

## Chương 2

# ĐỊNH THỨC

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Năm 2018

## Chương 2. ĐỊNH THỨC

1. Định nghĩa và tính chất
2. Định thức và ma trận khả nghịch
3. Ứng dụng định thức để giải hệ PTTT

## 2.1. Định nghĩa và tính chất

- ➊ Định nghĩa
- ➋ Quy tắc Sarrus
- ➌ Khai triển định thức theo dòng, theo cột
- ➍ Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

## 2.1.1. Định nghĩa

**Định nghĩa.** Cho  $A$  là ma trận vuông cấp  $n$ . Ta gọi ma trận  $A(i|j)$  là ma trận có được từ  $A$  bằng cách *xóa đi dòng  $i$  và cột  $j$*  của  $A$ . Rõ ràng ma trận  $A(i|j)$  có cấp là  $n - 1$ .

**Ví dụ.** Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 10 & 4 \end{pmatrix}$ . Tìm ma trận  $A(1|2)$  và  $A(2|3)$ ?

**Đáp án.**

$$A(1|2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \\ 9 & 10 & 4 \end{pmatrix}; \quad A(2|3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 3 \\ 9 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Định nghĩa.** Cho  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ . **Định thức** của ma trận  $A$ , được ký hiệu là  $|A|$  (hay  $\det A$ ) là một **số thực** được xác định bằng quy nạp theo  $n$  như sau:

- Nếu  $n = 1$ , nghĩa là  $A = (a)$ , thì  $|A| = a$ .
- Nếu  $n = 2$ , nghĩa là  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , thì  $|A| = ad - bc$ .
- Nếu  $n > 2$ , nghĩa là  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ , thì

$$\begin{aligned}
 |A| &\stackrel{\text{dòng 1}}{=} \sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} |A(\mathbf{1}|j)| \\
 &= a_{11} |A(\mathbf{1}|1)| - a_{12} |A(\mathbf{1}|2)| + \dots + a_{1n} (-1)^{1+n} |A(\mathbf{1}|n)|.
 \end{aligned}$$

**Ví dụ.** Cho  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ . Khi đó  $|A| = 4 \times 5 - (-2) \times 3 = 26$ .

**Ví dụ.** Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Giải.**

$$\begin{aligned} |A| &\stackrel{\text{đòng 1}}{=} 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 12 - 16 + 15 = 11. \end{aligned}$$

## 2.1.2. Quy tắc Sarrus ( $n = 3$ )

Cho  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ . Theo định nghĩa của định thức, ta có

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra công thức Sarrus dựa vào sơ đồ sau

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \text{cột1} \\ \downarrow \\ a_{11} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{cột2} \\ \downarrow \\ a_{12} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{cột3} \\ \downarrow \\ a_{13} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{cột1} \\ \downarrow \\ a_{11} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{cột2} \\ \downarrow \\ a_{12} \end{matrix} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

-   -   -   +   +   +

$$\begin{array}{ccccc}
 & \text{cột1} & \text{cột2} & \text{cột3} & \text{cột1} & \text{cột2} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \left( \begin{array}{ccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
 \end{array} \right) .
 \end{array}$$

$\begin{array}{ccccc} - & - & - & + & + & + \end{array}$

$$\begin{aligned}
 |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
 &\quad - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).
 \end{aligned}$$

(Tổng ba đường chéo **đỏ** - tổng ba đường chéo **xanh**)

**Ví dụ.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (1 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 1) - (3 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 5) = -31.$$



## 2.1.3. Khai triển định thức theo dòng và cột

**Định nghĩa.** Cho  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ . Với mỗi  $i, j \in \overline{1, n}$ , ta gọi

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |A(i|j)|$$

là **phần bù đại số** của hệ số  $a_{ij}$ .

**Ví dụ.** Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ . Tìm phần bù đại số của  $a_{12}$  và  $a_{31}$ ?

**Giải.**

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3; \quad c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

**Định lý.** Cho  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ . Với mỗi  $i, j \in \overline{1, n}$ , gọi  $c_{ij}$  là **phần bù đại số** của  $a_{ij}$ . Ta có công thức khai triển  $|A|$

- theo dòng  **$i$** :  $|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{ik}$ .
- theo cột  **$j$** :  $|A| = \sum_{k=1}^n a_{kj} c_{kj}$ .

