Cây

Biên soạn: TS.Nguyễn Viết Đông

Cây

1. **ĐN và tính chất**
2. **Cây khung ngắn nhất**
3. **Cây có gốc**
4. **Phép duyệt cây**

Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa Cây.

a) Cho G là đồ thị vô hướng. G được gọi là *một cây* nếu G liên thông và không có chu trình đơn.

b) *Rừng* là đồ thị mà mỗi thành phần liên thông của nó là một cây.

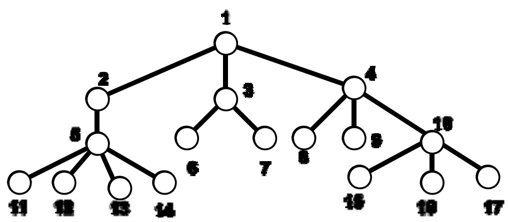
Định nghĩa và tính chất

Điều kiện cần và đủ(cây).

Cho T là đồ thị vô hướng có n đỉnh. Các phát biểu sau đây là tương đương:

i. **T là cây.**
ii. **T liên thông và có n-1 cạnh.**
iii. **T không có chu trình và có n-1 cạnh .**
iv. **T liên thông và mỗi cạnh là một cầu.**
v. **Giữa hai đỉnh bất kỳ có đúng một đường đi nối chúng với nhau.**
vi. **T không có chu trình và nếu thêm vào một cạnh giữa hai đỉnh không kề nhau thì có một chu trình duy nhất.**

Định nghĩa và tính chất



Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa cây khung.

Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng.

T là đồ thị con khung của G.

Nếu T là một cây thì T được gọi là *cây khung*(hay *cây tối đại*, hay *cây bao trùm*) của đồ thị G.

Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa Cây khung ngắn nhất.

Cho G là đồ thị có trọng số. Cây khung T của G được gọi là *cây khung ngắn nhất (cây tối đại ngắn nhất,cây bao trùm ngắn nhất, cây khung tối tiểu)* nếu nó là cây khung của G mà có trọng lượng nhỏ nhất.

Cây khung ngắn nhất

Thuật toán tìm cây khung ngắn nhất

a)Thuật toán Kruscal:

Cho G là đồ thị liên thông, có trọng số, n đỉnh.

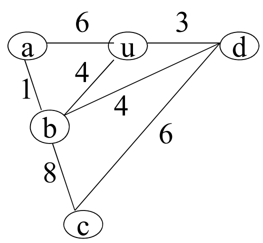
Bước 1. Trước hết chọn cạnh ngắn nhất e_1 trong các cạnh của G.

Bước 2. Khi đã chọn k cạnh $e_1,e_2,\ldots e_k$ thì chọn tiếp cạnh e_{k+1} ngắn nhất trong các cạnh còn lại của G sao cho không tạo thành chu trình với các cạnh đã chọn trước.

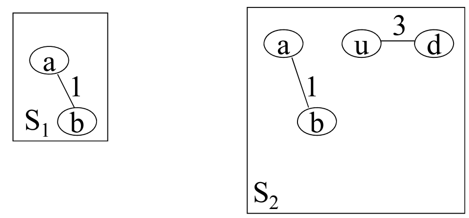
Bước 3. Chọn đủ n-1 cạnh thì dừng.

Cây khung ngắn nhất

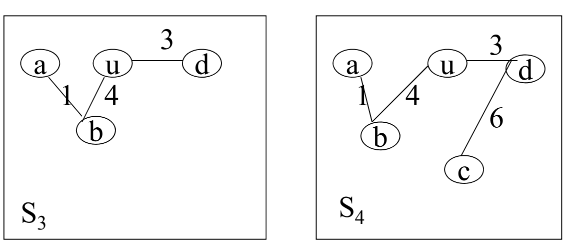
- Ví dụ



II.Cây khung ngắn nhất



Cây khung ngắn nhất



Cây khung ngắn nhất

Thuật toán tìm cây khung ngắn nhất

b)Thuật toán Prim.

Bước 1. Chọn 1 đỉnh bất kỳ v_1 để có cây T_1 chỉ gồm 1 đỉnh.

