

# Bài tập chương 1

## Số thực

### ■ Quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$

1. Cho  $A$  là tập con không rỗng của  $\mathbb{R}$ . Chứng minh: phần tử nhỏ nhất (lớn nhất) của  $A$ , nếu có, thì duy nhất.

2. Cho  $A$  là tập không rỗng và bị chặn trên của  $\mathbb{R}$ . Chứng minh:  $\alpha = \sup A$  nếu và chỉ nếu

i)  $\forall x \in A, x \leq \alpha$ , và

ii)  $\forall \epsilon > 0, \exists x \in A, \alpha - \epsilon < x \leq \alpha$ .

Phát biểu và chứng minh tính chất tương tự cho các tập con không rỗng và bị chặn dưới của  $\mathbb{R}$ .

3. Cho  $A$  và  $B$  là hai tập con không rỗng của  $\mathbb{R}$ . Đặt  $-A = \{-x | x \in A\}$ ,  $A + B = \{x + y | x \in A \text{ và } y \in B\}$ ,  $A \cdot B = \{xy | x \in A \text{ và } y \in B\}$ . Chứng minh:

a)  $A$  bị chặn trên nếu và chỉ nếu  $-A$  bị chặn dưới và khi đó,  $\sup A = -\inf(-A)$ .

b) Nếu  $A \subset B$  và  $B$  bị chặn trên (dưới) thì  $A$  cũng bị chặn trên (dưới) và  $\sup A \leq \sup B$  ( $\inf B \leq \inf A$ ).

c) Nếu  $A$  và  $B$  bị chặn trên (dưới) thì  $A + B$  cũng bị chặn trên (dưới) và  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$  ( $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ ).

d) Nếu mọi phần tử của  $A$  và  $B$  đều là các số dương,  $A$  và  $B$  đều bị chặn trên thì  $A \cdot B$  cũng bị chặn trên và  $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$ .

4. Tìm  $\min A, \max A, \inf A, \sup A$ , nếu có, với

a)  $A = \{1/n | n \in \mathbb{N}\}$ , b)  $A = \{n + 1/n | n \in \mathbb{N}\}$ , c)  $A = \{n/(n+1) | n \in \mathbb{N}\}$ ,

d)  $A = \{(-1)^n/n | n \in \mathbb{N}\}$ , e)  $A = \{n^{(-1)^n} | n \in \mathbb{N}\}$ .

### ■ Dãy số

5. Chứng minh: tích của một dãy bị chặn và một dãy hội tụ về 0 là một dãy hội tụ về 0.

6. Chứng minh dãy  $\{(-1)^n\}$  không có giới hạn.

7. Tìm các giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  với  $x_n$  là

$$\begin{aligned} &\text{a) } \frac{4n^2 + 1}{3n^2 + 1}; \text{ b) } \frac{n}{n^2 + 1}; \text{ c) } \frac{6n^3 + 2n + 1}{n^3 + n^2}; \text{ d) } \frac{2n^3 + n^2 - 7\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^6 + 1} + 2n + 2}; \\ &\text{e) } \frac{1 - (1 - 1/n)^4}{1 - (1 - 1/n)^3}; \text{ f) } \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}; \text{ g) } \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 15n}; \text{ h) } \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 1}; \\ &\text{i) } \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n + 2}; \text{ j) } \frac{n!}{n! - (n+1)!}; \text{ k) } \frac{(n+1)! + (n+2)!}{(n+3)!}; \text{ l) } \frac{(-1)^n n}{n + 1}. \end{aligned}$$

8. Cho hai đa thức theo  $n$

$$p = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0, \quad q = b_h n^h + b_{h-1} n^{h-1} + \dots + b_0$$

với  $k, h \in \mathbb{N}$ ,  $a_k, b_h \neq 0$ . Giả sử  $q \neq 0$  với mọi  $n \in \mathbb{N}$ . Chứng tỏ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{q} = \begin{cases} 0 & k < h \\ a_k/b_h & k = h \\ (a_k/b_h) \times (+\infty) & k > h \end{cases}$$

9. Cho  $p = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0$  là đa thức bậc  $k \in \mathbb{N}$  theo  $n$ ,  $a_k \neq 0$ . Chứng tỏ rằng  $\lim_{n \rightarrow \infty} p = a_k \times (+\infty)$ .

