CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN VỀ TÔ MÀU

Bùi Tiến Lên

Đại học Khoa học Tự nhiên TPHCM

1/1/2018

Nội dung

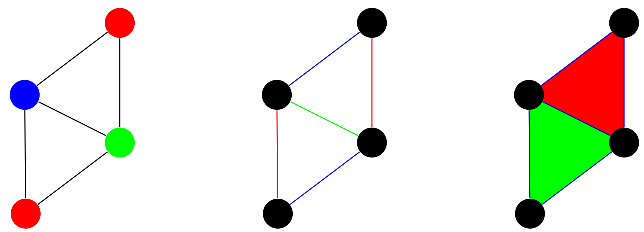
1. TỔNG QUAN
2. TÔ ĐỈNH
3. TÔ CẠNH
4. TÔ MIỀN

TỔNG QUAN

Các kiểu tô màu cho đồ thị

Trong lý thuyết đồ thị có 3 kiểu **tô màu đồ thị** (graph coloring)

- **Tô đỉnh** (vertex coloring) thường được gọi là *tô màu đồ thị*
- **Tô cạnh** (edge coloring)
- **Tô vùng** (region coloring) thường được gọi là *tô màu bản đồ*



(a) tô đỉnh (b) tô cạnh (c) tô miền

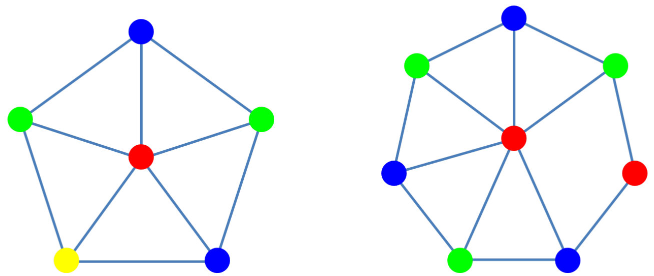
Hình 4.1: Các kiểu tô màu

TÔ ĐỈNH

Tô màu đồ thị

- Một phép tô màu đồ thị hay tô đỉnh của đồ thị là một cách đánh nhãn cho mỗi đỉnh của đồ thị bằng màu sao cho 2 đỉnh kề nhau phải có màu khác nhau
  - Bài toán tô màu là một loại **bài toán thỏa mãn ràng buộc** (constraint satisfaction problem)
  - Số màu - **sắc số** (chromatic number) của đồ thị G được ký hiệu là $\chi(G)$ là số màu ít nhất dùng để tô đồ thị

Tô màu đồ thị (cont.)



(a) $\chi = 4$ **(b)** $\chi = 3$

Hình 4.2: Sắc số của các đồ thị

Một số định lý về tô màu đồ thị

Định lý 4.1

1. *Nếu đồ thị G có ít nhất một cạnh không phải khuyên thì* $\chi(G) \geq 2$
2. *Nếu* $G_1 \subseteq G_2$ *thì* $\chi(G_1) \leq \chi(G_2)$
3. *Đồ thị đủ* K_n *sẽ có* $\chi(K_n) = n$
4. *Nếu đồ thị G chứa một đồ thị con đẳng cấu với* K_m *thì* $\chi(G) \geq m$
5. *Nếu đồ thị G là một đồ thị vòng có n đỉnh thì*

$$\chi(G) = \begin{cases} 2 & n \text{ là số chẵn} \\ 3 & n \text{ là số lẻ} \end{cases}$$

Một số định lý về tô màu đồ thị (cont.)

Định lý 4.2

Nếu T là cây n đỉnh với $n \geq 2$ thì $\chi(T) = 2$

Định lý 4.3

Cho G là một đồ thị liên thông có số đỉnh $n \geq 2$. Thì $\chi(G) = 2$ khi và chỉ khi G không chứa chu trình sơ cấp có chiều dài lẻ.

