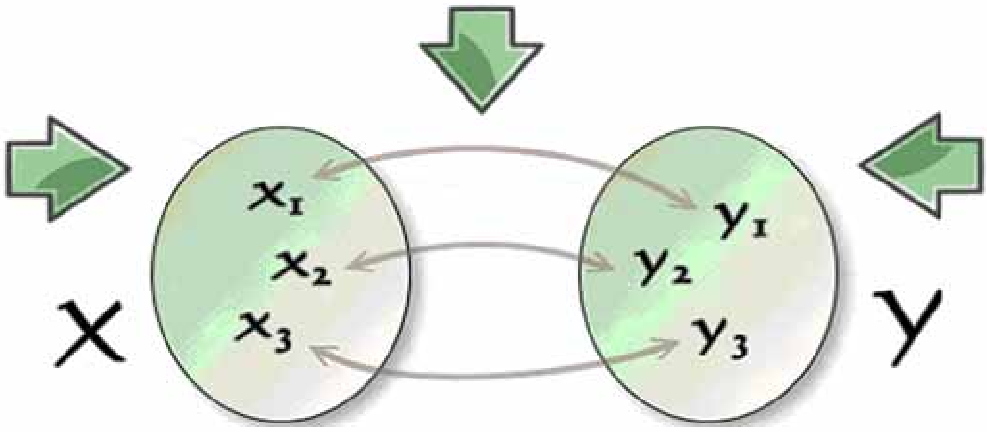
Bài 1: TẬP HỢP – ÁNH XẠ



Mục tiêu

- Nắm được các phép toán về tập hợp và quan hệ giữa các tập hợp.
- Hiểu về quan hệ hai ngôi và các quan hệ cơ bản là quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự.
- Nắm được khái niệm về ánh xạ. Phân biệt rõ các ánh xạ: đơn ánh, song ánh, toàn ánh.
- Hiểu về là ánh xạ ngược, thu hẹp và mở rộng một ánh xạ.
- Nắm được khái niệm về lực lượng của tập hợp.
- Giải được các bài toán về tập hợp, quan hệ, ánh xạ theo cách tự luận và theo trắc nghiệm.

Thời lượng

Bạn đọc nên để 10 giờ để nghiên cứu luyện tập + 6 giờ làm bài tập.

Nội dung

Tập hợp, quan hệ và ánh xạ là các công cụ cơ bản để xây dựng nên các đối tượng của toán học nói chung và của đại số tuyến tính nói riêng. Bài 1 gồm các nội dung:

- Tập hợp và các phép toán về tập hợp
- Quan hệ
- Ánh xạ

Bài toán mở đầu: Mối quan hệ giữa một tập hợp người và tập hợp tháng sinh

Xét mối quan hệ giữa tập hợp người P và tập tháng sinh M. Đối với mỗi người $p \in P$ có một phần tử duy nhất $m \in M$ vì mỗi người sinh ở một tháng nhất định. Ta có thể diễn tả mối quan hệ đó bằng ánh xạ $f: P \to M$, trong đó mỗi phần tử $p \in P$ gọi là một phần tử gốc (đối), còn mỗi phần tử m tương ứng với p gọi là ảnh của p, ta viết $f(p) = m$.

1.1. Tập hợp và các phép toán về tập hợp

1.1.1. Khái niệm về tập hợp

Tập hợp được coi là một khái niệm ban đầu của toán học (không định nghĩa). Người ta hiểu tập hợp là một sự tụ tập các đối tượng có tính chất chung nào đó. Các đối tượng đó gọi là các phần tử của tập hợp đang xét. Việc phần tử thuộc tập hợp là một tương quan cơ bản.

1.1.2. Mô tả tập hợp

Để mô tả một tập hợp người ta thường dùng hai phương pháp sau:

Phương pháp 1. Liệt kê các phần tử của tập hợp đó

Các ví dụ:

(1) Tập hợp các số tự nhiên

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}; \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

(2) Tập hợp các số nguyên

$$\mathbb{Z} = \{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}$$

(3) Tập hợp các số hữu tỷ

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p, q \text{ là các số nguyên; } q \neq 0 \right\}$$

Các số hữu tỷ có thể viết thành các số thập phân hữu hạn hay vô hạn tuần hoàn.

Chẳng hạn, $\frac{3}{4} = 0,75; -\frac{4}{3} = -1,333... = -1,(3)$

(4) Một số vô tỷ là một số có thể viết dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Chẳng hạn $\sqrt{2} = 1.414213563..., \pi = 3.14159...$

(5) Tập hợp tất cả các số hữu tỷ và vô tỷ gọi là tập số thực, ký hiệu là $\mathbb{R}$.

Phương pháp 2. Chỉ ra những tính chất mà mọi phần tử của tập hợp đó đều có.

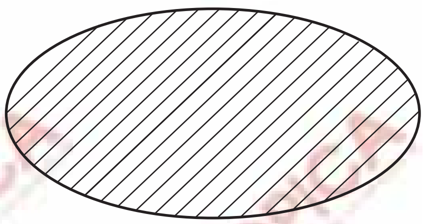
Ví dụ như tập hợp A gồm những phần tử x có tích chất p(x), ta viết

$A = \{ x \mid p(x) \}$.

