Câu 1. Cho hàm số $f(x, y) = x^3y$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A) Điểm $(0, 0)$ là điểm dừng.

B) Điểm $(0, 0)$ không phải là điểm dừng.

C) Điểm $(0, 0)$ là điểm cực tiểu.

D) Điểm $(0, 0)$ là điểm cực đại.

Đáp án: A

Giải

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} f'_x = 3x^2y = 0 \\ f'_y = x^3 = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \\ x = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy điểm $(0,0)$ là điểm dừng.

Câu 2. Hàm số $f(x, y) = x^3 - 3xy + 3xy^2$ có bao nhiêu điểm cực trị

A) 2

B) 1

C) 3

D) 0

Đáp án: A

Giải

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y + 3y^2 = 0 \, (1) \\ f'_y = -3x + 6xy = 0 \, (2) \end{cases}$

Từ (2) ta có $x = 0$ hoặc $y = \dfrac{1}{2}$

• Với $x = 0 <=> (1): -3y + 3y^2 = 0 <=> \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array}\right.$

=> Có 2 điểm dừng $M_1(0,0), M_2(0,1)$

• Với $y = \frac{1}{2} <=> (1): 3x^2 = \frac{3}{4} <=> \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

=> Có 2 điểm dừng $M_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), M_4\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

• Đặt $\begin{cases} A = f''_{xx} = 6x \\ B = f''_{xy} = -3 + 6y \\ C = f''_{yy} = 6x \end{cases}$

⊕ Tại $M_1(0,0) => \begin{cases} A = 0, B = -3, C = 0 \\ \Delta = AC - B^2 = -9 < 0 \end{cases} => M_1(0,0)$ không phải cực trị.

⊕ Tại $M_2(0,1) => \begin{cases} A = 0, B = 3, C = 0 \\ \Delta = AC - B^2 = -9 < 0 \end{cases} => M_2(0,1)$ không phải cực trị.

⊕ Tại $M_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) => \begin{cases} A = 3 > 0, B = 0, C = 3 \\ \Delta = AC - B^2 = 9 > 0 \end{cases} => M_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ là cực tiểu.

⊕ Tại $M_4\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) => \begin{cases} A = -3 < 0, B = 0, C = -3 \\ \Delta = AC - B^2 = 9 > 0 \end{cases} => M_4\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ là cực đại.

Vậy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 3. Điểm nào là điểm dừng của hàm số $f(x, y) = x + y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$?

A) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

B) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

C) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

D) Không tồn tại

Đáp án: A

Giải

Có $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Xét hàm: $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda.\varphi(x, y) = x + y + \lambda.(x^2 + y^2 - 1)$

Xét hệ phương trình : $\begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda}(1) \\ y = -\frac{1}{2\lambda}(2) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0(3) \end{cases}$

Thay $(1),(2)$ vào (3) ta có: $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0 <=> \lambda^2 = \frac{1}{2} <=> \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

• Với $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} => \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ => Điểm dừng $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

• Với $\lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ => $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ => Điểm dừng $M_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Câu 4. **Giá trị nhỏ nhất (GTNN) và Giá trị lớn nhất (GTLN) củ** $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ **trong miền** $D = [-1,1] \times [0,4]$ **là :**

1

A) 0 và 1

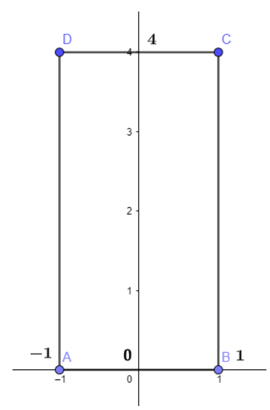
B) 1 và 65

C) 1 và 16

D) 0 và 65

Đáp án: D

Giải



• Trước hết ta tìm điểm dừng bên trong miền:

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} f'_x = 2x = 0 \\ f'_y = 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (Thỏa mãn)

=> Điểm dừng $M(0,0)$

• Biên là các cạnh của hình chữ nhật nên điểm nghi ngờ chỉ có thể là các đỉnh của hình chữ nhật $A(-1,0), B(1,0), C(1,4), D(-1,4)$. Ta có: $\begin{cases} f(M) = 0 \\ f(A) = 1 \\ f(B) = 1 \\ f(C) = 65 \\ f(D) = 65 \end{cases}$

Vậy GTNN bằng 0 và GTLN bằng 65.

