Toán cao cấp - B1

9/2016

Có tập hợp số thực $\mathbb{R}$ với hai phép toán cộng, nhân và một quan hệ thứ tự thỏa các tiên đề:

1) Tiên đề về phép toán

2) Tiên đề về quan hệ thứ tự

Trên $\mathbb{R}$ tồn tại quan hệ hai ngôi "nhỏ hơn hay bằng", ký hiệu $\leq$, có các tính chất:

(i) Phản xạ: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$,

(ii) Phản đối xứng: $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$,

(iii) Bắc cầu: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$,

(iv) Được sắp toàn phần: $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \vee y \leq x$,

(v) Bảo toàn với phép cộng,

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z,$$

(vi) Bảo toàn với phép nhân với số dương,

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y \wedge 0 \leq z) \Rightarrow xz \leq yz.$$

3) Tiên đề về sup

Cho $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$.

• α là *phần tử nhỏ nhất* của A nếu $\alpha \in A$ và $\alpha \leq x$ với mọi $x \in A$. Phần tử nhỏ nhất của A, nếu có, thì duy nhất, ký hiệu $\min A$.

• α là một *chận trên* của A nếu $x \leq \alpha$ với mọi $x \in A$. Khi A có một chận trên, ta nói A *bị chận trên*. Phần tử nhỏ nhất của tập tất cả các chận trên của A, nếu có, được gọi là *chận trên nhỏ nhất* của A, ký hiệu $\sup A$.

Tương tự cho định nghĩa *phần tử lớn nhất* của A, ký hiệu $\max A$; *chận dưới* của A, tập *bị chận dưới* và *chận dưới lớn nhất* của A, ký hiệu $\inf A$.

• **Tiên đề:** *Mọi tập con không rỗng và bị chặn trên của* $\mathbb{R}$ *đều có chận trên nhỏ nhất.*

• Ta suy ra: *Mọi tập con không rỗng và bị chận dưới của* $\mathbb{R}$ *đều có chận dưới lớn nhất.*

4) Tiên đề tối thứ tự cho $\mathbb{N}$

• Tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên có các tính chất:

(i) $1 \in \mathbb{N}$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{R},\ n + 1 \in \mathbb{N}$.

Tính chất này là cơ sở của phép quy nạp.

• **Tiên đề:** *Mọi tập con không rỗng của $\mathbb{N}$ đều có phần tử nhỏ nhất.*

• **Tính chất Archimède.** *Cho số thực $b > 0$. Ta có*

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ nb > a$$

• Có 2 kết quả suy ra từ tính chất Archimède:

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{R},\ n > x$.

(ii) $\forall \epsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{R},\ \frac{1}{n} < \epsilon$.

- Một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{R}$, $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto x_n$, được gọi là *dãy số*.
- **Định nghĩa.** Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* nếu tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon$$

Giá trị x được gọi là *giới hạn* của dãy $\{x_n\}$, ký hiệu
$x = \lim_{n\to\infty} x_n$ (đọc là x_n có giới hạn là x khi n tiến tới $+\infty$).
Dãy không hội tụ được gọi là dãy *phân kỳ*.
$<$ Cho dãy $\{1/n\}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Do tính chất Archimède,

$$\forall \epsilon, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} < \epsilon,$$

do đó

$$\forall n \geq n_0, \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

suy ra dãy cho hội tụ và $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 >$

- **Mệnh đề.** *Mọi dãy hội tụ đều bị chặn.*
- **Mệnh đề.** *Giới hạn của dãy (nếu có) thì duy nhất.*
- **Mệnh đề (giới hạn và phép toán đại số)**

Nếu $\{x_n\}$ *và* $\{y_n\}$ *là hai dãy hội tụ thì* $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, αx_n *với* $\alpha \in \mathbb{R}$ *là các dãy hội tụ và*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n, \\ \lim_{n\to\infty}(x_n y_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n \times \lim_{n\to\infty} y_n, \\ \lim_{n\to\infty}(\alpha x_n) &= \alpha \lim_{n\to\infty} x_n. \end{aligned}$$

Khi $y_n \neq 0$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$ *và* $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ *thì* $\{x_n/y_n\}$ cũng hội tụ và

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}.$$

- **Mệnh đề (giới hạn và quan hệ thứ tự)**
Nếu $\{x_n\}$ *là dãy hội tụ và* $x_n \geq 0$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$ *thì* $\lim_{n\to\infty} x_n \geq 0$.
Tổng quát, nếu $\{x_n\}$ *và* $\{y_n\}$ *là hai dãy hội tụ và* $x_n \geq y_n$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$*, thì* $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$.
- **Định lý kẹp.** *Cho 3 dãy số* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *và* $\{x_n\}$ *với* $a_n \leq x_n \leq b_n$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$. *Nếu các dãy* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *hội tụ và có cùng giới hạn thì* $\{x_n\}$ *hội tụ và*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n \left(= \lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