Ví dụ: Tập hợp các số chẵn

$A = \{ m \mid m = 2n, \text{ n nguyên} \}$

Để diễn tả tập hợp bằng hình ảnh một cách khái quát, người ta dùng **Biểu đồ Ven** (h.1.1) biểu diễn một tập hợp. Đó là một đường cong kín, phẳng và không tự cắt, phần bên trong đường cong chứa tất cả các phần tử của tập hợp.



Hình 1. 1

Để chỉ x là một phần tử của tập A, ta viết $x \in A$. Nếu y không thuộc A, ta viết $y \notin A$.

Tập hợp không chứa phần tử nào gọi là tập rỗng, ký hiệu $\varnothing$. Ví dụ, tập các nghiệm thực của phương trình $x^2 = -1$ là tập rỗng.

1.1.3. Một số khái niệm cơ bản

Mệnh đề toán học: Là một khẳng định toán học chỉ có thể đúng hoặc sai (không thể vừa đúng, vừa sai), ký hiệu bởi các chữ in $A, B, C, \ldots$

Ví dụ : $A: 20 > 12$ là mệnh đề đúng.

$B: 6 = 7$ là mệnh đề sai.

Mệnh đề kéo theo: Nếu từ mệnh đề A đúng suy ra mệnh đề B cũng đúng thì ta viết: $A \Rightarrow B$ (đọc là A kéo theo B).

Ví dụ: $a < b \Rightarrow (a + c) < (b + c)$

Mệnh đề tương đương: Nếu $A \Rightarrow B$ và $B \Rightarrow A$ thì ta viết $A \Leftrightarrow B$ (đọc là A tương đương B, hay là A khi và chỉ khi B, hay A là điều kiện cần và đủ để có B).

Ví dụ: $(a < b) \Leftrightarrow (b > a)$

Các lượng từ:

- Lượng từ phổ biến: Để chỉ với mỗi phần tử x của tập X đều có tính chất $p(x)$, ta viết:

$$\forall x \in X : p(x)$$

Ví dụ: $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$

- Lượng từ tồn tại: Để chỉ có ít nhất một phần tử x của tập X có tính chất $p(x)$, ta viết:

$$\exists x \in X : p(x)$$

Ví dụ: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0$, đó là $x = 1, x = 2$.

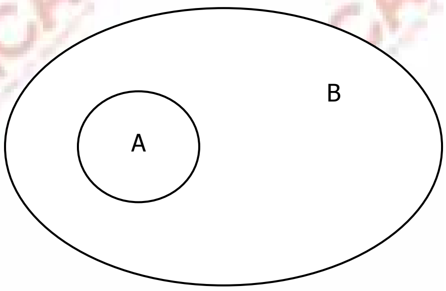
1.1.4. Quan hệ giữa các tập hợp

1.1.4.1. Tập con

Định nghĩa: Nếu mọi phần tử của tập A cũng là phần tử của tập B thì ta nói A là tập con của B.

Ký hiệu $A \subset B$.

Đọc $\begin{cases} \text{A bao h□m trong B} \\ \text{B chứa A} \\ \text{A là tập con của B} \end{cases}$



Hình 1. 2

Ví dụ: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Ta coi $\varnothing \subset A$

Do định nghĩa $A \subset A$

Tính bắc cầu $\begin{cases} A \subset B \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow A \subset C$

1.1.4.2. Sự bằng nhau của hai tập hợp

Định nghĩa: Nếu một phần tử bất kỳ của tập hợp A đều thuộc về tập hợp B và ngược lại, mỗi phần tử của tập hợp B đều thuộc về tập hợp A thì ta nói A và B bằng nhau hay trùng nhau.

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$

Ví dụ: Nếu: $\begin{matrix} A = \{x, y, ..., \Delta\} \\ B = \{y, ..., x, \Delta\} \end{matrix}$ thì có $A = B$.

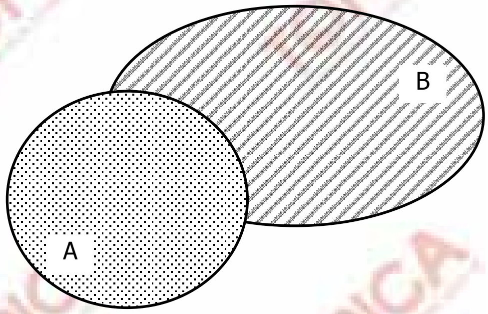
1.1.5. Các phép toán về tập hợp

1.1.5.1. Phép hợp

Định nghĩa 1.1: Hợp của hai tập A và B là tập hợp tạo bởi tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B (h.1.3).

Ký hiệu $A \cup B$.

Đọc A hợp B.



