Toán cao cấp - B2

2/2017

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\,(i = 1, \ldots, n)\}$.
- Cho $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Khoảng cách

Euclide giữa hai điểm $\mathbf{x}$ và $\mathbf{y}$, ký hiệu $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, được định nghĩa là

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Ta có

- $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq 0$ với mọi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.
- $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$ với mọi $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Bất đẳng thức cuối gọi là bất đẳng thức tam giác.

- Cho $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Tập hợp

$$B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r\}$$

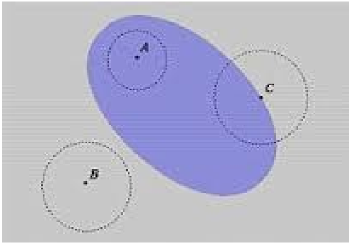
được gọi là quả cầu mở tâm $\mathbf{x}$ bán kính r. Một tập chứa ít nhất một quả cầu mở tâm $\mathbf{x}$ được gọi là một lân cận của $\mathbf{x}$.

- Tập $B \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập bị chặn nếu tồn tại $r > 0$ sao cho $B \subset B(O, r)$.
- Cho $G \subset \mathbb{R}^n$ và $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
  - $\mathbf{x}$ được gọi là điểm trong của G nếu tồn tại một $r > 0$ sao cho

$$\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r) \subset G.$$

  - $\mathbf{x}$ được gọi là điểm ngoài của G nếu $\mathbf{x}$ là điểm trong của $\mathbb{R}^n \backslash G$.
  - $\mathbf{x}$ được gọi là điểm biên của G nếu mọi lân cận của $\mathbf{x}$ đều có ít nhất một điểm thuộc G và một điểm không thuộc G. Tập hợp tất cả các điểm biên của G được gọi là biên của G.

• $G \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập mở nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong. $F \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập đóng nếu $\mathbb{R}^n \backslash F$ là tập mở.



A - điểm trong, B - điểm ngoài, C - điểm biên

• **Định nghĩa hàm nhiều biến**

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$. Một phép tương ứng được gọi là một hàm nhiều biến xác định trên D, ký hiệu $f : D \to \mathbb{R}$, tương ứng mỗi $\mathbf{x}$ với một phần tử duy nhất $z = f(x_1, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$.

$*$ Dưới đây ta chủ yếu xét hàm hai biến.

- **Miền xác định**

Trường hợp hàm f được cho nhờ "công thức tính ảnh" $f(x_1, \ldots, x_n)$ thì tập các phần tử $(x_1, \ldots, x_n)$ sao cho biểu thức $f(x_1, \ldots, x_n)$ có nghĩa được gọi là miền xác định của hàm f và ký hiệu là $D(f)$.

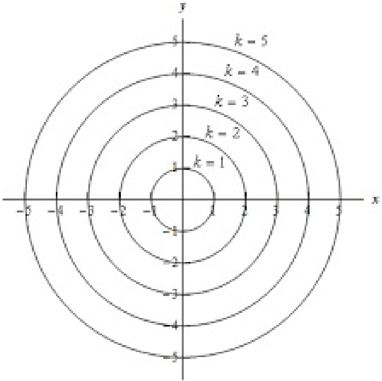
$<$ 1) Hàm $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ là hàm hai biến có miền xác định $D(f) = B(O, 1)$.

2) Hàm $g(x, y, z) = x^2 + (y+z)/2$ là hàm ba biến có miền xác định $D(g) = \mathbb{R}^3 >$

- **Đường mức - Mặt mức**

Đường mức của hàm hai biến $z = f(x, y)$ là đường cong $f(x, y) = C$ trong mặt phẳng Oxy, tại các điểm trên đường này hàm có giá trị không đổi C.

Mặt mức của hàm ba biến $u = f(x, y, z)$ là mặt cong $f(x, y, z) = C$, tại các điểm trên mặt này hàm có giá trị không đổi C.



Đường mức của hàm $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

• **Định nghĩa giới hạn hàm hai biến**

Số A được gọi là giới hạn của hàm $z = f(x, y)$ khi (x, y) tiến đến (a, b) nếu với mọi $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta > 0$, sao cho

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \epsilon.$$

Khi đó, ta viết

$$\lim_{x \to a,\, y \to b} f(x, y) = A.$$

$<$ 1) $\lim_{x \to 1,\, y \to 1} (x^2 + 2y) = 3.$
2) $\lim_{x \to 0,\, y \to 0} 1/(x^2 + y^2) = \infty.$
3) $\lim_{x \to \infty,\, y \to \infty} 1/(x^2 + y^2) = 0 >$

• **Định nghĩa hàm hai biến liên tục**
Hàm $z = f(x, y)$ được gọi là liên tục tại điểm (a, b) nếu

$$\lim_{x \to a,\, y \to b} f(x, y) = f(a, b).$$

Hàm liên tục tại mọi điểm thuộc một miền (tập hợp) nào đó được gọi là hàm liên tục trong miền đó.

$<$ 1) Hàm $z = x^2 + y^2$ liên tục tại mọi điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2) Hàm $z = 2xy/(x^2 + y^2)$ liên tục khắp nơi trừ điểm $(0, 0)$.
3) Hàm $z = \frac{xy+1}{x^2-y}$ liên tục khắp nơi trừ những điểm nằm trên parabol $y = x^2$ $>$

• Tương tự như hàm một biến liên tục trên một đoạn, hàm nhiều biến đạt cực đại và cực tiểu trên một tập đóng và bị chặn.

• **Định nghĩa**

Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$, nếu cố định y bằng một hằng số $(y = b)$, hàm f trở thành hàm của một biến số x. Ta gọi đạo hàm riêng của hàm $z = f(x, y)$ theo biến số x tại (a, b) là

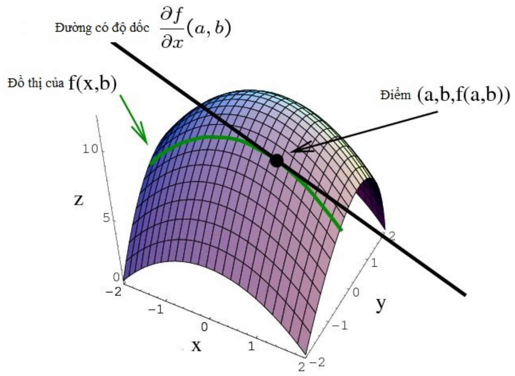
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}.$$

Tương tự ta có định nghĩa đạo hàm riêng theo biến y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}.$$

Chú ý: Các ký hiệu khác f'_x, f'_y. Các quy luật tính đạo hàm riêng hoàn toàn giống với các quy luật tính đạo hàm của hàm một biến. Khi tính đạo hàm theo một biến thì các biến còn lại là hằng số.