$<$ Chứng minh $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2(n)}{n} = 0$.
Ta có

$$0 \leq \frac{\sin^2(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

suy ra $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2(n)}{n} = 0$ $>$

- **Mệnh đề**

(i) Với $\alpha > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.
(ii) Với $a > 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
(iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
(iv) Với $a > 0$ và $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+a)^n} = 0$.
(v) Với $|a| < 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.
Xem bài tập.

• Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *đơn điệu tăng* (*đơn điệu giảm*), nếu với mọi $n \in \mathbb{N}$, $x_n \le x_{n+1}$ $(x_n \ge x_{n+1})$. Một dãy đơn điệu tăng hay đơn điệu giảm gọi tắt là dãy *đơn điệu*.

• **Định lý.** *Một dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ.*
Một dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.
Xem bài tập

Tính toán các số thực và dãy và chuỗi số thực

- Tham khảo

1) Symbolic Math Toolbox For Use with MATLAB, MathWorks, 1994.

2) Trịnh Anh Ngọc, Học Matlab bằng thí dụ, KHTN, 2012.

- Matlab là phần mềm "có thể" dùng tính toán symbolic.
- Cần phải khai báo biến symbolic

SYMS Khai báo các biến symbolic.

SYMS arg1 arg2 ... thay cho

arg1 = sym('arg1');

arg2 = sym('arg2'); ...

SYMS arg1 arg2 ... real thay cho

arg1 = sym('arg1','real');

arg2 = sym('arg2','real'); ...

SYMS arg1 arg2 ... positive thay cho
arg1 = sym('arg1','positive');
arg2 = sym('arg2','positive'); ...

• LIMIT Giới hạn của biểu thức.
LIMIT(F,x,a) lấy giới hạn của biểu thức symbolic F khi x -> a.
LIMIT(F) dùng a = 0 như điểm giới hạn.

• SYMSUM Tổng symbolic.
SYMSUM(S,v) tổng vô hạn đối với v.
SYMSUM(S,v,a,b) tổng với v chạy từ a tới b.

• Một ánh xạ từ $D \subset \mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x)$, được gọi là *hàm số*. D được gọi là *miền xác định* của hàm số.

• Điểm a được gọi là điểm dính của $D \subset \mathbb{R}$ nếu mọi lân cận của a đều có ít nhất một điểm thuộc D. Tập các điểm dính của D ký hiệu là D'.

• **Định nghĩa.** Cho $f : D \to \mathbb{R}$ và $a \in D'$. Số L được gọi là *giới hạn* của hàm số f khi x tiến tới a và ký hiệu là $\lim_{x \to a} f(x) = L$, nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

$<$ Chứng minh: $\lim_{x \to 1} \frac{4x^2-1}{3x-1} = \frac{3}{2}$.

Điều cần chứng minh: với mọi $\epsilon > 0$ cho trước, ta có thể chỉ ra $\delta > 0$ sao cho khi $|x - 1| < \delta$ thì

$$\left| \frac{4x^2 - 1}{3x - 1} - \frac{3}{2} \right| < \epsilon. \qquad (*)$$

Chú ý
$$\left|\frac{4x^2-1}{3x-1}-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{(1-x)(1+x)}{2(3x-1)}\right|$$
Khi $x \to 1$ "thì" $0 < x < 1/6$. Ta có:
$$1 < 1+x < \frac{7}{6},\ -1 < 3x-1 < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1-3x < 1$$
suy ra
$$\left|\frac{(1-x)(1+x)}{2(3x-1)}\right| < \frac{\frac{7}{6}}{\frac{1}{2}}|x-1| = \frac{7}{3}|x-1|.$$
Như vậy nếu chọn
$$|x-1| < \frac{3\epsilon}{7}$$
thì (*) đúng. Nghĩa là,
$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-1}{3x-1} = \frac{3}{2}.$$
>

• **Mệnh đề.** *Cho $f, g : D \to \mathbb{R}$ và $a \in D'$. Nếu f và g có giới hạn khi x tiến tới a thì $f+g$ và $f \cdot g$ cũng có giới hạn khi x tiến tới a và*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),\\ \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) &= \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x).\end{aligned}$$

Nếu $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ thì

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

• **Mệnh đề.** *Cho $f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$ và có một lân cận của a (không kể a) trong đó $f(x) \leq g(x)$. Nếu f và g có giới hạn khi x tiến tới a thì*

