:

Phần II
Vị từ và lượng từ

1

Vị từ và lượng từ

- Định nghĩa:

Cho A là một tập hợp khác rỗng. Giả sử, ứng với mỗi x = a ∈ A ta có một mệnh đề p(a). Khi đó, ta nói p = p(x) là một vị từ theo một biến (xác định trên A)

2

Vị từ và lượng từ

- Định nghĩa:

Tổng quát, cho A_1, A_2, A_3…là n tập hợp khác trống. Giả sử rằng ứng với mỗi $(x_1,x_2,..,x_n) = (a_1,a_2,..,a_n) \in A_1\times A_2\times \ldots \times A_n$, ta có một mệnh đề $p(a_1,a_2,..,a_n)$. Khi đó ta nói $p = p(x_1,x_2,..,x_n)$ là một vị từ theo n biến(xác định trên $A_1\times A_2\times \ldots \times A_n$)

3

Predicates and Quantifiers

Propositional functions or predicates are propositions which contain variables

Example Let P denote the Predicate "is greater than 0" and P(x) denote "x > 0"
x is called a variable

The predicate become a proposition once the variable x has been assigned a value.

Example

What is the truth value of p(5), p(0) and p(-2)?

"5>0" is true, "0>0" is false and "-2>0" is false

4

Vị từ và lượng từ

- Ví dụ 1:

  Xét p(n) = "n > 2" là một vị từ một biến xác định trên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$.

  Ta thấy với n = 3; 4 ta được các mệnh đề đúng p(3), p(4), còn với n = 0,1 ta được mệnh đề sai p(0), p(1).

5

Vị từ và lượng từ

- Ví dụ 2

  Xét p(x,y) = "$x^2 + y = 1$" là một vị từ theo hai biến xác định trên $\mathbb{R}^2$, ta thấy p(0,1) là một mệnh đề đúng, trong khi p(1,1) là một mệnh đề sai.

6

Examples

Example:
Let Q(x,y) denote the statement "y =x + 2".
What is the truth value of
Q(2,4,) and Q(4, 1)
"4 = 2+2" is true and "1 = 4+2" is false

Q(2,y) $\vee$ $\neg$Q(0,3) is a proposition???
Q(1,3) $\vee$ $\neg$Q(0,1) is a proposition ???

Q(2,y) $\vee$ $\neg$Q(0,3) is not a proposition: y is not bounded
Q(1,3) $\vee$ $\neg$Q(0,1) is a proposition which is true

7

Vị từ và lượng từ

- Định nghĩa: Cho trước các vị từ p(x), q(x) theo một biến x $\in$ A. Khi ấy,
  - *Phủ định của vị từ* p(x) kí hiệu là $\neg$p(x) là vị từ mà khi thay x bởi một phần tử cố định của A thì ta được mệnh đề $\neg$(p(a))
  - *Phép nối liền(tương ứng nối rời, kéo theo…)* của p(x) và q(x) được ký hiệu bởi p(x) $\wedge$ q(x)(tương ứng là p(x)$\vee$q(x), p(x)$\rightarrow$q(x)) là vị từ theo biến x mà khi thay x bởi phần tử cố định a của A ta được mệnh đề

    p(a)$\wedge$ q(a) (tương ứng là p(a) $\vee$ q(a), p(a)$\rightarrow$q(a))

8

Vị từ và lượng từ

- Định nghĩa:
  Cho p(x) là một vị từ theo một biến xác định trên A. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x) như sau:
  - Mệnh đề "Với mọi x thuộc A,p(x)", kí hiệu bởi "$\forall x \in A$, p(x)", là mệnh đề được định bởi "$\forall x \in A$, p(x)" đúng khi và chỉ khi p(a) luôn đúng với mọi giá trị $a \in A$.
  - Mệnh đề "Tồn tại(ít nhất)(hay có (ít nhất) một x thuộc A, p(x))" kí hiệu bởi :"$\exists x \in A$, p(x)" , là mệnh đề được định bởi "$\exists x \in A$, p(x)" đúng khi và chỉ khi có ít nhất một giá trị $x = a_0$ nào đó sao cho mệnh đề $p(a_0)$ đúng.
- Chú ý: Các mệnh đề lượng từ hóa ở trên đều là các mệnh đề có chân trị xác định chứ không còn là các vị từ theo biến x nữa.

