BÀI TẬP

Câu 1. Hãy kiểm tra suy luận sau

$$\begin{array}{l} t \to u \\ r \to (s \vee t) \\ (\neg p \vee q) \to r \\ \neg (s \vee u) \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

Câu 2.

Cho $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Có bao nhiêu quan hệ tương đương trên A gồm 3 lớp tương đương mà mỗi lớp có 4 phần tử.

Câu 3.

Xét 3 chuỗi ký tự trên tập mẫu tự {a, b, c} (với a < b < c) : s_1 = ac, s_2 = aacb, s_3 = aba.

a) Hãy sắp xếp chúng theo thứ tự tăng đối với thứ tự từ điển.

b) Cho biết giữa s_1 và s_3 có bao nhiêu chuỗi ký tự có chiều dài 6.

Câu 4 .

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ qui sau

$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + (18n - 6)\, 3^{n-1}$

b) Tìm số các chuỗi nhị phân chiều dài n chứa chuỗi con 00.

Câu 5. Cho hàm Bool của 4 biến

$$f(x,y,z,t) = \bar{x}\,t(z \vee y) \vee \bar{x}\,\bar{z}(y \vee \bar{t}) \vee \bar{y}(\bar{t} \vee z)$$

a) Tìm các tế bào lớn của Kar(f).

b) Tìm tất cả các công thức đa thức tối tiểu của f.

Câu 6.

Cho đồ thị G = (V, E) , V = { v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 , v_7 ,v_8,v_9,v_{10}} có ma trận khoảng cách là

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 10 & \infty & \infty & 6 & 3 & \infty \\ 1 & 0 & 4 & \infty & 10 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 1 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 5 & 0 & \infty & 2 & 8 & \infty & \infty & 5 \\ 10 & 10 & 1 & \infty & 0 & 4 & 1 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 2 & 4 & 0 & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 8 & 1 & 5 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 6 & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & 3 & 0 & 2 & \infty \\ 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 2 & 0 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 3 & \infty & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ v_1 đến các đỉnh v_2, v_3, v_4,v_5, v_6,v_7 ,v_8 ,v_9,v_{10}.

Câu 7.

Có bao nhiêu hàm Bool của 5 biến mà dạng nối rời chính tắc của nó gồm 6 từ tối tiểu?

Câu 8.

Một đơn đồ thị vô hướng G gọi là tự bù nếu $G \cong \overline{G}$. Chứng minh rằng nếu G tự bù thì số đỉnh của G là $4k$ hay $4k+1$ với k nguyên dương.

Câu 9.

a) Vẽ cây nhị phân có được bằng cách chèn lần lượt các khóa $K_1, K_2, \ldots, K_{14}$ sao cho khóa ở mỗi nút lớn hơn khóa của các nút thuộc cây con bên trái và bé hơn khóa của các các nút thuộc cây con bên phải.Thứ tự của các khóa như sau:

$K_4 < K_5 < K_2 < K_{11} < K_9 < K_3 < K_6 < K_1 < K_{10} < K_8 < K_7 < K_{14} < K_{12} < K_{13}$

b) Tìm số phép so sánh trước khi chèn thêm một khóa K sao cho $K_6 < K < K_1$.

Câu 10.

a) Gọi T là một *cây nhị phân đủ* (mỗi nút trong có đúng hai nút con) với N nút trong và có chiều cao h. Chứng minh rằng :

$$h \geq \lceil log_2(N+1) \rceil$$

b) Chứng minh rằng dấu "=" trong bất đẳng thức trên xảy ra nếu giả thiết thêm T là cây *cân bằng* (các nút lá của T đều nằm ở mức $h - 1$ hoặc mức h) .

Câu 11.

a) Quan hệ $\mathscr{R}$ trên tập hợp $\mathbb{N}^2$ các cặp có thứ tự số tự nhiên định nghĩa bởi $(a, b)\, \mathscr{R}\, (c, d)$ khi và chỉ khi $a \leq c$ và $b \leq d$ có phải là thứ tự tòan phần không?