- **Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng**



Đường có độ dốc $f'_x(a,b)$ của đường cong $f(x,b)$, giao tuyến của mặt phẳng $y=b$ và mặt cong $z=f(x,y)$

Như vậy, tại mỗi điểm (a,b) có hai tiếp tuyến với mặt cong $z=f(x,y)$ vuông góc với nhau. Hai tiếp tuyến này xác định mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong.

$<$ 1) Cho $z = x^2 y$. Tính z'_x, z'_y.
Khi tính z'_x ta xem y là hằng số và $z'_x = 2xy$. Tương tự, ta xem x là hằng số khi tính z'_y, $z'_y = x^2$.
2) Tính $z'_x(4;\pi)$ nếu $z = \ln(\tan(y/x))$.
Xem y là hằng số

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{1}{\tan(y/x)} \frac{1}{\cos^2(y/x)} \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ \Rightarrow z'(4;\pi) &= \frac{1}{\tan(\pi/4)} \frac{1}{\cos^2(\pi/4)} \left(-\frac{\pi}{4^2}\right) = -\frac{\pi}{8} > \end{aligned}$$

Xét hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$, $(a, b) \in D$.
Lấy điểm bất kỳ $(x, y) \in D$. Ký hiệu: $\Delta x = x - a$, $\Delta y = y - b$,
$\rho = \|(x, y) - (a, b)\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.
Số gia toàn phần của hàm $z = f(x, y)$ tại điểm (a, b) là hiệu

$$\Delta f = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

trong đó Δx, Δy là số gia tùy của các biến số.

• Định nghĩa về tính khả vi

Hàm $z = f(x, y)$ được gọi là hàm khả vi tại (a, b) nếu tồn tại $A, B \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + 0(\rho)$$

trong đó $0(\rho)$ có tính chất

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{0(\rho)}{\rho} = 0.$$

• **Định nghĩa vi phân toàn phần**
Nếu $z = f(x, y)$ khả vi tại (a, b) ta định nghĩa

$$df = A\Delta x + B\Delta y.$$

Vì vi phân của biến độc lập trùng với số gia của chúng

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y$$

nên

$$df = Adx + Bdy$$

• **Mệnh đề.** *Nếu hàm $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm (a, b) thì nó liên tục tại điểm đó.*
• **Mệnh đề.** *Nếu hàm $z = f(x, y)$ khả vi tại (a, b) và $df = Adx + Bdy$ thì*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Vậy,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)dy.$$

• **Mệnh đề.** *Nếu hàm* $z = f(x, y)$ *trong lân cận của* (a, b) *có các đạo hàm riêng* f'_x *và* f'_y *và chúng liên tục tại* (a, b) *thì hàm* $f(x, y)$ *khả vi tại điểm đó.*

Hệ quả. *Nếu hàm* $z = f(x, y)$ *trong lân cận* (a, b) *có các đạo hàm riêng* f'_x *và* f'_y *và chúng liên tục tại* (a, b) *thì hàm* $f(x, y)$ *cũng liên tục tại điểm đó.*

Có thể mở rộng khái niệm vi phân toàn phần cho hàm với số biến số bất kỳ. Thí dụ, với hàm ba biến $u = f(x, y, z)$ ta có công thức tính vi phân toàn phần

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

$<$ Với $z = \sin^2 x + \cos^2 y$ ta có

$$\begin{aligned} z'_x &= 2\sin x \cos x = \sin 2x, \\ z'_y &= -2\cos y \sin y = -\sin 2y, \end{aligned}$$

suy ra

$$dz = \sin 2x dx - \sin 2y dy \ >$$

• Áp dụng vi phân toàn phần tính gần đúng

Từ biểu thức vi phân toàn phần ta có

$$\Delta f \approx dz$$

suy ra

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) \approx f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y.$$

< Tính gần đúng $(1,02)^{3,01}$.

Với $z = x^y$

$$dz = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y.$$

Chọn $a = 1$, $b = 3$ với $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = 0,01$. Ta có

$$\begin{aligned}(1+0,02)^{3+0,01} &= (1+\Delta x)^{3+\Delta y} \\ &\approx 1^3 + 3 \times 1^2 \times 0,02 + 1^3 \times \ln 1 \times 0,01 = 1,06 >\end{aligned}$$

1) Cho $z = f(x, y)$, trong đó $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Giả thiết các hàm $f(x, y)$, $\varphi(t)$ và $\psi(t)$ khả vi thì hàm hợp $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ cũng khả vi và ta có

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\psi}{dt}.$$

2) Cho $z = f(x, y)$, trong đó $y = \varphi(x)$. Giả thiết các hàm $f(x, y)$, $\varphi(x)$ khả vi thì hàm hợp $z = f(x, \varphi(y))$ cũng khả vi và ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\varphi}{dx}.$$

Xét hàm ẩn cho bởi phương trình $F(x, y) = 0$. Từ đẳng thức $F(x, y(x)) = 0$ ta suy ra

$$F'_x(x, y(x)) + F'_y(x, y(x))y'(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{F'_x(a, y(x))}{F'_y(x, y(x))}.$$

3) Cho $z = f(x, y)$, trong đó $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$. Giả thiết các hàm $f(x, y)$, $\varphi(\xi, \eta)$ và $\psi(\xi, \eta)$ khả vi thì hàm hợp $z = f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta))$ cũng khả vi và ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi},\\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}.\end{aligned}$$

$<$ 1) Cho $z = e^{x^2+y^2}$, trong đó $x = a\cos t$, $y = a\sin t$. Tính dz/dt.
Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= 2xe^{x^2+y^2}(-a\sin t) + 2ye^{x^2+y^2}(a\cos t)\\ &= 2ae^{x^2+y^2}(y\cos t - x\sin t).\end{aligned}$$

