HƯỚNG DẪN BÀI TẬP TOÁN RỜI RẠC

CHƯƠNG I: CƠ SỞ LOGIC

1/ a) p(x) đúng $\Leftrightarrow x \in [-2,4]$; p(x) sai $\Leftrightarrow x \in (-\infty,-2) \cup (4,+\infty)$; q(x) đúng $\Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$; q(x) sai $\Leftrightarrow x \in [-1,2]$. Từ đó suy ra chân trị của các vị từ tương ứng theo giá trị của biến thực x.
b) Tương tự a). Để ý $(x^2 - 3x + 10) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

2/ b) Ta có thể viết A = " $(3a + 1) \neq 0$ và $(2a - 5)(3a + 1)^{-1} > 0$ " rồi suy ra $\overline{A}$.
c) và d) Để ý miền xác định của biểu thức rồi thể hiện A tương tự như trong b). Từ đó suy ra $\overline{A}$.
e), f), g), h) và i) A nêu ra các tỉ lệ và dùng một trong các dấu $<, >, =, \leq, \geq$. Từ đó suy ra $\overline{A}$.
j), k), l), m) và n) A nêu ra các số lượng và dùng một trong các dấu $<, >, =, \leq, \geq$. Từ đó suy ra $\overline{A}$.
o) Mệnh đề kéo theo p) Không ai muốn = mọi người không muốn q) Cả lớp = mọi người trong lớp
s) Các cầu thủ = mọi cầu thủ t) $\rightarrow$ x) Các từ nối đều có nghĩa là " và" y) Họ = mọi người trong số họ
z),α) Chúng tôi = mọi người trong chúng tôi ; các anh ấy, nhóm bác sĩ, nhóm kỹ sư được hiểu tương tự

3/ a) $p \vee q$ b) $\overline{p} \vee \overline{q}$ c) $p \vee q \vee r$ d) $p \wedge r$ e) $\overline{p} \wedge \overline{q}$ f) $\overline{p} \vee \overline{q} \vee \overline{r} \vee \overline{s}$

4/ a) $\rightarrow$ h) và j) Dùng các luật logic biến đổi tương đương vế trái thành vế phải.
i) Chiều ($\Rightarrow$) : dùng qui tắc suy diễn tam đoạn luận ; Chiều ($\Leftarrow$) : hiển nhiên

5/ a) $\rightarrow$ g) Dùng các luật logic biến đổi thành **1** h), i) và j) Dùng các luật logic biến đổi thành **O**
a), c), f) và g) Có thể dùng các qui tắc suy diễn để chứng minh hằng đúng.

6/ a) và b) Lần lượt gán $\gamma = \forall$ và $\gamma = \exists$ (mỗi câu xét 2 mệnh đề A_1 và A_2)
c), d), e), f) và g) Lần lượt gán ($\gamma = \forall, \delta = \forall$), ($\gamma = \forall, \delta = \exists$), ($\gamma = \exists, \delta = \forall$), ($\gamma = \exists, \delta = \exists$) [4 mệnh đề]
Ở câu g), để ý $\forall a \in \mathbf{R}, \exists!\, a' \in \mathbf{Z}$ thỏa $a' \leq a < a' + 1$. Ký hiệu a' = [a] và gọi a' là phần nguyên của a.

7/ a) x | y nghĩa là "x là ước số của y" e) Để ý $\forall y \in \mathbf{Q}, 2^y + 2^{-y} \geq 2$ (Cauchy) f) A sai g) A đúng

8/ a) $\rightarrow$ j) Dùng giả thiết qui nạp yếu k) và l) Dùng giả thiết qui nạp mạnh
e) và f) Giải thích bất đẳng thức phụ (dễ dàng) trước khi chứng minh bất đẳng thức chính.
g) Tự giải thích $\forall n \geq 0, 2^{-1} \leq (2^n + 1)^{-1} + (2^n + 2)^{-1} + (2^n + 3)^{-1} + \ldots + (2^n + 2^n)^{-1} < 1$ (*) và dùng bất đẳng thức phụ (*) để chứng minh bất đẳng thức chính.
h) Để ý $(3^{k+1} + 7^{k+1} - 2) = [\, 7(3^k + 7^k - 2) - 4(3^k + 3)\,], \forall k \geq 0$
i) Để ý $\forall n \geq 0, 2 \mid (3.7^n - 3)$ và có thể chứng minh trực tiếp (không cần qui nạp).
j) Đặt $a = 2^{3^k}$ và $b = 1$ thì $(2^{3^{k+1}} + 1) = a^3 + b^3 = (a + b)[\,(a + b)^2 - 3ab\,]$ và giải thích $3^{k+2} \mid (2^{3^{k+1}} + 1)$
k) Ta có $(a^o + a^{-o}) = 2 \in \mathbf{Z}$ và $(a^1 + a^{-1}) \in \mathbf{Z}$ (*). Xét $k \geq 1$ và giả sử $(a^n + a^{-n}) \in \mathbf{Z}, \forall n = 1,\ldots, k$ (**)
Để ý $(a^{k+1} + a^{-k-1}) = (a^k + a^{-k})(a^1 + a^{-1}) - (a^{k-1} + a^{1-k})$ rồi dùng (*) và (**).
l) Thử n = 0 và n = 1. Xét $k \geq 1$ và giả sử $a_n = (\sqrt{5})^{-1}(\alpha^n - \beta^n), \forall n = 0,1,\ldots, k$ (*).
Để ý $a_{k+1} = a_k + a_{k-1} = (\sqrt{5})^{-1}(\alpha^k + \alpha^{k-1} - \beta^{k-1} - \beta^k)$ để suy ra $a_{k+1} = (\sqrt{5})^{-1}(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1})$.

9/, **11**/ và **12**/ Dùng định nghĩa của lượng từ (nếu có), các qui tắc suy diễn phối hợp với các luật logic.

