Toán cao cấp - B2

2/2017

• **Định nghĩa.** Cho hàm $f(x, y)$ xác định trong miền đóng hữu hạn $D \subset (Oxy)$.
1) Phân hoạch miền D thành n miền con đôi một rời nhau $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ có diện tích $\Delta\sigma_1, \ldots, \Delta\sigma_n$ và đường kính $d_1, \ldots, d_n$ (đường kính của một miền là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm biên của miền đó). Ký hiệu $d = \max_{1 \le i \le n} d_i$.
2) Với mỗi miền con, chọn điểm $(\xi_i, \eta_i) \in \sigma_i$ và tính $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$.
3) Lập tổng tích phân

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = f(\xi_1, \eta_1)\Delta\sigma_1 + \cdots + f(\xi_n, \eta_n)\Delta\sigma_n$$

4) Qua giới hạn, cho $n \to \infty$, $d \to 0$, nếu

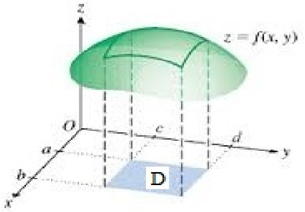
$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \quad \text{tồn tại.}$$

Khi đó ta nói $f(x,y)$ khả tích Riemann trong miền D và viết

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

• **Định lý.** *Nếu $f(x,y)$ liên tục trong miền đóng hữu hạn D thì nó khả tích trong miền đó.*

• Trường hợp $f(x,y) > 0$ trong miền D thì tích phân hai lớp biểu diễn thể tích hình trụ giới hạn bởi mặt $z = f(x,y)$, mặt trụ với đường sinh song song với Oz, tựa vào miền D và (Oxy).



$$V = \iint_D f(x,y)dxdy$$

• **Tính chất của tích phân hai lớp**

1) $\iint_D (f \pm g)dxdy = \iint_D fdxdy \pm \iint_D gdxdy$.

2) $\iint_D (cf)dxdy = c\iint_D fdxdy$ (c là hằng số).

3) Nếu $D = D_1 \cup D_2$ sao cho $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ thì

$$\iint_D fdxdy = \iint_{D_1} fdxdy + \iint_{D_2} fdxdy.$$

4) $\sigma = \iint dxdy$, trong đó σ là diện tích của miền D.

5) Nếu $f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in D$, thì

$$\iint_D fdxdy \leq \iint_D gdxdy.$$

6) Nếu m và M là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất tương ứng của hàm $f(x,y)$ thì

$$m\sigma \leq \iint fdxdy \leq M\sigma,$$

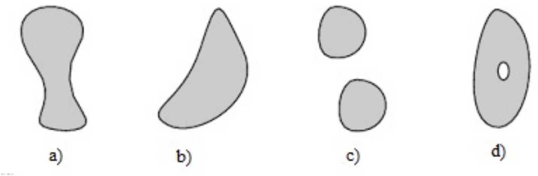
trong đó σ là diện tích của miền D.

• **Định lý về trị trung bình.** *Nếu $f(x, y)$ liên tục trong miền liên thông D, thì tồn tại một điểm (ξ, η) sao cho*

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y)dxdy,$$

trong đó σ là diện tích miền D.

$*$ Miền D được gọi là liên thông, nếu hai điểm bất kỳ của D có thể nối với nhau bằng một đường liên tục nằm hoàn toàn trong D.

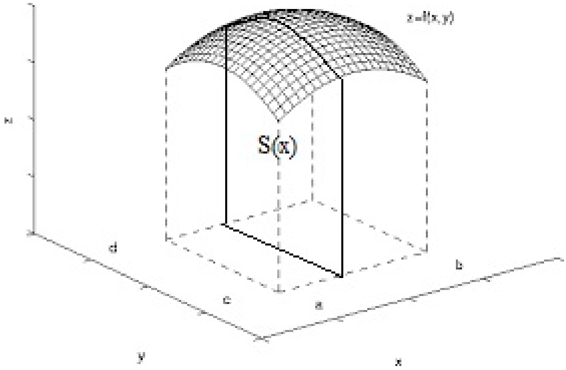


a), b), d) liên thông; c) không liên thông

• **Cách tính tích phân hai lớp**

Dựa vào định lý Fubini.

1) Miền D là hình chữ nhật, $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$.



Để minh họa công thức tính, ta xét trường hợp $f(x, y) \geq 0$.