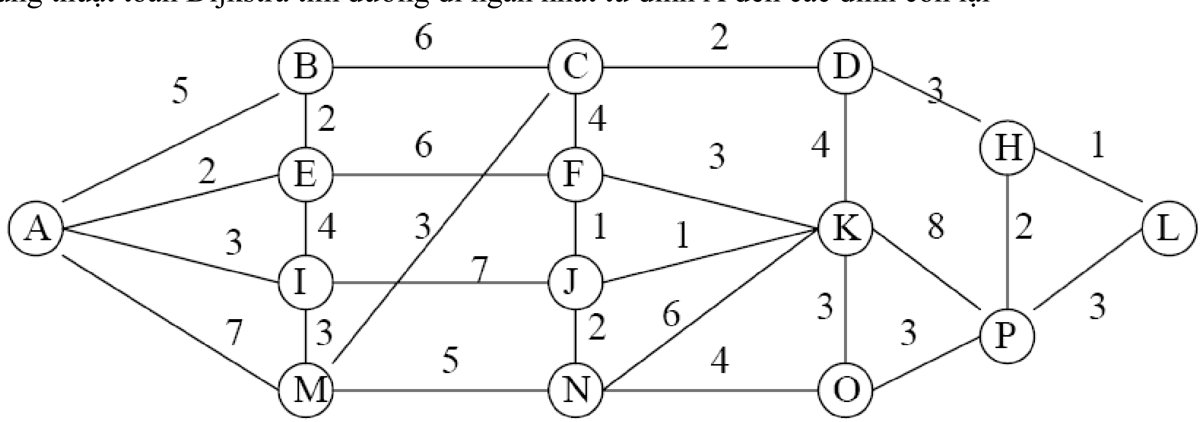
b) Tìm một thứ tự tòan phần trên $\mathbb{N}^2$ sao cho mọi tập con không rỗng đều có phần tử bé nhất.

Câu 12.

Xét thứ tự "|" trên tập U các ước dương của 2310 trong đó $a \mid b$ nếu a là ước của b .Tìm một thứ tự toàn phần $\mathscr{R}$ trên U khác với thứ tự "≤" thông thường sao cho với hai phần tử bất kỳ a, b trong U, nếu $a \mid b$ thì $a\, \mathscr{R}\, b$.

Câu 13.

Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh A đến các đỉnh còn lại



<u>Câu 14</u>. Dùng thuật toán Prim tìm cây khung ngắn nhất của đồ thị cho bởi matrận trọng số sau

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} A & B & C & D & E & F & H & I & J \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ H \\ I \\ J \end{array} &
\begin{pmatrix}
\infty & 18 & 13 & 20 & 28 & 21 & 26 & 19 & 25 \\
18 & \infty & 19 & 23 & 19 & 22 & 27 & 20 & 20 \\
13 & 19 & \infty & 16 & 22 & 23 & 21 & 26 & 15 \\
20 & 23 & 16 & \infty & 30 & 13 & 29 & 17 & 25 \\
28 & 19 & 22 & 30 & \infty & 12 & 23 & 16 & 21 \\
21 & 22 & 23 & 13 & 12 & \infty & 25 & 18 & 28 \\
26 & 27 & 21 & 29 & 23 & 25 & \infty & 24 & 20 \\
19 & 20 & 26 & 17 & 16 & 18 & 24 & \infty & 18 \\
25 & 20 & 15 & 25 & 21 & 28 & 20 & 18 & \infty
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

<u>Câu 15.</u>

a) Một dãy số thực $\{x_n\}$ được nói là thuộc *O(n)* nếu tồn tại số thực dương *C* và số tự nhiên *m* sao cho $|x_n| < C\,n$ mỗi khi $n \geq m$. Hãy sử dụng mệnh đề lượng từ hóa để viết lại định nghĩa trên.

b) Viết ra mệnh đề lương từ hóa cho một dãy số thực không thuộc *O(n)*.

<u>Câu 16.</u>

Cho G là đơn đồ thị vô hướng có *n* đỉnh và bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn *n/2*. Chứng minh rằng :

a) G liên thông.

b) Nếu bỏ đi một đỉnh tùy ý của G thì đồ thị thu được vẫn còn liên thông.

