GV LÊ VĂN HỢP

CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

I. CÁC NGUYÊN LÝ ĐẾM CƠ BẢN:

1.1/ MỆNH ĐỀ: Cho các tập hợp *hữu hạn* $A, B, A_1, A_2, \ldots$ và A_n .

a) Nếu A và B *rời nhau* ($A \cap B = \varnothing$) thì $| A \cup B | = | A | + | B |$.

b) Nếu $A_1, A_2, \ldots$ và A_n *rời nhau từng đôi một* ($A_i \cap A_j = \varnothing$ khi $1 \leq i \neq j \leq n$) thì $| A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n | = | A_1 | + | A_2 | + \ldots + | A_n |$.

Ví dụ:

a) Lớp học L có 80 sinh viên nam và 65 sinh viên nữ. Ta có thể viết $L = A \cup B$ với $A = \{ x \in L \mid x$ là nam $\}$, $B = \{ x \in L \mid x$ là nữ $\}$ và $A \cap B = \varnothing$. Suy ra $| L | = | A \cup B | = | A | + | B | = 80 + 65 = 145$.
Vậy lớp học L có 145 sinh viên.

b) Trường T có 300 học sinh lớp VI, 280 học sinh lớp VII, 250 học sinh lớp VIII và 220 học sinh lớp IX. Ta có thể viết $T = A_6 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_9$ với $A_j = \{ x \in T \mid x$ học lớp $j \}$ $(6 \leq j \leq 9)$ và $A_i \cap A_j = \varnothing$ khi $6 \leq i \neq j \leq 9$.
Suy ra $| T | = | A_6 | + | A_7 | + | A_8 | + | A_9 | = 300 + 280 + 250 + 220 = 1.050$.
Vậy trường T có 1.050 học sinh.

1.2/ MỆNH ĐỀ: Cho tập hợp *hữu hạn* E và $B \subset E$.

a) Đặt $\wp(E) = \{ A \mid A \subset E \}$ ($\wp(E)$ là *tập hợp tất cả các tập hợp con* của E)
Nếu $| E | = n$ (n nguyên ≥ 0) thì $| \wp(E) | = 2^n$.

b) $| B | = | E | - | \overline{B} |$ (nếu việc đếm $| E |$ và $| \overline{B} |$ dễ dàng hơn việc đếm $| B |$).

Ví dụ: Cho $E = \{1, 2, 3, \ldots , 8, 9\}$ và $\Pi = \wp(E) = \{ A \mid A \subset E \}$.

a) Do $| E | = 9$ nên $| \Pi | = 2^9 = 512$.

b) Cho $\Phi = \{ A \mid A \subset E$ và $(1 \in A$ hay $2 \in A) \}$ thì $\Phi \subset \Pi$ và
$\overline{\Phi} = \{ A \mid A \subset E$ và $(1 \notin A$ và $2 \notin A) \} = \wp(F)$ với $F = E \setminus \{1,2\}$ và $| F | = 7$.
Suy ra $| \Phi | = | \Pi | - | \overline{\Phi} | = 2^9 - 2^7 = 512 - 128 = 384$.

1.3/ NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ: Cho các tập hợp *hữu hạn* A và B. Ta có

a) $| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B |$ (nguyên lý bù trừ).

b) $| A \cup B | = | A | + | B \setminus A | = | B | + | A \setminus B | =$
$= | A \setminus B | + | A \cap B | + | B \setminus A |$

Ví dụ: Lớp học L có 95 sinh viên học tiếng Anh, 60 sinh viên học tiếng Pháp và 43 sinh viên học tiếng Anh và tiếng Pháp. Giả sử mỗi sinh viên trong lớp L đều học tiếng Anh hay tiếng Pháp. Hỏi lớp L có bao nhiêu sinh viên ? Có bao nhiêu sinh viên chỉ học tiếng Anh ? Có bao nhiêu sinh viên chỉ học tiếng Pháp ?
Đặt $A = \{ x \in L \mid x$ học tiếng Anh $\}$, $B = \{ x \in L \mid x$ học tiếng Pháp $\}$ thì

