

## Bài tập chương 1

- Miền xác định của hàm hai biến

- 1)  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ; 2)  $z = \ln(x + y)$ ; 3)  $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$ ;
- 4)  $z = \arcsin(y/x)$ ; 5)  $z = \sqrt{y \sin x}$ ; 6)  $z = \ln(x^2 + y)$ ; 7)  $z = 1/(x^2 + y^2)$ .

- Đường mức

- 1)  $z = x + y$ ; 2)  $z = x^2 + y^2$ ; 3)  $z = x^2 - y^2$ .

- Giới hạn

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} (x^2 + y^2) \sin(1/(xy))$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} (x + y)/(x^2 + y^2)$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 2} \sin(xy)/x$ ; 4)  $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow k} (1 + x/y)^x$ .

- Đạo hàm riêng

- 1)  $z = x^3 + y^3 - 3axy$ ; 2)  $z = (x - y)/(x + y)$ ; 3)  $z = y/x$ ;
- 4)  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ ; 5)  $z = x/\sqrt{x^2 + y^2}$ ; 6)  $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ ;
- 7)  $z = \arctan(y/x)$ ; 8)  $z = x^y$ ; 9)  $z = e^{\sin(y/x)}$ ;
- 10)  $z = \arcsin \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$ ; 11)  $z = \ln \left( \sin \frac{x+a}{\sqrt{y}} \right)$ ; 12)  $u = (xy)^z$ .
- 13) Tính  $f'_x(2; 1)$  và  $f'_y(2; 1)$ , nếu  $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ .
- 14) Tính  $f'_x(1; 2; 0)$ ,  $f'_y(1; 2; 0)$  và  $f'_z(1; 2; 0)$ , nếu  $f(x, y, z) = \ln(xy + z)$ .

- Vi phân toàn phần

- 1)  $z = x^3 + y^3 - 3xy$ ; 2)  $z = x^2 y^3$ ; 3)  $x = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ ;
- 4)  $z = xy^y$ ; 5)  $z = \ln(x^2 + y^2)$ ; 6)  $z = \ln(1 + x/y)$ ;
- 7)  $z = \arctan(y/x) + \arctan(x/y)$ ; 8)  $z = \ln(\tan(y/x))$ ; 9)  $u = xyz$ ;
- 10)  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ; 11)  $u = (xy + x/y)^z$ ; 12)  $u = \arctan(xy/z^2)$ .
- 13) Tìm  $df(3; 4; 5)$ , nếu  $f(x, y, z) = z/\sqrt{x^2 + y^2}$ .

- Đạo hàm hàm hợp

- 1) Tìm  $dz/dt$ , nếu  $z = e^{3x+2y}$ , trong đó  $x = \cos t$ ,  $y = t^2$ .
- 2) Tìm  $dz/dt$ , nếu  $z = x/y$ , trong đó  $x = e^t$ ,  $y = \ln t$ .
- 3) Tìm  $du/dt$ , nếu  $u = \ln \sin(x/\sqrt{y})$ , trong đó  $x = 3t^2$ ,  $y = \sqrt{t^2 + 1}$ .
- 4) Tìm  $du/dt$ , nếu  $u = xyz$ , trong đó  $x = t^2 + 1$ ,  $y = \ln t$ ,  $z = \tan t$ .
- 5) Tìm  $dz/dx$ , nếu  $z = u^v$ , trong đó  $u = \sin x$ ,  $v = \cos x$ .
- 6) Tìm  $\partial z/\partial x$ ,  $dz/dx$ , nếu  $z = \arctan(y/x)$ , trong đó  $y = x^2$ .
- 7) Tìm  $\partial z/\partial x$ ,  $dz/dx$ , nếu  $z = x^y$ , trong đó  $y = \varphi(x)$ .
- 8) Tìm  $\partial z/\partial x$ ,  $\partial z/\partial y$ , nếu  $z = f(u, v)$ , trong đó  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = e^{xy}$ .
- 9) Tìm  $\partial z/\partial u$ ,  $\partial z/\partial v$ , nếu  $z = \arctan(x/y)$ , trong đó  $x = u \sin v$ ,  $y = u \cos v$ .

- 10) Tìm  $\partial z/\partial x$ ,  $\partial z/\partial y$ , nếu  $z = f(u)$ , trong đó  $u = xy + y/x$ .

- Đạo hàm và vi phân cấp cao

- 1) Tính  $\partial^2 z/\partial x^2$ ,  $\partial^2 z/\partial x \partial y$ ,  $\partial^2 z/\partial y^2$ , nếu  $z = c\sqrt{(x/a)^2 + (y/b)^2}$ .
- 2) Tính  $\partial^2 z/\partial x^2$ ,  $\partial^2 z/\partial x \partial y$ ,  $\partial^2 z/\partial y^2$ , nếu  $z = \ln(x^2 + y)$ .
- 3) Tính  $\partial^2 z/\partial x \partial y$ , nếu  $z = \arctan((x + y)/(1 - xy))$ .

