CHƯƠNG 1: XÁC SUẤT VÀ CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT

1.1 ÔN TẬP VỀ GIẢI TÍCH TỔ HỢP

1.1.1 Một số khái niệm và công thức tính

Hoán vị	***Tổ hợp***	***Chỉnh hợp***	***Chỉnh hợp lặp***
Số cách sắp xếp ngẫu nhiên *n* phần tử	Số cách chọn ngẫu nhiên *k* phần tử từ *n* phần tử *(k≤ n)* sao cho *k* phần tử đó *không lặp và không có phân biệt thứ tự.*	Số cách chọn ngẫu nhiên *k* phần tử từ *n* phần tử *(k≤ n)* sao cho *k* phần tử đó *không lặp và có phân biệt thứ tự.*	Số cách chọn ngẫu nhiên *k* phần tử từ *n* phần tử sao cho *k* phần tử đó *có thể lặp lại và có phân biệt thứ tự.*
$P_n = n!$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$B_n^k = n^k$

Ví dụ 1.1:

1. Cho tập hợp $A = \{1,2,3,4,5\}$, từ tập hợp A có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên thoả mãn:
   a. Có 5 chữ số khác nhau.
   b. Có 3 chữ số khác nhau.
   c. Có 3 chữ số.
2. Một tổ có 5 học sinh, có bao nhiêu cách phân công 3 học sinh đi lao động.

Giải

1.a $P_5 = 5! = 120$ số

1.b $A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = 60$ số

1.c $B_5^3 = 5^3 = 125$

2. $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ số

1.1.2 Quí tắc cộng: Giả sử một công việc có *k* trường hợp thực hiện khác nhau đều thỏa yêu cầu. Trường hợp 1 có n_1 cách thực hiện, trường hợp 2 có n_2 cách thực hiện,..., trường hợp *k* có n_k cách thực hiện. Khi đó, số cách thực hiện công việc là: $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

Ví dụ 1.2: Một nhóm có 3 nam và 2 nữ, có bao nhiêu cách chọn ra 3 người sao cho có ít nhất là 2 nam.

Giải: Trường hợp 1: 3 người chọn ra có 2 nam và 1 nữ: $C_3^2 C_2^1 = 3 \times 2 = 6$ cách

Trường hợp 2: 3 người chọn ra có 3 nam $C_3^3 = 1$ cách

Vậy số cách chọn ra 3 người sao cho có ít nhất là 2 nam là: 6 + 1 = 7 cách

1.1.3 Quy tắc nhân: Giả sử một công việc phải trải qua *k* giai đoạn. Giai đoạn thứ nhất có n_1 cách thực hiện; giai đoạn thứ hai có n_2 cách thực hiện;...; giai đoạn thứ *k* có n_k cách thực hiện. Khi đó, số cách thực hiện công việc là: $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$

Ví dụ 1.3: Có 12 quyển sách gồm 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lý, 3 quyển sách Hóa. Hỏi có bao nhiêu cách để lấy ra mỗi loại 2 quyển sách?

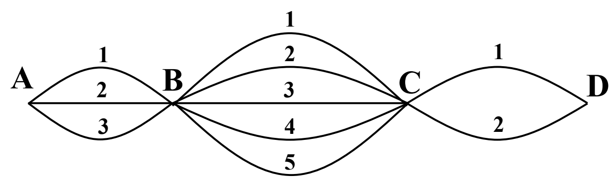
Giải: Số cách lấy ra 2 quyển sách toán: $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = 10$ cách.

Số cách lấy ra 2 quyển sách lý: $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ cách

Số cách lấy ra 2 quyển sách hóa: $C_3^2 = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ cách

Vậy số cách lấy: $n = 10 \times 6 \times 3 = 180$ cách

Ví dụ 1.4: Có 3 cách đi từ địa điểm A đến địa điểm B, có 5 cách đi từ địa điểm B đến địa điểm C và có 2 cách đi từ địa điểm C đến địa điểm D. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ địa điểm A đến địa điểm D?



Giải: Số cách đi từ thành phố A đến thành phố D là : $n = 3 \times 5 \times 2 = 30$ cách

1.2 PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ

1.2.1 Khái niệm

Phép thử: Thực hiện một nhóm điều kiện xác định lên đối tượng để quan sát một hiện tượng nào đó.

Phép thử ngẫu nhiên: Là những phép thử thỏa mãn hai tính chất

- Không biết trước kết quả nào sẽ xảy ra.
- Có thể xác định tất cả các kết quả có thể xảy ra.

Biến cố: Là kết quả có thể xảy ra trong một phép thử.

Ví dụ 1.5:

Các phép thử ngẫu nhiên: tung một đồng xu, tung một con súc sắc, rút một cây bài trong bộ bài 52 lá.

1.2.2 Phân loại biến cố và mối quan hệ giữa các biến cố:

Biến cố chắc chắn: Là biến cố chắc chắn xảy ra trong một phép thử. Kí hiệu: W

Ví dụ 1.6: Tung một con súc sắc. Gọi A là biến cố súc sắc xuất hiện mặt có số chấm nhỏ hơn hoặc bằng 6. Khi đó ta nói A là biến cố chắc chắn, A = W.

***Biến cố không thể*:** Là biến cố không thể xảy ra trong một phép thử. Kí hiệu: ∅

Ví dụ 1.7: Tung một con súc sắc. Gọi B là biến cố súc sắc xuất hiện mặt 7 chấm. Khi đó ta nói A là biến cố không thể, A = ∅.

***Biến cố ngẫu nhiên*:** Là biến cố có thể xảy ra cũng không thể xảy ra trong một phép thử.
Kí hiệu: A, B, C,... $A_1, A_2 \ldots$

Ví dụ 1.8: Một xạ thủ bắn vào một tấm bia, gọi A là biến cố xạ thủ bắn trúng bia, A là biến cố ngẫu nhiên.

Biến cố thuận lợi (Biến cố kéo theo): Biến cố A được gọi là thuận lợi cho biến cố B nếu A xảy ra thì B cũng xảy ra. Kí hiệu: $A\subset B$.

Ví dụ 1.9: Tung ngẫu nhiên một con súc sắc. Gọi A là biến cố súc sắc xuất hiện mặt 2 chấm và B là biến cố xuất hiện mặt chẵn. Khi đó ta nói $A\subset B$.

Biến cố tương đương: Nếu $A\subset B$ và $B\subset A$ thì A và B là hai biến cố tương đương. Kí hiệu: A = B.

Ví dụ 1.10: Tung ngẫu nhiên đồng thời ba con súc sắc. Gọi A là biến cố mỗi con súc sắc đều xuất hiện mặt 1 chấm, B là biến cố tổng số chấm của ba con súc sắc là 3 chấm. Khi đó A=B.

***Biến cố sơ cấp*:** Biến cố A được gọi là biến cố sơ cấp nếu nó không có biến cố nào thuận lợi cho nó (trừ chính nó), tức là không thể phân tích được nữa.

Tập hợp tất cả các biến cố sơ cấp của một phép thử được gọi là *không gian các biến cố sơ cấp* và kí hiệu: **W**

Ví dụ 1.11: Tung ngẫu nhiên một con súc sắc. Gọi A_i là biến cố súc sắc xuất hiện mặt i chấm (i=1, .., 6) thì $A_1, A_2, .. , A_6$ là các biến cố sơ cấp.

Gọi B là biến cố thu được mặt có số chấm chẵn.

$\Rightarrow B = A_2\cup A_4\cup A_6 \Rightarrow$ B không phải là biến cố sơ cấp.

và **W** = $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$.

***Biến cố hiệu*:** Hiệu của hai biến cố A và B là một biến cố xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra nhưng B không xảy ra**.** Kí hiệu A\B

Ví dụ 1.12: Tung một con súc sắc.

Gọi A là biến cố súc sắc xuất hiện mặt có số chấm lẻ.

B là biến cố súc sắc xuất hiện mặt có số chấm lẻ nhỏ hơn 5.

C là biến cố súc sắc xuất hiện mặt 5 chấm.

Ta có: C = A\B

Biến cố tổng: Tổng của hai biến cố A và B là một biến cố xảy ra khi và chỉ khi ít nhất một trong hai biến cố A và B xảy ra. Kí hiệu $A \cup B$

Ví dụ 1.13: Hai xạ thủ cùng bắn vào một con thú. Gọi A là biến cố xạ thủ thứ nhất bắn trúng, B là biến cố xạ thủ thứ hai bắn trúng. Khi đó biến cố thú bị trúng đạn là $C = A\cup B$

Tổng quát: Tổng của n biến cố $A_1, A_2, .., A_n$ là một biến cố xảy ra $\Leftrightarrow$ ít nhất một trong các biến cố A_i xảy ra (i = 1,..,n).

Kí hiệu: $A_1\cup A_2\cup ... \cup A_n$

Chú ý: Biến cố chắc chắn W là tổng của mọi biến cố sơ cấp có thể, nghĩa là mọi biến cố sơ cấp đều thuận lợi cho W. Do đó, W còn được gọi là không gian các biến cố sơ cấp.

Biến cố tích: Tích của hai biến cố A và B là một biến cố xảy ra $\Leftrightarrow$ cả hai biến cố A và B đồng thời xảy ra. Kí hiệu: $A\cap B$

Ví dụ 1.14: Hai xạ thủ cùng bắn vào một con thú. Gọi A là biến cố xạ thủ thứ nhất bắn không trúng, B là biến cố xạ thủ thứ hai bắn không trúng. Khi đó biến cố thú không bị trúng đạn là $C = A\cap B$.

Tổng quát: Tích của n biến cố $A_1, A_2, .., A_n$ là một biến cố xảy ra $\Leftrightarrow$ tất cả các biến cố A_i đều xảy ra. Kí hiệu: $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$

Biến cố xung khắc: Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu chúng không đồng thời xảy ra trong một phép thử.

Ví dụ 1.15: Tung một con súc sắc, gọi A là biến cố súc sắc xuất hiện mặt chẵn, B là biến cố súc sắc xuất hiện mặt 3 chấm $\Rightarrow$ A, B xung khắc.

***Hệ biến cố đầy đủ, xung khắc từng đôi*:** Hệ biến cố $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ được gọi là hệ biến cố đầy đủ, xung khắc từng đôi nếu hai biến cố bất kỳ trong hệ là xung khắc và tổng tất cả các biến cố là biến cố chắc chắn, tức là:

$$A_i \cap A_j = \varnothing \qquad \forall i, j \qquad \text{và} \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = W.$$

Biến cố đối lập: Biến cố $\overline{A}$ được gọi là biến cố đối lập của A.

$$A \text{ và } \overline{A} \text{ đối lập} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap \overline{A} = \varnothing \\ A \cup \overline{A} = W \end{cases}$$

Ví dụ 1.16: Tung ngẫu nhiên một con súc sắc, A là biến cố súc sắc xuất hiện mặt chẵn, $\overline{A}$ là biến cố súc sắc xuất hiện mặt lẻ.

Chú ý: Hai biến cố đối lập thì xung khắc nhưng ngược lại hai biến cố xung khắc thì chưa chắc đối lập.

Biến cố đồng khả năng: Các biến cố A, B, C,... được gọi là đồng khả năng nếu chúng có cùng một khả năng xuất hiện như nhau trong một phép thử**.**

Ví dụ 1.17: Tung ngẫu nhiên một đồng xu, gọi S là biến cố đồng xu xuất hiện mặt sấp, N là biến cố xuất hiện mặt ngửa $\Rightarrow$ S, N là hai biến cố đồng khả năng.

Biến cố độc lập: Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra biến cố này không làm ảnh hưởng đến việc xảy ra hay không xảy ra biến cố kia và ngược lại.

***Hệ biến cố độc lập toàn phần*:** Hệ biến cố $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ được gọi là độc lập toàn phần nếu mỗi biến cố trong hệ độc lập với tích của một tổ hợp bất kỳ các biến cố còn lại.

Nhận xét: Các khái niệm về biến cố tổng, hiệu, tích, đối lập tương ứng với hợp, giao, hiệu, phần bù của lý thuyết tập hợp, do đó có thể sử dụng các phép toán trên tập hợp cho các phép toán trên biến cố.

1.3 ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT

1.3.1 Định nghĩa xác suất theo lối cổ điển

Giả sử một phép thử có n biến cố sơ cấp đồng khả năng có thể xảy ra, trong đó có m biến cố sơ cấp thuận lợi cho biến cố A. Khi đó xác suất của biến cố A được định nghĩa bởi công thức sau:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Ví dụ 1.19: Tung ngẫu nhiên một con súc sắc. Tính xác suất để súc sắc xuất hiện ở mặt trên là chẵn.

Giải: Gọi A_i là biến cố xuất hiện mặt trên là i chấm.

Gọi A là biến cố xuất hiện mặt trên là chẵn, ta có $A = A_2 \cup A_4 \cup A_6$

Khi tung con súc sắc có 6 biến cố đồng khả năng có thể xảy ra trong đó có 3 biến cố thuận lợi cho A nên

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Ví dụ 1.20: Tung ngẫu nhiên đồng thời 2 con súc sắc. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện ở hai mặt trên của 2 con súc sắc là 7.

Giải : Gọi A là biến cố tổng số chấm xuất hiện ở hai mặt trên của 2 con súc sắc là 7.

A_i là biến cố súc sắc thứ nhất xuất hiện mặt trên là i chấm $(i = \overline{1,6})$.

B_i là biến cố súc sắc thứ hai xuất hiện mặt trên là i chấm $(i = \overline{1,6})$.

Khi ta tung 2 con súc sắc cùng lúc thì có 36 biến cố sơ cấp đồng khả năng có thể xảy ra, cụ thể:

$$\begin{aligned} W = \{&(A_1,B_1);\ (A_1,B_2);\ \ldots;\ (A_1,B_6) \\ &(A_2,B_1);\ (A_2,B_2);\ \ldots;\ (A_2,B_6) \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &(A_6,B_1);\ (A_6,B_2);\ \ldots;\ (A_6,B_6)\} \end{aligned}$$

Và có 6 biến cố thuận lợi cho biến cố A:

$$(A_1,B_6);\ (A_2,B_5);\ (A_3,B_4);\ (A_4,B_3);\ (A_5,B_2);\ (A_6,B_1)$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Ví dụ 1.21: Một người gọi điện thoại nhưng lại quên hai số cuối của số điện thoại, chỉ biết rằng hai số đó là khác nhau. Tính xác suất để người đó chỉ bấm số một lần đúng số cần gọi.

Giải: Gọi B là biến cố người đó chỉ quay một lần đúng số cần gọi.

Số biến cố thuận lợi cho B là: m = 1

Số biến cố đồng khả năng có thể xảy ra là: $n = A_{10}^2 = 90$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{90}$$

Ví dụ 1.22: Một hộp gồm 6 bi trắng và 4 bi đen, lấy ngẫu nhiên 2 bi từ hộp. Tính xác suất để

a) Có 1 bi trắng.

b) Có 2 bi trắng.

Giải: Gọi A là biến cố có 1 bi trắng trong 2 bi lấy ra.

Gọi B là biến cố có 2 bi trắng trong 2 bi lấy ra.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^1 C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$$

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}$$

Ví dụ 2.23: Trong một hộp đựng 20 quả cầu trong đó có 14 quả cầu đỏ và 06 quả cầu trắng. Lấy ngẫu nhiên (không hoàn lại) 5 quả cầu từ trong hộp. Tính xác suất để trong 5 quả cầu lấy ra có 3 quả cầu đỏ. Biết rằng các quả cầu là cân đối và giống nhau.

Giải: Gọi A là biến cố trong 5 quả cầu lấy ra có 3 quả cầu đỏ và 2 quả cầu trắng.

Số cách lấy 3 quả cầu đỏ: C_{14}^{3}

Số cách lấy 2 quả cầu trắng: C_{6}^{2}

$$\Rightarrow P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^2 C_{14}^3}{C_{20}^5}$$

Tổng quát: Cho một hộp đựng N quả cầu cân đối và giống nhau trong đó có M quả cầu đỏ (M< N) và (N – M) quả cầu trắng.

Lấy ngẫu nhiên (không hoàn lại) n quả cầu ($n \le N$) từ trong hộp.

Tính xác suất để trong n quả cầu lấy ra có k ($k \le n$) quả cầu đỏ.

Gọi A là biến cố trong n quả cầu lấy ra có k quả cầu đỏ

$$\Rightarrow P(A) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

Nhận xét:

Khi tính xác suất của các biến cố, ta không cần phải chỉ ra các biến cố sơ cấp có thể xảy ra và các biến cố sơ cấp thuận lợi mà chỉ cần chỉ ra số các biến cố sơ cấp có thể xảy ra, số các biến cố sơ cấp thuận lợi cho các biến cố đó.

Định nghĩa xác suất theo lối cổ điển có hạn chế là: Chỉ xét cho hệ hữu hạn các biến cố sơ cấp, không phải lúc nào cũng phân tích được thành các biến cố đồng khả năng.

1.3.2 Định nghĩa xác suất theo lối thống kê:

Giả sử thực hiện 1 phép thử nào đó n lần độc lập (kết quả của phép thử sau không phụ thuộc vào kết quả của phép thử trước), trong đó biến cố A xảy ra m lần.

Khi đó: m gọi là tần số xuất hiện của biến cố A.

$f = \frac{m}{n}$ gọi là tần xuất của biến cố A.

Khi $n \to \infty$, tần xuất f đạt giá trị ổn định và giá trị đó được xem là xác suất của biến cố A.

Ta có: $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} f = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n}$

Ví dụ 1.24: Thống kê kết quả xổ số kiến thiết cửa một Tỉnh từ 01/01/2006 đến 21/01/2010 với tổng số lần quay 12715, kết quả như sau

Số bóng	Số lần		Tỷ lệ
0		1266	9.96%
1		1305	10.26%
2		1224	9.63%
3		1276	10.04%
4		1251	9.84%

5		1289	10.14%
6		1262	9.93%
7		1298	10.21%
8		1253	9.85%
9		1291	10.15%
Tổng		12715	100%

Theo công thức xác suất cổ điển, xác suất để mỗi quả bóng rơi xuống lòng cầu trong một lần quay lòng cầu là 10%. Bảng thống kê trên cho thấy tỷ lệ xuất hiện của mỗi quả bóng cũng giao động quanh 10%.

Ví dụ 1.25: Tiến hành sản xuất thử trên một hệ thống máy thu được kết quả như sau:

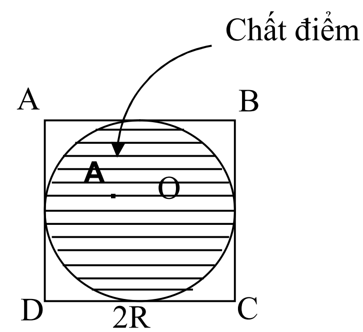
Số sản phẩm n	100	150	200	250	300	…
Số sản phẩm khuyết tật m	14	12	22	24	32	…
Tần xuất f	0.14	0.08	0.11	0.096	0.106	…

Sản xuất một sản phẩm là thực hiện một phép thử. Chúng ta quan tâm tỷ lệ sản phẩm khuyết tật. Như vậy số sản phẩm sản xuất ra n là số phép thử độc lập, số sản phẩm khuyết tật thu được m. Kết quả trên cho thấy khi n tăng dần, tần xuất f thay đổi và đạt tới giá trị ổn định là 0,1. Có thể cho rằng, xác suất của biến cố 1 sản phẩm sản xuất bị khuyết tật hay tỷ lệ sản phẩm khuyết tật của hệ thống là 0.1.

1.3.3 Định nghĩa xác suất theo hình học

Xét một phép thử có không gian các biến cố sơ cấp là miền hình học W (đoạn thẳng, hình phẳng, khối không gian,…) có số đo (độ dài, diện tích, thể tích,…) hữu hạn, khác không. Giả sử một chất điểm rơi ngẫu nhiên vào miền W, xét miền con A của W. Khi đó xác suất để chất điểm rơi vào miền A là:

$$P(A) = \frac{\text{Số đo miền A}}{\text{Số đo miền W}}$$



Ví dụ 1.26: Ném chất điểm vào trong hình vuông có cạnh dài 2R. Tính xác suất để chất điểm đó rơi vào hình tròn nội tiếp hình vuông.

Giải: Gọi A là biến cố chất điểm rơi vào hình tròn nội tiếp hình vuông .

Trường hợp có thể của phép thử được biểu diễn bằng hình vuông ABCD.

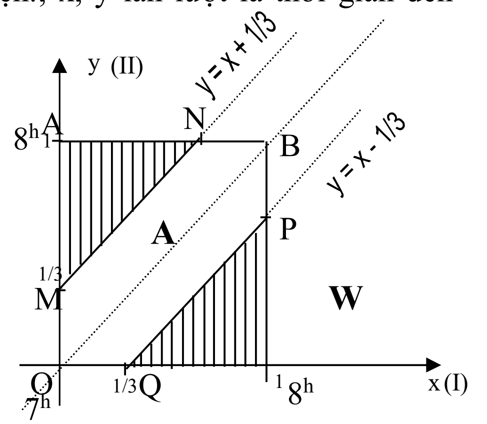
Trường hợp thuận lợi của biến cố A được biểu diễn bằng hình tròn (O,3).