<u>Câu 17</u>.

CMR nếu bỏ đi một cạnh tùy ý của đồ thị vô hướng G thì số thành phần liên thông tăng lê không quá 1.

<u>Câu 18.</u>

Cho G là đồ thị có *n* đỉnh và *m* cạnh. Chứng minh rằng G có không ít hơn $n - m$ thành phần liên thông.

LỜI GIẢI TÓM TẮT , ĐÁP SỐ

Câu 1.

$$\begin{array}{ll} t \to u & (1) \\ r \to (s \vee t) & (2) \\ (\neg p \vee q) \to r & (3) \\ \neg(s \vee u) & (4) \\ \hline \therefore p & \end{array}$$

1) $\neg s \wedge \neg u$ (Do tiền đề (4) và luật đối ngẫu) (5)
2) $\neg u$ (Do (5) và luật đơn giản nối liền) (6)
3) $\neg t$ (Do (1),(6) và luật phủ định) (7)
4) $\neg s$ (Do (5) và luật đơn giản nối liền) (8)
5) $\neg t \wedge \neg s$ (Do (7), (8) và phép tóan nối liền) (9)
6) $\neg (t \vee s)$ (Do (9) và luật đối ngẫu) (10)
7) $\neg r$ (Do (2), (10) và luật phủ định) (11)
8) $\neg (\neg p \vee q)$ (Do (3), (11) và luật phủ định) (12)
9) $p \wedge \neg q$ (Do (12) và luật đối ngẫu) (13)
10) p (Do (13) và luật đơn giản nối liền)

Câu 2

$$\frac{C_{12}^4.C_8^4.1}{3!} = 5775$$

Câu 3.

a) $s_2 < s_3 < s_1$
b) $s_3 = aba < ab * * * * < s_1 = ac$
Mỗi vị trí * có 3 cách chọn. Do đó có 3* 3 *3 *3 = 81 chuỗi.

Câu 4.

a) $a_n = (A + n B) 3^n + (n - 2) n^2 3^n$

b) Tìm số các chuỗi nhị phân chiều dài n chứa chuỗi con 00.

Gọi a_n là số chuỗi nhị phân chứa chuỗi con 00.
Ta có $a_0 = 0$, $a_1 = 0$.
Ta tính a_n:
- TH1 : Nếu bit đầu tiên là bit 1 thì có a_{n-1} cách chọn $n - 1$ bit còn lại.
- TH2 : Nếu bit đầu tiên là bit 0 thì có hai TH xảy ra:
  - Bit thứ 2 là bit 1 : có a_{n-2} cách chọn $n - 2$ bit còn lại

- Bit thứ 2 là bit 0 : có 2^{n-2} cách chọn $n - 2$ bit còn lại (các bit này chọn 0 hay 1 đều được)

Vậy $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$ ($n \geq 2$) (1)

Hệ thức đệ qui TTTN : $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (2)

PTĐT : $x^2 - x - 1 = 0$ có 2 nghiệm đơn là

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Nghiệm tổng quát của (2) là $a_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Ta tìm một nghiệm riêng của (1) dưới dạng $a_n = C2^n$. Thay vào (1) :

$C2^n = C2^{n-1} + C2^{n-2} + 2^{n-2} \Leftrightarrow 4C = 2C + C + 1 \Leftrightarrow C = 1.$

Nghiệm TQ của (1) là $a_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2^n$.

Sử dụng ĐK đầu : A + B + 1 = 0

$$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2 = 0.$$

$$\Rightarrow A = -\frac{5+3\sqrt{5}}{10},\ B = -\frac{5-3\sqrt{5}}{10}$$

$a_n = -\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2^n$

<u>Câu 5.</u>

a) Các tế bào lớn:

$\overline{y}\,\overline{t},\ z\,\overline{y},\ \overline{x}\,zt,,\ \overline{x}\,yt,\ \overline{x}\,y\,\overline{z},\ \overline{x}\ \overline{z}\,\overline{t}$