- 4) Tính  $\partial^2 r / \partial x^2$ , nếu  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .
- 5) Tìm tất cả các đạo hàm riêng cấp hai của  $u = xy + yz + zx$ .
- 6) Chứng minh  $u = \arctan(y/x)$  thỏa phương trình Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

• Cực trị của hàm hai biến

- 1)  $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ ; 2)  $z = (x-1)^2 + 2y^2$ ; 3)  $z = (x-1)^2 - 2y^2$ ;
- 4)  $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ ; 5)  $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$ ,  $x, y > 0$ ;
- 6)  $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ ; 7)  $z = xy \sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2}$ ;
- 8)  $z = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3} - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ ; 9)  $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ ;
- 10)  $z = (1 + x + y) / \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ .
- 11) Hàm tổng lợi nhuận hàng năm của một xí nghiệp là

$$P(x, y) = -2x^2 + 4xy - 3y^2 + 4x - 2y + 77$$

trong đó  $x$  là số lượng sản phẩm chất lượng chuẩn ( $\times 1000$  đơn vị/năm),  $y$  là số lượng sản phẩm chất lượng đặc biệt ( $\times 1000$  đơn vị/năm),  $P$  là tổng lợi nhuận ( $\times 10$  triệu đồng VN). Hàng năm cần phải sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu đơn vị để tìm được tổng lợi nhuận cực đại? Tổng lợi nhuận cực đại là bao nhiêu?

• Cực trị có điều kiện của hàm hai biến

- 1)  $z = 6 - 4x - 3y$  với điều kiện  $x^2 + y^2 = 1$ ;
- 2)  $z = xy$  với điều kiện  $x + y = 1$ ;
- 3)  $z = x + 2y$  với điều kiện  $x^2 + y^2 = 5$ ;
- 4)  $z = x^2 + y^2$  với điều kiện  $(x/2) + (y/3) = 1$ ;
- 5)  $z = \cos^2 x + \cos^2 y$  với điều kiện  $y - x = \pi/4$ ;
- 6) Trong tất cả các tam giác vuông có diện tích cho trước  $S$ , tìm tam giác có cạnh huyền ngắn nhất.

7) Một điền chủ muốn rào hai bãi cỏ chăn nuôi gia súc (tách rời nhau) cùng kích thước dọc theo một hàng rào đã có sẵn. Ông ta có một lượng vật liệu đủ cho 216m. Hỏi mỗi chiều  $x$  và  $y$  dài bao nhiêu để có tổng diện tích cực đại? Tổng diện tích cực đại là bao nhiêu?

8) Cần phải chia số dương  $a$  thành ba số dương sao cho tích của chúng là lớn nhất.

• Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm hai biến trong miền đóng

- 1)  $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$  trong miền đóng giới hạn bởi các đường thẳng  $x = 0$ ,  $y = 0$  và  $2x + 3y - 12 = 0$ .
- 2)  $z = xy + x + y$  trong hình vuông miền đóng giới hạn bởi các đường thẳng  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 2$  và  $y = 3$ .

- 3)  $z = xy$  trong hình tròn  $x^2 + y^2 \leq 1$ .
- 4)  $z = x^2 + 3y^2 + x - y$  trong tam giác giới hạn bởi các đường thẳng  $x = 1$ ,  $y = 1$  và  $x + y = 1$ .
- 5)  $z = 1 - x^2 - y^2$  trong hình tròn  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ .
- 6)  $z = x^2y(2 - x - y)$  trong tam giác giới hạn bởi các đường thẳng  $x = 0$ ,  $y = 0$  và  $x + y = 6$ .
- 7)  $z = x + y$  trong hình tròn  $x^2 + y^2 \leq 1$ .
- 8)  $z = x^2 - y^2$  trong hình tròn  $x^2 + y^2 \leq 1$ .
- 9)  $z = x^3 + y^3 - 3xy$  trong hình chữ nhật  $0 \leq x \leq 2$ ,  $-1 \leq y \leq 2$ .
- 10)  $z = x - 2y - 3$  trong tam giác giới hạn bởi  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq x + y \leq 1$ .
- 11)  $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$  trong hình tròn  $x^2 + y^2 \leq 25$ .
- 12)  $z = x^2 - xy + y^2$  trong miền  $|x| + |y| \leq 1$ .

