GV LÊ VĂN HỢP

CHƯƠNG VI

QUAN HỆ TRÊN CÁC TẬP HỢP

I. QUAN HỆ HAI NGÔI:

1.1/ VÍ DỤ MỞ ĐẦU: Cho $S = \{ 0, 1, 2, \ldots , 9, 10 \}$.

$\forall x, y \in S$, đặt $x\Re y$ (ta nói x *có quan hệ* $\Re$ với y) $\Leftrightarrow 2x + y = 18$,
nghĩa là $x\overline{\Re}y$ (ta nói x *không có quan hệ* $\Re$ với y) $\Leftrightarrow 2x + y \neq 18$
Ta có $9\Re0$, $8\Re2$, $7\Re4$, $6\Re6$, $5\Re8$ và $4\Re10$. Ngoài ra, $2\overline{\Re}3$, $5\overline{\Re}6$, ...
Đặt $\boldsymbol{\Re} = \{ (x,y) \in S^2 \mid x\Re y \} = \{(9,0), (8,2), (7,4), (6,6), (5,8), (4,10)\} \subset S^2$.
Như vậy từ quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S, ta có tương ứng tập hợp con $\boldsymbol{\Re}$ của S^2.
$\forall x,y \in S$, ta viết $x\Re y \Leftrightarrow (x,y) \in \boldsymbol{\Re}$ và $x\overline{\Re}y \Leftrightarrow (x,y) \notin \boldsymbol{\Re}$.
Chẳng hạn như $7\Re4 \Leftrightarrow (7,4) \in \boldsymbol{\Re}$ và $1\overline{\Re}9 \Leftrightarrow (1,9) \notin \boldsymbol{\Re}$.

1.2/ ĐỊNH NGHĨA: Một *quan hệ hai ngôi* $\Re$ trên tập hợp $S \neq \varnothing$ thực chất là *một tập hợp con* $\boldsymbol{\Re}$ của tập hợp $S^2 = S \times S$. Tập hợp con này chứa tất cả các cặp (x,y) của S^2 có quan hệ $\Re$. Nói khác đi, mỗi tập hợp con của S^2 xác định một quan hệ hai ngôi trên S. Ta có $\boldsymbol{\Re} = \{ (x,y) \in S^2 \mid x\Re y \} \subset S^2$.
$\forall x,y \in S$, ta viết $x\Re y \Leftrightarrow (x,y) \in \boldsymbol{\Re}$ và $x\overline{\Re}y \Leftrightarrow (x,y) \notin \boldsymbol{\Re}$.
Nếu $|S| = n$ thì $|S^2| = n^2$ nên ta có 2^{n^2} quan hệ hai ngôi khác nhau trên S.

1.3/ XÁC ĐỊNH QUAN HỆ HAI NGÔI:

Cho tập hợp $S \neq \varnothing$.
Ta xác định một quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S theo 1 trong 3 cách như sau:
a) Cách 1: giới thiệu $\Re$ như *một tập hợp con* của S^2 (nếu $\Re$ có ít phần tử).

Ví dụ: $S = \mathbf{Z}$ với các quan hệ hai ngôi $\Re$ và θ trên S như sau:
$\boldsymbol{\Re} = \{ (4,-1), (0,0), (-9, 2), (3,3), (-5,-6), (7,4), (-8,-8), (1,0) \} \subset S^2$.
$\theta = \{ (2k, 5k + 1) \mid k \in \mathbf{Z} \} = \{ (0,1), (2,6), (-2, -4) , \ldots \} \subset S^2$.

b) Cách 2: giới thiệu *nội dung của quan hệ hai ngôi* $\Re$ (nếu $\Re$ có nhiều phần tử)

Ví dụ: $S = \mathbf{R}$ và $\forall x, y \in S$, đặt $x\Re y \Leftrightarrow 4x^3 > 5y^2 + 1$ (nội dung quan hệ $\Re$)
Ta kiểm tra được $3\Re(-4)$, $4\overline{\Re}9$, …

c) Cách 3: dùng *ma trận số nhị phân biểu diễn quan hệ hai ngôi* $\Re$ (nếu S hữu hạn)
Xét $S = \{a_1, a_2, \ldots , a_n\}$. Một quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S có thể biểu diễn bằng một bảng ma trận vuông (n x n) gồm các số nhị phân như sau:
$\mathbf{M}_\Re = \mathbf{M} = \left(m_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$ trong đó $m_{ij} = 1$ (nếu $a_i\Re a_j$) và $m_{ij} = 0$ (nếu $a_i\overline{\Re}a_j$)

M	a_1	…	a_j	…	a_n
a_1	m_{11}	…	m_{1j}	…	m_{1n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a_i	m_{i1}	…	m_{ij}	…	m_{in}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a_n	m_{n1}	…	m_{nj}	…	m_{nn}

Ví dụ: S = { a, b, c, d } và quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S có ma trận biểu diễn là

$$\mathbf{M}_{\Re} = \mathbf{M} = \left(m_{ij}\right)_{1 \le i, j \le 4}$$

M	a	b	c	d
a	**1**	0	**1**	0
b	0	0	**1**	**1**
c	**1**	0	**1**	**1**
d	**1**	**1**	0	0

Suy ra $\mathfrak{R}$ = { (a,a), (a,c), (b,c), (b,d), (c,a), (c,c), (c,d), (d,a), (d,b) } $\subset S^2$.

II. CÁC TÍNH CHẤT CỦA QUAN HỆ HAI NGÔI:

Cho quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp $S \neq \varnothing$.

2.1/ TÍNH PHẢN XẠ:

a) $\Re$ *phản xạ* nếu " $\forall x \in S, x\Re x$ " (mọi phần tử của S quan hệ $\Re$ với chính nó).

b) $\Re$ *không phản xạ* nếu " $\exists x_o \in S, x_o \overline{\Re} x_o$ ".
(có ít nhất một phần tử của S không quan hệ $\Re$ với chính nó).

Ví dụ:

a) $S = \{ 1, 2, 3 \} \subset T = \{ 1, 2, 3, 4 \}$.
Xét quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S (và cũng là quan hệ hai ngôi trên T):
$\mathfrak{R}$ = { (3,3), (2,1), (1,1), (1,3), (2,2) } $\subset S^2 \subset T^2$.
$\Re$ (trên S) phản xạ ($\forall x \in S, x\Re x$) nhưng $\Re$ (trên T) không phản xạ ($\exists 4 \in T, 4\overline{\Re}4$).

b) S = **R**. $\forall x, y \in S$, đặt $[\, x\,\gamma\, y \Leftrightarrow x \le y + 2 \,]$ và $[\, x\,\delta\, y \Leftrightarrow 2x^3 \neq 3y^2 \,]$.
γ phản xạ ($\forall x \in S, x \le x + 2$ nên $x\,\gamma\,x$).
δ không phản xạ ($\exists 0 \in S, 2.0^3 = 3.0^2$ nên $0\,\overline{\delta}\,0$).

2.2/ TÍNH ĐỐI XỨNG:

a) $\Re$ *đối xứng* nếu " $\forall x, y \in S, x\Re y \Rightarrow y\Re x$ ". (mọi cặp phần tử của S có quan hệ $\Re$ theo hai chiều hoặc không có quan hệ $\Re$ theo bất cứ chiều nào cả).

b) $\Re$ *không đối xứng* nếu " $\exists x_o, y_o \in S, x_o\Re y_o$ và $y_o\overline{\Re}x_o$ ".
(có ít nhất một cặp phần tử của S chỉ quan hệ $\Re$ theo một chiều).

Ví dụ:

a) $S = \{ 0, 1, 2 \}$. Xét các quan hệ hai ngôi $\Re$ và θ trên S như sau:

$\mathbf{\Re} = \{ (0,0), (2,1), (1,1), (1,2) \} \subset \boldsymbol{\theta} = \mathbf{\Re} \cup \{ (0,1) \} \subset S^2$

$\Re$ đối xứng [các cặp (0,0), (1,1), (1,2) có quan hệ hai chiều. Các cặp khác vắng mặt]

θ không đối xứng ($\exists 0, 1 \in S, 0\theta 1$ và $1 \overline{\theta} 0$).

b) $S = \mathbf{Q}$. $\forall x, y \in S$, đặt [$x \gamma y \Leftrightarrow x^2 + \sin x = y^2 + \sin y$] và

[$x \delta y \Leftrightarrow 3x^2 + 2y = 3x - 2y^2$]

γ đối xứng ($\forall x, y \in S, x \gamma y \Rightarrow x^2 + \sin x = y^2 + \sin y \Rightarrow y^2 + \sin y = x^2 + \sin x \Rightarrow y \gamma x$)

δ không đối xứng ($\exists 1, 0 \in S, 1\delta 0$ và $0 \overline{\delta} 1$).

2.3/ TÍNH PHẢN (ĐỐI) XỨNG:

a) $\Re$ *phản xứng* nếu " $\forall x, y \in S, (x\Re y$ và $y\Re x) \Rightarrow x = y$ "

(cặp phần tử nào của S có quan hệ $\Re$ theo hai chiều thì phải trùng nhau).

a') $\Re$ *phản xứng* nếu " $\forall x, y \in S, x \neq y \Rightarrow (x\overline{\Re}y$ hay $y\overline{\Re}x)$ "

(mọi cặp phần tử khác nhau của S không có quan hệ $\Re$ đủ hai chiều).

b) $\Re$ *không phản xứng* nếu " $\exists x_o, y_o \in S, (x_o\Re y_o$ và $y_o\Re x_o)$ và $x_o \neq y_o$ "

(có ít nhất hai phần tử khác nhau của S có quan hệ $\Re$ theo hai chiều).