Biểu diễn x, y theo t ta được:

$$\frac{dz}{dt} = 2ae^{a^2}(a\sin t\cos t - a\sin t\cos t) = 0.$$

2) Cho $z = \ln(x^2 - y^2)$, trong đó $y = e^x$. Tính $\partial z/\partial x$, dz/dt.
Từ:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - y^2}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{x^2 - y^2}, \ \frac{dy}{dx} = e^x$$

ta suy ra

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{x^2 - y^2} - \frac{2ye^x}{x^2 - y^2} = \frac{2(x - ye^x)}{x^2 - y^2} = \frac{2(x - e^{2x})}{x^2 - e^{2x}}.$$

3) Cho $z = f(x, y)$, trong đó $x = \xi\eta$, $y = \xi/\eta$. Tính $\partial z/\partial \xi$, $\partial z/\partial \eta$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \xi} &= \frac{\partial z}{\partial x}\eta + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{1}{\eta}, \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\xi - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\xi}{\eta^2} \end{aligned}$$

• **Định nghĩa đạo hàm riêng cấp hai**

Đạo hàm riêng cấp hai của hàm $z = f(x, y)$ là đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp một của nó. Ký hiệu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}, \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}, \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}.
\end{aligned}$$

• Với giả thiết f''_{xy} và f''_{yx} liên tục, có thể chứng minh được

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

- **Định nghĩa vi phân cấp hai**

Vi phân cấp hai của hàm $z = f(x, y)$ là vi phân của vi phân toàn phần (cấp một) của nó

$$d^2 f = d(df) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

- Các khái niệm đạo hàm riêng cấp ba, bốn,... Cũng như vi phân cấp ba, bốn,... được định nghĩa tương tự.

$<$ 1) Tính đạo hàm riêng cấp hai của $z = 3x^2 - 2xy^2$.

$$z'_x = 6x - 2y^2,\ z'_y = -4xy,\ z''_{xx} = 6,\ z''_{yx} = z''_{xy} = -4y,\ z''_{yy} = -4x.$$

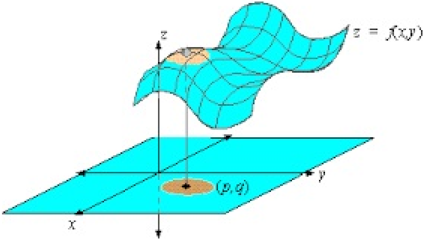
2) Tính vi phân cấp hai của hàm trên.

$$d^2 z = 6dx^2 + 2(-4y)dxdy + (-4x)dy^2 \ >$$

• **Định nghĩa cực trị địa phương của hàm hai biến**
Cho $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ và $(a, b) \in D$. $f(a, b)$ gọi là cực đại địa phương, nếu tồn tại một lân cận V của (a, b) sao cho

$$f(a, b) > f(x, y)$$

với mọi $(x, y) \in V \backslash \{(a, b)\}$.



Cực đại địa phương

Tương tự, $f(a,b)$ là cực tiểu địa phương nếu tồn tại một lân cận V của (a,b) sao cho

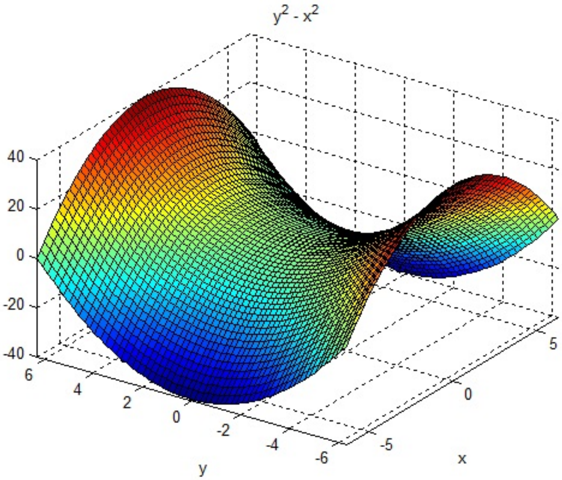
$$f(a,b) < f(x,y)$$

với mọi $(x,y) \in V \backslash \{(a,b)\}$.
Cực đại, cực tiểu địa phương được gọi chung là cực trị.
• **Định lý (Điều kiện cần của cực trị).** *Giả sử* $f(a,b)$ *là cực trị của hàm* $z = f(x,y)$. *Nếu cả hai đạo hàm riêng* f'_x *và* f'_y *tồn tại tại* (a,b) *thì*

$$f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0.$$

Chú ý, mệnh đề đảo của định lý trên không đúng. Thật vậy, xét hàm $z = y^2 - x^2$, hàm này không có cực trị. Trong khi

$$z'_x = -2x,\ z'_y = 2y \Rightarrow z'_x(0,0) = z'_y(0,0) = 0!$$



Đồ thị hàm $z = y^2 - x^2$

• **Định nghĩa điểm dừng**

Điểm mà tại đó các đạo hàm riêng cấp một bằng không được gọi là điểm dừng.

• **Định lý (Điều kiện đủ của cực trị).** *Giả sử:*

(i) $z = f(x, y)$ *khả vi hai lần;*

(ii) $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$ *(hay (a, b) là điểm dừng);*

(iii) *tất cả các đạo hàm riêng cấp hai của $z = f(x, y)$ tồn tại trong một lân cận của (a, b), ký hiệu:*

$$A = f''_{xx}(a, b),\ B = f''_{xy}(a, b),\ C = f''_{yy}(a, b), \Delta = AC - B^2.$$

Nếu:

1) $\Delta > 0$ và $A < 0$, thì $f(a, b)$ là cực đại địa phương.

2) $\Delta > 0$ và $A > 0$, thì $f(a, b)$ là cực tiểu địa phương.

3) $\Delta < 0$, thì $f(x, y)$ có điểm yên ngựa tại (a, b).

4) $\Delta = 0$, thì không có kết luận.