10. Tìm các giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  với  $x_n$  là

$$\begin{aligned} &\text{a) } \sqrt{n+4} - \sqrt{n}; \text{ b) } \sqrt{n^2 - n} - n; \text{ c) } n(\sqrt{n^2 - 1} - n); \text{ d) } \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^3 - 1}; \\ &\text{e) } \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}; \text{ f) } \sqrt{n^2 + 5} - \sqrt{n^2 + 6}; \text{ g) } \sqrt{(n+1)(n+2)} - n; \\ &\text{h) } \sqrt{n^2 - 2n - 1} - \sqrt{n^2 - 7n + 3}; \text{ i) } \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}; \\ &\text{j) } \sqrt[3]{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^2}; \text{ k) } \frac{\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3}}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}}; \text{ l) } \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{5n+6} - \sqrt{5n}}. \end{aligned}$$

11. Chứng minh rằng với mọi  $p > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{pn^k} = 1.$$

12. Tìm các giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  với  $x_n$  là

$$\begin{aligned} &\text{a) } \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{2} + 1}; \text{ b) } \frac{2^n + 1}{2^n - 1}; \text{ c) } \frac{2^n + n^3}{2^{n+1} + n^6}; \text{ d) } \frac{2^n + n!}{3^n + n!}; \text{ e) } \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^2} + \sqrt[n]{n} + 1}; \\ &\text{f) } \frac{\sqrt{2^n + n!} - 1}{\sqrt{n!} + 4}; \text{ g) } \frac{\sqrt[3]{5^n - 4^n}}{5^n + 1}; \text{ h) } \frac{\sqrt[3]{3^n + 2^n}}{\sqrt[3]{3^n - 1}}; \text{ i) } \frac{3^n + 2^n}{3^n - 2^n}; \\ &\text{j) } \sqrt{2^n + 1} - \sqrt{2^n - 1}. \end{aligned}$$

**13.** Cho dãy  $\{x_n\}$  xác định bằng quy nạp như sau:

$$\begin{cases} x_1 = a > 0 \\ x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \end{cases}$$

Chứng tỏ  $\{x_n\}$  đơn điệu và bị chặn. Tính  $\lim x_n$ .

**14.** Cho dãy  $\{x_n\}$  xác định bằng quy nạp như sau:

$$\begin{cases} x_1 = 2, 5 \\ x_{n+1} = \frac{1}{5}(x_n^2 + 6) \end{cases}$$

Chứng tỏ  $\{x_n\}$  đơn điệu và bị chặn. Tính  $\lim x_n$ .

**15.** Cho dãy  $\{x_n\}$  xác định bằng quy nạp như sau:

$$\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{cases}$$

Chứng tỏ  $\{x_n\}$  đơn điệu và bị chặn. Tính  $\lim x_n$ .

**16.** Khảo sát sự hội tụ và tìm giới hạn của các dãy số  $a_n$  sau

a)  $\sin \frac{1}{n}$ ; b)  $\frac{\sin n}{n}$ ; c)  $\frac{1 + \cos n}{n}$ ; d)  $\sqrt[n]{1 + \sin^2 n}$ ; e)  $\frac{n \sin n}{1 + n^2}$ ;  
 f)  $\frac{(n+1) \cos^2 n + 1}{n^2 + n + 1}$ ; g)  $\frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}$ ; h)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + 2k}$ .

# Bài tập chương 2

## Giới hạn và hàm số liên tục

17. Tìm  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  với  $f(x)$  là

a)  $\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ ; b)  $\frac{1000x}{x^2-1}$ ; c)  $\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$ ; d)  $\frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$ ; e)  $\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$ ;  
 f)  $\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$ ; g)  $\frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$ ; h)  $\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$ ; i)\*  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ .

18. Tìm các giới hạn sau

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ ; d)\*  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ ;  
 e)\*  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$ ; f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ ; g)\*  $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ ; h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ ;  
 i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$ ; j)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ ; k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ .

19. Tìm các giới hạn sau

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7})$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x(x+a)}-x]$ ;  
 c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-5x+6}-x)$ ; d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+\sqrt[3]{1-x^3})$ .

20. Tìm các giới hạn sau

a)\*  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ ; b)\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$ ; d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$ ; e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{\pi}{x}\right)$ ;  
 f)\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ ; g)\*  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$ ; h)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a}$ ; k)\*  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan \pi x}{x+2}$ ;  
 l)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$ ; m)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$ ; n)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$ ; o)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$ ;  
 p)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ ; q)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ ; r)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x}$ ; s)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$ .

21. Tìm các giới hạn sau

$$\begin{aligned} & \text{a)}^* \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2+x}{3-x} \right)^x; \text{ b)} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x-1}{x^2-1} \right)^{x+1}; \text{ c)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} \right)^{2x/(x+1)}; \\ & \text{d)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+2}{2x^2+1} \right)^{x^2}; \text{ e)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^x; \text{ f)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^x; \\ & \text{g)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}; \text{ h)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^x; \text{ k)}^* \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^x. \end{aligned}$$

**22.** Tìm các giới hạn sau

$$\begin{aligned} & \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x}; \text{ b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1+10x)}{x}; \text{ c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x]; \\ & \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(\cos x)}{x^2}; \text{ e)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}. \end{aligned}$$

**23.** Tìm các giới hạn sau (giới hạn một phía)

$$\begin{aligned} & \text{a)}^* \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}; \text{ b)}^* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}; \text{ c)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{|x-1|}; \text{ d)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2}; \\ & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+e^{1/x}}; \text{ f)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}; \text{ g)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}; \text{ h)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}. \end{aligned}$$

**24.** Xét sự liên tục của hàm  $f$  cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

**25.** \* Tìm  $a$  để hàm  $f$  liên tục với mọi  $x$

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(x^2) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

**26.** \* Phân loại điểm gián đoạn của hàm

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

**27.** \* Chứng tỏ phương trình  $P(x) = 0$ ,  $P(x)$  là đa thức bậc lẻ, có ít nhất một nghiệm.

**28.** \* Chứng tỏ phương trình  $x^3 - 2x - 5 = 0$  có ít nhất một nghiệm trong khoảng  $[2, 3]$ . Tìm nghiệm gần đúng bằng phép chia đôi sau 3 bước.

# Bài tập chương 3

## Phép tính vi phân hàm một biến

### ■ Đạo hàm

*Đạo hàm*

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

*Từ khái niệm mở rộng của giới hạn ta có khái niệm đạo hàm bên phải, bên trái và đạo hàm là vô cùng.*

*Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương.*

*Đạo hàm hàm hợp  $y = y(u)$ ,  $u = u(x)$ ,*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

*Đạo hàm hàm phụ thuộc tham số  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  ( $t \in I$ ),*

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$$

*Đạo hàm hàm ẩn xác định bởi phương trình  $F(x, y) = 0$  (\*). Gọi  $y = y(x)$  là hàm ẩn xác định bởi phương trình (\*).*

$$\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = 0 \Rightarrow G(x, y, y') = 0.$$

*Đạo hàm hàm ẩn xác định bởi hệ*

$$\begin{cases} F(x, y) &= 0 \\ G(x, y, y') &= 0 \end{cases}$$

Ứng dụng:

(a) phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong  $y = f(x)$  tại  $x = x_0$ :

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0), \\ y - f(x_0) &= -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \end{aligned}$$

Nếu  $f'(x_0) = 0$  thì phương trình tiếp tuyến là  $y = f(x_0)$ , phương trình pháp tuyến là  $x = x_0$ .

(b) Tính gần đúng nhờ vi phân cấp một:  $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ .

Các định lý giá trị trung gian

Quy tắc L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Công thức này chỉ dùng được để khử dạng vô định  $(0/0)$ ,  $(\infty/\infty)$ .

Công thức Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{P_n(x)} \\ &\quad + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_n(x)}, \end{aligned}$$

trong đó  $a < \xi < x$  hay  $x < \xi < a$ . Đa thức  $P_n(x)$  là đa thức Taylor đến cấp  $n$ , số hạng  $R_n(x)$  là phần dư (sai số) của khai triển Taylor đến cấp  $n$ . Người ta thường dùng  $P_n(x)$  để xấp xỉ  $f(x)$ .

Khi  $a = 0$  ta có công thức Maclaurin.

1. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số

a)\*  $f(x) = 1/(x-1)$  tại  $a$  ( $a \neq 0$ ); b)  $f(x) = \sqrt{x+1}$  tại  $x = a$  ( $a > 1$ ).

2. Tính đạo hàm của các hàm số sau (đạo hàm lôga)

a)\*  $y = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$ ; b)  $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$ ; c)  $y = x^3 \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}$ ;

d)  $y = x^{x^2}$ ; e)  $y = \sqrt[x]{x}$ ; f)  $y = x^{\sqrt{x}}$ .

3. Tính đạo hàm của các hàm số sau (đạo hàm hàm hợp)

a)  $y = (3 - 2 \sin x)^5$ ; b)  $y = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$ ; c)  $y = \sqrt{\arctg x} - (\arcsin x)^3$ ;

- d)  $y = \arcsin(1/x^2)$ ; e)  $y = \arccos \sqrt{x}$ ; f)  $y = \operatorname{arctg}(1/x)$ ;  
 g)  $y = \sqrt{\cos x} a^{\sqrt{\cos x}}$ ; h)  $y = 3^{\cot g(1/x)}$ ; k)  $y = \ln \frac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$ .

4. Tìm  $f'_+(0)$  và  $f'_-(0)$  của các hàm:

a)  $f(x) = \sqrt{\sin(x^2)}$ ; b)  $f(x) = \arcsin \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$ ; c)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ .

5. Tính đạo hàm của các hàm số sau (hàm phụ thuộc tham số)

a)\*  $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^3 \end{cases}$ ; b)  $\begin{cases} x = 1/(t+1) \\ y = (t/(t+1))^2 \end{cases}$ ; c)  $\begin{cases} x = 2at/(1+t^2) \\ y = a(1-t^2)/(1+t^2) \end{cases}$ ;  
 d)  $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = (t-1)/\sqrt{t^2+1} \end{cases}$ ; e)  $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$ ; f)  $\begin{cases} x = a \cos^2 t \\ y = b \sin^2 t \end{cases}$ .

6. Tính đạo hàm của các hàm ẩn sau

a)\*  $x^3 + y^3 = a^3$ ; b)  $x^3 + x^2y + y^2 = 0$ ; c)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ; d)  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ .

7. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến

- a) của đường parabol  $y = \sqrt{x}$  tại điểm  $x = 4$ ;  
 b) với đường cong  $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$  tại điểm  $(-2; 5)$ ;  
 c)\* với đường cong tại điểm  $(2; 2)$  với đường cong

$$\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3}, \\ y = \frac{t}{2t^2} + \frac{1}{2t}. \end{cases}$$

- d)\* với đường cong  $y^4 = 4x^4 + 6xy$  tại điểm  $(1; 2)$ .

8. Tính gần đúng:

a)\*  $\cos 61^\circ$ ; b)  $\tan 44^\circ$ ; c)  $e^{0,2}$ ; d)  $\ln 0,9$ .

9. a)\* Hàm số  $f(x) = \tan x$  có thỏa các điều kiện của định lý Rolle trong đoạn  $[0, \pi]$  không?

b)\* Hãy kiểm tra rằng hàm  $f(x) = x - x^3$  có thỏa các điều kiện của định lý Lagrange trong đoạn  $[-2, 1]$ ? Tìm điểm trung gian tương ứng  $\xi$ .

