

p -adische Zahlen

Dozent: Dr. Lei Zhang

April 22, 2017

REFERENCES

- [Gou] p -adic numbers, Fernando Q. Gouvea, Springer-Verlag, 1993.
- [Kob] p -adic numbers, p -adic analysis, and zeta-functions, Neal Koblitz, GTM 58, Springer-Verlag, 1984.
- [Lang] Algebra, Serge Lang, GTM211, Springer-Verlag, 2002.
- [Ser] Local Fields, Jean-Pierre Serre, GTM 67, Springer-Verlag, 1979.

Voraussetzung zur Teilnahme:

- (1) Die Teilnehmer sollten mit linearer Algebra vertraut sein, etwa im Umfang der Vorlesung 'Lineare Algebra 1' und nach Möglichkeit auch 'Lineare Algebra 2'.
- (2) Die Teilnehmer sollten mit den Grundbegriffe der Topologie (allgemeine Topologie) vertraut sein.
- (3) Eine Vertraulichkeit mit den Grundbegriffe der Analysis wäre auch gut.

1 ÜBERSICHT UND AUFGABEN (21/04/2017) LEI ZHANG

Ziel: EINE EINFÜHRUNG ZU p -ADISCHEN ZAHLEN MACHEN UND DIE AUFGABEN VERTEILEN.

2 ABSOLUTBETRAG (28/04/2017) LEI ZHANG

Ziel: EINE EINFÜHRUNG ZUM ARCHIMEDISCHEN BETRAG UND ZUM NICHT-ARCHIMEDISCHEN BETRAG.

- (1) Geben Sie die Definitionen für den archimedischen und Betrag und den nicht-archimedischen Betrag.
- (2) Führen Sie Beispiele vor, insbesondere das Beispiel des p -adischen betrags von \mathbb{Q} .
- (3) Beweisen Sie [Gou, Theorem 2.2.2 and Corollary 2.2.3].

3 DIE TOPOLOGIE EINES BEWERTETEN KÖRPERS (05/05/2017) LEI ZHANG

Ziel: EINE EINFÜHRUNG ZUR VOM BETRAG EINS KÖRPERS INDUZIERTER TOPOLOGIE

- (1) Zunächst nutzen Sie den Absolutbetrag, die Metrik zu definieren. Und dann nutzen Sie die Metrik, eine Topologie für einen Körper zu definieren.
- (2) Führen Sie die besondere Eigenschaften der von einem nicht-archimedischen Betrag induzierte Topologie ein. Hierbei können Sie [Gou, Lemma 2.3.2, Proposition 2.3.3 and Proposition 2.3.6] oder [Kob, pp.5-6] folgen.
- (3) Beweisen Sie, dass die von einem bewerteten Körper induzierte topologie total unzusammenhängend ist[Gou, Proposition 2.3.8].

4 DIE BEWERTUNGSRING (12/05/2017) ADRIAN

Ziel: EINE EINFÜHRUNG ZUM BEWERTUNGSRING EINES NICHT-ARCHIMEDISCHEN BEWERTETEN KÖRPERS.

- (1) Erst definieren Sie den Bewertungsring eines nicht-archimedischen bewerteten Körpers. Dafür können Sie zum Beispiel [Gou, Definition 2.4.2] folgen.
- (2) Geben Sie die Definition eines diskreten Bewertungsring. Hierbei können Sie [Ser, Chapter I, §1] oder [Lang, Chapter XII, §6] folgen.
- (3) Beweisen Sie dass die p -adische Bewertung für \mathbb{Q} eine diskrete Bewertung.

5 ABSOLUTBETRÄGE FÜR \mathbb{Q} (19/05/2017) JOHANNES

Ziel: DER VORTRAG BEFASST SICH MIT DEN VERSCHIEDENEN BETRÄGE FÜR \mathbb{Q} UND DEREN VERVOLLSTÄNDIGUNG.

- (1) Erläutern Sie den Satz, dass es nur drei verschiedenen Typen der Beträge für \mathbb{Q} gibt. Hierbei können Sie [Gou, Theorem 3.1.3] oder [Kob, pp.3, Theorem 1] folgen.

- (2) Beweisen Sie, dass \mathbb{Q} nicht vollständig für keine von ihren Beträgen ist [Gou, Lemma 3.2.3].

6 DIE KONSTRUKTION DES p -ADISCHEN KÖRPER (26/05/2017)

MARKOU

Ziel: HIERBEI KONSTRUIEREN WIR DEN p -ADISCHEN KÖRPER.

- (1) Geben Sie die Definition des p -adischen Körper \mathbb{Q}_p nach [Gou, §3.2]. Es ist empfehlenswert dass Sie [Lang, Chapter XII, §2] durchgehen, weil sie allgemeiner und schöner ist.
- (2) Erläutern Sie die grundlegende Eigenschaften des p -adischen Körpers. Bitte gehen Sie [Gou, Theorem 3.2.13] durch.

7 WEITERE EINGENSCHAFTEN BEIM p -ADISCHEN KÖRPER (02/06/2017)

Ziel: STUDIEREN WIR WEITERE EINGENSCHAFTEN BEIM p -ADISCHEN KÖRPER.