Định lý 4.4

Cho G là một đồ thị liên thông có số đỉnh $n \geq 2$. Thì điều kiện và đủ để $\chi(G) = 2$ là G là đồ thị phân đôi.

Định lý 4.5 (Brooks)

Cho đồ thị G, thì $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Thuật toán tô màu đồ thị

- Bài toán tô màu đồ thị là bài toán thỏa mãn ràng buộc
- Thuật toán tô màu đồ thị với số màu tối ưu có độ phức tạp không phải là đa thức.
- Trong nhiều ứng dụng chỉ cần tô màu đồ thị với số màu "gần tối ưu" và độ phức tạp tiếp nhận được.

Thuật toán tô màu đồ thị (cont.)

Cho đồ thị G có n đỉnh

Algorithm 1 Thuật toán heuristic 1 (Welch-Powell)

```
1: Sắp xếp các đỉnh theo bậc giảm dần
2: color = 1
3: while còn đỉnh chưa tô màu do
4:     Tô màu tất cả các đỉnh có thể được bằng màu color
5:     color = color + 1
```


Thuật toán tô màu đồ thị (cont.)

Cho đồ thị G có n đỉnh

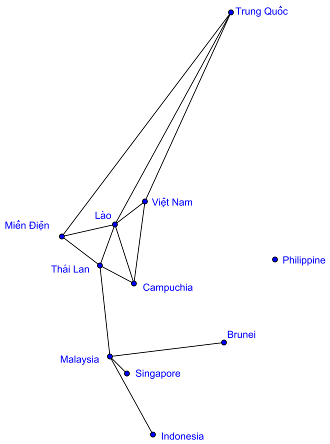
Algorithm 2 Thuật toán heuristic 2

```
1: while còn đỉnh chưa tô màu do
2:     Tô "màu nhỏ nhất" color cho đỉnh có "bậc lớn nhất"
3:     Hạ bậc đỉnh này thành 0,
4:     Những đỉnh kề với đỉnh này bậc giảm đi 1 và bị cấm tô màu
   color
```

Lưu ý

Các thuật toán không đảm bảo tô màu đồ thị với số màu tối ưu (sắc số $\chi(G)$). Nó chỉ cho một giá trị tiệm cận tới sắc số.

Ví dụ minh họa



Hình 4.3: Hãy tô màu đồ thị

Một số ứng dụng của tô màu đồ thị

- Bài toán lập lịch thi
- Bài toán phân chia tần số

TÔ CẠNH

Tô màu cạnh đồ thị

- Một phép tô màu cạnh của đồ thị là một cách là gán cho mỗi cạnh của đồ thị một màu nào đó sao cho không có 2 cạnh nào cùng đỉnh trùng màu.
  - **sắc số cạnh** (chromatic index) của đồ thị G được ký hiệu là $\chi'(G)$ là số màu ít nhất dùng để tô cạnh đồ thị

Sắc số cạnh của một số đồ thị đặc biệt

- Đồ thị rỗng G có $\chi'(G) = 0$
- Đồ thị vòng C_n có n đỉnh thì

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ 3 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

- Đồ thị đầy đủ K_n thì

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ n & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Một số định lý về tô màu cạnh đồ thị

Định lý 4.6

1. *Nếu $G_1 \subseteq G_2$ thì $\chi'(G_1) \leq \chi'(G_2)$*
2. *Nếu đồ thị G là một đồ thị vòng có n đỉnh thì*

$$\chi'(G) = \begin{cases} 2 & n \text{ là số chẵn} \\ 3 & n \text{ là số lẻ} \end{cases}$$

Một số định lý về tô màu cạnh đồ thị (cont.)