Hình 1.3

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ hoặc } x \in B)$$

Ví dụ 1:

$$\left.\begin{matrix} A = \{a;\ b;\ c;\ d\} \\ B = \{c;\ d;\ e;\ f\} \end{matrix}\right\} A \cup B = \{a; b; c; d; e; f\}$$

Tính chất 1.1

(1) $A \cup A = A$ (tính lũy đẳng)

(2) $A \cup B = B \cup A$ (tính giao hoán)

(3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (tính kết hợp)

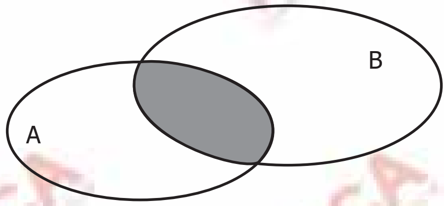
(4) $\varnothing \cup A = A \cup \varnothing = A$

1.1.5.2. Phép giao

Định nghĩa 1. 2: Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp tạo bởi các phần vừa thuộc A và vừa thuộc B (h.1.4).

Ký hiệu $A \cap B$. Đọc A giao B

$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ và } x \in B)$



Hình 1.4

Ví dụ 2: Trong điều kiện của ví dụ 1, ta có:

$$A \cap B = \{c;\ d\}$$

Tính chất 1.2

$$(1)\,A \cap A = A \quad \text{(tính lũy đẳng)}$$

$$(2)\,A \cap B = B \cap A \quad \text{(tính giao hoán)}$$

$$(3)\,A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C \quad \text{(tính kết hợp)}$$

$$(4)\,\varnothing \cap A = A \cap \varnothing = \varnothing$$

Việc chứng minh các tính chất này không khó và dành cho bạn đọc.

CHÚ Ý

Khi $A \cap B = \varnothing$ thì ta nói A và B rời nhau.

Tính chất 1. 3 (Tính chất chung của $\cup$ và $\cap$)

(1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$: Tính phân phối của $\cup$ đối với $\cap$.

(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$: Tính phân phối của $\cap$ đối với $\cup$.

Chứng minh tính chất (1):

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in (B \cap C) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in C \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (A \cup B) \\ x \in (A \cup C) \end{cases} \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\Rightarrow A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Ngược lại

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow \begin{cases} x \in (A \cup B) \\ x \in (A \cup C) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in C \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C).$$

Việc chứng minh tính chất (2) làm tương tự.

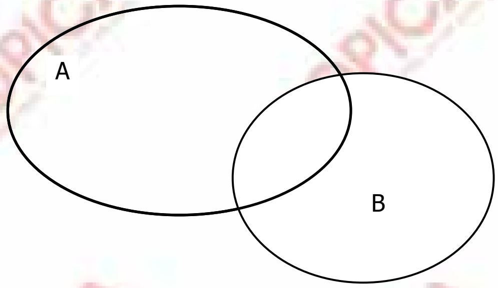
1.1.5.3. Hiệu của hai tập hợp

Định nghĩa 1.3: Hiệu của tập A và tập B là tập tạo bởi tất cả các phần tử thuộc A mà không thuộc B (h.1.5).

Ký hiệu $A\setminus B \Leftrightarrow (x \in A$ và $x \notin B)$.

Ví dụ 3: Trong điều kiện của ví dụ 1, ta có:

$$A\setminus B = \{a; b\}$$

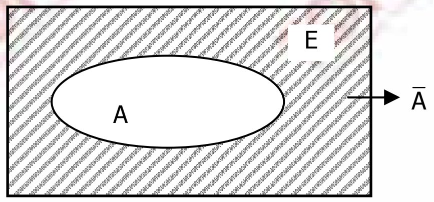


Hình 1.5

1.1.5.4. Tập bù

Khi $A \subset E$ thì $E\setminus A$ gọi là bù của A trong E, ký hiệu

$$C_E A \text{ hay } \overline{A} \text{ (h.1.6).}$$



Hình 1.6

Ví dụ 4: Gọi A là tập nghiệm của phương trình

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad (1)$$

Gọi B là tập nghiệm của phương trình

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad (2)$$

Giải (1) $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2 \Rightarrow A = \{1;2\}$

Giải (2) $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3 \Rightarrow B = \{1;3\}$

$$A \cup B = \{1;2;3\}; A \cap B = \{1\}; A\setminus B = \{2\}$$

Tập nghiệm của phương trình

$$\left(x^2 - 3x + 2\right)\left(x^2 - 4x + 3\right) = 0 \text{ là } A \cup B = \{1;\ 2;\ 3\}.$$

Luật DeMorgan

$\forall A, B \in E$ ta có

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad (1)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (2)$$

Xét chứng minh (1)

$$x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \overline{A} \\ x \in \overline{B} \end{cases} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Tương tự ta chứng minh được chiều ngược lại.

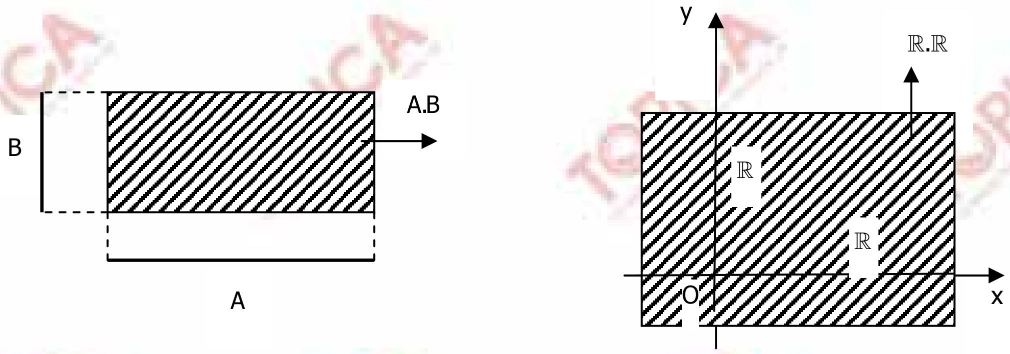
Việc chứng minh (2) cũng tương tự.