Universe of Discourse

Question
Let **R** be the three-variable predicate **R**(x,y,z):
x+y = z
Find the truth value of
R(2,-1,5), **R**(3,4,7) **R**(x,3,z)

A universe of discourse (U) is a domain for the variables of a propositional function.

Example
Let U = Z, the integers = {…, -2, -1, 0, 1, 2, …}

Universal quantifier

The Universal Quantifier of *P(x):*
is the proposition
"P(x) is true for every x in the universe of discourse"
Notation: $\forall x\, P(x)$
`For all x, P(x)' `For every x, P(x)'

Example:
U = {1, 2, 3} $\forall x\, P(x) \Leftrightarrow P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$
Example
What is the truth value of $\forall x\, P(x)$ if P(x) is "3x <10"and U is positive integers not exceeding 4

$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$ is false

Existential quantifier

The Existential Quantifier of P(x):
is the proposition
"P(x) is true for some x in the universe of discourse"
Notation: $\exists x\, P(x)$
'For some x P(x)' 'For at least an x in P(x)'

Example:
U = {1, 2, 3}, $\exists x\, P(x) \Leftrightarrow P(1) \vee P(2) \vee P(3)$
Example
What is the truth value of $\exists x\, P(x)$ if P(x) is "3x <10"and U is positive integers not exceeding 4

$P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$ is True

Vị từ và lượng từ

1) Mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 1 \leq 0$" là một mệnh đề sai hay đúng ?

Mệnh đề sai vì tồn tại $x_0 = 1 \in \mathbb{R}$ mà $x_0^2 + 3x_0 + 1 > 0$

2) Mệnh đề "$\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x + 1 \leq 0$" là một mệnh đề đúng hay sai?

Mệnh đề đúng vì tồn tại $x_0 = -1 \in \mathbb{R}$ mà $x_0^2 + 3x_0 + 1 \leq 0$.

13

Vị từ và lượng từ

Mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 2x$" là một mệnh đề đúng hay sai?

Mệnh đề đúng vì với $\forall x \in \mathbb{R}$, , ta luôn luôn có

$x^2\text{-}2x + 1 \geq 0$

Mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 0$" là một mệnh đề đúng hay sai?

14

Vị từ và lượng từ

- Định nghĩa:

Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên A×B. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x, y) như sau:

"$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" = "$\forall x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" = "$\forall x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" = "$\exists x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" = "$\exists x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

15

Vị từ và lượng từ

Xét vị từ p(x, y) = "$x + 2y < 1$" theo hai biến x, y xác định trên $\mathbb{R}^2$

Mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + 2y < 1$" đúng hay sai?

Mệnh đề sai vì tồn tại $x_0 = 0, y_0 = 1 \in \mathbb{R}$ mà $x_0 + 2y_0 \geq 1$.

Mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + 2y < 1$" đúng hay sai?

Mệnh đề đúng vì với mỗi $x = a \in \mathbb{R}$, tồn tại $y_a \in \mathbb{R}$ như $y_a = -a/2$, sao cho $a + 2y_a < 1$.

16

Vị từ và lượng từ

Mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + 2y < 1$" đúng hay sai

Mệnh đề sai vì không thể có $x = a \in \mathbb{R}$ để bất đẳng thức $a + 2y < 1$ được thỏa với mọi $y \in \mathbb{R}$ (chẳng hạn, $y = -a/2 + 2$ không thể thỏa bất đẳng thức này).

Mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + 2y < 1$" đúng hay sai?

Mệnh đề đúng vì tồn tại $x_0 = 0, y_0 = 0 \in \mathbb{R}$ chẳng hạn thỏa $x_0 + 2y_0 < 1$.

17

Translate into English

Example

Translate the statement

$\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x,y)))$ into English

Where C(x) is "x has a computer"

F(x,y) is "x and y are friends"

and U is x and y are students in your school

For every student x in your school x has a computer or there is a student y such that y has a computer and x and y are friends.

18

Example

Example:Let U = R, the real numbers. P(x,y): xy = 0

$\forall x \forall y$ P(x,y)	False
$\forall x\ \exists y$ P(x,y)	True
$\exists x\ \forall y$ P(x,y)	True
$\exists x\ \exists y$ P(x,y)	True

Example: Let U={1, 2, 3}. Find an expression equivalent to $\forall x\ \exists y$ P(x,y) where the variables are bound by substitution instead:

Solution: $\exists y\, P(1,y) \wedge \exists y\, P(2,y) \wedge \exists y\, P(3,y) \Leftrightarrow$

$[P(1,1) \vee P(1,2) \vee P(1,3)] \wedge$

$[P(2,1) \vee P(2,2) \vee P(2,3)] \wedge$

$[P(3,1) \vee P(3,2) \vee P(3,3)]$

19

Vị từ và lượng từ

Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên A×B. Khi đó:

1) "$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$"
   $\Leftrightarrow$ "$\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)$"

2) "$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$"
   $\Leftrightarrow$ "$\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"

3) "$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$"
   $\Rightarrow$ "$\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"

Chiều đảo của 3) nói chung không đúng.