$L = A \cup B$ và $A \cap B = = \{ x \in L \mid x$ học tiếng Anh và tiếng Pháp $\}$. Ta có
$| L | = | A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B | = 95 + 60 - 43 = 112$
Số sinh viên chỉ học tiếng Anh $= | A \setminus B | = | A | - | A \cap B | = 95 - 43 = 52$
Số sinh viên chỉ học tiếng Pháp $= | B \setminus A | = | B | - | A \cap B | = 60 - 43 = 17$

1.4/ <u>NGUYÊN LÝ CỘNG:</u> Một công việc có thể thực hiện bằng một trong k cách khác nhau (chọn cách này thì không chọn các cách khác). Cách thứ j có thể thu được m_j kết quả khác nhau ($1 \le j \le k$). Ta có số kết quả khác nhau có thể xảy ra khi thực hiện xong công việc là $(m_1 + m_2 + \ldots + m_k)$.

<u>Ví dụ:</u> Người ta đưa vào danh sách bầu chọn " quả bóng vàng " gồm 5 cầu thủ Đức, 4 cầu thủ Argentina, 3 cầu thủ Hà Lan và 2 cầu thủ Brazil. Số cầu thủ là ứng viên của " quả bóng vàng " là $5 + 4 + 3 + 2 = 14$ (cầu thủ).

1.5/ <u>NGUYÊN LÝ NHÂN:</u> Một quá trình bao gồm k công việc diễn ra liên tiếp hoặc đồng thời. Việc thứ j có thể có m_j cách thực hiện ($1 \le j \le k$). Số cách khác nhau để thực hiện xong quá trình là $(m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k)$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Đi từ Sài gòn đến Cần Thơ là một quá trình bao gồm 4 công việc liên tiếp trong đó việc 1: đi từ Sài Gòn đến Long An (giả sử có 3 lộ trình), việc 2: đi từ Long An đến Tiền Giang (giả sử có 4 lộ trình), việc 3: đi từ Tiền Giang đến Vĩnh Long (giả sử có 2 lộ trình) và việc 4: đi từ Vĩnh Long đến Cần Thơ (giả sử có 3 lộ trình). Khi đó số lộ trình khác nhau để đi từ Sài Gòn đến Cần Thơ là

$$3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72 \text{ (lộ trình)}.$$

b) Xét số nguyên dương $N = \overline{abcd}$ có 4 chữ số thập phân trong đó a tùy ý, b chẵn, $c \vdots 3$ và $d > 3$. Việc xây dựng số N xem như một quá trình bao gồm 4 công việc đồng thời (a có 9 cách chọn, b có 5 cách chọn, c có 4 cách chọn, d có 6 cách chọn). Số lượng số N có thể tạo ra là $9 \times 5 \times 4 \times 6 = 1080$ (số).

1.6/ <u>NGUYÊN LÝ DIRICHLET:</u> (Khẳng định *sự tồn tại*)

Có n con cá và m cái ao (chưa có cá) thỏa $n > m$.
Thả tùy ý n cá xuống m ao. Khi đó

a) Có ít nhất một ao chứa ít nhất 2 cá.

b) Có ít nhất một ao chứa ít nhất $[\frac{n}{m}]$ cá ($\forall a \in \mathbf{R}$, $[a]$ là *phần nguyên già* của a, nghĩa là $[a]$ là *số nguyên nhỏ nhất* thỏa $[a] \ge a$).

<u>Ví dụ:</u>

a) Trong giảng đường hiện có 367 sinh viên. . Có tất cả 366 ngày sinh nhật khác nhau (tính từ ngày 1/1 đến ngày 31/12 của mỗi năm).
Số sinh viên (số cá) là $367 > 366 =$ số ao (số ngày sinh nhật có thể có). Dùng nguyên lý Dirichlet ta thấy ngay có ít nhất 2 sinh viên có cùng ngày sinh nhật.

b) Cho $A \subset S = \{1, 2, 3, \ldots , 9, 10\}$ và $| A | \ge 6$.
Chứng minh có $a, b \in A$ thỏa $a + b = 11$.
Mỗi số của A được xem như là một con cá có mã số chính là số đó. Ta có ≥ 6 cá.