10. Khử dạng vô định bằng quy tắc L'Hospital

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$ ; b)\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}$ ;  
 d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$ ; e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}$ ; f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ ; g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/x}{\cot g(\pi x/2)}$ ; h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin mx}{\ln \sin x}$ ;



k)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x$ ; l)  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln(x - 1)$ ; m)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ ;  
 n)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{2(1 - \sqrt{x})} - \frac{1}{3(1 - \sqrt[3]{x})} \right]$ ; o)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ ; p)\*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$ ; q)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{3/(4 + \ln x)}$ .

**11.** a)\* Hãy phân tích hàm  $f(x) = e^x$  thành tổng các lũy thừa của nhị thức  $x + 1$  đến thành phần chứa  $(x + 1)^3$ ;

b) Phân tích hàm  $f(x) = \ln x$  thành tổng các lũy thừa  $x - 1$  đến số hạng  $(x - 1)^2$ ;

c) Khai triển hàm  $f(x) = \sin x$  thành tổng các lũy thừa của  $x$  cho đến số hạng  $x^3$  và  $x^5$ .

**12.** \* Tính gần đúng  $\cos(0, 1)$  với sai số không quá  $10^{-4}$ .

**13.** Cho hàm số  $f(x) = \cos x$ .

a) Chứng minh:  $f^{(n)}(x) = f\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$  với mọi  $n \geq 1$ ;

b) Áp dụng, tính gần đúng  $\cos 5^0$  với sai số không quá  $10^{-5}$ .

# Bài tập chương 4

## Phép tính tích phân hàm một biến

### ■ Tích phân

**Nguyên hàm.** Hàm  $F(x)$  được gọi là nguyên hàm của hàm  $f(x)$  cho trước trong tập hợp  $D \subset \mathbb{R}$ , nếu

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in D.$$

Giả sử  $F(x)$  là nguyên hàm của  $f(x)$ . Hàm  $\Phi(x)$  là nguyên hàm của  $f(x)$  nếu và chỉ nếu

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

trong đó  $C$  là hằng số bất kỳ.

**Tích phân bất định.** Tập hợp tất cả các nguyên hàm của hàm  $f(x)$  được gọi là tích phân bất định của hàm đó và ký hiệu  $\int f(x)dx$ .

Các tính chất của tích phân bất định.

**Tích phân xác định**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Hàm số mà đối với nó tích phân xác định tồn tại được gọi là hàm số khả tích.

Các tính chất của tích phân xác định.

Công thức Newton - Leibniz

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

trong đó  $F(x)$  là nguyên hàm của  $f(x)$ .

Sinh viên **tự ôn** công thức tích phân, cách tính tích phân bất định, xác định (xem [1], [2]) và kiểm tra kỹ năng qua các bài tập tương ứng bên dưới.

### Tích phân suy rộng

định nghĩa (1) tích phân suy rộng với cận vô hạn; tích phân suy rộng của hàm không bị chặn (xem [1], [2]).

Các định lý so sánh cho hàm không âm.

Trong nội dung này tập trung vào việc **tính** tích phân suy rộng. Thông thường trong các bài toán về tích phân suy rộng ta đều có thể dùng công thức Newton - Leibniz suy rộng.

#### 1. Tính các tích phân sau (Phương pháp thế)

$$\begin{aligned} &\text{a) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}; \text{ b) } \int \frac{dx}{e^x+1}; \text{ c) } \int x(5x^2-3)^7 dx; \text{ d) } \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}; \\ &\text{e) } \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx; \text{ f) } \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}; \text{ g) } \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}; \text{ h) } \int \frac{\ln 2x dx}{x \ln 4x}; \\ &\text{k) } \int \frac{(\arcsin x)^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}; \text{ l) } \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}; \text{ m) } \int \sqrt{1-x^2} dx; \text{ n) } \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}. \end{aligned}$$