Ví dụ:

a) $S = \mathbf{N}$. Xét các quan hệ hai ngôi $\Re$ và θ trên S như sau:

$\mathbf{\Re} = \{ (0,0), (2,3), (4,1), (8,8), (5,5) \} \subset \boldsymbol{\theta} = \mathbf{\Re} \cup \{ (3,2) \} \subset S^2$

$\Re$ phản xứng [$\forall x,y \in S, (x\Re y$ và $y\Re x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x=0, y=0)\\(x=8, y=8)\\(x=5, y=5)\end{array}\right. \Rightarrow (x = y)$].

θ không phản xứng [$\exists 2, 3 \in S, (2\theta 3$ và $3\theta 2)$ và $2 \neq 3$].

b) $S = \mathbf{R}$. $\forall x, y \in S$, đặt [$x \gamma y \Leftrightarrow x = y^2$], [$x \delta y \Leftrightarrow x < y$] và

[$x \rho y \Leftrightarrow 2x^2 \geq 4y^3 - 5$].

γ phản xứng [$\forall x, y \in S, (x \gamma y$ và $y \gamma x) \Rightarrow (x = y^2$ và $y = x^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x = x^4$ và $y = x^2) \Rightarrow \begin{cases}(x=0, x=1)\\ y=x^2\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x=0, y=0)\\(x=1, y=1)\end{array}\right. \Rightarrow x = y$].

δ phản xứng [$\forall x, y \in S, (x \delta y$ và $y \delta x) \Rightarrow (x < y$ và $y < x) \Rightarrow (x < x) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x = y)$] [dấu $\Rightarrow$ cuối cùng đúng vì $(x < x)$ có chân trị sai]

[dùng phát biểu a)]

δ phản xứng [$\forall x, y \in S, x \neq y \Rightarrow (x > y$ hay $y > x) \Rightarrow (x \overline{\delta} y$ hay $y \overline{\delta} x)$]

[dùng phát biểu a')]

ρ không phản xứng [$\exists 1, 0 \in S, (1\rho 0$ và $0\rho 1)$ và $0 \neq 1$].

2.4/ TÍNH TRUYỀN (BẮC CẦU):

a) $\Re$ *truyền* nếu " $\forall x, y, z \in S, (x\Re \mathbf{y}$ và $\mathbf{y}\Re z) \Rightarrow x\Re z$ ".

b) $\Re$ *không truyền* nếu " $\exists x_o, y_o, z_o \in S, (x_o\Re \mathbf{y_o}$ và $\mathbf{y_o}\Re x_o)$ và $x_o\overline{\Re}z_o$ ".

Ví dụ:

a) S = **Z**. Xét các quan hệ hai ngôi $\Re$ và θ trên S như sau:

$\boldsymbol{\Re} = \{ (0,0), (-5,4), (-8,-9), (1,4), (0,-6), (1,-5) \} \subset \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Re} \cup \{ (-9,7) \} \subset S^2$

$\Re$ truyền [$\forall x,y,z \in S, (x\Re\mathbf{y}$ và $\mathbf{y}\Re z) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x=0, y=0, z=0)\\(x=0, y=0, z-6)\\(x=1, y=-5, z=4)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}0\Re 0\\0\Re(-6)\\1\Re 4\end{array}\right. \Rightarrow x \Re z$].

θ không truyền [$\exists(-8), (-9), 7 \in S, \{(-8)\theta(-9)$ và $(-9)\theta 7\}$ và $(-8)\, \overline{\theta}\, 7$].

b) S = **Q**. $\forall x, y \in S$, đặt [$x\,\gamma\, y \Leftrightarrow x + 1 < y$] và [$x\,\delta\, y \Leftrightarrow x < y + 1$]

γ truyền [$\forall x, y, z \in S, (x\,\gamma\,\mathbf{y}$ và $\mathbf{y}\,\gamma\, x) \Rightarrow (x + 1 < \mathbf{y}$ và $\mathbf{y} + 1 < z) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 1) < \mathbf{y} < \mathbf{y} + 1 < z \Rightarrow (x + 1) < z \Rightarrow x\Re z$]

δ không truyền [$\exists 1, \frac{1}{2}, 0 \in S, (1\delta\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{2}\delta 0)$ và $1\,\overline{\delta}\, 0$].

III. QUAN HỆ THỨ TỰ:

3.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp $S \neq \varnothing$.

a) $\Re$ là *một quan hệ thứ tự* trên S nếu $\Re$ phản xạ, phản xứng và truyền trên S.

b) Ta dùng ký hiệu $\prec$ để thể hiện *một quan hệ thứ tự tổng quát*.

Ký hiệu $(S, \prec)$ được hiểu là trên tập hợp S có *quan hệ thứ tự* $\prec$.

$\forall x,y \in S$, nếu $x \prec y$ thì ta nói *một cách hình thức* rằng

" x *nhỏ hơn* y " hay " x *kém hơn* y " hay " x *đứng trước* y " hay

" y *lớn hơn* x " hay " y *trội hơn* x " hay " y *đứng sau* x "

c) Nếu $\Re$ là một *quan hệ thứ tự* trên S và $\varnothing \neq T \subset S$ thì $\Re$ cũng là một *quan hệ thứ tự* trên T.

Ví dụ:

a) $(\mathbf{R}, \leq)$ và $(\mathbf{R}, \geq)$ là các quan hệ thứ tự. Thật vậy,

$\leq$ phản xạ ($\forall x \in \mathbf{R}, x \leq x$), $\leq$ phản xứng [$\forall x, y \in \mathbf{R}, (x \leq y$ và $y \leq x) \Rightarrow (x = y)$],

và $\leq$ truyền [$\forall x, y, z \in \mathbf{R}, (x \leq \mathbf{y}$ và $\mathbf{y} \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$]. Tương tự cho quan hệ $\geq$.

Do đó $(\mathbf{Q}, \leq)$, $(\mathbf{Q}, \leq)$, $(\mathbf{Z}, \leq)$ và $(\mathbf{Z}, \geq)$ là các quan hệ thứ tự.

b) $(\mathbf{N}, |)$ và $(\mathbf{N}, \vdots)$ là các quan hệ thứ tự. Thật vậy, | phản xạ ($\forall x \in \mathbf{N}, x = 1.\, x$ nên $x \mid x$), | phản xứng [$\forall x, y \in \mathbf{N}, (x \mid y$ và $y \mid x) \Rightarrow (\exists\, a, b \in \mathbf{N}, y = ax$ và $x = by)$

$\Rightarrow (x = abx$ và $y = ax) \Rightarrow \left[\begin{array}{c}x=0\,\&\,y=0\\ hoac\\ x\geq 1, ab=1, y=ax\end{array}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{c}x=0\,\&\,y=0\\ hoac\\ x\geq 1, a=b=1, y=x\end{array}\right) \Rightarrow (x = y)$]

và | truyền [$\forall x, y, z \in \mathbf{N}, (x \mid \mathbf{y}$ và $\mathbf{y} \mid z) \Rightarrow (\exists\, a, b \in \mathbf{N}, y = ax$ và $z = by) \Rightarrow$

$\Rightarrow (z = abx$ với $ab \in \mathbf{N}) \Rightarrow (x \mid z)$]. Tương tự cho quan hệ $\vdots$.

c) $(\Pi = \wp(E), \subset)$ và $(\Pi = \wp(E), \supset)$ là các quan hệ thứ tự. Thật vậy, $\subset$ phản xạ ($\forall A \in \Pi, A \subset A$), $\subset$ phản xứng [$\forall A, B \in \Pi, (A \subset B$ và $B \subset A) \Rightarrow A = B$],

$\subset$ truyền [$\forall A, B, C \in \Pi, (A \subset \mathbf{B}$ và $\mathbf{B} \subset C) \Rightarrow A \subset C$]. Tương tự cho quan hệ $\supset$.

d) $(\mathbf{R}, <)$ và $(\mathbf{R}, >)$ không phải là các quan hệ thứ tự vì các quan hệ $<$ và $>$ không phản xạ trên **R** ($\exists 1 \in \mathbf{R}, 1 \,\overline{<}\, 1$ và $1 \,\overline{>}\, 1$).

Để ý $<$ và $>$ vẫn phản xứng và truyền trên **R**.

e) $(\mathbf{Z}, |)$ và $(\mathbf{Z}, \vdots)$ không phải là các quan hệ thứ tự vì các quan hệ $|$ và $\vdots$ không phản xứng trên $\mathbf{Z}$ ($\exists 1, (-1) \in \mathbf{Z}, 1 | (-1), (-1) | 1, 1 \vdots (-1), (-1) \vdots 1$ và $1 \neq -1$). Để ý $|$ và $\vdots$ vẫn phản xạ và truyền trên $\mathbf{R}$.

3.2/ <u>THỨ TỰ TOÀN PHẦN – THỨ TỰ BÁN PHẦN:</u> Cho $(S, \prec)$.

Có đúng một trong hai trường hợp sau đây xảy ra:

a) Trường hợp 1: $\forall x, y \in S, x \prec y$ hay $y \prec x$ (x và y *so sánh được với nhau* bởi quan hệ thứ tự $\prec$). Ta nói $\prec$ là một *thứ tự toàn phần* trên S.

b) Trường hợp 2: $\exists x_o, y_o \in S, x_o \overline{\prec} y_o$ và $y_o \overline{\prec} x_o$ (x_o và y_o *không so sánh được với nhau* bởi quan hệ thứ tự $\prec$). Ta nói $\prec$ là một *thứ tự bán phần* trên S.