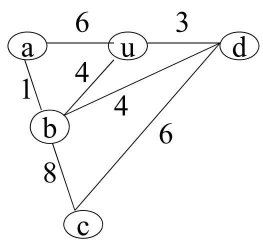
Bước 2. Khi đã chọn cây T_k thì chọn tiếp cây $T_{k+1} = T_k \cup e_{k+1}$. Trong đó e_{k+1} là cạnh ngắn nhất trong các cạnh có một đầu mút thuộc T_k và đầu mút kia không thuộc T_k

Bước 3. Chọn được cây T_n thì dừng.

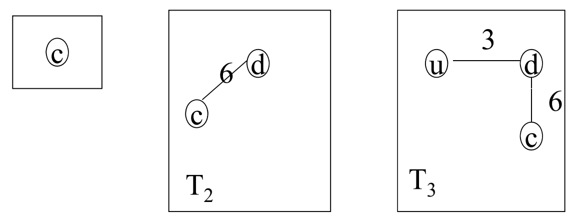
12

Cây khung ngắn nhất

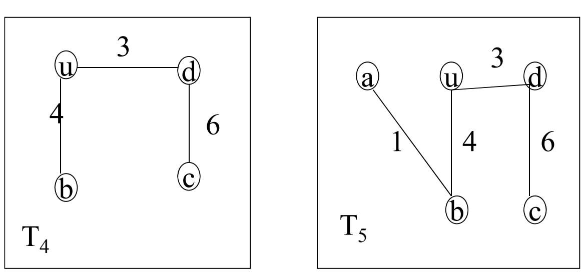
- Ví dụ



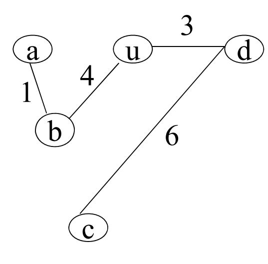
Cây khung ngắn nhất



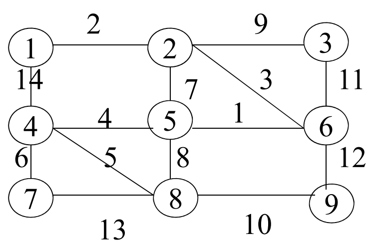
Cây khung ngắn nhất



Cây khung ngắn nhất

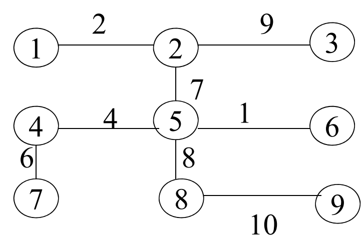


- Đề thi 2004.Hãy trình bày thuật toán tìm cây khung ngắn nhất của G chứa cạnh 58 nhưng không chứa cạnh 26



Cây khung ngắn nhất

- Giải. Đặt G’=G-26 thì cây khungphải tìm là ở trongG’. Đầu tiên chọn cạnh 58 sau đó áp dụng Kruscal như thông thường.



Cây có gốc

Cho T là một cây. Chọn một đỉnh r của cây gọi là *gốc* . Vì có đường đi duy nhất từ gốc tới mỗi đỉnh của đồ thị nên ta định hướng mỗi cạnh là hướng từ gốc đi ra . Cây cùng với gốc sinh ra một đồ thị có hướng gọi là *cây có gốc*

Trong một cây có gốc r thì $deg^-(r) = 0$,

$deg^-(v) = 1$với mọi đỉnh không phải là gốc.

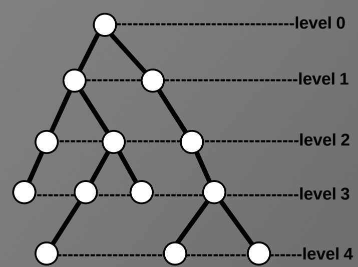
Cây có gốc

Định nghĩa

Cho cây có gốc r.