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b S(x)dx$$

trong đó $S(x)$ là diện tích hình thang cong có đáy là đoạn $[a,b]$ và cạnh cong có phương trình là $z = f(x,y)$ với $x \in [a,b]$. Ta có

$$S(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

suy ra

$$\begin{aligned} V = \iint_D f(x,y)dxdy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \\ &= \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy. \end{aligned}$$

Đẳng thức cuối thể hiện một cách viết khác thuận tiện hơn.

Như vậy, để tính tích phân kép cho trường hợp miền xác định là $[a, b] \times [c, d]$ ta có các công thức:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)dxdy &= \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy && (1) \\ &= \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx. && (2) \end{aligned}$$

$<$ Tính $\iint_D x \ln y dxdy$ trong đó
$D = \{(x,y)|0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq e\}$.
Dùng công thức thứ nhất (1):

$$\iint_D x \ln y dxdy = \int_0^4 dx \int_1^e x \ln y dy = \int_0^4 x dx \int_1^e \ln y dy.$$

Tích phân từng phần, $u = \ln y$, $dv = dy$

$$\int_1^e \ln y dy = y \ln y - y|_1^e = 1.$$

Suy ra

$$\iint_D x \ln y dx dy = \int_0^4 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = 8.$$

Nếu dùng công thức thứ hai (2):

$$\iint_D x \ln y dx dy = \int_1^e dy \int_0^4 x \ln y dx = \int_1^e \ln dy \int_0^4 x dx.$$

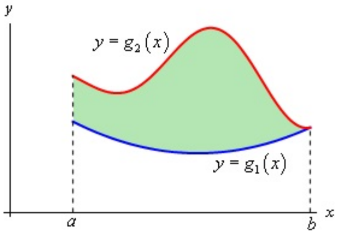
Ta cũng có cùng một kết quả $>$

2) Miền D có dạng như hình vẽ. D giới hạn bên trái, bên phải bởi các đường thẳng $x = a$, $x = b$; giới hạn bên dưới và bên trên lần lượt bởi các đường cong $y = g_1(x)$ và $y = g_2(x)$. Khi đó,

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

Ta có công thức (tích phân theo biến y trước):

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy. \tag{3}$$

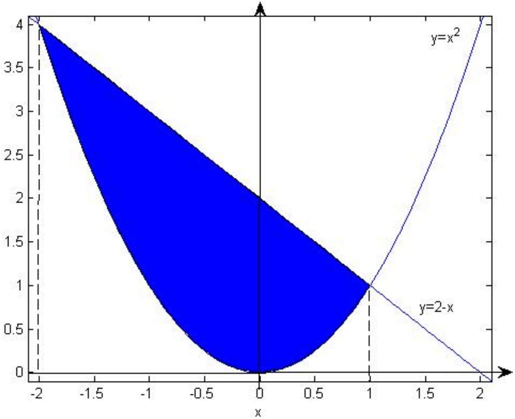


< Tính tích phân $\iint_D ddxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2 - x$.
Giao điểm của hai đường là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y &= x^2 \\ y &= 2 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (-2, 4),\ (1, 1).$$

Như vậy,

$$D = \{(x, y)| -2 \le x \le 1, x^2 \le y \le 2 - x\} \quad \text{(xem hình vẽ)}$$



Dùng công thức (3)

$$\iint_D x dx dy = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} x dy = \int_{-2}^{1} x dx \int_{x^2}^{2-x} dy.$$

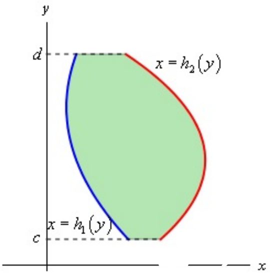
Ta có

$$\int_{x^2}^{2-x} dy = y\Big|_{x^2}^{2-x} = 2 - x - x^2$$

suy ra

$$\iint_D x dx dy = \int_{-2}^{1} x(2 - x - x^2) dx = x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{1} = -\frac{9}{4} >$$

3) Miền D có dạng như hình vẽ. D giới hạn bên dưới, bên trên bởi các đường thẳng $y = c$, $y = d$; giới hạn bên trái và bên phải lần lượt bởi các đường cong $x = h_1(y)$ và $x = h_2(y)$.