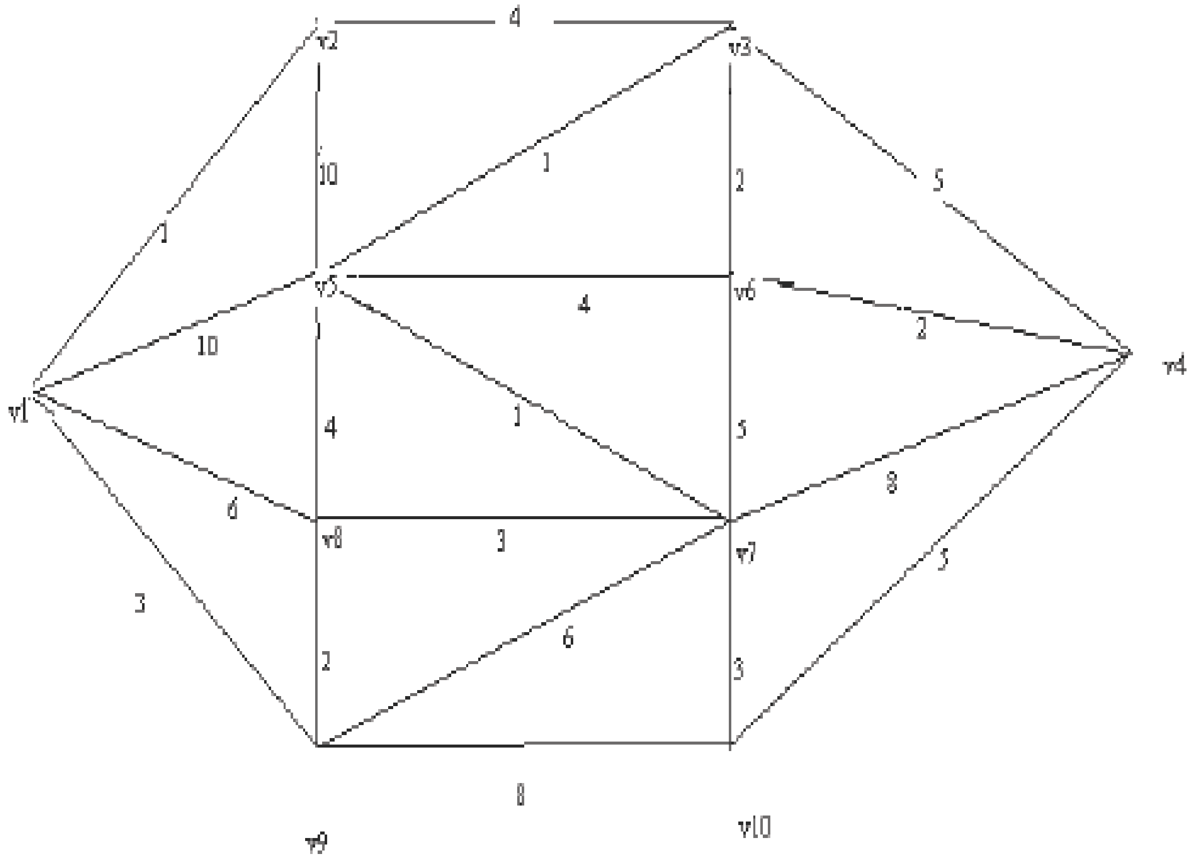
b) Có ba công thức đa thức tối tiểu là

$\overline{y}\,\overline{t} \vee \overline{y}\,z \vee \overline{x}\,zt \vee \overline{x}\,y\,\overline{z}$,

$\overline{y}\,\overline{t} \vee \overline{y}\,z \vee \overline{x}\,yt \vee \overline{x}\,y\,\overline{z}$,

$\overline{y}\,\overline{t} \vee \overline{y}\,z \vee \overline{x}\,yt \vee \overline{x}\ \overline{z}\,\overline{t}$