Suy ra: $P(A) = \frac{S_{(O,R)}}{S_{(ABCD)}} = \frac{S_{(O,R)}}{S_{(ABCD)}} = \frac{R^2\pi}{4R^2} = \frac{\pi}{4}$

Ví dụ 1.27: (Bài toán hai người gặp nhau)

Hai người hẹn gặp nhau ở một địa điểm xác định vào khoảng từ 7 giờ đến 8 giờ. Mỗi người đến (chắc chắn sẽ đến) điểm hẹn trong khoảng thời gian trên một cách độc lập với nhau, chờ trong 20 phút, nếu không thấy người kia sẽ bỏ đi. Tìm xác suất để hai người gặp nhau.

Giải: Gọi A là biến cố 2 người gặp nhau trong cuộc hẹn.; x, y lần lượt là thời gian đến điểm hẹn của người thứ 1 và người thứ 2.



Biểu diễn x, y lên hệ trục tọa độ Descartes. Chọn gốc tọa độ là lúc 7^h.

Trường hợp có thể của phép thử:

$W = \{(x, y): 0 \le x, y \le 1\}$ được biểu diễn bằng hình vuông OABC.

Ta có: $|x-y| \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \le \frac{1}{3} \\ x - y \ge -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge x - \frac{1}{3} \\ y \le x + \frac{1}{3} \end{cases}$

Trường hợp thuận lợi cho biến cố A được biểu diễn bằng đa giác OMNBPQ.

Suy ra xác suất của A là:

$$P(A) = \frac{S_{(OMNBPQ)}}{S_{(OABC)}} = 1 - 2.\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = 1 - 2.\frac{\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{3}}{1} = \frac{5}{9}$$

Nhận xét: Định nghĩa xác suất theo hình học được xem như là sự mở rộng của định nghĩa xác suất theo lối cổ điển trong trường hợp số khả năng có thể xảy ra là vô hạn.

1.3.4 *Các tính chất của xác suất:*

i) $\forall A \in W : 0 \le P(A) \le 1$

ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

iii) P(∅) = 0, với ∅ là biến cố rỗng.

iv) P(W) = 1, với W là biến cố chắc chắn.

v) Nếu $A \subset B$ thì $P(A) \le P(B)$.

1.4 MỘT SỐ CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT

1.4.1 Công thức cộng

- A và B là hai biến cố bất kỳ: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- A_1, A_2 và A_3 là ba biến cố bất kỳ:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

- Xét hệ các biến cố $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P\left(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n\right)$$

Đặc biệt:

i) Nếu $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ là hệ biến cố xung khắc từng đôi thì:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

ii) Nếu $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ là hệ biến cố đầy đủ, xung khắc từng đôi thì $\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1$

Ví dụ 1.28: Một lô hàng có 10 sản phẩm, trong đó có 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại từ lô hàng ra 6 sản phẩm. Tìm xác suất để có không quá 1 phế phẩm trong 6 sản phẩm được lấy ra.

Giải: Gọi A là biến cố không có phế phẩm trong 6 sản phẩm lấy ra

B là biến cố có đúng một phế phẩm.

C là biến cố có không quá một phế phẩm.

Khi đó A và B là hai biến cố xung khắc và $C = A \cup B$

Ta có $$P(A)=\frac{C_8^6}{C_{10}^6}=\frac{28}{210}=\frac{2}{15}$$

$$P(B)=\frac{C_2^1.C_8^5}{C_{10}^6}=\frac{112}{210}=\frac{8}{15}$$

$$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{2}{15}+\frac{8}{15}=\frac{2}{3}$$

Ví dụ 1.29: Một lớp có 100 sinh viên, trong đó có 40 sinh viên giỏi ngoại ngữ, 30 sinh viên giỏi tin học, 20 sinh viên giỏi cả ngoại ngữ lẫn tin học. Sinh viên nào giỏi ít nhất một trong hai môn sẽ được thêm điểm trong kết quả học tập của học kỳ. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Tìm xác suất để sinh viên đó được thêm điểm.

Giải: Gọi A là biến cố gọi được sinh viên được tăng điểm.

B là biến cố gọi được sinh viên giỏi ngoại ngữ.

C là biến cố gọi được sinh viên giỏi tin học.

Khi đó $A = B \cup C$, với B và C là hai biến cố không xung khắc

Ta có: $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

$$=\frac{30}{100}+\frac{40}{100}-\frac{20}{100}=\frac{50}{100}$$

Ví dụ 1.30: Chọn ngẫu nhiên 6 cây bài từ bộ bài có 52 cây bài. Tính xác suất để ít nhất có 2 cây 9 nút.

Giải: Gọi A là biến cố chọn ít nhất 2 cây 9 nút từ 6 cây bài chọn ra.

A_i là biến cố chọn được i cây 9 nút từ 6 cây bài chọn ra $(i=\overline{0,4})$.

Suy ra: $A = A_2 \cup A_3 \cup A_4$

Ta có: Hệ các biến cố $\{A_2, A_3, A_4\}$ xung khắc từng đôi, nên:

$$P(A)=P(A_2 \cup A_3 \cup A_4)=P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)$$

$$= \frac{C_4^2 C_{48}^4}{C_{52}^6} + \frac{C_4^3 C_{48}^3}{C_{52}^6} + \frac{C_4^4 C_{48}^2}{C_{52}^6} \approx 0.06$$

1.4.2 Công thức nhân xác suất

Xác suất có điều kiện, ký hiệu P(A\B): Là xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xãy ra.

Ví dụ 1.31: Hộp có 10 viên bi trong đó có 4 viên màu đỏ, 6 viên màu trắng. Lần lượt rút không hoàn lại 2 viên bi. Giả sử lần thứ nhất rút được bi màu đỏ, tính xác suất để lần thứ hai rút được bi màu đỏ.

Giải: Gọi A_i là biến cố rút được bi màu đỏ lần thứ i.

Ta có: $P(A_2 \backslash A_1) = \frac{3}{9}$

Công thức nhân xác suất:

- A và B là hai biến cố bất kỳ: $P(A \cap B) = P(A)P(B \backslash A) = P(B)P(A \backslash B)$
- Xét hệ các biến cố $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \times P(A_2 \backslash A_1) \times P(A_3 \backslash A_1 \cap A_2) \times \dots \times P\left(A_n \backslash \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Đặc biệt:

- Nếu A và B độc lập thì $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$
- Nếu hệ các biến cố $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ độc lập toàn phần thì

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Ví dụ 1.32: Tung ngẫu nhiên đồng thời hai con súc sắc. Tính xác suất để cả 2 con súc sắc đều xuất hiện mặt 6 chấm.

Giải: Gọi A là biến cố cả hai súc sắc đều xuất hiện mặt 6 chấm.

A_i là biến cố súc sắc thứ i xuất hiện mặt 6 chấm (i = 1, 2)

Ta có: $A = A_1 \cap A_2$

Do A_1 và A_2 độc lập, nên: $P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Ví dụ 1.33: Thi 2 môn, xác suất đậu môn thứ nhất là 0.6. Nếu môn thứ nhất đậu thì khả năng sinh viên đó đậu môn thứ hai là 0.8. Nếu môn thứ nhất không đậu thì khả năng sinh viên đó đậu môn thứ 2 chỉ là 0.6. Tính xác suất trong các trường hợp sau:

a) Sinh viên đó đậu chỉ một môn.

b) Sinh viên đó đậu 2 môn.

Giải: a. Gọi A là biến cố sinh viên đó đậu chỉ một môn.

A_i là biến cố sinh viên đó đậu môn thứ i (i =1, 2).

Ta có: $A = \left(A_1 \cap \overline{A_2}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2\right)$

Suy ra: $P(A) = P(A_1 \cap \overline{A_2} \cup \overline{A_1} \cap A_2) = P(A_1 \cap \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cap A_2)$

$$= P(A_1)P(\overline{A_2} \setminus A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2 \setminus \overline{A_1}) = 0.6\times 0.2 + 0.4\times 0.6 = 0.36$$

b. Gọi B là biến cố sinh viên đậu hai môn.

Ta có: $B = A_1 \cap A_2 = P(A_1)P(A_2 \setminus A_1) = 0.6\times 0.8 = 0.48$

Ví dụ 1.34: Hai xạ thủ mỗi người bắn một phát đạn vào bia. Xác suất bắn trúng của người thứ nhất là p = 0.9; của người thứ hai là p = 0.7. Giả sử hai người bắn độc lập với nhau, tính xác suất để:

a) Cả hai đều bắn trúng.

b) Có đúng một viên đạn trúng bia.

c) Bia bị trúng đạn.

Giải : Gọi A là biến cố xạ thủ I bắn trúng bia.

B là biến cố xạ thủ II bắn trúng bia.

C là biến cố cả hai xạ thủ trúng bia.

D là biến cố có một viên đạn trúng bia.

E là biến cố bia bị trúng đạn.

a) Xác suất để cả hai đều bắn trúng: Ta có $C = A \cap B$

$P(C) = P(A\cap B) = P(A)\, P(B) = 0.9\times 0.7 = 0.63$

b) Xác suất để có một viên đạn trúng bia:

Ta có: $D = \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$. Vì $\overline{A} \cap B$ và $A \cap \overline{B}$ là xung khắc với nhau

$\Rightarrow\ P(D) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(B) + P(A)P(\overline{B})$

$\Rightarrow P\left(D\right) = 0.1\times 0.7 + 0.9\times 0.3 = 0.34$

c.) Xác suất để bia bị trúng đạn:

Ta có: $\overline{E} = \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow P(\overline{E}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0.3\times 0.1 = 0.03$

$P(E) = 1 - 0.03 = 0.97$

1.4.3 Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes

Giả sử $\{A_1, A_2, . . , A_n\}$ là hệ biến cố đầy đủ, xung khắc từng đôi và B là biến cố bất kỳ có thể xảy ra đồng thời với một trong các biến cố A_i (i= 1, .. , n). Khi đó xác suất B được tính bởi công thức:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B / A_i) \qquad \text{(\textit{công thức đầy đủ})}$$

và

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k)P(B / A_k)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B / A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B / A_i)} \qquad \text{(\textit{công thức Bayes})}$$

Chú ý: Vận dụng công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes để giải một bài toán, vấn đề quan trọng là phải chỉ ra được nhóm biến cố đầy đủ và xung khắc từng đôi. Trong thực tế việc này thường gặp ở 2 hình thức sau:

✓ Công việc tiến hành trải qua 2 phép thử. Thực hiện phép thử thứ nhất ta có một trong n khả năng xảy ra là các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$. Sau khi thực hiện phép thử thứ nhất ta thực hiện phép thử thứ hai. Trong phép thử thứ hai ta quan tâm đến biến cố B. Khi đó biến cố B sẽ được tính theo công thức xác suất đầy đủ với hệ biến cố đầy đủ và xung khắc từng đôi là các biến cố $A_i \ (i = \overline{1, n})$.

✓ Một tập hợp chứa n nhóm phần tử. Mỗi nhóm phần tử có một tỷ lệ phần tử có tính chất P nào đó. Lấy ngẫu nhiên từ tập hợp ra 1 phần tử. Gọi A_i là biến cố chọn được phần tử thuộc nhóm thứ i. Khi đó xác suất của biến cố chọn được phần tử có tính chất P trong phép thử sẽ được tính theo công thức xác suất đầy đủ với hệ biến cố đầy đủ và xung khắc từng đôi là $A_i \ (i = \overline{1, n})$.

Ví dụ 1.35: Xét một lô sản phẩm, trong đó sản phẩm của nhà máy 1 chiếm 20%, nhà máy 2 sản phẩm chiếm 30%, nhà máy 3 sản phẩm chiếm 50%. Tỷ lệ phế phẩm của nhà máy 1, 2, 3 lần lượt là 0.001; 0.005; 0.006. Lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ lô hàng

a/ Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là phế phẩm.

b/ Giả sử sản phẩm lấy ra là phế phẩm, tính xác suất để sản phẩm đó là của nhà máy 1.

Giải : Gọi B là biến cố lấy được sản phẩm là phế phẩm.

A_1, A_2, A_3 lần lượt là biến cố lấy được sản phẩm của nhà máy 1, 2, 3.

Do $\{A_1, A_2, A_3\}$ là hệ biến cố đầy đủ, xung khắc từng đôi nên

a. Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B/A_i) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)$$

$$= \frac{20}{100} \times 0.001 + \frac{30}{100} \times 0.005 + \frac{50}{100} \times 0.006 = 0.0047.$$

b. Theo công thức bayes, ta có:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(B)} = \frac{0.2 \times 0.001}{0.0047} = 0.0426$$

Ví dụ 1.36: Một phân xưởng sản xuất chi tiết máy có hai máy: Máy I sản xuất 60% sản phẩm của phân xưởng; Máy II sản xuất 40% sản phẩm của phân xưởng. Tỷ lệ sản phẩm bị lỗi của máy I là 0,1 và tỷ lệ sản phẩm bị lỗi của máy II là 0,05. Sản phẩm của phân xưởng sau khi sản xuất được đem trộn lẫn với nhau. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm của phân xưởng thì thấy sản phẩm đó là sản phẩm bị lỗi, tính xác suất để sản phẩm đó do máy I sản xuất.

Giải: Gọi B_1 là biến cố sản phẩm lấy ra do máy I sản xuất.

B_2 là biến cố sản phẩm lấy ra do máy II sản xuất.

A là biến cố sản phẩm lấy ra là sản phẩm bị lỗi.

$\Rightarrow$ B_1, B_2 lập thành hệ biến cố đầy đủ và xung khắc.

Theo công thức xác suất đầy đủ: $P(A) = P(B_1)\,P(A/B_1) + P(B_1)P(A/B_2) = 0.08.$

Theo công thức Bayes: $P(B_1/A) = \dfrac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)} = \dfrac{0.6\times 0.1}{0.08} = 0.75$.

Vậy xác suất để sản phẩm đó do máy I sản xuất là $P(B_1 \backslash A) = 0.75$.

Ví dụ 1.37: Có 3 hộp đựng sản phẩm, mỗi hộp có 10 sản phẩm, trong đó sản phẩm loại I lần lượt là 2, 3, 4. Chọn ngẫu nhiên một hộp, rồi từ hộp đã chọn, rút ra ngẫu nhiên một sản phẩm.

a) Tính xác suất để sản phẩm chọn ra là sản phẩm loại I.

b) Nếu sản phẩm rút ra là sản phẩm loại I, thì theo bạn sản phẩm đó có khả năng thuộc hộp nào nhiều nhất, tại sao?

Giải: Gọi B là biến cố rút được sản phẩm là sản phẩm loại I.

A_i là biến cố chọn được hộp thứ i ($i = \overline{1,3}$).

a. Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{2}{10} + \frac{1}{3}\times\frac{3}{10} + \frac{1}{3}\times\frac{4}{10} = \frac{3}{10} = 0.3$$

b. Theo công thức Bayes, ta có:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{9}$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3)P(B/A_3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{4}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{4}{9}$$

So sánh các kết quả, ta thấy phế phẩm rút ra có khả năng thuộc hộp thứ III nhiều nhất.

1.4.4 Công thức Bernoulli

Ta tiến hành n phép thử độc lập. Giả sử trong mỗi phép thử chỉ xảy ra hai trường hợp: Hoặc biến cố A xảy ra với xác suất p hoặc biến cố A không xảy ra với xác suất q = 1 – p. Khi đó xác suất để trong n phép thử độc lập, biến cố A xuất hiện k lần được được tính bằng công thức:

$$P(n;k;p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{(}\textit{công thức Bernoulli}\text{)}$$

Ví dụ 1.38: Trong một phân xưởng có 5 máy hoạt động độc lập, xác suất để một máy bị hư trong một ca sản xuất là bằng nhau và bằng p = 0.1. Tính xác suất để trong 1 ca có hai máy bị hư.

Giải: Do 5 máy hoạt động độc lập nên ta có thể coi như tiến hành 5 phép thử độc lập và mỗi phép thử chỉ có hai kết cục máy hoạt động tốt hoặc máy bị hư với xác suất p = 0.1.

Theo công thức Bernoulli, xác suất để trong 1 ca có hai máy bị hư:

$$P(5; 2; 0.1)= C_5^2 \times (0.1)^2 \times (0.9)^3$$

Ví dụ 1.39: Một sinh viên thi trắc nghiệm môn Ngoại Ngữ gồm có 10 câu hỏi. Mỗi câu có 4 phương án lựa chọn, trong đó chỉ có 1 phương án đúng. Giả sử sinh viên làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên các câu hỏi. Tính xác suất để:

a) Sinh viên vừa đủ điểm đậu (5 điểm).

b) Sinh viên chọn đúng ít nhất 1 câu hỏi.

Giải: Gọi A là biến cố sinh viên vừa đủ điểm đậu.

Xem việc chọn câu trả lời ở mỗi câu hỏi của sinh viên là 1 phép thử thì trong mỗi phép thử có 1 trong 2 khả năng xảy ra :

- ✓ Sinh viên trả lời đúng với xác suất là p =0.25.
- ✓ Sinh viên trả lời sai với xác suất là q =0.75.

a. $P(A) = P(10; 5; 0.25) = C_{10}^{5}\left(0.25\right)^5\left(0.75\right)^5 \approx 0.058$

b. Gọi B là biến cố sinh viên chọn đúng ít nhất 1 câu hỏi.

$\Rightarrow \overline{B}$ là biến cố sinh viên không chọn đúng câu hỏi nào.

Ta có: $P(\overline{B}) = P\left(10; 0; 0.25\right) = C_{10}^{0}\left(0.25\right)^0\left(0.75\right)^{10} = \left(0.75\right)^{10}$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(0.75\right)^{10} = 0.056$$

Ví dụ 3.40: Một bác sĩ có xác suất chữa khỏi bệnh là 0.8. Có người nói rằng cứ 10 người đến chữa bệnh thì chắc chắn có 8 người khỏi bệnh. Điều khẳng định đó có đúng không?

Giải: Ta có thể xem việc chữa bệnh cho 10 người là một dãy của một phép thử độc lập. Nếu gọi A là biến cố chữa khỏi bệnh cho một người thì P(A) = 0.8

Do đó: Xác suất để trong 10 người đến chữa bệnh thì có 8 người khỏi bệnh là:

$$P(10; 8; 0.8) = C_{10}^{8} \times (0.8)^8 \times (0.2)^2 \approx 0.3108.$$

Vậy điều khẳng định trên là sai.

Định nghĩa: Một lược đồ Bernoulli mở rộng gồm:

- ✓ Dãy n phép thử độc lập.
- ✓ Hệ biến cố $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ đầy đủ, xung khắc.

Trong đó: $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, ..., P(A_k) = p_k$ và $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$.

1.4.5 Công thức Bernoulli mở rộng

Giả sử ta thực hiện n phép thử độc lập, hệ biến cố $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ là đầy đủ, xung khắc từng đôi và $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, ..., P(A_k) = p_k$ và $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$. Khi đó xác suất để trong n phép thử độc lập, biến cố A_1 xảy ra m_1 lần, biến cố A_2 xảy ra m_2 lần , …, biến cố A_k xảy ra m_k lần (trong đó $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$) là được tính theo công thức:

$$P(n;m_1,m_2,...,m_k)=\frac{n!}{m_1!m_2!..m_k!}p_1^{\ m_1}.p_2^{\ m_2}...p_k^{\ m_k}$$

Ví dụ 1.41: Lô hàng có 100 sản phẩm trong đó có 30 sản phẩm loại A, 50 sản phẩm loại B và 20 sản phẩm loại C. Lần lượt rút có hoàn lại 9 sản phẩm để kiểm tra. Tính xác suất để trong 9 lần rút đó có 3 lần rút được sản phẩm loại A, 4 lần rút được sản phẩm loại B và 2 lần rút được sản phẩm loại C.

Giải: Gọi A, B, C lần lượt là biến cố rút được sản phẩm loại A, B, C trong mỗi lần rút.

Rõ ràng hệ biến cố $\{A,B,C\}$ đầy đủ và xung khắc từng đôi.

và $P(A)=\frac{30}{100}$, $P(B)=\frac{50}{100}$, $P(A)=\frac{20}{100}$

Do đó: $\mathrm{P}(9;3\mathrm{A},4\mathrm{B},2\mathrm{C})=\frac{9!}{3!4!2!}\left(\frac{30}{100}\right)^3\left(\frac{50}{100}\right)^4\left(\frac{20}{100}\right)^2=0.086$

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài 1: Một tổ gồm có 8 nam và 6 nữ. Tính xác suất để chọn ngẫu nhiên một nhóm 5 người sao cho: a/ Có ít nhất 1 nữ.

b/ Số nữ nhiều hơn số nam.

Bài 2: Ở một hội đồng nhân dân tỉnh có 20 đại biểu trong đó có 6 người nữ. Để điều hành một công việc nào đó cần thành lập một tiểu ban gồm 5 người. Tính xác suất sao cho trong tiểu ban đó có số đại biểu nam không ít hơn 3.