Khi đó,

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d. h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

Ta có công thức (tích phân theo biến x trước):

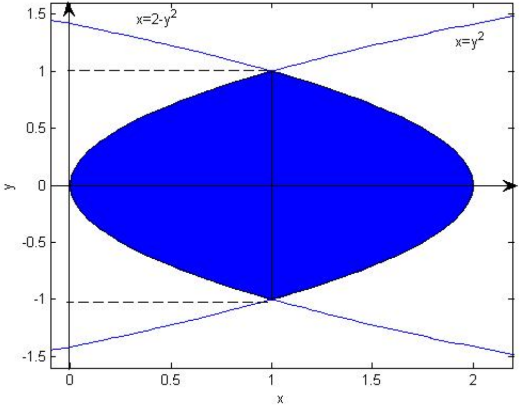
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx. \qquad (4)$$

$<$ Tính diện tích của miền D giới hạn bởi các parabol $x = y^2$ và $x = 2 - y^2$.
Giao điểm hai đường cong là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x &= y^2 \\ x &= 2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow 2(1 - y^2) = 0 \Rightarrow (1, -1),\ (1, 1).$$

Như vậy,

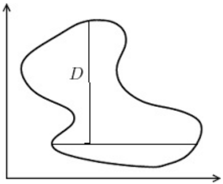
$$D = \{(x, y) | -1 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 2 - y^2\} \quad \text{(xem hình vẽ)}$$



Dùng công thức (4)

$$\iint_D dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{2-y^2} dx = \int_{-1}^{1} 2(1-y^2)dy = \frac{8}{3}$$

4) Miền D có dạng tổng quát như hình vẽ.



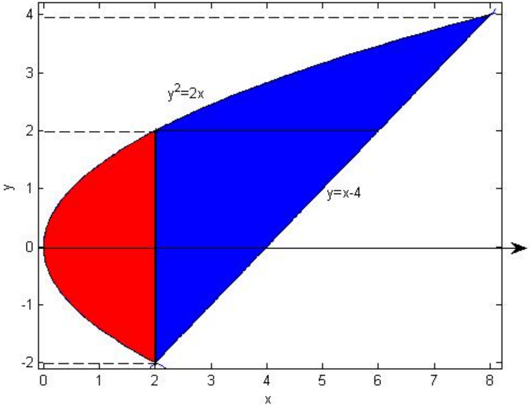
Ta chia D thành các miền con sao cho các đường song song với Ox hay Oy chỉ cắt biên của các miền con tại **hai điểm**, rồi dùng công thức:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f(x,y)dxdy$$

trong đó $D = \cup_{i=1}^{n} D_i$ với $D_i \cap D_j = \emptyset$ khi $i \neq j$.
$<$ Tính $\iint_D xydxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $y = x - 4$, $y^2 = 2x$.

Giao điểm của hai đường là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y & = & x-4 \\ y^2 & = & 2x \end{cases} \Rightarrow y^2-2y-8=0 \Rightarrow (2,-2),\ (8,4).$$



Thật ra miền D ở đây có dạng 3). Tuy nhiên, để minh họa ta chia miền D thành 2 miền con: D_1 (màu đỏ) và D_2 (màu xanh). Miền $D_1 = \{(x, y) | -2 \leq y \leq 2, y^2/2 \leq x \leq 2\}$. Dùng công thức (4):

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1} xydxdy &= \int_{-2}^{2} ydy \int_{y^2/2}^{2} xdx = \int_{-2}^{2} y[x^2]_{y^2/2}^{2} dy \\
&= \int_{-2}^{2} y\left(4 - \frac{y^4}{4}\right) dy = 2y^2 - \frac{y^6}{24}\bigg|_{-2}^{2} = 0.
\end{aligned}$$

Miền $D_2 = \{(x, y) | 2 \leq x \leq 8, x - 4 \leq y \leq \sqrt{2x}\}$. Dùng công thức (3):

$$\begin{aligned}
\iint_{D_2} xydxdy &= \int_{2}^{8} xdx \int_{x-4}^{\sqrt{2x}} ydy = \int_{2}^{8} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x-4}^{\sqrt{2x}} dx \\
&= \int_{2}^{8} x\left(5x - \frac{x^2}{2} - 8\right) dx = 90.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\iint_D xydxdy = \iint_{D_1} xydxdy + \iint_{D_2} xydxdy = 90\ >$$

• Giả sử miền D được biến đổi thành miền D' theo công thức đổi tọa độ, từ (x, y) sang tọa độ cong (p, q)

$$x = x(p, q), \quad y = y(p, q), \tag{$*$}$$

các hàm $x(p, q)$, $y(p, q)$ khả vi liên tục và có các đạo hàm riêng trong miền đóng D' của mặt phẳng pq. Với giả thiết này, (*) xác định một song ánh từ D' vào D.