1.1.5.5. Tích của hai tập hợp (tích Đề các)

Định nghĩa 1.4: Tích của tập hợp A với tập hợp B (theo thứ tự ấy) là tập hợp gồm tất cả các cặp thứ tự $(x;y)$ với $x \in A$ và $y \in B$ (h.1.7).

Ký hiệu $A \times B$ hoặc A.B. Đọc là A nhân B

$$(x;y) \in A \times B \Leftrightarrow (x \in A \text{ và } y \in B)$$



Hình 1.7: Mặt phẳng tọa độ xOy được đồng nhất với tích Đề các ℝ.ℝ

CHÚ Ý

Tích của hai tập hợp không có tính giao hoán vì

$$(x;y) \neq (y;x) \text{ nếu } x \neq y; (2;3) \neq (3;2).$$

Ví dụ: $A = \{1;3\}; B = \{2;x\}$

$$A.B = \{(1;2);(1;x);(3;2);(3;x)\}$$

$$B.A = \{(2;1);(2;3);(x;1);(x;3)\}$$

$$A.B \neq B.A$$

1.1.5.6. Phân hoạch

Ta nói các tập con $A_1, A_2, ..., A_n$ của tập X tạo nên một phân hoạch của X nếu:

$$(1) \bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$$

$$(2)\ A_i \cap A_j = \varnothing \qquad i \neq j$$

1.2. Quan hệ

1.2.1. Khái niệm về quan hệ hai ngôi

Giả sử cho tập X khác rỗng và một tính chất $\mathcal{R}$ được thỏa mãn với một số cặp phần tử a, b nào đó của X. Khi đó, ta nói a có quan hệ $\mathcal{R}$ với b và viết là $a\ \mathcal{R}\ b$, còn $\mathcal{R}$ được gọi là một quan hệ hai ngôi trong X.

Ví dụ:

1. Trong tập $\mathbb{R}$ mọi số thực, quan hệ "$a = b$" hoặc quan hệ "$a < b$" là các quan hệ hai ngôi.
2. Trong tập mọi đường thẳng trên mặt phẳng, quan hệ vuông góc giữa hai đường thẳng là quan hệ hai ngôi.
3. Trên tập $\mathbb{N}^*$ các số nguyên dương, "a là ước số của b" là quan hệ hai ngôi.
4. Trên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}^*$ "a nguyên tố với b" là một quan hệ hai ngôi.

1.2.2. Các tính chất có thể có của quan hệ trong một tập hợp

Quan hệ $\mathcal{R}$ trong tập X (tức $\mathcal{R} \subset X^2$) có thể có các tính chất sau:

- Tính phản xạ: $a\ \mathcal{R}\ a, \forall a \in X$ (tức là $(a,a) \in \mathcal{R},\ \forall a \in X$).

  Ví dụ: Quan hệ "$a = b$" trên $\mathbb{R}$ có tính phản xạ vì $a = a$.
- Tính đối xứng: $a\,\mathcal{R}\ b \Rightarrow b\ \mathcal{R}\ a$ (tức là $(a, b) \in \mathcal{R}$ thì $(b, a) \in \mathcal{R}$).

  Ví dụ: Quan hệ "$a = b$" trên $\mathbb{R}$ có tính đối xứng vì $a = b \Rightarrow b = a$.
- Tính phản đối xứng: $(a\ \mathcal{R}\, b$ và $b\,\mathcal{R}\ a) \Rightarrow a = b$.

  Ví dụ: Quan hệ $a < b$ trên $\mathbb{R}$ phản đối xứng, vì từ $a < b$ không thể có $b < a$.
- Tính bắc cầu: $(a\ \mathcal{R}\ b \Rightarrow b\ \mathcal{R}\ c) \Rightarrow a\,\mathcal{R}\ c$.

  Ví dụ: Quan hệ "$a = b$" trên $\mathbb{R}$ có tính bắc cầu vì $a = b$ và $b = c \Rightarrow a = c$.

  Quan hệ $a < b$ trên $\mathbb{R}$ có tính bắc cầu, vì từ $a < b$ và $b < c$ suy ra $a < c$.

Các quan hệ định nghĩa trong các mục dưới đây tỏ ra đặc biệt quan trọng trong nhiều lĩnh vực toán học.

1.2.3. Quan hệ tương đương

Quan hệ $\mathcal{R}$ trong tập X được gọi là quan hệ tương đương nếu nó có tính phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

Trong trường hợp này, ta viết $a \sim b$ thay vì $a\,\mathcal{R}\ b$.

Ví dụ: Trong $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ quan hệ "$a = b$" là một quan hệ tương đương.

Trong tập các đường thẳng trong không gian quan hệ "đường thẳng D đồng phương với đường thẳng D′ là một quan hệ tương đương.