$<$ Tìm cực trị hàm $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

$$\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 - 6y = 0 \Leftrightarrow y = x^2/2, \\ f'_y &= 3y^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3(x^2/2)^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x^3 - 8) = 0. \end{aligned}$$

Nghiệm: $x = 0$, $y = 0$ hoặc $x = 2$, $y = 2$. Nghĩa là ta có hai điểm dừng $P_1(0,0)$ và $P_2(2,2)$.
Tính $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = -6$, $f''_{yy} = 6y$, $\Delta = 36xy - 36$.
* Điểm dừng $P_1(0,0)$
$A = 0$, $B = -6$, $C = 0$, $\Delta = -36 < 0 \Rightarrow P_1(0,0)$ là điểm yên ngựa.
* Điểm dừng $P_2(2,2)$
$A = 12$, $B = -6$, $C = 12$, $\Delta = 108 > 0 \Rightarrow f(2,2) = -8$ là cực tiểu địa phương $>$

- **Định nghĩa**

Cực trị có điều kiện của hàm hai biến $z = f(x, y)$ là cực trị của hàm này với điều kiện là các biến x, y phải thỏa ràng buộc cho bởi phương trình $\varphi(x, y) = 0$.

- **Hàm Lagrange**

Hàm Lagrange $L(x, y; \lambda)$ liên kết với hàm $z = f(x, y)$ và ràng buộc $\varphi(x, y) = 0$ là

$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

trong đó λ là một nhân tử hằng chưa xác định, gọi là nhân tử Lagrange.

Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm Lagrange đạt cực trị địa phương tại $(x_0, y_0; \lambda_0)$ thì hàm $z = f(x, y)$ đạt cực trị tại (x_0, y_0) với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$.

• **Phương pháp nhân tử hóa Lagrange** giải bài toán tìm cực trị hàm $z = f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$
1) Đưa vào hàm Lagrange $L(x, y; \lambda)$.
2) Tìm điểm dừng của hàm Lagrange, giải hệ

$$\begin{cases} L'_x & = & 0 \\ L'_y & = & 0 \\ L'_\lambda & = & 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x_0, y_0; \lambda_0).$$

3) Xét dấu d^2L tại từng điểm (x_0, y_0, λ_0). Chú ý, do $\varphi(x, y) = 0$ nên $d\varphi(x, y) = 0$ suy ra

$$d^2L(x_0, y_0; \lambda_0) = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2.$$

Hơn nữa, ta có liên hệ

$$\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0 \qquad (*)$$

- Nếu $d^2L(x_0, y_0; \lambda_0) < 0$ thì $z_{\max} = f(x_0, y_0)$.
- Nếu $d^2L(x_0, y_0; \lambda_0) > 0$ thì $z_{\min} = f(x_0, y_0)$.

$<$ 1) Tìm cực trị hàm $f(x,y) = x^2 + y^2$ thỏa điều kiện $x + y = 10$.
Tiến hành theo các bước:
1) Đưa vào hàm Lagrange $L(x,y;\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 10)$.
2) Tìm điểm dừng

$$\begin{cases} 2x + \lambda & = & 0 \\ 2y + \lambda & = & 0 \\ x + y - 10 & = & 0 \end{cases}$$

Hai phương trình đầu cho $x = y - \lambda/2$. Thay vào phương trình cuối ta tìm được $\lambda = 10$. Điểm dừng $(5,5;-10)$.
3) Tính $d^2L(5,5;-10)$. Ta có $L''_{xx} = 2$, $L''_{xy} = 0$, $L''_{yy} = 2$ suy ra

$$d^2L(5,5;-10) = 2(dx^2 + dy^2) > 0$$

nên $f_{\min} = f(5,5) = 50$. Chú ý, trong bài này ta không cần dùng điều kiện (*).

2) Tìm cực trị hàm $f(x, y, z) = x + y + z^2$ thỏa điều kiện $z - x = 1$ và $y - zx = 1$.
Cách thứ nhất: Từ các phương trình ràng buộc, ta có $z = 1 + x$, $y = 1 + zx = 1 + x + x^2$. Thay vào biểu thức của hàm cho ta được hàm một biến

$$f(x, y(x), z(x)) = g(x) = 2x^2 + 4x + 2 \quad \text{(parabol)}.$$

Hàm $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$ $(\Rightarrow y = 1, z = 0)$

$$g_{\min} = g(-1) = f_{\min} = f(-1, 1, 0) = 0.$$

Cách thứ hai: dùng phương pháp nhân tử Lagrange.
Ta thực hiện các bước:
1) Đưa vào hàm Lagrange

$$L(x, y, z; \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1).$$

2) Tìm điểm dừng

$$\begin{cases} L'_x = 1 - \lambda_1 - z\lambda_2 & = & 0 \\ L'_y = 1 + \lambda_2 & = & 0 \\ L'_z = 2z + \lambda_1 - x\lambda_2 & = & 0 \\ L'_{\lambda_1} = z - x - 1 & = & 0 \\ L'_{\lambda_2} = y - xz - 1 & = & 0 \end{cases}$$

Giải ra ta được: $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Điểm dừng: (-1,1,0;1,-1).
3) Tính $d^2L(-1,1,0;1,-1)$. Ta có (tính cụ thể)

$$d^2L(-1,1,0;1,-1) = (2dz + dx)dz.$$

Từ ràng buộc $z - x - 1 = 0$ ta suy ra $dz - dx = 0$ nên

$$d^2L(-1,1,0;1,-1) = 3dz^2 > 0.$$

Vậy, $f(x,y,z)$ đạt cực tiểu tại $(-1,1,0)$ với các ràng buộc cho >

Như đã biết hàm liên tục trên miền đóng sẽ đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị này có thể đạt tại điểm trong (cực trị địa phương) hoặc điểm biên (cực trị có điều kiện). Vì vậy các bước tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là

1) Tìm các điểm dừng bên trong miền và tính giá trị tại các điểm này.

2) Tìm các điểm dừng (của hàm Lagrange với ràng buộc là biên) rồi tính giá trị tại các điểm này.

3) Chọn giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong tất cả các giá trị tìm được.

$<$ Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm $z = x^2 + y^2$ trong hình tròn $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9$.