<u>Câu 6.</u>



v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
0	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	$(1,v_1)$*	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(10, v_1)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(6,v_1)$	$(3,v_1)$	$(\infty,-)$
-	-	$(5, v_2)$	$(\infty,-)$	$(10, v_1)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(6,v_1)$	$(3,v_1)$*	$(\infty,-)$
-	-	$(5, v_2)$*	$(\infty,-)$	$(10, v_1)$	$(\infty,-)$	$(9,v_9)$	$(5,v_9)$	-	$(11,v_9)$
-	-	-	$(10, v_3)$	$(6,v_3)$	$(7,v_3)$	$(9,v_9)$	$(5,v_9)$*	-	$(11,v_9)$
-	-	-	$(10, v_3)$	$(6,v_3)$*	$(7,v_3)$	$(9,v_9)$	-	-	$(11,v_9)$
-	-	-	$(10, v_3)$	-	$(7,v_3)$*	$(7,v_5)$	-	-	$(11,v_9)$
-	-	-	$(9,v_6)$	-	-	$(7,v_5)$*	-	-	$(11,v_9)$
-	-	-	$(9,v_6)$*	-	-	-	-	-	$(10, v_7)$
-	-	-	-	-	-	-	-	-	$(10, v_7)$*

Câu 7.

Trong tập hợp các hàm Boole của 5 biến có $2^5 = 32$ từ tối tiểu.

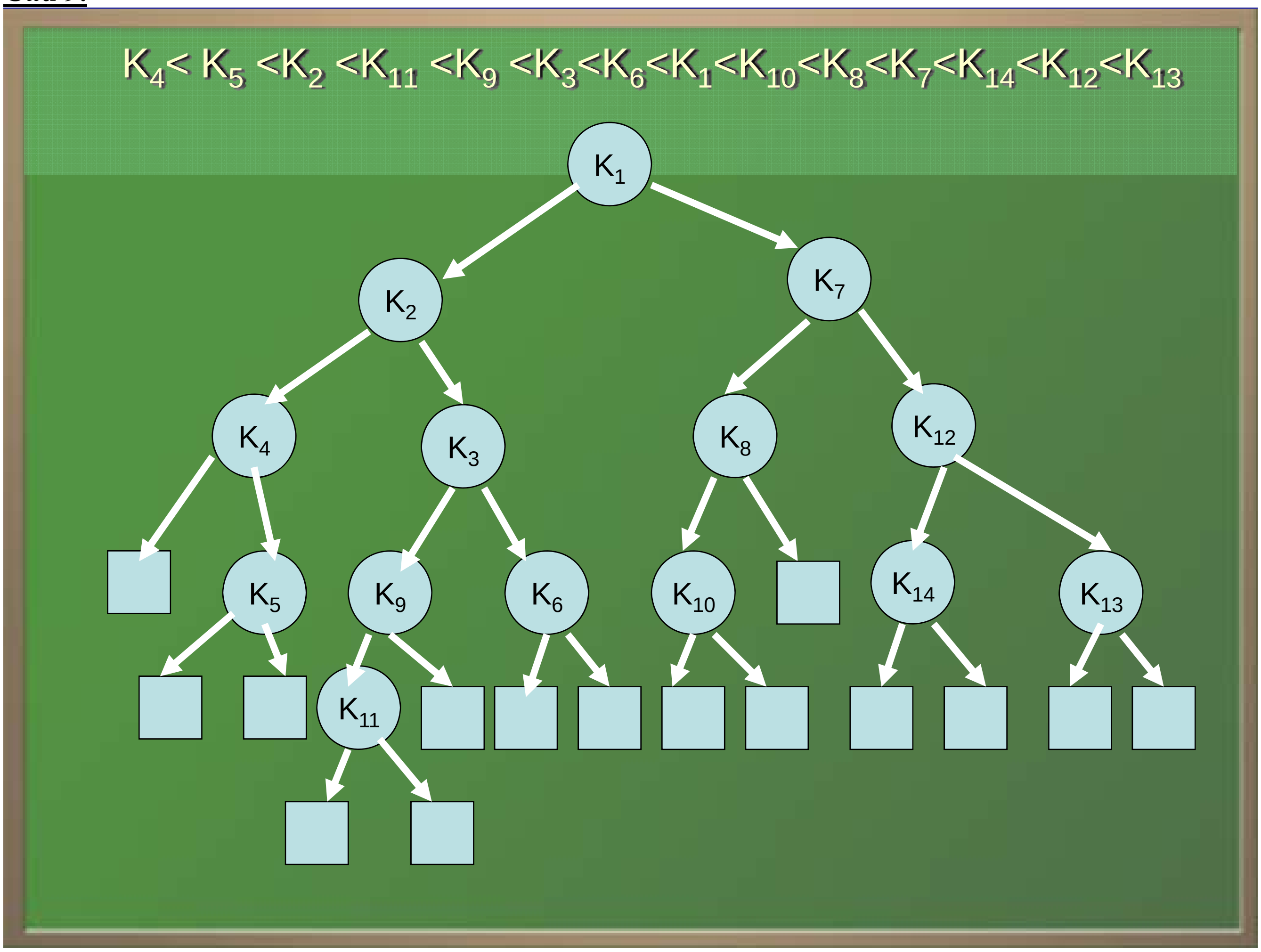
Số cách chọn 6 từ tối tiểu trong 32 từ tối tiểu là $C_{32}^{6} = 906102$.

