za $i=3$ kad oduzmemo $10-3$ dobijemo 7, a suma je u stvarnosti 8.

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} M(i) = \sum_{i=1}^{n} 2i+2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2i + \sum_{i=1}^{n} 2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(1+n) = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} i + 2\sum_{i=1}^{n} 1 =$$

$$= 2\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) + 2n = n^2 + n + 2n = n^2 + 3n$$

DOMINANTNI ČLAN

$$\Theta(n^2)$$

3. Promotrite sljedeći dio koda:

```
i = 0
while (i <= n) do
    for j = 1 to i do
        for k = 1 to i/2
            output ("izlaz")
    i = i + 2
```

Neka je $T(n)$ broj ispisa riječi „izlaz" kao funkcija n. Izrazite $T(n)$ kao sumu i riješite tu sumu. Napišite točno rješenje i asimptotsku granicu.

```
i = 0
while (i <= n) do                                  } T(n)
    for j = 1 to i do                   } M(i)
        for k = 1 to i/2     } k(i)
            output ("izlaz")
    i = i + 2
```

$\underline{k(i):}$

$$k(i)=\sum_{k=1}^{i/2} 1=\frac{i}{2}$$

$\underline{M(i):}$

$$M(i)=\sum_{j=1}^{i} 1\,k(i)=i\cdot k(i)=i\cdot\frac{i}{2}=\frac{i^2}{2}$$

$\underline{T(n):}$

$$T(n)=\sum_{i=0}^{n} M(i)=\sum_{i=0}^{n}\frac{i^2}{2}$$

→ ne ide od 0 do n zbog koraka iteracije

→ ide $i=i+2$ $\left\{\begin{array}{l}\text{ako je } n=8, \text{ za } i=i+1, \; i=0,1,2\dots,8 \rightarrow \text{ petlja se vrti 9 puta} \\ \text{za } i=i+2 \;\; i=0,2,4,6,8 \rightarrow \text{ petlja se vrti 5 puta}\end{array}\right.$

→ zbog toga umjesto $0\to n$ ide $0\to\frac{n}{2}$

→ postoji pravilo:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

→ naš izraz ide od 0. Prilagodit ćemo $T(n)$!

→ nije isto je li n paran ili neparan !

$\boxed{\text{Za parni } n:}$

$i = 2e \qquad e = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$

① $2e = 0$, $e = 0$ (početak sume)

② $n = 2e$, $e = \frac{n}{2}$ (gornja granica)

SUPSTITUCIJA

$$T(n) = \sum_{e=0}^{n/2} \frac{(2e)^2}{2} = \sum_{e=0}^{n/2} 2e^2 = 2\sum_{e=0}^{n/2} e^2 =$$

$$= 2 \cdot \frac{2 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n}{2}}{6} =$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{12}$$

$\boxed{\text{Za neparni } n}$ (u izrazu za parni zamijeniti n s $n-1$)

$$T(n) = 2\sum_{e=0}^{n/2} e^2 = \frac{(n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 2(n-1)}{12}$$

dominantni član je n^3 pa je

$\Theta(n^3)$

④ Izračunajte koliko se puta, kao funkcija od n (za $n \geq 1$), izvrši naredba output. Napišite točno rješenje i asimptotsku granicu. Pretpostavite da je n potencija broja 2.

$2^n \Rightarrow$ potencija broja 2

```
i = n
while (i>=1) do
    for j=1 to 2i do
        output "izlaz"
    i = i/2
```

$M(i)$

$T(n)$

za $n=16$

$\Rightarrow$ uz $i=i-2$, $i=16,14,12,\dots,2$ $\Rightarrow$ petlja se vrti 8 puta

$\Rightarrow$ uz $i=i/2$, $i=16,8,4,2,1$ $\Rightarrow$ petlja se vrti 5 puta

$$M(i)=\sum_{j=1}^{2i} 1 = 2i$$

$$T(n)=\sum_{i=1}^{n} 2i \longrightarrow \text{SUPSTITUCIJA !}$$

$i=2^e$
$1=2^e \,/ld$
$e=0$

$n=2^e \,/ld$
$ldn=e$
$e=ldn$

$$T(n) = \sum_{e=0}^{ldn} 2 \cdot 2^{e} = 2 \cdot \sum_{e=0}^{ldn} 2^{e}$$

geometrijski red:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x^{i} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}}$$

$$T(n) = 2 \cdot \frac{2^{ldn+1} - 1}{2 - 1} = 2 \cdot 2 \cdot 2^{ldn} - 2 =$$

$$= 4n - 2 \qquad \left(2^{\log_2 n} = n\right)$$

$$\Theta(n)$$