Bài 3: Một lớp có 30 học sinh gồm: 10 học sinh giỏi toán, 10 học sinh giỏi văn, 10 học sinh giỏi ngoại ngữ. Trong đó có 5 học sinh vừa giỏi ngoại ngữ và toán, 3 học sinh vừa giỏi ngoại ngữ và văn, không có học sinh nào giỏi văn và toán hoặc giỏi cả 3 môn. Chọn ngẫu nhiên một học sinh, tính xác suất để được học sinh giỏi ít nhất 1 trong 3 môn nói trên.

Bài 4: Theo thống kê trung bình một năm (365 ngày) có 60 ngày có mưa thật to, 40 ngày có gió thật lớn và 20 ngày có bão (vừa mưa thật to vừa gió thật lớn). Tính xác suất để một ngày chọn ngẫu nhiên trong năm là có thời tiết bất thường (có mưa thật to hoặc có gió thật lớn).

Bài 5: Trong cơ quan có 100 người. Trong đó có 60 người gần cơ quan, 30 nữ, 40 nam gần cơ quan. Tính xác suất để gọi ngẫu nhiên một người trong danh sách

a/ Người đó phải trực cơ quan (theo quy định của cơ quan thì người nào hoặc là nam hoặc gần cơ quan sẽ phải tham gia trực).

b/ Người đó phải trực cơ quan với điều kiện người đó là nữ.

Bài 6: Bắn liên tiếp vào một mục tiêu cho đến khi viên đạn đầu tiên trúng mục tiêu hoặc hết đạn thì ngừng. Xác suất bắn trúng mục tiêu của mỗi lần bắn là 0,6.

a/ Nếu người đó có 4 viên đạn. Tính xác suất để bắn đến viên đạn thứ tư.

b/ Nếu người đó có số viên đạn không hạn chế. Tính xác suất để việc bắn ngừng lại ở lần thứ tư.

Bài 7: Có 3 hộp bi, mỗi hộp có 10 bi. Trong hộp thứ i có i bi đỏ, (10 – i) bi trắng (i = 1,2,3). Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 bi. Tính xác suất

a/ Cả 3 bi lấy ra đều đỏ.

b/ 3 bi lấy ra có 2 bi đỏ, 1 bi trắng.

c/ Biết 3 bi lấy ra có 2 bi đỏ, 1 bi trắng. Tính xác suất bi lấy ra từ hộp thứ hai màu trắng.

Bài 8: Hộp I có 15 lọ thuốc tốt, 5 lọ thuốc hỏng.

Hộp II có 17 lọ thuốc tốt, 3 lọ thuốc hỏng.

Hộp III có 10 lọ thuốc tốt, 10 lọ thuốc hỏng.

a/ Lấy ở mỗi hộp 1 lọ. Tính xác suất để có 1 lọ thuốc hỏng.

b/ Chọn ngẫu nhiên 1 hộp, rồi từ hộp đã chọn lấy ra 3 lọ. Tính xác suất để được 2 lọ tốt và 1 lọ hỏng.

c/ Trộn chung 3 hộp lại rồi từ đó lấy ra 3 lọ. Tính xác suất để được 3 lọ thuốc tốt.

d/ Kiểm tra từng lọ ở hộp II cho đến khi phát hiện đủ 3 lọ thuốc hỏng thì dừng lại. Tính xác suất để việc kiểm tra dừng lại ở lần kiểm tra thứ 4.

Bài 9: Ba khẩu súng độc lập bắn vào một mục tiêu. Xác suất để các khẩu súng bắn trúng mục tiêu lần lượt là: 0,7 ; 0,8 ; 0,5 (mỗi khẩu bắn 1 viên). Tính xác suất để:

a/ Có 1 khẩu bắn trúng.

b/ Có 2 khẩu bắn trúng.

c/ Có ít nhất 1 khẩu bắn trúng.

d/ Khẩu thứ nhất bắn trúng, biết rằng có 2 viên trúng.

Bài 10: Có 2 chuồng thỏ: Chuồng thứ nhất có 5 con đực và 2 con cái; Chuồng thứ hai có 2 con đực và 4 con cái. Từ chuồng thứ nhất có 1 con thỏ chạy qua chuồng thứ hai (không rõ giới tính). Sau khi con thỏ từ chuồng thứ nhất chạy qua thì từ chuồng thứ hai ta bắt ra 1 con. Tính xác suất con thỏ bắt ra từ chuồng thứ hai là con thỏ đực.

Bài 11: Một hộp đựng 3 bi đỏ và 7 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 1 bi, nếu bi lấy ra là bi đỏ thì bỏ vào hộp 1 bi xanh, nếu bi lấy ra là bi xanh thì bỏ vào hộp 1 bi đỏ. Sau đó từ hộp ta lấy tiếp ra 1 bi. a/ Tính xác suất để bi lấy ra lần sau là bi đỏ.

b/ Tìm xác suất để 2 bi lấy ra (lấy lần đầu và lấy lần sau) cùng màu.

c/ Nếu 2 bi lấy ra cùng màu, tính xác suất để 2 bi này cùng màu xanh.

Bài 12: Một cuộc thi có 3 vòng thi: Vòng I lấy 90% thí sinh; vòng II lấy 80% thí sinh của vòng I và vòng III lấy 90% thí sinh của vòng II.

a/ Tính xác suất để thí sinh lọt qua 3 vòng thi.

b/ Tính xác suất để thí sinh đó bị loại ở vòng II, nếu biết rằng thí sinh đó bị loại.

Bài 13: Một chuồng gà có 9 con mái và 1 con trống. Chuồng gà kia có 1 con mái và 5 con trống. Từ mỗi chuồng ta bắt ngẫu nhiên ra 1 con đem bán. Các con gà còn lại được dồn vào một chuồng thứ ba. Nếu ta lại bắt ngẫu nhiên 1 con gà nữa từ chuồng này ra thì xác suất bắt được con gà trống là bao nhiêu?

Bài 14: Một công ty bảo hiểm cho người bị tai nạn. Công ty chia khách hàng của mình ra thành 3 nhóm: Người ít bị rủi ro, người bị rủi ro trung bình và người thường xuyên bị rủi ro với tỷ lệ là: 60% , 30% và 10%. Xác suất bị rủi ro của các nhóm lần lượt là: 0,01 ; 0,05 ; 0,1.

a/ Tính tỷ lệ người bị tai nạn trong năm.

b/ Nếu người bị tai nạn trong năm, họ có khả năng thuộc nhóm nào nhiều nhất?

Bài 15: Có 20 kiện hàng, mỗi kiện có 10 sản phẩm. Trong đó có:

- 8 kiện loại I, mỗi kiện có 1 phế phẩm;
- 7 kiện loại II, mỗi kiện có 3 phế phẩm;
- 5 kiện loại III, mỗi kiện có 5 phế phẩm.

Lấy ngẫu nhiên 1 kiện, rồi từ kiện đã chọn lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm

a/ Tính xác suất sản phẩm lấy ra là phế phẩm.

b/ Biết sản phẩm lấy ra là phế phẩm. Tính xác suất kiện lấy ra là loại II.

Bài 16: Ở hội chợ có 3 cửa hàng: Cửa hàng loại I phục vụ những người "may mắn" bán hàng có tỷ lệ phế phẩm là 1%; Cửa hàng loại II phục vụ những người "bình thường" bán hàng có tỷ lệ phế phẩm là 5%; Cửa hàng loại III phục vụ những người "rủi ro" bán hàng có tỷ lệ phế phẩm là 10%. Một người vào hội chợ phải gieo 2 đồng xu. Người đó là may mắn nếu cả 2 đồng xu đều sấp, là rủi ro nếu cả 2 đồng xu đều ngửa. Tính xác suất để 1 người vào hội chợ và mua phải hàng xấu.

Bài 17: Một công ty có 30 công nhân nam và 20 công nhân nữ. Xác suất tốt nghiệp PTTH của nam là 20%, của nữ là 15%. Chọn ngẫu nhiên 1 người trong công ty

a/ Tính xác suất để người này tốt nghiệp PTTH.

b/ Trong điều kiện gặp được người tốt nghiệp PTTH, tính xác suất để người này là nam.

Bài 18: Tỷ lệ hút thuốc ở một địa phương là 40%. Theo thống kê, tỷ lệ người mắc bệnh phổi trong số những người hút thuốc là 70%, trong số những người không hút thuốc là 5%. Chọn ngẫu nhiên 1 người ở địa phương này thì thấy người đó mắc bệnh phổi. Tính xác suất người đó có hút thuốc.

Bài 19: Hai nhà máy cùng sản xuất ra một loại chi tiết. Năng suất của máy I gấp đôi máy II. Tỷ lệ chi tiết đạt tiêu chuẩn của máy I là 64%, của máy II là 80%. Lấy ngẫu nhiên 1 chi tiết từ lô hàng do 2 nhà máy sản xuất thì được chi tiết đạt tiêu chuẩn. Tính xác suất để chi tiết đó do máy I sản xuất.

Bài 20: Theo kết quả điều tra, tỷ lệ bệnh lao ở một vùng là 0,1%. Tính xác suất để khi khám cho 10 người:

a/ Có 5 người bệnh lao.

b/ Có ít nhất 1 người bệnh lao.

Bài 21: Một sinh viên thi trắc nghiệm môn ngoại ngữ gồm 20 câu hỏi. Mỗi câu có 4 phần để chọn, trong đó chỉ có 1 phần đúng. Giả sử sinh viên đó đã biết rõ 8 câu hỏi, còn lại thì chọn một cách ngẫu nhiên.

a/ Tính xác suất để sinh viên đó làm đúng được toàn bài.

b/ Nếu chọn đúng từ phân nữa trở đi thì sinh viên đó sẽ đậu. Tính xác suất để sinh viên đó đậu.

CHƯƠNG 2: BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ QUI LUẬT PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

2.1 BIẾN NGẪU NHIÊN (BNN)

2.1.1 Các định nghĩa

Biến ngẫu nhiên là biến dùng để biểu thị các giá trị cho các kết quả của một phép thử ngẫu nhiên. Ta thường dùng các kí hiệu X, Y, Z,… để biểu thị cho biến ngẫu nhiên.

Ví dụ 2.1:

- Tung một con súc sắc, gọi X là biểu thị số chấm xuất hiện trên mặt con súc sắc. Khi đó, X là BNN.
- Đo chiều cao của các thiếu niên Việt Nam ở độ tuổi 13. Gọi Y là chiều cao đo được của các sinh viên. Giả sử $Y \in [1m ; 1.5m]$. Vậy Y là BNN.

Phân loại BNN:

+ *BNN rời rạc*: là BNN có một số hữu hạn hoặc vô hạn đếm được các giá trị. Các giá trị có thể của BNN X được ký hiệu $x_1, x_2, \ldots$

+ BNN liên tục: là BNN mà các giá trị của nó lấp đầy một khoảng trên trục số.

Trong ví dụ 2.1, X là BNN rời rạc, Y là BNN liên tục.

2.1.2 Bảng phân phối xác suất

Bảng phân phối xác suất dùng để thiết lập luật phân phối xác suất của BNN rời rạc.

Bảng gồm 2 dòng: Dòng trên ghi các giá trị có thể có của BNN là: $x_1, x_2, .. , x_n$; dòng dưới ghi các xác suất tương ứng là: $P_1, P_2, .. , P_n$.

X	x_1	x_2	x_3	. . .	x_n
P	P_1	P_2	P_3	. . .	P_n

Chú ý: $P(X = x_i)$: Xác suất để BNN X nhận giá trị x_i.

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

Ví dụ 2.2: Tung 1 con súc sắc, gọi X là số chấm xuất hiện trên mặt của một con súc sắc. Khi đó bảng phân phối xác suất của X là:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ví dụ 2.3: Tiến hành thử độ bền của 3 loại vật liệu, với điều kiện vật liệu thử trước phải vượt qua được phép thử mới thử tiếp vật liệu sau. Biết rằng khả năng vượt qua phép thử của các vật liệu đều bằng 0.8. Hãy tìm luật phân phối xác suất của số vật liệu vượt qua phép thử.

Giải: Gọi X là số vật liệu vượt qua phép thử.

A_i là biến cố vật liệu thứ i vượt qua phép thử $\left(i = \overline{1,3}\right)$.

Ta có: $P(X = 0) = P(\overline{A_1}) = 0.2$

$$P(X = 1) = P(A_1 \cap \overline{A_2}) = P(A_1)P(\overline{A_2}) = 0.8 \times 0.2 = 0.16$$

$$P(X = 2) = P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) = 0.8 \times 0.8 \times 0.2 = 0.128$$

$$P(X = 3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0.8 \times 0.8 \times 0.8 = 0.512$$

Bảng phân phối xác suất của X là:

X	0	1	2	3
P	0.2	0.16	0.128	0.512

Ví dụ 2.4: Hộp có 10 viên bi, trong đó có 6 viên màu đỏ, còn lại màu trắng. Rút đồng thời 4 viên bi và gọi X là số viên bi màu đỏ được rút ra. Lập luật phân phối xác suất của X.

Giải: Gọi A_i là biến cố rút được i viên bi màu đỏ $(i = \overline{0,4})$.

Các xác suất được tính theo nguyên tắc hộp kín như sau:

$$P(X = 0) = P(A_0) = \frac{C_6^0 C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210} = 0.005$$

$$P(X = 1) = P(A_1) = \frac{C_6^1 C_4^3}{C_{10}^4} = \frac{24}{210} = 0.114$$

$$P(X = 2) = P(A_2) = \frac{C_6^2 C_4^2}{C_{10}^4} = 0.429$$

$$P(X = 3) = P(A_3) = \frac{C_6^3 C_4^1}{C_{10}^4} = 0.318$$

$$P(X = 4) = P(A_4) = \frac{C_6^4 C_4^0}{C_{10}^4} = 0.071$$

Vậy ta có bảng phân phối xác suất của X là:

X	0	1	2	3	4
P	0.005	0.114	0.429	0.381	0.071

2.1.3 Hàm mật độ xác suất

Hàm số y = f(x) xác định trên (-∞ , +∞) được gọi là hàm mật độ xác suất của BNN liên tục X nếu:

i) $f(x) \geq 0, \forall x$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

- **Tính chất:**

i) $P(X = x_0) = 0$.

ii) $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

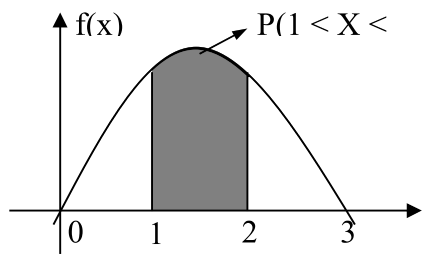
iii) $P(X < \alpha) = P(-\infty < X < \alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$

iv) $P(X > \alpha) = P(\alpha < X < +\infty) = \int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$

v) *Đặc biệt:* f(x) chỉ nhận giá trị trên [a; b] thì: $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = 1$

Ví dụ 2.5: Cho BNN liên tục có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} c\left(3x - x^2\right), & x \in [0,3] \\ 0, & x \notin [0,3] \end{cases}$$



a) Xác định hằng số c.

b) Tính $P(1 < X < 2)$.

Giải: a. Ta có:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{3} f(x)dx + \int\limits_{3}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{3} c(3x - x^2)dx + \int\limits_{3}^{+\infty} 0dx \quad = \frac{9}{2}c$$

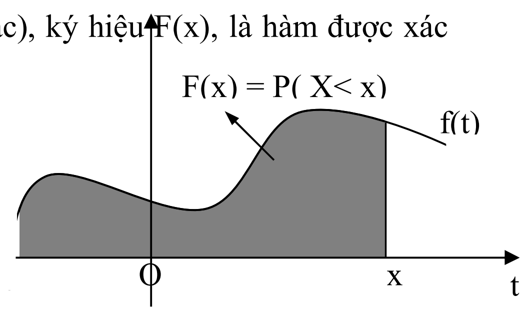
Vậy: $c = \dfrac{2}{9}$

b. Ta có: $P\,(1 < X < 2) = \int\limits_{1}^{2} f(x)\,dx = \int\limits_{1}^{2} \frac{2}{9}(3x - x^2)\,dx = \frac{13}{27}$.

2.1.4 Hàm phân phối xác suất

Hàm phân phối xác suất của BNN X (liên tục hoặc rời rạc), ký hiệu F(x), là hàm được xác định như sau:

F(x) = P(X < x)



✓ Nếu X là BNN rời rạc: $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$

✓ Nếu X là BNN liên tục: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$

(Bằng diện tích hình thang cong, cạnh trái t = -∞, cạnh phải t = x).

Tính chất:

i) $0 \le F(x) \le 1\ , \forall x$

ii) F(x) là hàm không giảm

iii) $F(-\infty) = 0$ $F(+\infty) = 1$

iv) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$

v) Nếu X là ĐLNN rời rạc thì F(x) có dạng bậc thang

vi) Nếu X là ĐLNN liên tục có hàm mật độ xác suất f(x) thì $F'(x) = f(x)$

Ý nghĩa: Hàm phân phối xác suất F(x) phản ánh mức độ tập trung xác suất về phía bên trái của điểm x.

Ví dụ 2. 6: Cho X có bảng phân phối xác suất

X	1	2	3
P	0.5	0.2	0.3

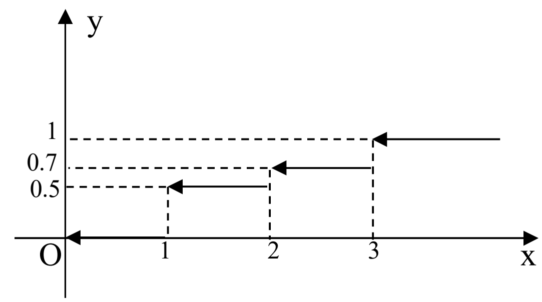
Tìm F(x) và vẽ đồ thị.

Giải: Ta có: $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$

- $x \le 1: F(x) = 0$
- $1 < x \le 2: F(x) = 0.5$
- $2 < x \le 3:$ $F(x) = 0.5 + 0.2 = 0.7$
- $x > 3:$ $F(x) = 0.5 + 0.2 + 0.3 = 1$

Vậy: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad x \le 1 \\ 0.5 & \text{khi} \quad 1 < x \le 2 \\ 0.7 & \text{khi} \quad 2 < x \le 3 \\ 1 & \text{khi} \quad x > 3 \end{cases}$

Đồ thị F(x)



Đồ thị hàm số có dạng bậc thang

Ví dụ 2.7: Cho BNN X có: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad x \le 0 \\ x & \text{khi} \quad 0 < x \le 1 \\ 2 - x & \text{khi} \quad 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{khi} \quad x > 2 \end{cases}$

Tìm hàm phân phối xác suất F(x) và vẽ đồ thị của nó .

Giải: Ta có: * $x \le 0: F(x) = 0$

- $0 < x \le 1: F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}$
- $1 < x \le 2: F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{x} f(x)dx =$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} xdx + \int_{1}^{x} (2 - x)dx =$$

$$= \frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{2} + 2x + -1$$

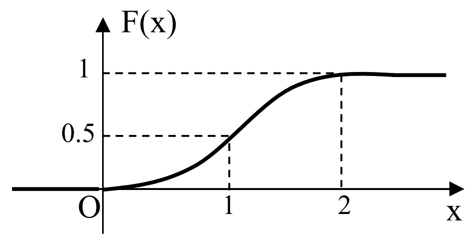
- $x > 2: F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{x} f(x)dx =$

$$= \int_{0}^{1} xdx + \int_{1}^{2} (2-x)dx = \frac{1}{2} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = 1$$

Vậy:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{2} & \text{khi} \quad 0 < x \le 1 \\ -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 1 & \text{khi} \quad 1 < x \le 2 \\ 1 & \text{khi} \quad x > 2 \end{cases}$$

Đồ thị



2.2 THAM SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BNN

2.2.1 Kỳ vọng (expectation)

Định nghĩa: Giả sử X là BNN rời rạc có thể nhận các giá trị $x_1, x_2, .., x_n$ với các xác suất tương ứng $P_1, P_2, .., P_n$

- Khi đó kỳ vọng của X, kí hiệu là E(X) hay M(X) được xác định bởi công thức:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$$

- Nếu X là BNN liên tục có hàm mật độ xác suất là f(x) thì kỳ vọng của X là:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$$

Ví dụ 2.9: Cho X là BNN rời rạc có bảng phân phối xác suất sau:

X	5	6	7	8	9	10	11
P	1/12	2/12	3/12	2/12	2/12	1/12	1/12

Ta có:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{7} x_i p_i = 5 \times \frac{1}{12} + 6 \times \frac{2}{12} + 7 \times \frac{3}{12} + 8 \times \frac{2}{12} + 9 \times \frac{2}{12} + 10 \times \frac{1}{12} + 11 \times \frac{1}{12} = \frac{93}{12} = 7.75$$

Ví dụ 2.10: Cho X là BNN rời rạc có luật phân phối:

X	0	1	3	4	7	8
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{12}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$

Ta có: $E(X)=\sum_{i=1}^{6}x_ip_i=0\times\frac{1}{30}+1\times\frac{3}{30}+3\times\frac{12}{30}+4\times\frac{8}{30}+7\times\frac{4}{30}+8\times\frac{2}{30}=\frac{125}{30}=\frac{25}{6}\approx 4.17$

Ví dụ 2.11: Cho BNN liên tục X có hàm mật độ xác suất:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{32}\left(4x-x^2\right), & x\in[0,4]\\ 0 , & x\notin[0,4]\end{cases}$$

Ta có: $E(X)=\int_{+\infty}^{-\infty}xf(x)dx=\int_0^4 x\frac{3}{32}(4x-x^2)dx=\frac{3}{32}\int_0^4(4x^2-x^3)dx=\frac{3}{32}\left[4\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^4$

$$=\frac{3}{32}\left[\frac{4^4}{3}-\frac{4^4}{4}\right]=\frac{3}{2\times4^2}\frac{4\times4^4-3\times4^4}{3\times4}=\frac{4^4}{2\times4^3}=2$$

♦ ***Tính chất:***

i) E(C) = C

ii) E(CX) = CE(X) , với C là hằng số.

iii) E(X + Y) = E(X) + E(Y)

iv) Nếu X, Y là hai BNN độc lập thì:

E(XY) = E(X)E(Y).