**Nhận xét.**

$$|A| \stackrel{\text{dòng } i}{=} \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} |A(i|k)|$$

$$\stackrel{\text{cột } j}{=} \sum_{k=1}^n a_{kj} (-1)^{k+j} |A(k|j)|$$

**Ví dụ.** Tính định thức của  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  theo dòng 2 và cột 3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Giải.**

$$\begin{aligned} \bullet |A| &\stackrel{\text{dòng } 2}{=} 5(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 15 - 24 - 14 = -23. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet |A| &\stackrel{\text{cột } 3}{=} 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -9 - 14 + 0 = -23. \end{aligned}$$

**Lưu ý.** Khi tính định thức của ma trận ta nên chọn dòng hay cột có nhiều số 0 để khai triển.

**Ví dụ.** Tính định thức của ma trận  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ .

**Giải.**  $|A| \xrightarrow{\text{cột 2}} -3(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 32 = 96.$

**Ví dụ.**(tự làm) Tính định thức của ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 10 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Đáp án.**  $|B| = -48$

**Mệnh đề.** Cho  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Khi đó:

- (i)  $|A^\top| = |A|$ .
- (ii) Nếu  $A$  có một dòng hay một cột bằng không thì  $|A| = 0$ .
- (iii) Nếu  $A$  là ma trận tam giác thì  $|A|$  được tính bằng tích các phần tử trên đường chéo, nghĩa là

$$|A| = a_{11} \times a_{22} \times \dots \times a_{nn}.$$

**Ví dụ.** Tính định thức các ma trận sau:

$$a) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 9 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

**Đáp án.**

$$|A| = 0; \quad |B| = 2 \times (-3) \times 4 = -24; \quad |C| = (-2) \times 3 \times (-5) = 30.$$

**Định lý.** Nếu  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  thì  $|AB| = |A||B|$ .

**Hệ quả.** Cho  $A, A_1, A_2, \dots, A_m \in M_n(\mathbb{R})$  và  $k \in \mathbb{N}^*$ . Khi đó

(i)  $|A_1 A_2 \dots A_m| = |A_1| |A_2| \dots |A_m|$ ;

(ii)  $|A^k| = |A|^k$ .

**Ví dụ.** Tính định thức của  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Giải.**  $|A| = (1 \times 2 \times 3) \times (4 \times 1 \times 2) = 6 \times 8 = 48$ .

**Ví dụ.**(tự làm) Tính định thức của  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 9 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ .

**Đáp án.**  $|B| = 0$ .

## 2.1.4. Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

**Định lý.** Cho  $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$ . Khi đó

- (i) Nếu  $A \xrightarrow[i \neq j]{d_i \leftrightarrow d_j} A'$  thì  $|A'| = -|A|$ ;
- (ii) Nếu  $A \xrightarrow{\alpha d_i} A'$  thì  $|A'| = \alpha|A|$  hay  $|A| = \frac{1}{\alpha}|A'|$ ;
- (iii) Nếu  $A \xrightarrow[i \neq j]{d_i + \beta d_j} A'$  thì  $|A'| = |A|$ .

**Lưu ý.** Vì  $|A^\top| = |A|$  nên trong quá trình tính định thức ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

**Ví dụ.** Tính định thức của ma trận  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & -8 \\ 5 & -12 & 4 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Giải. } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}d_2} 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}c_2} 2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_2-d_1} 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{dòng 2}} 6(-2)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -84.$$



## Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} d_2 - d_1 \\ d_1 - 2d_1 \\ \hline d_3 - 4d_2 \\ d_4 - 3d_2 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & 15 \\ 0 & 6 & -1 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \hline \hline \text{cột 1} \end{array} 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 11 \\ 7 & -2 & 15 \\ 6 & -1 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \hline \hline d_2 - 2d_3 \end{array} - \begin{vmatrix} 5 & 0 & 11 \\ -5 & 0 & -7 \\ 6 & -1 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \hline \hline \text{cột 2} \end{array} - (-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = -20.$$

## Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} \xrightarrow[\frac{60d_3}{12d_2}]{} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{60} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 20 & 15 & 12 \end{vmatrix}$$
$$\xrightarrow[\frac{c_3-2c_2}{c_1-6c_2}]{\frac{c_2-c_3}{c_1-6c_2}} \frac{1}{4320} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{dòng 1}} -\frac{1}{4320} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2160}.$$

**Lưu ý.** Trong quá trình tính định thức, phép biến đổi sơ cấp loại 3 được khuyến khích dùng bởi vì nó không làm thay đổi giá trị định thức.

**Ví dụ.**(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Đáp án.**  $|A| = -19$ ;  $|B| = -30$ .

**Ví dụ.**(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 18 & 6 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 9 & 3 & -1 & 4 \\ 6 & 9 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 8 \\ -4 & -7 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Đáp án.**  $|C| = 24$ ;  $|D| = -174$ .

**Ví dụ.**(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix};$

b)  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix};$

c)  $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

d)  $C^2 D^T$

**Đáp án.**  $|A| = -27; \quad |B| = 16; \quad |C| = -18; \quad |D| = -19;$

$$|C^2 D^T| = |C^2| |D^T| = |C|^2 |D| = -6156.$$

## 2.2. Định thức và ma trận khả nghịch

- ❶ Ma trận phụ hợp
- ❷ Nhận diện ma trận khả nghịch

## 2.2.1. Ma trận phụ hợp

**Định nghĩa.** Cho  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ . Đặt  $C = (c_{ij})$  với

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |A(i|j)|$$

là phần bù đại số của  $a_{ij}$ . Ta gọi ma trận chuyển vị  $C^\top$  của  $C$  là **ma trận phụ hợp** (hay **ma trận phó**) của  $A$ , ký hiệu là  $\text{adj}(A)$ .

**Ví dụ.** Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ . Tìm ma trận phụ hợp của  $A$ ?

**Giải.**  $c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4$ ;  $c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$ ;

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$$
;  $c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$ ;

Tương tự ta có  $c_{22} = -3$ ;  $c_{23} = -1$ ;  $c_{31} = -2$ ;  $c_{32} = 1$ ;  $c_{33} = 1$ .

Suy ra  $C = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Do đó  $\text{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Ví dụ.**(tự làm) Tìm ma trận phụ hợp của  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ .

**Đáp án.**  $\text{adj}(B) = \begin{pmatrix} -17 & 11 & 18 \\ 19 & -22 & -24 \\ 14 & -11 & -9 \end{pmatrix}$

## 2.2.2. Nhận diện ma trận khả nghịch

**Định lý.** Ma trận vuông  $A$  khả nghịch khi và chỉ khi  $|A| \neq 0$ . Hơn nữa,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A).$$

**Ví dụ.** Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ . Hỏi  $A$  có khả nghịch không? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo của  $A$ .

**Giải.** Ta có  $|A| = -2 \neq 0$ . Suy ra  $A$  khả nghịch. Ta tính được

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Như vậy

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ví dụ.** (tự làm) Những ma trận sau có khả nghịch không? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo của chúng.

$$a) A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad c) C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

**Đáp án.**  $A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ;  $B$  không khả nghịch;

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & -9 \\ -7 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

**Hệ quả.** Ma trận  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  khả nghịch khi và chỉ khi  $ad - bc \neq 0$ . Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**Ví dụ.** Cho  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ . Suy ra  $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Ví dụ.**(tự làm) Cho  $A = \begin{pmatrix} -10 & -13 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$ . Hỏi  $A$  có khả nghịch hay không? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo của  $A$ .

**Đáp án.**  $A^{-1} = \frac{1}{137} \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ -9 & -10 \end{pmatrix}$ .

**Ví dụ.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để ma trận sau khả nghịch

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & m \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}; \quad b) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & m \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Hướng dẫn.** a) Ta có  $|A| = 8m - 72$ . Do đó  $A$  khả nghịch khi

$$8m - 72 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 9.$$

b) Ta có  $|B| = (4m - 4)(0) = 0$ . Do đó  $B$  không khả nghịch với mọi  $m$ .