Câu 5. Hàm số nào dưới đây không đạt giá trị lớn nhất?

A) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$.

B) $f(x,y) = -x^2 - 5y^2 - 2x - 3$.

C) $f(x,y) = x^2 + y^2$ trên miền hình tròn $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 \le 4y\}$.

D) $f(x,y) = 3x^2 + 6y^2 + 2xy$ trên miền hình chữ nhật $D = [1,2] \times [3,5]$.

Đáp án: A

Giải

Ta có đáp án $(A): f(x,y) = x^2 + 2y^2 \ge 0 \forall x, y \in \mathbb{R}$ nên không đạt GTLN.

Câu 6. Tính tích phân kép $I = \iint\limits_D xydxdy$, với

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1; -1 \le y \le 1\}.$$

A) 0

B) 1

C) 2

D) -1

Đáp án: A

Giải

$$I = \int_0^1 xdx \int_{-1}^1 ydy = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=1} . \frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=-1}^{y=1} = \frac{1}{2}.0 = 0$$

Câu 7. Tính $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, với D là miền phẳng hữu hạn được giới hạn bởi

$$y = 2x; \quad y = x^2.$$

A) $\frac{4}{3}$

B) $-\frac{4}{3}$

2

C) $\frac{5}{12}$

D) $-\frac{5}{12}$

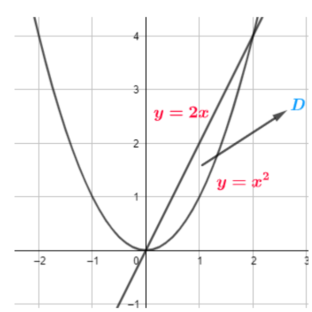
Đáp án: A

Giải

Ta có: $x^2 = 2x \iff \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \iff 0 \le x \le 2$

Khi đó ta có miền $D : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x^2 \le y \le 2x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} x\,dy = \int_0^2 x.y \Big|_{y = x^2}^{y = 2x} dx = \int_0^2 x\left(2x - x^2\right)dx = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}$$



Câu 8. Cho $I = \iint\limits_D xydxdy$, với D là miền phẳng hữu hạn được giới hạn bởi các đường $y = x - 1$ và Parabol $y^2 = 2x + 6$. Chọn đáp án đúng.

A) $I = \int\limits_{-3}^{5} dx \int\limits_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xydy$

B) $I = \int\limits_{-2}^{4} dy \int\limits_{\sqrt{2x+6}}^{x-1} xydx$

C) $I = \int\limits_{-2}^{4} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} xydx$

D) $I = \int\limits_{-3}^{5} dx \int\limits_{x-1}^{\frac{y^2}{2}-3} xydy$

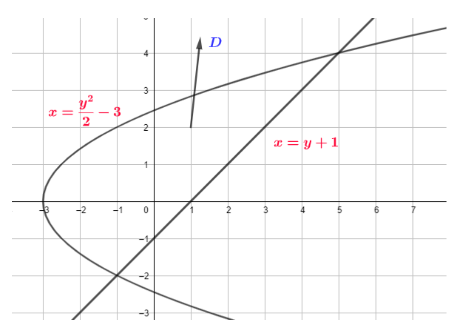
Đáp án: C

<u>Giải</u>

Ta có: $\begin{cases} x = y+1 \\ x = \dfrac{y^2}{2} - 3 \end{cases} \Leftrightarrow y+1 = \dfrac{y^2}{2} - 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow -2 \le y \le 4$

Khi đó ta có miền

$D : \begin{cases} -2 \le y \le 4 \\ \dfrac{y^2}{2} - 3 \le x \le y+1 \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_{-2}^{4} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} xydx.$



Câu 9. Cho $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+z^2}dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi Paraboloid $y = x^2 + z^2$ và mặt phẳng $y = 4$. Chọn đáp án **sai**.