20

Vị từ và lượng từ

- Chứng minh 3)

Giả sử "∃x ∈ A, ∀y ∈ B, p(x, y)" là đúng. Khi đó, tồn tại a ∈ A sao cho "∀y ∈ B, p(x, y)" là đúng, nghĩa là nếu thay y = b ∈ B bất kỳ thì p(a,b) đúng. Như vậy, y = b ∈ B tuỳ chọn thì ta có thể chọn x = a để "∃x ∈ A, p(x, y)" là đúng. Do đó, "∀y ∈ B, ∃x ∈ A, p(x, y)" là mệnh đề đúng.

21

Ví dụ thể hiện chiều đảo của 3 là chưa chắc đúng:

- Gọi p(x,y) là vị từ theo 2 biến thực
  p(x,y) = "x + y = 1",
- Nếu thay y tuỳ ý thì x = 1 - y để cho x + y = 1 nên mệnh đề ∃x ∈ A, p(x, y) là đúng.
  Nên mệnh đề "∀y∈ B, ∃x ∈ A, p(x, y)" là đúng.
- Ngược lại, nếu chọn x = a tuỳ ý, ta có thể chọn y = -a để "∀y ∈ B, p(x, y)" là sai.
  Điều này chứng tỏ, "∃x ∈ A, ∀y ∈ B, p(x, y)" là sai.
- Do đó, phép kéo theo sau là sai:
  "∀y ∈ B, ∃x ∈ A, p(x, y)" -> "∃x ∈ A, ∀y ∈ B, p(x, y)"

22

Vị từ và lượng từ

- Trong một mệnh đề lượng từ hoá từ một vị từ theo nhiều biến độc lập, nếu ta hoán vị hai lượng từ đứng cạnh nhau thì:
  1. Mệnh đề mới vẫn còn tương đương logic với mệnh đề cũ nếu hai lượng từ này cùng loại.
  2. Mệnh đề mới này sẽ là một hệ quả logic của mệnh đề cũ nếu hai lượng từ trước khi hoán vị có dạng ∃ ∀

23

Vị từ và lượng từ

Định lý:

a) Với p(x) là một vị từ theo một biến xác định trên A, ta có:

$$\overline{\forall x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \overline{p(x)}$$

$$\overline{\exists x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \overline{p(x)}$$

b) Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa từ vị từ $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ có được bằng cách thay lượng từ ∀ bằng lượng từ ∃ và ngược lại, và thay vị từ $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ bằng vị từ .

$$\overline{p(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

24

Negation

Equivalence involving the negation operator

$\neg\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$

$\neg\exists x\ P(x) \Leftrightarrow \forall x\ \neg P(x)$

Multiple Quantifiers: read from left to right

25

Vị từ và lượng từ

Phủ định của mệnh đề "Hôm nay, mọi sinh viên lớp TH1đều có mặt" là gì ?

"Hôm nay, có (ít nhất) một sinh viên lớp TH1vắng mặt".

Phủ định của mệnh đề "Trong lớp TH2có (ít nhất một) sinh viên được thưởng" là gì?

"Trong lớp TH2không có sinh viên nào được thưởng".

26

Vị từ và lượng từ

Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in A, 2x + 1 \le 0$" là gì ?

Phủ định của mệnh đề trên là "$\exists x \in A, 2x + 1 > 0$".

Phủ định của mệnh đề

"$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R, |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$".

(điều kiện để hàm số f(x) liên tục tại x = a)

Phủ định của mệnh đề trên là:

"$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in R, |x - a| < \delta \wedge (|f(x) - f(a)| \ge \varepsilon)$".

27

Vị từ và lượng từ

Qui tắc đặc biệt hoá phổ dụng:

Nếu một mệnh đề đúng có dạng lượng từ hoá trong đó một biến $x \in A$ bị buộc bởi lượng từ phổ dụng $\forall$, khi ấy nếu thay thế x bởi $a \in A$ ta sẽ được một mệnh đề đúng.