Chú ý: Tính chất iii) và iv) có thể mở rộng cho nhiều biến ngẫu nhiên.

Ý nghĩa: Kỳ vọng của 1 BNN chính là giá trị trung bình (theo xác suất) của BNN đó. Nó là trung tâm điểm của phân phối mà các giá trị cụ thể của X sẽ tập trung quanh đó.

Ví dụ 2.12: Giả sử ta có cái bình lớn đựng 10 quả cầu giống nhau nhưng khác nhau về trọng lượng: 5 quả nặng 1 kg, 2 quả nặng 2 kg, 3 quả nặng 3 kg. Ta lấy ngẫu nhiên từ bình ra 1 quả cầu và gọi X là trọng lượng của quả cầu đó. Tính E(X) và so sánh E(X) với trọng lượng trung bình của 1 quả cầu trong hộp.

✓ Bảng phân phối xác suất của X:

X	1	2	3
P	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$\Rightarrow E(X)=\sum_{x=1}^{3}x_ip_i=1\times\frac{5}{10}+2\times\frac{2}{10}+3\times\frac{3}{10}=\frac{18}{10}$$

✓ Gọi M là trọng lượng trung bình của các quả cầu trong bình.

Ta có: $M=\frac{5\times1+2\times2+3\times3}{10}=\frac{18}{10}$

Vậy: E(X) = M

2.2.2 Phương sai: (Variance)

Định nghĩa: Phương sai (độ lệch bình phương trung bình) của BNN X, kí hiệu Var(X) được xác định bởi công thức:

$$Var(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

- Nếu X là BNN rời rạc có thể nhận các giá trị là $x_1, x_2, .., x_n$ với các xác suất tương ứng là $P_1, P_2, .. , P_n$ thì:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n}\left[x_i - E(X)\right]^2.P_i$$

- Nếu X là BNN liên tục có hàm mật độ xác suất là f(x) thì:

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[x - E(X)\right]^2 f(x)dx$$

Chú ý: Trong thực tế ta thường tính phương sai bằng công thức:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

*Ví dụ 2.13***:** Cho X là BNN rời rạc có bảng phân phối xác suất sau:

X	1	3	5
P	0.1	0.4	0.5

Ta có: $E(X) = 3.8$

$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1.76$

Ví dụ 2.14: Cho X là BNN liên tục có hàm mật độ xác suất sau:

$$f(x) = \begin{cases} cx^3 & x \in [0,3] \\ 0 & x \notin [0,3] \end{cases}$$

Tìm hằng số c, E(X), Var(X)

Giải: Ta có: $1 = \int_0^3 cx^3dx = c\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{81c}{4}$

Dễ dàng tính được $c = 4/81$; $E(X) = 2.4$; $\mathrm{Var}(X) = 0.24$

♦ ***Tính chất:***

i) $\mathrm{Var}(C) = 0$

ii) $\mathrm{Var}(CX) = C^2\mathrm{Var}(X)$

iii) Nếu X, Y là 2 BNN độc lập thì:

$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$; $\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

iv) $\mathrm{Var}(C+X) = \mathrm{Var}(X)$

Ý nghĩa: Ta thấy X - E(X) là độ lệch khỏi giá trị trung bình. Do đó phương sai $\mathrm{Var}(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$ gọi là độ lệch bình phương trung bình. Nên phương sai phản ánh mức độ phân tán các giá trị của BNN xung quanh giá trị trung bình.

Như vậy, phương sai phản ánh mức độ phân tán các giá trị của BNN chung quanh kỳ vọng. BNN có phương sai càng lớn thì các giá trị càng phân tán và ngược lại.

Ứng dụng: Trong công nghiệp, phương sai biểu thị độ chính xác của sản xuất. Trong chăn nuôi, nó biểu thị độ đồng đều của các con gia súc. Trong trồng trọt, nó biểu thị mức độ ổn định của năng suất, ...

Ví dụ 2.15: Giả sử X là khối lượng các gói bột giặt của phân xưởng I, Y là khối lượng các gói bột giặt của phân xưởng II. Trong đó: E(X) = E(Y) = 500g và Var(X) >Var(Y). Khi đó, các gói bột giặt của phân xưởng II có khối lượng tập trung hơn xung quanh khối lương 500g. Nói cách khác, hệ thống đóng gói của phân xưởng II hoạt động tốt hơn phân xưởng I.

2.2.3 Độ lệch tiêu chuẩn

Độ lệch tiêu chuẩn của BNN X, kí hiệu σ(X) được xác định bởi công thức:

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

2.2.4 Mômen

Mômen cấp k của BNN X là số $m_k = E(X^k)$

Mômen quy tâm cấp k của BNN X là số: $\alpha_k = E\{[X - E(X)]^k\}$

- *Nhận xét:* Mômen cấp 1 của X là kỳ vọng của X

  Mômen quy tâm cấp 2 của X là phương sai của X

2.2.5 Mode

ModX là giá trị của BNN X có xác suất lớn nhất.

Đối với BNN rời rạc, mod(X) là giá trị của X ứng với xác suất lớn nhất. Còn đối với BNN liên tục thì mod(X) là giá trị của X tại đó hàm mật độ đạt giá trị cực đại.

Chú ý: Một BNN có thể có 1 mode hoặc nhiều mode.

Ví dụ 2.16: X là BNN rời rạc có luật phân phối:

X	0	1	3	4	7	8
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{12}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$

Ta thấy $P(X = 3) = \frac{12}{30} \to \max$ => mod(X) = 3.

Ví dụ 2.17: Cho BNN X liên tục có hàm mật độ:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} & x > 0 \end{cases}$$

Hãy tìm mod(X).

Xét: $f(x) = \frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$

Có: $f'(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4} e^{-\frac{x^2}{4}}$

$$\Rightarrow f^{'}(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}-\frac{x^2}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}=0 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-\frac{x^2}{2})e^{-\frac{x^2}{4}}=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\frac{x^2}{2})=0 \quad \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

Và: $f''(x)=-\frac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}-\left(\frac{x}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}-\frac{x^3}{8}e^{-\frac{x^2}{4}}\right)=-\frac{3x}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}+\frac{x^3}{8}e^{-\frac{x^2}{4}}=(\frac{x^2}{2}-3)\frac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}$

Suy ra:

$+\ x=\sqrt{2}: f''(\sqrt{2})=(2-3)\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-1}=-\frac{\sqrt{2}}{4e}<0 \qquad \Rightarrow f(\sqrt{2})\to \max$

$+\ x=-\sqrt{2}: f''(-\sqrt{2})=(2-3)\frac{-\sqrt{2}}{4}e^{-1}=\frac{\sqrt{2}}{4e}>0 \qquad \Rightarrow f(\sqrt{2})\to \min$

Vậy: $\text{mod}(X)=\sqrt{2}=1{,}414$

2.2.6 Trung vị (medX)

Định nghĩa: Trung vị của BNN X là giá trị của X chia phân phối xác suất thành 2 phần có xác suất giống nhau.

$$P(X<med(X))=P(X\geq med(X))=\frac{1}{2}$$

Nhận xét: Từ định nghĩa ta thấy để tìm trung vị chỉ cần giải phương trình $F(med(X))=\frac{1}{2}$. Trong ứng dụng, trung vị là đặc trưng vị trí tốt nhất, nhiều khi tốt hơn cả kỳ vọng, nhất là khi trong số liệu có nhiều sai sót. Trung vị còn gọi là phân vị 50% của phân phối.

Ví dụ 2.18: Cho X như trong **ví dụ 2.17**. Hãy xác định med(X).

Med(X) là nghiệm của phương trình:

$$F(med(X))=\int_{-\infty}^{med(X)}f(x)dx=\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \int_{0}^{med(X)}f(x)dx=\int_{0}^{med(X)}\frac{x}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}dx=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\int_{0}^{med(X)}e^{-\frac{x^2}{4}}d(-\frac{x^2}{4})=\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow -e^{-\frac{x^2}{4}}\Big|_{0}^{med(X)}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1-e^{-\frac{[med(X)]^2}{4}}=\frac{1}{2}\Rightarrow e^{-\frac{[med(X)]^2}{4}}=\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{\left[med(X)\right]^2}{4}=\ln\frac{1}{2}=-0.693$$

$$\Rightarrow \left[med(X)\right]^2=2{,}772 \qquad \Rightarrow med(X)=1{,}665 \qquad (do\, med(X)>0)$$

Vậy: med(X) = 1.665

Chú ý: Nói chung, ba số đặc trưng: E(X), mod(X), med(X) không trùng nhau. Chẳng hạn, từ các ví dụ 2.17 và 2.17 và ta tính thêm kỳ vọng ta có: E(X) = 1.772, mod(X) = 1.414 và med(X) = 1.665. Tuy nhiên nếu phân phối đối xứng chỉ có một mod thì 3 đặc trưng đó trùng nhau.

2.3 MỘT SỐ QUI LUẬT PHÂN PHỐI XÁC SUẤT THÔNG DỤNG

2.3.1 Phân phối nhị thức, $X \in B(n,p)$

Định nghĩa: BNN X có phân phối nhị thức là BNN rời rạc nhận các giá trị 0, 1, 2,…,n với các xác suất tương ứng được tính theo công thức Bernoulli:

$$P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}; \quad x \in \{0,1,\dots,n\}$$

Ví dụ 2.19: Tỷ lệ sản phẩm bị lỗi trong 1 lô hàng là 3%. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 100 sản phẩm ra để kiểm tra. Tính xác suất để:

a) Có 3 sản phẩm bị lỗi.

b) Có không quá 3 sản phẩm bị lỗi.

Giải: Mỗi lần kiểm tra một sản phẩm là thực hiện một phép thử, lấy lần lượt 100 sản phẩm ra để kiểm tra, ta xem như thực hiện 100 phép thử độc lập.

Gọi A là biến cố sản phẩm lấy ra là sản phẩm bị lỗi

$P = P(A) = 3\%$

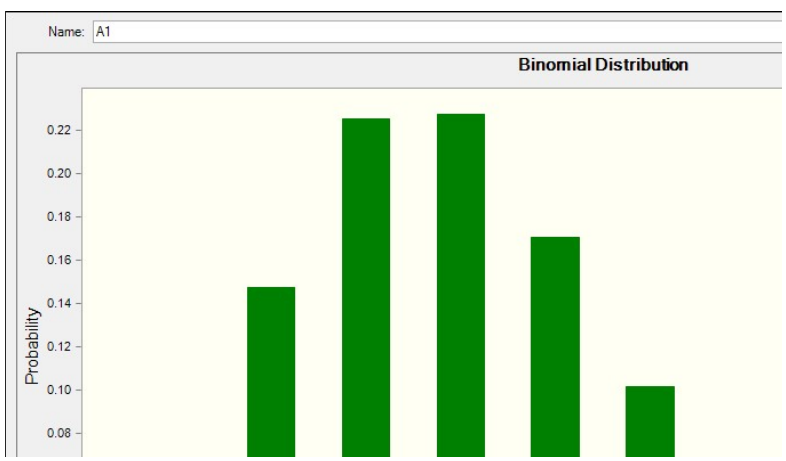
Gọi X là số sản phẩm bị lỗi có trong 100 sản phẩm lấy ra, $X \in B(100; 0.03)$

a) $P(X = 3) = C_{100}^3 (0.03)^3 (0.97)^{97}$

b) $P(0 \le X \le 3) = \sum_{k=0}^{3} P(X = k)$

$$= C_{100}^0 (0.03)^0 (0.97)^{100} + C_{100}^1 (0.03)^1 (0.97)^{99} + C_{100}^2 (0.03)^2 (0.97)^{98} + C_{100}^3 (0.03)^3 (0.97)^{97}$$

$= 0,647$



Phân phối nhị thức: n = 100; p = 0.03

***Nhận xét**: Trong phân phối nhị thức, nếu n khá lớn và xác suất p không quá gần 0 và 1 thì ta có công thức xấp xỉ sau:*

i) $P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x} \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}} f\left(\dfrac{x - np}{\sqrt{npq}}\right)$; $\qquad f(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}}$

(*gọi là công thức địa phương Laplace*)

ii) $P(a \le X \le b) = \varphi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \varphi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)$; $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{\frac{-t^2}{2}}dt$

(*gọi là công thức tích phân Laplace*)

Chú ý: Hàm f(u) là hàm chẵn, hàm φ(u) là hàm lẻ.

Các giá trị của hàm f(u) và hàm φ(u) tra bảng

Các tham số đặc trưng: Nếu $X \in B(n,p)$ thì

- $E(X) = np$
- $Var(X) = npq$
- $np - q \le mod(X) \le np + p$

Ví dụ 2.20: Một máy sản xuất được 200 sản phẩm trong một ngày. Xác suất để sản phẩm bị lỗi là 0.05. Tìm số sản phẩm bị lỗi trung bình và số sản phẩm bị lỗi có khả năng tin chắc của máy đó trong một ngày.

Giải: Gọi X là số sản phẩm bị lỗi của máy trong một ngày thì $X \in B(200; 0.05)$

Số sản phẩm bị lỗi trung bình của máy trong một ngày là: $E(X) = np = 200 \times 0.05 = 10$

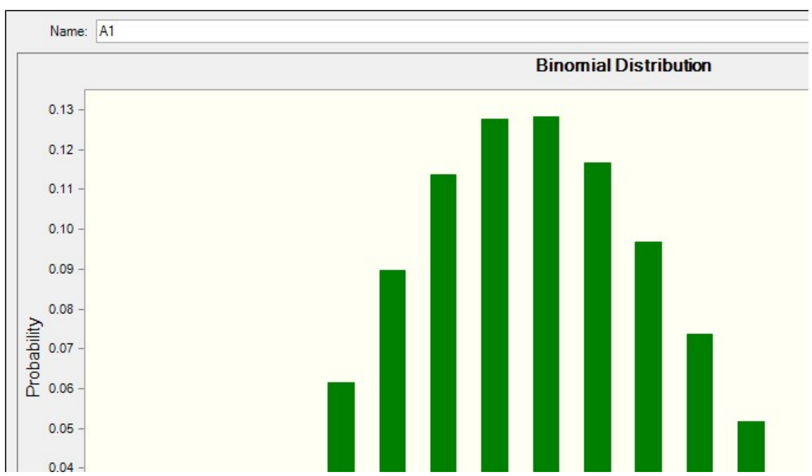
Số sản phẩm bị lỗi tin chắc trong một ngày là mod(X). Ta có:

$np - q = 200 \times 0.05 - 0.95 = 9.05$

$np + p = 200 \times 0.05 + 0.05 = 10.05$

$\Rightarrow 9.05 \le mod(X) \le 10.05$

Vì $X \in B(200; 0.05)$ nên $mod(X) \in \mathbf{Z}$. Do đó $mod(X) = 10$



Phân phối nhị thức : n = 200 ; 0.05

Ví dụ 2.21: Một nhà máy sản xuất sản phẩm với tỷ lệ sản phẩm loại A là 20%. Nếu lấy ngẫu nhiên 400 sản phẩm, tính xác suất để:

a. Được 80 sản phẩm loại A.
b. Được từ 60 đến 80 sản phẩm loại A.
c. Tính xem trung bình có bao nhiêu sản phẩm loại A.

Giải : Gọi Y là số sản phẩm loại A có trong 400 sản phẩm chọn ra, $Y \in B(400 ;0,2)$

Do n = 400, 0 << p = 0,2 << 1 nên ta có thể áp dụng công thức xấp xỉ:

a. $P(Y=80) = C_{400}^{80}(0.2)^{80}(0.8)^{320}$

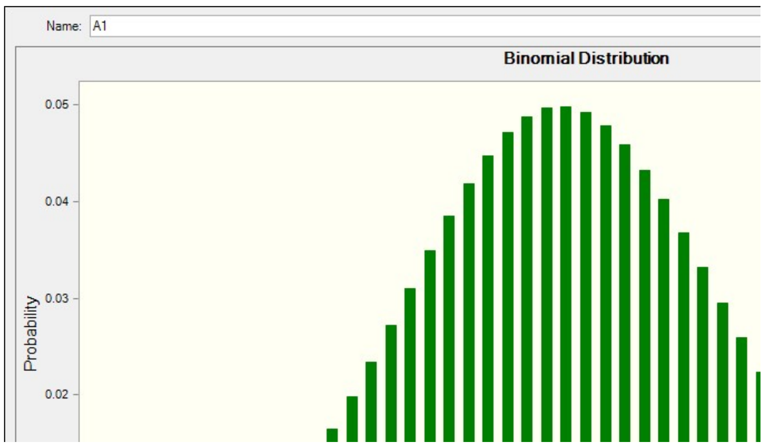
$$= \frac{1}{\sqrt{400\times0.2\times0.8}} f\left(\frac{80-400\times0.2}{\sqrt{400\times0.2\times0.8}}\right) = \frac{1}{8}f(0) = \frac{1}{8}\times0.3989 = 0.0499$$

b. $P(60 \le Y \le 80) = \varphi\left(\frac{80-400\times0.2}{\sqrt{400\times0.2\times0.8}}\right) - \varphi\left(\frac{60-400\times0.2}{\sqrt{400\times0.2\times0.8}}\right)$

$$= \varphi(0) - \varphi(-2.5) = \varphi(0) + \varphi(2.5) = 0 + 0.4938 = 0.4938$$

c. $E(Y) = n.p = 400\times0.2 = 80$

Vậy trung bình có 80 phế phẩm trong 400 sản phẩm chọn ra.



Phân phối nhị thức: n = 400; p = 0.2

2.3.2 Phân phối Poison, $X \in P(\lambda)$

Giả sử X là BNN có phân phối nhị thức với tham số n và p. Khi n khá lớn và $np = \lambda$ (hằng số), ta có:

$$P(X=x) = C_n^x p^x q^{n-x} \approx \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \qquad \textit{(gọi là công thức Poison)}$$

Định nghĩa: BNN X có luật Poison là BNN rời rạc nhận các giá trị 0,1,2,.., n với các xác suất tương ứng được tính theo công thức Poison.

Ví dụ 2.22: Một nhà máy dệt có 1000 ống sợi. Xác suất để trong 1 giờ máy hoạt động có 1 ống sợi bị đứt là 0.002. Tính xác suất để trong 1 giờ máy hoạt động có không quá 2 ống sợi bị đứt.

Giải: Vì n khá lớn, n =1000; p = 0.002 $\Rightarrow$ np = 2

Việc quan sát ống sợi xem như là một phép thử, ta có 1000 phép thử độc lập.

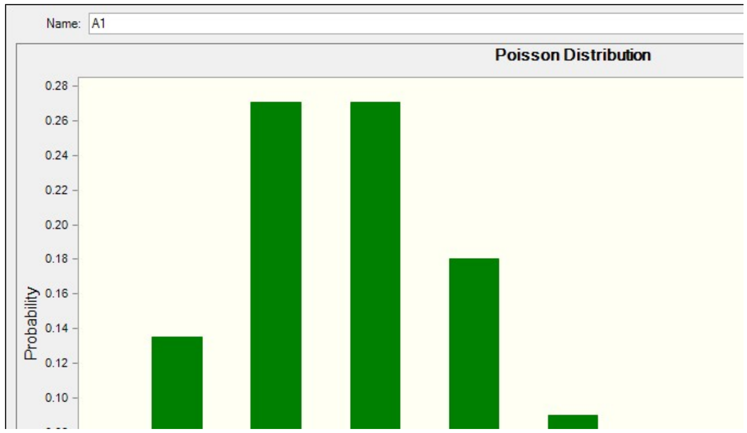
Gọi A là biến cố ống sợi bị đứt và X là số ống sợi bị đứt trong 1 giờ máy hoạt động.