Tạo ra 5 ao B, C, D, E và F để thả cá từ tập hợp A với qui định đặc biệt (một cách thả đặc biệt) : B chỉ nhận cá có mã số 1 và 10, C chỉ nhận cá có mã số 2 và 9, D chỉ nhận cá có mã số 3 và 8, E chỉ nhận cá có mã số 4 và 7, F chỉ nhận cá có mã số 5 và 6. Số cá $\geq 6 > 5$ = số ao nên theo nguyên lý Dirichlet ta thấy ngay có ít nhất một ao nào đó chứa đúng 2 cá (gọi là a và b). Theo qui định đặc biệt, ta có $a + b = 11$.

c) Lớp học có 100 học sinh. Có ít nhất $[\frac{100}{12}] = 9$ học sinh có tháng sinh giống nhau và có ít nhất $[\frac{100}{7}] = 15$ học sinh có ngày sinh (tính theo thứ) là như nhau.

II. GIẢI TÍCH TỔ HỢP (KHÔNG LẶP):

2.1/ PHÉP HOÁN VỊ: Cho số nguyên $n \geq 1$.

a) Một *phép hoán vị* (*không lặp*) trên n phần tử là một cách sắp xếp n phần tử khác nhau vào n vị trí cho sẵn sao cho mỗi vị trí chỉ nhận một phần tử.

b) Số phép hoán vị trên n phần tử là $P_n = n! = 1.2.3. \ldots (n - 1).n$

Ví dụ:

a) Có $P_3 = 3! = 6$ cách sắp xếp 3 phần tử a, b, c vào 3 vị trí cho trước như sau : abc, acb, cba, bac, bca và cab.

b) Có $P_7 = 7! = 5040$ cách sắp xếp 7 người vào một bàn dài có 7 ghế (mỗi ghế chỉ có 1 người ngồi).

2.2/ PHÉP TỔ HỢP VÀ CHỈNH HỢP: Cho các số nguyên $n \geq 1$ và $0 \leq m \leq n$.

a) Một *tổ hợp n chọn m* là một cách chọn ra m phần tử khác nhau từ n phần tử khác nhau cho trước mà *không quan tâm đến thứ tự chọn*.

b) Một *chỉnh hợp n chọn m* là một cách chọn ra m phần tử khác nhau từ n phần tử khác nhau cho trước mà *có quan tâm đến thứ tự chọn* (hoặc sau khi

. chọn xong lại tiếp tục xếp m phần tử đã chọn vào m vị trí cho sẵn).

c) Số tổ hợp n chọn m là $C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

d) Số chỉnh hợp n chọn m là $A_n^m = C_n^m P_m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Ví dụ:

a) Chọn 4 học sinh từ 10 học sinh để lập đội văn nghệ. Số cách chọn là $C_{10}^4 = 210$.

b) Chọn 4 học sinh từ 10 học sinh để bổ nhiệm làm đội trưởng, đội phó, thư ký và thủ quĩ của một đội công tác xã hội. Số cách chọn là $A_{10}^4 = C_{10}^4 P_4 = 210 \times 24 = 504$

c) Lập các dãy số gồm 8 chữ số thập phân mà trong đó có đúng 3 chữ số 2. Số dãy số có được là $C_8^3 \times 9^5 = 3.306.744$.

d) Lập các dãy số gồm 8 chữ số thập phân mà trong đó có các chữ số 1, 4, 9 (mỗi chữ số xuất hiện đúng một lần) và các chữ số còn lại thì khác nhau từng đôi một. Số dãy số có được là $A_8^3 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 846.720$.

e) Có bao nhiêu dãy số gồm 9 chữ số thập phân mà trong đó có đúng 3 chữ số 5 đứng liền nhau hay có đúng 4 chữ số 8 đứng liền nhau ?
Ta giải bài toán này bằng nguyên lý bù trừ.