A) $I = 4\iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2+z^2}dz, D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 4\}$

B) $I = \iint\limits_D dxdz \int\limits_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2+z^2}dy, D = \{(x,z) : x^2 + z^2 \le 4\}$

C) $I = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2+z^2}dz, D = \{(x,y) : -2 \le x \le 2, x^2 \le y \le 4\}$

D) $I = 2\iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2+z^2}dz, D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 4\}$

3

Đáp án: D

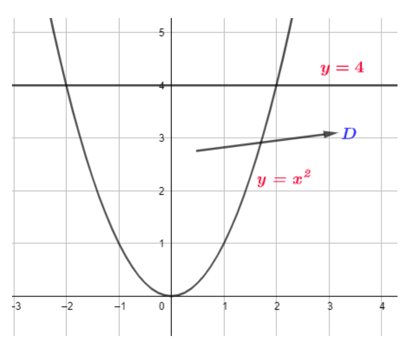
Giải

Ta có: $y = x^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = y - x^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{y-x^2} \Rightarrow -\sqrt{y-x^2} \le z \le \sqrt{y-x^2}$

Chiếu mặt phẳng xuống Oxy ta được: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ x^2 \le y \le 4 \end{cases}$

Do tính chất đối xứng nên:

$$I = 4\iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2+z^2}dz$$



Với $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 4\}$ nên đáp án **D sai.**

Câu 10. Jacobien của phép đổi biến $\begin{cases} x = 2u + v \\ y = u - v \end{cases}$ là:

A) 2

B) -2

C) 3

D) -3

Đáp án: C

Giải

Ta có : $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

Jacobien của phép biến đổi là: $|J| = 3$

Câu 11. Cho $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^6 f(x, y)dy = 12$. Tích phân $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 f(2x, 3y)dy$ bằng

A) 2

B) 72

C) 24

D) 36

Đáp án: A

Giải

Đặt $\begin{cases} 2x = u \\ 3y = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ dv = 3dy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{du}{2} \\ dy = \dfrac{dv}{3} \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 6 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 dx \int_0^2 f(2x,3y)\,dy = \int_0^2 \frac{du}{2} \int_0^6 f(u,v)\frac{dv}{3} = \frac{\int_0^2 du \int_0^6 f(u,v)\,dv}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Câu 12. Cho tích phân $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ với D giới hạn bởi các đường thẳng $x - y = 1$; $x - y = 2$; $x + y = -1$; $x + y = 0$.

Xét phép đổi biến $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$. Khi đó $(u,v) \in M$ với M là

A) $[-1;0] \times [1;2]$

B) $[1;2] \times [-1;0]$

C) $[0;2] \times [-1;1]$

D) $[-1;1] \times [0;2]$

Đáp án: A

Giải

Ta có $\begin{cases} u = -1 \\ u = 0 \\ v = 1 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le u \le 0 \\ 1 \le v \le 2 \end{cases} \Rightarrow (u,v) \in M$ với $M : [-1,0] \times [1,2]$

Câu 13. Cho tích phân

$$I = \iint\limits_D 2x dx dy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 \le 6y,\ x \ge 0\}.$$

Chọn đáp án đúng?

A) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{6\sin\varphi} 2r\cos\varphi dr.$

B) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^{6\sin\varphi} 2r^2\cos\varphi dr.$

C) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{6\sin\varphi} 2r^2\cos\varphi dr.$

D) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{6\sin\varphi} 2r\cos\varphi dr.$

Đáp án: C

Giải

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ => $|J| = r$

=> $x^2 + y^2 = r^2 \le 6r\sin\varphi$ => $0 \le r \le 6\sin\varphi$ => $\sin\varphi \ge 0$

Ta có : $x \ge 0$ => $\cos\varphi \ge 0$

Khi đó: $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ => $D \to D_1 : \begin{cases} 0 \le r \le 6\sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ => $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{6\sin\varphi} 2r^2\cos\varphi dr$

Câu 14. Cho thể tích của khối V bằng 18. Khi đó, tích phân $\iiint\limits_V 3dxdydz$ bằng

A) 54

B) 6

C) 27

D) 36

Đáp án: A

Giải

Ta có: $\iiint\limits_V 3dxdydz = 3.V = 3.18 = 54$

Câu 15. Xét tích phân $I = \iiint\limits_V z dx dy dz$, trong đó V là nửa khối cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ với $z \geq 0$. Dùng phép đổi biến trong tọa độ cầu $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ x = r\sin\varphi\sin\theta \\ x = r\cos\theta \end{cases}$ tích phân trên đưa về

A) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^3 r^3 \cos\theta \sin\theta dr$

5

B) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^3 r^3 \cos\theta \sin\theta dr$

C) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^3 r^2 \cos\theta \sin\theta dr$

D) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^3 r^3 \cos\theta \sin\theta dr$

Đáp án: B

Giải

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow |J| = r^2 \sin\theta$

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq r \leq 3$

$z \geq 0 \Rightarrow \cos\theta \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow V \to V_1 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^3 r^3 \cos\theta \sin\theta dr$

Câu 16. Diện tích S của miền phẳng D được giới hạn bởi các đường cong $x^2 + y^2 = 2x$; $y = x$ và $y = 0$ là:

A) $S = \dfrac{\pi}{4}$

B) $S = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$

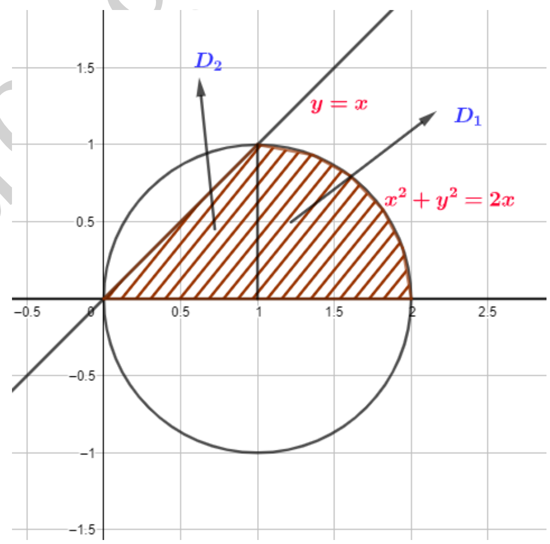
C) $S = \dfrac{1}{2}$

D) $S = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{4}$

Đáp án: B

<ins>Giải</ins>

Ta có: $S(D) = S(D_1) + S(D_2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4}$



Câu 17. Gọi V là thể tích của miền giới hạn bởi $\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ 2z = 2 + x^2 + y^2 \end{cases}$. Chọn đáp án đúng

A) $V = 3\pi$

B) $V = 2\pi$

C) $V = \frac{3}{2}\pi$

D) $V = 4\pi$

Đáp án: A

Giải

Ta có: $\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = \dfrac{2 + x^2 + y^2}{2} \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 - y^2 = \dfrac{2 + x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow D : x^2 + y^2 \le 2$

Khi đó: $V = \iint\limits_D \left| 4 - x^2 - y^2 - \left(\dfrac{2 + x^2 + y^2}{2} \right) \right| dxdy = \iint\limits_D \left| \dfrac{6 - 3\left(x^2 + y^2\right)}{2} \right| dxdy$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \le 2 \Rightarrow 0 \le r \le \sqrt{2}\ \ D \to D_1 : \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$\Rightarrow V = \iint\limits_{D_1} \left| \left(\dfrac{6 - 3r^2}{2} \right) r \right| = \left| \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(3r - \dfrac{3}{2} r^3 \right) dr \right| = \left| \varphi \Big|_0^{2\pi} . \left(\dfrac{3r^2}{2} - \dfrac{3r^4}{8} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} \right| = 3\pi$

Câu 18. Tính diện tích giới hạn bởi hình sao $x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t$, với $0 \le t \le 2\pi$.

A) $\frac{\pi}{8}$

6

B) $\frac{5\pi}{8}$

C) $\frac{3\pi}{8}$

D) $\frac{7\pi}{8}$

Đáp án: C

Giải

$$S = \int_0^{2\pi} x dy = \int_0^{2\pi} \cos^3 t . 3\sin^2 t . \cos t dt = \int_0^{2\pi} 3\sin^2 t . \cos^4 t dt = \frac{3\pi}{8}$$

Câu 19. Tính khối lượng m của một bản hình vuông cho bởi miền $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ biết hàm mật độ $f(x, y) = x$

A) $m = 1$

B) $m = 2$

C) $m = \frac{1}{2}$

D) $m = \frac{1}{3}$

Đáp án: C

Giải $m = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 x dx \int_0^1 dy = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 . y\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

Câu 20. Giá trị của tích phân đường loại hai $\int_L dx + 3dy$, với L là đường thẳng có biểu diễn tham số là $g(t) = (2t,\ 3t-1)$ với $0 \le t \le 1$.