10/ Chọn các phản ví dụ (bằng cách gán cho mỗi biến mệnh đề chân trị 1 hoặc 0 tùy ý) sao cho
a), b), f) Một vế đúng và một vế sai c) và e) Vế trái sai d) Vế trái đúng
g) $\rightarrow$ n) Vế trái đúng, vế phải sai

CHƯƠNG II : TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

1/ C : $m \in \{0, \pm 1\}$ và $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$ D : chỉ cần chọn $n \in \{0,1,2,\ldots,11\}$ và tính trực tiếp các phần tử
E : $\forall n \in \{5,6,7,8\}$, tìm m thỏa $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < 1$ F : xét nghiệm nguyên của $\frac{(x+5)(x-2)}{x+4} \leq 0$.
G : $|x| \geq 4$ và $|x| \leq \sqrt{3} + \sqrt{2} < 4$.

2/ Biểu diễn A và B trên trục x'Ox để xác định kết quả các phép toán tập hợp bù, giao, hội và hiệu.

3/ Rút gọn bằng các phép toán tập hợp a) $A \cup B$ b) $B \setminus A$ c) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ d) B e) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{D}$

4/ Dùng các phép toán tập hợp biến đổi vế này thành vế kia.

5/ Dùng các phép toán tập hợp rút gọn các vế trước khi chứng minh các bao hàm thức.

7/ a), b) và c) Chứng minh " $(x,y) \in$ vế trái $\Leftrightarrow$ $(x,y) \in$ vế phải "
e) và f) Chứng minh " $(x,y) \in$ vế trái $\Rightarrow$ $(x,y) \in$ vế phải "

8/ a) Xét f(1) b) Xét f(ln3) c) Xét f(0) d) Xét f(0) e) Có $a \in [1,3]$ mà $f(a) = 0$ f) Xét f(1/1), f(2/2)

9/ a) $f(2) = f(1/2)$ và $f(x) \leq (1/2), \forall x \in X$ b) $f'(x) > 0$ và $f(x) = (x+3)^2 - 12 \geq -12, \forall x \in X$
c) $f(1) = f(3)$ và $f(X) = Y$ d) $\forall x,t \in X$, $[\, f(x) = f(t) \Rightarrow x = t \,]$ và $f(X) = Y \setminus \{2\}$
e) $f(0) = f(2\pi)$ và $f(x) = 2\sin(x + \pi/3), \forall x \in X$ cho $f(X) = Y$ f) $f'(x) < 0, \forall x \in X$ và $f(X) = Y$

12/ a) $\forall y \in (-1,0)$, phương trình $f(x) = y$ có nghiệm duy nhất trên X là $x = y/(1+y) = y/(1-|y|)$
$\forall y \in [0,1)$, phương trình $f(x) = y$ có nghiệm duy nhất trên X là $x = y/(1-y) = y/(1-|y|)$.
b) $\forall y \in \mathbf{R}$, phương trình $g(x) = y \Leftrightarrow e^{2x} + (1-y)e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + (1-y)t - 3 = 0$ với $t = e^x > 0$
Như vậy $\forall y \in \mathbf{R}$, phương trình $g(x) = y$ có nghiệm duy nhất trên $\mathbf{R}$ là

$$x = \ln \frac{y-1+\sqrt{(y-1)^2+12}}{2}$$

c) $\forall y \in [5,7)$, phương trình $h(x) = y \Leftrightarrow 3x^2 - yx + 2 = 0$ có nghiệm duy nhất trên $[1,2)$ là
$x = x_1 = \frac{y+\sqrt{y^2-24}}{6}$ vì $\sqrt{y^2-24} \in [1,5)$ [loại nghiệm $x = x_2 = \frac{y-\sqrt{y^2-24}}{6} \in (0,1)$].
f) Xét $\varphi : (0,3] \to (1,4]$ với $\varphi(x) = x + 1, \forall x \in (0,3]$. φ là song ánh và $\varphi^{-1}(x) = x - 1, \forall x \in (1,4]$
Xét $\psi : (1,4] \to (2, 4^{-1}.17]$ với $\psi(x) = x + x^{-1}, \forall x \in (1,4]$.
Ta có $r = \psi_o \varphi$. Ta kiểm tra ψ là song ánh để có r là song ánh và $r^{-1} = \varphi^{-1}{}_o \psi^{-1}$.
$\forall y \in (2, 4^{-1}.17]$, phương trình $\psi(x) = y \Leftrightarrow x^2 - yx + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất trên $(1,4]$ là
$x = x_1 = 2^{-1}(y + \sqrt{y^2-4})$ vì $\sqrt{y^2-4} \in (0, 15/4]$ [loại nghiệm $x_2 = (1/x_1) \in [1/4, 1)$].
g) Giải các phương trình ánh xạ, ta có $u = p_o g$, $v = g_o f^{-1}$ và $w = f_o g_o p^{-1}$.

CHƯƠNG III : PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

1/ Dùng $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ lần lượt cho
$(X = A, Y = B \cup C)$, $(X = B, Y = C)$ và $(X = A \cap B, Y = A \cap C)$.

2/ b) Để ý $Y = B \cup H$ với H tùy ý $\subset (E \setminus A)$, $Z = (D \setminus A) \cup K$ với K tùy ý $\subset A$,
$T = (A \setminus B) \cup L$ với L tùy ý $\subset (E \setminus A)$ và $W = P \cup C$ với P tùy ý $\subset A$.

3/ $N = abcdef$ với $b, c, d, e \in \{0, 1,\ldots, 9\}$, $f \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, a, b, c, d, e, f khác nhau đôi một.

a) Trường hợp 1 (N là số nguyên dương) thì $a \in \{1, 2, \ldots,9\}$: dùng nguyên lý nhân và nguyên lý cộng.

* Khi $f = 0$: 9 cách chọn a, 8 cách chọn b, 7 cách chọn c, 6 cách chọn d và 5 cách chọn e.