- Gốc r được gọi là *đỉnh mức 0* (level 0).
- Các đỉnh kề với gốc r được xếp ở phía dưới gốc và gọi là *đỉnh mức 1*(level 1).
- Đỉnh sau của đỉnh mức 1(xếp phía dưới đỉnh mức)gọi là *đỉnh mức 2.* ……
- Level (v) = $k \Leftrightarrow$ đường đi từ gốc r đến v qua k cung.
- *Độ cao của cây* là mức cao nhất của các đỉnh.

Cây có gốc



Cây có gốc

Định nghĩa

Cho cây có gốc r

a) Nếu uv là một cung của T thì u được gọi là *cha của v*,còn *v* gọi là *con của u*.

b) Đỉnh không có con gọi là *lá*(hay *đỉnh ngoài*). Đỉnh không phải là lá gọi là *đỉnh trong*.

c) Hai đỉnh có cùng cha gọi là *anh em*.

Cây có gốc

Định nghĩa

Cho cây có gốc r

d) Nếu có đường đi $v_1v_2\ldots v_k$ thì $v_1, v_2,.., v_{k-1}$ gọi là *tổ tiên của v_k*. Còn v_k gọi là *hậu duệ* của $v_1, v_2,.., v_{k-1}$.

e) Cây con tại đỉnh v là cây có gốc là v và tất cả các đỉnh khác là mọi hậu duệ của v trong cây T đã cho.

Cây có gốc

Định nghĩa

Cho T là cây có gốc.

a) T được gọi là *cây k-phân* nếu mỗi đỉnh của T có nhiều nhất là k con.

b) Cây 2-phân được gọi là *cây nhị phân*.

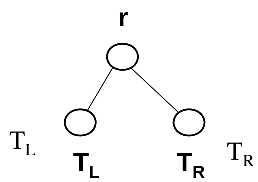
c) Cây k-phân đủ là cây mà mọi đỉnh trong có đúng k con.

d) Cây *k*- phân với độ cao *h* được gọi là *cân đối* nếu các đỉnh đều ở mức *h* hoặc *h – 1* .

Cây có gốc

Định nghĩa

Cho T là cây nhị phân có gốc là r. Ta có thể biểu diễn T như hình vẽ dưới với hai cây con tại r là T_L và T_R ,chúng lần lượt được gọi là *cây con bên trái và cây con bên phải* của T.



25

Cây có gốc

Định nghĩa

Độ dài đường đi trong và độ dài đường đi ngoài

Cho T là cây nhị phân **đủ**.

a) Độ dài đường đi trong là tổng tất cả các mức của các đỉnh trong, ký hiệu IP(T).

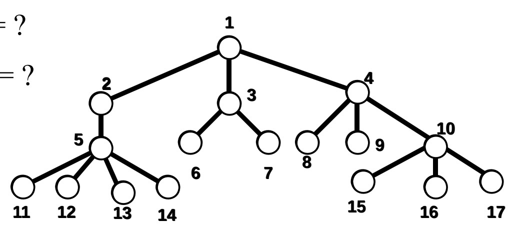
b) Độ dài đường đi ngoài là tổng tất cả các mức của các lá, ký hiệu EP(T).

26

Cây có gốc

IP(T) = ?

EP(T) = ?



27

Cây có hướng

Định lí

Cho T là cây nhị phân đủ với k đỉnh trong và s lá.

Ta có:

s = k+1 và EP=IP+2k

28

Cây có hướng

Định nghĩa

Cho T là cây nhị phân không đủ. Lập T' là cây có được bằng cách sau:

i. Thêm vào mỗi lá của T hai con.

ii. Thêm vào v một con nếu v là đỉnh trong của T mà chỉ có một con. Ta đặt:

$$\boxed{\mathbf{IP(T) := IP(T') \; \& \; EP(T) := EP(T')}}$$

29

Phép duyệt cây(Tree travesal)

Định nghĩa

Duyệt cây là liệt kê tất các đỉnh của cây theo một thứ tự nào đó thành một dãy, mỗi đỉnh chỉ xuất hiện một lần .