P = P(A) = 0.002 $\Rightarrow X \in B(1000; 0.002)$

Nhưng vì n khá lớn và np = 2 (hằng số) $\Rightarrow X \in P(2)$

Ta có: $P(0 \le X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$$= \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 0.6808$$



Phân phối possion : $\lambda = 2$

Các tham số đặc trưng: Nếu $X \in P(\lambda)$ thì $E(X) = Var(X) = \lambda$ và $\lambda - 1 \le mod(X) \le \lambda$

Nhận xét: Số lỗi in sai trong một trang (hoặc một số trang) của một cuốn sách, số người trong một cộng đồng sống cho tới 100 tuổi, số cuộc điện thoại gọi sai trong một ngày, số transitor hư trong ngày đầu tiên sử dụng, số khách hàng vào bưu điện trong một ngày, số hạt α phát ra từ các hạt phóng xạ trong một chu kỳ,.. *có luật Poison.*

2.3.3 Phân phối siêu bội, $X \in H(N, M, n)$

Cho tập hợp có N phần tử trong đó có M phần tử có tính chất A. Lấy ngẫu nhiên ra n phần tử. Gọi X là số phần tử có tính chất A có trong n phần tử lấy ra. Khi đó, X là BNN rời rạc có thể nhận các giá trị 0,1,2,.. ,n với các xác suất tương ứng là:

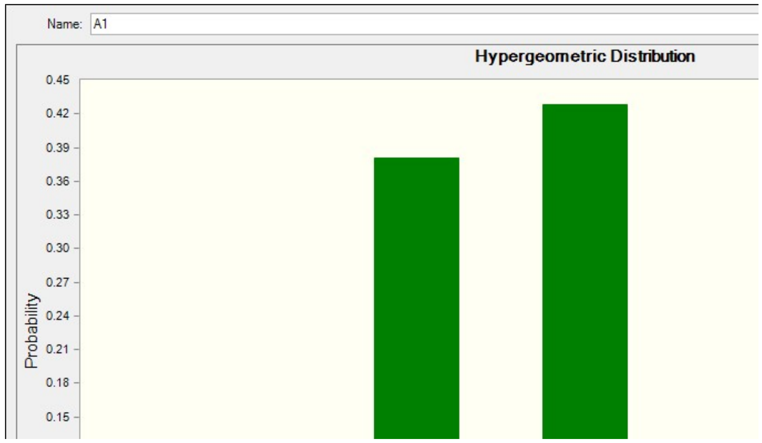
$$P(X = x) = \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} \qquad \textit{(gọi là công thức siêu bội)}$$

Định nghĩa: BNN X có luật siêu bội là BNN rời rạc nhận các giá trị 0, 1, 2,.. ,n với các xác suất tương ứng được tính theo công thức siêu bội.

Ví dụ 2.23: Một lô hàng gồm có 10 sản phẩm, trong đó có 4 loại A. Lấy ngẫu nhiên 4 sản phẩm từ lô hàng, tính xác suất để có 2 sản phẩm loại A

Giải: Gọi X là số sản phẩm loại A trong 4 sản phẩm lấy ra. X là BNN có phân phối siêu bội với tham số N = 10, M = 4 và n = 4

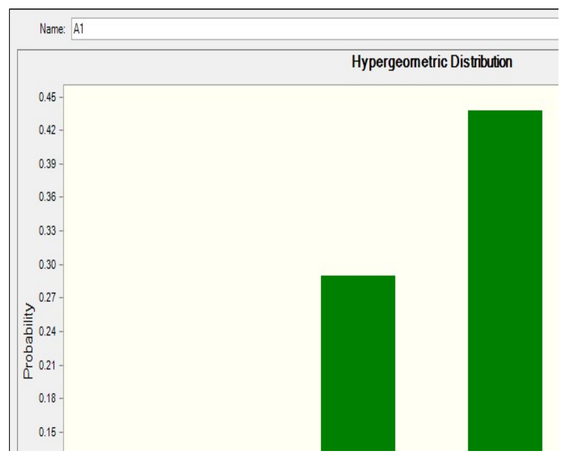
$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_6^2}{C_{10}^4} = 0.4286$$



Phân phối siêu bội: N = 10; M = 4; n = 4

Chú ý: Nếu n << N thì $\frac{C_M^x . C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} \approx C_n^{\ x} p^x (1-p)^{n-x}$ với $p = \frac{M}{N}$, như vậy: Khi n << N, ta có thể xem như $X \in B(n;p)$ và $p = \frac{M}{N}$

Phân phối nhị thức: n = 3; p = 0.6



Phân phối siêu bội: N = 100; M = 60; n = 3

Các tham số đặc trưng:

Nếu $X \in H(N;M;n)$ thì $E(X) = np$ và $Var(X) = npq\frac{N-n}{N-1}$ với $\left(p = \frac{M}{N}\right)$

Ví dụ 2.24: Gọi X là số cây bài 2 nút trong 3 cây bài lấy ra từ bộ bài 52 cây. Hãy tính: E(X), Var(X)

Giải: Ta có: $X \in H(52, 4, 3) \Rightarrow \ p = \frac{M}{N} = \frac{4}{25} = \frac{1}{13} \quad \Rightarrow \quad q = 1 - p = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

Ta được: $E(X) = np = 3\frac{1}{13} = 0.231$.

$$Var(X) = npq\frac{N-n}{N-1} = 3\frac{1}{13} \times \frac{12}{13} \times \frac{52-3}{52-1} = 0.051.$$

Ví dụ 2.25: Một trường gồm có 10000 sinh viên, trong đó có 1000 học kém. Một Đoàn thanh tra đến trường, chọn ngẫu nhiên 100 sinh viên để kiểm tra. Tính xác suất để có 20 sinh viên học kém.

Gọi X là số sinh viên học kém trong 100 sinh viên được chọn ra.

Ta có: $X \in H(10000;\ 1000;\ 100) \Rightarrow P(X = 20) = \dfrac{C_{1000}^{20} C_{9000}^{80}}{C_{10000}^{100}}$

Vì N = 10000 rất lớn, n = 100 << 10000 = N nên X xấp xỉ phân phối nhị thức:

$X \in B(100;\ 0.1)$ với $p = \dfrac{M}{N} = \dfrac{1000}{10000} = 0.1$.

Mặt khác, do n = 100 và 0 << p = 0.1 << 1 nên ta có thể áp dụng công thức xấp xỉ sau:

$$P(X = 20) = C_{100}^{20}(0.1)^{20}(0.9)^{80}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{100\times 0.1\times 0.9}} f\left(\frac{20 - 100\times 0.1}{\sqrt{100\times 0.1\times 0.9}}\right)$$

$$= \frac{1}{3} f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{1}{3} f(3.33) = \frac{1}{3}\times 0.0017 = 0.00057.$$

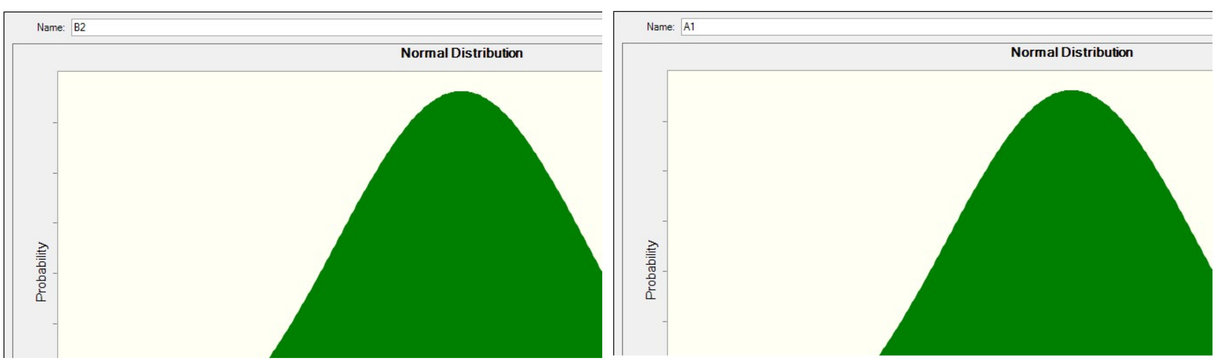
2.3.4 Phân phối chuẩn, $X \in N(\mu;\sigma^2)$

Định nghĩa: BNN X có luật chuẩn là BNN liên tục nhận giá trị từ $-\infty$ đến $+\infty$ với hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

với a là hằng số, $0 < \sigma$: hằng số, $-\infty < x < +\infty$.

Nếu μ = 0 và σ = 1 thì BNN liên tục X được gọi là có phân phối chuẩn tắc.



Biểu đồ phân phối chuẩn và phân phối chuẩn tắc

Các tham số đặc trưng: Nếu $X \in N(a;\sigma^2)$ thì E(X) = Mod(X) = a và Var(X) = σ^2.

Nhận xét: Phân phối chuẩn có ý nghĩa rất lớn trong thực tế. Rất nhiều BNN có luật phân phối chuẩn. Những BNN có liên quan đến số lượng lớn, chịu ảnh hưởng của các yếu tố cân bằng nhau thường có luật phân phối chuẩn. Chẳng hạn:

- ✓ Các chỉ số sinh học (cân bằng, chiều cao,...) của người cùng giới tính và cùng độ tuổi.

- ✓ Các chỉ số sinh học của các loài cây, loài vật cùng độ tuổi.
- ✓ Khối lượng, kích thước của các sản phẩm do cùng 1 hệ thống máy sản xuất ra.

Định lý: Nếu *$X \in N(\mu, \sigma^2)$ thì $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \in N(0,1)$.*

Hệ quả: *Cho $X \in N(\mu\ ,\ \sigma^2)$, ta có:*

a. $P(x_1 \le X \le x_2) = \varphi\left(\dfrac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\dfrac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$.

b. $P\left(|X-\mu| \le \varepsilon\right) = 2\varphi\left(\dfrac{\varepsilon}{\sigma}\right)$

Suy ra: $P\left(|X-\mu| \le \sigma\right) \approx 68\%$; $P\left(|X-\mu| \le 2\sigma\right) \approx 95\%$; $P\left(|X-\mu| \le 3\sigma\right) \approx 99.99\%$

c. $P(X \le x) = 0.5 + \varphi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Ví dụ 2.26: Lãi suất đầu tư vào Công ty B là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn $N(\mu,\sigma^2)$, biết xác suất để đạt được lãi suất trên 20%/ 1 năm là 0.2 và dưới 10%/ 1 năm là 0.1.

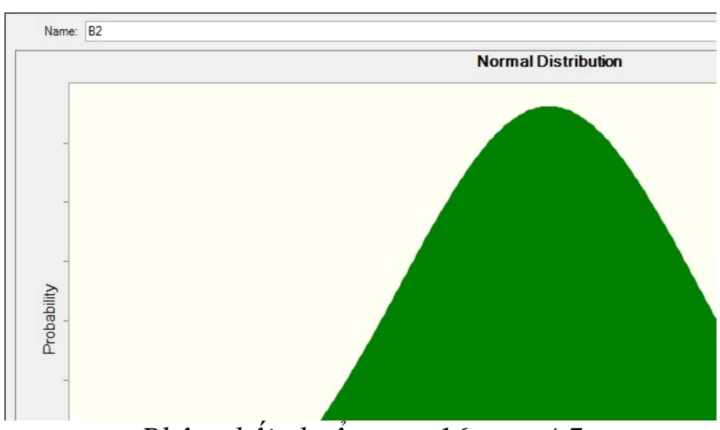
a) Tìm kỳ vọng μ và phương sai σ^2.
b) Tính xác suất để khi đầu tư vào công ty B đó được lãi suất ít nhất 14%/ 1 năm.

Giải: a) Ta có: $P\left(Y < 10\right) = 0.5 + \varphi\left(\dfrac{10-\mu}{\sigma}\right) = 0.1 \Rightarrow \mu - 1.28\sigma = 10$ (1)

$P\left(Y > 20\right) = 1 - P\left(Y \le 20\right) = 0.5 - \varphi\left(\dfrac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0.2 \Rightarrow \mu + 0.84\sigma = 20$ (2)

Giải hệ (1) và (2): $\mu \approx 16$; $\sigma \approx 4.7$

b) $P\left(Y \ge 14\right) = 1 - P\left(Y < 14\right) = 0.5 - \varphi\left(\dfrac{14-16}{4.7}\right) = 0.67$



Phân phối chuẩn: μ = 16; σ = 4.7

2.3.5 Phân phối mũ, $X \in Exp(\lambda)$

Định nghĩa: *BNN X có luật mũ là BNN liên tục có hàm mật độ xác suất:*

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x); \quad (x \geq 0, \lambda > 0)$$

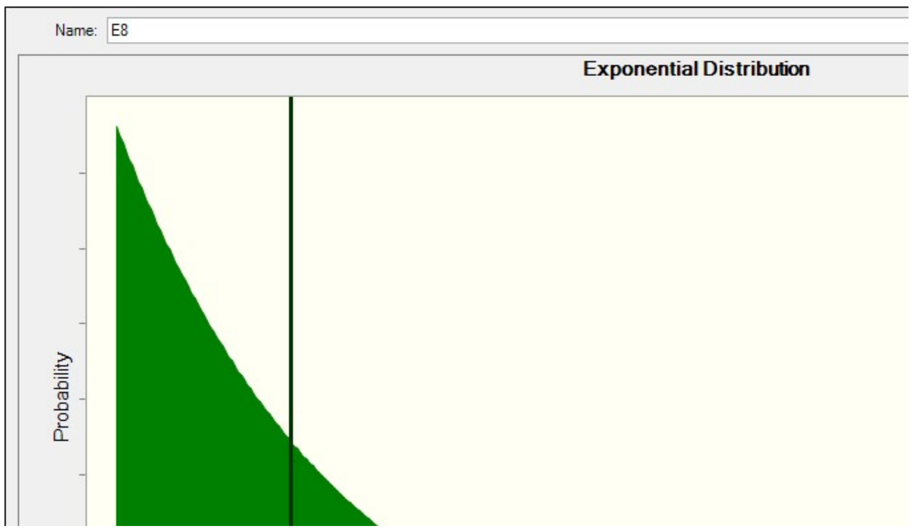
Các tham số đặc trưng: Nếu $X \in Exp(\lambda)$ thì $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ và $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Ví dụ 2.27: Giả sử tuổi thọ (năm) của 1 mạch điện tử trong máy tính là BNN có luật phân phối mũ với tuổi thọ trung bình là 6.25 ($\frac{1}{\lambda} = 6.25$). Thời gian bảo hành của mạch điện tử này là 5 năm. Tính xác suất để mạch điện tử bán ra phải thay thế trong thời gian bảo hành?

Giải: Gọi X là tuổi thọ của mạch điện tử .

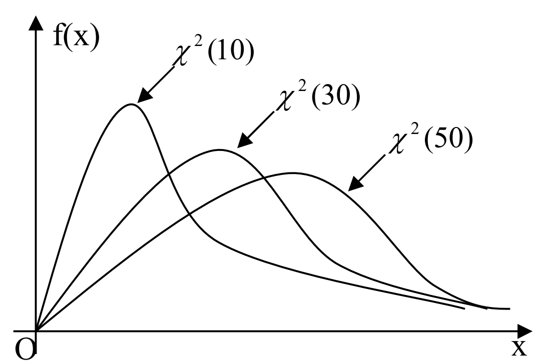
$$\Rightarrow P(X \leq 5) = \int_0^5 \frac{1}{6.25} e^{-\frac{1}{6.25}x} dx = -e^{-\frac{1}{6.25}x}\Big|_0^5 = -(e^{-\frac{1}{6.25}\times 5} - 1) = 50.07\%$$

Vậy có khoảng 55.1% mạch điện tử bán ra phải thay thế trong thời gian bảo hành.



Phân phối mũ: λ = 0.16

Nhận xét: Khoảng thời gian giữa hai lần xuất hiện của một biến có luật phân phối mũ. Chẳng hạn khoảng thời gian giữa hai ca cấp cứu ở một bệnh viện, giữa hai lần hỏng hóc của một cái máy, giữa hai trận lụt hay động đất là những BNN có luật phân phối mũ.



2.3.6 Phân phối, $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

Định nghĩa: *Cho các BNN X_i, $i = \overline{1,n}$ độc lập, cùng có luật phân phối chuẩn tắc. Khi đó BNN $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ được gọi là có luật phân phối khi bình phương, bậc tự do n.*

***Hàm mật độ xác suất*:**

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad x > 0$$

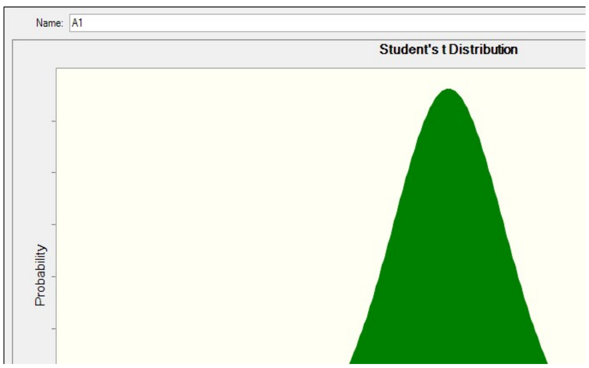
Trong đó hàm $\Gamma(u) = \int_0^{+\infty} t^{u-1}.e^{-t}dt$, có tên gọi là hàm Gamma, Γ(1) = 1, Γ (u+1) = u.Γ (u)

Các tham số đặc trưng: Nếu $\chi^2 \in \chi^2(n)$ thì $E(\chi^2) = n$ và $Var(\chi^2) = 2n$.

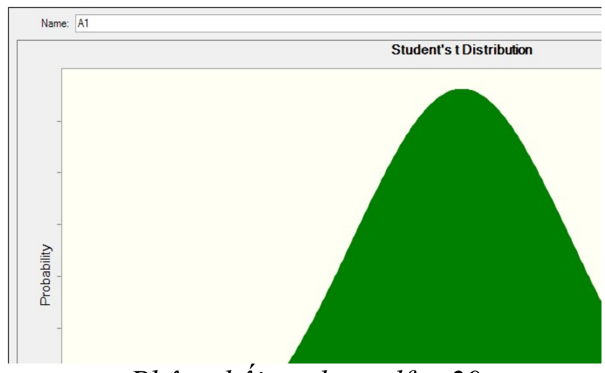
2.3.7 Phân phối Student, T ∈ T(n)

Định nghĩa: *Cho BNN U ∈ N(0,1), $\chi^2 \in \chi^2(n)$, trong đó U và χ^2 độc lập nhau. Khi đó biến ngẫu nhiên:* $T = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{X^2}{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}.U}{\sqrt{X^2}}$ được gọi là có luật phân phối Student bậc tự do n.

Các đặc trưng số: Nếu T ∈ T(n) thì E(T) = 0 và $Var(T) = \dfrac{n}{n-2}$.



Phân phối student: df = 5



Phân phối student: df = 29

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài 1: Một xạ thủ có 3 viên đạn. Xác suất bắn trúng mục tiêu là 0,6. Anh ta bắn đến khi hoặc hết đạn hoặc trúng mục tiêu thì thôi. Tìm luật phân phối xác suất của số viên đạn đã bắn.

Bài 2: Ba xạ thủ độc lập bắn vào bia. Xác suất để các xạ thủ bắn trúng bia lần lượt là: 0,8; 0,7 ; 0,6 (mỗi xạ thủ bắn 1 viên). Gọi X là số viên đạn trúng bia.

a/ Lập luật phân phối xác suất của X.

b/ Tính $P(2 \le X \le 7)$.

c/ Tính xác suất có ít nhất 1 xạ thủ bắn trúng bia.

Bài 3: Trong 1 phòng có 12 người, trong đó có 4 người không thích xem bóng đá. Chọn ngẫu nhiên 5 người. Gọi X là số người không thích xem bóng đá trong 5 người chọn ra. Lập bảng phân phối xác suất của X.

Bài 4: Có 2 hộp: Hộp I có 3 bi đỏ và 7 bi trắng
Hộp II có 6 bi đỏ và 4 bi trắng.

a/ Lấy mỗi hộp 1 viên bi. Gọi X là số bi trắng trong 2 bi lấy ra. Lập bảng phân phối xác suất của X; tìm E(X), Var(X), Mod(X); viết biểu thức hàm phân phối F(X).

b/ Lấy mỗi hộp 2 viên bi. Gọi Y là số bi trắng trong 4 bi lấy ra. Lập bảng phân phối xác suất của Y; tìm E(Y), Var(Y), Mod(Y); viết biểu thức hàm phân phối F(Y).

c/ Chọn ngẫu nhiên 1 hộp, rồi từ hộp đó lấy ngẫu nhiên 3 bi. Gọi Z là số bi trắng trong 3 bi lấy ra. Lập bảng phân phối xác suất của Z; tìm E(Z), Var(Z), Mod(Z); viết biểu thức hàm phân phối F(Z).

Bài 5: Xâu chìa khóa có 6 chìa, trong đó có 2 chìa mở được cửa. Thử từng chìa (thử xong bỏ ra ngoài) cho đến khi mở được cửa. Tìm số lần thử trung bình mở được cửa.