Số dãy số gồm 9 chữ số thập phân có đúng 3 chữ số 5 đứng liền nhau là 7.9^6
Số dãy số gồm 9 chữ số thập phân có đúng 4 chữ số 8 đứng liền nhau là 6.9^5
Số dãy số gồm 9 chữ số thập phân có đúng 3 chữ số 5 đứng liền nhau và có đúng 4 chữ số 8 đứng liền nhau là $A_4^2 \times 8^2 = 12 \times 64 = 768$.

Số dãy số cần tìm là $(7.9^6 + 6.9^5) - 768 = 69.9^5 - 768 = 4.073.613$

2.3/ <u>TÍNH CHẤT:</u> Cho các số nguyên $n \geq 1$ và $0 \leq m \leq n$. Khi đó

a) $C_n^m = C_n^{n-m}$ (sự đối xứng ở hai cực)

b) $C_n^0 = C_n^n = 1$ và $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

c) Khi $m \geq 1$ thì $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$ (hạ chỉ số dưới)

<u>Ví dụ:</u>

a) $C_7^0 = C_7^7 = 1,\ C_7^1 = C_7^6 = 7,\ C_7^2 = C_7^5 = 21$ và $C_7^3 = C_7^4 = 35$.

b) $C_9^5 = C_8^5 + C_8^4 = (C_7^5 + C_7^4) + (C_7^4 + C_7^3)$

2.4/ <u>NHỊ THỨC NEWTON:</u> Cho số nguyên $n \geq 1$ và các số thực x, y. Ta có

$(x + y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i y^{n-i}$ (số mũ của x tăng dần và số mũ của y giảm dần)

$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{n-i} y^i$ (số mũ của x giảm dần và số mũ của y tăng dần)

<u>Ví dụ:</u>

$$(x + y)^6 = \sum_{i=0}^{6} C_6^i x^i y^{6-i} = y^6 + 6xy^5 + 15x^2y^4 + 20x^3y^3 + 15x^4y^2 + 6x^5y + x^6$$

$$= \sum_{i=0}^{6} C_6^i x^{6-i} y^i = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

2.5/ <u>HỆ QUẢ:</u> Cho số nguyên $n \geq 1$. Ta có

a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n$.

b) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = [(-1) + 1]^n = 0$.

c) Suy ra $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$.

III. <u>GIẢI TÍCH TỔ HỢP (CÓ LẶP):</u>

3.1/ <u>PHÉP HOÁN VỊ LẶP:</u> Cho các số nguyên dương $k, n_1, n_2, \ldots$ và n_k.

Có k *loại vật khác nhau*, loại thứ j có n_j vật *giống hệt nhau* $(1 \leq j \leq k)$.

Tổng số vật là $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

a) Một *phép hoán vị lặp trên n phần tử nói trên* là một cách sắp xếp n phần tử đó vào n vị trí cho sẵn sao cho *mỗi vị trí chỉ nhận một phần tử* và *không phân biệt các vật cùng loại*.

b) Số phép hoán vị lặp trên n phần tử nói trên là

$$P_n^*(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Ví dụ: Từ các chữ số 8, 1, 1, 9, 9, 4, 4, 4, ta có thể tạo ra bao nhiêu số điện thoại khác nhau gồm 8 chữ số (chẳng hạn như số điện thoại 41948149, ...) ?
Đây là phép đếm số hoán vị lặp trên $n = 8$ phần tử với $k = 4$ loại vật, mỗi loại vật là một loại chữ số và số vật của mỗi loại là $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 2$, $n_4 = 3$.
Kết quả cần tìm là $P_8^*(1,2,2,3) = \dfrac{8!}{1!2!2!3!} = 1680$.

3.2/ <u>ÁP DỤNG:</u> Cho các số nguyên $n \geq 1$, $k \geq 2$ và các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_k$.
Ta có khai triển *đa thức Newton nhiều biến* (mở rộng nhị thức Newton) :
$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=n \\ n_1,n_2,\ldots,n_k \geq 0}} P_n^*(n_1,n_2,\ldots,n_k)\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$$
trong đó $P_n^*(n_1,n_2,\ldots,n_k) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$.