**Ghi chú**

Các hàm hyperbol:

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \\ \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.\end{aligned}$$

Hàm secant, cosecant:

$$\begin{aligned}\sec x &= \frac{1}{\cos x}; \\ \csc x &= \frac{1}{\sin x}.\end{aligned}$$

## Bài tập chương 2

• Phương trình vi phân có biến phân ly - Nghiệm tổng quát - Nghiệm riêng

- 1)  $\ln \cos y dx + x \tan y dy = 0$ ; 2)  $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$ ;
- 3)  $\frac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{ydx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ ; 4)  $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$ ;
- 5)  $yy' = -2x \sec y$ ; 6)  $y' = \sqrt{(a^2 - y^2)/(a^2 - x^2)}$ ;
- 7)  $\tan x \sin^2 y dx + \cos^2 x \cot y dy = 0$ ; 8)  $xyy' = 1 - x^2$ ; 9)  $y' \tan x = y$ ;
- 10)  $3e^x \tan y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$ ; 11)  $\frac{yy'}{x} + e^x = 0$ ,  $y(1) = 0$ ;
- 12)  $e^{1+x^2} \tan y dx - \frac{e^{2x}}{x-1} dy = 0$ ,  $y(1) = \pi/2$ ;
- 13)  $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx$ ,  $y(0) = 0$ ;
- 14)  $y' + \cos(x+2y) = \cos(x-2y)$ ,  $y(0) = \pi/4$ ;
- 15)  $y' = 2^{x-y}$ ,  $y(-3) = -5$ ; 16)  $y \ln^3 y + y' \sqrt{x+1} = 0$ ,  $y(-15/16) = e$ ;
- 17)  $y/y' = \ln y$ ,  $y(2) = 1$ ; 18)  $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$ ,  $y(0) = 0$ ;
- 19)  $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0$ ,  $y(1) = 1$ ; 20)  $(1 + e^x)yy' = e^x$ ,  $y(0) = 1$ ;
- 21)  $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$ ,  $y(0) = 1$ ;
- 22)  $y' \sin x = y \ln x$ ,  $y(\pi/2) = 1$ .

• Phương trình vi phân đẳng cấp - Nghiệm tổng quát - Nghiệm riêng

- 1)  $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$ ; 2)  $x \sin(y/x) + x = y \sin(y/x)$ ;
- 3)  $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$ ; 4)  $xyy' = y^2 + 2x^2$ ;
- 5)  $xy' \ln(y/x) = y \ln(y/x) + x$ ; 6)  $y' = y/x + \cos(y/x)$ ;
- 7)  $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$ ; 8)  $y' = (x+y)/(x-y)$ ;
- 9)  $y' = y/x - 1$ ; 10)  $y' = -(x+y)/x$ ; 11)  $(x-y)ydx - x^2dy = 0$ ;
- 12)  $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$ ; 13)  $xdy + ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$ ;
- 14)  $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$ ,  $y(2) = 1$ ;
- 15)  $xy' - y = x \tan(y/x)$ ,  $y(1) = \pi/2$ ; 16)  $y' = 4 + y/x + (y/x)^2$ ,  $y(1) = 2$ ;
- 17)  $xy' = xe^{y/x} + y$ ,  $y(1) = 0$ .

• Phương trình vi phân toàn phần - Nghiệm tổng quát - Nghiệm riêng

Trong các bài tập từ 1) đến 21), kiểm tra phương trình có phải là phương trình vi phân toàn phần hay không. Nếu có, giải tìm nghiệm tổng quát.

- 1)  $(2x-1)dx + (3y+7)dy = 0$ ; 2)  $(2x+y)dx - (x+6y)dy = 0$ ;
- 3)  $(5x+4y)dx + (4x-8y^3)dy = 0$ ;
- 4)  $(\sin y - y \sin x)dx + (\cos x + x \cos y - y)dy = 0$ ;
- 5)  $(2y^2x - 3)dx + (2yx^2 + 4)dy = 0$ ;
- 6)  $(2y - \frac{1}{x} + \cos 3x) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \sin 3x = 0$ ;
- 7)  $(x+y)(x-y)dx + x(x-2y)dy = 0$ ;
- 8)  $(1 + \ln x + \frac{y}{x})dx = (1 - \ln x)dy = 0$ ;
- 9)  $(y^3 - y^2 \sin x - x)dx + (3xy^2 + 2y \cos x)dy = 0$ ;
- 10)  $(x^3 + y^3)dx + 3xy^2dy = 0$ ;
- 11)  $(y \ln y - e^{-xy})dx + (1/y + x \ln y)dy = 0$ ;

- 12)  $\frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy = 0$ ; 13)  $xy' = 2xe^x - y + 6x^2$ ;  
 14)  $(3x^2y + e^y)dx + (x^3 + xe^y - 2y)dy = 0$ ;  
 15)  $(1 - \frac{3}{x} + y)dx + (1 - \frac{3}{y} + x)dy = 0$ ;  
 16)  $(x^2y^3 - \frac{1}{1+9x^2})\frac{dx}{dy} + x^3y^2 = 0$ ;  
 17)  $(5y - 2x)y' - 2y = 0$ ;  
 18)  $(\tan x - \sin x \sin y)dx + \cos x \cos y dy = 0$ ;  
 19)  $(3x \cos 3x + \sin 3x - 3)dx + (2y + 5)dy = 0$ ;  
 20)  $(2y \sin x \cos x - y + 2y^2 e^{xy^2})dx = (x - \sin^2 x - 4xye^{xy^2})dy$ ;  
 21)  $(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x^2+y^2})dx + (ye^y + \frac{x}{x^2+y^2})dy = 0$ ;  
 22)  $(x + y)^2 dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0, y(1) = 1$ ;  
 23)  $(e^x + y)dx + (2 + x + ye^y)dy = 0, y(0) = 1$ ;  
 24)  $(4y + 2x - 5)dx + (6y + 4x - 1)dy = 0, y(-1) = 2$ ;  
 25)  $(\frac{3y^2-x^2}{y^5})\frac{dy}{dx} + \frac{x}{2y^4} = 0, y(1) = 1$ .