<u>Ví dụ:</u>

a) $(\mathbf{R}, \leq)$ và $(\mathbf{R}, \geq)$ là các quan hệ thứ tự toàn phần.
[$\forall x, y \in S$, ($x \leq y$ hay $y \leq x$) và ($x \geq y$ hay $y \geq x$)]

b) $S = \{ a = 2^n \mid n \in \mathbf{N} \} \subset \mathbf{N}$. Do $(\mathbf{N}, |)$ và $(\mathbf{N}, \vdots)$ là các quan hệ thứ tự nên $(S, |)$ và $(S, \vdots)$ cũng là các quan hệ thứ tự. Hơn nữa đây là các thứ tự toàn phần.
[$\forall x = 2^p, y = 2^q \in S$, ($x | y \Leftrightarrow p \leq q$) và ($x \vdots y \Leftrightarrow p \geq q$)]

c) $(\mathbf{N}, |)$ và $(\mathbf{N}, \vdots)$ là các quan hệ thứ tự bán phần.
($\exists 2, 3 \in \mathbf{N}$, 2 và 3 không phải là ước số và không phải là bội số của nhau)

d) ($\Pi = \wp(E), \subset$) và ($\Pi = \wp(E), \supset$) là các quan hệ thứ tự bán phần nếu $|E| \geq 2$. Thật vậy, viết $E = \{a, b, ...\}$ và $\Pi = \wp(E) = \{\varnothing, A = \{a\}, B = \{b\}, C = \{a,b\}, ...\}$ thì ta thấy $\exists A, B \in \Pi, A \not\subset B$ và $B \not\subset A$. Nếu $|E| \leq 1$ thì $\Pi = \{\varnothing\}$ hoặc $\Pi = \{\varnothing, \{a\}\}$ nên ta thấy ngay ($\Pi = \wp(E), \subset$) và ($\Pi = \wp(E), \supset$) là các quan hệ thứ tự toàn phần.

3.3/ <u>KHÁI NIỆM KỀ NHAU TRONG QUAN HỆ THỨ TỰ:</u>

Cho $(S, \prec)$ và $x, y \in S$ với $x \neq y$.

a) Nếu $x \prec y$ và không có $z \in S \setminus \{x, y\}$ thỏa $x \prec z \prec y$ thì ta nói " x *kề với* y (với vị thế x *kém* y *trội*) " hay " y là *một trội trực tiếp* của x ". Ta nối x với y bằng *một đoạn thẳng có mũi tên định hướng* từ x đến y :
$x \rightarrow y$.

b) Suy ra x và y *không kề nhau* nếu xảy ra một trong các trường hợp sau:
* $x \overline{\prec} y$ và $y \overline{\prec} x$ (x và y không so sánh được với nhau bởi quan hệ thứ tự $\prec$).
* $\exists z \in S \setminus \{x, y\}$ thỏa ($x \prec z \prec y$ hay $y \prec z \prec x$).

<u>Ví dụ:</u>

a) $\forall k \in (\mathbf{Z}, \leq)$ ta có k và $(k + 1)$ là kề nhau [$k \leq k + 1$ và $\forall a \in \mathbf{Z}$, không xảy ra $k < a < k + 1$] nhưng k và $k + 2$ không kề nhau [$\exists (k + 1) \in \mathbf{Z}, k < k + 1 < k + 2$].

b) Trong $(\mathbf{R}, \leq)$, không có cặp phần tử nào kề nhau
[$\forall x, y \in \mathbf{R}$ mà $x < y$, $\exists z = 2^{-1}(x + y) \in \mathbf{R}, x < z < y$].

c) Trong $(\mathbf{N}, |)$:
12 và 36 kề nhau ($12 | 36$ và không có $a \in \mathbf{N}$ thỏa $12 | a, a | 36$ và $12 \neq a \neq 36$).
3 và 5 không kề nhau (3 và 5 không phải là ước số của nhau)
4 và 40 không kề nhau ($\exists 8 \in \mathbf{N}$ thỏa $4 | 8, 8 | 40$ và $4 \neq 8 \neq 40$).

d) Trong $(\wp(E), \subset)$ với $E = \{a,b,c\}$: $A = \{a\}$ và $B = \{a, b\}$ kề nhau (A trước B)
B và $C = \{b,c\}$ không kề nhau (vì $B \not\subset C$ và $C \not\subset B$).
A và E không kề nhau (vì $A \subset B \subset E$ và $A \neq B \neq E$).

3.4/ <u>BIỂU ĐỒ HASSE CỦA QUAN HỆ THỨ TỰ:</u> Cho $(S, \prec)$ với S *hữu hạn*.

a) Vẽ *cạnh nối* (*có mũi tên định hướng*) cho tất cả các cặp phần tử kề nhau trong $(S, \prec)$. Hình vẽ có được gọi là *biểu đồ Hasse* của $(S, \prec)$.

b) Nếu $\prec$ là một thứ tự toàn phần trên S thì biểu đồ Hasse của $(S, \prec)$ có thể vẽ một cách đơn giản trên một đoạn thẳng. Nếu $\prec$ là một thứ tự bán phần trên S thì biểu đồ Hasse của $(S, \prec)$ có thể rẽ nhánh phức tạp.

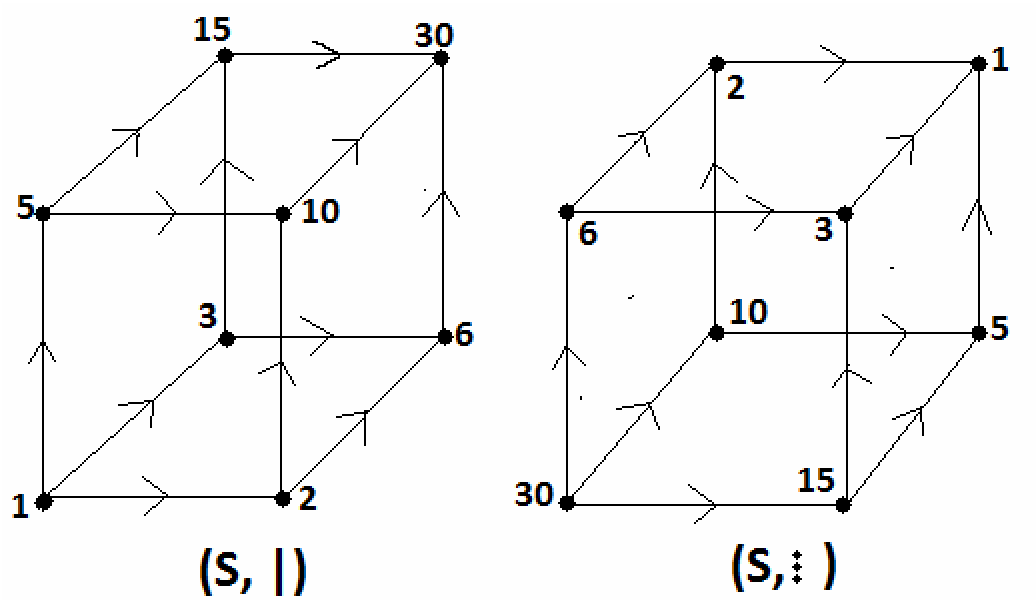
<u>Ví dụ:</u>

a) $S = \{ a = 2^k \mid k = 0, 1, 2, \ldots , 7 \}$. Ta có $(S, \mid)$ và $(S, \vdots)$ đều là các quan hệ thứ tự toàn phần [$\forall x = 2^p, y = 2^q \in S, (x \mid y \Leftrightarrow p \leq q)$ và $(x \vdots y \Leftrightarrow p \geq q)$] nên biểu đồ Hasse của chúng có thể vẽ trên một đoạn thẳng như sau:

$2^0 \to 2^1 \to 2^2 \to 2^3 \to 2^4 \to 2^5 \to 2^6 \to 2^7$ [sơ đồ Hasse của $(S, \mid)$]

$2^7 \to 2^6 \to 2^5 \to 2^4 \to 2^3 \to 2^2 \to 2^1 \to 2^0$ [sơ đồ Hasse của $(S, \vdots)$]

b) T = { các ước số dương của 30 } = { 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 }. Ta có $(T, \mid)$ và $(T, \vdots)$ đều là các quan hệ thứ tự bán phần (2 và 3 không là ước số và bội số của lẫn nhau) nên biểu đồ Hasse của chúng sẽ rẽ nhánh như sau:



3.5/ <u>PHẦN TỬ CỰC TIỂU (NHỎ NHẤT) VÀ CỰC ĐẠI (LỚN NHẤT):</u>

Cho $(S, \prec)$.

a) Ta nói $a = min(S, \prec)$ nếu $a \in S$ và $a \prec x$ $\forall x \in S$.

b) Ta nói $b = max(S, \prec)$ nếu $b \in S$ và $x \prec b$ $\forall x \in S$.

c) Phần tử *min* (*cực tiểu, nhỏ nhất*) và *max*(*cực đại, lớn nhất*) hoặc *không tồn tại* hoặc *tồn tại duy nhất*.