Ví dụ: Tìm hệ số của đơn thức $x^4y^5z^3u$ trong khai triển $(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13}$.
a) Cách 1: dùng nhị thức Newton nhiều lần liên tiếp.
$(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13} = C_{13}^4(9x)^4(-2y + 5z - 8t + u)^9 + \ldots =$
$= 9^4 C_{13}^4 x^4[C_9^5(-2y)^5(5z - 8t + u)^4] + \ldots = -2^5 9^4 C_{13}^4 C_9^5 x^4 y^5 [C_4^3(5z)^3(-8t + u)] + \ldots$
$= -2^5 5^3 9^4 C_{13}^4 C_9^5 C_4^3 (x^4 y^5 z^3 u) + \ldots = -32 \times 125 \times 6561 \times 715 \times 126 \times 4(x^4 y^5 z^3 u) + \ldots$
Hệ số cần tìm là $-32 \times 125 \times 6561 \times 715 \times 126 \times 4 = -9.457.287.840.000$
b) Cách 2: dùng trực tiếp đa thức Newton. Đặt $a = 9x$, $b = -2y$, $c = 5z$ và $d = -8t$.
$(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13} = (a + b + c + d + u)^{13} = P_{13}^*(4,5,3,0,1)\, a^4b^5c^3d^0u^1 + \ldots =$
$= \dfrac{13!}{4!5!3!0!1!}(9x)^4(-2y)^5(5z)^3(-8t)^0u^1 + \ldots = -2^8\, 3^{10}\, 5^4\, 7^1\, 11^1\, 13^1(x^4 y^5 z^3 u) + \ldots$
Hệ số cần tìm là $-2^8\, 3^{10}\, 5^4\, 7^1\, 11^1\, 13^1 = -9.457.287.840.000$

3.3/ <u>PHÉP TỔ HỢP LẶP:</u> Cho các số nguyên $k \geq 1$ và $m \geq 0$.
Có k *loại vật khác nhau*, mỗi loại vật có nhiều vật *giống hệt nhau*.
a) Một *tổ hợp lặp* k *loại vật chọn* m là một cách chọn ra m vật từ k loại vật nói trên sao cho *mỗi loại vật được chọn một số lần tùy ý không quá* m và *không phân biệt các vật cùng loại*.
b) Số tổ hợp lặp k loại vật chọn m là $K_k^m = C_{m+(k-1)}^{(k-1)} = C_{m+(k-1)}^m$

Ví dụ: An đến siêu thị mua 15 cái mũ. Siêu thị bán 4 loại mũ (cùng kiểu dáng, chất lượng và giá cả) có các màu trắng, xanh, đen và nâu. Hỏi An có bao nhiêu cách mua mũ (theo màu sắc) ?
Mỗi cách mua mũ là một tổ hợp lặp 4 loại vật chọn ra 15 vật.
Số cách mua mũ là $K_4^{15} = C_{15+(4-1)}^{(4-1)} = C_{18}^3 = 816$.

3.4/ <u>ÁP DỤNG:</u> Cho các số nguyên $k \geq 1$ và $m \geq 0$.
Tìm số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = m$ (các ẩn số $x_1, x_2, \ldots$ và x_k là các số nguyên ≥ 0).
Mỗi nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình trên chính là một cách chọn ra m vật từ k loại vật, mỗi giá trị x_j là số vật loại thứ j được chọn ($1 \leq j \leq k$).
Do đó số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình cũng là $K_k^m = C_{m+(k-1)}^{(k-1)}$.