* Khi $f \in \{2,4,6,8\}$: $0 \in \{b,c,d,e\}$ nên ta có thể giả sử $b = 0$ (3 trường hợp còn lại cho cùng kết quả): 4 cách chọn f, 8 cách chọn a, 7 cách chọn c, 6 cách chọn d và 5 cách chọn e.

b) Trường hợp 2 (N là dãy số nguyên) thì $a \in \{0,1,2, \ldots,9\}$: làm tương tự như trường hợp 1.

4/ b) $A = \{3\} \cup A'$ với $|A'| = 4$ và $A' \subset \{4,5,\ldots,10\}$: để ý số tập hợp A = số tập hợp A'

c) Xét $\min A = 3$, $\min A = 2$ hay $\min A = 1$: mỗi trường hợp tương tự như b) rồi dùng nguyên lý cộng

d) Cách 1 : phối hợp kết quả a) và c) ; Cách 2 : xét $\min A = 4$, $\min A = 5$ hay $\min A = 6$: tương tự như c)

5/ a) Trường hợp $n = 2k$ chẵn [$A_1 = \{1,3,\ldots,(2k-1)\}$, $A_2 = \{2,4,\ldots,2k\}$ có $|A_1| = k$] :

kết quả là $|\wp(A) \setminus \wp(A_1)| = |\wp(A)| \setminus |\wp(A_1)|$.

b) Trường hợp $n = (2k + 1)$ lẻ [$A_1 = \{1,3,\ldots,(2k-1), (2k+1)\}$ có $|A_1| = k + 1$] : tương tự như a) .

6/ $\Omega = \{A \subset S \,/\, |A| = 5\}$ và $\Delta = \{A \subset S \,/\, |A| = 5 \text{ và } 7 \in A\}$. Ta có $|\Omega| = 4\,|\Delta|$ là một phương trình theo ẩn số $n \geq 7$ mà ta cần giải. Việc tính $|\Delta|$ làm tương tự như b) của bài **4** .

7/ $S_1 = \{1, 3,\ldots, 15\}$, $S_2 = \{2, 4,\ldots, 14\}$ có $|S_1| = 8$ và $|S_2| = 7$.

a) Đếm số tập A thỏa $\varnothing \neq A \subset S_1$ b) $A = A_1 \cup A_2$ với $A_1 \subset S_1$, $|A_1| = 3$ và $A_2 \subset S_2$: nguyên lý nhân

c) Như b) thêm $|A_2| = 5$: nguyên lý nhân d) Như b) thêm $|A_2| = 5,6$ hay 7 : nguyên lý nhân và cộng

8/ a) Chỉ cần xác định đội học Anh văn : số cách chia là $C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} = 2^n - 2$.

b) Chỉ cần xác định đội nhỏ (có không quá $2^{-1}n$ sinh viên) :

* Khi $n = 2k$ chẵn : số cách chia là $C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k = 2^{n-1} - 1 + 2^{-1} C_n^k$.

* Khi $n = (2k + 1)$ lẻ : số cách chia là $C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k = 2^{n-1} - 1$

9/ Dùng tổ hợp, nguyên lý nhân và nguyên lý cộng : a) 6 nam và 6 nữ b) (8 + 4) hay (9 + 3) hay (10 + 2)

c) (5 + 7) hay (4 +8) hay (3 + 9) hay (2 +10) d) (2 +10) hay (4 +8) hay (6 + 6) hay (8 +4) hay (10 + 2)

10/ Chỉ quan tâm sự xuất hiện các bit 1 : dùng tổ hợp và nguyên lý cộng

a) chọn 3 trong 8 b) có từ 4 đến 8 bit 1 c) có từ 0 đến 5 bit 1 d) có từ 3 đến 5 bit 1

11/ Xem việc chia bút lần lượt cho 4 người chính là 4 việc liên tiếp : dùng tổ hợp và nguyên lý nhân.

12/ b) Đặt $x = u$, $y^3 = v$, $z^2 = w$ và $t^3 = h$. Ta tìm hệ số của $u^3v^3w^2h$ trong khai triển $(2u - v - 3w + 4h)^9$

13/ b) n c) $n(n-4)$ [mỗi cạnh của đa giác liên kết với $(n-4)$ đỉnh không liền kề] d) Dùng a), b) và c)

14/ Nhóm người xếp gần nhau (nhóm nam, nhóm nữ, nhóm đồng nghiệp) xem như là "một người" xếp hàng với các người khác. Dùng phép hoán vị (đối nội và đối ngoại), nguyên lý cộng và nguyên lý nhân

a) 2.5!5! và 6!5! b) 6!5! c) 4!7! d) 2.4!6! e) phối hợp kết quả b),c) và d) f) 3!6!7!8!

15/ Ghi số thứ tự cho các ghế từ 1 đến 10 (theo chiều kim đồng hồ).

Dùng phép hoán vị (đối nội và đối ngoại), nguyên lý cộng và nguyên lý nhân.

b) Có 10 cách chia thành 2 khu : một khu cho 5 nam ngồi gần nhau, một khu cho 5 nữ ngồi gần nhau.

c) Có 2 cách chia thành 5 khu :mỗi khu gồm 2 ghế liên tiếp dành cho một cặp vợ chồng ngồi gần nhau.

16/ Tương tự bài **14**. Tính chất "cùng màu" tương đồng vói tính chất "đồng nghiệp" hay " cùng giới tính".

17/ Dùng phép hoán vị lặp. Ý tưởng như bài **16** nhưng không có hoán vị đối nội. Nếu cố định màu ở vị trí đầu hay vị trí cuối thì không cần quan tâm đến các vị trí đó khi đếm.

18/ $\to$ **21/** Dùng tổ hợp lặp, phép đổi biến và phép lấy bù để đưa về trường hợp các biến nguyên ≥ 0.
Nếu là bất phương trình thì tạo thêm một ẩn giả nguyên ≥ 0 để chuyển về dạng phương trình.