30

Phép duyệt cây

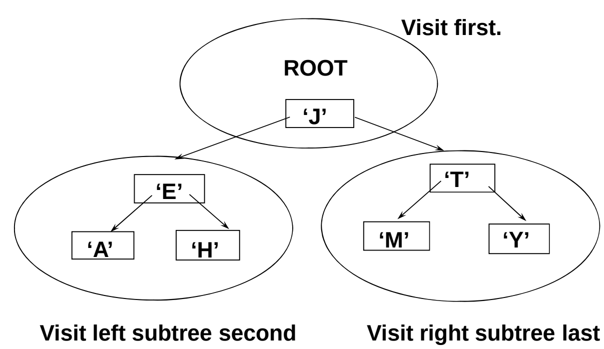
Phép duyệt tiền thứ tự

(Preoder traversal)

1. Đến gốc r.
2. Dùng phép duyệt tiền thứ tự để duyệt các cây con T_1 rồi cây con T_2 …từ trái sang phải.

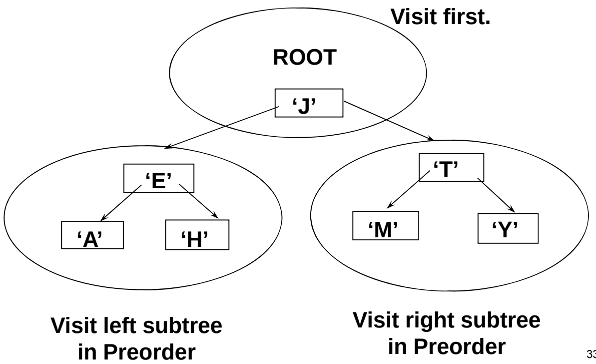
31

Preorder Traversal: J E A H T M Y



32

Preorder Traversal: J E A H T M Y



33

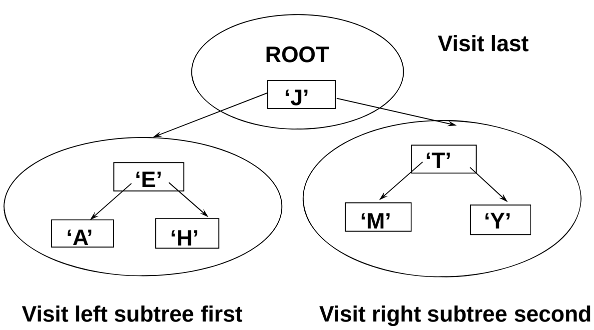
Phép duyệt cây

Phép duyệt hậu thứ tự (Posoder traversal).

1. Dùng phép duyệt hậu thứ tự để lần lượt duyệt cây con T_1, T_2,…. từ trái sang phải.
2. Đến gốc r.

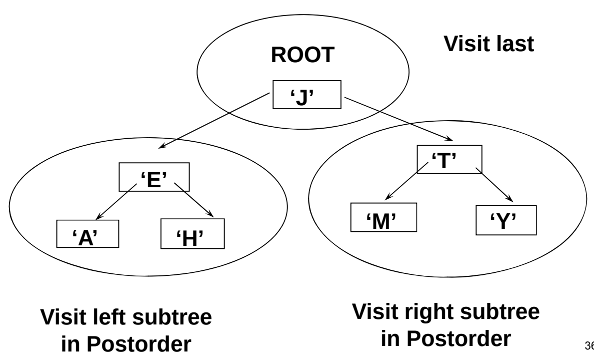
34

Postorder Traversal: A H E M Y T J



35

Postorder Traversal: A H E M Y T J



36

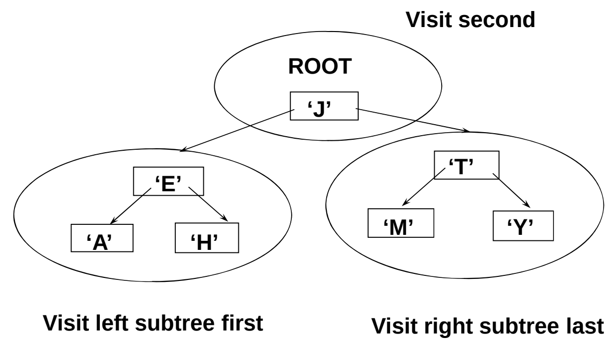
Phép duyệt cây

Phép duyệt trung thứ tự cho *cây nhị phân* (Inorder traversal)