Định lý 4.7 (Konig)

Cho G là một đồ thị hai phía thì

$$\chi'(G) = \Delta(G)$$

Chứng minh
Dành cho bạn đọc ■

Định lý 4.8 (Vizing)

Cho G là một đồ thị đơn

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

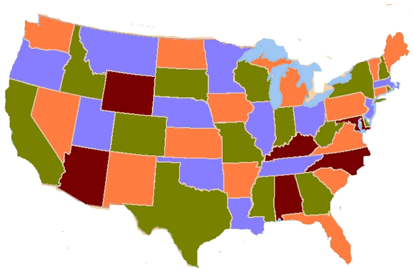
Chứng minh
Dành cho bạn đọc ■

TÔ MIỀN

Tô màu bản đồ

Lịch sử

Năm 1852, De Morgan đưa ra một giả thuyết: "*Mọi bản đồ đều có thể tô bằng 4 màu sao cho hai nước láng giềng có màu tô khác nhau*"

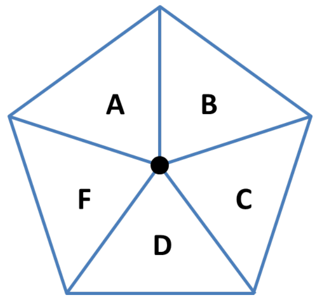


Hình 4.4: Tô màu các bang của nước Mỹ

Tô màu bản đồ (cont.)

Một số lưu ý trong bài toán tô màu bản đồ

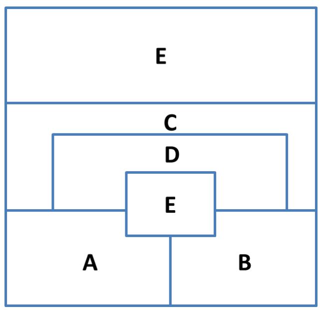
- Hai nước chỉ có điểm chung thì không được xem là láng giềng



Hình 4.5: A và B là láng giềng, A và C không phải láng giềng

Tô màu bản đồ (cont.)

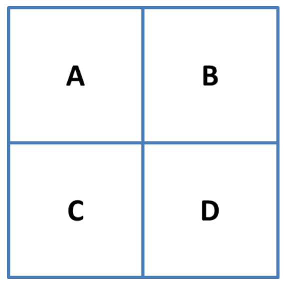
- Một nước phải là một vùng liên thông



Hình 4.6: bản đồ tô bằng 5 màu vì E có hai vùng

Tô màu bản đồ (cont.)

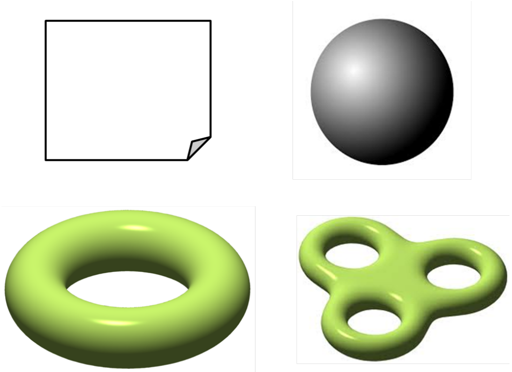
- Số màu có thể ít hơn 4



Hình 4.7: bản đồ tô bằng 2 màu

Tô màu bản đồ (cont.)

- Bản đồ được xét trên mặt phẳng hay mặt cầu



Hình 4.8: chỉ xét bản đồ trên mặt phẳng hay mặt cầu, không trên mặt xuyến

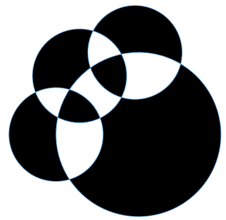
Định lý hai màu

Định lý 4.9

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị liên thông, phẳng G tô đúng 2 màu là bậc của các đỉnh của đồ thị là một số chẵn

