Toán cao cấp - B2

2/2017

• **Đường cong phẳng.** Đường cong $\mathcal{C}$ trong $\mathbf{R}^n$ được cho dưới dạng tham số

$$x_i = \varphi_i(t) \quad a \leq t \leq b$$

với $i = 1, \ldots, n$. Trong bài giảng ta xét $n = 2$. Khi đó, phương trình tham số của đường cong là

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad a \leq t \leq b.$$

$\mathcal{C}$ được gọi là đường cong đơn nếu các hàm $\varphi(t)$, $\psi(t)$ liêu tục trong $[a, b]$ và không tự cắt (nghĩa là, nếu $t_1 \neq t_2\, t_1, t_2 \in [a, b]$ thì $(\varphi(t_1), \psi(t_1) \neq (\varphi(t_2), \psi(t_2))$. Nếu $A(\varphi(a), \psi(a)) = B(\varphi(b), \psi(b))$ thì $\mathcal{C}$ được gọi là đường cong kín.
$\mathcal{C}$ được gọi là đường cong trơn nếu các hàm $\varphi(t)$, $\psi(t)$ có đạo hàm liên tục và $\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 > 0\, \forall t \in [a, b]$. $\mathcal{C}$ được gọi là đường cong trơn từng khúc nếu nó gồm một số hữu hạn đường cong trơn.

Vẽ đường gấp khúc gồm n dây cung $\overline{A_0A_1}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$ với $A_i = A_i(t) \in \mathcal{C}$. Qua giới hạn, $n \to 0$, $\sum_{i=1}^{n} \overline{A_{i-1}A_i}$ (tương đương $\Delta t \to 0$). Giới hạn này (nếu có) được gọi là độ dài đường cong $\mathcal{C}$ và $\mathcal{C}$ gọi là đo được.

• **Định nghĩa tích phân đường loại 1**

Cho $\mathcal{C}$ là đường cong đơn đo được với hai đầu mút A, B và hàm số $f(x, y)$ xác định trên $\mathcal{C}$ ($(x, y) \in \mathcal{C}$).

1) Phân hoạch $\mathcal{C}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$.

2) Gọi Δs_i là độ dài cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$. Trong mỗi cung lấy điểm $M_i(\xi_i . \eta_i)$, tính $f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$.

3) Lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

4) Qua giới hạn, $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta s_i \to 0$, nếu $I_n \to I$ (không phụ thuộc cách phân hoạch và chọn điểm M_i, thì I được gọi là tích phân đường loại 1 của hàm $f(x, y)$ dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$ và được ký hiệu

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y) ds.$$

Nếu $\mathcal{C}$ là đường cong kín thì ta ký hiệu

$$\oint_{\mathcal{C}} f(x, y) ds.$$

- **Tính chất**

1) $\int_{\mathcal{C}} [f(x, y) \pm g(x, y)] ds = \int_{\mathcal{C}} f(x, y) ds \pm \int_{\mathcal{C}} g(x, y) ds$.
2) $\int_{\mathcal{C}} cf(x, y) ds = c \int_{\mathcal{C}} f(x, y) ds$, c là hằng.
3) $\int_{\mathcal{C}} f(x, y) ds = \int_{\mathcal{C}_1} f(x, y) ds + \int_{\mathcal{C}_2} f(x, y) ds$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$.
4) $\int_{\mathcal{C}} ds = \ell$, ℓ là chiều dài cung $\overset{\frown}{AB}$.

- **Cách tính tích phân đường loại 1**

Đưa về tích phân xác định. Trong đó ds gọi là vi phân độ dài cung, được xác định tùy theo cách cho đường cong $\mathcal{C}$.

1) Đường cong $\mathcal{C}$ được cho bởi phương trình $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$. Khi đó, $ds = \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}dx$,

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y)ds = \int_a^b f(x, y)\sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}dx.$$

2) Đường cong $\mathcal{C}$ được cho dưới dạng tham số

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad a \leq t \leq b.$$

Khi đó, $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$,

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y)ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt.$$

3) Đường cong $\mathcal{C}$ được cho trong tọa độ cực

$$r = r(\theta) \quad a \leq \theta \leq b.$$

Khi đó, $ds = \sqrt{r^2 + [r']^2} d\theta$,

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y) ds = \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + [r']^2} d\theta.$$

< Tính $I = \int_{\mathcal{C}} (x - y) ds$, trong đó $\mathcal{C}$ là đoạn thẳng từ $O(0,0)$ đến $A(4,3)$.
Phương trình đường thẳng OA: $y = \frac{3}{4}x$ $0 \leq x \leq 4$. Vi phân độ dài dung