- (1) Gehen Sie [Gou, 3.3.4 - 3.3.12] durch.

8 HENSELS LEMMA (09/06/2017)

Ziel: HIER STUDIEREN WIR HENSELS LEMMA FÜR p -ADISCHEN KÖRPER.

- (1) Führen Sie Hensels Lemma bei einem p -adischen Körper nach [Gou, Theorem 3.4.1] or [Kob, pp.16, Theorem 3] ein. Dann spielen Sie damit, z.B. [Gou, Proposition 3.4.2] oder [Kob, pp.14-15].
- (2) Erklären Sie die übliche Form vom Hensels Lemma nach [Gou, Theorem 3.4.6].
- (3) Geben Sie eine kurzgefasste Einführung zum Lokal-Global-Prinzip.

9 DIE ANALYSIS BEI p -ADISCHE ZAHLEN (16/06/2017)

Ziel: WIR MACHEN ANALYSIS FÜR p -ADISCHE ZAHLEN, WIE WIR SCHON MAL FÜR DIE REELLEN ZAHLEN UND DIE KOMPLEXE ZAHLEN GEMACHT HABEN.

- (1) Beweisen Sie, dass in der p -adischen Welt eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent ist genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ gleich 0 ist. Geben Sie auch ein Beispiel, dass die gleiche Aussage bei archimedischen Betrag falsch ist.
- (2) Definieren Sie Differentialrechnung in der p -adischen Welt und erläutern Sie in Kürze warum *der Mittelwertsatz* funktioniert nicht für p -adische Zahlen.
- (3) Konstruieren Sie den Konvergenzradius für die Potenzreihe in der p -adischen Welt [Gou, Proposition 4.3.1].

10 p -ADISCHE POTENZREIHE (I) (23/06/2017)

Ziel: ERSTE EIGENSCHAFTEN DER p -ADISCHEN POTENZREIHEN

- (1) Beweisen Sie, dass die Konvergenz der Potenzreihe in der p -adischen Welt stabil unter der Addition, der Multiplikation und der Komposition ist. Sehen Sie [Gou, Proposition 4.3.2, Theorem 4.3.3].
- (2) Nun studieren wir die Bruchrechnung der Potenzreihen. Beweisen Sie [Gou, Lemma 4.4.1, Proposition 4.4.2].

11 p -ADISCHE POTENZREIHE (II) (30/06/2017)

Ziel: SPIELEN WIR MIT p -ADISCHEN POTENZREIHEN UND GEBEN SIE BEISPIELEN.

- (1) Gehen Sie [Gou, Proposition 4.4.3, Proposition 4.4.4, Corollary 4.4.5] durch.
- (2) Führen Sie die p -adische Version der Logarithmusfunktion und der Exponentialfunktion ein. Sehen Sie [Gou, §4.5].

12 NORM FÜR EINEN ENDLICHEN VEKTORRAUM ÜBER EINEN VOLLSTÄNDIGEN BEWERTETEN KÖRPER (07/07/2017)

Ziel: HIER STUDIEREN WIR DIE NORM FÜR EINEN ENDLICHEN VEKTORRAUM ÜBER EINEN VOLLSTÄNDIGEN BEWERTETEN KÖRPER.

- (1) Definieren Sie die Norm für einen endlichen Vektorraum über einen vollständigen bewerteten Körper, und nehmen Sie Sup-Norm und r -Norm [Gou, pp.120] als Beispiele.
- (2) Beweisen Sie, dass die Sup-Norm für einen endlichen Vektorraum über einen vollständigen bewerteten Körper ist immer vollständig.
- (3) Zeigen Sie dass alle Normen für einen endlichen Vektorraum über einen vollständigen bewerteten Körper äquivalent sind und sind sie somit alle vollständig, [Gou, Theorem 5.2.1] oder [Lang, Chapter XII, Proposition 2.2.].

13 ENDLICHE ERWEITERUNG VOM p -ADIC KÖRPER (14/07/2017)

Ziel: DEFINIEREN WIR EINEN ABSOLUTBETRAG FÜR EINE ENDLICHE ERWEITERUNG EINES p -ADISCHEN KÖRPERS.

- (1) Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Absolutbetrag für eine Erweiterung von \mathbb{Q}_p gibt, der mit den Absolutbetrag von \mathbb{Q}_p kompatibel ist, und ist der Absolutbetrag vollständig. Folgen Sie [Lang, Proposition 2.5] oder [Gou, §5.3].

14 DIE VERVOLLSTÄNDIGUNG DES ALGEBRAISCHEN ABSCHLUSS EINES p -ADISCHEN KÖRPER (21/07/2017)

Ziel: WIR ZEIGEN DASS $\bar{\mathbb{Q}}_p$ NICHT VOLLSTÄNDIG IST, UND DASS DIE VERVOLLSTÄNDIGUNG DES ALGEBRAISCHEN ABSCHLUSS VON \mathbb{Q}_p ABGESCHLOSSEN IST.

Gehen Sie [Gou, Theorem 5.7.4] oder [Kob, pp.71, Theorem 12], [Gou, Theorem 5.7.8] oder [Kob, pp.72, Theorem 13] durch.