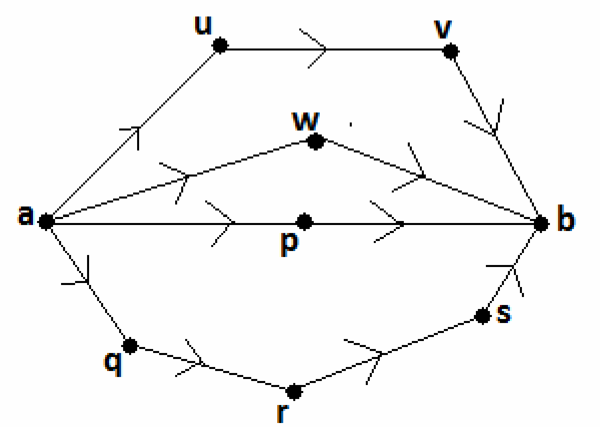
3.6/ <u>NHẬN XÉT:</u> Cho $(S, \prec)$.

a) Trên biểu đồ Hasse của $(S, \prec)$, phần tử min(nếu có) là *điểm xuất phát chung* của mọi nhánh và phần tử max (nếu có) là *điểm kết thúc chung* của mọi nhánh.

b) Nếu S *hữu hạn* và $\prec$ là *thứ tự toàn phần* thì $(S, \prec)$ luôn có min và max.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $(S, \prec)$ có biểu đồ Hasse như sau:



$(S, \prec)$

Ta có $a = \min(S, \prec)$ và $b = \max(S, \prec)$.

b) Xét các tập S và T trong **Ví dụ** (**3.4**).

Ta có $\min(S, |) = 2^0$, $\max(S, |) = 2^7$, $\min(S, \vdots) = 2^7$ và $\max(S, \vdots) = 2^0$.

$\min(T, |) = 1$, $\max(T, |) = 30$, $\min(T, \vdots) = 30$ và $\max(T, \vdots) = 1$.

c) Cho $S = [-3, 8] \subset \mathbf{R}$. Khi đó

$\min(S, \leq) = -3$ và $\max(S, \leq) = 8$ (vì $-3, 8 \in S$ và $\forall x \in S, -3 \leq x \leq 8$)

$\min(S, \geq) = 8$ và $\max(S, \geq) = -3$ (vì $8, -3 \in S$ và $\forall x \in S, 8 \geq x \geq -3$)

d) $\min(\mathbf{N}, |) = 1$ và $\max(\mathbf{N}, |) = 0$ (vì $1, 0 \in \mathbf{N}$ và $\forall x \in \mathbf{N}, 1 \mid x$ và $x \mid 0$)

$\min(\mathbf{N}, \vdots) = 0$ và $\max(\mathbf{N}, |) = 1$ (vì $0, 1 \in \mathbf{N}$ và $\forall x \in \mathbf{N}, 0 \vdots x$ và $x \vdots 1$)

e) $\min(\Pi = \wp(E), \subset) = \varnothing$ và $\max(\Pi = \wp(E), \subset) = E$

(vì $\varnothing, E \in \Pi$ và $\forall A \in \Pi,\ \varnothing \subset A \subset E$)

$\min(\Pi = \wp(E), \supset) = E$ và $\max(\Pi = \wp(E), \supset) = \varnothing$

(vì $E, \varnothing \in \Pi$ và $\forall A \in \Pi,\ E \supset A \supset \varnothing$)

f) $(\mathbf{R}, \leq)$ và $(\mathbf{R}, \geq)$ không có min và max vì $\forall x \in \mathbf{R}, \exists (x-1), (x+1) \in \mathbf{R}$,

$x - 1 < x < x + 1$ và $x + 1 > x > x - 1$.

g) Cho $T = (-4, 9) \subset \mathbf{R}$. Khi đó $(T, \leq)$ và $(T, \geq)$ không có min và max vì $\forall x \in T$,

$\exists\ \frac{x-4}{2}, \frac{x+9}{2} \in T$, $\frac{x-4}{2} < x < \frac{x+9}{2}$ và $\frac{x+9}{2} > x > \frac{x-4}{2}$.

3.7/ <u>PHẦN TỬ TỐI TIỂU VÀ TỐI ĐẠI:</u> Cho $(S, \prec)$.

a) Ta nói a là *một phần tử tối tiểu* của $(S, \prec)$ nếu $a \in S$ và *không có* $a' \in S \setminus \{a\}$ thỏa $a' \prec a$.

Phần tử min (nếu có) là phần tử tối tiểu đặc biệt và duy nhất.

b) Ta nói b là *một phần tử tối đại* của $(S, \prec)$ nếu $b \in S$ và *không có* $b' \in S \setminus \{b\}$ thỏa $b \prec b'$.
Phần tử max (nếu có) là phần tử tối đại đặc biệt và duy nhất.

c) Phần tử tối tiểu và tối đại hoặc *không tồn tại* hoặc *tồn tại mà không nhất thiết duy nhất.*

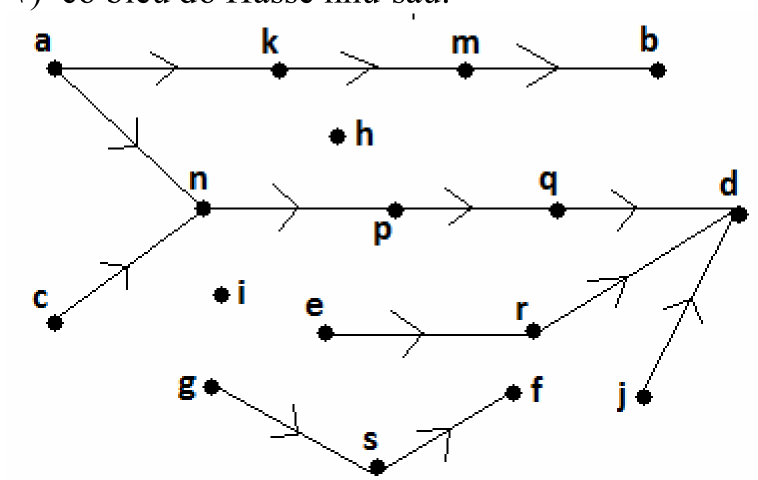
3.8/ <u>NHẬN XÉT:</u> Cho $(S, \prec)$.

a) Trên biểu đồ Hasse của $(S, \prec)$, phần tử tối tiểu (nếu có) là *điểm xuất phát của ít nhất một nhánh* và phần tử tối đại (nếu có) là *điểm kết thúc của ít nhất một nhánh*. *Các phần tử cô lập* của $(S, \prec)$ (không so sánh được với mọi phần tử khác) xem như là các nhánh cụt nên chúng vừa là tối tiểu vừa là tối đại.

b) Nếu S *hữu hạn* và $\prec$ là *thứ tự tùy ý* thì $(S, \prec)$ luôn có tối tiểu và tối đại.

<u>Ví dụ:</u>

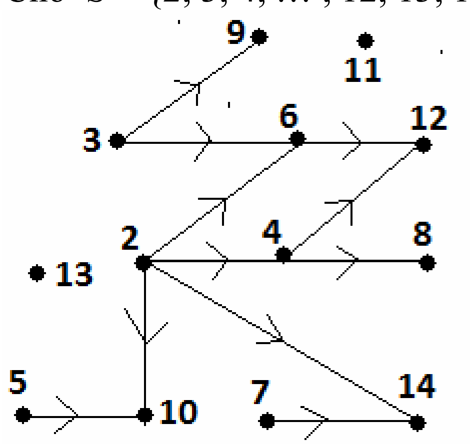
a) Cho $(S, \prec)$ có biểu đồ Hasse như sau:



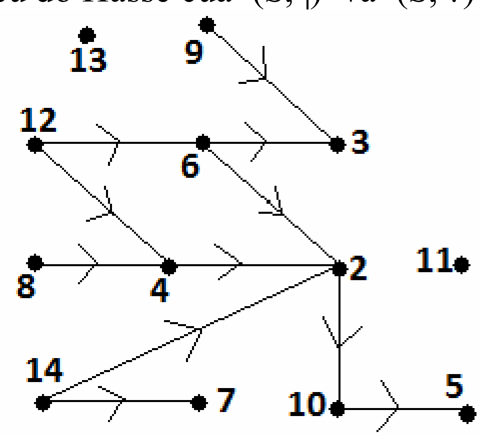
$(S, \prec)$

$(S, \prec)$ có 7 phần tử tối tiểu là a, c, e, g, h, i, j và 5 phần tử tối đại là b, d, f, h, i.

b) Cho S = {2, 3, 4, … , 12, 13, 14}. Biểu đồ Hasse của (S, |) và $(S, \vdots)$ lần lượt là



(S, |)



$(S, \vdots)$

(S, |) có các phần tử tối tiểu là 2, 3, 5, 7, 11, 13 và các phần tử tối đại là 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.

$(S, \vdots)$ có các phần tử tối tiểu là 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 và các phần tử tối đại là 2, 3, 5, 7, 11, 13.

c) ($\mathbf{R}$, $\leq$) và ($\mathbf{R}$, $\geq$) không có các phần tử tối tiểu và tối đại vì
$\forall x \in \mathbf{R}, \exists (x-1), (x+1) \in \mathbf{R}$, $x-1 < x < x+1$ và $x+1 > x > x-1$.

d) Cho $T = (-4, 9) \subset \mathbf{R}$. Khi đó $(T, \leq)$ và $(T, \geq)$ không có tối tiểu và tối đại vì
$\forall x \in T, \exists \frac{x-4}{2}, \frac{x+9}{2} \in T, \frac{x-4}{2} < x < \frac{x+9}{2}$ và $\frac{x+9}{2} > x > \frac{x-4}{2}$.