22/ Đây là 2 việc đồng thời. Dùng phép đổi biến để đưa về trường hợp các biến nguyên ≥ 0 rồi áp dụng nguyên lý nhân và tổ hợp lặp.

23/ Đây là 2 việc liên tiếp. Dùng phép đổi biến để đưa về trường hợp các biến nguyên ≥ 0 rồi áp dụng nguyên lý nhân, tổ hợp và tổ hợp lặp.

24/ Đây là 2 việc đồng thời. Dùng nguyên lý nhân, hoán vị lặp, chỉnh hợp, tổ hợp lặp và nguyên lý cộng.

25/ Dùng nguyên lý Dirichlet. Tạo 13 ô. Đưa các số hạng của A vào các ô và mỗi ô nhận không quá 2 số (ô 1 chỉ nhận 1 hay 25, ô 2 chỉ nhận 2 hay 24, … ,ô 12 chỉ nhận 12 hay 14, ô 13 chỉ nhận 13)

26/ Dùng nguyên lý Dirichlet. Tạo 10 ô. Đưa các số hạng của A vào các ô (ô 1 chỉ nhận từ 1^2 đến $2^2 - 1$; ô 2 chỉ nhận từ 2^2 đến $3^2 - 1$; … ; ô 9 chỉ nhận từ 9^2 đến $10^2 - 1$; ô 10 chỉ nhận 10^2)

27/ Dùng nguyên lý Dirichlet. Chia tam giác đều cạnh 3 thành 9 tam giác đều nhỏ cạnh 1. Để ý rằng hai điểm bất kỳ trong một tam giác đều nhỏ có khoảng cách không quá 1.

28/ Dùng nguyên lý Dirichlet. Có 3 dạng lịch học (2 buổi, 3 buổi, 4 buổi). Số lịch học có thể có < 782 .

29/ a) Xóa số 1. Khi đó 24 số còn lại trên đường tròn chia thành 8 nhóm rời nhau (mỗi nhóm gồm 3 số gần nhau). Tổng của 8 nhóm này $= (2 + 3 + \ldots + 25) > (40 \times 8)$.
b) Xóa số 25. Khi đó 24 số còn lại trên đường tròn chia thành 8 nhóm rời nhau (mỗi nhóm gồm 3 số gần nhau). Tổng của 8 nhóm này $= (1 + 2 + \ldots + 24) < (38 \times 8)$.

30/ Dùng nguyên lý Dirichlet. A có ít nhất là $(C_6^1 + C_6^2 + \ldots + C_6^5)$ tập hợp con khác $\varnothing$ có ≤ 5 phần tử. Tổng các số hạng trong mỗi tập con đó có giá trị nằm trong khoảng từ 0 đến $(10 + 11 + \ldots + 14)$.

CHƯƠNG IV : HỆ THỨC ĐỆ QUI

1/ a) $a_n = 2(-3)^n, \forall n \geq 0$ b) $a_n = -5(8^{n-1}), \forall n \geq 1$ c) $a_n = 3(2^n) + 4(-2)^n, \forall n \geq 2$
d) $a_n = 3(2^n) - 2(3^n), \forall n \geq 0$ e) $a_n = (4 - n)2^n, \forall n \geq 1$

2/ a) $a_n = 9n - 3, \forall n \geq 0$ b) $a_n = 3^n - 5(-2)^n, \forall n \geq 1$ c) $a_n = 7(3^n) + 2(1 - n), \forall n \geq 2$
d) $a_n = (5n - n^2 - 7)(-4)^n, \forall n \geq 0$ e) $a_n = 5^n + 3, \forall n \geq 3$

3/ a) $a_n = 2(3^n) - 3(2^n) + 2, \forall n \geq 0$ b) $a_n = 2(4^n) - n - 11, \forall n \geq 1$ c) $a_n = 4n + 7 - 5n^2, \forall n \geq 2$
d) $a_n = (4 - 2n)(-1)^n - 3^n , \forall n \geq 0$ e) $a_n = 4(-2)^n + (-5)^n + (n - 1)3^n, \forall n \geq 1$
f) $a_n = 3n^2 + 5n - n^4 - 4n^3 - 2, \forall n \geq 2$

4/ a) $S_1 = 1, S_{n+1} = S_n + (n + 1)^3, \forall n \geq 1$ và $S_n = 4^{-1}n^2(n + 1)^2, \forall n \geq 1$.
b) $S_1 = 1, S_{n+1} = S_n + (n + 1)^4, \forall n \geq 1$ và $S_n = 30^{-1}n(n + 1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1), \forall n \geq 1$.
c) $S_1 = -1, S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+1}(n + 1)^4, \forall n \geq 1$ và $S_n = 2^{-1}(-1)^n n(n^3 + 2n^2 - 1), \forall n \geq 1$.
d) $S_0 = 2, S_{n+1} = S_n + (n + 2)(n + 3)\, 2^{n+1}, \forall n \geq 0$ và $S_n = 2[\, 2^n (n^2 + n + 2) - 1 \,], \forall n \geq 0$.

e) $S_0 = -1$, $S_{n+1} = S_n + (2n+1)(-3)^{n+1}$, $\forall n \geq 0$ và $S_n = 8^{-1}[\,3(-3)^n(4n-1) - 5\,]$, $\forall n \geq 0$.
f) $S_1 = -3$, $S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+1}(n+1)(n^2+3)$, $\forall n \geq 1$ và
$S_n = 8^{-1}[(-1)^n(4n^3 - 2n^2 + 8n + 7) - 7\,]$, $\forall n \geq 1$.

5/ $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + (n+1)$, $\forall n \geq 1$ và $a_n = 2^{-1}(n^2 + n + 2)$, $\forall n \geq 1$.
(để ý đường thẳng thứ $(n+1)$ bị n đường thẳng trước đó chia thành $(n+1)$ đoạn thẳng)

6/ $a_{2000} = 7.10^9$, $a_{n+1} = (1 + 3.10^{-2})a_n$, $\forall n \geq 2000$ và $a_n = 7.10^9(1 + 3.10^{-2})^{n-2000}$, $\forall n \geq 2000$.