28

Vị từ và lượng từ

Ví dụ:

“Mọi người đều chết”

“Socrate là người”

Vậy “Socrate cũng chết”

29

Vị từ và lượng từ

- Qui tắc tổng quát hoá phổ dụng:

  Nếu trong một mệnh đề lượng từ hoá, khi thay một biến buộc bởi lượng từ $\forall$ bằng một phần tử cố định nhưng tuỳ ý của tập hợp tương ứng mà mệnh đề nhận được có chân trị 1 thì bản thân mệnh đề lượng từ hoá ban đầu cũng có chân trị 1.

30

Inference Rules for Quantifiers

- $\dfrac{\forall x\, P(x)}{\therefore P(o)}$ Universal instantiation (substitute *any* object o)
- $\dfrac{P(g)}{\therefore \forall x\, P(x)}$ (for g a *general* element of u.d.) Universal generalization
- $\dfrac{\exists x\, P(x)}{\therefore P(c)}$ Existential instantiation (substitute a *new constant* c)
- $\dfrac{P(o)}{\therefore \exists x\, P(x)}$ (substitute any extant object o) Existential generalization

31

Example

Every man has two legs, John Smith is a man.
Therefore, John Smith has two legs.

Predicates: M(x): x is a man
L(x): x has two legs
J: John Smith is a member of the universe

1. $\forall x[M(x) \to L(x)]$
2. M(J) $\therefore$ L(J)

Proof	1. $\forall x[M(x) \to L(x)]$	Hypothesis 1
	2. $M(J) \to L(J)$	Step 1 and UI
	3. M(J)	Hypothesis 2
	4. L(J)	Step 2 and 3 and modus ponens

32

Đề thi

1) Hãy xác đinh chân trị của mệnh đề sau:
a) 2002
$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 - 4x - 5 = 0) \rightarrow (x > 0)$
b) 2004
$\forall x \in \mathbb{R}, (x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0) \leftrightarrow (x^2 - 3x + 2 = 0)$

2) 2003
Lấy phủ định của mệnh đề sau:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in \mathbb{R}, (|x - x'| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$

33

Đề thi

3) Kiểm tra tính đúng đắn của suy luận sau:
a) 2005
$\forall x \in \mathbb{R} (P(x) \vee Q(x))$
$\forall x \in \mathbb{R} (\neg P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))$

$\therefore \quad \forall x \in \mathbb{R} (\neg R(x) \rightarrow P(x))$

b) 2006
$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \vee \forall x \in \mathbb{R}, Q(x))$
$\exists x \in \mathbb{R}, \neg P(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x)$

34

Đề thi

c) 2007

$\forall\, x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$
$\exists\, x\, (P(x) \wedge \neg R(x))$

$\exists\, x\, (Q(x) \wedge \neg R(x))$
trong đó $P(x)$, $Q(x)$ và $R(x)$ là 3 vị từ

35

Đề thi

4) 2007.Cho biết suy luận sau đúng không ?Tại sao?
$\forall x (P(x) \vee Q(x))$
$\forall x (Q(x) \rightarrow R(x))$
$R(a)$

$\therefore \neg P(a)$
Trong đó P(x), Q(x) và R(x) là 3 vị từ và a là một phần tử của tập vũ trụ

36

Đề thi

5) 2009.

a) Một dãy số thực $\{x_n\}$được nói là thuộc O(n) nếu tồn tại số thực dương C và số tự nhiên m sao cho $|x_n| < Cn$ mỗi khi $n \geq m$. Hãy sử dụng mệnh đề lượng từ hóa để viết lại định nghĩa trên.

b) Viết ra mệnh đề lượng từ hóa cho một dãy số thực $\{x_n\}$ không thuộc O(n).

37

Bài tập

6). Xét chân trị và tìm phủ định của các mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 \leq 0$;
b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 \leq 0$;
c) $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \geq 0$;
d) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \geq 0$;
e) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{N}, x + y \geq 0$;
f) $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \geq 0$;
g) $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \geq 0$;
h) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \geq 0$;

38

Tài liệu tham khảo

- [1]GS.TS Nguyễn Hữu Anh, Toán rời rạc, NXB Giáo dục
- [2]TS. Trần Ngọc Hội, Toán rời rạc
- [3] Dr.Kossi Edoh,Department of Computer Science, Montclair State University
- [4] Michael P.Frank 's slides

39