Chứng minh

Sinh viên tự chứng minh ■

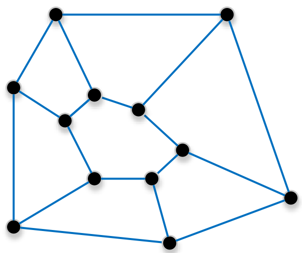


Hình 4.9: Đồ thị phẳng tô bằng hai màu

Đồ thị phẳng chuẩn

Định nghĩa 4.1

Đồ thị phẳng chuẩn là đồ thị phẳng với các đỉnh đều có bậc là 3

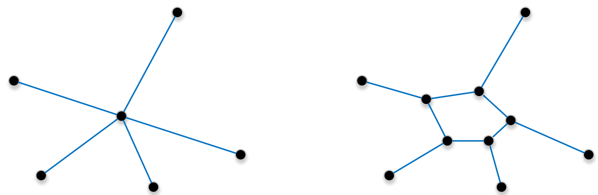


Hình 4.10: Đồ thị phẳng dạng chuẩn

Chuẩn hóa đồ thị sang dạng chuẩn

Thực hiện

- Loại bỏ các đỉnh bậc 2
- Các đỉnh có bậc lớn hơn 3 sẽ tạo ra miền mới



Hình 4.11: Chuẩn hóa đồ thị

Định lý ba màu

Định lý 4.10

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị phẳng chuẩn G tô đúng 3 màu là các biên của các miền đều có số cạnh chẵn

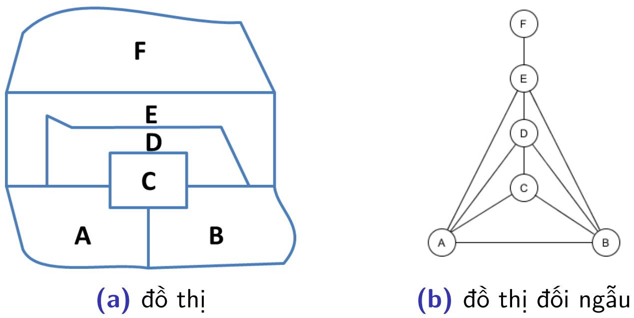
Đồ thị đối ngẫu

Định nghĩa 4.2

Cho đồ thị phẳng G liên thông. **Đồ thị đối ngẫu** (**dual graph**) G' của G là đồ thị được xây dựng như sau:

- Mỗi đỉnh G' tương ứng với một miền của G
- Hai đỉnh của G' có cạnh liên kết nếu hai miền tương ứng của chúng là hai láng giềng

Đồ thị đối ngẫu (cont.)



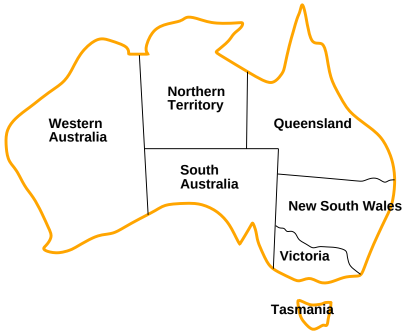
Hình 4.12: Đồ thị và đồ thị đối ngẫu

Đồ thị đối ngẫu (cont.)

Nhận xét về đồ thị đối ngẫu

- Đồ thị đối ngẫu của một đồ thị phẳng cũng là một đồ thị phẳng
- Bài toán tô màu bản đồ đã biến thành bài toán tô màu đồ thị phẳng

Đồ thị đối ngẫu (cont.)



Hình 4.13: Hãy tô màu các bang nước Úc

Định lý sáu màu và năm màu

Bổ đề 4.1

Cho một đồ thị phẳng, liên thông luôn tồn tại ít nhất một đỉnh có bậc không lớn hơn 5

Chứng minh

Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử đồ thị G phẳng, liên thông có n đỉnh, e cạnh và f miền và bậc của các đỉnh không nhỏ hơn 6

- Mỗi đỉnh phải kề ít nhất 6 cạnh
- Mỗi cạnh kề với 2 đỉnh. Do đó

$$6n \leq 2e \Rightarrow 3n \leq e$$

- Theo hệ quả ta có

$$e \leq 3n - 6$$

Định lý sáu màu và năm màu (cont.)