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

• **Mệnh đề.** *Cho* $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$ *và có một lân cận của* a *(không kể* a*) trong đó* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. *Nếu* f *và* g *có giới hạn khi* x *tiến tới* a *và* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$ *thì* h *có giới hạn khi* x *tiến tới* a *và*

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} f(x) (= \lim_{x\to a} g(x)).$$

• **Mệnh đề.** *Cho* $f : D_1 \to D_2$ *có giới hạn khi* x *tiến tới* $a \in D_1'$. *Nếu* $g : D_2 \to \mathbb{R}$ *có giới hạn khi* y *tiến tới* b *với* $b = \lim_{x\to a} f(x) \in D_2'$, *thì*

$$\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = \lim_{y\to b} g(y).$$

• **Giới hạn bên phải, bên trái**. Số L được gọi là *giới hạn bên phải* tại a của hàm f, viết $\lim_{x\to a+0} f(x) = L$, nếu

$$\forall \epsilon, \exists \delta > 0, \forall x \in D,\ 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Định nghĩa tương tự với giới hạn bên trái tại a, viết $\lim_{x\to a-0} f(x) = L$ và sửa $0 < x - a < \delta$ thành $0 < a - x < \delta$.

• **Mệnh đề.** *Hàm f có giới hạn tại a nếu và chỉ nếu f có giới hạn bên phải và bên trái tại a và hai giới hạn này bằng nhau.*

• Hàm $f : D \to \mathbb{R}$ được gọi là *hàm số bị chặn*, nếu

$$\exists M > 0, \forall x \in D, |f(x)| < M.$$

• **Giới hạn và ∞**. Giới hạn của hàm số khi x tiến ra vô cùng ($x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$)

hay giới hạn hàm số là vô cùng ($f(x) \to \infty$, $f(x) \to -\infty$, $f(x) \to +\infty$) được định nghĩa dựa vào khái niệm $A \to \infty$ (hay $A \to \pm\infty$) như sau:

$$\begin{aligned} A \to +\infty &\quad\Leftrightarrow\quad \forall M > 0, A > M. \\ A \to -\infty &\quad\Leftrightarrow\quad \forall M > 0, A < -M. \\ A \to \infty &\quad\Leftrightarrow\quad \forall M > 0, |A| > M. \end{aligned}$$

Thí dụ, định nghĩa $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A.$$

Định nghĩa $\lim_{x\to\infty a} f(x) = L$

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in D, |x| > A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

• Các mệnh đề giới hạn và các phép toán đại số vẫn còn đúng trong một số trường hợp ngoại trừ các **dạng vô định**.

- Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$.

(i) f được gọi là *liên tục tại* $a \in D$ nếu $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
(ii) f được gọi là *liên tục trên* D nếu f liên tục tại mọi $x \in D$.

- **Mệnh đề.** Cho các hàm số $f, g : D \to \mathbb{R}$. Nếu f và g liên tục tại $a \in D$ thì các hàm $f + g$, $f \cdot g$ cũng liên tục tại a. Ngoài ra, khi $g(a) \neq 0$ thì hàm f/g cũng liên tục tại a.
- **Mệnh đề.** Cho các hàm số $f : D_1 \to D_2$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$. Nếu f liên tục tại $a \in D_1$ và g liên tục tại $b = f(a) \in D_2$ thì hàm $g \circ f$ liên tục tại a.

Hàm liên tục trên một đoạn

- **Định lý.** *Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b]$, ta có:*

(i) f là hàm bị chặn trên $[a, b]$.
(ii) f đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trên $[a, b]$, nghĩa là

$$\exists x_0, x_1 \in [a, b],\ f(x_0) = \inf_{a\leq x\leq b} f(x) \quad f(x_1) = \sup_{a\leq x\leq b} f(x).$$

• **Định lý.** *Nếu f liên tục trên $[a,b]$ thì* $f([a,b]) = [\inf_{a\le x\le b} f(x), \sup_{a\le x\le b} f(x)]$.
Đặc biệt, nếu f liên tục trên $[a,b]$ và $f(a)\cdot f(b) < 0$ thì tồn tại $c\in(a,b)$ sao cho $f(x)=0$.