Bài 6: Có 2 kiện hàng: Kiện I có 3 sản phẩm tốt, 2 sản phẩm xấu; Kiện II có 2 sản phẩm tốt, 3 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên từ kiện I ra 2 sản phẩm và từ kiện II ra 1 sản phẩm. Gọi X là số sản phẩm tốt trong 3 sản phẩm lấy ra. Lập luật phân phối xác suất của X.

Bài 7: Có 3 hộp, trong mỗi hộp đều có 9 lá thăm ghi 3 triệu đồng và 1 lá thăm ghi 30 triệu đồng. Một người rút ngẫu nhiên mỗi hộp 1 lá thăm. Gọi X là tổng số tiền ghi trên 3 lá thăm rút được.

a/ Lập bảng phân phối xác suất của X.

b/ Tính P(X > 30).

Bài 8: Cho BNN X có hàm mật độ xác suất $f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{x^4} & x\in[1;2]\\ 0 & x\notin[1;2]\end{cases}$

a/ Tính c, E(X), Var(X).

b/ Tìm F(X).

c/ Tính $P\left(\dfrac{3}{2}<X\le 2\right)$.

Bài 9: Cho BNN X có hàm mật độ xác suất $f(x)=\begin{cases}c.x^2(1-x) & x\in[0;1]\\ 0 & x\notin[0;1]\end{cases}$

a/ Tính c, E(X), Var(X).

b/ Tìm F(X).

c/ Tính $P\left(0<X<\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 10: Tuổi thọ của một loại côn trùng là một BNN X (đơn vị là tháng) với hàm mật độ xác suất như sau $f(x)=\begin{cases}kx^2(4-x) & x\in[0;4]\\ 0 & x\notin[0;4]\end{cases}$

a/ Tính k.

b/ Tìm tuổi thọ trung bình của côn trùng.

c/ Tính xác suất để côn trùng chết trước khi nó được một tháng tuổi.

Bài 11: Hàng hóa được đóng thành kiện, mỗi kiện 10 sản phẩm, trong đó có 3 phế phẩm. Khách hàng chấp nhận kiện hàng hóa nếu lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm thì cả 2 sản phẩm đều tốt. Khách hàng kiểm tra 100 kiện hàng. Gọi X là số kiện hàng được khách hàng chấp nhận. Tính E(X), Var(X), Mod(X).

Bài 12: Một xạ thủ có xác suất bắn trúng của mỗi phát là 0,8. Xạ thủ này bắn 64 phát vào bia. Tính xác suất:

a/ Có 50 phát trúng bia.

b/ Có từ 45 đến 52 phát trúng bia.

c/ Không dưới 51 phát trúng bia.

Bài 13: Sản phẩm được đóng thành hộp. Mỗi hộp có 10 sản phẩm, trong đó có 7 sản phẩm loại A. Người mua hàng quy định cách kiểm tra như sau: Từ hộp lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm nếu thấy cả 3 sản phẩm đều loại A thì nhận hộp đó. Nếu ngược lại thì loại hộp.

Giả sử kiểm tra 100 hộp (trong rất nhiều hộp). Tính xác suất để:

a/ Có 25 hộp được nhận.

b/ Có không quá 30 hộp được nhận.

c/ Phải kiểm tra ít nhất bao nhiêu hộp để xác suất có ít nhất một hộp được nhận không nhỏ hơn 0,95?

Bài 14: Một mạch điện gồm 1000 bóng đèn mắc song song. Xác suất để mỗi bóng đèn bị hư tại mỗi thời điểm là 0,2%. Tính xác suất để tại một thời điểm:

a/ Không có bóng đèn nào bị hư.

b/ Có nhiều hơn 3 bóng đèn bị hư.

c/ Hãy cho biết số bóng đèn bị hư trung bình tại một thời điểm.

Bài 15: Một trường có 730 học sinh và xác suất để ngày sinh của một học sinh chọn ngẫu nhiên trùng với một ngày xác định là 1/365. Tính xác suất để có 3 học sinh cùng sinh vào ngày một tháng giêng.

Bài 16: Để tiêu diệt một xe tăng phải có ít nhất 2 viên đạn trúng xe. Bắn 10 viên (xác suất mỗi viên trúng là 0,8). Tính xác suất để xe bị diệt.

Bài 17: BNN X có luật phân phối xác suất như sau:

X	0	1	4	6
P	1/8	4/8	1/8	2/8

Tìm kỳ vọng và phương sai của BNN Y = 5X + Var(X)

Bài 18: Ba phân xưởng cùng sản xuất một loại sản phẩm. Tỷ lệ sản phẩm loại A của các phân xưởng tương ứng là: 10% ; 20% ; 30%. Từ lô hang gồm 10.000 sản phẩm (trong đó có 3.000 sản phẩm của phân xưởng I; 4.000 sản phẩm của phân xưởng II và 3.000 sản phẩm của phân xưởng III). Người ta lấy ngẫu nhiên ra 100 sản phẩm để kiểm tra. Nếu thấy có không quá 24 sản phẩm loại A thì nhận lô hàng. Tìm xác suất để nhận lô hàng đó.

Bài 19: Một cái máy gồm 5.000 bộ phận. Xác suất để mỗi bộ phận bị hỏng tại một thời điểm là 0,1%. Biết rằng nếu có từ 2 bộ phận trở lên bị hỏng thì máy không hoạt động. Nếu có 1 bộ phận bị hỏng thì máy sẽ không hoạt động với xác suất là 0,5. Tính xác suất để máy không hoạt động.

Bài 20: Độ dài của một chi tiết máy là một BNN có phân phối chuẩn với trung bình là 20cm và phương sai là $0,04\,cm^2$.

a/ Tính xác suất để lấy được một chi tiết máy thì độ dài chi tiết máy nằm trong khoảng $(19,8cm\ ;\ 20,1cm)$.

b/ Những chi tiết sai lệch so với trung bình nhỏ hơn 0,3cm được coi là loại tốt. Tính tỷ lệ chi tiết loại tốt của máy đó.

c/ Nếu muốn tỷ lệ chi tiết loại tốt là 90% thì độ dài chi tiết sai lệch so với trung bình là bao nhiêu?

Bài 21: Trọng lượng trẻ sơ sinh là BNN X có phân phối chuẩn với trọng lượng trung bình là 3kg và độ lệch chuẩn là 0,2kg.

a/ Tính tỷ lệ trẻ sơ sinh cân nặng từ 3kg đến 3,4kg.

b/ Trẻ sơ sinh thiếu cân nếu có trọng lượng nhỏ hơn 2,5kg. Tính tỷ lệ trẻ thiếu cân.

CHƯƠNG 3: ƯỚC LƯỢNG THAM SỐ THỐNG KÊ

3.1 MỘT SỐ KHÁI NIỆM

3.1.1 Tổng thể

Tập hợp tất cả các phần tử mang những dấu hiệu cần khảo sát trong một nghiên cứu được gọi là tổng thể.

Ví dụ 3.1: Khi nghiên cứu về trọng lượng của gà trong một trại chăn nuôi thì tổng thể là tập hợp gà của trại.

Khi nghiên cứu về chất lượng học tập của sinh viên của một trường thì tổng thể là tập hợp sinh viên của trường đó.

Khi nghiên cứu độ dài đường kính của trục máy do một máy tự động tiện ra thì tổng thể là tập hợp các trục máy do máy đó tiện ra.

3.1.2 Mẫu

Từ tổng thể, ta lấy ra n phần tử và đo lường dấu hiệu X của chúng. Khi đó tập hợp n phần tử này được gọi là một mẫu và số phần tử của mẫu được gọi là kích thước của mẫu.

Vì từ mẫu, ta kết luận cho tổng thể nên mẫu phải được chọn một cách ngẫu nhiên để đại diện cho tổng thể.

3.1.3 Mô hình xác suất của tổng thể và mẫu

Từ tổng thể, ta lấy ra một phần tử. Đo lường dấu hiệu X đo được trên phần tử lấy ra. Khi đó, X là BNN có bảng phân phối xác suất như sau:

X	x_1	x_2	....	x_n
P	P_1	P_2	....	P_n

Ta thấy, dấu hiệu X được mô hình hóa bởi BNN X nên X được gọi là BNN gốc và phân phối xác suất của X được gọi là phân phối gốc.

♥ **Mẫu ngẫu nhiên:**

Lấy n phần tử của tổng thể theo phương pháp có hoàn lại để quan sát. Gọi X_i là giá trị của dấu hiệu X đo được trên phần tử thứ i (i= 1,..,n), thì $X_1, X_2, .., X_n$ cũng là các BNN có cùng phân phối xác suất như BNN gốc X. Khi đó, bộ $(X_1, X_2, .. , X_n)$ được gọi là mẫu ngẫu nhiên hay mẫu lý thuyết kích thước n được tạo nên từ BNN gốc X và kí hiệu: $W_X = (X_1, X_2, .. , X_n)$.

Nếu giả sử X_i nhận giá trị x_i thì $(x_1, x_2, .. , x_n)$ được gọi là một mẫu cụ thể hay mẫu thực nghiệm của mẫu ngẫu nhiên W_X, kí hiệu: $w_x = (x_1, x_2, .. , x_n)$

Ví dụ 3.2: Kết quả điểm môn Xác suất thống kê của một lớp gồm 100 sinh viên cho bởi bảng sau:

Điểm	3	4	5	6	7
Số sinh viên có điểm tương ứng	25	20	40	10	5

Gọi X là điểm môn Xác suất thống kê của một sinh viên được chọn ngẫu nhiên trong danh sách lớp thì X là BNN có phân phối:

X	3	4	5	6	7
P	0.25	0.2	0.4	0.1	0.05

Chọn ngẫu nhiên 5 sinh viên trong danh sách lớp để xem điểm. Gọi X_i là điểm của sinh viên thứ i(i = 1,2,3,4,5). Ta có mẫu ngẫu nhiên kích thước n = 5 được xây dựng từ BNN X là $W_X = (X_1, X_2, .., X_5)$ và các BNN X_i có cùng phân phối xác suất với BNN X.

Giả sử sinh viên thứ nhất được 4 điểm, thứ hai được 3 điểm, thứ ba được 6 điểm, thứ tư được 7 điểm và thứ năm được 5 điểm thì ta được mẫu cụ thể:

$w_X = (4, 3, 6, 7, 5)$

3.1.4 Một số tham số thống kê của mẫu

Giả sử ta có mẫu thực nghiệm $W_X = (x_1, x_2, .., x_n)$, khi đó các tham số thống kê được tính toán theo các công thức sau:

- $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i$

- $s'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i - \left(\bar{x}\right)^2$

- $s^2 = \frac{n}{n-1} s'^2$

Ví dụ 3.3: Số xe hơi bán được trong một tuần của 45 công ty như sau:

Số xe hơi được bán	1	2	3	4	5	6
Số công ty	15	12	9	5	3	1

Ta có: Trung bình mẫu: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{107}{45} = 2.38$

Phương sai mẫu: $s'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \left(\bar{x}\right)^2 = \frac{335}{45} - (2.38)^2 = 7.444 - 5.664 = 1.78$

Phương sai mẫu có điều chỉnh: $s^2 = \frac{n}{n-1} s'^2 = 1.82$

Độ lệch chuẩn mẫu: $s' = \sqrt{s'^2} = \sqrt{1.78} = 1.338$

Độ lệch chuẩn mẫu có điều chỉnh: $s = \sqrt{1.82} = 1.353$

Ví dụ 3.4: Chiều cao của 50 cây lim được cho bởi bảng sau:

Chiều cao (m)	6.75 – 7.25	7.25 – 7.75	7.75 – 8.25	8.25 – 8.75	8.75 – 9.25	9.25 – 9.75
Số cây	4	5	11	18	9	3

Ta có: Trung bình mẫu: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{416}{50} = 8.32$

Phương sai mẫu: $s'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \left(\overline{x}\right)^2 = \frac{3481.5}{50} - \left(8.32\right)^2 = 0.408$

Phương sai mẫu có điều chỉnh: $s^2 = \frac{n}{n-1}s'^2 = 0.416$

Độ lệch chuẩn mẫu: $s' = \sqrt{s'^2} = \sqrt{0.408} = 0.638$

Độ lệch chuẩn mẫu có điều chỉnh: $s = \sqrt{0.416} = 0.645$

3.2 PHƯƠNG PHÁP ƯỚC LƯỢNG THAM SỐ THỐNG KÊ

3.2.1 Phương pháp ước lượng điểm:

Giả sử BNN X có tham số đặc trưng θ chưa biết. Thông thường ta dùng giá trị θ_0 tham số thống kê của mẫu dùng để ước lượng cho tham số θ của tổng thể.

Ví dụ 3.5: với số liệu ví dụ 3.3*:*

a) Hãy chỉ ra ước lượng điểm cho số xe bán được trung bình một công ty.

b) Hãy chỉ ra ước lượng điểm cho tỷ lệ những công ty có số xe bán được từ 5 chiếc/tuần trở lên.

Giải: a. Số xe bán được trung bình được ước lượng là 2.38 chiếc.

b. Trong 45 công ty đã khảo sát có 4 công ty có số xe bán được từ 5 chiếc/tuần trở lên.

Vậy ước lượng điểm cho p là $p^* = \frac{4}{45} = 8.9\%$.

3.2.2 Phương pháp ước lượng khoảng

Giả sử BNN X có tham số đặc trưng θ chưa biết. Phương pháp ước lượng khoảng là chỉ ra khoảng (θ_1, θ_2) chứa θ sao cho $P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 1 - \alpha$ (với α là mức ý nghĩa cho trước). Phương pháp này được trình bày chi tiết cho các tham số thống kê.

3.3 ƯỚC LƯỢNG TRUNG BÌNH:

Giả sử a là trung bình của tổng thể (chưa biết), ước lượng trung bình là ta chỉ ra khoảng (a_1 , a_2) chứa a sao cho xác suất $P(\mu_1 < \mu < \mu_2) = 1 - \alpha$

Ta xét 2 trường hợp:

i) Phương sai của tổng thể σ^2 đã biết

Ta có khoảng ước lượng của trung bình μ là: $\mu = \overline{x} \mp \varepsilon$

với $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ và $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ là phân vị chuẩn (tra bảng phụ lục 3)

ii) Phương sai của tổng thể σ^2 chưa biết; Cỡ mẫu n ≥ 30

Ta có khoảng ước lượng của trung bình μ là: $\mu = \overline{x} \mp \varepsilon$, với $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}$

iii) Phương sai của tổng thể σ^2 chưa biết; Cỡ mẫu n < 30 (tổng thể có phân phối chuẩn)

Ta có khoảng ước lượng trung bình tổng thể: $\mu = \overline{x} \mp \varepsilon$, với $\varepsilon = t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}$

và $t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ là phân vị student (tra bảng phụ lục 4)

**** Một số khái niệm:***

- Khoảng (μ_1, μ_2) được gọi là *khoảng ước lượng*.
- Số α được gọi là *mức ý nghĩa*.
- 1 - α được gọi là *độ tin cậy*.
- $|\mu_1 - \mu_2|$ được gọi là *độ dài của khoảng ước lượng*.
- ε được gọi là *bán kính ước lượng*, hay *độ chính xác* hay *sai số*

Ví dụ 3.6: Khối lượng sản phẩm là BNN X có luật phân phối chuẩn, biết rằng phương sai $\sigma^2 = 4g^2$. Kiểm tra 25 sản phẩm, tính được trung bình mẫu $\overline{x} = 20g$.

a) Ước lượng trung bình của khối lượng sản phẩm với độ tin cậy 95%.

b) Nếu cho bán kính của ước lượng $\varepsilon = 0{,}4g$ thì độ tin cậy của ước lượng là bao nhiêu?

c) Với bán kính ước lượng $\varepsilon = 0{,}4g$, muốn có độ tin cậy $1-\alpha = 95\%$ thì phải kiểm tra ít nhất bao nhiêu sản phẩm?

Giải: a. Gọi μ khối lượng sản phẩm trung bình của tổng thể.

Ta có: $\mu = \overline{x} \mp \varepsilon \qquad , \varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}$

Với $\sigma = 2g$, n = 25 , $\overline{x} = 20g$.

Độ tin cậy 1 - α = 95% = 0.95 ⇒ α = 0.05 $\Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.975$

Do đó: $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = Z_{0.975} \dfrac{2}{\sqrt{25}} = (1.96)\dfrac{2}{5} = 0.78$

Suy ra: $\mu = 20 \mp 0.78 = (19.22 \ ; \ 20.78)$

Vậy khoảng ước lượng trung bình khối lượng sản phẩm với độ tin cậy 95% là (19.22g ; 20.78g).

b. Với ε = 0.4g, sử dụng công thức:

$$\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(0.4)\sqrt{25}}{2} = 1 \approx 0.994 = Z_{0.84}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.84 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.16 \Rightarrow \alpha = 0.32$$

⇒ 1 - α = 0.68

Vậy: độ tin cậy là 68%.

c. Với ε = 0.4g, 1 - α = 95% = 0.95 $\Rightarrow 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.975$.

Từ công thức trên, suy ra: $n = Z^2_{0,975}\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = Z^2_{0.975}\dfrac{2^2}{(0.4)^2} = (1.96)^2\dfrac{4}{(0.4)^2} = 96.04$

Vì n là số nguyên $\Rightarrow n = 96$.

Vậy phải kiểm tra ít nhất 96 sản phẩm.

<u>Nhận xét</u>: Công thức độ chính xác cho thấy độ tin cậy (1 - α) càng lớn thì bán kính ε càng lớn, do đó khoảng ước lượng ($\bar{x}$ - ε; $\bar{x}$ + ε) cho giá trị thông tin thấp. Kết quả câu b cho thấy nếu giảm bán kính ε thì khoảng ước lượng ($\bar{x}$ - ε; $\bar{x}$ + ε) có giá trị thông tin cao nhưng độ tin cậy của ước lượng giảm xuống. Như vậy, muốn có bán kính ε nhỏ và độ tin cậy (1 - α) lớn thì tăng kích thước mẫu (kết quả câu c).

*Ví dụ 3.7***:** Khảo sát chiều cao của cây cùng độ tuổi thu được kết quả như sau :

Chiều cao (cm)	*< 180*	*180 – 190*	*190 – 200*	*200 – 210*	*210 – 220*	*220 – 230*	*> 230*
Số cây	*3*	*12*	*35*	*70*	*62*	*32*	*6*

Ước lượng chiều cao trung bình của cây với độ tin cậy 99%.

Giải: Khoảng ước lượng chiều cao trung bình của cây :

$$\mu = \bar{x} \mp \varepsilon \quad \text{với} \quad \varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Với mẫu cho ta tính được $\bar{x}$ = 208.455cm, s =12.233.

Với độ tin cậy: 1 - α = 99% $\Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0.005 \Rightarrow 1-\dfrac{\alpha}{2} = 0.995$

Do đó: $\varepsilon = Z_{0.995}\dfrac{s}{\sqrt{n}} = (2.576)\dfrac{12.233}{\sqrt{220}} = 2.125$ (cm)

Suy ra: $\mu = 208.455 \mp 2.125 = (206.33 \;\; ; \;\; 210.58)$ (cm)

Vậy khoảng ước lượng trung bình chiều cao của cây với độ tin cậy 99% là (206.33 cm ; 210.58 cm).

Ví dụ 3.8: Trọng lượng của sản phẩm là BNN X có luật phân phối chuẩn. khảo sát 25 sản phẩm tính được trung bình mẫu $\bar{x}$ = 50g, độ lệch tiêu chuẩn điều chỉnh s = 8.25g. Hãy ước lượng trọng lượng trung bình với độ tin cậy 95%.

Giải: Khoảng ước lượng trọng lượng trung bình μ:

$$\mu = \bar{x} \mp \varepsilon \quad \text{với} \quad \varepsilon = t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Với mẫu có n = 25, $\bar{x}$ = 50g, s = 8.25g và 1 - α = 95% $\Rightarrow 1-\dfrac{\alpha}{2} = 0.975$

$$\Rightarrow \varepsilon = t_{24;\,0.975}\frac{8.25}{\sqrt{25}} = (2.064)\frac{8.25}{5} = 3.406 \text{ (g)}$$

Suy ra: $\mu = 50 \mp 3.406 = (46.594 \;\; ; \;\; 53.406)$ (g)

Vậy khoảng ước lượng trọng lượng trung bình với độ tin cậy 95% là (46.594g ; 53.406g).

3.4 ƯỚC LƯỢNG TỈ LỆ:

Giả sử p là tỷ lệ của tổng thể, ta cần tìm khoảng (p_1, p_2) chứa p sao cho $P(p_1 < p < p_2) = 1 - \alpha$

Ta có khoảng ước lượng cho tỷ lệ của tổng thể:

$$p = f \mp \varepsilon \text{ với } \varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

Từ công thức trên ta có: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{f(1-f)}}$

$$n = \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\varepsilon}\right)^2 f(1-f)$$

Ví dụ 3.9: Kiểm tra 100 sản phẩm từ lô hàng thì thấy có 20 sản phẩm loại I.

a) Ước lượng tỷ lệ sản phẩm loại I của lô hàng với độ tin cậy 99%

b) Nếu muốn độ chính xác khi ước lượng ε = 0.04 thì độ tin cậy của ước lượng là bao nhiêu?

c) Nếu muốn độ tin cậy là 99% và độ chính xác là 0.04 thì cần điều tra bao nhiêu sản phẩm?