7/ $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n$, $\forall n \geq 1$ và $a_n = \dfrac{(\sqrt{3}+2)}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n + \dfrac{(\sqrt{3}-2)}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n$, $\forall n \geq 1$.
(Xét $A_{n+2} = u_1u_2...u_n u_{n+1}u_{n+2}$ trong 2 trường hợp $u_{n+2} = a$ hay $u_{n+2} \neq a$)

8/ $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 2$, $\forall n \geq 2$ và $a_n = \dfrac{(\sqrt{5}-3)}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \dfrac{(\sqrt{5}+3)}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2$,
$\forall n \geq 2$ (Xét $A_{n+2} = u_1u_2...u_n u_{n+1}u_{n+2}$ trong 3 trường hợp
[$u_{n+2} = 2$] hay [$u_{n+2} = 1 = u_{n+1}$] hay [$u_{n+2} = 1$ và $u_{n+1} = 2$]).

9/ Chứng minh bằng cách qui nạp (dùng giả thiết qui nạp mạnh) theo $n \geq 2$.

10/ Tìm $c, d \in \mathbf{R}$ thỏa $a_{n+1} + cb_{n+1} = d(a_n + cb_n)$, $\forall n \geq 0$ (*)
Mặt khác, từ giả thiết ta có $a_{n+1} + cb_{n+1} = (c+3)a_n + (2c+2)b_n$, $\forall n \geq 0$ (**)
Từ (*) và (**), ta có $c(c+3) = 2c + 2$ và $d = (c+3)$. Do đó $(c = 1, d = 4)$ hoặc $(c = -2, d = 1)$.
Đặt $u_n = (a_n + b_n)$ và $v_n = (a_n - 2b_n)$, $\forall n \geq 0$. Hãy chỉ ra hệ thức đệ qui cho mỗi dãy u_n $(n \geq 0)$ và v_n $(n \geq 0)$ để tính được u_n và v_n theo $n \geq 0$. Suy ra $a_n = 2.4^n - 1$ và $b_n = 4^n + 1$, $\forall n \geq 0$.

CHƯƠNG V : TẬP HỢP SỐ NGUYÊN

1/ Với $a, b \in \mathbf{Z}$, ta có $(ab = 1 \Leftrightarrow a = b = \pm 1)$ và
[$ab = -2 \Leftrightarrow (a = 1, b = -2)$ hoặc $(a = -1, b = 2)$ hoặc $(a = 2, b = -1)$ hoặc $(a = -2, b = 1)$].

2/ a) $\forall x \in [1, +\infty), \exists!\, k \in \mathbf{N}^*, k \leq x < (k+1)$ b) $\forall x \in [1, +\infty), \exists!\, q \in \mathbf{N}, q^2 \leq x < (q+1)^2$

3/ Chứng minh qui nạp theo $n \geq 2$. $\forall a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, để ý $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

4/ a) Để ý $y \neq -1$ và $x = -1 + \dfrac{1}{y+1}$ b) Để ý $y \neq 1$ và $x = 1 + \dfrac{1}{y-1}$
c) Để ý $y \geq 0$ và $x \geq 0$. Xét $x = 0$ và $x = 1$. Khi $x \geq 2$ thì $(3^x - 1) \vdots 4 \Leftrightarrow x$ chẵn
d) Để ý $x(2y+1) = 6$ và $(2y+1)$ là số nguyên lẻ.
e) Để ý $y(2x-9) = 12$ và $(2y-9)$ là số nguyên lẻ.

5/ Có $r, s \in \mathbf{Z}$ để $k = 2r + 1 = 3s \pm 1$ thì $s = 2t$ $(t \in \mathbf{Z})$ và suy ra k. Để ý $t(3t \pm 1)$ là số nguyên chẵn.

6/ a) và b) Viết $n = 3m + r$ với $m \in \mathbf{N}$, $r = 0, 1, 2$ thì $(2^n \pm 1) = 2^r(2^{3m} - 1) + (2^r \pm 1)$ với $7 \mid (2^{3m} - 1)$ vì $7 = (2^3 - 1)$. Do đó chỉ cần xét $(2^r \pm 1)$ vói $r = 0, 1, 2$.
c) Nếu n chẵn ($n = 2m$ với $m \in \mathbf{N}$) thì xét chữ số tận cùng của $(9^n + 1) = (81^m + 1)$.
Nếu n lẻ ($n = 2m + 1$ với $m \in \mathbf{N}$) thì phân tích $(9^n + 1)$ thành dạng $(9+1)t$ với $t \in \mathbf{N}$ và xét tính chẵn lẻ của t.
d) Viết $k = 11t + r$ với $t \in \mathbf{Z}$ và $r \in \{\, 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5 \,\}$.
Ta có $11 \mid (k^2 + 3k + 5) \Leftrightarrow 11 \mid (r^2 + 3r + 5) \Leftrightarrow r = 4$.

e) Nếu $121 \mid (k^2 + 3k + 5)$ thì $11 \mid (k^2 + 3k + 5)$ và $k = 11t + 4$ với $t \in \mathbf{Z}$ (do $121 = 11^2$).
Lúc đó $121 \mid [\,(11t + 4)^2 + 3(11t + 4) + 5\,]$ và ta có điều vô lý.

f) Tìm $a, b, c \in \mathbf{Z}$ thỏa $a(6k - 7m) = b(4m - 5k) + ck$ với $11 \mid c$. Tương tự cho g) và h).