Các giới hạn cơ bản

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1;$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1;$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1;$
4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$

• **Định nghĩa.** Cho hàm số $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. *Đạo hàm* của hàm f tại $x \in (a, b)$, ký hiệu $f'(x)$ hay $\dfrac{df}{dx}$, là giới hạn

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

nếu giới hạn này tồn tại.
Nếu $f'(x)$ tồn tại, hàm f được gọi là hàm *khả vi* tại x.
$<$ Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$.
Ta có

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

Khử dạng vô định bằng cách nhân trên dưới với lượng liên hiệp $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$, ta được

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

Qua giới hạn, $\Delta x \to 0$, ta được

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} >$$

• Ý nghĩa hình học của đạo hàm là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ x_0.

• Từ đây ta suy ra phương trình tiếp tuyến và phương trình pháp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm $(x_0, f(x_0))$:

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0), \\ y - f(x_0) &= -\frac{1}{f(x_0)}(x - x_0). \end{aligned}$$

• **Mệnh đề.** *Cho $f, g :\to \mathbb{R}$ là hai hàm khả vi tại $x \in D$. Ta có các hàm $f + g$, αf $(\alpha \in \mathbb{R})$ và $f \cdot g$ là các hàm khả vi tại x và*
(i) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
(ii) $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$,
(iii) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
Hơn nữa, khi $g(x) \neq 0$, hàm f/g xác định trên một lân cận của x và là hàm khả vi tại x với
(iv) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

• **Mệnh đề.** *Cho* $f : D_1 \to D_2$, $g : D_2 \to \mathbf{R}$. *Nếu* f *khả vi tại* $x \in D_1$ *và* g *khả vi tại* $y = f(x) \in D_2$ *thì* $f \circ g$ *khả vi tại* x *và*

$$(f \circ g)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

• **Mệnh đề.** *Cho* $f : D \to \mathbf{R}$ *là đơn ánh. Nếu* f *khả vi tại* $x \in D$ *và* $f'(x) \neq 0$ *thì* $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ *khả vi tại* $y = f(x) \in f(D)$ *và*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

• **Đạo hàm một phía.** Các giới hạn

$$\begin{aligned} f'_-(x) &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \\ f'_+(x) &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

được gọi là *đạo hàm bên trái* và *bên phải* của hàm f tại x.

• **Mệnh đề.** *Để tồn tại $f'(x)$, điều kiện cần và đủ là tồn tại $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ và*

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

$<$ Cho hàm $f(x) = |x|$. Tính $f'_-(0)$, $f'_+(0)$.
Theo định nghĩa, ta có:

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1, \quad f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1 \; >$$

- **Đạo hàm vô cùng.** Nếu tại điểm x_0

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

thì ta nói hàm f có đạo hàm vô cùng tại điểm x_0.

- **Định nghĩa.** Nếu hàm $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ tại điểm x, ta gọi *vi phân* của hàm số, ký hiệu dy, là tích của đạo hàm $f'(x)$ tại điểm đó với số gia của biến số Δx

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

- Ý nghĩa hình học của vi phân

$$CT = dy.$$

- Áp dụng vi phân tính gần đúng

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

- Đạo hàm của hàm phụ thuộc tham số

$$x = \varphi(t)\, y = \psi(t),\ t \in [\alpha, \beta]$$

Nếu $x = \varphi(t)$ có hàm ngược, $t = \varphi^{-1}(x)$, thì

$$y = \psi \circ \varphi^{-1}(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

$<$ Tìm đạo hàm của hàm $x = \cos^2 t,\ y = \sin t,\ t \in (0, \pi/2)$.

$$x'(t) = -2\cos t \sin t,\ y'(t) = \cos t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sin t} \quad >$$

• Đạo hàm của hàm ẩn. Hàm $y = f(x)$, $x \in (a, b)$ được cho dưới dạng hàm ẩn $F(x, y) = 0$, nếu với mọi $x \in (a, b)$, ta có

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$G(x, f(x), f'(x)) = 0.$$

Rồi giải ra $f'(x)$.
$<$ Cho hàm ẩn $y = f(x)$ xác định bởi $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Tính đạo hàm $f'(x)$.
Lấy đạo hàm hai vế đẳng thức

$$x^3 + [f(x)]^3 - 3axf(x) = 0$$

ta được

$$3x^2+3f(x)f'(x)-3a[f(x)+xf'(x)] = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - af(x)}{ax - [f(x)]^2} >$$

- **Định lý Fermat.** *Nếu hàm* $y = f(x)$
  1. *liên tục trong* $[a, b]$,
  2. *đạt cực trị tại* $\xi \in (a, b)$,
  3. *tồn tại đạo hàm* $f'(\xi)$,

thì $f'(\xi) = 0$.
Định lý này được áp dụng trong bài toán tìm cực trị hàm số (kết hợp với định lý Lagrange bên dưới).