Câu 8.

Đồ thị đủ K_n có n(n – 1)/ 2 cạnh.

Do đó G có n(n – 1)/ 4 cạnh. Suy ra n chia hết cho 4 hoặc n – 1 chia hết cho 4.

Câu 9.



Để chèn thêm khóa K với $K_6 < K < K_1$ ta cần so sánh nó với K_1, K_2, K_3, K_6.

Do đó cần 4 phép so sánh.

<u>Câu 10.</u>

Tính chất: *Nếu T là cây nhị phân đủ gồm N nút trong thì T có N + 1 nút lá.*
CM. Mỗi nút trong của cây nhị phân đủ đều có bậc ra là 2, còn mỗi nút lá của nó đều có bậc ra bằng 0. Do đó tổng bậc ra của tất cả các nút là $2N$.
Theo định lý về bậc thì số cạnh $m = 2N$. (1)
Vì T là cây nên số cạnh của nó là $m = N + l - 1$.(Ở đây l là số nút lá).(2)
Từ (1) , (2) ta có : $2N = N + l - 1$. Suy ra $l = N + 1$.

<u>Giải câu 10</u>.

a) Gọi T là một cây nhị phân đủ (mỗi nút trong có đúng hai nút con) với N nút trong và có chiều cao h. Chứng minh rằng :
$$h \geq \lceil log_2(N+1) \rceil$$

Ta CM qui nạp theo chiều cao h BĐT $l \leq 2^h$

- Rõ ràng bất đẳng thức đúng khi $h = 1$(lúc này $l = 2$).
- Giả sử BĐT đúng với mọi cây có chiều cao $\leq h - 1$. Xét T là cây có chiều cao h.

Gọi l_1, l_2 là số nút lá của cây con T_1, T_2 là cây con bên trái và bên phải của nút gốc. Để ý rằng T_1 và T_2 là các cây có chiều cao $\leq h - 1$ nên theo giả thiết qui nạp ta có
$l = l_1 + l_2 \leq 2.\ 2^{h-1} = 2^h$.
Vậy $h \geq \log_2 l \Leftrightarrow h \geq log_2(N + 1) \Rightarrow h \geq \lceil log_2(N+1) \rceil$.

b) Do cây là cây cân bằng nên các nút ở mức $\leq h - 2$ đều là nút trong. Vì vậy tổng số nút mức $h - 1$ là 2^{h-1} . Tổng số nút lá ở mức h bằng 2 lần số nút trong ở mức $h - 1$ nên
$2^{h-1} < N + 1 \leq 2^h \Leftrightarrow h - 1 < log_2(N + 1) \leq h \Rightarrow h = \lceil log_2(N+1) \rceil$
Giải thích :
$N + 1 = l = l_h + l_{h-1} = 2N_{h-1} + l_{h-1} = N_{h-1} + N_{h-1} + l_{h-1} = N_{h-1} + 2^{h-1} > 2^{h-1}$.