Ở đây miền D được giới hạn bởi đường tròn (biên)

$$(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9.$$

1) $(z'_x =)2x = 0$, $(z'_y =)2y = 0 \Rightarrow (0,0)$ là điểm dừng (nằm trong D). Giá trị hàm tại điểm dừng $f(0,0) = 0$.
2) Trên biên D. Hàm Lagrange:
$L(x,y;\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda((x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 - 9)$. Ta có:

$$\begin{aligned}
(L'_x =)2x + 2\lambda(x-\sqrt{2}) &= 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{1+\lambda}\\
(L'_y =)2y + 2\lambda(y-\sqrt{2}) &= 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{1+\lambda}\\
(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 - 9 &= 0.
\end{aligned}$$

Thay x, y vào phương trình cuối

$$2\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\lambda} - \sqrt{2}\right)^2 = 9 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{5},\ \lambda = -3.$$

Điểm dừng: $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}; -\frac{3}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}; -3\right)$. Giá trị điểm dừng lần lượt là $f\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = 25$, $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$.

3) Vậy giá trị lớn nhất là 25, giá trị nhỏ nhất là 0 $>$

• **Định nghĩa phương trình vi phân**
Một phương trình chứa các đạo hàm hoặc vi phân của một hay nhiều biến phụ thuộc, theo một hay nhiều biến độc lập được gọi là phương trình vi phân.

• **Loại**
Nếu phương trình chỉ chứa đạo hàm của một hay nhiều biến phụ thuộc, theo một biến độc lập, thì nó được gọi là phương trình vi phân thường.

$<$

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 1, \quad (x+y)dx - 4ydy = 0,$$
$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

là các phương trình vi phân thường $>$.

Phương trình chứa đạo hàm riêng của một hay nhiều biến phụ thuộc của hai hay nhiều biến độc lập được gọi là phương trình đạo hàm riêng.

$<$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$$

là các phương trình đạo hàm riêng $>$

- **Cấp**

Cấp cao nhất của đạo hàm có mặt trong phương trình vi phân được gọi là cấp của phương trình.

$<$

$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = x$ phương trình vi phân thường cấp 2,

$x^2dy + ydx = 0$ phương trình vi phân thường cấp 1,

$a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ phương trình đạo hàm riêng cấp 4 $>$

Nội dung của giáo trình này liên quan đến phương trình vi phân thường, dạng tổng quát:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \qquad (*)$$

• **Tuyến tính hay phi tuyến**

Phương trình vi phân (*) được gọi là tuyến tính nếu nó có dạng:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Chú ý, biến phụ thuộc y và các đạo hàm của nó là bậc nhất (lũy thừa 1). Các hệ số chỉ phụ thuộc biến độc lập x.

$<$

$$\begin{aligned} xdy + ydx = 0 &\text{ tuyến tính cấp 1,} \\ y'' - 2y' + y = 0 &\text{ tuyến tính cấp 2,} \\ x^3y''' - x^2y'' + 3xy' + 5y = e^x &\text{ tuyến tính cấp 3,} \\ yy'' - 2y' = x \text{ và } y''' + y^2 = 0 &\text{ phi tuyến cấp 2 và 3 } > \end{aligned}$$

- **Định nghĩa**

$*$ Hàm bất kỳ $f(x)$ xác định trên khoảng I nào đó thỏa mãn phương trình vi phân được gọi là nghiệm của phương trình vi phân trên I. Đồ thị của nghiệm được gọi là đường cong tích phân.

$<$ 1) Hàm $y = x^4/16$ là nghiệm phương trình $y' - xy^{1/2} = 0$ trên khoảng $(-\infty, \infty)$.

Vì $y' = \dfrac{x^3}{4}$ nên $y' - xy^{1/2} = \dfrac{x^3}{4} - x\left(\dfrac{x^4}{16}\right)^{1/2} = 0.$

2) Hàm $y = xe^x$ là nghiệm phương trình $y'' - 2y' + y = 0$ trên khoảng $(-\infty, \infty)$.

Vì $y' = e^x + xe^x$, $y'' = 2e^x + xe^x$ nên

$$y'' - 2y' + y = 2e^x + xe^x - 2(e^x + xe^x) + xe^x = 0 \ >$$

Trong hai phương trình vi phân trên $y = 0$ cũng là nghiệm.

* Nghiệm phương trình vi phân đồng nhất bằng không trên I được gọi là nghiệm tầm thường.

* Nghiệm của phương trình vi phân có thể ở dạng hiện, $y = f(x)$, hoặc ở dạng ẩn, $F(x, y) = 0$.
$<$ Với $-2 < x < 2$ hệ thức $x^2 + y^2 - 4 = 0$ là một nghiệm ẩn của phương trình $y' = -x/y$.
Dùng công thức đạo hàm hàm ẩn,

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \; >$$

Để ý rằng hệ thức $x^2 + y^2 - c = 0$, với $c \in \mathbb{R}$ bất kỳ, là nghiệm ẩn của phương trình vi phân trong thí dụ trên.
* Tổng quát, nghiệm của phương trình vi phân cấp n có chứa n tham số (còn gọi là hằng số tích phân),

$$y = f(x, c_1, \ldots, c_n), \quad \text{hay} \quad F(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0.$$

Các nghiệm này được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân.

* Bằng cách cho các hằng số $c_1, \ldots, c_n$ các giá trị cụ thể ta được một nghiệm, gọi là nghiệm riêng.
* Đôi khi phương trình vi phân có một nghiệm không nhận được từ nghiệm tổng quát với bất kỳ cách chọn lựa tham số nào. Nghiệm như vậy gọi là nghiệm kỳ dị.

• **Phương trình vi phân – Mô hình toán học**

Trong khoa học và kỹ thuật chúng ta thường muốn mô tả hay mô hình một hiện tượng hay hệ thống (vật lý) bằng các đại lượng toán học. Việc mô tả này bắt đầu bằng sự chỉ định các biến phản ảnh sự thay đổi của hệ thống và tập các giả thiết hợp lý về hệ thống. Các giả thiết này bao gồm các quy luật kinh nghiệm liên quan đến hệ thống. Cấu trúc toán học của các giả thiết này thường là phương trình vi phân mà nghiệm của nó phù hợp với "ứng xử" của hệ thống.