- **Định lý Rolle.** *Nếu hàm* $y = f(x)$
  1. *liên tục trong* $[a, b]$,
  2. *khả vi trong* (a, b),
  3. $f(a) = f(b)$

thì tồn tại ít nhất một giá trị $\xi \in (a, b)$ *sao cho* $f'(\xi) = 0$.
Định lý này là cơ sở của định lý Lagrange (định lý số gia hữu hạn)

- **Định lý Lagrange.** *Nếu hàm* $y = f(x)$
  1. *liên tục trong* $[a, b]$,
  2. *khả vi trong* (a, b)

thì tồn tại ít nhất một giá trị $\xi \in (a, b)$ *sao cho*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Định lý này là cơ sở cho việc khảo sát sự biến thiên của hàm số.

- **Định lý Cauchy.** *Nếu các hàm* $f(x)$ *và* $g(x)$
  1. *liên tục trong* $[a, b]$,
  2. *khả vi trong* (a, b),
  3. $g'(x) \neq 0$ *với mọi* $x \in (a, b)$

thì tồn tại $\xi \in (a, b)$ *sao cho*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

- Quy tắc L'Hospital

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

trong đó a có thể là ∞.

- Ta có thể định nghĩa đạo hàm cấp cao. Thí dụ, đạo hàm cấp 2 là đạo hàm của đạo hàm cấp 1,... Vi phân cấp 2 là vi phân của vi phân cấp 1,...

- **Định lý Taylor.** *Nếu hàm $y=f(x)$*
  1. *có đạo hàm liên tục đến cấp n trong $[a,b]$,*
  2. *có đạo hàm cấp $n+1$ trong (a,b),*

thì tồn tại $\xi\in(a,b)$ sao cho

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\dots \\ &\quad \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

- Trường hợp đặc biệt $a = 0$ ta có công thức MacLaurin.
- Công thức Taylor (MacLaurin) thường dùng để tính xấp xỉ.

• Hàm $F(x)$ được gọi là một *nguyên hàm* của hàm $f(x)$ trên D nếu

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in D$$

• **Mệnh đề.** *Nếu $f(x)$ có nguyên hàm là $F(x)$ trên D thì $f(x)$ có vô số nguyên hàm trên D, và hơn nữa, các nguyên hàm đều có dạng*

$$F(x) + C,$$

với C là hằng số tùy ý.

• Tập hợp tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên D được gọi là *tích phân bất định* của $f(x)$ trên D và được ký hiệu là

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

- **Tính chất**:
  - $\displaystyle\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx.$
  - $\displaystyle\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$
  - $\displaystyle d\int f(x)dx = f(x)dx.$
  - $\displaystyle\int df(x) = f(x) + C.$
  - Nếu $u = u(x)$ là một hàm khả vi, có miền giá trị là D và f liên tục trên D, thì
$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du.$$
  - Nếu f, g khả vi liên tục thì
$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

• Cho f xác định trên $[a, b]$.
+ Phân hoạch $[a, b]$ thành n đoạn con bởi các điểm

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

có độ dài $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
+ Trên mỗi đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ ta chọn điểm $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ và tính

$$f(\xi_i)\Delta x_i.$$

+ Lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

phụ thuộc phép phân hoạch và cách chọn điểm ξ_i.
+ Qua giới hạn, $n \to \infty$, nếu $I_n \to I \in \mathbb{R}$ không phụ thuộc phép phân hoạch và cách chọn điểm ξ_i thì ta nói f *khả tích Riemann* trên $[a, b]$ và viết

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

- **Mệnh đề.** *Nếu f khả tích Riemann trên $[a,b]$ thì f bị chặn trên $[a,b]$.*
- **Mệnh đề.** *Nếu f liên tục trên $[a,b]$ thì f khả tích Riemann trên $[a,b]$.*
- **Tính chất**:
  - Quy ước: $\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_b^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.
  - $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$.
  - $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
  - $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ với mọi $c \in \mathbb{R}$.
  - $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

- $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

• **Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân.**
Giả sử f liên tục trên $[a,b]$. Với mỗi $x \in [a,b]$ đặt

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Khi ấy, φ là một nguyên hàm của f trên $[a,b]$.
• **Công thức Newton - Leibniz.**
Nếu f liên tục trên $[a,b]$ và F là một nguyên hàm của f trên đó thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b.$$

• **Công thức đổi biến.**

Nếu $u(x)$ khả vi liên tục trên $[a,b]$ và f liên tục trên miền giá trị của u thì

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

• **Công thức tích phân từng phần.**

Nếu f, g khả vi liên tục trên $[a, b$ thì

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

1) Tích phân với cận vô hạn

• Nếu với mọi b, $a < b$, $\int_a^b f(x)dx$ tồn tại và

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$$

thì ta nói $\int_a^\infty f(x)dx$ *hội tụ* và

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}.$$

Ngược lại ta nói $\int_a^\infty f(x)dx$ *phân kỳ*.