<u>Câu 11.</u>

a) $\mathscr{R}$ không phải là thứ tự tòan phần vì (1, 2) và (2, 1) không so sánh được với nhau.

b) Định nghĩa quan hệ $\mathscr{R}$’ trên $\mathbb{N}^2$ bởi (a, b) R’ (c, d) khi và chỉ khi $a < c$ hoặc $a = c$ và $b \leq d$. Rõ ràng $\mathscr{R}$’ là thứ tự toàn phần trên $\mathbb{N}^2$.

Giả sử A là một tập con khác rỗng của $\mathbb{N}^2$. Khi ấy tập các thành phần thứ nhất của những phần tử trong A là một tập con khác rỗng của $\mathbb{N}$ nên có phần tử bé nhất là m. Khi đó tập con các thành phần thứ hai của những cặp trong A với thành phần thứ nhất là m sẽ có phần tử bé nhất là n . Rõ ràng (m ,n) là phần tử bé nhất của A.

<u>Câu 12.</u>

Vì 2310 = 2*3*5*7*11 nên mỗi ước $\neq 1$ của 2310 là tích của các số nguyên tố thuộc một tập con của S ={2, 3, 5, 7, 11}. Ta có thể đồng nhất ước này với dãy số nguyên $a_1a_2 \ldots a_m$ trong đó $2 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_m \leq 11$, và $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset S$. Thứ tự $\mathscr{R}$ được định nghĩa sao cho 1 là phần tử bé nhất. Nếu hai ước $a \neq 1 \neq b$ được biễu diễn bởi hai dãy $a_1\, a_2 \ldots a_m$ và $b_1b_2 \ldots b_p$ ta định nghĩa $a\ \mathscr{R}\ b$ khi và chỉ khi $m < p$ hoặc $m = p$ và $a_1\, a_2 \ldots a_m$ trội $b_1b_2 \ldots b_p$ theo thứ tự tự điển. Chứng minh dễ dàng $\mathscr{R}$ là thứ tự toàn phần trên U.

Câu 15.

a) $\exists$ C > 0, $\exists\, m \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,($n \geq m \Rightarrow |x_n| < C\,n$).

b) $\forall$ C > 0, $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $\exists n \in \mathbb{N}$,($n \geq m \wedge |x_n| \geq C\,n$).

Câu 16.

a) Ta CM bằng phản chứng. Giả sử G không liên thông. Khi đó G có ít nhất hai thành phần liên thông, trong đó phải tồn tại thành phần liên thông H với < *n/2* đỉnh. Trong H bậc của mỗi đỉnh $< \frac{n}{2} - 1$, trái giả thiết.

b) Theo câu a) thì G liên thông. Gọi G' là đồ thị thu được từ G bằng cách bỏ đi một đỉnh. Nếu G' không liên thông thì tồn tại một thành phần liên thông H có $\leq \frac{n-1}{2}$ đỉnh. Trong H mỗi đỉnh P có bậc $\leq \frac{n-1}{2} - 1$. Khi đó trong G đỉnh P có bậc $\leq \frac{n-1}{2}$. Trái giả thiết.

Câu 17.

Rõ ràng ta chỉ cần CM cho G liên thông là đủ. Ta CM bằng phản chứng.
Giả sử G liên thông và G - *e* có ít nhất 3 thành phần liên thông. Trả lại cạnh *e* cho G. Ta thấy *e* chỉ có thể nối nhiều lắm là 2 trong 3 thành phần liên thông của G – *e* với nhau, và do đó G có ít nhất hai thành phần liên thông. Trái giả thiết G liên thông.

Câu 18.

Ta CM qui nạp theo số cạnh *m* của G.
Với $m = 0$ thì khẳng định hiển nhiên đúng (Mỗi đỉnh là một thành phần liên thông).
Giả sử kết luận bài tóan đúng cho $m = k$ cạnh. Xét G tùy ý có $k+1$ cạnh. Bỏ một cạnh ra khỏi G ta thu được G' có *k* cạnh. Trong G' có ít nhất $n - k$ thành phần liên thông. Theo Câu 17 số thành phần liên thông trong G' không vượt quá 1 so với G. Do đó số thành phần liên thông trong G không ít hơn $n - k - 1 = n - (k + 1)$. Vậy kết luận đúng cho $m = k+1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI : TS. NGUYỄN VIẾT ĐÔNG