1. Duyệt cây con bên trái T_L theo trung thứ tự.
2. Đến gốc r.
3. Duyệt cây con bên phải theo trung thứ tự.

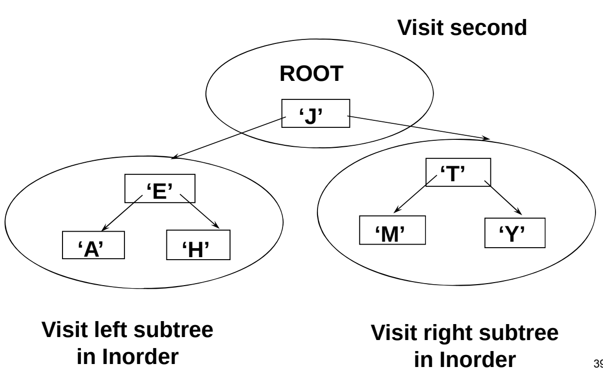
37

Inorder Traversal: A E H J M T Y



38

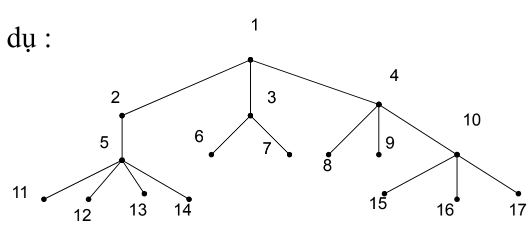
Inorder Traversal: A E H J M T Y



39

Phép duyệt cây

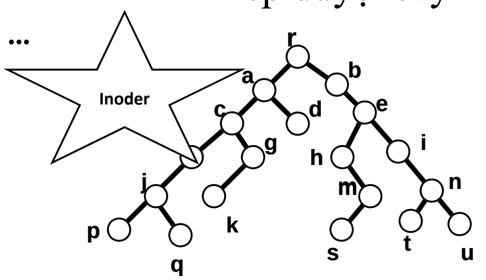
- Ví dụ :



Preoder:1,2,5,11,12,13,14,3,6,7,4,8,9,10,15,16,17

Posoder:11,12,13,14,5,2,6,7,3,8,9,15,16,17,10,4,1

Phép duyệt cây



Inoder :p,j,q,f,c,k,g,a,d,r,b,h,s,m,e,i,t,n,u

41

Cây khung có hướng

Định nghĩa

Cho G(V,E) là đồ thị có hướng và T = (V,F) là đồ thị con khung của G. Nếu T là cây có hướng thì T gọi là *cây khung có hướng(hay cây có hướng tối đại)* của G.

42

Cây khung có hướng

Định nghĩa.Cho G(V,E) là đồ thị có hướng và T=(V,F) là đồ thị con khung của G.Nếu Tlà cây có hướng thì T gọi là *cây khung có hướng(hay cây có hướng tối đại)* của G.

Định nghĩa. *Matrận Kirchhoff* (G không khuyên)

a) Nếu G là đồ thị có hướng thì K(G) =(k_{ij})

$$k_{ij} = \begin{cases} \deg^-(i) & khi\ i = j \\ -B_{ij} & khi\ i \neq j \end{cases}$$

Trong đó B_{ij} là số cung đi từ i đến j

Cây khung có hướng

b) Nếu G là đồ thị vô hướng thì K(G) =(k_{ij})

$$k_{ij} = \begin{cases} \deg(i) & khi\ i = j \\ -B_{ij} & khi\ i \neq j \end{cases}$$

Trong đó B_{ij} là số cạnh nối i với j

Cây khung có hướng

Định lý

Cho G là đồ thị không khuyên. Đặt $K_q(G)$ là phần phụ của k_{qq}(Ma trận có được từ K(G) bằng cách xoá dòng q và cột q).

Số cây khung có hướng trong G có gốc là đỉnh q bằng $\det K_q(G)$.

Đề thi

1. Đề thi 2003.