#### 2. Tính các tích phân sau (Tích phân từng phần)

$$\begin{aligned} &\text{a) } \int \ln x dx; \text{ b) } \int \arctg x dx; \text{ c) } \int \arcsin x dx; \text{ d) } \int x \cos 3x dx; \text{ e) } \int \frac{x}{e^x} dx; \\ &\text{f) } \int x \sin x \cos x dx; \text{ g) } \int \frac{\ln x}{x^3} dx; \text{ h) } \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx; \text{ i) } \int x \arctg x dx; \\ &\text{j) } \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx; \text{ k) } \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx; \text{ l) } \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx. \end{aligned}$$

#### 3. Tính các tích phân sau (Tích phân hàm chứa tam thức bậc hai)

$$\begin{aligned} &\text{a) } \int \frac{dx}{2x^2-5x+7}; \text{ b) } \int \frac{x-1}{x^2-x-1} dx; \text{ c) } \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}; \\ &\text{d) } \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}; \text{ e) } \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx; \text{ f) } \int \sqrt{1-2x-x^2} dx; \\ &\text{g) } \int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx; \text{ h) } \int \sqrt{x^2+2x+5} dx; \text{ i) } \int \frac{dx}{2x^2-4x+9}. \end{aligned}$$

#### 4. Tính các tích phân sau (Tích phân hàm lượng giác)

$$\begin{aligned} &\text{a) } \int \sin^{10} x \cos^3 x dx; \text{ b) } \int \cos^2 3x \sin^4 3x dx; \text{ c) } \int \frac{dx}{\cos^4 x}; \text{ d) } \int \frac{dx}{\sin^3 x}; \\ &\text{e) } \int \tan^4 x dx; \text{ f) } \int \frac{dx}{\cos^3 x}; \text{ g) } \int \sin 10x \sin 15x dx; \text{ h) } \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx; \\ &\text{i) } \int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} dx; \text{ j) } \int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}; \text{ k) } \int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}; \\ &\text{l) } \int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x \cos x-\cos^2 x}. \end{aligned}$$

5. Tính các tích phân suy rộng

$$\begin{aligned} &\text{a)}^* \int_0^\infty \sin x dx; \text{ b)} \int_1^\infty \frac{dx}{x}; \text{ c)}^* \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}; \text{ d)}^* \int_1^\infty \frac{dx}{x^p}; \text{ e)} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}; \\ &\text{f)}^* \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}; \text{ g)} \int_a^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x} \quad (a > 1); \text{ h)} \int_0^\infty e^{-kx} dx \quad (k > 0); \text{ i)} \\ &\int_0^\infty \frac{\arctg x}{x^2+1} dx. \end{aligned}$$

6. Tính các tích phân suy rộng sau:

$$\text{a)} \int_0^\infty x e^{-x} dx; \text{ b)}^* \int_0^\infty e^{-ax} \cos bxdx, \quad a > 0; \text{ c)} \int_0^\infty e^{-ax} \sin bxdx, \quad a > 0.$$

7. Tính các tích phân suy rộng sau:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \int_0^1 \frac{dx}{x}; \text{ b)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}; \text{ c)} \int_0^1 \frac{dx}{x^p}, \quad p > 0; \text{ d)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}; \\ &\text{e)}^* \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \text{ f)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}. \end{aligned}$$

8. Tính tích phân suy rộng  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ . Khảo sát tính hội tụ của tích phân  $\int_0^\infty \frac{\cos^2 x dx}{x^2+1}$ .

9. Khảo sát tính hội tụ của các tích phân:

$$\text{a)} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{x\sqrt{1+x^2}}; \text{ b)} \int_0^\infty \frac{\cos x dx}{x^2+1}; \text{ c)} \int_1^\infty \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) dx; \text{ d)} \int_1^\infty \sin \frac{1}{x} dx.$$

10. Khảo sát tính hội tụ của các tích phân:

$$\text{a)} \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad (n \in \mathbb{N}); \text{ b)} \int_0^1 \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1-x^2}}; \text{ c)} \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1}; \text{ d)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$$