• Nếu gọi

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q} \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q} \end{vmatrix}$$

là định thức hàm (hoặc Jacobian) của các hàm $x(p, q)$, $y(p, q)$ thì

$$dxdy = |J| dpdq.$$

Khi đó ta có công thức đổi biến

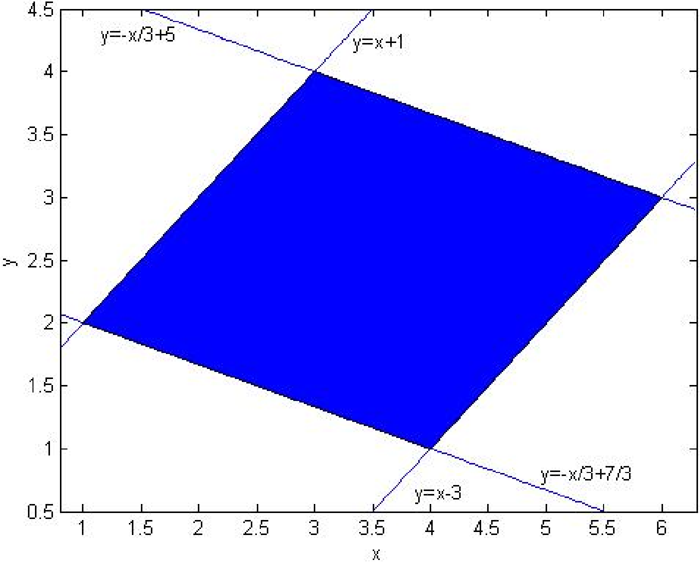
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(p,q), y(p,q))|J|dpdq.$$

$<$ Tính $\iint_D (y-x)dxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường thẳng $y = x+1$, $y = x-3$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x + 5$.
Các giao điểm: $(1,2)$, $(4,1)$, $(6,3)$, $(3,4)$.
Đổi biến:

$$p = y - x,\ q = y + \frac{x}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}p + \frac{3}{4}q,\ y = \frac{1}{4}p + \frac{3}{4}q,$$

trong đó $D'\{(p,q) | -3 \le p \le 1, 7/3 \le q \le 5\}$.
Jacobian của phép biến đổi

$$J = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{3}{4} \Rightarrow |J| = \frac{3}{4}.$$


y=-x/3+5
y=x+1
y=-x/3+7/3
y=x-3
x
y
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6

Áp dụng công thức:

$$\iint_D (y-x)dxdy = \iint_{D'} \left(\frac{1}{4}p + \frac{3}{4}q + \frac{3}{4}p - \frac{3}{4}q\right)\frac{3}{4}dpdq$$
$$= \frac{3}{4}\int_{7/3}^{5} dq \int_{-3}^{1} pdp = \frac{3q}{4}\Big|_{7/3}^{5} \frac{p^2}{2}\Big|_{-3}^{1} = -8 \ >$$

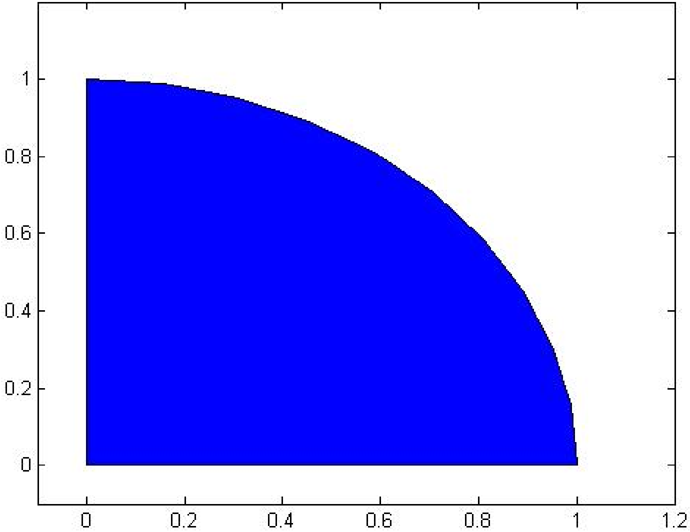
⋆ Trong tọa độ cực (r, φ),

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

khi đó $J = r > 0$. Công thức đổi biến:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

$<$ Tính $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1, x, y \ge 0\}$.