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} dx = \frac{5}{4} dx,$$

suy ra

$$I = \int_0^4 \left(x - \frac{3}{4}x\right)\frac{5}{4} dx = \frac{5}{2}.$$

Tính $I = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2 + y^2} ds$, trong đó $\mathcal{C}$ là đường tròn $x^2 + y^2 = ax$.
Trong tọa độ cực, đường tròn này được viết

$$r = a\cos\theta \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow r' = -a\sin\theta.$$

Vi phân độ dài cung

$$ds = \sqrt{a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta} d\theta = a d\theta,$$

suy ra

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\cos\theta \, a d\theta = 2a^2 \quad >$$

• **Đường cong định hướng.** Đường cong trong định hướng là đường cong trên đó ta đã chọn một chiều "chuyển" động dương. Nghĩa là, tại mỗi điểm của đường cong ta đã chọn vectơ tiếp tuyến đơn vị.

• **Định nghĩa tích phân đường loại 2**

Cho $\mathcal{C}$ là đường cong định hướng có chiều dương "đi" từ điểm đầu A đến điểm cuối B và hàm vectơ $\vec{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ xác định trên $\mathcal{C}$ $((x, y) \in \mathcal{C})$.

1) Phân hoạch $\mathcal{C}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$.

2) Trong mỗi cung, đưa vào vectơ $\overrightarrow{\Delta s_i} = \Delta x_i \, \vec{i} + \Delta y_i \, \vec{j}$ và lấy điểm $M_i(\xi_i . \eta_i)$, tính

$$\vec{f}(\xi_i, \eta_i) \cdot \overrightarrow{\Delta s_i} = P(\xi, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi, \eta_i)\Delta y_i.$$

3) Lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}(\xi_i, \eta_i) \cdot \overrightarrow{\Delta s_i} = \sum_{i=1}^{n} [P(\xi, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi, \eta_i)\Delta y_i].$$

4) Qua giới hạn, $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta s_i \to 0$, nếu $I_n \to I$ (không phụ thuộc cách phân hoạch và chọn điểm M_i, thì I được gọi là tích phân đường loại 2 của hàm vectơ $\vec{f}(x, y)$ dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$ và được ký hiệu

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f}(x, y) \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{\mathcal{C}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Nếu $\mathcal{C}$ là đường cong kín thì ta ký hiệu

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}(x, y) \cdot \overrightarrow{ds} = \oint_{\mathcal{C}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

- **Tính chất**

1) Tích phân đường loại 2 đổi dấu khi đổi chiều lấy tích phân,

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Các tính chất còn lại tương tự như các tính chất của tích phân đường loại 1.

2) **Ý nghĩa vật lý của tích phân đường loại 2**. Cho trường lực $\vec{f}(x,y)$ tác dụng dọc theo đường cong $\overset{\frown}{AB}$ thì công toàn phần sinh ra do trường lực $\vec{f}(x,y)$ làm chất điểm di chuyển từ A đến B là

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{f}(x,y) \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

3) Nếu $\mathcal{C}$ là đường cong kín, ta quy ước chọn chiều dương trên $\mathcal{C}$ sao cho miền giới hạn bởi đường cong $\mathcal{C}$ luôn ở bên trái. Chiều ngược lại là chiều âm.

• **Cách tính tích phân đường loại 2**

Cho đường cong $\mathcal{C}$,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad a \leq t \leq b,$$

được định hướng dương theo chiều t tăng thì

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f}(x,y) \cdot \overrightarrow{ds} = \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t))\dot{\varphi}(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\dot{\psi}(t)]dt.$$

Nếu định hướng theo chiều ngược lại thì

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f}(x,y) \cdot \overrightarrow{ds} = -\int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t))\dot{\varphi}(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\dot{\psi}(t)]dt.$$

$<$ 1) Tính $\int_{\mathcal{C}} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, trong đó $\mathcal{C}$ là cung parabol $y = x^2$ đi từ $A(-1,1)$ đến $B(1,1)$.
Xem x là tham số. $\mathcal{C}$ được định hướng theo x tăng.

Như vậy,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy &= \int_{-1}^{1} [x^2 - 2x^3) + (x^4 - 2x^3)2]dx \\ &= -\frac{14}{15}.\end{aligned}$$

2) Tính $\oint_{\mathcal{C}} (x + y)dx + (x - y)dy$, trong đó
$\mathcal{C} = \{(x, y)|(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4\}$.
$\mathcal{C}$ được viết ở dạng tham số

$$x = 1 + 2\cos t, \quad y = 1 + 2\sin t \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ta thấy khi t tăng từ 0 đến 2π thì điểm chuyển động theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ). Như vậy,

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} &= \int_{0}^{2\pi} [(2 + 2\cos t + 2\sin t)(-2\sin t) + (2\cos t - 2\sin t)2\cos t]dt \\ &= 0 >\end{aligned}$$

- **Công thức Green**

Cho $\mathcal{C}$ là chu tuyến trơn từng khúc và D là miền giới hạn bởi $\mathcal{C}$. Nếu các hàm $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong D thì

$$\oint_{\mathcal{C}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

trong đó tích phân đường được lấy theo hướng dương.