- Ta suy ra.

$$3n \leq e \leq 3n - 6$$

- Vô lý. Vậy ta có điều phải chứng minh

■

Định lý sáu màu và năm màu (cont.)

Định lý 4.11

Cho một đồ thị phẳng, liên thông luôn có thể tô màu đồ thị bằng không quá 6 màu

Chứng minh

Sinh viên tự chứng minh ■

Định lý sáu màu và năm màu (cont.)

Định lý 4.12 (định lý Kempe)

Cho một đồ thị phẳng, liên thông luôn có thể tô màu đồ thị bằng không quá 5 màu

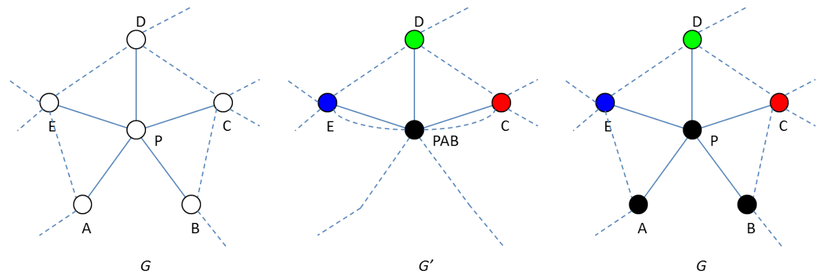
Chứng minh

Sinh viên đọc tài liệu [Trần and Dương, 2013] ■

Định lý sáu màu và năm màu (cont.)

Chứng minh

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp



Hình 4.14: Đồ thị G và G'

Định lý sáu màu và năm màu (cont.)

- Nhận thấy phát biểu đúng cho đồ thị có số đỉnh $n = 1, 2, 3, 4, 5$
- Xét đồ thị G có $n > 5$ với giả thiết quy nạp là các đồ thị có $1, 2, 3, ..., n - 1$ đều có thể tô không quá 5 màu
- Theo bổ đề luôn tồn tại một đỉnh có bậc không quá 5. Không mất tính tổng quát xét đỉnh P có bậc 5 và các đỉnh kề của nó là A, B, C, D, E
- Trong năm đỉnh A, B, C, D, E phải có ít nhất một cặp đỉnh không kề nhau. Không mất tính tổng quát A và B là 2 đỉnh không kề nhau
- Thực hiện phép biến đổi co 3 đỉnh P, A, B để thành một đỉnh mới PAB của đồ thị G' có $n - 2$ đỉnh

Định lý sáu màu và năm màu (cont.)

- Theo giả thiết quy nạp G' có thể tô không quá 5 màu. Không mất tính tổng quát tô các đỉnh như sau C (red), D (green), E (blue) và PAB (black)
- Phục hồi lại các đỉnh A và B của đồ thị G. Tô lại đỉnh P (white)

■

Định lý bốn màu

Định lý 4.13 (định lý Appel-Haken, 1976)

Cho một đồ thị phẳng, liên thông luôn có thể tô màu đồ thị bằng không quá 4 màu

Chứng minh

Sinh viên tự chứng minh ∎

Tài liệu tham khảo

- Diestel, R. (2005).
  Graph theory. 2005.
  Springer-Verlag.
- Moore, E. F. (1959).
  The shortest path through a maze.
  Bell Telephone System.
- Rosen, K. H. and Krithivasan, K. (2012).
  Discrete mathematics and its applications.
  McGraw-Hill New York.
- Tarjan, R. (1972).
  Depth-first search and linear graph algorithms.
  SIAM journal on computing, 1(2):146–160.

Tài liệu tham khảo (cont.)

- Trần, T. and Dương, D. (2013).
  Giáo trình lý thuyết đồ thị. 2013.
  NXB Đại Học Quốc Gia TPHCM.
- West, D. B. et al. (2001).
  Introduction to graph theory.
  Prentice hall Englewood Cliffs.