• Phương trình vi phân tuyến tính cấp một - Phương trình Bernoulli - Nghiệm tổng quát - Nghiệm riêng

- 1)  $xy' - y = x^2 \cos x$ ; 2)  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ ; 3)  $y' \cos x + y = 1 - \sin x$ ;  
 4)  $(1 + x^2)y' + y = \arctan x$ ; 5)  $y' - y/\sin x = \cos^2 x \tan(x/2)$ ;  
 6)  $dy/dx - y/x = x$ ; 7)  $dy/dx + 2y/x = x^2$ ;  
 8)  $(1 + y^2)dx = (\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy)dy$ , (chỉ dẫn: chọn  $x$  là hàm của  $y$ )  
 9)  $y^2 dx - (2xy + 3)dy = 0$ ; 10)  $y' + ny/x = a/x^n, y(1) = 0$ ;  
 11)  $y'\sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x, y(0) = 0$ ;  
 12)  $y' - y/(x \ln x) = x \ln x, y(e) = 0, 5e^2$ ;  
 13)  $y' \sin x - y \cos x = 1, y(\pi/2) = 0$ ;  
 14)  $y' + 3y \tan 3x = \sin 6x, y(0) = 1/3$ ; 15)  $xy' + y - e^x = 0, y(a) = b$ ;  
 16)  $y' - y/(1-x^2) - 1 - x = 0, y(0) = 0$ ; 17)  $y' - y \tan x = 1/\cos x, y(0) = 0$ ;  
 18)  $dy/dx + y/x = -xy^2$ ; 19)  $2xyy' - y^2 + x = 0$ .

• Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng - Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng của phương trình thuần nhất

- 1)  $y'' - 5y' + 6y = 0$ ; 2)  $y'' - 9y = 0$ ; 3)  $y'' - y = 0$ ; 4)  $y'' + y = 0$   
 5)  $y'' - 2y' + 2y = 0$ ; 6)  $y'' + 4y' + 13y = 0$ ; 7)  $y'' + 2y' + y = 0$ ;  
 8)  $y'' - 4y' + 2y = 0$ ; 9)  $y'' + ky = 0$ ; 10)  $y = y'' + y'$ ; 11)  $(y' - y)/y'' = 3$ ;  
 12)  $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 8$ ;  
 13)  $y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1$ ;  
 14)  $y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$ ;  
 15)  $y'' + 2y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$ ;  
 16)  $y'' = y/a^2, y(0) = a, y'(0) = 0$ ;  
 17)  $y'' + 3y' = 0, y(0) = 0, y(3) = 0$ ;  
 18)  $y'' + \pi^2 y = 0, y(0) = 5, y(1) = 0$ .

• Phương trình không thuần nhất

- 1)  $y'' - 4y' + 4y = x^2$ ; 2)  $y'' - y' + y = x^3 + 6$ ; 3)  $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ ;  
 4)  $y'' - 8y' + 7y = 14$ ; 5)  $y'' - y = e^x$ ; 6)  $y'' + y' = \cos x$ ;  
 7)  $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$ ; 8)  $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$ ;  
 9)  $y'' - 2y' + y = \sin x + \sinh x$ ; 10)  $y'' - y' = \sin 2x$ ;  
 11)  $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$ ;  
 12) Tìm nghiệm của  $y'' + 4y' = \sin x$ , thỏa các điều kiện  $y(0) = y'(0) = 1$ ;  
 13)  $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}$ ; 14)  $y'' - 2y' = x^2 - 1$ ;  
 15)  $y'' - 2y' + y = 2e^x$ ; 16)  $y'' - 2y' = e^{2x} + 5$ ;  
 17)  $y'' - 2y' - 8y = e^x - 8 \cos 2x$ ; 18)  $y'' + y' = 5x + 2e^x$ ;  
 19)  $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x$ ; 20)  $y'' + 2y' + y = e^x + e^{-x}$ ;  
 21)  $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$ ; 22)  $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + x/2$ ;  
 23)  $y'' - 3y' = x + \cos x$ .