• Định nghĩa tương tự cho $\int_{-\infty}^a f(x)dx$.

• Với $a \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ là hội tụ và

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

nếu cả hai tích phân bên vế phải hội tụ. Chú ý, đẳng thức trên là đúng với mọi $a \in \mathbb{R}$.

• **Mệnh đề.** *Với* $p > 0$,

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{nếu } p > 1 \\ +\infty, & \text{nếu } p \leq 1 \end{cases}$$

2) Hàm lấy tích phân không bị chặn

• Cho f xác định trên $[a, b)$, và $\lim_{x \to b} f(x) = \infty$. Như vậy, $\int_a^b f(x)dx$ không tồn tại.

Nếu $\int_a^{b-\epsilon} f(x)$ tồn tại với mọi $\epsilon > 0$ và

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx \in \mathbb{R}$$

thì ta nói $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ* và

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx.$$

Ngược lại, ta nói $\int_a^b f(x)dx$ *phân kỳ*.

- Định nghĩa tương tự cho $\int_a^b f(x)dx$ với $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.
- **Mệnh đề.** *Với* $p > 0$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & \textit{nếu } p < 1 \\ +\infty, & \textit{nếu } p \geq 1 \end{cases}$$

• **Tiêu chuẩn so sánh 1** *Giả sử* f, g *liên tục, và* $f(x) \geq g(x) \geq 0$ *với* $x \geq a$.
(a) Nếu $\int_a^\infty f(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^\infty g(x)dx$ *hội tụ.*
(b) Nếu $\int_a^\infty g(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int_a^\infty f(x)dx$ *phân kỳ.*

$$< \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx, \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}, \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}, \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+e^x} >$$

• **Tiêu chuẩn so sánh 2** *Giả sử* f, g *liên tục, không âm trên* $[a, \infty)$ *và tồn tại giới hạn*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

$*$ $K \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$: $\int_a^\infty f(x)dx$, $\int_a^\infty g(x)dx$ *cùng tính chất.*
$*$ $K = 0$: $\int_a^\infty g(x)dx$ *hội tụ* $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f(x)dx$ *hội tụ.*
$*$ $K = \infty$: $\int_a^\infty g(x)dx$ *phân kỳ* $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f(x)dx$ *phân kỳ.*

• Chú ý: Các định lý so sánh được phát biểu tương tự cho tích phân suy rộng loại 2.

$$< \int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}, \int_0^1 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt{x(x+1)}}, \int_0^1 \frac{(x^\alpha+1)dx}{\sqrt{(x^2+1)\sin x}} >$$

• **Hội tụ tuyệt đối**

(a) Nếu $\int_a^\infty |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ. Khi ấy ta nói $\int_a^\infty f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối*.

(b) Nếu $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ. Khi ấy ta nói $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối*.

$$< \int_1^\infty \frac{\cos x dx}{x^2}, \int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx, \int_1^\infty \frac{\sin x dx}{x} >$$

- **Ứng dụng tích phân xác định**

1) Diện tích

$+$ Hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = f(x), y = g(x)$, $a \leq x \leq b$.

$$S = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

$<$ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = x$.
Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = x^4$
$>$

$+$ Hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $x = f(y), x = g(y)$, $c \leq y \leq d$.

$$S = \int_c^d [g(y) - f(y)]dy$$

$<$ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $x = y^2$, $x = y + 2 >$

$+$ Cho cung C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, phép tương ứng giữa t và x, y là 1-1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi C, $x = x(a)$, $x(b)$, Ox.

$$S = \int_a^b |y(t)x'(t)|dt.$$

$<$ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi cung

$$x = r(t - \sin t),\ y = r(1 - \cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

và Ox.

Tính diện tích ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ (trường hợp đường cong kín) $>$

2) Độ dài cung phẳng

+ Cho cung trơn có phương trình tham số

$$x = x(t),\ y = y(t),\ a \leq t \leq b.$$

Độ dài cung là

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

$<$ Tính độ dài cung của đường cong tham số $x = t^2$, $y = t^3$, nằm giữa hai điểm $(1,1)$ và $(4,8)$.