3.9/ TOÀN PHẦN HÓA MỘT THỨ TỰ BÁN PHẦN (SẮP XẾP TOPO):

Cho $(S, \prec)$ với S *hữu hạn* ($|S| = n$) và $\prec$ là *thứ tự bán phần* trên S.
Ta muốn xây dựng *một thứ tự toàn phần* $\prec^*$ trên S *nới rộng* thứ tự bán phần $\prec$.
(nghĩa là $\forall x, y \in S, x \prec y \Rightarrow x \prec^* y$).
Quá trình xây dựng thứ tự toàn phần $\prec^*$ trên S gọi là *một sự sắp xếp topo* $(S, \prec)$.

a) Thuật toán dựa trên *các phần tử tối tiểu*:
Chọn phần tử tối tiểu tùy ý a_1 của S và đặt $S_1 = S \setminus \{ a_1 \}$.
$\forall j \in \{ 2, 3, \ldots . n-1 \}$, chọn phần tử tối tiểu tùy ý a_j của S_{j-1} và đặt
$S_j = S_{j-1} \setminus \{ a_j \}$. Ta có $|S_{n-1}| = 1$ và viết $S_{n-1} = \{ a \}$. Chọn $a_n = a$.
Sắp thứ tự $a_1 \prec^* a_2 \prec^* a_3 \prec^* \ldots \prec^* a_{n-2} \prec^* a_{n-1} \prec^* a_n$.
Biểu đồ Hasse của $(S, \prec^*)$ là $a_1 \to a_2 \to a_3 \to \ldots \to a_{n-2} \to a_{n-1} \to a_n$.
Ta có $\prec^*$ là một thứ tự toàn phần trên S nới rộng thứ tự bán phần $\prec$.

b) Thuật toán dựa trên *các phần tử tối đại*: hoàn toàn tương tự như thuật toán dựa trên các phần tử tối tiểu nhưng ta chọn các phần tử tối đại (thay vì tối tiểu) và sắp theo thứ tự ngược lại $a_n \prec^* a_{n-1} \prec^* a_{n-2} \prec^* \ldots \prec^* a_3 \prec^* a_2 \prec^* a_1$.
Biểu đồ Hasse của $(S, \prec^*)$ là $a_n \to a_{n-1} \to a_{n-2} \to \ldots \to a_3 \to a_2 \to a_1$.
Thứ tự toàn phần $\prec^*$ trên S *không duy nhất* do việc chọn tùy ý các phần tử tối tiểu (hoặc tối đại) trong thuật toán.

Ví dụ: S = {Văn (V), Sử (Su), Địa (Đ), Toán (T), Lý (L), Hóa (H), Sinh (Si), Anh (A)}
Ký hiệu $x \prec y$ được hiểu là môn x thi trước môn y. Ta muốn sắp một lịch thi cho 8 môn học trong S sao cho $H \prec V, V \prec T, T \prec A, V \prec Si, Đ \prec Si$ và $Si \prec Su$ (môn Lý thì sắp tùy ý). Hãy vẽ biểu đồ Hasse cho $(S, \prec)$ rồi sắp xếp topo nó để có thứ tự toàn phần $(S, \prec^*)$ phục vụ cho việc sắp lịch thi 8 môn học. Biểu đồ Hasse của $(S, \prec)$ là

$$\begin{array}{lll} H \to V \to T \to A & & \\ \downarrow & & \bullet\ L \\ Đ \to Si \to Su & & \end{array}$$

Cách 1: Với thứ tự $\prec$, lần lượt chọn các phần tử tối tiểu Đ, H, V, Si, L, Su, T, A của các tập hợp S, $S_1 = S \setminus \{Đ\}$, $S_2 = S_1 \setminus \{H\}$, $S_3 = S_2 \setminus \{V\}$, $S_4 = S_3 \setminus \{Si\}$, $S_5 = S_4 \setminus \{L\}$, $S_6 = S_5 \setminus \{Su\}$, $S_7 = S_6 \setminus \{T\}$. ta có thứ tự toàn phần $\prec^*$ trên S là
$Đ \prec^* H \prec^* V \prec^* Si \prec^* L \prec^* Su \prec^* T \prec^* A$.
Biểu đồ Hasse của $(S, \prec^*)$ là $Đ \to H \to V \to Si \to L \to Su \to T \to A$.

Cách 2: Với thứ tự $\prec$, lần lượt chọn các phần tử tối đại L, A, Su, Si, T, V, Đ, H của các tập hợp S, $S_1 = S \setminus \{L\}$, $S_2 = S_1 \setminus \{A\}$, $S_3 = S_2 \setminus \{Su\}$, $S_4 = S_3 \setminus \{Si\}$, $S_5 = S_4 \setminus \{T\}$, $S_6 = S_5 \setminus \{V\}$, $S_7 = S_6 \setminus \{Đ\}$. ta có thứ tự toàn phần $\prec^*$ trên S là
$H \prec^* Đ \prec^* V \prec^* T \prec^* Si \prec^* Su \prec^* A \prec^* L$.
Biểu đồ Hasse của $(S, \prec^*)$ là $H \to Đ \to V \to T \to Si \to Su \to A \to L$.

3.10/ THỨ TỰ TỪ ĐIỂN:

Cho $(S, \prec)$ với S hữu hạn và $\prec$ là thứ tự toàn phần trên S. Mỗi phần tử của S được gọi là một " ký tự ".

Đặt $\prod$ = Tập hợp tất cả các chuỗi " ký tự " được thành lập từ S, nghĩa là $\prod = \{ \alpha = a_1a_2 \ldots a_m \mid m$ nguyên ≥ 1 và $a_1, a_2, \ldots, a_m \in S \}$ và ta có $S \subset \prod$.

Ta muốn xây dựng *một thứ tự toàn phần* $\prec^*$ trên $\prod$ *nới rộng thứ tự* $\prec$ trên S.

$\forall \alpha = a_1a_2 \ldots a_m, \beta = b_1b_2 \ldots b_n \in \prod$, ta sắp $\alpha \prec^* \beta$ nếu α và β thỏa một trong các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m \leq n$ và $a_i = b_i$ $(1 \leq i \leq m)$, nghĩa là α là *một đoạn đầu* của β.

Trường hợp 2 : $a_1 \prec b_1$ và $a_1 \neq b_1$ (α và β *có sự khác biệt ở ngay* " *ký tự* " *đầu*).

Trường hợp 3 : $p = \min\{m, n\} \geq 2$ và $\exists k \in \{1, \ldots, p-1\}$ sao cho $a_i = b_i$ $(1 \leq i \leq k)$, $a_{k+1} \prec b_{k+1}$ và $a_{k+1} \neq b_{k+1}$ (α và β *giống nhau ở* k " *ký tự* " *đầu tiên* và *có sự* khác biệt ở " *ký tự* " *thứ* $k + 1$).

Trường hợp 2 có thể xem như tương tự với trường hợp 3 ứng với $k = 0$.

Thứ tự toàn phần $\prec^*$ gọi là *thứ tự từ điển* trên $\prod$ nới rộng thứ tự $\prec$ trên S.

Ví dụ:

a) $S = \{ 0, 1, 2, \ldots, 7, 8, 9 \}$ với thứ tự toàn phần tự nhiên $0 < 1 < 2 < \ldots < 8 < 9$.
$\prod$ = Tập hợp tất cả các dãy số được thành lập từ S. Ta có thứ tự toàn phần $\prec^*$ được xây dựng trên $\prod$ gọi là thứ tự từ điển.
Chẳng hạn như $37952 \prec^* 37952041$ (trường hợp 1),
$6589617 \prec^* 9109$ (trường hợp 2), $543018 \prec^* 543092$ (trường hợp 3 ứng với $k = 4$)

b) $T = \{ a, b, c, \ldots, x, y, z \}$ với thứ tự toàn phần tự nhiên $a < b < c < \ldots < y < z$.
$\prod$ = Tập hợp tất cả các từ (có nghĩa trong tiếng Anh) được thành lập từ S. Ta có thứ tự toàn phần $\prec^*$ được xây dựng trên $\prod$ gọi là thứ tự từ điển.
Chẳng hạn như home $\prec^*$ homework (trường hợp 1),
comedy $\prec^*$ nature (trường hợp 2), architect $\prec^*$ artist (trường hợp 3 ứng với $k = 2$)

IV. QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG:

4.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp $S \neq \varnothing$.

a) $\Re$ là *một quan hệ tương đương* trên S nếu $\Re$ phản xạ, đối xứng và truyền trên S.

b) Ta dùng ký hiệu $\sim$ để thể hiện *một quan hệ tương đương tổng quát*.
Ký hiệu $(S,\sim)$ được hiểu là trên tập hợp S có *quan hệ tương đương* $\sim$.
$\forall x,y \in S$, nếu $x \sim y$ thì ta nói một cách hình thức rằng " x *tương đương với* y "

c) Nếu $\Re$ là một *quan hệ tương đương* trên S và $\varnothing \neq T \subset S$ thì $\Re$ cũng là một *quan hệ tương đương* trên T.

Ví dụ:

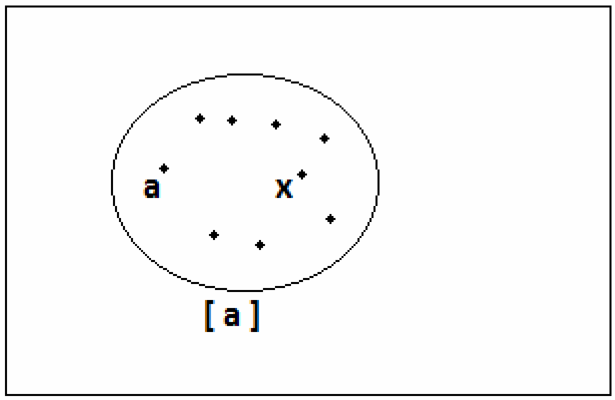
a) S = Tập hợp mọi người trên trái đất.

$$\forall x, y \in S, \text{ đặt } x \sim y \Leftrightarrow x \text{ cùng tuổi với (ctv) } y$$

Ta có $\sim$ là một quan hệ tương đương trên S. Thật vậy,
$\sim$ phản xạ ($\forall x \in S$, x ctv x), $\sim$ đối xứng ($\forall x, y \in S$, x ctv y $\Rightarrow$ y ctv x),
$\sim$ truyền [$\forall x, y, z \in S$, (x ctv **y** và **y** ctv z) $\Rightarrow$ x ctv z].

b) $S = \mathbf{R}$ và hàm số tùy ý $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. $\forall x, y \in S$, đặt $x \,\Re\, y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$
Ta có $\Re$ là một quan hệ tương đương trên S vì $\Re$ phản xạ [$\forall x \in S, f(x) = f(x)$],
$\Re$ đối xứng ($\forall x, y \in S$, $f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x)$] và
$\Re$ truyền [$\forall x, y, z \in S$, { $f(x) = f(\mathbf{y})$ và $f(\mathbf{y}) = f(z)$ } $\Rightarrow f(x) = f(z)$].