A) 10

B) 11

C) 5

D) 4

Đáp án: B

Giải

Ta có tham số hóa của $L: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 2dt \\ dy = 3dt \end{cases} (0 \le t \le 1)$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 2dt + 3.3dt = \int_0^1 11dt = 11t\Big|_0^1 = 11$$

Câu 21. Tính $\int_L (2x-y)dx + (y-x)dy$ với L là đoạn thẳng nối từ điểm $A(1;2)$ đến điểm $B(2;4)$.

A) 1

B) 2

7

C) 3

D) 4

Đáp án: C

Giải

Ta có phương trình đường thẳng $AB: y = 2x \Rightarrow dy = 2dx \left(0 \le x \le 2\right)$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 \left(2x - 2x\right)dx + \left(2x - x\right).2dx = \int_1^2 2xdx = x^2 \Big|_1^2 = 3$$

Câu 22. Giá trị của tích phân đường $I = \int_L 2xydx + x^2dy$, với L là cung parabol $y = \frac{x^2}{4}$ từ $O(0,0)$ đến $A(2,1)$, nằm trong khoảng

A) $(1,3)$

B) $(2,4)$

C) $(3,5)$

D) $(4,6)$

Đáp án: C

Giải

Ta có $\left(L\right): y = \frac{x^2}{4} \Rightarrow dy = \frac{xdx}{2} \left(0 \le x \le 2\right)$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 2x.\frac{x^2}{4}dx + x^2.\frac{xdx}{2} = \int_0^2 x^3dx = \frac{x^4}{2}\Big|_0^2 = 4$$

Câu 23. Cho L là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ có hướng ngược chiều kim đồng hồ và D là hình phẳng giới hạn bởi L. Khi đó tích phân đường loại hai $\oint\limits_L (x + 2y)\,dx + (4x - y)\,dy$ bằng :

A) π

B) 2π

C) 4π

D) 8π

Đáp án: D

Giải

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = x + 2y \\ Q(x,y) = 4x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = 2 \\ Q'_x = 4 \end{cases}$

Áp dụng định lý Green ta có: $I = \iint\limits_D \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy = \iint\limits_D 2dxdy = 2S_D = 2.4\pi = 8\pi$

Với $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\right\}$

Câu 24. Cho L là đường cong kín hướng ngược chiều kim đồng hồ và D là hình phẳng giới hạn bởi L. Biết rằng L và D thỏa mãn điều kiện định lý Green, khi đó tích phân đường $\oint\limits_L \left(x^3+2y\right)dx+\left(4x^2-y^3\right)dy$ bằng :

A) $\iint\limits_D (8x-2)\,dxdy$

8

B) $\iint\limits_D 3\left(x^2+y^2\right)dxdy$

C) $\iint\limits_D (8x+2)\,dxdy$

D) $\iint\limits_D 3\left(x^2-y^2\right)dxdy$

Đáp án: A

Giải

Đặt $\begin{cases} P(x,y)=x^3+2y \\ Q(x,y)=4x^2-y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y=2 \\ Q'_x=8x \end{cases}$

Áp dụng định lý Green ta có: $I=\iint\limits_D \left(Q'_x-P'_y\right)dxdy=\iint\limits_D (8x-2)\,dxdy$

Câu 25. $I = \int\limits_C (4x^2 + 3y)dx + (-y^2 + 4x)dy$, với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ lấy theo chiều ngược kim đồng hồ. Khẳng định nào sau đây là đúng

A) $I = 4\pi$

B) $I = 2\pi$

C) $I = 6\pi$

D) $I = 16\pi$

Đáp án: A

Giải

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = 4x^2 + 3y \\ Q(x,y) = -y^2 + 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = 3 \\ Q'_x = 4 \end{cases}$