Tính độ dài cung của đường cong tham số

$$x = r(\theta - \sin\theta),\ y = r(1 - \cos\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\ >$$

+ Cho cung trơn có phương trình

$$y = f(x),\ a \leq x \leq b.$$

Xem x là tham số, độ dài cung là

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dx.$$

$<$ Tính độ dài cung $y = \frac{1}{2}x^2,\ 0 \leq x \leq 1$ $>$

3) Thể tích vật thể

+ Giả sử vật thể T ta biết được diện tích tiết diện ngang vuông góc với trục Ox, $S = S(x),\ a \leq x \leq b$.

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

+ Vật thể tròn xoay tạo bởi sự quay của đường cong

$$y = f(x),\ a \leq x \leq b$$

quanh Ox.

$<$ Tính thể tích vật thể tạo bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\ln x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$ quay quanh Oy.
Tính thể tích vật thể tạo bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $x = 0$, $y = 1$ quay quanh Oy.
Tính thể tích vật thể tạo bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2,\ y = 0$ quay quanh $Oy >$

- Cho dãy $\{u_n\}$. Một tổng vô hạn,

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1}$$

được gọi là *chuỗi số*.

- Với mọi $n \in \mathbb{N}$, tổng hữu hạn

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

được gọi là *tổng riêng thứ* n.

Nếu giới hạn $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ tồn tại và hữu hạn thì ta nói chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ*. Khi đó S gọi là tổng của chuỗi. Trường hợp ngược lại, ta nói chuỗi *phân kỳ*.

< Chuỗi hình học $a + aq + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \ (a \neq 0,\ q \neq 1)$.
Tổng riêng thứ n (cấp số nhân có công bội q)

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

$*$ Nếu $|q| < 1$, $q^n \to 0$ khi $n \to \infty$, do đó

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q} \right) = \frac{a}{1-q}.$$

Vậy, khi $|q| < 1$ chuỗi hình học hội tụ là tổng là $a/(1-q)$.
$*$ Nếu $|q| > 1$, $q^n \to \infty$ khi $n \to \infty$, tức là $\lim_{n\to\infty} S_n$ không tồn tại, chuỗi phân kỳ.
$*$ Nếu $q = 1$, $S_n = a + a + \cdots + a = na$, thì $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.
Chuỗi phân kỳ >

Điều kiện cần của sự hội tụ

• **Mệnh đề.** *Nếu chuỗi (1) hội tụ thì*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

• **Hệ quả.** *Nếu số hạng tổng quát u_n của chuỗi không tiến đến không khi $n \to \infty$ thì chuỗi phân kỳ.*

Tính chất của chuỗi hội tụ

• **Mệnh đề.** *Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và tổng là S thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ cũng hội tụ và tổng là cS.*

• **Mệnh đề.** *Nếu các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ hội tụ và*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

• **Mệnh đề.** *Nếu chuỗi hội tụ thì chuỗi thu được từ chuỗi đó bằng cách cộng vào hoặc trừ đi một số hữu hạn các số hạng cũng hội tụ.*

Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương

• **Mệnh đề (Tiêu chuẩn so sánh I).** *Cho hai chuỗi số dương,* $\sum u_n$ *và* $\sum v_n$*, thỏa* $u_n \leq v_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

(i) Nếu chuỗi $\sum v_n$ *hội tụ thì chuỗi* $\sum u_n$ *hội tụ.*

(ii) Nếu chuỗi $\sum u_n$ *phân kỳ thì chuỗi* $\sum v_n$ *phân kỳ.*

$<$ Chuỗi $\sum \frac{1}{n2^n}$ hội tụ vì $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$ với mọi $n > 1$. Chuỗi hình học $\sum \frac{1}{2^n}$ hội tụ nên chuỗi cho hội tụ.

Chuỗi $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ vì $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ với mọi $n > 1$. Chuỗi điều hòa $\sum \frac{1}{n}$ phân kỳ (chứng minh sau) nên chuỗi cho phân kỳ $>$

• **Mệnh đề (Tiêu chuẩn so sánh II).** *Cho hai chuỗi số dương,* $\sum u_n$, $\sum v_n$. *Nếu tồn tại giới hạn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = K,$$

trong đó K *hữu hạn và khác không, thì hai chuỗi cho cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

$<$ Chuỗi $\sum \frac{2n}{3n^2-1}$ phân kỳ vì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{3n^2-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{2}{3} \quad >$$

• **Mệnh đề (Tiêu chuẩn D'Alembert).** *Cho chuỗi dương* $\sum u_n$ *và giả sử tồn tại giới hạn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell,$$

(i) chuỗi $\sum u_n$ *hội tụ, nếu* $\ell < 1$.
(ii) chuỗi $\sum u_n$ *phân kỳ, nếu* $\ell > 1$.