Các lớp tương đương:

Giả sử $\sim$ là một quan hệ tương đương trong X. Với mỗi phần tử $a \in X$, ta ký hiệu $C(a)$ là tập hợp mọi phần tử thuộc X tương đương với a và gọi là lớp tương đương chứa a. $C(a) = \{x \in X \mid x \sim a\}$.

Do tính phản xạ $a \sim a$ nên mỗi tập con $C(a)$ không rỗng.

Hơn nữa, nếu $C(a) \cap C(b) \neq \varnothing$ thì $C(a) = C(b)$.

Thật vậy, giả sử $c \in C(a) \cap C(b)$, thì ta có: $c \in C(a)$ và $c \in C(b)$.

Tức là $c \sim a$ và $c \sim b$ hay $b \sim c \sim a$. Từ đó, do tính bắc cầu, suy ra $b \sim a$.

Vậy $b \in C(a)$.

Lập luận tương tự cũng có $a \in C(b)$, tức là $C(a) = C(b)$.

Ta thu được định lý sau:

Định lý. Một quan hệ tương đương trong X xác định một phân hoạch của X, mỗi phần tử của phân hoạch này là một lớp tương đương.

Họ các lớp tương đương này được gọi là tập thương, ký hiệu $X/\sim$.

Ví dụ: Trong tập các số nguyên $\mathbb{Z}$

Xét quan hệ $\mathcal{R}$: $a\mathcal{R}\ b \Leftrightarrow a - b = 2p$ với $a, b, p \in \mathbb{Z}$.

Ta có:

$$(a\,\mathcal{R}\ a) \Leftrightarrow a - a = 2p \quad (p = 0) \qquad \text{(phản xạ)}$$

$$(a\,\mathcal{R}\ b) \Leftrightarrow a - b = 2p \Leftrightarrow (b - a) = -2p \Leftrightarrow (b\,\mathcal{R}\ a) \text{ (đối xứng)}$$

$$a - b = 2p;\ b - c = 2q$$

$$\Rightarrow (a - c) = (a - b) + (b - c) = 2(p + q) \qquad \text{(bắc cầu).}$$

Vậy $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương.

Ta có: $a = b + 2p$.

Lớp tương đương ứng với $b = 0$ là các số chẵn.

Lớp tương đương ứng với $b = 1$ là các số lẻ.

1.2.4. Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 1.5: Quan hệ $\mathcal{R}$ trong tập X được gọi là quan hệ thứ tự (hay quan hệ thứ tự bộ phận) nếu có tính phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

Nếu ngoài ra, với bất kỳ hai phần tử nào $x \in X, y \in X$ đều có $x\ \mathcal{R}\ y$ hoặc $y\ \mathcal{R}\ x$ thì quan hệ thứ tự gọi là thứ tự toàn phần (hay thứ tự tuyến tính).

Khi $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự trong X, ta nói X được xếp thứ tự bởi $\mathcal{R}$, thay vì $x\ \mathcal{R}\ y$ ta viết $x \le y$ và đọc « x bé hơn y » hoặc « x đi trước y ».

Ta viết $y \ge x$ và đọc là « y lớn hơn x » hoặc « y đi sau x ».

Nếu $x \le y$ và $x \ne y$ ta viết $x < y$ (hay $y > x$).

Ví dụ 1: Quan hệ $<$ hoặc $\le$ thông thường trong tập hợp các số thực là các quan hệ thứ tự toàn phần, $\mathbb{R}$ là tập được sắp thứ tự.

Ví dụ 2: Quan hệ bao hàm $\subset$ trong tập P (X) mọi tập con của tập X là quan hệ thứ tự bộ phận. Tuy nhiên, nó không là thứ tự toàn phần.

Ví dụ 3: Quan hệ "$a \vdots b$" tức a là bội số của b trong $\mathbb{N}^*$ là quan hệ thứ tự bộ phận. Tập X trong đó đã xác định một quan hệ thứ tự gọi là tập được sắp xếp.

1.3. Ánh xạ

1.3.1. Khái niệm về ánh xạ

Định nghĩa 1.6: Cho X và Y là hai tập hợp tùy ý khác rỗng. Một ánh xạ f từ X đến Y là một quy tắc nào đó cho ứng với mỗi phần tử $x \in X$ là một phần tử xác định của Y. Khi đó ta viết y = f(x).

Người ta thường ký hiệu ánh xạ từ X đến Y như sau:

$$f: X \to Y \text{ hoặc } x \in X \mapsto y \in Y.$$

Tập X gọi là miền xác định hay nguồn của ánh xạ, tập Y gọi là đích của ánh xạ. Phần tử $y \in Y$ ứng với phần tử $x \in X$ bởi quy tắc đã cho gọi là ảnh của phần tử x, ký hiệu $y = f(x)$. Nói riêng, khi X và Y là các tập hợp số thì khái niệm ánh xạ trở thành khái niệm hàm số.