Áp dụng định lý Green ta có: $I = \iint\limits_D (Q'_x - P'_y) dxdy = \iint\limits_D dxdy = S_D = 4\pi = 4\pi$

$$\text{Với } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Câu 26. Cho S là mặt cong có phương trình $z = x^2 + y^2$ hướng lên trên. Khi đó véctơ pháp tuyến của S tại điểm $M(x, y, z)$ là :

A) $n = (-2x, -2y, 1)$

B) $n = (2x, 2y, 1)$

C) $n = (1, -2x, -2y)$

D) $n = (2x, 2y, -1)$

Đáp án: A

Giải

Ta có: $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (-2x, -2y, 1)$

Câu 27. Cho S là mặt cong có tham số $\begin{cases} x = u + 3v \\ y = -u + v \\ z = v^2 \end{cases}$ có hướng lên trên.

Biết $(u, v) \in D$, khi đó tích phân mặt $I = \iint\limits_S dydz + dzdx + dxdy$ bằng :

9

A) $\iint\limits_D (4 - 4u)\, dudv$

B) $\iint\limits_D (4 + 4v)\, dudv$

C) $\iint\limits_D (4 - 4v)\, dudv$

D) $\iint\limits_D (4 + 4u)\, dudv$

Đáp án: C

Giải

Đặt $\vec{F} = (P, Q, R) = (1, 1, 1)$

Có $g(u, v) = (u + 3v, -u + v, v^2) \Rightarrow \begin{cases} g'_u = (1, -1, 0) \\ g'_v = (3, 1, 2v) \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{n} = g'_u \wedge g'_v = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2v & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2v, -2v, 4)$$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_D \vec{F}\big(g(u, v)\big).\vec{n}dudv = \iint\limits_D (-2v - 2v + 4)dudv = \iint\limits_D (4 - 4v)dudv$$

Câu 28. Cho mặt cong S có đường biên L thỏa mãn điều kiện của định lý Stokes. Khi đó tích phân $I = \int\limits_L (x+y^2)dx + (y+z^2)\,dy + (z+x^2)\,dz$ bằng:

A) $\iint\limits_S 2zdydz + 2xdzdx + 2ydxdy$

B) $\iint\limits_S -2zdydz - 2xdzdx - 2ydxdy$

C) $\iint\limits_S 2dydz + 2dzdx + 2dxdy$

D) $\iint\limits_S -2xdydz - 2ydzdx - 2zdxdy$

Đáp án: B

Giải

Đặt $\begin{cases} P = x + y^2 \\ Q = y + z^2 \\ R = z + x^2 \end{cases}$

Theo định lý Stokes ta có:

$$I = \iint\limits_S \left(R'_y - Q'_z\right)dydz + \left(P'_z - R'_x\right)dzdx + \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy = \iint\limits_S -2zdydz - 2xdydz - 2ydxdy$$

Câu 29. Tích phân mặt loại hai $I = \iint\limits_S yzdydz + xzdzdx + xydxdy$ với S là mặt ngoài của hình lập phương: $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a$.

A) $I = 0$

B) $I = 1$

C) $I = -1$

D) $I = 2$

10

Đáp án: A

Giải

Đặt $\begin{cases} P(x,y,z) = yz \\ Q(x,y,z) = xz \\ R(x,y,z) = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_x = 0 \\ Q'_y = 0 \\ R'_z = 0 \end{cases}$

Áp dụng định lý $G-O$ ta có: $I = \iiint\limits_V \left(P'_x + Q'_y + R'_z\right) dxdydz = \iiint\limits_V 0dxdydz = 0$

Câu 30. Tính tích phân $I = \iint\limits_S x^4 dydz + y^4 dzdx + z^2 dxdy$,trong đó S là mặt kín định hướng ra phía ngoài, giới hạn bởi $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \le 1;\ z \ge 0$.