Ví dụ:

a) Xếp tùy ý 20 viên bi (y hệt nhau) vào 4 cái hộp. Hỏi có bao nhiêu cách xếp ?
Gọi x_j là số bi xếp vào hộp thứ j $((1 \le j \le 4)$ thì $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ và x_1, x_2, x_3 và x_4 nguyên ≥ 0. Số cách xếp = (số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình trên) = $K_4^{20} = C_{23}^3 = 1771$.

b) Khi khai triển $(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13}$, ta được bao nhiêu đơn thức khác nhau ?
$$(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13} = \sum_{\substack{p+q+r+s+n=13 \\ p,q,r,s,n \ge 0}} c(p,q,r,s,n)x^p y^q z^r t^s u^n \text{ với } c(p,q,r,s,n) \in \mathbf{R}.$$
Mỗi đơn thức $c(p, q, r, s,n)x^p y^q z^r t^s u^n$ tương ứng với một bộ số nguyên không âm (p, q, r, s, n). Mỗi bộ số nguyên không âm (p, q, r, s, n) chính là một nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $p + q + r + s + n = 13$. Do đó số đơn thức xuất hiện = (số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $p + q + r + s + n = 13$) = $= K_5^{13} = C_{17}^4 = 2380$.

c) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z + t + u = 17$ trong đó $x \ge 2, y \ge 0, z \ge -3, t \ge 0$ và $u \ge 4$ (*).
Đổi biến $x' = (x - 2) \ge 0$, $z' = (z + 3) \ge 0$ và $u' = (u - 4) \ge 0$, ta có phương trình tương đương $x' + y + z' + t + u' = 14$ với x', y, z', t, u' đều nguyên ≥ 0 (**).
Số nghiệm nguyên của (*) = Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (**) = $K_5^{14} = C_{18}^4 = 3060$.

d) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z = 21$ trong đó $x > -4$, $y > 5$ và $2 \le z < 7$ (*). Do x, y nguyên nên ($x > -4 \Leftrightarrow x \ge -3$) và ($y > 5 \Leftrightarrow y \ge 6$).
Đổi biến $x' = (x + 3) \ge 0$, $y' = (y - 6) \ge 0$ và $z' = (z - 2) \ge 0$, ta có phương trình tương đương $x' + y' + z' = 16$ với x', y', z' đều nguyên ≥ 0 và $z' < 5$ (**).
Xét phương trình $x' + y' + z' = 16$ với x', y', z' đều nguyên ≥ 0 (I) và phương trình $x' + y' + z' = 16$ với x', y', z' đều nguyên ≥ 0 và $z' \ge 5$ (II).
Đổi biến $z'' = (z - 5) \ge 0$, (II) tương đương với phương trình $x' + y' + z'' = 11$ với x', y', z'' đều nguyên ≥ 0 (III).
Số nghiệm nguyên của (*) = Số nghiệm nguyên của (**) =
= Số nghiệm của (I) – số nghiệm của (II) =
= Số nghiệm của (I) – số nghiệm của (III) = $K_3^{16} - K_3^{11} = C_{18}^2 - C_{13}^2 = 153 - 78 = 75$

e) Tìm số nghiệm nguyên ≥ 0 của bất phương trình $x + y + z \le 19$ (*).
Đặt $t = 19 - (x + y + z)$ thì ta có phương trình tương đương $x + y + z + t = 19$ với x, y, z, t đều nguyên ≥ 0 (**).
Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (*) = Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (**) = $K_4^{19} = C_{22}^3 = 1540$

f) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $x + y + z + t > -20$ trong đó $x < 1$, $y \le 4$, $z \le -3$ và $t < 6$ (*).
Đổi biến $x' = -x \ge 0$, $y' = -y \ge -4$, $z' = -z \ge 3$ và $t' = -t \ge -5$, ta có bất phương trình tương đương $x' + y' + z' + t' \le 19$. Đổi biến $y'' = (y' + 4) \ge 0$, $z'' = (z' - 3) \ge 0$ và $t'' = (t' + 5) \ge 0$, ta có bất phương trình tương đương $x' + y'' + z'' + t'' \le 25$. Đặt $u = 25 - (x' + y'' + z'' + t'')$ thì ta có phương trình tương đương $x + y + z + t + u = 25$ với x, y, z, t, u đều nguyên ≥ 0 (**).
Số nghiệm nguyên của (*) = Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (**) = $K_5^{25} = C_{29}^4 = 23.751$