• Phương trình vi phân cấp hai có thể giảm cấp

- 1)  $y'' = 1/x$ ; 2)  $y'' = -1/(2y^3)$ ; 3)  $y'' = 1 - (y')^2$ ; 4)  $xy'' + y' = 0$ ;  
 5)  $yy'' = (y')^2$ ; 6)  $yy'' + (y')^2 = 0$ ; 7)  $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$ ;  
 8)  $y'(1 + (y')^2) = ay''$ ; 9)  $x^2y'' + xy' = 1$ ; 10)  $yy'' = y^2y' + (y')^2$ ;  
 11)  $yy'' - y'(1 + y') = 0$ ; 12)  $y'' = -x/y'$ ; 13)  $(1 + x)y'' - (x + 2)y' + x + 2 = 0$ ;  
 14)  $xy'' = y' \ln(y'/x)$ ; 15)  $y' + (y'')^2/4 = xy''$ ; 16)  $(y')^2 - yy'' = y^2y'$ ;  
 17)  $yy'' + (y')^2 - (y')^3 \ln y = 0$ ; 18)  $yy'' - (y')^2 = y^4$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ;  
 19)  $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 3$ ;  
 20)  $1 + (y')^2 = 2yy''$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 1$ ;  
 21)  $yy'' + (y')^2 = (y')^3$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .

## Bài tập chương 3

### Tích phân hai lớp

- Đổi thứ tự lấy tích phân
  - 1)  $\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y)dy$ ; 2)  $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y)dy$ ;
  - 3)  $\int_0^a dx \int_{(a^2-x^2)/2a}^{\sqrt{a-x^2}} f(x, y)dy$ ; 4)  $\int_{a/2}^a dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y)dy$ ;
  - 5)  $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y)dy$  ( $a > 0$ ); 6)  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)dx$ ;
  - 7)  $\int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y)dx$ ; 8)  $\int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y)dy$ ;
  - 9)  $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y)dy$ ; 10)  $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y)dy$ .
- Tích phân hai lớp trong tọa độ Descartes
  - 1)  $\iint_D \frac{x}{y} \ln y dx dy$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq e\}$ ;
  - 2)  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ ;
  - 3)  $\iint_D \frac{x^2}{y^2+1} dx dy$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ ;
  - 4)  $\iint_D \frac{xdy}{(x+y+1)^2}$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ ;
  - 5)  $\iint_D e^{x-y} dx dy$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ ;
  - 6)  $\iint_D x \ln y dx dy$ ,  $D$  giới hạn bởi các đường  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 1$ ,  $y = e$ ;
  - 7)  $\iint_D \frac{y}{x} dx dy$ ,  $D = \{(x, y) | 2 \leq x \leq 4; x \leq y \leq 2x\}$ ;
  - 8)  $\iint_D e^x dx dy$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \ln y; 1 \leq y \leq 2\}$ ;
  - 9)  $\iint_D e^{y/x} dx dy$ ,  $D$  là tam giác giới hạn bởi  $y = x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ;
  - 10)  $\iint_D 2xy dx dy$ ,  $D$  giới hạn bởi các đường  $y = x$ ,  $y = \sqrt{x}$ .
- Tích phân hai lớp trong tọa độ cực
  - 1)  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ ,  $D$  là hình tròn  $x^2 + y^2 \leq a^2$ ;
  - 2)  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ ,  $D$  là nửa hình tròn  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $y \geq 0$ ;
  - 3)  $\iint_D xy dx dy$ ,  $D$  là 1/4 hình tròn  $x^2 + y^2 \leq R^2$  trong góc phần tư thứ nhất;
  - 4)  $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$ ,  $D$  là 1/4 hình vành khăn giữa hai đường tròn tâm  $O$  bán kính 1 và 2 ở góc phần tư thứ nhất;
  - 5)  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ ,  $D$  là hình tròn  $x^2 + y^2 \leq 2ax$ ;
  - 6)  $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$ ,  $D$  là nửa trên hình tròn  $x^2 + y^2 \leq a^2$ ;
  - 7)  $\iint_D \frac{\sin \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ ,  $D$  là miền giới hạn bởi các đường tròn  $x^2 + y^2 = \pi^2$ ,  $x^2 + y^2 = 4\pi^2$ ;
  - 8)  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ ,  $D$  là hình tròn  $x^2 + y^2 \leq 2ay$ ;
  - 9)  $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$ ,  $D$  miền giới hạn bởi đường tròn  $x^2 + y^2 = R^2$  và các đường  $y = x$ ,  $y = \sqrt{3}x$ ;



- 10)  $\iint_D \sqrt{4 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$ ,  $D$  miền giới hạn bởi các đường cong  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$  và nằm trong góc phần tư thứ nhất.

• Tính diện tích miền phẳng  $D$  giới hạn bởi:

- 1) các đường  $y = x$  và  $y = \sqrt{x}$ ;
- 2) các đường  $y^2 = 4 - x$  và  $2y^2 = x + 8$ ;
- 3) các đường thẳng  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$  và đường cong  $y = e^x$ ;
- 4) các đường thẳng  $y = -1$ ,  $y = -x$  và đường tròn  $x^2 + y^2 = -2y$ ;
- 5) đường cong  $y^2 = x + 2$  và đường thẳng  $x = 2$ ;
- 6) đường cong  $xy = a^2$  và đường thẳng  $x + y = 2, 5a$  ( $a > 0$ );
- 7) các đường cong  $xy = a^2$ ,  $xy = 2a^2$  và các đường thẳng  $y = x$ ,  $y = 2x$ ;
- 8) đường elip  $(y - x)^2 + x^2 = 1$ ;
- 9) các đường parabol  $y^2 = 10x + 25$  và  $y^2 = -6x + 9$ ;
- 10) các đường thẳng  $y = 0$ ,  $x = 1$  và parabol  $y = x^3$ .