• **Bài toán Cauchy** của phương trình vi phân là nghiệm phương trình

$$y' = f(x, y)$$

thỏa điều kiện

$$y(x_0) = y_0.$$

• **Định lý.** *Nghiệm của bài toán Cauchy tồn tại và duy nhất nếu hàm $f(x, y)$ và đạo hàm riêng $\partial f/\partial y$ liên tục trong lân cận điểm $P_0(x_0, y_0)$.*

• **Phương trình vi phân có biến phân ly**

* Phương trình vi phân có dạng:

$$y' = f(x)g(y)$$

hay

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0.$$

* Cách giải: 1) Tách biến:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

hay

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0.$$

2) Tích phân hai vế

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

hay

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C.$$

$<$ 1) Tích phân tổng quát của phương trình $y' = \tan x \tan y$.
Phân ly biến số: $\cot y dy = \tan x dx$.
Tích phân hai vế:

$$\begin{aligned} \ln|\sin y| &= -\ln|\cos x| + \ln C \\ \sin y &= \frac{C}{\cos x}. \end{aligned}$$

2) Tìm nghiệm riêng của phương trình $(1 + x^2)dy + ydx = 0$ với điều kiện đầu $y(1) = 1$.
Phân ly biến số:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1 + x^2}.$$

Tích phân hai vế:

$$\ln|y| = -\arctan x + C.$$

Điều kiện đầu cho $0 = -\frac{\pi}{4} + C$. Nghiệm riêng:
$\ln|y| = -\arctan x + \frac{\pi}{4}$ $>$

- **Phương trình vi phân đẳng cấp (thuần nhất)**

* **Định nghĩa.** Hàm $f(x,y)$ được gọi là hàm đẳng cấp bậc m, nếu

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y).$$

* Phương trình vi phân dạng

$$y' = f(x,y)$$

được gọi là phương trình vi phân đẳng cấp nếu $f(x,y)$ là hàm đẳng cấp bậc 0. Trường hợp, phương trình vi phân dạng

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

được gọi là đẳng cấp, nếu $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ là những hàm đẳng cấp cùng bậc.

* Cách giải: bằng cách đặt $y = u(x)x \Rightarrow y' = u'x + u$ hay $dy = xdu + udx$, ta dẫn phương trình về phương trình vi phân có biến phân ly.

$<$ 1) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0.$$

Đặt $y = u(x)x$. Phương trình được biến đổi thành

$$\begin{aligned} (x^2 + 2x^2u)dx + x^2u(xdu + udx) &= 0 \\ (1 + u^2)dx + uxdu &= 0 \quad \text{(ptvp có biến phân ly)} \end{aligned}$$

Phân ly biến số rồi lấy tích phân ta được:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{udu}{(1+u)^2} = C$$

$$\ln|x| + \ln|1+u| + \frac{1}{1+u} = C.$$

Trở lại biến cũ, ta được

$$\ln|x| + \ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + \frac{x}{x+y} = C.$$

2) Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x} \quad \text{với điều kiện đầu } y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Đặt $y = u(x)x$. Phương trình thành:

$$u'x + u = u + \sin u \Rightarrow u'x = \sin u.$$

Phân ly biến số rồi tích phân ta được:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sin u} &= \int \frac{dx}{x} \\ \ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right| &= \ln|x| + \ln C \Rightarrow u = 2\arctan(Cx). \end{aligned}$$

Trở về hàm cũ $y = 2x\arctan(Cx)$. Dùng điều kiện đầu ta có $C = 1$. Vậy, nghiệm riêng là $y = 2x\arctan x \quad >$

- **Phương trình vi phân toàn phần (vi phân đúng)**

* **Định nghĩa.** Biểu thức vi phân dạng

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

được gọi là vi phân đúng trong miền $D \subset \mathbb{R}^2$ nếu tồn tại hàm $U(x,y)$ sao cho

$$dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

* **Định lý.** *Cho $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ là hai hàm liên tục và có các đạo hàm cấp một liên tục trong $D = [a,b] \times [c,d]$. Thì điều kiện cần và đủ để $Pdx + Qdy$ là vi phân đúng trong D là*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

với mọi $(x,y) \in D$.

* Phương trình vi phân $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ được gọi là phương trình vi phân toàn phần nếu biểu thức ở vế trái là vi phân đúng.
* Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân toàn phần là $U(x, y) = C$. Để giải phương trình vi phân toàn phần ta tìm hàm $U(x, y)$.
$<$ Giải phương trình vi phân $(2x - 5y)dx + (-5x + 3y^2)dy = 0$.
Đây là phương trình vi phân toàn phần. Gọi $U(x, y)$ là hàm cần tìm.

$$dU := \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = (2x - 5y)dx + (-5x + 3y^2)dy$$

suy ra

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x - 5y, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -5x + 3y^2.$$

Cố định y, tích phân phương trình thứ nhất

$$U = x^2 - 5xy + C(y). \qquad (*)$$

Đạo hàm hai vế (*) theo biến y, rồi dùng phương trình thứ hai,

$$-5x + C'(y) = \frac{\partial U}{\partial y} = -5x + 3y^2 \Rightarrow C'(y) = 3y^2 \Rightarrow C(y) = y^3.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là $x^2 - 5xy + y^3 = C \ >$

• **Phương trình vi phân tuyến tính cấp một**

* Phương trình vi phân dạng

$$y' + p(x)y = q(x)$$

được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp một.

* Cách giải: gồm 2 bước.

1) Giải phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất $y' + p(x)y = 0$. Nghiệm tổng quát là $y_* = Ce^{-\int pdx} = Cy_1$, trong đó $y_1 = e^{-\int pdx}$ được gọi là nghiệm cơ sở của phương trình thuần nhất.

2) Giải phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất $y' + p(x)y = q(x)$.

Tìm nghiệm dưới dạng $y = Ce^{-\int pdx}$

$$\begin{array}{lrcl} p(x)\times & y & = & Ce^{-\int pdx} \\ & y' & = & -C(x)p(x)e^{-\int pdx} + C'(x)e^{-\int pdx} \\ \hline & q(x) & = & C'(x)e^{-\int pdx} \end{array}$$

Giải ra $C(x) = \int q(x)e^{\int pdx}dx + C$. Như vậy, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất là

$$y = e^{-\int pdx}\left[\int q(x)e^{\int pdx}dx + C\right].$$

$<$ Tìm nghiệm riêng của $y'\cos^2 x + y = \tan x$ thỏa điều kiện đầu $y(0) = 0$.