7/ a) ($\Rightarrow$) : dễ dàng. Ta xét ($\Leftarrow$) : Khi $p = 3$, viết $a = 3r + u$ và $3s + v$ với $r, s \in \mathbf{Z}$ và $u, v \in \{0, \pm 1\}$.
Khi $p = 7$, viết $a = 7r + u$ và $b = 7s + v$ với $r, s \in \mathbf{Z}$ và $u, v \in \{\,0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\,\}$.
Khi $p = 11$, viết $a = 11r + u$ và $b = 11s + v$ với $r, s \in \mathbf{Z}$ và $u, v \in \{\,0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\,\}$.
Khi $p = 19$, viết $a = 19r + u$ và $b = 19s + v$ với $r, s \in \mathbf{Z}$ và $u, v \in \{\,k \in \mathbf{Z} \;/\; |\,k\,| \le 9\,\}$.
Để ý $p \mid (a^2 + b^2) \Leftrightarrow p \mid (u^2 + v^2) \Leftrightarrow u = v = 0$.

b) Giả sử $x^4 + y^4 = pz^2$ (□). Đặt $u = x^2$ và $v = y^2$ thì $p \mid (u^2 + v^2)$. Từ a), ta suy ra ($p \mid x$ và $p \mid y$).
Viết $x = px_1$ và $y = py_1$ với $x_1, y_1 \in \mathbf{Z}^*$ rồi thay vào (□) để có $p^3 \mid z^2$ và suy ra $p^2 \mid z$.
Viết $z = p^2 z_1$ với $z_1 \in \mathbf{Z}^*$ thì $x_1^4 + y_1^4 = p\, z_1^2$ (□□). Lý luận tương tự cho (□□), ta lại có
$x_2, y_2, z_2 \in \mathbf{Z}^*$ thỏa $x_1 = px_2$, $y_1 = py_2$, $z_1 = p^2 z_2$ và $x_2^4 + y_2^4 = p\, z_2^2$.
Tiếp tục lý luận trên, ta suy ra $\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists x_n \in \mathbf{Z}^*, x = p^n x_n$ **:** vô lý !

9/ a) Xét m chẵn và m lẻ. Xét số dư của 2 vế khi chia cho 4. Dùng bài **8**.
b) Xét $m = 4t + r$ với $t \in \mathbf{Z}$ và $r = 0, 1, 2, 3$. Xét số dư của hai vế khi chia cho 8. Dùng bài **8**.

11/ ($\Leftarrow$) : Dễ dàng. Ta xét ($\Rightarrow$) : Đặt $d = (m, n) = [m, n]$ thì $d \mid m$ và $m \mid d$. Tương tự cho n.

12/ a) Dùng các định nghĩa của quan hệ $\subset$ và quan hệ ước số.
b) Chứng minh hai vế chứa nhau. Dùng định nghĩa của (r, s) và $[r, s]$. c) Áp dụng b) nhiều lần.

13/ Chọn cụ thể $r, s \in \mathbf{Z}$ thỏa $r(21k + 4) + s(14k + 3) = 1$. Chứng minh tương tự, ta có
$(12k + 1, -30k - 2) = (6k - 4, 7 - 10k) = (4 - 15k, 5 - 20k) = 1$.

14/ Để ý trong 3 số nguyên lẻ liên tiếp, có đúng một số chia hết cho 3.
a) p lẻ ≥ 3. Nếu $p = 3$ thì đúng. Xét p lẻ ≥ 5. Ta có $(p + 2)$ lẻ và $3 \mid (p + 2)$.
b) p lẻ ≥ 3. Nếu $p = 3$ thì đúng. Xét p lẻ ≥ 5. Nếu $(8p + 1)$ cũng nguyên tố thì $3 \mid (8p + 3)$.
c) Nếu $p = 2$ thì đúng. Xét p lẻ ≥ 5. Nếu $(10p + 1)$ cũng nguyên tố thì $(20p + 2)$ và $(20p + 5)$ không chia hết cho 3, nghĩa là $3 \mid (20p + 3)$.

15/ a) Để ý $n^4 + 4k^4 = (n^2 + 2k^2)^2 - (2nk)^2$ và phân tích $n^4 + 4k^4$ thành tích của 2 số nguyên > 1.
b) Nếu n có một ước số nguyên tố $p \ge 3$ thì p lẻ và đặt $n = tp$ với $t \in \mathbf{N}^*$. Lúc đó
$(2^n + 1) = [(2^t)^p + 1] = (2^t + 1)\,[\,(2^t)^{p-1} - (2^t)^{p-2} + \ldots + 1\,]$ với $1 < (2^t + 1) < (2^n + 1)$

16/ Để ý $p \mid x$ hay $p \mid y$. Ta xét trường hợp $p \mid x$ (trường hợp $p \mid y$ làm tương tự).
Đặt $x = pt$ ($t \in \mathbf{Z}$) thì $y \ne p$ và $t = 1 + \dfrac{p}{y - p}$.

17/ a) Xét khi $p \mid k$ và khi p không chia hết k.
b) $p! = m!\,(p - m)!\,C_p^m$ nên $p \mid [\,m!\,(p - m)!\,C_p^m\,]$. Để ý $(p, k) = 1$ khi $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$ trong đó $t = \max\{\,m, (p - m)\,\}$.
c) Nếu $p = 2$ thì hiển nhiên. Xét $p \ge 3$ thì p lẻ và chia Euclide $p = 30q + r$ với r lẻ, $1 \le r < 30$.
Nếu $r = 9, 15, 21, 25$ hoặc 27 thì p không là số nguyên tố.

18/ a) Để ý $\forall k \in \{\,2, 3, \ldots, p\,\}, (q, k) = 1$.
b) Xét $k \in A$ thì k lẻ nên các ước số nguyên tố > 0 của k đều lẻ. Nếu mọi ước số nguyên tố > 0 của k đều có dạng $(4t + 1)$ với $t \in \mathbf{N}$ thì $k \notin A$. Áp dụng a).