Cho $f: X \to Y$ là một ánh xạ từ X vào Y

$A \subset X$ là tập con của X

$B \subset Y$ là tập con của Y

Ta gọi ảnh của A bởi f là tập con của Y xác định bởi

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

Đặc biệt $f(X)$, ảnh của miền xác định X được gọi là miền giá trị của ánh xạ f và ký hiệu bởi

$$f(X) = \operatorname{Im} f$$

Nghịch ảnh của tập con $B \subset Y$ bởi ánh xạ f là tập con của X xác định bởi

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

Khi $A = \{x\}, B = \{y\}$ ta viết $f(x)$ thay vì $f(\{x\}); f^{-1}(y)$ thay vì $f^{-1}(\{y\})$ và gọi tắt là ảnh của x và nghịch ảnh của y theo trình tự tương ứng.

Cần để ý là $f^{-1}(B), B \neq \varnothing$ có thể là tập rỗng.

1.3.1.1. Đơn ánh – Toàn ánh – Song ánh

Trong số các ánh xạ, các ánh xạ dưới đây giữ vai trò quan trọng:

- Ánh xạ f gọi là đơn ánh nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1 = x_2$, nói cách khác hai phần tử khác nhau sẽ có ảnh khác nhau.

  Ví dụ: Xét $\mathbb{R}_+^*$ là tập các số thực dương thì ánh xạ f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ diễn tả bởi $x \mapsto x^2 + 1$ là một đơn ánh.

- Ánh xạ f gọi là toàn ánh, nếu $f(X) = Y$, nói cách khác $\forall y \in Y$ đều tồn tại $x \in X$ sao cho $f(x) = y$.

Ví dụ: Ánh xạ f: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ diễn tả bởi $x \mapsto x^2 + 1$ không phải là một toàn ánh.

Một ánh xạ vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh gọi là song ánh. Ta cũng gọi nó là ánh xạ một đối một (ánh xạ 1 – 1).

Ví dụ: Ánh xạ f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diễn tả bởi $x \mapsto x^3$ là một song ánh.

Nếu $f: X \to Y$ là đơn ánh thì $f: X \to \operatorname{Im} f$ sẽ là toàn ánh, và do đó là song ánh.

Ánh xạ $f: X \to X$ cho bởi $f(x) = x, \forall x \in X$ gọi là ánh xạ đồng nhất trên X, ký hiệu là i_X. Dễ thấy, i_X là song ánh. Trường hợp $X = \mathbb{R}$ là tập mọi số thực thì $i_{\mathbb{R}}$ chính là ánh xạ $y = x$ thông thường.

1.3.2. Ánh xạ hợp của các ánh xạ

Cho ba tập hợp X, Y, Z và hai ánh xạ $f: X \to Y$ và $g: Y \to Z$.

Như vậy mỗi $x \in X$ tạo ra bởi f một và chỉ một $y \in Y$, f(x) = y và mỗi $y \in Y$ tạo ra bởi g một và chỉ một $z \in Z$, g(y) = z. Do đó mỗi $x \in X$ tạo ra (qua trung gian y) một và chỉ một $z \in Z$ xác định bởi g[f(x)] = z. Vậy có ánh xạ từ X tới Z xác định như sau: $x \in X \mapsto z = g[f(x)] \in Z$.

Định nghĩa 1.7: Ánh xạ $h: X \to Z$ xác định bởi $\forall x \in X, h(x) = g(f(x))$ được gọi là hợp thành của các ánh xạ f và g, ký hiệu $h = g \circ f$ theo thứ tự đó, h còn gọi là ánh xạ hợp hay tích của các ánh xạ f và g.

Ví dụ: f và g là các ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ bởi $f(x) = \sin x, g(y) = y^2$ thì

$$(g \circ f)(x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x.$$

Từ định nghĩa suy ra tính chất

- Nếu $f: X \to Y, g: Y \to Z, k: Z \to S$ thì $k \circ (g \circ f) = (k \circ g) \circ f$ (tính kết hợp).

  Do tính chất này, có thể mở rộng phép toán hợp các ánh xạ từ hai sang một số hữu hạn ánh xạ cho trước, và ký hiệu $k \circ g \circ f$ có ý nghĩa hoàn toàn xác định.

- Giả sử $f: X \to Y$ và $g: Y \to Z$ là các ánh xạ thì

  Nếu f và g đều là đơn ánh thì $g \circ f$ đơn ánh.

  Nếu f và g đều là song ánh thì $g \circ f$ song ánh.

  Nếu f và g đều là toàn ánh thì $g \circ f$ toàn ánh.

1.3.3. Ánh xạ ngược (của một song ánh)

Giả sử $f: X \to Y$ là song ánh thì với bất kỳ $y \in Y$ đều tồn tại duy nhất một phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) = y$.

Ánh xạ $f^{-1}: Y \to X$ xác định bởi

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

gọi là ánh xạ ngược của f.

Ta cũng thấy ánh xạ ngược của f^{-1} lại là ánh xạ f, vậy f và f^{-1} là cặp song ánh ngược của nhau.

Nói riêng, khi Y = X và $f^{-1} = f$ nghĩa là $f^{-1}(x) = f(x), \forall x \in X$ thì f gọi là ánh xạ nội quy (involution) hay ánh xạ đối hợp.

Chẳng hạn, nếu $\mathbb{R}^*$ là tập mọi số thực khác 0 thì ánh xạ f: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ xác định bởi $f(x)=\frac{1}{x}$ là ánh xạ nội quy.

Ánh xạ f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x)=x^3$ có ánh xạ ngược $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$.