$<$ Áp dụng công thức Green tính

$$I = \oint_{\mathcal{C}} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy,$$

trong đó $\mathcal{C}$ là chu tuyến tam giác với các đỉnh $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$.

Ta có: $\partial P/\partial y = 4y$, $\partial Q/\partial x = 2(x+y)$.

Miền D là tam giác ABC được xác định bởi

$$D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq -x + 4\}.$$

Áp dụng công thức Green

$$I = \iint_D [2(x+y) - 4y] dxdy = 2 \int_1^2 dx \int_x^{-x+4} (x - y) dy = -\frac{4}{3}$$

• **Định lý.** *Giả sử hai hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ liên tục cùng với các đạo hàm cấp một của chúng trong miền đơn liên D. Khi đó, các mệnh đề sau tương đương:*
1) $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ với mọi $(x, y) \in D$;
2) $\oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy = 0$, trong đó $\mathcal{C}$ là đường cong kín nằm trong D;
3) $\int_{\mathcal{C}(A,B)} Pdx + Qdy = 0$ không phụ thuộc đường lấy tích phân mà chỉ phụ thuộc vào diểm đầu A và điểm cuối B của đường;
4) biểu thức $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của một hàm $U(x, y)$ xác định trong D.

• **Định nghĩa.** Tương tự như định nghĩa tích phân đường loại 1. Ký hiệu

$$\iint f(x,y,z)dS.$$

• **Định lý.** *Tích phân mặt loại 1 tồn tại nếu S là mặt trơn và hàm $f(x,y,z)$ liên tục trên S.*

• **Cách tính tích phân mặt loại 1**

Giả sử mặt S được cho bởi phương trình $z = \varphi(x,y)$ với $(x,y) \in D$ thì vi phân diện tích mặt

$$dS = \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}dxdy$$

và

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}dxdy.$$

Đặc biệt, nếu $f(x, y, z) = 1$ thì

$$S = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2} dxdy.$$

< Tính

$$I = \iint_S \frac{dS}{(1 + x + z)^2},$$

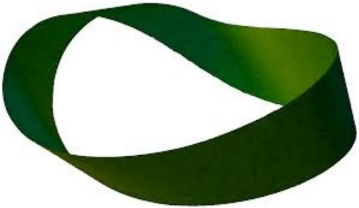
trong đó S là phần mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

Từ $z = 1 - x - y \Rightarrow dS = \sqrt{3}dxdy$.

$D = \{(x, y)|0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1 - x\}$.

$$I = \iint_D \frac{\sqrt{3}dxdy}{(2 - y)^2} = \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(2 - y)^2} = \sqrt{3} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)$$ >

• **Mặt hai phía định hướng.** Xét mặt cong trơn S, khi đó tại mỗi điểm $M \in S$ có thể chọn một pháp vectơ đơn vị $\vec{n}$. Lấy một điểm M_0 cố định bất kỳ với pháp vectơ đơn vị xác định $\vec{n}_0$. Một điểm M trên S di chuyển từ M_0 vẽ một đường cong không cắt biên của S đến trùng với M_0. Nếu vectơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}$ tại M thay đổi liên tục đến trùng với $\vec{n}_0$ thì ta nói S là mặt hai phía. Ngược lại, nếu $\vec{n}$ khi M đến trùng với M_0 có hướng ngược với $\vec{n}_0$ thì ta nói S là mặt một phía. Một thí dụ cổ điển về mặt một phía là lá Mobius.