Phương trình có thể được viết lại: $y' + y/cos^2x = \tan x/cos^2x$.

$$p = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow e^{\int pdx} = e^{\tan x},$$

$$\begin{aligned}\int qe^{\int pdx}dx &= \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} e^{\tan x} dx \\ &= \int ue^u du \quad (u = \tan x,\ du = dx/\cos^2 x) \\ &= ue^u - e^u = \tan x e^{\tan x} - e^{\tan x}.\end{aligned}$$

Nghiệm tổng quát:

$$y = e^{-\tan x}(\tan x e^{\tan x} - e^{\tan x} + C).$$

Dùng điều kiện đầu $y(0) = 0$: $0 = e^0(-1 + C) \Rightarrow C = 1$.
Vậy, nghiệm riêng

$$y = \tan x \ >$$

• **Phương trình Bernoulli**
* Phương trình có dạng $y' + p(x)y = q(x)y^m$ $(m \neq 0; 1)$ là phương trình Bernoulli.

* Cách giải: đặt $z = y^{1-m}$ phương trình được biến đổi thành phương trình vi phân tuyến tính

$$\frac{1}{1-m} z' + p(x) z = q(x).$$

$<$ Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^4$.
Đây là phương trình vi phân Bernoulli với $p = 1/x$, $q = x^2$, $m = 4$.
Đặt $z = y^{-3}$ ta được $z' - \dfrac{3}{x} z = -3x^2$. Giải phương trình tuyến tính:

$$e^{\int p dx} = e^{\int (-3/x) dx} = \frac{1}{x^3}, \int q e^{\int p dx} dx = \int \frac{-3}{x} dx = -3 \ln x.$$

Nghiệm tổng quát

$$z = x^3(-3 \ln x + C) \Rightarrow y = \frac{1}{x \sqrt[3]{(-3 \ln x + C)}} \quad >$$

• **Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng**

Dạng:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = f(x)$$

trong đó a, b là các hằng số. Nếu $f(x) \equiv 0$ thì phương trình vi phân được gọi là thuần nhất.

* **Trường hợp thuần nhất** $y'' + ay' + b = 0$ (*)

Tìm nghiệm dưới dạng $y = e^{kx}$, k là hằng số. Thay vào (*)

$$(k^2 + ak + b)e^{kx} = 0 \Rightarrow k^2 + ak + b = 0. \qquad (**)$$

Phương trình (**) được gọi là phương trình đặc trưng. Phương trình này có nghiệm:

$$k_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

(1) $\Delta = a^2 - 4b > 0$ phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt k_1, k_2. Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm độc lập tuyến tính $y_1 = e^{k_1 x}$ và $y_2 = e^{k_2 x}$. Nghiệm tổng quát:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

trong đó C_1, C_2 là hằng số tích phân.
(2) $\Delta > 0$ phương trình đặc trưng có nghiệm kép $k_1 = k_2 = k$. Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm độc lập tuyến tính $y_1 = e^{kx}$ và $y_2 = xe^{kx}$. Nghiệm tổng quát:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x}$$

trong đó C_1, C_2 là hằng số tích phân.
(3) $\Delta < 0$ phương trình đặc trưng có nghiệm phức

$$k_{1,2} = \frac{-a \pm i\sqrt{-(a^2 - 4b)}}{2} = \alpha \pm i\beta$$

Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm độc lập tuyến tính $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ và $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nghiệm tổng quát:

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

$<$ 1) Tìm nghiệm tổng quát của $y'' - y' - 2y = 0$. Phương trình đặc trưng: $k^2 - k - 2 = 0$. Nghiệm đặc trưng: $k_1 = -1$, $k_2 = 2$. Nghiệm tổng quát: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$.
2) Tìm nghiệm tổng quát của $y'' + 4y' + 4 = 0$. Phương trình đặc trưng: $k^2 + 4k + 4 = 0$. Nghiệm đặc trưng: $k_1 = k_2 = -2$. Nghiệm tổng quát: $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x)$.
3) Tìm nghiệm tổng quát của $y'' - 2y' + 5y = 0$. Phương trình đặc trưng: $k^2 - k + 5 = 0$. Nghiệm đặc trưng: $k_{1,2} = 1 \pm 2i$. Nghiệm tổng quát: $y = e^{x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$ $>$

* **Trường hợp không thuần nhất** $y'' + ay' + b = f(x)$ (***)
• **Định lý.** *Nếu* $y_p(x)$ *là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (***) và* $y_g(x, C_1, C_2)$ *là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (*), thì nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là tổng*

$$y(x) = y_g(x, C_1, C_2) + y_p(x).$$

Như vậy, để giải phương trình không thuần nhất (***) ta thực hiện các bước:
1) Tìm nghiệm tổng quát $y_g(x, C_1, C_2)$ của phương trình thuần nhất tương ứng (*).
2) Tìm nghiệm riêng $y_p(x)$ của phương trình không thuần nhất (***).
3) Áp dụng định lý.

Phương pháp hệ số bất định tìm nghiệm riêng

Dựa vào dạng của vế phải phương trình không thuần nhất, $f(x)$.

1) $f(x) = e^k x P_n(x)$, trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n. Nghiệm riêng có dạng

$$y_p(x) = x^q e^{kx} Q_n(x),$$

trong đó $Q_n(x)$ là đa thức bậc n với các hệ số chưa xác định, $q = 0, 1$ hay 2 tương ứng với trường hợp k không là nghiệm, là nghiệm đơn hay nghiệm kép của phương trình đặc trưng.

2) $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$, trong đó $P_n(x)$, $Q_m(x)$ lần lượt là đa thức bậc n, m. Nghiệm riêng có dạng

$$y_p(x) = x^q e^{\alpha x}(S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x),$$

trong đó $S_N(x), T_N(x)$ là các đa thức bậc $N = \max\{m, n\}$, $q = 0$ hay 1 tương ứng với trường hợp $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm hay là nghiệm của phương trình đặc trưng.

• **Định lý cộng nghiệm.** *Nếu $y_1(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình $y'' + ay' + by = f_1(x)$, và nếu $y_2(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình $y'' + ay' + by = f_2(x)$ thì hàm $y_p(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ là nghiệm của phương trình $y'' + ay' + by = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$.*

$<$ 1) Tìm nghiệm tổng quát phương trình $y'' + 3y' + 2y = e^x$.
Tiến hành theo 3 bước.