Ánh xạ $f:\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to[-1;1]$ xác định bởi $f(x)=\sin x$ có ánh xạ ngược $f^{-1}(x)=\arcsin x$.

Nếu $f:X\to Y$ là song ánh thì ánh xạ hợp $f^{-1}\circ f$ là ánh xạ đồng nhất trên X, tức là

$$f^{-1}\circ f=i_X.$$

Tương tự, $f\circ f^{-1}=i_Y$ là ánh xạ đồng nhất trên Y.

Nếu $f:X\to Y$ và $g:Y\to Z$ là các song ánh thì $g\circ f$ cũng là song ánh và

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

1.3.4. Thu hẹp và mở rộng một ánh xạ

Giả sử $f:X\to Y$ là một ánh xạ, $A\subset X$ là tập con thực sự của X.

Ánh xạ $g:A\to Y$ xác định bởi $g(x)=f(x),\forall x\in A$ gọi là thu hẹp của ánh xạ f trên tập A, ta ký hiệu $g=f_A$.

Nếu $X\subset X', X'\neq X$ thì ánh xạ h: $X'\to Y$ sao cho $h(x)=f(x),\forall x\in X$ gọi là mở rộng của f lên tập X.

Ta cũng nhận thấy là một ánh xạ f cho trước có thể tồn tại nhiều mở rộng của nó ngay cả khi tập X' được hoàn toàn xác định.

1.3.5. Lực lượng của tập hợp

Một số ví dụ mở đầu:

A ={a; b; c; d} có 4 phần tử, B = {x; y; z. t} có 4 phần tử;

M = {1; 2; …; n} có n phần tử; E ={x_1; x_2; …; x_n} có n phần tử.

Những tập này chỉ có một số hữu hạn phần tử, gọi là các tập hữu hạn.

Bây giờ xét:

$\mathbb{N}$ = {0, 1, 2, ... , n; …}, $\mathbb{R}$ – tập các số thực.

Các tập này có vô số phần tử, gọi là các tập vô hạn.

Lực lượng của một tập hợp là số phần tử của tập hợp đó.

Định nghĩa 1.8: Cho hai tập hợp A và B khác rỗng (hữu hạn hoặc vô hạn). Nếu tồn tại một song ánh $f:A\to B$ thì ta nói A và B đồng lực lượng.

Tập có cùng lực lượng với tập M gọi là tập hữu hạn, trong đó M = {1; 2;..., n}.

Rõ ràng, hai tập hữu hạn đồng lực lượng khi và chỉ khi chúng có cùng số phần tử. Vậy khái niệm "cùng lực lượng" là sự khái quát hóa khái niệm "cùng số lượng" thông thường.

Nếu A và B đồng lực lượng, ta nói A tương đương với B và viết $A\leftrightarrow B$

Tập có cùng lực lượng với tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ gọi là tập vô hạn đếm được.

Tập vô hạn không cùng lực lượng với tập ℕ gọi là tập không đếm được.

Người ta chứng minh được rằng tập các số thực ℝ là tập không đếm được.

Các tập hữu hạn, hoặc vô hạn đếm được thường được gọi chung là đếm được.

Nếu X là một tập vô hạn đếm được thì sẽ tồn tại một song ánh f: $\mathbb{N} \to X$.

Ta ký hiệu $f(i) = x_i$, i = 0, 1, 2, … Vì f là song ánh thì cũng là toàn ánh nên:

$$X = f(\mathbb{N}) = \{ x_0; x_1; x_2; \dots\}$$

Do đó nhờ song ánh f ta có thể liệt kê (hay đánh số) tất cả các phần tử của tập X. Vậy ta có:
Một tập vô hạn là đếm được khi và chỉ khi các phần tử của nó đánh số được.

Định lý: Hợp của một họ đếm được các tập đếm được là một tập đếm được.
Hệ quả: Nếu X và Y là các tập đếm được thì tích Đề các XxY cũng là một tập đếm được.

1.3.6. Quy nạp toán học

Nhiều định lý phát biểu rằng P(n) là đúng với mọi nguyên dương, trong đó P(n) là một hàm mệnh đề. Quy nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh các định lý thuộc loại như thế. Nói cách khác, quy nạp toán học thường được sử dụng để chứng minh các mệnh đề dạng $\forall n\ P(n)$, trong đó n là số nguyên dương tùy ý. Quá trình chứng minh P(n) là đúng với mọi số nguyên dương n bao gồm hai bước:

- Bước cơ sở: Chỉ ra mệnh đề P(1) là đúng.
- Bước quy nạp: Chứng minh phép kéo theo $P(n) \to P(n + 1)$ là đúng với mọi số nguyên dương n, trong đó người ta gọi P(n) là giả thiết quy nạp.

Khi hoàn thành cả hai bước, chúng ta đã chứng minh P(n) là đúng với mọi số nguyên dương, tức là đã chứng minh P(n) là đúng.

Ví dụ: Bằng quy nạp toán học, hãy chứng minh rằng tổng n số nguyên dương lẻ đầu tiên là n^2.