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

Chuyển sang tọa độ cực

$$D' = \{(r, \varphi) | 0 < r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}$$

Ta có

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \frac{\pi}{6} \quad >$$

- Thể tích vật thể

Ý nghĩa hình học của tích phân hai lớp là thể tích vật thể có đáy là miền D, mặt xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với Oz và mặt trên là $z = f(x, y)$

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

- Diện tích hình phẳng

$$\sigma = \iint_D dxdy.$$

• Diện tích mặt cong

Mặt cong được cho bởi phương trình $z = f(x, y)$ với hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là $D(xy)$. Thì diện tích mặt cong là

$$S = \iint_{D(xy)} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy.$$

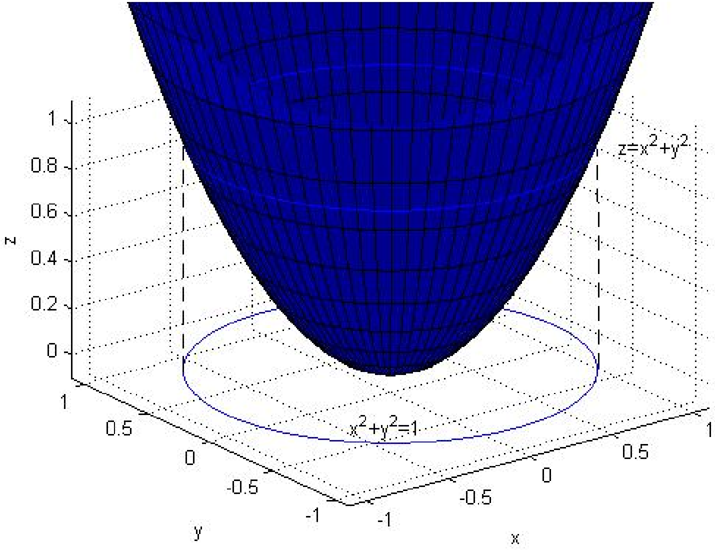
Nếu mặt cong được cho dưới dạng $x = x(y, z)$ (hoặc $y = y(x, z)$) thì

$$S = \iint_{D(yz)} \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dydz$$

hoặc

$$S = \iint_{D(zx)} \sqrt{1 + (y'_z)^2 + (y'_x)^2} dzdx.$$

$<$ Tính diện tích của phần mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ bị cắt bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
z
$z=x^2+y^2$
$x^2+y^2=1$
1
0.5
0
-0.5
-1
y
-1
-0.5
0
0.5
1
x

Do $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$ nên $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}$ suy ra

$$S = \iint_{D(xy)} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực, $D' = \{(r,\varphi)|0 < \varphi \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, ta có

$$\begin{aligned} S &= \iint_{D'} \sqrt{1+4r^2}rdrd\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+4r^2}rdr = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1) \end{aligned}$$ >

• **Định nghĩa.** Cho hàm số $f(x,y,z)$ xác định trên miền đóng hữu hạn $V \subset \mathbb{R}^3$. Phân hoạch miền V thành các miền con $V_1, \ldots, V_n$ đôi một rời nhau. Mỗi miền con có thể tích và đường kính tương ứng là $\Delta V_1, \ldots, \Delta V_n$ và $d_1, \ldots, d_n$. Ký hiệu $d = \max_{1 \le i \le n} d_i$. Trong mỗi miền con V_i, chọn điểm $(\xi_i, \eta_i \zeta_i) \in V_i$ tính $f(\xi_i, \eta_i \zeta_i)\Delta V_i$. Lập tổng tích phân

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i \zeta_i)\Delta V_i = f(\xi_1, \eta_1 \zeta_1)\Delta V_1 + \cdots + f(\xi_n, \eta_n \zeta_n)\Delta V_n.$$

Qua giới hạn, cho $n \to \infty$, $d \to 0$, nếu

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ d \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i \zeta_i)\Delta V_i \quad \text{tồn tại.}$$

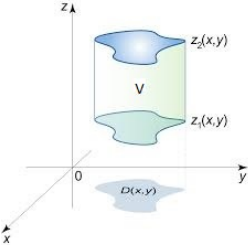
Khi đó ta nói $f(x, y, z)$ khả tích Riemenn trong miền V và viết

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{n \to \infty \\ d \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i \zeta_i)\Delta V_i.$$

• **Định lý.** *Nếu $f(x, y, z)$ liên tục trong miền đóng hữu hạn V thì nó khả tích trong miền đó.*

• **Cách tính tích phân ba lớp**

Cũng dựa vào định lý Fubini.