**Ví dụ.**(tự làm) Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ . Tính  $|A^{-1}|$ ;  $|3A|$ ;  $|\text{adj}(A)|$ .

**Đáp án.**  $|A^{-1}| = \frac{1}{2}$ ;  $|3A| = 54$ ;  $|\text{adj}(A)| = 4$ .

**Mệnh đề.** Cho  $A \in M_n(\mathbb{R})$  và  $A$  khả nghịch. Khi đó

- (i)  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ ;
- (ii)  $|\alpha A| = \alpha^n |A|$ ;
- (iii)  $|\text{adj}(A)| = |A|^{n-1}$ .

**Ví dụ.** Cho  $A, B \in M_3(\mathbb{R})$  và  $|A| = 3, |B| = -2$ . Tính

$$|(2AB)^{-1}| \text{ và } |\text{adj}(AB)|?$$

**Giải.**

- $|(2AB)^{-1}| = \frac{1}{|2AB|} = \frac{1}{2^3|AB|} = \frac{1}{8|A||B|} = \frac{1}{8.(3).(-2)} = -\frac{1}{48}$ ;
- $|\text{adj}(AB)| = |AB|^{3-1} = (|A||B|)^2 = (3.(-2))^2 = 36$ .

## 2.3. Ứng dụng định thức để giải hệ PTTT

- ❶ Quy tắc Cramer
- ❷ Biện luận và giải hệ PTTT bằng Cramer

## 2.3.1. Quy tắc Cramer

**Định lý.** Cho hệ phương trình tuyến tính  $AX = B$  (★) gồm  $n$  ẩn và  $n$  phương trình. Đặt

$$\Delta = \det A; \quad \Delta_i = \det(A_i), \quad \forall i \in \overline{1, n},$$

trong đó  $A_i$  là ma trận có từ  $A$  bằng cách thay cột  $i$  bằng cột  $B$ . Khi đó:

(i) Nếu  $\Delta \neq 0$  thì (★) có một nghiệm duy nhất là:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i \in \overline{1, n}.$$

(ii) Nếu  $\Delta = 0$  và  $\Delta_i \neq 0$  với một  $i$  nào đó thì (★) vô nghiệm.

(iii) Nếu  $\Delta = 0$  và  $\Delta_i = 0 \quad \forall i \in \overline{1, n}$  thì hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm. Trong trường hợp này ta phải dùng phương pháp Gauss hoặc Gauss-Jordan để giải (★).

**Ví dụ.** Giải phương trình sau bằng quy tắc Cramer

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases} \quad (1)$$

**Giải.** Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -14; \quad \Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -7.$$

Vì  $\Delta \neq 0$  nên hệ (1) có nghiệm duy nhất là

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

**Ví dụ.** Giải hệ phương trình sau bằng quy tắc Cramer

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases} \quad (2)$$

**Giải.** Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & 1 & -2 \\ \mathbf{3} & 3 & 3 \\ \mathbf{5} & 7 & 4 \end{vmatrix} = -45.$$

Vì  $\Delta = 0$  và có  $\Delta_1 \neq 0$  nên hệ phương trình vô nghiệm.



**Ví dụ.** Giải hệ phương trình sau bằng quy tắc Cramer

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 10. \end{cases} \quad (3)$$

**Giải.** Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 10 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Vì  $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$  nên không kết luận được nghiệm của hệ.  
Do đó ta phải dùng Gauss hoặc Gauss-Jordan để giải.

Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính, ta có

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 10 \end{array} \right)$$

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3-5d_1]{d_2-2d_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -10 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1-d_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ta có  $z$  là ẩn tự do. Như vậy nghiệm của hệ (3) là

$$\begin{cases} x &= 9 + 9t; \\ y &= -5 - 7t; \\ z &= t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

## 2.3.2. Giải và biện luận hệ PTTT bằng Cramer

**Ví dụ.** Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số  $m \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ -2x_1 + (m-2)x_2 + (m-5)x_3 = 2; \\ mx_1 + x_2 + (m+1)x_3 = -2. \end{cases}$$

**Giải.** Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3);$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & m-5 \\ -2 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -4m + 12;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & 2 \\ -2 & \mathbf{2} & m-5 \\ m & \mathbf{-2} & m+1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{0} \\ -2 & m-2 & \mathbf{2} \\ m & 1 & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = 2m - 6 = 2(m - 3).$$

### Biện luận:

▷ Nếu  $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1; \\ m \neq 3. \end{cases}$  Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là

$$(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{-4}{m-1}, 0, \frac{2}{m-1} \right).$$

▷ Nếu  $\Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$

- Với  $m = 1$ , ta có  $\Delta_1 = 8 \neq 0$  nên hệ vô nghiệm.

- Với  $m = 3$ , ta có  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ . Khi đó hệ phương trình là:

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right) & \xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2+2d_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[d_1-2d_2]{\begin{array}{l} d_3+d_2 \\ -\frac{1}{5}d_2 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6/5 & -4/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ta có  $x_3$  là ẩn tự do. Suy ra nghiệm của hệ là

$$(x_1, x_2, x_3) = \left( -\frac{6}{5}t - \frac{4}{5}, -\frac{2}{5}t + \frac{2}{5}, t \right) \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

**Ví dụ.** Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số  $m \in \mathbb{R}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (m-7)x + 12y - 6z = m; \\ -10x + (m+19)y - 10z = 2m; \\ -12x + 24y + (m-13)z = 0. \end{array} \right.$$

**Giải.**  $\Delta = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & -6 \\ -10 & m+19 & -10 \\ -12 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1);$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m & 12 & -6 \\ 2m & m+19 & -10 \\ 0 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = m(m-1)(m-17);$$

$$\Delta_2 = 2m(m-1)(m-14); \quad \Delta_3 = -36m(m-1).$$

### Biện luận:

▷ Nếu  $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$  và  $m \neq 1$ . Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{m(m-1)(m-17)}{(m-1)(m^2-1)} = \frac{m(m-17)}{m^2-1}; \\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2m(m-1)(m-14)}{(m-1)(m^2-1)} = \frac{m(m-14)}{m^2-1}; \\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-36m(m-1)}{(m-1)(m^2-1)} = \frac{-36m}{m^2-1}. \end{cases}$$

▷ Nếu  $\Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1; \\ m = 1. \end{cases}$

- Với  $m = -1$ , ta có  $\Delta_1 = -36 \neq 0$  nên hệ vô nghiệm.
- Với  $m = 1$ , ta có  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ . Hệ trở thành

$$\begin{cases} -6x & + & 12y & - & 6z & = & 1; \\ -10x & + & 20y & - & 10z & = & 2; \\ -12x & + & 24y & - & 12z & = & 0. \end{cases}$$

Ma trận hóa hệ phương trình ta có

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} -6 & 12 & -6 & 1 \\ -10 & 20 & -10 & 2 \\ -12 & 24 & -12 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{d_3 - 2d_1} \left( \begin{array}{ccc|c} -6 & 12 & -6 & 1 \\ -10 & 20 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

Suy ra hệ vô nghiệm.

**Ví dụ.**(tự làm) Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 1. \end{cases}$$

Xác định giá trị của tham số  $m \in \mathbb{R}$  sao cho:

- a) hệ có một nghiệm duy nhất;
- b) hệ vô nghiệm;
- c) hệ có vô số nghiệm.

**Hướng dẫn.**

$$\Delta = m^3 - 3m + 2 = (m - 1)^2(m + 2);$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2.$$

**Biện luận:**

▷ Nếu  $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2. \end{cases}$  Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là



$$(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2} \right).$$

► Nếu  $\Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1; \\ m = -2. \end{cases}$

- Với  $m = 1$ , ta có  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ . Hệ trở thành

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ x + y + z = 1; \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Giải hệ bằng Gauss hoặc Gauss-Jordan, ta có hệ vô số nghiệm

$$(x_1, x_2, x_3) = (1 - t - s, t, s) \text{ với } t, s \in \mathbb{R}$$

- $m = -2$ , ta có  $\Delta_1 = 9 \neq 0$ . Suy ra hệ vô nghiệm.