Giải: Gọi P(n) là mệnh đề “tổng n số nguyên dương lẻ đầu tiên là n^2”. Đầu tiên ta cần làm bước cơ sở, tức là phải chỉ ra P(1) là đúng. Sau đó phải chứng minh bước quy nạp, tức là cần chỉ ra P(n + 1) là đúng nếu giả sử P(n) là đúng.

- Bước cơ sở: P(1) hiển nhiên là đúng vì $1 = 1^2$.
- Bước quy nạp: Giả sử P(n) đúng, tức là với mọi n nguyên dương lẻ ta có:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Ta phải chỉ ra P(n + 1) là đúng, tức là:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Do giả thiết quy nạp ta suy ra:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1)$$
$$= [1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)] + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Đẳng thức này chứng tỏ P(n + 1) được suy ra từ P(n).

Vì P(1) là đúng và vì mệnh đề kéo theo $P(n) \to P(n + 1)$ là đúng với mọi n nguyên dương, nguyên lý quy nạp toán học chỉ ra rằng P(n) là đúng với mọi n nguyên dương.

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

Các bạn đã được học về Tập hợp và Ánh xạ.

Các bạn cần ghi nhớ các vấn đề sau:

- Hiểu về tập hợp và các phép toán về tập hợp.
- Nắm được khái niệm về quan hệ giữa các tập hợp, đặc biệt là quan hệ hai ngôi và các quan hệ cơ bản: quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự.
- Khái niệm về ánh xạ với các ánh xạ cơ bản: đơn ánh, song ánh, toàn ánh. Tiếp đó là ánh xạ ngược, thu hẹp và mở rộng một ánh xạ.
- Cuối cùng là lực lượng của tập hợp.
- Giải được các bài toán thông thường về tập hợp, quan hệ, ánh xạ theo cách tự luận và theo trắc nghiệm.

Bài tiếp theo các bạn sẽ được học về Định thức, Ma trận và Hệ phương trình đại số tuyến tính.

BÀI TẬP

1. Cho E và F là hai tập con của một tập X. Chứng minh rằng

a) $E \subset F \Leftrightarrow E \cup F = F$

b) $E \subset F \Leftrightarrow E \cap F = E$.

2. Chứng minh rằng

a) $A(B \cup C) = AB \cup AC$

b) $A(B \cap C) = AB \cap AC$.

3. Các ánh xạ f: $A \to B$ sau là đơn ánh, toàn ánh, song ánh ? Xác định ánh xạ ngược nếu có:

a) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x + 7$

b) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

4. Cho hai tập E, F và ánh xạ f: $E \to F$. A và B là hai tập con của E. Chứng minh rằng

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B).$$

5. Cho hai tập có thứ tự E và F, với thứ tự được cho bởi "$\leq$" trên cả hai tập. Quan hệ $\mathcal{R}$ sau đây xác định trên $E \times F$ có phải là quan hệ thứ tự không?

$$(x; y)\ \mathcal{R}\ (x'; y') \Leftrightarrow x < x' \text{ hoặc } x = x' \text{ và } y \leq y'.$$

6. Cho $f : E \to F$ và T là ánh xạ tương đương trên F.

Người ta xác định quan hệ $\mathcal{R}$ trên E bởi $x\ \mathcal{R}\ y \Leftrightarrow f(x) T f(y)$.

Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ cũng là quan hệ tương đương.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Trong tập các số tự nhiên, quan hệ nào sau đây là tương đương ?

A. a chia hết cho b B. a không nguyên tố với b

C. $a = b$ D. $a < b$

2. Cho $A = \{x | f(x) = 0\}, B = \{x | g(x) = 0\}, C = \{x | f(x).g(x) = 0\}$ với $y = f(x)$ và $y = g(x)$ xác định trên toàn bộ $\mathbb{R}$. Khi đó:

A. $C = A \cup B$; B. $C = A \cap B$;

C. $C \subset A \cup B$; D. $C \subset A \cap B$.

3. Xét hai tập A và B như trong Bài 2 và $D = \{x | f^2(x) + g^2(x) = 0\}$. Khi đó

A. $D = A \cap B$; B. $D = A \cup B$;

C. $D \subset A \cap B$; D. $D \subset A \cup B$.

4. Giả sử $y = g(x)$ xác định trên toàn bộ $\mathbb{R}$ và cho $I = \{x | g(x) > 0\}$, $G = \{x | g(x) < 0\}$, $H = \{x | g(x) = 0\}$. Khi đó:

A. $I = \overline{G} \cap \overline{H}$; B. $I = \overline{G} \cup \overline{H}$;

C. $I \subset \overline{G} \cap \overline{H}$; D. $I \subset \overline{G} \cup \overline{H}$.

5. Quan hệ nào trong các quan hệ sau là quan hệ thứ tự

A. $a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow a \vdots b$ (a chia hết cho b);

B. $a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow$ a và b không nguyên tố cùng nhau;

C. $aTb \Leftrightarrow a^2 \le b^2$;

D. $aUb \Leftrightarrow a^3 - b^3 = a - b$.

6. Cho hai ánh xạ f: $\mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ và g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định như sau:

$$f : x \to \frac{1}{x}; \qquad g : x \to \frac{2x}{1+x^2}$$

A. f là đơn ánh; B. f là toàn ánh;

C. g là đơn ánh; D. g là toàn ánh.