1. Lưu ý về kí hiệu

- Số vô hướng - chữ cái in nghiêng: x_1, N, y, k.
- Vector - chữ thường in đậm: $\mathbf{y}, \mathbf{x_1}$.
    - **Vector hàng**: $\mathbf{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]$.
    - **Vector cột**: $\mathbf{x} = [x_1; x_2; ...; x_n]$.
    - **LƯU Ý**: Nếu không nói gì thêm, các vector dc mặc định là **vector cột**.
- Ma trận - chữ hoa in đậm: $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{W}$.
    - Ma trận được tạo thành từ các **vector cột** theo thứ tự **trái qua phải**: $\mathbf{X} = [\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{...}, \mathbf{x_n}]$.
    - Ma trận đuôc tạo thành từ các **vector hàng** theo thứ tự **trên xuống dưới**: $\mathbf{X} = [\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}; \mathbf{...}; \mathbf{x_n}]$.
    - Phần tử nằm ở dòng i cột j của ma trận kí hiệu là x_{ij}.
    - **LƯU Ý**: Cho ma trận $\mathbf{W}$, nếu không nói gì thêm thì $\mathbf{w_i}$ được hiểu là **vector cột** thứ i của ma trận $\mathbf{W}$.

2. Chuyển vị và Hermitian

- Tên tiếng anh là **transpose**, kí hiệu là T.
- Cho $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ta nói $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ là chuyển vị của $\mathbf{A}$ nếu:

$$b_{ij} = a_{ji}, \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

- Ví dụ:
    - Chuyển vị của vector $\mathbf{x}$ kí hiệu là $\mathbf{x}^T$.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m \end{bmatrix}$$

    - Chuyển vị của ma trận $\mathbf{A}$ kí hiệu là $\mathbf{A}^T$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Ta có $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ thì $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Nếu $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ thì $\mathbf{A}$ là **ma trận đối xứng** *(symmetric matrix)*.

- Trong trường hợp vector hay ma trận có phần tử là **số phức**, thì việc lấy chuyển vị sẽ kèm theo **lấy liên hợp phức** của phần tử đó. Quá trình này được gọi ngắn gọn là **chuyển vị liên hợp** *(conjugate transpose)*, kí hiệu là H.
- Chuyển vị liên hợp của ma trận $\mathbf{A}$ là $\mathbf{A}^H$ *(còn được gọi là* $\mathbf{A}$ Hermitian *)*.
- Cho $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, ta nói $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ là chuyển vị liên hợp của $\mathbf{A}$ nếu:

$$b_{ij} = \overline{a_{ji}}, \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

  với $\overline{a}$ là liên hợp phức của a.
- Ví dụ:
  - Chuyển vị liên hợp của vector $\mathbf{x}$ kí hiệu là $\mathbf{x}^H$.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2+3i \\ 2i \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^H = \begin{bmatrix} 2-3i & -2i \end{bmatrix}$$

  - Chuyển vị liên hợp của ma trận $\mathbf{A}$ kí hiệu là $\mathbf{A}^H$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+2i & 3-4i \\ i & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} 1-2i & -i \\ 3+4i & 2 \end{bmatrix}$$

- Nếu $\mathbf{A}, \mathbf{x}$ lần lượt là các ma trận thực và vector thực thì:

$$\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^T, \mathbf{x}^H = \mathbf{x}^T$$

- Nếu chuyển vị liên hợp của một ma trận phức bằng với chính nó, $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$ thì nói gọi ma trận đó là **Hermittian**.

3. Phép nhân hai ma trận

- Cho hai ma trận $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, thì tích của hai ma trận này kí hiệu là $\mathbf{C} = \mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, khi đó phần tử tại dòng i cột j của ma trận kết quả được tính bởi:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj}, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p$$

- Tính chất:
  - Không có tính chất giao hoán.

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

  - Có tính chất kết hợp:

$$\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

  - Có tính phân phối đối với phép cộng:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

  - Chuyển vị của một rích bằng tích các chuyển vị theo thứ tự **ngược lại**:

$$(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T, (\mathbf{AB})^{\mathbf{H}} = \mathbf{B}^H\mathbf{A}^H$$

- Bằng cách coi vector là một trượng hợp đặc biệt của ma trận, ta có tích vô hướng của hai vector *(inner product)* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ được định nghĩa là:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i$$

- **LƯU Ý**:

$$\mathbf{x}^H\mathbf{y} = \mathbf{y}^H\mathbf{x} = (\mathbf{y}^H\mathbf{x})^H$$

  khi và chỉ khi chúng là các số thực.

$$\mathbf{x}^H\mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$$

- Nếu tích vô hướng của **hai vector khác không** bằng không, thì hai vector đó **vuông góc với nhau**.

- Phép nhân của một ma trận $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ với một vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ là một vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \text{với } b_i = \mathbf{A}_{:,i}\mathbf{x}$$

  với $\mathbf{A}_{:,i}$ là vector hàng thứ i của ma trận $\mathbf{A}$.
- Ngoài ra còn có một phép nhân khác gọi là **Hadamard** *(còn được gọi là Element-wise)* hay được sử dụng trong Machine Learning. Tích Hadamard của hai ma trận có **cùng kích thước** $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ được định nghĩa là:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{với } c_{ij} = a_{ij} \times b_{ij}$$