



# Single source shortest path, negative weights

Link submit: <https://open.kattis.com/problems/shortestpath3>

Solution:

C++	<a href="https://ideone.com/AfxJtH">https://ideone.com/AfxJtH</a>
Java	<a href="https://ideone.com/6ts5di">https://ideone.com/6ts5di</a>
Python	

Tóm tắt đề:

Cho một đồ thị có hướng gồm  $n$  đỉnh,  $m$  cạnh. Các đỉnh được đánh số từ 0 tới  $n - 1$ . Hãy tính trọng số nhỏ nhất của quãng đường đi từ một đỉnh nguồn  $s$  cho trước đến các đỉnh còn lại.

Input:

Một file input chứa nhiều test case. Mỗi test case được định dạng như sau:

- Dòng đầu tiên chứa bốn số nguyên không âm  $n, m, q$  và  $s$  ( $1 \leq n \leq 1000$ ,  $0 \leq m \leq 5000$ ,  $1 \leq q \leq 100$ ,  $0 \leq s < n$ ) – Trong đó,  $n$  là số lượng đỉnh của đồ thị,  $m$  là số cạnh,  $q$  là số truy vấn và đỉnh nguồn  $s$ ;
- $m$  dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa ba số nguyên  $u, v$  và  $w$  mô tả có một cạnh nối từ đỉnh  $u$  sang đỉnh  $v$  với trọng số là  $w$  ( $0 \leq u, v < n$ ,  $-2000 \leq w \leq 2000$ );
- $q$  dòng truy vấn tiếp theo, mỗi dòng chứa một số nguyên không âm, yêu cầu bạn đưa ra trọng số của đường đi có trọng số nhỏ nhất từ đỉnh nguồn  $s$  đến đỉnh yêu cầu.

File input kết thúc với bốn con số 0.

Output:

Với mỗi truy vấn, ghi ra một dòng duy nhất là trọng số của đường đi có trọng số nhỏ nhất từ đỉnh nguồn đến đỉnh yêu cầu nếu có. Ghi ra "Impossible" nếu không thể đến đỉnh yêu cầu từ đỉnh nguồn. Ghi ra "-Infinity" nếu không thể xác định đường đi có trọng số nhỏ nhất đến đỉnh yêu cầu. Ghi ra một dòng trống sau mỗi test case.

Ví dụ:

5 4 3 0	-Infinity
0 1 999	2
1 2 -2	Impossible
2 1 1	
0 3 2	-100

1	
3	
4	
2 1 1 0	
0 1 -100	
1	
0 0 0 0	

### Giải thích:

Ở test case thứ nhất, ta thấy rằng để đi từ đỉnh 0 tới đỉnh 1, ta có thể đi  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$  cứ như thế mãi mà vẫn không thể đạt được trọng số nhỏ nhất, do đó ta ghi ra `-Infinity`. Để đi từ đỉnh 0 tới đỉnh 3, ta chỉ có một con đường là đi trực tiếp từ 0 tới 3 với trọng số là 2. Ta có thể thấy rằng việc đi từ 0 tới 4 là không thể vì không có một con đường nào dẫn từ đỉnh 0 tới đỉnh 4 cả, do đó ta ghi `Impossible`.

### Hướng dẫn giải:

Ở đây, đề yêu cầu ta tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh đến các đỉnh còn lại trên đồ thị có cạnh có trọng số âm, do đó ta sẽ áp dụng thuật toán Bellman-Ford để giải quyết bài toán này.

Đầu tiên, ta gọi  $dist_i$  là trọng số nhỏ nhất đi từ đỉnh  $s$  tới đỉnh  $i$ , ban đầu ta gán toàn bộ các phần tử của mảng bằng  $+\infty$  và  $dist_s = 0$ .

Tiếp theo, ta sẽ chạy Bellman-Ford một lần đầu tiên để lấy được trọng số nhỏ nhất đến các đỉnh còn lại. Sau khi chạy xong, nếu  $dist_i = +\infty$  thì có nghĩa là đỉnh  $i$  không thể đến được và ngược lại, nếu  $dist_i \neq +\infty$  thì ta có 2 trường hợp: ta không thể đạt trọng số nhỏ nhất và trọng số đã là nhỏ nhất rồi.

Để xử lý trường hợp trọng số chưa phải là nhỏ nhất thì ta phải chạy thêm Bellman-Ford thêm một lần nữa. Lần này, nếu một đỉnh  $i$  cần cập nhật  $dist_i$  thì ta sẽ gán  $dist_i = -\infty$  vì lúc này, đỉnh  $i$  đã ở trong một chu trình âm.

Lúc này mình sẽ lần lượt xét từng truy vấn. Gọi đỉnh yêu cầu truy vấn là  $u$  thì nếu  $dist_u = -\infty$  thì ta ghi ra `-Infinity`, nếu  $dist_u = +\infty$  thì ta ghi ra `Impossible` và ta ghi ra  $dist_u$  nếu cả 2 trường hợp trước không thỏa mãn.

**Độ phức tạp:** Với mỗi test case, ta sẽ phải chạy thuật Bellman-Ford 2 lần, tốn độ phức tạp là  $O(n \cdot m)$ , việc đọc dữ liệu sẽ là  $O(m + q)$ . Vậy độ phức tạp của mỗi test case sẽ là  $O(n \cdot m)$ .