Theo hình vẽ

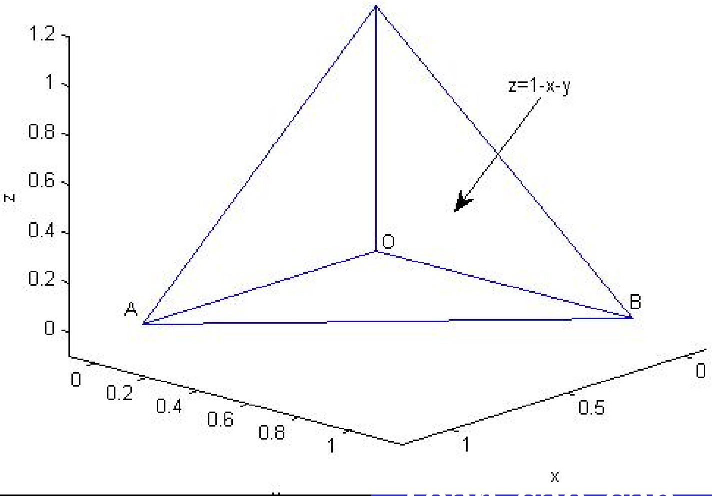
$$V = \{(x,y,z) | z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y), (x,y) \in D(x,y)\}.$$

Ta suy ra

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D(x,y)} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

$<$ Tính $\iiint_V (1-x)yzdxdydz$, V là miền giới hạn bởi các mặt phẳng $x=0$, $y=0$, $z=0$ và $z=1-x-y$.

$$\begin{aligned} V &= \{(x,y,z) | 0 \leq z \leq 1-x-y, (x,y) \in \Delta OAB\} \\ &= \{(x,y,z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y\} \end{aligned}$$


z=1-x-y
O
A
B
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
z
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.5
1
x

Dùng công thức, ta được

$$\begin{aligned}
\iiint_V (1-x)yz\,dxdydz &= \iint_{\Delta OAB} (1-x)y\,dxdy \int_0^{1-x-y} z\,dz \\
&= \int_0^1 (1-x)dx \int_0^{1-x} y\,dy \int_0^{1-x-y} z\,dz \\
&= \frac{1}{144} >
\end{aligned}$$

• Miền V được biến đổi thành miền V' theo công thức đổi tọa độ, từ (x, y, z) sang tọa độ cong (p, q, r)

$$x = x(p, q, r), \quad y = y(p, q, r), \quad z = z(p, q, r), \qquad (**)$$

các hàm $x(p, q, r)$, $y(p, q, r)$, $z(p, q, r)$ khả vi liên tục và có các đạo hàm riêng trong miền đóng V' của không gian pqr. Với giả thiết này, nếu

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{vmatrix} \neq 0$$

thì $(x(p, q, r), y(p, q, r), z(p, q, r))$ xác định một song ánh từ V' vào V.

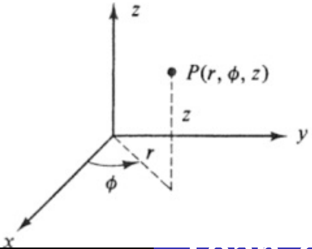
• Nếu gọi J là định thức hàm (hoặc Jacobian) của các hàm $x(p,q,r)$, $y(p,q,r)$, $z(p,q,r)$ thì

$$dxdydz = |J|dpdqdr.$$

Khi đó ta có công thức đổi biến

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f(x(p,q,r), y(p,q,r), z(p,q,r))|J|dpdqdr.$$

⋆ Hệ tọa độ trụ



Liên hệ giữa tọa độ Descartes với tọa độ trụ:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z$$

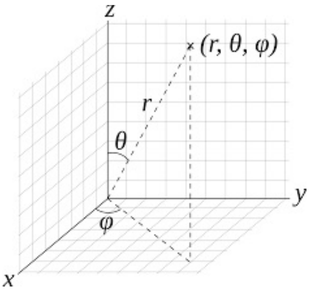
$(0 < r < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < \infty)$.
Jacobian của phép đổi biến:

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r > 0.$$

Công thức đổi biến:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz.$$

⋆ Hệ tọa độ cầu



Liên hệ giữa tọa độ Descartes với tọa độ cầu:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

$(0 < r < \infty,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi)$.

Jacobian của phép đổi biến:

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= -r^2\sin\theta. \end{aligned}$$

Công thức đổi biến:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz =$$
$$\iiint_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi.$$