4.2/ <u>LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG CỦA MỘT PHẦN TỬ:</u> Cho $(S,\sim)$ và $a \in S$.
Đặt $\overline{a} = \{ x \in S \mid x \sim a \} = \{ a, \ldots \}$ (vì $a \sim a$ do tính phản xạ của quan hệ $\sim$).
Ta có $\varnothing \neq \overline{a} \subset S$ và ta nói $\overline{a}$ là *lớp tương đương của* a (*xác định bởi quan hệ tương đương* $\sim$ trên S). Ta cũng có thể dùng ký hiệu [a] thay cho $\overline{a}$.



(S,~)

<u>Ví dụ:</u>

a) S = {An[18], Lý[21], Tú[18], Hà[19], Vũ[20], Hy[19], Sĩ[18], Sử[19], Tá[20], Vy[18]}(số nhỏ ở trên là tuổi)
$\forall x, y \in S$, đặt $x \sim y \Leftrightarrow$ x cùng tuổi với y.
Ta có $\sim$ là một quan hệ tương đương trên S [xem **Ví dụ (4.1)**]. Lúc đó
[**An**] = { $x \in S \mid x \sim$ **An** } = { **An**, Tú, Sĩ, Vy }, [**Lý**] = { $x \in S \mid x \sim$ **Lý** } = { **Lý** }
[**Hy**] = { $x \in S \mid x \sim$ **Hy** } = { **Hy**, Hà, Sử }, [**Tá**] = { $x \in S \mid x \sim$ **Tá** } = { **Tá**, Vũ }

b) $S = \mathbf{R}$. $\forall x, y \in S$, đặt $x \,\Re\, y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ với $f(t) = t^3 - 3t$ $\forall t \in \mathbf{R}$.
Ta có $\Re$ là một quan hệ tương đương trên S [xem **Ví dụ (4.1)**].
Ta tìm $\overline{0}, \overline{2}, \overline{-5}$ và $\overline{a}$ với $a \in \mathbf{R}$.

$\overline{0} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x \,\Re\, \mathbf{0} \} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 3x = 0 \} = \{ \mathbf{0}, \sqrt{3}, -\sqrt{3} \}$

$\overline{2} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x \,\Re\, \mathbf{2} \} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 3x - 2 = 0 \} =$
$= \{ x \in \mathbf{R} \mid (x+1)^2(x-2) = 0 \} = \{ \mathbf{2}, -1 \}$

$\overline{-5} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x \,\Re\, (\mathbf{-5}) \} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 3x + 110 = 0 \} =$
$= \{ x \in \mathbf{R} \mid (x+5)(x^2 - 5x + 22) = 0 \} = \{ \mathbf{-5} \}$

$\overline{a} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x \,\Re\, \mathbf{a} \} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 3x = a^3 - 3a \} =$
$= \{ x \in \mathbf{R} \mid (x-a)(x^2 + ax + a^2 - 3) = 0 \}$. Như vậy $\overline{a}$ có từ 1 đến 3 phần tử.

Đặt $g(x) = x^2 + ax + a^2 - 3$ có $\Delta = 3(4 - a^2)$ và $g(a) = 3(a-1)(a+1)$. Ta có
$|\,\overline{a}\,| = 3 \Leftrightarrow [\,\Delta > 0$ và $g(a) \neq 0\,] \Leftrightarrow (1 \neq |a| < 2) \Leftrightarrow a \in (-2,-1) \cup (-1,1) \cup (1,2)$

Lúc đó $\overline{a} = \left\{ \mathbf{a}, \dfrac{-a + \sqrt{3(4-a^2)}}{2}, \dfrac{-a - \sqrt{3(4-a^2)}}{2} \right\}$.

$|\,\overline{a}\,| = 1 \;\Leftrightarrow \{\, \Delta < 0$ hay $[\, \Delta = 0$ và $g(a) = 0\,]\,\} \Leftrightarrow [\, a^2 > 4$ hay $(\, a^2 = 4$ và $a^2 = 1)\,]$

$\Leftrightarrow\; a^2 > 4 \;\Leftrightarrow\; a \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$. Lúc đó $\overline{a} = \{\, \mathbf{a} \,\}$.

$|\,\overline{a}\,| = 2 \;\Leftrightarrow \{\, [\, \Delta > 0$ và $g(a) = 0\,]$ hay $[\, \Delta = 0$ và $g(a) \neq 0\,]\,\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; [\,(\, a^2 < 4$ và $a^2 = 1)$ hay $(\, a^2 = 4$ và $a^2 \neq 1)\,] \;\Leftrightarrow\; a \in \{\, -2, -1, 1, 2 \,\}$

Lúc đó $\overline{-2} = \overline{1} = \{\, -2, 1 \,\}$ và $\overline{2} = \overline{-1} = \{\, -1, 2 \,\}$.

$(S, \Re)$ được phân hoạch thành vô hạn lớp tương đương rời nhau từng đôi một và mỗi lớp tương đương có từ 1 đến 3 phần tử.

4.3/ <u>SỰ PHÂN HOẠCH THÀNH CÁC LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG:</u> Cho $(S,\sim)$.

Quan hệ tương đương $\sim$ sẽ phân hoạch S thành *các lớp tương đương rời nhau từng đôi một* và mỗi lớp tương đương đều có dạng $\overline{a}$ (với a nào đó thuộc S).

$\forall x \in \overline{a}$, ta có $\overline{x} = \overline{a}$ và ta nói x là *một phần tử đại diện của lớp tương đương* $\overline{a}$.

Hai phần tử (của S) có quan hệ $\sim$ sẽ thuộc cùng một lớp tương đương.

Hai phần tử (của S) không có quan hệ $\sim$ sẽ thuộc hai lớp tương đương rời nhau.

$\forall x, y \in S$, ta có

$x \sim y \;\Leftrightarrow\; \overline{x} = \overline{y} \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{y} \;\Leftrightarrow\; y \in \overline{x} \;\Leftrightarrow\; \overline{x} \cap \overline{y} \neq \varnothing$ (không rời = trùng nhau).

$x \not\sim y \;\Leftrightarrow\; \overline{x} \neq \overline{y} \;\Leftrightarrow\; x \notin \overline{y} \;\Leftrightarrow\; y \notin \overline{x} \;\Leftrightarrow\; \overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$ (rời nhau = không trùng).

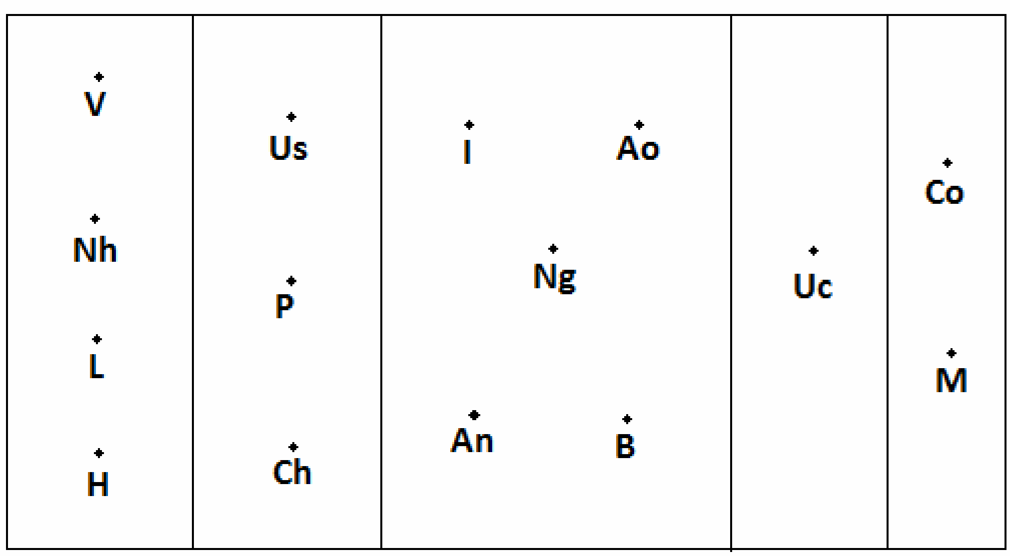
<u>Ví dụ:</u>

a) $S = \{$ Việt Nam (V), Hoa Kỳ (Us), Ý (I), Nhật (Nh), Áo (Ao), Úc (Uc), Peru (P), Nga (Ng), Congo (Co), Lào (L), Anh (An), Maroc (M), Hàn (H), Chile (Ch), Bỉ (B) $\}$

$\forall x, y \in S$, đặt $x \sim y \Leftrightarrow$ nước x cùng châu lục với nước y

$\sim$ là một quan hệ tương đương trên S (kiểm tra tương tự như quan hệ cùng tuổi với)

Ta có các lớp tương đương như sau:



$(S, \sim)$

$\overline{V} = \{\, x \in S \mid x \sim \mathbf{V} \,\} = \{\, \mathbf{V}, Nh, L, H \,\} = \overline{Nh} = \overline{L} = \overline{H}$

$\overline{Us} = \{\, x \in S \mid x \sim \mathbf{Us} \,\} = \{\, \mathbf{Us}, P, Ch \,\} = \overline{P} = \overline{Ch}$

$\overline{I} = \{\, x \in S \mid x \sim \mathbf{I} \,\} = \{\, \mathbf{I}, Ao, Ng, An, B \,\} = \overline{Ao} = \overline{Ng} = \overline{An} = \overline{B}$

$\overline{Uc} = \{\, x \in S \mid x \sim \mathbf{Uc} \,\} = \{\, \mathbf{Uc} \,\}$ và $\overline{Co} = \{\, x \in S \mid x \sim \mathbf{Co} \,\} = \{\, \mathbf{Co}, M \,\} = \overline{M}$

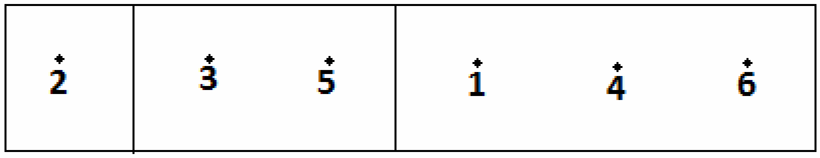
$S = \overline{V} \cup \overline{Us} \cup \overline{I} \cup \overline{Uc} \cup \overline{Co} = \overline{Nh} \cup \overline{P} \cup \overline{Ao} \cup \overline{Uc} \cup \overline{M} = \overline{L} \cup \overline{Ch} \cup \overline{Ng} \cup \overline{Uc} \cup \overline{M}$

S được phân hoạch thành 5 lớp tương đương rời nhau từng đôi một. Ta có

$V \sim Nh \Leftrightarrow \overline{V} = \overline{Nh} \Leftrightarrow V \in \overline{Nh} \Leftrightarrow Nh \in \overline{V} \Leftrightarrow \overline{V} \cap \overline{Nh} \neq \emptyset$

$Ng \not\sim P \Leftrightarrow \overline{Ng} \neq \overline{P} \Leftrightarrow Ng \notin \overline{P} \Leftrightarrow P \notin \overline{Ng} \Leftrightarrow \overline{Ng} \cap \overline{P} = \emptyset$

b) $\Re$ là một quan hệ tương đương trên $T = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ sao cho T được phân hoạch thành 3 lớp tương đương rời nhau từng đôi một là $T = \{2\} \cup \{3, 5\} \cup \{1, 4, 6\}$.



(T, $\Re$)

Suy ra $\overline{2} = \{ 2 \}$, $\overline{3} = \overline{5} = \{ 3, 5 \}$, $\overline{1} = \overline{4} = \overline{6} = \{ 1, 4, 6 \}$, $T = \overline{1} \cup \overline{2} \cup \overline{3}$ và

$\Re = \{(2,2), (3,3), (5,5), (3,5), (5,3), (1,1), (4,4), (6,6), (1,4), (4,1), (1,6), (6,1), (4,6), (6,4)\}$

Ta có $1 \sim 4 \Leftrightarrow \overline{1} = \overline{4} \Leftrightarrow 1 \in \overline{4} \Leftrightarrow 4 \in \overline{1} \Leftrightarrow \overline{1} \cap \overline{4} \neq \emptyset$

$2 \not\sim 3 \Leftrightarrow \overline{2} \neq \overline{3} \Leftrightarrow 2 \notin \overline{3} \Leftrightarrow 3 \notin \overline{2} \Leftrightarrow \overline{2} \cap \overline{3} = \emptyset$

4.4/ TẬP HỢP THƯƠNG XÁC ĐỊNH BỞI QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG:

Cho $(S, \sim)$.

Đặt $S/\sim$ là tập hợp tất cả các lớp tương đương (xác định bởi quan hệ $\sim$ trên S), nghĩa là $S/\sim \, = \{\overline{x} \mid x \in S\}$. Như vậy $\forall x \in S$, ta có $\overline{x} \subset S$ và $\overline{x} \in S/\sim$. Ta nói $S/\sim$ là *tập hợp thương* của S *xác định bởi quan hệ tương đương* $\sim$.

Ví dụ: Xét lại các quan hệ tương đương $(S, \sim)$ và $(T, \Re)$ trong **Ví dụ (4.3)**. Ta có

$(S/\sim) = \{ \overline{x} \mid x \in S \} = \{ \overline{V}, \overline{Us}, \overline{I}, \overline{Uc}, \overline{Co} \} = \{ \overline{Nh}, \overline{P}, \overline{Ao}, \overline{Uc}, \overline{M} \} = \{ \overline{L}, \overline{Ch}, \overline{Ng}, \overline{Uc}, \overline{M} \}$

$(T/ \Re) = \{ \overline{x} \mid x \in T \} = \{ \overline{1}, \overline{2}, \overline{3} \} = \{ \overline{4}, \overline{2}, \overline{5} \} = \{ \overline{6}, \overline{2}, \overline{5} \}$

V. QUAN HỆ ĐỒNG DƯ TRÊN Z:

Cho số nguyên $n \geq 1$.

5.1/ TẬP HỢP $\mathbf{Z_n}$:

Một số nguyên khi chia (Euclide) cho n sẽ có số dư là 0, 1, 2, ..., (n – 1).

$\forall a, b \in \mathbf{Z}$, đặt $a \sim b \Leftrightarrow$ a và b có cùng số dư khi chia cho n

$\Leftrightarrow n \mid (a - b) \Leftrightarrow n \,\vdots\, (a - b) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, a = b + nk$

Quan hệ $\sim$ là một quan hệ tương đương trên **Z** (kiểm chứng dễ dàng) và $\sim$ được gọi là *quan hệ đồng dư modulo n* trên **Z**. Ta cũng viết $a \sim b$ là $a \equiv b \pmod{n}$.

Đặt $\mathbf{Z_n} = \mathbf{Z}/\sim \, = \{ \overline{k} \mid k \in \mathbf{Z} \}$ [liệt kê *dạng tổng quát có trùng lặp*]

$= \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1} \}$ (*) [liệt kê *dạng chuẩn không trùng lặp*]

trong đó $\overline{0} = \{ k \in \mathbf{Z} \mid k$ chia cho n dư $0 \} = \{ nt \mid t \in \mathbf{Z} \} = n\mathbf{Z}$ và

$\overline{r} = \{ k \in \mathbf{Z} \mid k$ chia cho n dư $r \} = \{ nt + r \mid t \in \mathbf{Z} \} = n\mathbf{Z} + r \ (1 \leq r \leq n - 1)$

Ta có $\mathbf{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \ldots \cup \overline{n-1}$: **Z** được phân hoạch thành n lớp tương đương rời nhau từng đôi một và mỗi lớp có vô hạn phần tử .

$\forall k \in \mathbf{Z}$, ta có thể viết $\overline{k}$ về dạng chuẩn (*) như sau :

Chia Euclide $k = qn + r$ với $0 \leq r < |n| = n$ thì $\overline{k} = \overline{r}$ với $0 \leq r \leq n - 1$.

Ví dụ: $\mathbf{Z}_5 = \{ \overline{k} \mid k \in \mathbf{Z} \}$ (có trùng lặp) $= \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4} \}$ (không trùng lặp) trong đó

$\overline{0} = \{ 5t \mid t \in \mathbf{Z} \} = \{ \dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots \}$ (các số chia hết cho 5) $= 5\mathbf{Z}$

$\overline{1} = \{ 5t + 1 \mid t \in \mathbf{Z} \} = \{ \dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots \}$ (các số chia 5 dư 1) $= 5\mathbf{Z} + 1$

$\overline{2} = \{ 5t + 2 \mid t \in \mathbf{Z} \} = \{ \dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots \}$ (các số chia 5 dư 2) $= 5\mathbf{Z} + 2$

$\overline{3} = \{ 5t + 3 \mid t \in \mathbf{Z} \} = \{ \dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots \}$ (các số chia 5 dư 3) $= 5\mathbf{Z} + 3$

$\overline{4} = \{ 5t + 4 \mid t \in \mathbf{Z} \} = \{ \dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots \}$ (các số chia 5 dư 4) $= 5\mathbf{Z} + 4$

Ta có $\mathbf{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \overline{3} \cup \overline{4}$ ($\mathbf{Z}$ được phân hoạch thành 5 lớp tương đương rời nhau từng đôi một và mỗi lớp có vô hạn phần tử).

Ta qui đổi các phần tử $\overline{245}$, $\overline{-716}$ và $\overline{593}$ trong $\mathbf{Z}_5$ về dạng chuẩn:

Chia Euclide cho 5 : $245 = 81(5) + 0$, $-716 = -144(5) + 4$ và $593 = 118(5) + 3$

Ta có $\overline{245} = \overline{0}$, $\overline{-716} = \overline{4}$ và $\overline{593} = \overline{3}$.

5.2/ <u>CÁC PHÉP TOÁN TRÊN $\mathbf{Z_n}$:</u> Cho $\mathbf{Z}_n = \{ \overline{k} \mid k \in \mathbf{Z} \}$(dạng tổng quát).

Trên $\mathbf{Z}_n$, ta có thể định nghĩa các phép toán +, − và . *một cách tự nhiên* như sau :

$\forall \overline{u}, \overline{v} \in \mathbf{Z}_n$ (u, v $\in \mathbf{Z}$), đặt $\overline{u} \pm \overline{v} = \overline{u \pm v} \in \mathbf{Z}_n$ và $\overline{u} . \overline{v} = \overline{u.v} \in \mathbf{Z}_n$.