Cho đồ thị có hướng G=(V,E) với V={1,2,3,4,5} xác định bởi matrận kề sau

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Đề thi

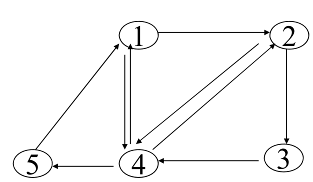
a)Tìm số liên thông đỉnh của G

b)G có là đồ thị Euler không? Tại sao?

c)Tìm số cây có hướng tối đại của G có gốc là đỉnh 1

d)Vẽ các cây trong câu c)

Đề thi



Đề thi

a) Với A$\subseteq$ V ký hiệu G-A để chỉ đồ thị có được từ G có được từ G bằng cách xoá các đỉnh thuộc A và các cung kề với nó.Ta thấy G-A vẫn liên thông nếu A chỉ gồm một đỉnh. G-A không liên thông nếu A ={1,4}. Vậy v(G)=2

b) G liên thông và cân bằng nên G là Euler.

Đề thi

c)Matrận Kirchhoff của G là ma trận sau

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Đề thi

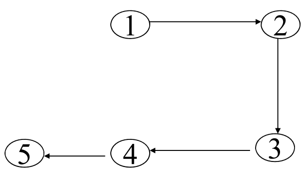
$$K_1(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Đề thi

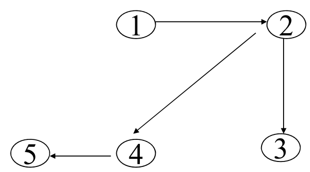
$$\det K_1(G) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

Vậy G có 4 cây có hướng tối đại .
Đó là các cây sau đây

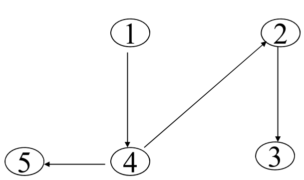
Đề thi



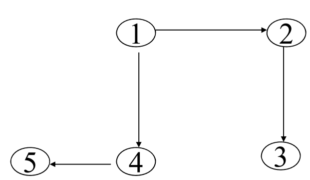
Đề thi



Đề thi

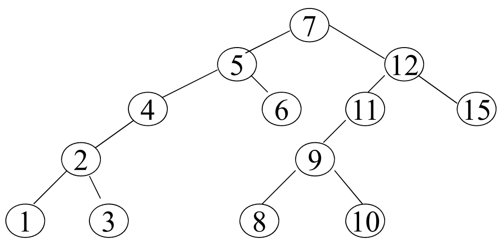


Đề thi



Đề thi

Đề thi 2001.Xét cây nhị phân



Đề thi

- a)Hãy duyệt cây theo thứ tự giữa (trung thứtự). Có nhận xét gì về giá trịcủa các khoá khi duyệt theo thứ tự giữa.
- b) Hãy chèn lần lượt các khoá 13,14 vào cây mà vẫn duy trì được nhân xét trên.

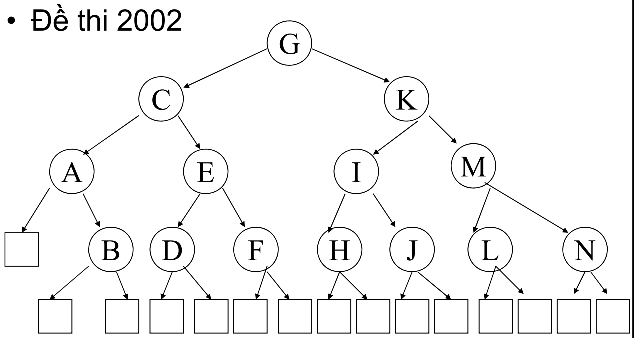
Giải.

a)Duyệt theo thứ tự giữa các khoá sẽ có giá trị tăng dần 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,15.

b)Khoá 13 được chèn thành nút con bên trái của nút 15 và khoá14được chèn thành nút con bên phải của nút 13.

Đề thi

- Đề thi 2002



Đề thi

- Giải.

a) Độ dài đường đi trong IP=0+2.1+4.2+7.3=31.