• Bằng ánh xạ chuyển sang tọa độ cực, tính diện tích của hình giới hạn bởi:

- 1) các đường thẳng  $y = 0$ ,  $y = x$  và đường tròn  $x^2 + y^2 = 2x$ ;
- 2) đường cong  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ ;
- 3) đường cong  $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$ ;
- 4) đường cong  $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$ ;
- 5) đường cong  $(x^2 + y^2)^2 = 2y^3$ .

• Tính thể tích vật thể giới hạn bởi:

- 1) mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  và mặt trụ  $x^2 + y^2 = Rx$ ;
- 2) các mặt phẳng  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = 4$ ,  $y = 4$  và mặt parabol  $z = x^2 + y^2 + 1$ ;
- 3) các mặt phẳng  $z = 0$ ,  $y + z = 2$  và hình trụ  $y = x^2$ ;
- 4)  $y = x^2$ ,  $y = 1$ ,  $x + y + z = 4$ ,  $z = 0$ ;
- 5)  $z = y^2 - x^2$ ,  $z = 0$ ,  $y = \pm 2$ ;
- 6)  $z = 4 - x^2 - y^2$ ,  $2z = 2 + x^2 + y^2$ .

### Tích phân ba lớp

• Tính tích phân lặp

- 1)  $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$ ; 2)  $\int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{\sqrt{(4x-y^2)/2}} x dz$ ;
- 3)  $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$ ; 4)  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xy z dz$ .

• Tính tích phân ba lớp

- 1)  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$ ,  $V$  giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng  $x + y + z = 1$ ;
- 2)  $\iiint_V 2xy dx dy dz$ ,  $V = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$ ;
- 3)  $\iiint_V 3z^2 dx dy dz$ ,  $V = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ ;

- 4)  $\iiint_V x^3 y^2 z dx dy dz$ ,  $V = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq xy\}$ ;
- 5)  $\iiint_V x^{15}(y+z) dx dy dz$ ,  $V = \{(x, y, z) | -10 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2\}$ ;
- 6)  $\iiint_V \sin^{101} x \ln(y+z) dx dy dz$ ,  $V = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 2\pi, 1 \leq y \leq e, 1 \leq z \leq e\}$ ;
- 7)  $\iiint_V 2x dx dy dz$ ,  $V$  giới hạn bởi các mặt  $z = xy$ ,  $x + y = 1$ ,  $z = 0$ ;
- 8)  $\iiint_V y^3 dx dy dz$ ,  $V = \{(x, y, z) | -1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq 0, -1 \leq z \leq 0\}$ ;
- 9)  $\iiint_V (xyz)^2 dx dy dz$ ,  $V$  giới hạn bởi các mặt phẳng  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$ ,  $z = \pm 1$ ;
- 10)  $\iiint_V (x - y + z) dx dy dz$ ,  $V = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ ;
- 11)  $\iiint_V \sin x \sin y \sin z \cos x \cos y \cos z dx dy dz$ ,  $V = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2, 0 \leq z \leq \pi/2\}$ ;
- 12)  $\iiint_V (1-x)yz dx dy dz$ ,  $V$  giới hạn bởi các mặt phẳng  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  và  $z = 1 - x - y$ ;
- 13)  $\iiint_V xy\sqrt{z} dx dy dz$ ,  $V$  giới hạn bởi các mặt  $z = 0$ ,  $z = y$ ,  $y = x^2$ ,  $y = 1$ ;
- 14)  $\iiint_V (x + y + z)^2 dx dy dz$ ,  $V$  giới hạn bởi paraboloid  $2az \geq x^2 + y^2$  và mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$ .
  - Tích phân ba lớp trong tọa độ trụ, tọa độ cầu
  - 1)  $\iiint_V xyz^5 dx dy dz$ ,  $V$  là phần chung của hai hình cầu  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  và  $x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$ ;
  - 2)  $\iiint_V [(x + y)^2 - z] dx dy dz$ ,  $V$  giới hạn bởi các mặt  $z = 0$  và  $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$ ;
  - 3)  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ ,  $V$  là miền giới hạn bởi mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = z$ ;
  - 4)  $\iiint_V dx dy dz$ ,  $V$  là miền giới hạn bởi các mặt  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ ,  $x^2 + y^2 = z^2$  và chứa điểm  $(0, 0, R)$ ;
  - 5)  $\iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ ,  $V$  là miền giới hạn bởi các mặt  $x^2 + y^2 = z$ ,  $z = 1$ ;
  - 6)  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ ,  $V$  là miền giới hạn bởi các mặt  $x^2 + y^2 = 2z$ ,  $z = 2$ ;
  - 7)  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ ,  $V$  là miền giới hạn bởi mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = x$ .
  - Thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt:
    - 1) mặt paraboloid  $z = 6 - x^2 - y^2$  và mặt nón  $z^2 = x^2 + y^2$  ( $z \geq 0$ );
    - 2)  $x + y + z = 4$ ,  $x = 3$ ,  $y = 2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ;
    - 3)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ,  $x^2 + y^2 = z^2$ ;
    - 4)  $2z = x^2 + y^2$ ,  $y + z = 4$ ;
    - 5)  $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$  và  $x^2 + y^2 = 2az$ ;