Giải: Gọi p tỷ lệ sản phẩm loại I của lô hàng

Ta có: $p = f \mp \varepsilon$ với $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$

Với n = 100, $f = \frac{20}{100} = 0.2$

$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \Rightarrow Z_{0.995} = 2.576.$

$$\Rightarrow \varepsilon = 2.576\sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{100}} = 0.1$$

$p = f \mp \varepsilon = 0.2 \mp 0.1 = (0.1 ; 0.3) = (10\% ; 30\%).$

Vậy khoảng tin cậy tỷ lệ sản phẩm loại I của lô hàng là: (10% ; 30%)

b) Ta có: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{f(1-f)}} = 0.04\sqrt{\frac{100}{0.2 \times 0.8}} = 1$

Ta tìm được: $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.84 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.68.$

Vậy độ tin cậy là 68%.

c) Ta có: $1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.576.$

Do đó: $n = \left(\dfrac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\varepsilon}\right)^2 f(1-f) = \dfrac{(2.576)^2 \times 0.2 \times 0.8}{(0.04)^2} = 664 \Rightarrow n = 664$

3.5 ƯỚC LƯỢNG PHƯƠNG SAI:

Giả sử phương sai σ^2 của tổng thể (chưa biết). Ta tìm khoảng $(\sigma^2{}_1, \sigma^2{}_2)$ sao cho: $P(\sigma^2{}_1 < \sigma^2 < \sigma^2{}_2) = 1-\alpha$.

Khoảng ước lượng $\left(\sigma_1^2, \sigma_2^2\right)$ của phương sai σ^2:

$$\sigma_1^2 = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}} \quad ; \sigma_2^2 = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;\,\frac{\alpha}{2}}}$$

Ví dụ 3.10: Với giả thuyết đã cho trong ví dụ 3.8, hãy ước lượng phương sai trọng lượng của sản phẩm $Var(X) = \sigma^2$ với độ tin cậy 95%.

Giải: Ta có: $\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;\,\frac{\alpha}{2}}}$

Ta có: n = 25, s = 8.25g, 1 - α = 95% $\Rightarrow 1-\dfrac{\alpha}{2} = 0.975$

Suy ra $\sigma_1^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}} = \dfrac{24\times 6.92}{\chi^2_{24;\,0.795}} = \dfrac{24\times 6.92}{39.364} = 4.22$

$$\sigma_2^2 = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;\,\frac{\alpha}{2}}} = \frac{24\times 6.92}{\chi^2_{24;\,0.025}} = \frac{24\times 6.92}{12.401} = 13.39$$

Vậy khoảng ước lượng phương sai với độ tin cậy 95% là (4.22g^2;13.39g^2).

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài 1: Người ta tiến hành điều tra thị trường về một loại sản phẩm mới, phỏng vấn ngẫu nhiên 300 khách hàng thì thấy có 90 người thích sản phẩm này.

a/ Hãy ước lượng tỷ lệ khách hàng thích sản phẩm này với độ tin cậy 95%.

b/ Với mẫu điều tra trên và muốn độ chính xác của ước lượng tỷ lệ khách hàng thích sản phẩm là 0,0436 thì đảm bảo độ tin cậy là bao nhiêu?

Bài 2: Lãi suất cổ phiếu của một công ty trong 5 năm qua là: 15% ; 10% ; 20% ; 7% ; 14%. Với độ tin cậy 90% hãy ước lượng độ phân tán về lãi suất của cổ phiếu. (Biết lãi suất cổ phiếu là BNN có phân phối chuẩn).

Bài 3: Để ước lượng tổng doanh thu (triệu đồng/tháng) của một công ty gồm 380 cửa hàng trên toàn quốc trong một tháng, người ta lấy ngẫu nhiên 10% số cửa hàng và có được doanh thu trong một tháng là:

Doanh thu	20	40	60	80
Số cửa hàng	8	16	12	2

a/ Với độ tin cậy 99%, hãy ước lượng doanh thu trung bình của mỗi cửa hàng và tổng doanh thu của công ty trong một tháng.

b/ Những cửa hàng có doanh thu trong một tháng trên 40 triệu đồng là những cửa hàng bán đắt, hãy ước lượng số cửa hàng bán đắt của công ty với độ tin cậy 95%.

Bài 4: Tiến hành khảo sát số gạo bán ra hằng ngày (X) tại một cửa hàng, ta có số liệu

X (kg)	110 - 125	125 - 140	140 - 155	155 - 170	170 - 185	185 - 200	200 - 215	215 - 230
Số ngày	2	9	12	25	30	20	13	4

a/ Hãy ước lượng số tiền bán được trung bình trong một ngày của cửa hàng với độ tin cậy 99%, biết giá gạo là 10.000đ/kg.

b/ Những ngày bán trên 200kg là những ngày cao điểm. Ước lượng số gạo trung bình của cửa hàng trong ngày cao điểm với độ tin cậy 95%.

c/ Với độ tin cậy 96% hãy ước lượng tỷ lệ ngày cao điểm.

Bài 5: Công ty M là một công ty lớn trong lĩnh vực công nghệ thông tin, T là một công ty tư vấn và giới thiệu việc làm. Công ty T muốn thăm dò thu nhập của những người làm việc ở công ty M. Công ty T khảo sát một số người đang làm việc ở công ty, có số liệu:

Thu nhập (triệu đồng/tháng)	3,8 – 4,2	4,2 – 4,6	4,6 – 5,0	5,0 – 5,4	5,4 – 5,8
Số người	15	20	30	23	12

a/ Với độ tin cậy 96%, hãy tìm khoảng ước lượng thu nhập trung bình của một người làm việc ở công ty M.

b/ Với mẫu đã cho, khi ước lượng thu nhập trung bình của một người làm việc ở công ty M, nếu muốn độ tin cậy 98% thì độ chính xác (triệu đồng/tháng) là bao nhiêu?

c/ Người làm việc ở công ty M có thu nhập trên 5 triệu đồng/tháng được xem là có thu nhập cao. Khi ước lượng tỷ lệ những người có thu nhập cao (trong những người làm việc ở công ty M), nếu muốn độ chính xác là 9% và độ tin cậy 98% thì cần khảo sát them bao nhiêu người nữa? Giả sử số người làm việc ở công ty M đủ lớn để có thể thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CHƯƠNG 4: KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ

4.1 CÁC KHÁI NIỆM:

4.1.1 Bài toán kiểm định trên giả thuyết thống kê:

Giả thuyết thống kê là dự đoán về :

- Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên, như: giả thuyết về trung bình, phương sai, tỷ lệ.
- Luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên, chẳng hạn, giả thuyết BNN có luật phân phối chuẩn.
- Tính độc lập của hai biến ngẫu nhiên, chẳng hạn, giả thuyết BNN X độc lập với BNN Y.

Giả sử BNN X có tham số đặc trưng θ chưa biết. Giả thuyết về θ được phát biểu

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

Kiểm định giả thuyết thống kê là kết luận giả thuyết (đối thuyết) đúng hay sai dựa trên số liệu mẫu ngẫu nhiên. Kết luận nói trên thường đúng với xác suất khá lớn và có thể sai với xác suất khá nhỏ.

4.1.2 Sai lầm loại I và sai lầm loại II:

Giả thuyết liên quan đến toàn tổng thể. Nhưng việc ta chỉ căn cứ vào một mẫu cụ thể để kết luận chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết H_0 theo cách như trên có thể dẫn đến sai lầm. Có hai loại sai lầm:

a) Sai lầm loại I: bác bỏ giả thuyết trong khi H_0 đúng.

b) Sai lầm loại II: chấp nhận giả thuyết trong khi H_0 sai.

Hai loại sai lầm này có tính chất đối kháng, tức là muốn hạn chế khả năng phạm sai lầm loại I, ta có xu hướng làm tăng khả năng phạm sai lầm loại II và ngược lại. Vì muốn hạn chế sai lầm loại I ta có xu hướng dè dặt trong việc bác bỏ và sẽ có khuynh hướng dễ dãi trong việc chấp nhận. Khi đó lại dễ phạm sai lầm loại II. Còn muốn giảm sai lầm loại II, ta dè dặt trong việc chấp nhận và dẫn đến dễ dãi trong việc bác bỏ. Điều này làm cho nguy cơ phạm sai lầm loại I tăng lên! Tức là:

P(sai lầm loại I) $\downarrow \Rightarrow$ P(sai lầm loại II)$\uparrow$

P(sai lầm loại II) $\downarrow \Rightarrow$ P(sai lầm loại I)$\uparrow$.

(Tất nhiên có một cách làm giảm cả hai xác suất sai lầm nếu tăng kích thước mẫu n lên. Nhưng khi đó chi phí cũng tăng lên và đôi khi ta không phải trực tiếp làm ra được số liệu).

Giải quyết mâu thuẫn này bằng cách nào?

Thực ra sai lầm loại I và loại II rất tương đối, nó không có sẵn từ đầu, mà chỉ xác định khi ta đã đặt giả thuyết. Chẳng hạn đối với một bác sĩ khám bệnh, ông ta có thể sai phải một trong hai tình huống sai lầm sau:

i/. Người có bệnh, sau khi thử nghiệm, ông kết luận không có bệnh.

ii/. Người không bệnh, sau khi thử nghiệm, ông kết luận: nhập viện!

Sai lầm nào là loại I? Sai lầm nào là loại II? Tất nhiên là chưa thể nói được.

Nếu bác sĩ đặt giả thuyết H_0: "người này có bệnh" thì trường hợp i) là sai lầm loại I còn ii) là sai lầm loại II. Còn nếu bác sĩ đặt giả thuyết H_0: "người này không bệnh" thì trường hợp i) là sai lầm loại II còn ii) là sai lầm loại I.

Nên đặt giả thuyết thế nào?

Muốn vậy người ta phải xem xét sai lầm nào quan trọng hơn, tức là khi phạm phải sẽ chịu tổn thất lớn hơn, thì ta sẽ đặt bài toán để sai lầm đó là loại I.

Chẳng hạn bác sĩ điều trị bệnh lao phổi. Đó là bệnh mà nếu phát hiện để điều trị gần như chắc chắn sẽ khỏi, còn nếu không được phát hiện kịp thời để điều trị thì bệnh sẽ nặng dần và dẫn đến tử vong. Khi đó sai lầm i) "có bệnh bảo không" là quan trọng hơn, nó có thể dẫn đến tử vong, còn sai lầm ii) "không bệnh bảo có" cũng gây tổn hại, nhưng ít tổn hại hơn sai lầm i). Vì vậy với trường hợp này ta nên đặt giả thuyết H_0: "người này có bệnh".

4.1.3 Phương pháp kiểm định giả thuyết thống kê:

Các bước kiểm định một giả thuyết thống kê với mức ý nghĩa α khá nhỏ được tiến hành như sau:

i/. Thành lập giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1 căn cứ vào yêu cầu thực tế.

ii/. Tính giá trị kiểm định theo tiêu chuẩn kiểm định:

iii/. Tìm miền bác bỏ của giả thuyết H_0 W_α (hay điều kiện bác bỏ giả thuyết H_0)

iv/. Kết luận về giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1:

- Nếu $G \in W_\alpha$ thì giả thuyết H_0 bị bác bỏ, đối thuyết H_1 được chấp nhận.
- Nếu $G \notin W_\alpha$ thì chấp nhận giả thuyết H_0, khi đó đối thuyết H_1 bị bác bỏ.

Ghi chú: α : Mức ý nghĩa

$1-\alpha$: Độ tin cậy

P – Value : Là mức ý nghĩa nhỏ nhất mà ta vẫn bác bỏ được giả thuyết H_0.

4.2 KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT VỀ SO SÁNH TRUNG BÌNH VỚI MỘT GIÁ TRỊ:

Giả sử trung bình của tổng thể (là kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X) là μ chưa biết, ta cần kiểm định giả thuyết :

- Giả thuyết kiểm định :

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$ (μ_0 là giá trị đã biết)

- Giá trị kiểm định:

***Trường hợp 1:* Phương sai của tổng thể σ^2 đã biết**

$$Z = \frac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$$

***Trường hợp 2:* Phương sai của tổng thể σ^2 chưa biết; Cỡ mẫu n ≥ 30**

$$Z = \frac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$$

***Trường hợp 3:* Phương sai của tổng thể σ^2 chưa biết; Cỡ mẫu n < 30 (Tổng thể có phân phối chuẩn)**

$$T = \frac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$$

- Bác bỏ giả thuyết H_0 khi:

  Nếu $H_1: \mu > \mu_0$ thì $Z > Z_{1-\alpha}$ (hay $T > t_{n-1;1-\alpha}$)

  Nếu $H_1: \mu < \mu_0$ thì $Z < -Z_{1-\alpha}$ (hay $T < -t_{n-1;1-\alpha}$)

  Nếu $H_1: \mu \neq \mu_0$ thì $|Z| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (hay $|T| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$)

Kết luận: Nếu thỏa điều kiện bác bỏ giả thuyết H_0 thì bác bỏ giả thuyết H_0, chấp nhận đối thuyết H_1. Ngược lại chấp nhận giả thuyết H_0

Ví dụ 4.1: Khối lượng sản phẩm của BNN có kỳ vọng là $\mu = 100$g, độ lệch chuẩn $\sigma = 0.8$g. Sau một thời gian sản xuất, người ta nghi ngờ khối lượng sản phẩm có xu hướng tăng lên. Kiểm tra 60 sản phẩm tính được trung bình mẫu $\overline{x} = 100.2$g.

a) Với độ tin cậy 95%, hãy kết luận về nghi ngờ trên.

b) Câu hỏi tương tự với độ tin cậy 99%.

Giải: a. X khối lượng sản phẩm hiện tại, $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = Var(X)$

- Xét giả thuyết $\begin{cases} H_0: \mu = 100g \\ H_1: \mu > 100g \end{cases}$

- Giá trị kiểm định: $Z = \dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \dfrac{(100.2 - 100)\sqrt{60}}{0.8} = 1.93$

- Bác bỏ giả thuyết H_0 khi : $Z > Z_{1-\alpha}$.

  Ta có: $Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$

Kết luận: Bác bỏ giả thuyết H_0 , chấp nhận đối thuyết H_1. Vậy, điều nghi ngờ khối lượng sản phẩm tăng lên là đúng.

b. Lời giải tương tự câu a)

Ta có: $Z_{1-\alpha} = Z_{0.99} = 2.326$

Kết luận: Chấp nhận giả thuyết H_0, bác bỏ đối thuyết H_1. Vậy, điều nghi ngờ khối lượng tăng lên là không chấp nhận.

Ví dụ 4.2: Một nhóm người nghiên cứu tuyên bố rằng trung bình một người vào siêu thị tiêu hết 140 nghìn đồng. Chọn ngẫu nhiên 50 người mua hàng, tính được số tiền trung bình họ tiêu là 154 nghìn đồng với độ lệch chuẩn điều chỉnh của mẫu là s = 62. Với mức ý nghĩa 5% hãy kiểm định xem tuyên bố của nhóm người nghiên cứu có đúng hay không?

Giải: X số tiền mua hàng của khách hàng, $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = Var(X)$

- Xét giả thuyết $\begin{cases} H_0: \mu = 140 \\ H_1: \mu \neq 140 \end{cases}$

- Giá trị kiểm định: $Z = \dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} = \dfrac{(154 - 140)\sqrt{50}}{62} = 1.597$

- Bác bỏ giả thuyết H_0 khi: $|Z| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

  Ta có: $\alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$

Kết luận: Chấp nhận đối thuyết H_0.

Ví dụ 4.3: Độ dài chi tiết máy là BNN X có luật phân phối chuẩn. Kiểm tra 28 sản phẩm thu được số liệu như sau: (đơn vị tính cm)

20.10	20.05	20.03	19.98	20.00	20.02	20.01
20.00	20.02	19.99	19.97	20.02	19.99	19.96
19.97	20.00	20.00	20.02	20.03	19.97	20.00
20.01	20.04	19.99	20.03	20.02	20.00	20.04

Với độ tin cậy 95%, có thể cho rằng trung bình độ dài chi tiết máy bằng 20cm hay không?

Giải : Đặt $\mu = \mathrm{E(X)}, \quad \sigma^2 = \mathrm{Var(X)}$

- Xét giả thuyết $\begin{cases} H_0 : \mu = 20\text{cm} \\ H_1 : \mu \neq 20\text{cm} \end{cases}$

- Giá trị kiểm định:

  Với mẫu đã cho: n = 28, $\overline{x}$ = 20.009cm, s = 0.029cm.

$$T = \frac{\left(\overline{x} - \mu_0\right)\sqrt{n}}{s} = \frac{\left(20.009 - 20\right)\sqrt{28}}{0.029} = 1,642$$

- Bác bỏ giả thuyết H_0 khi: $|T| > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$

  Ta có: $1 - \alpha = 0.95 \ \Rightarrow t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{27,0.975} = 2.052$

Kết luận: Chấp nhận giả thuyết H_0 , bác bỏ đối thuyết H_1. Vậy, có thể cho rằng trung bình độ dài chi tiết máy bằng 20cm.

4.3 KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT VỀ SO SÁNH TỈ LỆ VỚI MỘT GIÁ TRỊ:

Giả sử p là tỷ lệ các phần tử có tính chất T của tổng thể, ta kiểm định giả thuyết:

- Giả thuyết kiểm định:

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases} \text{hoặc} \quad \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases} \text{hoặc} \quad \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$$

- Giá trị kiểm định: $Z = \dfrac{(f - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0\left(1 - p_0\right)}}$, với f: tỷ lệ mẫu, n kích thước mẫu

- Bác bỏ giả thuyết H_0 khi:

  Nếu $H_1 : p > p_0$ thì $Z > Z_{1-\alpha}$

  Nếu $H_1 : p < p_0$ thì $Z < -Z_{1-\alpha}$

  Nếu $H_1 : p \neq p_0$ thì $|Z| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Kết luận: Nếu thỏa điều kiện bác bỏ giả thuyết H_0 thì bác bỏ giả thuyết H_0, chấp nhận đối thuyết H_1. Ngược lại chấp nhận giả thuyết H_0

Ví dụ 4.4: Tỷ lệ sản phẩm bị lỗi của máy là p = 5%. Sau khi cải tiến kỹ thuật, kiểm tra 400 sản phẩm có 12 sản phẩm bị lỗi. Với độ tin cậy 99%, có thể kết luận việc cải tiến kỹ thuật có hiệu quả hay không?

Giải: P tỷ lệ sản phẩm bị lỗi của máy sau khi cải tiến kỹ thuật

- Xét giả thuyết $\begin{cases} H_0 : p = 5\% \\ H_1 : p < 5\% \end{cases}$

- Giá trị kiểm định: $Z = \dfrac{(f - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = \dfrac{(0.03 - 0.05)\sqrt{400}}{\sqrt{0.05(1-0.05)}} = -\ 1.84$

- Bác bỏ giả thuyết H_0 khi: $Z < -Z_{1-\alpha}$

  Ta có: $1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow Z_{1-\alpha} = Z_{0.99} = 2.326$.

Kết luận: Chấp nhận giả thuyết H_0, bác bỏ đối thuyết H_1. Vậy, chưa thể cho rằng việc cải tiến kỹ thuật có hiệu quả.

4.4 KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT VỀ SO SÁNH PHƯƠNG SAI VỚI MỘT GIÁ TRỊ:

Giả sử σ^2 là phương sai của tổng thể (phương sai của biến ngẫu nhiên X, $Var(X) = \sigma^2$), ta kiểm định như sau:

- Đặt giả thuyết kiểm định:

  $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$

- Giá trị kiểm định: $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

- Bác bỏ giả thuyết H_0 khi:

  Nếu H_1: $\sigma^2 > \sigma^2_0$ thì $\chi^2 > \chi^2_{n-1,\,1-\alpha}$

  Nếu H_1: $\sigma^2 < \sigma^2_0$ thì $\chi^2 < \chi^2_{n-1,\,\alpha}$

  Nếu H_1: $\sigma^2 \neq \sigma^2_0$ thì $\chi^2 < \chi^2_{n-1,\,\frac{\alpha}{2}}$ hoặc $\chi^2 > \chi^2_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}}$

Kết luận: Nếu thỏa điều kiện bác bỏ giả thuyết H_0 thì bác bỏ giả thuyết H_0, chấp nhận đối thuyết H_1. Ngược lại chấp nhận giả thuyết H_0

Ví dụ 4.5: Khối lượng sản phẩm do hệ thống máy sản xuất là BNN X có luật phân phối chuẩn, phương sai $Var(X) = 15\,g^2$. Sau một thời gian sản xuất, người ta nghi ngờ rằng khối lượng các sản phẩm được sản xuất ra không ổn định. Kiểm tra 25 sản phẩm, tính được phương sai điều chỉnh $s^2 = 26g^2$. Với độ tin cậy 99%, hãy kết luận về nghi ngờ trên.