A) $I = \pi$

B) $I = 3\pi$

C) $I = 4\pi$

D) $I = 6\pi$

Đáp án: B

Giải

Đặt $\begin{cases} P(x,y,z) = x^4 \\ Q(x,y,z) = y^4 \\ R(x,y,z) = z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_x = 4x^3 \\ Q'_y = 4y^3 \\ R'_z = 2z \end{cases}$

Áp dụng định lý $G-O$ ta có:

$$I = \iiint\limits_V (P'_x + Q'_y + R'_z) dxdydz = \iiint\limits_V (4x^3 + 4y^3 + 2z) dxdydz = \iiint\limits_V (4x^3 + 4y^3) dxdydz + \iiint\limits_V 2z dxdydz$$

• $I_1 = \iiint\limits_V (4x^3 + 4y^3) dxdydz$ là tích phân có hàm lẻ và miền V đối xứng qua trục Oz nên

$$I_1 = \iiint\limits_V (4x^3 + 4y^3) dxdydz = 0$$

•$I_2 = \iiint\limits_V 2z dxdydz$ có: $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \le 1, z \ge 0 \right\}$

Đặt $\begin{cases} x = 2r\cos\varphi\sin\theta \\ y = 3r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow |J| = 6r^2\sin\theta$

$$=> \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=r^2\le 1 => \begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

Do $z\ge 0 => \cos\theta \ge 0 => 0\le \theta \le \frac{\pi}{2} => V \to V_1 : \begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le \varphi\le 2\pi \\ 0\le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$=> I_2=\iiint\limits_{V_1} 2r\cos\theta.6r^2\sin\theta drd\varphi d\theta = \int_0^1 6r^3dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$=> I_2=\frac{6r^4}{4}\Bigg|_0^1 . \left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} .\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{3}{2}.1.2\pi=3\pi$$

Vậy $I=3\pi$

Câu 31. Tính véc tơ **rot** khi áp dụng định lí Stokes cho hàm véc tơ $F=(P;Q;R)=(x+y;y+z;x-2y)$ trên nửa mặt cầu : $x^2+y^2+z^2=4, z\ge 0$.

A) $rot(F)=(-3;-1;-1)$

B) $rot(F)=(3;1;1)$

C) $rot(F)=(-3;1;-1)$

D) $rot(F)=(3;-1;1)$

Đáp án: A

Giải

Đặt $\begin{cases} P=x+y \\ Q=y+z \\ R=x-2y \end{cases}$

Ta có: $\text{rot} F=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\left(R'_y-Q'_z,P'_z-R'_x,Q'_x-P'_y\right)=(-3,-1,-1)$

Câu 32. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào có tổng khoảng cách từ các điểm $P(-2,0)$, $Q(0,2)$, và $R(2,3)$ đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

A) $9x - 12y + 20 = 0$

B) $x - y + 2 = 0$

C) $2x - 3y + 5 = 0$

D) $3x - 4y + 7 = 0$

Đáp án: A

Giải

• Xét đáp án $(A): 9x - 12y + 20 = 0\,(a_1)$

$$d(P;a_1)+d(Q;a_1)+d(R;a_1)=\frac{|-18+20|}{\sqrt{9^2+(-12)^2}}+\frac{|-24+20|}{\sqrt{9^2+(-12)^2}}+\frac{|18-36+20|}{\sqrt{9^2+(-12)^2}}=\frac{8}{15}$$

• Xét đáp án $(B): x - y + 2 = 0\,(a_2)$

$$d(P;a_2)+d(Q;a_2)+d(R;a_2)=\frac{|-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}+\frac{|-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}+\frac{|2-3+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

• Xét đáp án $(C): 2x - 3y + 5 = 0\,(a_3)$

$$d(P;a_3)+d(Q;a_3)+d(R;a_3)=\frac{|-4+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}+\frac{|-6+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}+\frac{|4-9+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$$

• Xét đáp án $\left(D\right): 3x-4y+7=0\left(a_4\right)$

$$d\left(P;a_4\right)+d\left(Q;a_4\right)+d\left(R;a_4\right)=\frac{\left|-6+7\right|}{\sqrt{3^2+\left(-4\right)^2}}+\frac{\left|-8+7\right|}{\sqrt{3^2+\left(-4\right)^2}}+\frac{\left|6-12+7\right|}{\sqrt{3^2+\left(-4\right)^2}}=\frac{3}{5}$$

Vậy tổng khoảng cách từ các điểm $P\left(-2,0\right),Q\left(0,2\right),R\left(2,3\right)$ đến đường thẳng a_1 là nhỏ nhất nên ta chọn đáp án **A**