Ví dụ: Ta thực hiện các phép tính sau trong $\mathbf{Z}_{12}$:

$\overline{725} + \overline{548} = \overline{725 + 548} = \overline{1273} = \overline{1}$ $\qquad$ $\overline{548} - \overline{725} = \overline{548 - 725} = \overline{-177} = \overline{3}$

$\overline{692} . \overline{-473} = \overline{692(-473)} = \overline{-327316} = \overline{8}$ $\qquad$ $\overline{356} . \overline{885} = \overline{356(855)} = \overline{304380} = \overline{0}$

5.3/ <u>TẬP HỢP U($\mathbf{Z_n}$):</u> Cho $\mathbf{Z}_n = \{ \overline{k} \mid k \in \mathbf{Z} \}$(dạng tổng quát).

Đặt $U(\mathbf{Z}_n) = \{ \overline{k} \in \mathbf{Z}_n \mid \exists \overline{k'} \in \mathbf{Z}_n , \overline{k} . \overline{k'} = \overline{1} \} = \{ \overline{1}, \overline{n-1}, \dots \}$. Ta có $\overline{0} \notin U(\mathbf{Z}_n)$.

$\forall \overline{k} \in U(\mathbf{Z}_n)$, ta nói $\overline{k}$ là *một phần tử khả nghịch* trong $\mathbf{Z}_n$ và phần tử duy nhất $\overline{k'} \in \mathbf{Z}_n$ thỏa $\overline{k} . \overline{k'} = \overline{1}$ gọi là *phần tử nghịch đảo của* $\overline{k}$ và ta ký hiệu $\overline{k'} = \overline{k}^{-1}$.

Dĩ nhiên $\overline{k'}$ cũng khả nghịch trong $\mathbf{Z}_n$ ($\overline{k'} \in U(\mathbf{Z}_n)$) và $\overline{k'}^{-1} = \overline{k}$.

Như vậy $U(\mathbf{Z}_n)$ là *tập hợp các phần tử khả nghịch* trong $\mathbf{Z}_n$.

Ví dụ:

a) $U(\mathbf{Z}_8) = \{ \overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7} \}$

($\overline{1} . \overline{1} = \overline{3} . \overline{3} = \overline{5} . \overline{5} = \overline{7} . \overline{7} = \overline{1}$: mỗi phần tử của $U(\mathbf{Z}_8)$ là nghịch đảo của chính nó).

b) $U(\mathbf{Z}_9) = \{ \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8} \}$ (do $\overline{1} . \overline{1} = \overline{2} . \overline{5} = \overline{4} . \overline{7} = \overline{8} . \overline{8} = \overline{1}$ nên

$\overline{1}^{-1} = \overline{1}$, $\overline{2}^{-1} = \overline{5}$, $\overline{5}^{-1} = \overline{2}$, $\overline{4}^{-1} = \overline{7}$, $\overline{7}^{-1} = \overline{4}$ và $\overline{8}^{-1} = \overline{8}$)

5.4/ <u>MỆNH ĐỀ:</u>

a) $U(\mathbf{Z}_n) = \{ \overline{k} \in \mathbf{Z}_n \mid (k, n) = 1 \} = \{ \overline{k} \in \mathbf{Z}_n \mid 1 \leq k \leq n - 1$ và $(k, n) = 1 \}$.

b) Nếu p là *một số nguyên tố* ≥ 2 thì $U(\mathbf{Z}_p) = \mathbf{Z}_p \setminus \{ \overline{0} \}$.

c) $\forall \overline{k} \in U(\mathbf{Z}_n)$, chọn r, s $\in \mathbf{Z}$ thỏa $rk + sn = 1$ thì $\overline{k}^{-1} = \overline{r}$.

Ví dụ:

a) $U(\mathbf{Z}_{15}) = \{ \overline{k} \in \mathbf{Z}_{15} \mid 1 \leq k \leq 14$ và $(k, 15) = 1 \} = \{ \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14} \}$.

b) $U(\mathbf{Z}_{11}) = \mathbf{Z}_{11} \setminus \{ \overline{0} \} = \{ \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots, \overline{9}, \overline{10} \}$

(ta có $\overline{1} . \overline{1} = \overline{2} . \overline{6} = \overline{3} . \overline{4} = \overline{5} . \overline{9} = \overline{7} . \overline{8} = \overline{10} . \overline{10} = \overline{1}$)

c) Ta có $(31)21 + (-13)50 = 1$ nên $(21, 50) = 1$. Suy ra $\overline{21} \in U(\mathbf{Z}_{50})$ và $\overline{21}^{-1} = \overline{31}$.

5.5/ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TRÊN $\mathbf{Z_n}$:

Cho $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbf{Z_n}$. Ta tìm $\overline{x} \in \mathbf{Z_n}$ thỏa $\overline{a}.\overline{x} = \overline{b}$ (1).

a) Nếu $\overline{a} = \overline{0} \neq \overline{b}$ thì phương trình *vô nghiệm*.

b) Nếu $\overline{a} = \overline{0} = \overline{b}$ thì phương trình *có n nghiệm* là $\overline{x}$ tùy ý thuộc $\mathbf{Z_n}$.

c) Nếu $\overline{a} \in U(\mathbf{Z_n})$ thì phương trình *có nghiệm duy nhất* là $\overline{x} = \overline{a}^{-1}\overline{b}$.

d) Khi $\overline{a} \neq \overline{0}$ và $\overline{a} \notin U(\mathbf{Z_n})$: Đặt $d = (a, n) \geq 2$, $a = a'd$ và $n = n'd$.

* Nếu d không chia hết b thì $n = n'd$ không chia hết $n'b$ và $\overline{n'}.\overline{b} \neq \overline{0}$.

Lúc đó

$\overline{a}.\overline{x} = \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a'}.\overline{d}.\overline{x} = \overline{b} \Rightarrow \overline{a'}.\overline{n'}.\overline{d}.\overline{x} = \overline{n'}.\overline{b} \Rightarrow \overline{a'}.\overline{n}.\overline{x} = \overline{0}.\overline{x} = \overline{n'}.\overline{b} \neq \overline{0}$: phương trình *vô nghiệm*.

* Nếu $d \mid b$: viết $b = b'd$. Phương trình (1) trong $\mathbf{Z_n}$ là $\overline{d}.\overline{a'}.\overline{x} = \overline{d}.\overline{b'}$

Phương trình này tương ứng với phương trình $\overline{a'}\,\overline{X} = \overline{b'}$ (2) trong $\mathbf{Z_{n'}}$.

Để ý $(a', n') = 1$ nên $\overline{a'} \in U(\mathbf{Z_{n'}})$ và phương trình (2) có nghiệm duy nhất $\overline{X} = \overline{a'}^{-1}.\overline{b'}$ trong $\mathbf{Z_{n'}}$. Đặt $\overline{a'}^{-1}.\overline{b'} = \overline{c} \in \mathbf{Z_{n'}}$ thì phương trình (1) *có đúng d nghiệm* trong $\mathbf{Z_n}$ là $\overline{x} = \overline{c + jn'}$ $(0 \leq j \leq d - 1)$.

Ví dụ:

a)Trong $\mathbf{Z_6}$: Phương trình $\overline{18}.\overline{x} = \overline{47} \Leftrightarrow \overline{0}.\overline{x} = \overline{5} \neq \overline{0}$ vô nghiệm.

b) Trong $\mathbf{Z_7}$: Phương trình $\overline{35}.\overline{x} = \overline{-56} \Leftrightarrow \overline{0}.\overline{x} = \overline{0}$ có 7 nghiệm ($\overline{x}$ tùy ý $\in \mathbf{Z_7}$).

c) Trong $\mathbf{Z_9}$: Phương trình $\overline{22}.\overline{x} = \overline{-13} \Leftrightarrow \overline{4}.\overline{x} = \overline{5} \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{4}^{-1}.\overline{5} = \overline{7}.\overline{5} = \overline{35} = \overline{8}$.

d) Trong $\mathbf{Z_{18}}$: Phương trình $\overline{12}.\overline{x} = \overline{14}$ có $\overline{12} \notin U(\mathbf{Z_{18}})$, $d = (12, 18) = 6$ không chia hết 14 và $18 = 3(6)$. Ta có $\overline{12}.\overline{x} = \overline{14} \Rightarrow \overline{3}.\overline{12}.\overline{x} = \overline{3}.\overline{14} \Rightarrow \overline{0}.\overline{x} = \overline{42} = \overline{6} \neq \overline{0}$: phương trình vô nghiệm.

e) Phương trình $\overline{33}.\overline{x} = \overline{45}$ (trong $\mathbf{Z_{57}}$) (1) có $\overline{33} \notin U(\mathbf{Z_{57}})$ do $(33, 57) = 3$. Do $3 \mid 45$, $33 = 11(3)$ và $45 = 15(3)$ nên (1) tương ứng với phương trình $\overline{11}.\overline{X} = \overline{15}$ (trong $\mathbf{Z_{19}}$) (2). Do $7(11) - 4(19) = 1$ nên $\overline{11} \in U(\mathbf{Z_{19}})$ và $\overline{11}^{-1} = \overline{7}$. Phương trình (2) cho $\overline{X} = \overline{11}^{-1}.\overline{15} = \overline{7}.\overline{15} = \overline{105} = \overline{10}$ (trong $\mathbf{Z_{19}}$). Suy ra (1) có đúng 3 nghiệm trong $\mathbf{Z_{57}}$ là $x = \overline{10}$, $x = \overline{10+19} = \overline{29}$ và $x = \overline{10+2(19)} = \overline{48}$.