19/ a) Xét $d = (a, b) = 1$. Đặt $u = (a + b, a - b)$, $v = (a + b, ab)$ và $w = (a + b, a^2 + b^2)$.
Ta có $u \mid 2a$ và $u \mid 2b$.. Nếu u lẻ thì $u \mid a$ và $u \mid b$, nghĩa là $u = 1$. Nếu u chẵn thì $u = 2u'$ với $u' \mid a$ và $u' \mid b$, nghĩa là $u' = 1$ và $u = 2$.
Ta có $v \mid (a + b)$ và ($v \mid a$ hay $v \mid b$) nên ($v \mid a$ và $v \mid b$), nghĩa là $v = 1$.
Ta có $w \mid (a + b)^2$ và $w \mid (a^2 + b^2)$ nên $w \mid 2ab$. Nếu w lẻ thì $w \mid (a + b)$ và $w \mid ab$, nghĩa là $w = 1$. Nếu u chẵn thì $w = 2w'$ với $w' \mid (a + b)$ và $w' \mid ab$, nghĩa là $w' = 1$ và $w = 2$.

b) Xét $d = (a, b) = p$ nguyên tố. Đặt $u = (a + b, a - b)$, $v = (a + b, ab)$ và $w = (a + b, a^2 + b^2)$.
Viết $a = pa'$ và $b = pb'$ với $(a', b') = 1$.
$u = p(a' + b', a' - b') = p$ hay $2p$.
$v = pv'$ với $v' = (a' + b', pa'b')$. Ta có $v' = 1$ [nếu p không chia hết $(a' + b')$] và $v' = p$ [nếu p chia hết $(a' + b')$], nghĩa là $v = p$ hoặc p^2.
$w = pw'$ với $v' = (a' + b', p[a'^2 + b'^2])$. Ta có $v' = 1$ hoặc 2 [nếu p không chia hết $(a' + b')$] và $v' = p$ hoặc $2p$ [nếu p chia hết $(a' + b')$], nghĩa là $v = p$ hoặc $2p$ hoặc p^2 hoặc $2p^2$.

20/ a) Ta thấy $b \mid x$ và $a \mid y$ nên $x = tb$ và $y = ta$ ($t \in \mathbf{Z}$).
b) Viết $a = da'$ và $b = db'$ với $(a', b') = 1$. Để ý $xa = yb \Leftrightarrow xa' = yb'$ và áp dụng a).
c) Để ý $(x - r)a = (y - s)b$ rồi áp dụng b).
d) Dùng thuật toán tìm (a, b) và tìm $r, s \in \mathbf{Z}$ thỏa $ra + sb = (a, b)$ rồi áp dụng c).

21/ a) Mỗi ước số > 0 của n có dạng $p_1^{t_1} p_2^{t_2} \ldots p_k^{t_k}$ với $0 \le t_j \le r_j$, nghĩa là t_j có $(r_j + 1)$ cách chọn khi $1 \le j \le k$. Dùng nguyên lý nhân để đếm. Số ước số gấp 2 lần số ước số dương. b) Suy ngay từ a)

22/ a) Áp dụng bài **21**.
b) Các số cần tìm có dạng $2^x 3^y 5^z 7^t 11^r 13^s 37^u$ với $3 \le x \le 14$, $4 \le y \le 9$, $7 \le y \le 8$, $0 \le t \le 10$, $2 \le r \le 3$, $0 \le s \le 5$ và $2 \le u \le 10$. Dùng nguyên lý nhân để đếm.
c) Phân tích 1.166.400.000 thành tích các thừa số nguyên tố và làm tương tự như b).

24/ Với p là số nguyên tố > 0, xét số lượng ước số dương của p^n ($n \in \mathbf{N}$).

25/ a) ($\Rightarrow$) : hiển nhiên. Xét ($\Leftarrow$) : Viết $\sqrt[n]{m} = \dfrac{r}{s}$ [dạng tối giản với $r \in \mathbf{Z}$, $s \in \mathbf{N^*}$ và $(r, s) = 1$]. Ta có $ms^n = r^n$. Nếu $s \ge 2$ thì s có ước số nguyên tố > 0 là p và $(p, r) = 1$. Từ đó suy ra mâu thuẫn.
b) Nếu $\sqrt{m} \in \mathbf{Q}$ thì $\sqrt{m} \in \mathbf{N}$ [do a)]. Phân tích $\sqrt{m}$ thành tích các thừa số nguyên tố và đối chiếu với giả thiết để thấy mâu thuẫn.

<u>CHƯƠNG VI :</u> QUAN HỆ TRÊN CÁC TẬP HỢP

1/ Liệt kê tập hợp $\mathfrak{R} = \{ (x,y) \in S^2 \,/\, x\, \mathfrak{R}\, y \}$ rồi xét các tính chất *phản xạ, đối xứng, phản xứng* và *truyền.*
a) + – + – b) – + – + c) – – – + d) – + – – e) + – + – f) – – – – (+ : *có* ; – : *không có*)

2/ Xét các tính chất *phản xạ, đối xứng, phản xứng* và *truyền* của $\mathfrak{R}$:
a) + – – – b) – – – – c) – – + + d) + – – + e) – + – – f) – – + – (+ : *có* ; – : *không có*)

3/ a) thứ tự toàn phần, có min và max
b) thứ tự bán phần, có min và các phần tử tối đại
c) thứ tự bán phần, có max và các phần tử tối tiểu
d) thứ tự bán phần, có min và max
e) thứ tự bán phần, có các phần tử tối tiểu và các phần tử tối đại
f) thứ tự toàn phần, có min và max

4/ Liệt kê 12 phần tử của S .