$<$ Chuỗi $\sum \frac{1}{n!}$ hội tụ vì $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$

Chuỗi $\sum \frac{2^n}{n}$ phân kỳ vì $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1 >$

Trường hợp $\ell = 1$ thì không có kết luận.

• **Mệnh đề (Tiêu chuẩn Cauchy).** *Cho chuỗi dương $\sum u_n$ và giả sử tồn tại giới hạn*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell,$$

(i) chuỗi $\sum u_n$ hội tụ, nếu $\ell < 1$;
(ii) chuỗi $\sum u_n$ phân kỳ, nếu $\ell > 1$.
< Chuỗi $\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ hội tụ vì

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$ >

• **Mệnh đề (Tiêu chuẩn tích phân).** *Cho chuỗi dương $\sum u_n$ với các số hạng $un = f(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Giả sử $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots$*
(i) nếu tích phân $\int_1^\infty f(x)dx$ hội tụ thì $\sum u_n$ hội tụ;
(ii) nếu tích phân $\int_1^\infty f(x)dx$ phân kỳ thì $\sum u_n$ phân kỳ.

$<$ Chuỗi $\sum \frac{1}{n^p}$ hội tụ nếu $p > 1$, phân kỳ nếu $p \leq 1$ $>$

Chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu thường có dạng

$u_1 - u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$ với u_n là những số dương.

• **Mệnh đề Leibniz.** *Cho chuỗi đan dấu $\sum (-1)^{n-1} u_n$. Nếu các số hạng giảm nghiêm cách,*

$$u_1 > u_2 > u_3 \cdots$$

và $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ thì chuỗi hội tụ.

$<$ Chuỗi $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ hội tụ $>$

Chuỗi có dấu bất kỳ

• **Mệnh đề.** *Cho chuỗi $\sum u_n$. Nếu chuỗi tạo bởi các giá trị tuyệt đối, $\sum |u_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum u_n$ hội tụ.*

$<$ Chuỗi $\sum \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ hội tụ vì $\sum \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right|$ hội tụ $>$

• Chuỗi hàm là chuỗi mà trong đó số hạng tổng quát là hàm của biến x,

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Tập hợp những trị x mà chuỗi hàm hội tụ được gọi là *miền hội tụ* của chuỗi hàm đó. Tổng của chuỗi là hàm số của biến số x và được ký hiệu là $S(x)$.

• Chuỗi $\sum u_n(x)$ được gọi là *hội tụ đều* trong đoạn $[a, b]$ nếu với mọi $\epsilon > 0$ bé tùy ý, tồn tại số nguyên dương N sao cho $n \geq N$, bất đẳng thức

$$|S(x) - S_n(x)| < \epsilon$$

được thỏa mãn với mọi $x \in [a, b]$.

• **Định lý Weierstrass.** *Nếu chuỗi hàm* $\sum u_n(x)$
(i) $|u_n(x)| \alpha_n$ *với mọi* $x \in [a, b]$*,*
(ii) $\sum \alpha_n$ *là chuỗi hội tụ,*
thì chuỗi hàm cho hội tụ tuyệt đối và đều với mọi $x \in [a, b]$*.*
$<$ Chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

hội tụ tuyệt đối và đều trên $\mathbb{R}$.
Chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[n]{n}}$$

hội tụ tuyệt đối và đều với mọi $x \in [-1, 1] >$

Chuỗi lũy thừa

• Chuỗi lũy thừa là chỗi hàm có dạng

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots+=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n.$$

• Bằng cách đặt $X=x-x_0$, chuỗi thành

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n.$$

Vì thế trong các phát biểu về sau ta chỉ xét chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n.$$

• **Định lý Abel**

(i) Nếu chuỗi lũy thừa hội tụ với $x_0 \neq 0$*, thì nó hội tụ tuyệt đối với mọi* x *thỏa*

$$-|x_0| < x < |x_0|.$$

(ii) Nếu chuỗi lũy thừa phân kỳ với x_1*, thì nó phân kỳ với mọi* x *thỏa*

$$x < -|x_1| \quad \textit{hay} \quad |x_1| < x.$$

• Định lý Abel xác định sự phân bố các điểm hội tụ hoặc phân kỳ của chuỗi lũy thừa. Tồn tại số thực R sao cho các điểm $|x| < R$ là những điểm hội tụ tuyệt đối, và những điểm $|x| > R$ là những điểm phân kỳ.

• Khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa là khoảng $(-R, R)$. Số R được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi.

• Tại $x = \pm R$ ta phải xét riêng.

- Có hai cách tính bán kính hội tụ của chuỗi

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \tag{2}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{3}$$