Độ dài đường đi ngoài EP=IP+2n=31+2.14=59.

b)Kết quả dyệt cây theo thứ tự sau:

B,A,D,F,E,C,H,J,I,L,N,M,K.

c)Là cây trong đề bài bằng cách thay tương ứng A,B,C,… bởi 1,2,3,…

Đề thi

Đề thi 2008

Bài 5.Một cạnh e của đồ thị đơn, liên thông G được gọi là cầu nếu G không còn liên thông khi ta xóa e. Chứng minh rằng e là cầu nếu và chỉ nếu mọi cây tối đại của G đều chứa e.

61

Đề thi

Giải:- Giả sử e là cầu.Khi đó G – e không liên thông.Giả sử T là một cây không chứa e.Do T liên thông nó sẽ nằm trong một thành phần liên thông của G – e , vì vậy T không phải là cây tối đại của G.

- Đảo lại:Giả sử e nằm trong mọi cây tối đại. Nếu G – e liên thông thì nó sẽ chứa một cây tối đại T. Rõ ràng T cũng là một cây tối đại của G, mà T không chứa e, mâu thuẫn.Vậy G – e không liên thông, do đó e là cầu.

62

Đề thi

- Đề 2008.

Bài 6.

a) Vẽ cây nhị phân có được bằng cách chèn lần lượt các khóa $K_1,K_2,\ldots,K_{14}$ sao cho khóa ở mỗi nút lớn hơn khóa của các nút thuộc cây con bên trái và bé hơn khóa của các các nút thuộc cây con bên phải.Thứ tự của các khóa như sau:

63

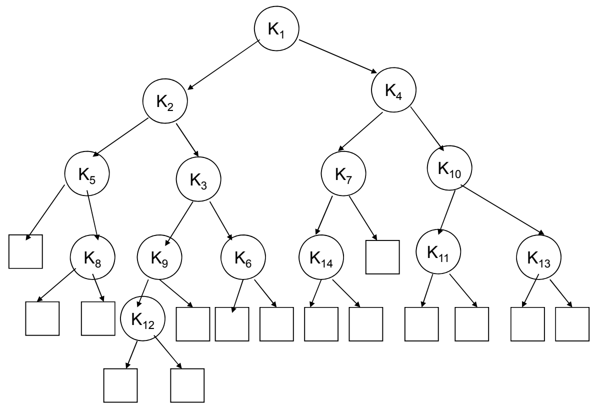
Đề thi

$K_5 < K_8 < K_2 < K_{12} < K_9 < K_3 < K_6 < K_1 < K_{14} < K_7 < K_4 < K_{11} < K_{10} < K_{13}$

b) Nếu tìm ngẫu nhiên một khóa K đã có trong cây thì số phép so sánh trung bình là bao nhiêu? Ta giả thiết rằng xác suất để K bằng một trong các khóa trong cây là như nhau.

64

$K_5 < K_8 < K_2 < K_{12} < K_9 < K_3 < K_6 < K_1 < K_{14} < K_7 < K_4 < K_{11} < K_{10} < K_{13}$



65

Đề thi

- Độ dài đường đi trong :

I = 0+2.1+4.2 + 6.3+ 4 = 2 +8+18+4 = 32

Số phép so sánh trung bình cho tìm kiếm thành công:

(I + n)/n = 46/14 = 3,29

66

Đề thi

Đề thi ĐHBK 2000.

a) Xây dựng cây biểu diễn cho thuật toán tìm kiếm nhị phân trên mảng sắp thứ tự tăng gồm 13 phần tử.
b) Tìm độ dài đường đi trong và độ dài đường đi ngoài của cây.
c) Cho biết kết quả duyệt cây theo thứ tự trước.

67

Appendix

Thuật toán tìm kiếm nhị phân(binary search):

❑ Tìm phần tử x trong dãy số tăng dần.

➢ Nhập: dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tăng dần và phần tử x.

➢ Xuất :vị trí của x trong dãy hoặc 0.

68

Appendix

Thuật toán

k:=1,r:=n
repeat
    i:=(k+r)div2;
    if a_i<x then k:=i+1;
    if a_i>x then r : = i-1:
utill(x = a_i or (k>r);
if (x =a_i)then
    xuất i (tìm thấy x ở vị trí i)
else
    xuất 0(không tìm thấy x trong dãy)

69