5/ a) Có 7 trường hợp khác nhau
b) Có 4 trường hợp khác nhau

7/ b) và d) Chọn thứ tự toàn phần mới không trùng với thứ tự $\leq$ thông thường trên S.
c) Chọn thứ tự toàn phần mới không trùng với thứ tự $\geq$ thông thường trên S.
8/ e) $x \,\Re\, y \Leftrightarrow \sin x = \sin y \Leftrightarrow (x = y + k2\pi$ hay $x = \pi - y + k2\pi$ với $k \in \mathbf{Z})$

9/ a) $[a] = \{x \in \mathbf{R} / (x - a)(x + a + 3) = 0\}$. Biện luận số phần tử của $[a]$ (là 1 hay 2) tùy theo $a \in \mathbf{R}$
b) Tương tự a)
c) Trường hợp (–) : $[a] = \{x \in \mathbf{R} / (x - a)(x^2 + ax + a^2 + 12) = 0\} = \{a\}, \forall a \in \mathbf{R}$.
Trường hợp (+) : $[a] = \{x \in \mathbf{R} / (x - a)(x^2 + ax + a^2 - 12) = 0\}$.
Biện luận số phần tử của $[a]$ (là 1, 2 hay 3) tùy theo $a \in \mathbf{R}$.
d) $[a] = \{x \in \mathbf{R} / (x - a)(ax + 7) = 0\}$. Biện luận số phần tử của $[a]$ (là 1 hay 2) tùy theo $a \in \mathbf{R}$.
e) $[a] = \{x \in \mathbf{R} / (x - a)(ax - 4) = 0\}$. Biện luận số phần tử của $[a]$ (là 1 hay 2) tùy theo $a \in \mathbf{R}$.
f) $[a] = \{x \in \mathbf{R} / (\cos^2 x - \cos^2 a)(\sin ax + 2) = 0\} = \{x \in \mathbf{R} / \cos 2x = \cos 2a\}$ có những phần tử nào?

10/ a) $\Re$ có 14 cặp b) $C_6^1C_5^2C_3^3$ c) $C_6^1C_5^2C_3^3 + C_6^2C_4^2C_2^2 + C_6^1C_5^1C_4^4$

<u>CHƯƠNG VII :</u> HÀM BOOLE

1/ Dùng các luật của hàm Boole để nhân ra dạng đa thức, rút gọn và nâng bậc các đơn thức.

2/ a) 8 tế bào lớn loại 1 ô, 1 phép phủ, 1 công thức đa thức tối tiểu.
b) 5 tế bào lớn (2 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 1 phép phủ, 1 công thức đa thức tối tiểu.
c) 4 tế bào lớn loại 4 ô, 2 phép phủ tối tiểu, 2 công thức đa thức tối tiểu.
d) 5 tế bào lớn (1 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 2 phép phủ tối tiểu, 1 công thức đa thức tối tiểu
e) 6 tế bào lớn loại 2 ô, 3 phép phủ tối tiểu, 3 công thức đa thức tối tiểu.
f) 6 tế bào lớn (5 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 2 phép phủ tối tiểu, 1 công thức đa thức tối tiểu
g) 7 tế bào lớn (2 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 4 phép phủ tối tiểu, 1 công thức đa thức tối tiểu
h) 8 tế bào lớn (5 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 5 phép phủ tối tiểu, 1 công thức đa thức tối tiểu

Dựa vào mỗi ô của $S = \mathrm{Kar}(f)$ hay $\overline{S}$, ta viết được dạng nối rời chính tắc của f và $\overline{f}$.

3/ a) $S = \mathrm{Kar}(f) = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,2), (4,2), (4,3), (4,4)\}$ và S có 5 tế bào lớn
(1 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 1 phép phủ, 1 công thức đa thức tối tiểu.
b) $S = \mathrm{Kar}(f) = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$ và S có 5 tế bào lớn
(2 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 2 phép phủ tối tiểu, 2 công thức đa thức tối tiểu.
c) $S = \mathrm{Kar}(f) = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,4), (4,4)\}$ và S có 6 tế bào lớn
(3 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 2 phép phủ tối tiểu, 1 công thức đa thức tối tiểu.
d) $S = \mathrm{Kar}(f) = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (4,1), (4,2), (4,3)\}$ và S có 6 tế bào lớn
(3 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 2 phép phủ tối tiểu, 1 công thức đa thức tối tiểu.
e) $S = \mathrm{Kar}(f) = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,3), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3)\}$ và S có 6 tế bào lớn
(2 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 3 phép phủ tối tiểu, 3 công thức đa thức tối tiểu.
f) $S = \mathrm{Kar}(f) = \{(1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,3), (4,4)\}$ và S có 6 tế bào lớn
(1 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 2 phép phủ tối tiểu, 1 công thức đa thức tối tiểu.
g) $S = \mathrm{Kar}(f) = \{(1,4), (2,2), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}$ và S có 7 tế bào lớn
(1 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 4 phép phủ tối tiểu, 2 công thức đa thức tối tiểu.
h) $S = \mathrm{Kar}(f) = \{(1,2), (1,4), (2,1), (2,4), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$ và S có 8 tế bào lớn
(1 tế bào lớn loại 4 ô, còn lại là loại 2 ô), 5 phép phủ tối tiểu, 1 công thức đa thức tối tiểu.
Dựa vào mỗi ô của $S = \mathrm{Kar}(f)$, ta viết được dạng nối rời chính tắc của f và $\overline{f}$.

4/ Chọn một công thức đa thức tối tiểu của f để vẽ mạng các cổng tổng hợp f.

5/ a) Có tất cả $2^6 = 64$ vector Bool. Có $C_6^2 = 15$ vector Boole có đúng 2 vị trí nhận giá trị 1.
Số hàm Boole cần tính là $2^{64-15} = 2^{49}$

b) Có $C_6^2 + C_6^3 + \ldots + C_6^6 = 2^6 - (C_6^0 + C_6^1) = 57$ vector Boole có ít nhất 2 vị trí nhận giá trị 1.
Số hàm Boole cần tính là $2^{64-57} = 2^7 = 128$

c) Số hàm Boole cần tính = số hàm Boole của $F_5 = 2^{2^5} = 2^{32}$

d) Số hàm Boole cần tính = số hàm Boole của $F_3 = 2^{2^3} = 2^8 = 256$