6) phần hình trụ  $x^2 + y^2 = 2ax$  nằm giữa paraboloid  $x^2 + y^2 = 2az$  và mặt phẳng  $Oxy$ ;

7)  $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 3z$ ;

8)  $z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), y = x, y = x^2$ ;

9)  $z = x + y, z = xy, x + y = 1, x = 0, y = 0$ ;

10)  $z = 0, y + z = 4, x^2 + y^2 = 4$ ;

11)  $az = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;

12)  $az = a^2 - x^2 - y^2, z = a - x - y, x = 0, y = 0, z = 0 (z > 0)$ ;

13)  $z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

## Bài tập chương 4

### Tích phân đường

- Tính tích phân đường loại 1
- 1)  $\int_C (x+y)ds$ ,  $C$  có phương trình  $x+y=1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ;
- 2)  $\int_C (x+y)^2 ds$ ,  $C$  có phương trình  $x+y=a$ ,  $0 \leq x \leq a$ ;
- 3)  $\int_C (x-y)ds$ ,  $C$  có phương trình  $x+y=1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ;
- 4)  $\int_C x^5 y^2 ds$ ,  $C$  có phương trình  $y=x$ ,  $-a \leq x \leq a$ ;
- 5)  $\int_C \sin^5 y ds$ ,  $C$  có phương trình  $y=x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ ;
- 6)  $\int_C \frac{ds}{x+y}$ ,  $C$  là đoạn thẳng  $AB$ ,  $A(3,0)$  và  $B(0,3)$ ;
- 7)  $\int_C xy ds$ ,  $C$  là phần đường thẳng  $x+y-1=0$  bị chắn giữa hai trục tọa độ;
- 8)  $\int_C xy ds$ ,  $C$  là chu vi hình chữ nhật  $OABC$  với  $O(0,0)$ ,  $A(2,0)$ ,  $B(2,1)$  và  $C(0,1)$ ;
- 9)  $\int_C (x^2+y^2)ds$ ,  $C: x^2+y^2=R^2$ ;
- 10)  $\int_C \sqrt{x^2+y^2} ds$ ,  $C$  là phần đường tròn  $x^2+y^2=R^2$  trong góc phần tư thứ nhất;
- 11)  $\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$ ,  $C$  là đoạn thẳng  $OA$  với  $O(0,0)$  và  $A(1,2)$ ;
- 12)  $\int_C y^2 ds$ ,  $C$  là một vòm cuốn của cycloid  $x=a(t-\sin t)$ ,  $y=a(1-\cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ;
- 13)  $\int_C (2z - \sqrt{x^2+y^2})ds$ ,  $C$  là cung đường cong  $x=t \cos t$ ,  $y=t \sin t$ ,  $z=t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ;
- 14)  $\int_C \sqrt{x^2+y^2} ds$ ,  $C$  là đường cong có phương trình  $(x^2+y^2)^{3/2} = a^2(x^2-y^2)$ ;
- 15)  $\int_C (x+y)ds$ ,  $C$  là phần bé của đường tròn  $x^2+y^2+z^2=R^2$  cắt mặt phẳng  $y=x$  giới hạn bởi các điểm  $A(0,0,R)$  và  $B(R/2, R/2, R/\sqrt{2})$ ;
- 16)  $\int_C e^{x^2+y^2} ds$ ,  $C$  là biên của hình quạt tròn  $(r, \theta): 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi/4$ ;
- 17) Tính độ dài cung của đường xoắn ốc chính tắc  $ae^t \cos t$ ,  $y=ae^t \sin t$ ,  $z=ae^t$ , từ điểm  $O(0,0,0)$  đến điểm  $A(a,0,a)$ ;
- 18) Tính giá trị trung bình của hàm số  $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$  trên đường tròn  $x^2+y^2=R^2$ ;
- 19) Tính giá trị trung bình của hàm số  $f(x,y) = xy$  trên chu vi hình chữ nhật có các đỉnh  $O(0,0)$ ,  $A(2,0)$ ,  $B(2,1)$ ,  $C(0,1)$ ;
- 20) Tính khối lượng của đoạn thẳng  $AB$  với  $A(-2,0)$ ,  $B(0,-2)$  và tỉ khối (tuyến tính) là  $\gamma = (x+y)^2$ ;
- 21) Tính khối lượng của chu tuyến ellip  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , nếu tỉ khối tuyến là  $\gamma = |y|$ ;

22) Tính khối lượng của cung đường cong  $x = at$ ,  $y = at^2/2$ , nếu tỉ khối tuyến là  $\gamma = \sqrt{2y/a}$ .