- **Định nghĩa.** Tương tự với tích phân đường loại 2. Với

$$\overrightarrow{dS} = dS\vec{n}.$$

Nếu $\vec{f} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ và $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ định hướng mặt cong, thì

$$\iint_S \vec{f}\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_S [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]dS.$$

Vì $\cos\alpha dS = dydz$, $\cos\beta dS = dzdx$, $\cos\gamma dS = dxdy$ nên

$$\iint_S \vec{f}\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

- **Định lý.** *Nếu S là mặt định hướng và trường vectơ $\vec{f} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ với các hàm P, Q, R liên tục trên S thì tồn tại tích phân mặt loại 2.*

- **Cách tính tích phân mặt loại 2**

Xét tích phân $\iint_S R(x,y,z)dxdy$. Giả sử mỗi đường thẳng song song với Oz cắt S tại một điểm. Mặt S được cho bởi phương trình $z=\varphi(x,y)$. Gọi $D(x,y)$ là hình chiếu của S trên mặt phẳng Oxy. Khi đó,

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \pm \iint_{D(x,y)} R(x,y,\varphi(x,y))dxdy$$

trong đó tích phân lấy dấu cộng $(+)$ nếu $\vec{n}$ tạo với $\overrightarrow{Oz}$ một góc nhọn, ngược lại, lấy dấu trừ $(-)$.
Trường hợp, đường thẳng song song với Oz cắt S tại nhiều điểm thì ta chia nhỏ mặt S để có chỉ một điểm cắt trong mỗi mặt con rồi áp dụng cách tính vừa nêu.

Tương tự, S cho bởi phương trình $y = \psi(x, z)$

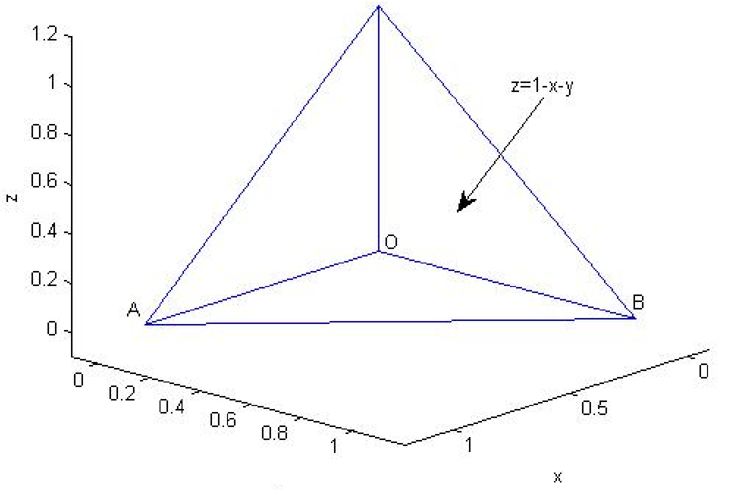
$$\iint_S Q(x, y, z)dzdx = \pm \iint_{D(z,x)} Q(x, \psi(x, z), z)dzdx,$$

và S cho bởi phương trình $x = \zeta(y, z)$

$$\iint_S P(x, y, z)dydz = \pm \iint_{D(y,z)} P(\psi(y, z), y, z)dydz.$$

$<$ Tính $I = \iint_S -x^2zdydz + ydzdx + 2dxdy$, trong đó S là phần mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất và hướng ra bên ngoài (pháp vectơ hướng hợp với các trục các góc nhọn).

Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm của S với trục Ox, Oy, Oz. Đối với $\iint_S(-x^2z)dydz$. Hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oyz là tam giác OBC và phương trình của S viết lại $x = 1 - y - z$.


z=1-x-y
O
A
B
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
z
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.5
1
x

$D(y,z) = \{(y,z) | 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1-y\}$.

$$\begin{aligned}\iint_S (-x^2 z)dydz &= +\iint_{OBC} [-(1-y-z)^2 z]dydz \\ &= -\int_0^1 dy \int_0^{1-y} ([-(1-y-z)^2 z]dz = -\frac{1}{60}.\end{aligned}$$

Đối với $\iint_S ydzdx$. Hình chiếu của S xuống mặt phẳng Ozx là tam giác OCA và phương trình của S viết lại $y = 1-x-z$.
$D(z,x) = \{(z,x) | 0 \le z \le 1,\ 0 \le x \le 1-z\}$.

$$\begin{aligned}\iint_S ydzdx &= +\iint_{OCA} (1-x-z)dzdx \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} (1-x-z)dx = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Đối với $\iint_S 2dxdy$. Hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oxy là tam giác OAB và phương trình của S viết lại $z = 1 - x - y$. $D(x, y) = \{(x, y)|0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\}$.

$$\iint_S 2dxdy \quad = \quad + \iint_{OAB} 2dxdy = 1.$$

Vậy, $I = -\frac{1}{60} + \frac{1}{6} + 1 = \frac{23}{20} >$

• **Công thức Stokes**

Nếu các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trên mặt trơn định hướng S được giới hạn bởi chu tuyến kín trơn $\mathcal{C}$ thì

$$\oint Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz$$
$$+ \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

- **Công thức Divergence**

Nếu các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ *liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong miền đơn liên* V *giới hạn bởi mặt kín trơn* S *thì*

$$\iint Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$