B1: Tìm nghiệm tổng quát phương trình thuần nhất $y'' + 3y' + 2y = 0$. Phương trình đặc trưng: $k^2 + 3k + 2 = 0$. Nghiệm đặc trưng: $k_1 = -1, k_2 = -2$. Nghiệm tổng quát:

$$y_g(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

B2: Tìm nghiệm riêng phương trình không thuần nhất $y'' + 3y' + 2y = e^x$. Vế phải $f(x) = x^2 \Rightarrow P_2(x) = x^2$, $k = 0$ (không trùng với nghiệm đặc trưng). Dạng nghiệm riêng: $y_p = Ax^2 + Bx + C$.

Thay vào phương trình

$$\begin{aligned}
2 \times y_p &= Ax^2 + Bx + C \\
3 \times y_p' &= 2Ax + B \\
y_p'' &= 2A \\
x^2 = y_p'' + 3y_p' + 2y_p &= 2Ax^2 + (6A + 2B)x + 2A + 3B + 2C \\
\Rightarrow & \quad 2A = 1,\ 6A + 2B = 0,\ 2A + 3B + 2C = 0.
\end{aligned}$$

Giải ra: $A = 1/2$, $B = -3/2$, $C = 7/4$. Nghiệm riêng:

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

B3: Áp dụng định lý

$$y = y_g(x) + y_p(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

2) Tìm nghiệm tổng quát phương trình $y'' - 2y' + y = \cos x$.
B1: $k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = 1$ (kép). Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng: $y_g = (C_1 + C_2x)e^x$.
B2: Vế phải $f(x) = \cos x \Rightarrow P_0 = 1,\ Q_0 = 0,\ \alpha = 0,\ \beta = 1$ ($\pm i$ không trùng với nghiệm đặc trưng). Dạng nghiệm riêng:
$y_p = A\cos x + B\sin x$.
Thay vào phương trình

$$\begin{aligned} y_p &= A\cos x + B\sin x \\ (-2)\times y_p' &= B\cos x - A\sin x \\ y_p'' &= -A\cos x - B\sin x \\ \cos x = y_p'' - 2y_p' + y_p &= -2B\cos x + 2A\sin x \\ &\Rightarrow -2B = 1,\ 2A = 0. \end{aligned}$$

Giải ra: $A = 0,\ B = -1/2$. Nghiệm riêng:

$$y_p = -\frac{1}{2}\sin x.$$

B3: Áp dụng định lý

$$y = y_g(x) + y_p(x) = (C_1 + C_2 x)e^x - \frac{1}{2}\sin x.$$

3) Tìm nghiệm tổng quát phương trình $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x$.
B1: Tìm nghiệm tổng quát phương trình thuần nhất $y'' - y' = 0$.
Phương trình đặc trưng: $k^2 - k = 0$. Nghiệm đặc trưng: $k_1 = 0, k_2 = 1$. Nghiệm tổng quát:

$$y_g = C_1 + C_2 e^x.$$

B2: Tìm nghiệm riêng phương trình không thuần nhất $y'' - y' = e^x$. Vế phải là tổng $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = 2x - 1 - 3e^x$.
Với $f_1(x) = 2x - 1 \Rightarrow P_1 = 2x - 1$, $k = 0$ (trùng với nghiệm đặc trưng đơn). Nghiệm riêng có dạng:

$$y_1 = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

Với $f_2(x) = -3e^x \Rightarrow P_0 = -3$, $k = 1$ (trùng với nghiệm đặc trưng đơn). Nghiệm riêng có dạng: $y_2 = Cxe^x$.

Áp dụng định lý cộng nghiệm. Ta tìm nghiệm riêng dạng
$y_p = Ax^2 + Bx + Cxe^x$.
Thay vào phương trình

$$\begin{aligned}
y_p &= Ax^2 + Bx + Cxe^x \\
(-1) \times y_p' &= 2Ax + B + C(1+x)e^x \\
y_p'' &= \qquad + 2A + C(2+x)e^x \\
2x - 1 - 3e^x = y_p'' - y_p' &= -2Ax + 2A - B + Cx \\
\Rightarrow & \quad -2A = 2,\ 2A - B = -1,\ C = -3.
\end{aligned}$$

Giải ra: $A = -1$, $B = -1$, $C = -3$. Nghiệm riêng:

$$y_p = -x^2 - x - 3e^x.$$

3) Áp dụng định lý, nghiệm tổng quát:

$$y = C_1 + C_2e^x - x^2 - x - 3e^x \quad >$$

*** Phương trình vi phân cấp hai có thể dẫn về phương trình cấp một**

+ Phương trình có vế phải không chứa hàm cần tìm

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right).$$

Đặt $p = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$. Phương trình thành:

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p) \quad \text{(phương trình vi phân cấp một).}$$

< Giải phương trình vi phân $y'' = 1 - (y')^2$. Đặt $p = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$. Phương trình thành:

$$\frac{dp}{dx} = 1 - p^2 \Rightarrow \frac{dp}{1-p^2} = dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+p}{1-p}\right| = x + \frac{1}{2}\ln C_1.$$

Trở về biến cũ:

$$p = \frac{C_1 e^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1} \Rightarrow y' = \frac{C_1 e^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1}.$$

Nghiệm tổng quát:

$$y = \int \frac{C_1 e^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1} dx + C_2 \; >$$

$+$ **Phương trình có vế phải không chứa biến độc lập** x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Đặt $p(y) = \dfrac{dy}{dx}$. Vì p là hàm của y nên

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Thay vào phương trình ta được

$$p\frac{dp}{dy} = f\left(y, p\right) \quad \text{(phương trình vi phân cấp một).}$$

$<$ Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $2yy'' + (y')^2 = 0$. Đặt $p(y) = \dfrac{dy}{dx}$, phương trình thành

$$2yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \quad \text{(phương trình vi phân có biến phân ly).}$$

Tách biến rồi tích phân hai vế

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y} \Rightarrow \ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C_1|.$$

Trường hợp $y > 0$: $p = C_1 y^{-1/2}$. Trở về biến cũ

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^{-1/2} \Rightarrow \sqrt{y}dy = C_1 dx \Rightarrow y^{3/2} = C_1 x + C_2 \quad >$$