• Tính tích phân đường loại 2

1)  $\int_C (2xy + 4x^3 + 1)dx - (2xy + 4x^3 - 1)dy$ ,  $C$  là đường  $x = 2$  từ  $A(2, 1)$  đến  $B(2, 0)$ ;

2)  $\int_C (y + 2x + 1)dx + (y - 1)dy$ ,  $C$  là đường  $y = -x + 1$  từ  $A(0, 1)$  đến  $B(1, 0)$ ;

3)  $\int_C 2xydx + x^2dy$ ,  $C$  là đường  $x + y = 0$  từ  $O(0, 0)$  đến  $A(-1, 1)$ ;

4)  $\int_C (xy^2 - 1)dx + (yx^2 + 3)dy$ ,  $C$  là đường  $y = 2x^2$  từ  $O(0, 0)$  đến  $A(1, 2)$ ;

5)  $\int_C 2xydx - x^2dy$ ,  $C$  là đường  $y = x^2$  từ  $A(-1, 1)$  đến  $B(1, 1)$ ;

6)  $\int_C x(4y + 1)dx + 2(x^2 + 1)dy$ ,  $C$  là cung parabol  $y = x^2/4$  từ  $O(0, 0)$  đến  $A(2, 1)$ ;

7)  $\int_C (y + 2x)dx + (4y + x)dy$ ,  $C$  là đường  $y^3 = x$  từ  $O(0, 0)$  đến  $A(1, 1)$ ;

8)  $\int_C (2x + y)dx + (3y^2 + x)dy$ ,  $C$  là đường  $y^2 = x$  từ  $O(0, 0)$  đến  $A(1, 1)$ ;

9)  $\int_C ydx + (y^3 + x)dy$ ,  $C$  là đường  $y^2 = 2x$  từ  $O(0, 0)$  đến  $A(2, 2)$ ;

10)  $\int_C 6x^2ydx + 2x^3dy$ ,  $C$  là đường  $y = x^4$  từ  $A(-1, 1)$  đến  $B(1, 1)$ ;

11)  $\int_{OA} 2xydx + x^2dy$ , từ  $O(0, 0)$  đến  $A(1, 1)$  theo ba đường i)  $y = x$ , ii)  $y = x^2$ , iii) đường gấp khúc  $OCA$ ,  $C(1, 0)$ ;

12)  $\int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$ ,  $C$  là cung parabol  $y = x^2$  từ  $A(-1, 1)$  đến  $B(1, 1)$ ;

13)  $\int_C y^2dx + x^2dy$ ,  $C$  là nửa trên ellip  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  và có hướng cùng chiều kim đồng hồ;

14)  $\int_C xdx + ydy + (x + y - 1)dz$ ,  $C$  là đoạn thẳng nối  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(2, 3, 4)$ ;

15)  $\oint_C (x + y^2 - 3)dx + (2xy + 3x + 2)dy$ ,  $C$  là đường tròn tâm  $O$  bán kính 1;

16)  $\oint_C y(\sin x + 1)dx + (x - \cos x)dy$ ,  $C$  là ellip  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ;

17)  $\oint_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ ,  $C$  là đường  $y = 1 - |1 - x|$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ;

18)  $\oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ ,  $C$  là đường tròn  $x^2 + y^2 = 1$ .

• Công thức Green

1)  $\int_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2dy$ ,  $C$  là chu tuyến tam giác  $ABC$ ,  $A(1, 1)$ ,  $B(2, 2)$ ,  $C(1, 3)$ ;

2)  $\int_{\widehat{AO}} (e^x \sin y - py)dx + (e^x \cos y - p)dy$ ,  $\widehat{AO}$  là nửa trên đường tròn  $x^2 + y^2 = ax$ ,  $A(a, 0)$ ,  $O(0, 0)$ ;

3) Chứng minh biểu thức dưới dấu tích phân là vi phân toàn phần và tính

$$\int_{\widehat{AB}} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy,$$

trong đó  $A(-2, -1)$ ,  $B(3, 0)$ ;

Áp dụng CT Green tính các tích phân đường:

- 4)  $\oint_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$ ,  $C$  là ellip  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ;
- 5)  $\oint_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$ ,  $C$  là đường tròn  $x^2 + y^2 = ax$ ;
- 6)  $\oint_C e^{-x^2+y^2}(\cos 2xydx + \sin 2xydy)$ ,  $C$  là đường tròn  $x^2 + y^2 = R^2$ ;
- 7) Chứng minh, tích phân  $\int_C (2x + 3y)dx + (3x - 4y)dy$  không phụ thuộc đường lấy tích phân, tính bằng hai cách: i)  $y = x^2$  từ  $O(0, 0)$  đến  $A(2, 4)$ , ii) đoạn thẳng  $\overline{OA}$ .