Giải: Giả thuyết $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 15g^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq 15g^2 \end{cases}$

- Giá trị kiểm định:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)(26)}{15} = 41.6$$

- Bác bỏ giả thuyết H_0 khi: $\left[\begin{array}{l}\chi^2 < \chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \\ \chi^2 > \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\chi^2 < \chi^2_{24;0,005} \\ \chi^2 > \chi^2_{24;0,995}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\chi^2 < 9,886 \\ \chi^2 > 45,559\end{array}\right.$

Kết luận: Chấp nhận giả thuyết (H_0), bác bỏ đối thuyết H_1.Vậy, điều nghi ngờ là sai.

4.5 KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT VỀ SỰ BẰNG NHAU CỦA HAI TRUNG BÌNH:

Giả sử hai BNN X và Y độc lập có luật phân phối chuẩn và phương sai bằng nhau, $E(X) = \mu_X$ và $E(Y) = \mu_Y$ chưa biết, ta kiểm định giả thuyết:

- Giả thuyết kiểm định:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X > \mu_Y \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \end{cases}$$

- Giá trị kiểm định:

Trường hợp 1: $n_X \geq 30$; $n_Y \geq 30$

$$Z = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}}}$$ (Nếu giả thuyết cho σ_X^2, σ_Y^2 thì thay $s_X^2 = \sigma_X^2, s_Y^2 = \sigma_Y^2$)

Trường hợp 2: $n_X < 30$; $n_Y < 30$

$$T = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s.\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \quad \text{với} \quad s = \sqrt{\frac{(n_X - 1)s_X^2 + (n_Y - 1)s_Y^2}{n_X + n_Y - 2}}$$

Trường hợp 3: So sánh cặp.

$$T = \frac{\overline{d}\sqrt{n}}{s_D} \quad \text{với } D = X - Y$$

Chú ý: Nếu độ lệch chuẩn của tổng thể đã biết thì ta dùng độ lệch chuẩn của tổng thể mà không dùng của mẫu

- Bác bỏ giả thuyết H_0 khi (*tương ứng với các trường hợp tính giá trị kiểm định*):

  + Trường hợp 1 :

  Nếu $H_1: \mu_X > \mu_Y$ thì $Z > Z_{1-\alpha}$

  Nếu $H_1: \mu_X < \mu_Y$ thì $Z < -Z_{1-\alpha}$

  Nếu $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ thì $|Z| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

  + Trường hợp 2:

  Nếu $H_1: \mu_X > \mu_Y$ thì $T > t_{n_X+n_Y-2;1-\alpha}$

  Nếu $H_1: \mu_X < \mu_Y$ thì $T < -t_{n_X+n_Y-2;1-\alpha}$

  Nếu $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ thì $|T| > t_{n_X+n_Y-2;1-\frac{\alpha}{2}}$

+ Trường hợp 3:

Nếu $H_1: \mu_X > \mu_Y$ thì $T > t_{n-1;1-\alpha}$

Nếu $H_1: \mu_X < \mu_Y$ thì $T < -t_{n-1;1-\alpha}$

Nếu $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ thì $|T| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$

Kết luận: Nếu thỏa điều kiện bác bỏ giả thuyết H_0 thì bác bỏ giả thuyết H_0, chấp nhận đối thuyết H_1. Ngược lại chấp nhận giả thuyết H_0

Ví dụ 4.6: Trọng lượng sản phẩm do hai nhà máy sản xuất là BNN có luật phân phối chuẩn và có cùng độ lệch tiêu chuẩn là $\sigma = 1kg$. Với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$, có thể xem trọng lượng trung bình của sản phẩm do hai nhà máy sản xuất ra là như nhau hay không? Nếu cân thử 25 sản phẩm của nhà máy A ta tính được $\overline{x} = 50kg$, cân 20 sản phẩm của nhà máy B thì tính được $\overline{y} = 50.6kg$.

Giải: Gọi X, Y là trọng lượng của sản phẩm ở nhà máy A, nhà máy B, $E(X) = \mu_X$; $E(Y) = \mu_Y$

Ta có X, Y là các BNN có luật phân phối chuẩn và $Var(X) = Var(Y) = 1$

- Xét giả thuyết $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \end{cases}$
- Giá trị kiểm định: $Z = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n_X} + \dfrac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} = \dfrac{50 - 50.6}{\sqrt{\dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{20}}} = -2$
- Bác bỏ giả thuyết H_0 khi: $|Z| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Ta có: $\alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$

Kết luận: Bác bỏ giả thuyết H_0, chấp nhận đối thuyết H_1. Vậy trọng lượng trung bình của sản phẩm sản xuất ở hai nhà máy là khác nhau.

Ví dụ 4.7: Theo một tài liệu của viện nghiên cứu phát triển gia cầm thì hai giống gà X và Y có trọng lượng trung bình ở 3 tháng tuổi là như nhau. Ta nuôi thử mỗi giống 100 con và ở 3 tháng tuổi cân lại ta tính được kết quả tương ứng là:

$$\overline{x} = 1825g, \quad s_X^2 = 1628g^2, \quad \overline{y} = 1837g, \quad s_Y^2 = 1876g^2$$

Hãy căn cứ vào mẫu đó cho nhận xét về tài liệu trên với mức ý nghĩa 1%

Giải: Xét giả thuyết $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \end{cases}$

- Giá trị kiểm định: $Z = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{s_X^2}{n_X} + \dfrac{s_Y^2}{n_Y}}} = \dfrac{1825 - 1837}{\sqrt{\dfrac{1628}{100} + \dfrac{1876}{100}}} = -2.03$

- Bác bỏ giả thuyết H_0 khi: $|Z| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

  Ta có: $\alpha = 0.01 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.995} = 2.576$

Kết luận: Chấp nhận giả thuyết H_0, vậy tài liệu của viện nghiên cứu là chính xác.

Ví dụ 4.8: Dùng hai phương pháp để cùng làm một loại sản phẩm. Phương pháp A được một nhóm 12 người thực hiện có năng suất trung bình là 45 sản phẩm trong một ca làm việc, với độ lệch tiêu chuẩn điều chỉnh mẫu là 5 sản phẩm. Phương pháp B được một nhóm 15 người khác thực hiện, có năng suất trung bình là 53 sản phẩm trong một ca làm việc, với độ lệch tiêu chuẩn điều chỉnh mẫu là 6 sản phẩm. Với mức ý nghĩa α = 5%, hãy kiểm tra hiệu quả của hai phương pháp này có bằng nhau không?

Giải: Gọi X, Y lần lượt là số sản phẩm được sản xuất ra từ phương pháp A và B.

- Xét giả thuyết $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \end{cases}$

- Giá trị kiểm định:

$$\text{Ta có: } s = \sqrt{\frac{(n_X - 1)s_X^2 + (n_Y - 1)s_Y^2}{n_X + n_Y - 2}} = \sqrt{\frac{11.25 + 14.36}{12 + 15 - 2}} \approx 5.58$$

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} = \frac{45 - 53}{(5.58)\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{15}}} \approx -3.7$$

- Bác bỏ giả thuyết H_0 khi: $|T| > t_{n_X + n_Y - 2, 1-\frac{\alpha}{2}}$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{n_X + n_Y - 2, 1-\frac{\alpha}{2}} = t_{25, 0.975} = 2.06$$

Kết luận: Bác bỏ giả thuyết H_0, chấp nhận đối thuyết H_1. Vậy hiệu quả của hai phương pháp này không bằng nhau.

Ví dụ 4.9: Người ta tiến hành một cuộc khảo sát về giá cả của hai cửa hiệu thực phẩm lớn trong thành phố, 12 mặt hàng thông dụng nhất được chọn ngẫu nhiên và giá của chúng bán ở hai cửa hiệu được ghi lại như sau:

Mặt hàng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cửa hiệu A	0.89	0.59	1.29	1.50	2.49	0.65	0.99	1.99	2.25	0.50	1.99	1.79
Cửa hiệu B	0.95	0.55	1.49	1.69	2.39	0.79	0.99	1.79	2.39	0.59	2.19	1.99

Với mức ý nghĩa α = 2%, hãy kiểm định xem có sự khác nhau về giá cả trung bình của các mặt hàng ở hai cửa hiệu hay không?

Giải: Gọi X, Y lần lượt là giá của các mặt hàng ở cưả hiệu A và B. $E(X) = \mu_X$, $E(Y) = \mu_Y$

- Xét giả thuyết : $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \end{cases}$

- Giá trị kiểm định:

  Ta lập bảng các giá trị của hiệu số D = X – Y:

Mặt hàng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D = X – Y	-0.06	0.04	-0.20	-0.19	0.10	-0.14	0.00	0.20	-0.14	-0.09	-0.20	-0.20

Từ bảng này ta tính được: $\overline{d} = -0.073$; $s_D = 0.133$

Suy ra: $T = \dfrac{\overline{d}\sqrt{n}}{s_D} = \dfrac{(-0.073)\sqrt{12}}{0.133} = -1.901$

- Bác bỏ giả thuyết H_0 khi : $|T| > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$

  Ta có: $\alpha = 0.02 \Rightarrow t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{11,0.99} = 2.718$

Kết luận: Chấp nhận giả thuyết (H_0). Vậy giá cả trung bình của các mặt hàng bán ở hai cửa hiệu là không khác nhau.

4.6 KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT VỀ SỰ BẰNG NHAU CỦA HAI TỈ LỆ:

Giả sử hai BNN X và Y có tỷ lệ của tổng thể là p_X, p_Y chưa biết.

- Xét giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : p_X = p_Y \\ H_1 : p_X > p_Y \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} H_0 : p_X = p_Y \\ H_1 : p_X < p_Y \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} H_0 : p_X = p_Y \\ H_1 : p_X \neq p_Y \end{cases}$$

- Giá trị kiểm định: với mẫu cụ thể $w_x = (x_1, x_2, ..., x_{n_X})$, $w_y = (y_1, y_2, ..., y_{n_Y})$ có f_X, f_Y lần lượt là tỷ lệ phần tử có tính chất A của BNN X và Y.

$$Z = \frac{f_X - f_Y}{\sqrt{p_0(1-p_0)\left(\dfrac{1}{n_X} + \dfrac{1}{n_Y}\right)}}$$

Chú ý: Nếu giả thuyết chưa cho p_0 thì ta thế p_0 bằng p^*, với p^* được tính như sau:

$$p^* = \frac{m_X + m_Y}{n_X + n_Y} = \frac{n_X f_X + n_Y f_Y}{n_X + n_Y}$$

$\Rightarrow q^* = 1 - p^*$ thay thế cho q_0.

- Bác bỏ giả thuyết H_0 khi:

  Nếu $H_1 : p_X > p_Y$ thì $Z > Z_{1-\alpha}$

  Nếu $H_1 : p_X < p_Y$ thì $Z < -Z_{1-\alpha}$

  Nếu $H_1 : p_X \neq p_Y$ thì $|Z| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Ví dụ 4.10: Giả sử có hai nhà máy cùng sản xuất một loại sản phẩm, từ hai kho hàng của hai nhà máy tiến hành lấy ngẫu nhiên ở mỗi kho hàng 100 sản phẩm thì thấy có số sản phẩm loại I tương ứng là 20 và 30 sản phẩm. Với mức ý nghĩa 1%, hãy kiểm định giả thuyết cho rằng tỷ lệ sản phẩm loại I của hai nhà máy là như nhau?

Giải: Gọi p_X, p_Y lần lượt là tỷ lệ sản phẩm loại I của hai nhà máy

- Xét giả thuyết $\begin{cases} H_0 : p_X = p_Y \\ H_1 : p_X \neq p_Y \end{cases}$

- Giá trị kiểm định:

  với mẫu cụ thể có $n_X = 100$, $n_Y = 100$, $f_X = \frac{20}{100} = 0.2$, $f_Y = \frac{30}{100} = 0.3$

  Suy ra: $$p^* = \frac{20+30}{100+100} = 0.25$$

  $$Z = \frac{f_X - f_Y}{\sqrt{p^*q^*\left(\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}\right)}} = \frac{0.2-0.3}{\sqrt{(0.25)(0.75)\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\right)}} \approx -1.633$$

- Bác bỏ giả thuyết H_0 khi: $|Z| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

  Ta có: $\alpha = 0.01 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.995} = 2.576$

Kết luận: Chấp nhận giả thuyết (H_0), bác bỏ đối thuyết H_1.

4.7 KIỂM ĐỊNH VỀ SỰ BẰNG NHAU CỦA HAI PHƯƠNG SAI:

Giả sử hai BNN X và Y độc lập, cùng có luật phân phối chuẩn với các tham số phương sai tổng thể Var(X) = σ_X^2, Var(Y)=σ_Y^2 chưa biết, kiểm định giả thuyết:

- Xét giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \\ H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \end{cases}$

- Giá trị kiểm định: $F = \frac{s_X^2}{s_Y^2}$

- Bác bỏ giả thuyết H_0 khi: $F > F_{n_X-1,n_Y-1,1-\alpha}$

Ví dụ 4.11: Một phản ứng hoá học có thể được kích thích bởi hai chất xúc tác A và B khác nhau. Người ta nghi ngờ rằng tốc độ xảy ra phản ứng do chất xúc tác A kích thích không ổn định bằng chất xúc tác B kích thích. Lấy mẫu gồm 12 nhóm phản ứng dùng cho chất xúc tác A, tính được phương sai điều chỉnh là $0.35\,s^2$. Lấy mẫu gồm 10 nhóm phản ứng dùng cho chất xúc tác B, tính được phương sai điều chỉnh là $0.14\,s^2$. Với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, hãy kiểm định điều nghi ngờ trên. Biết rằng tốc độ xảy ra các phản ứng có luật phân phối chuẩn.

Giải: Gọi X, Y lần lượt là tốc độ xảy ra phản ứng do chất xúc tác A, B kích thích cùng có luật phân phối chuẩn và Var(X) = σ_X^2, Var(Y)=σ_Y^2 chưa biết.

- Xét giả thuyết $\begin{cases} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \\ H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \end{cases}$

- Giá trị kiểm định:

  Ta có: $s_X^2 = 0.35$, $s_Y^2 = 0.14$ $\Rightarrow F = \frac{s_X^2}{s_Y^2} = \frac{0.35}{0.14} = 2.5$

- Bác bỏ giả thuyết H_0 khi: $F > F_{n_X-1,n_Y-1,1-\alpha}$

Ta có; $\alpha = 5\% \Rightarrow F_{n_X-1,n_Y-1,1-\alpha} = F_{11,9,0.95} = 3.1$

Kết luận: Chấp nhận giả thuyết H_0. Vậy, chưa thể cho rằng tốc độ xảy ra phản ứng do chất xúc tác A kích thích không ổn định bằng chất xúc tác B kích thích.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3 VÀ CHƯƠNG 4

Bài 1: Thời gian trước số tiền gửi tiết kiệm bằng ngoại tệ trung bình của mỗi khách hàng là 1000 USD. Để đánh giá xem xu hướng này còn giữ nguyên hay không, người ta kiểm tra ngẫu nhiên 64 sổ tiết kiệm và tìm được số tiền gửi trung bình là 900 USD, độ lệch tiêu chuẩn 100 USD. Với mức ý nghĩa 5% hãy xem số tiền gửi tiết kiệm có thay đổi không?

Bài 2: Nếu máy móc hoạt động bình thường thì chiều dài của một loại sản phẩm là BNN có phân phối chuẩn với phương sai 3cm. Nghi ngờ máy hoạt động không bình thường, người ta đo thử một số sản phẩm thì được số liệu:

Chiều dài (cm)	105	107	109	111
Số sản phẩm	2	4	5	2

Với mức ý nghĩa 5%, có kết luận gì về nghi ngờ nói trên.

Bài 3: Có 2 lô chuột thí nghiệm tăng trọng với 2 khẩu phần ăn khác nhau. Lô thứ nhất cho ăn khẩu phần ăn nhiều đạm. Lô thứ hai cho ăn khẩu phần ăn ít đạm hơn. Sự tăng trọng của 2 lô chuột sau một thời gian được ghi lại như sau:

Lô thứ nhất	123	134	146	104	119	124	161	107	83	113	129	97
Lô thứ hai	70	118	85	107	132	94	101	100				

a/ Với mức ý nghĩa 5%, hãy nhận định việc cho ăn đạm có tác dụng tăng trọng hay không?

b/ Với mức ý nghĩa 5%, có thể xem việc cho ăn đạm làm cho chuột tăng trọng không đồng đều hay không?

Bài 4: Để so sánh thời gian sản xuất ra 1 sản phẩm của 2 máy (đơn vị là giây) người ta điều tra và ghi lại kết quả như sau:

Máy I	58	58	56	38	70	38	42	75	68	67
Máy II	57	55	63	24	67	43	33	68	56	54

Giả sử độ lệch tiêu chuẩn của thời gian sản xuất mỗi sản phẩm của 2 máy là như nhau và có phân phối chuẩn. Với mức ý nghĩa 0,05, có thể cho rằng máy II tốt hơn máy I không?

Bài 5: Điều tra 120 sinh viên của trường Sư phạm Ngoại ngữ, ta thấy có 71 sinh viên nữ và điều tra 110 sinh viên trường Sư phạm Kỹ thuật ta thấy có 28 sinh viên nữ. Có thể xem tỷ lệ sinh viên nữ ở hai trường như nhau không với mức ý nghĩa 5%.

Bài 6: Một nhà kinh tế cho rằng độ phân tán của thị phần trong các công ty hoạt động có cạnh tranh về giá cả cao hơn trong các công ty độc quyền. Để kết luận về điều đó người ta đã điều tra thị phần của một công ty cạnh tranh về giá cả trong 4 năm và tìm thấy phương sai điều chỉnh mẫu là 85,576. Đồng thời kiểm tra thị phần của một công ty độc quyền trong 7 năm thì tìm được phương sai điều chỉnh mẫu là 13.78. Với mức ý nghĩa 0,05 hãy kết luận về ý kiến trên. Giả sử thị phần của các công ty là các BNN có phân phối chuẩn.

Bài 7: Số tiền thu phí trong một ngày tại một trạm thu phí giao thông A có phân phối chuẩn. Người ta theo dõi số tiền thu phí tại trạm đó trong 100 ngày có số liệu sau:

Số tiền (triệu đồng)	150	155	158	165	170
Số ngày	10	15	50	13	12

a/ Trạm trưởng trạm thu phí A báo cáo rằng số tiền thu phí trung bình một ngày là 155 triệu đồng. Với mức ý nghĩa 1% cho biết báo cáo trên có chấp nhận được không?

b/ Những ngày thu phí dưới 155 triệu đồng được xem là không đạt yêu cầu. Với mức ý nghĩa 5% có thể xem tỷ lệ những ngày thu phí không đạt yêu cầu là 15% được không?

Bài 8: Một vườn ươm cây giống, theo quy định khi nào cây cao trung bình trên 1m thì đem ra trồng. Đo ngẫu nhiên 25 cây, được số liệu:

Chiều cao (m)	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
Số cây	1	2	9	7	4	2

Với mức ý nghĩa 5%, có thể đem cây ra trồng được chưa? (Giả thiết chiều cao của cây theo luật phân phối chuẩn).

Bài 9: Một công ty tiến hành khảo sát thăm dò thị trường tiêu dung tại một thành phố về một loại sản phẩm A, khảo sát ngẫu nhiên 400 hộ gia đình trong thành phố có 400.000 hộ được số liệu về các hộ sử dụng sản phẩm A như sau:

Số lượng (kg/tháng)	0 - 1	1 – 1,5	1,5 - 2	2 – 2,5	2,5 - 3	3 - 4
Số hộ	50	80	100	80	60	30

a/ Hãy ước lượng khối lượng sản phẩm A được tiêu thụ trong tháng tại thành phố với độ tin cậy 96%.

b/ Một hộ sử dụng trong một tháng trên 2,5 kg sản phẩm A được xếp vào loại hộ ưa chuộng sản phẩm A. Hãy ước lượng tỷ lệ hộ ưa chuộng sản phẩm A với độ tin cậy 98%.

c/ Nếu muốn ước lượng tỷ lệ hộ ưa chuộng sản phẩm A có độ chính xác 4% và độ tin cậy 98% thì cần phải khảo sát thêm bao nhiêu hộ gia đình nữa?

d/ Một công ty khác đã khảo sát thị trường trước đây để lại một tài liệu cho biết sức tiêu thụ sản phẩm A trung bình trong một tháng tại thành phố này là 740 tấn. Hãy nhận xét về tài liệu này với mức ý nghĩa 2%.

Bài 10: Theo dõi mức hao phí nguyên liệu để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm ở một nhà máy, người ta thu được các số liệu quan sát sau:

Mức nguyên liệu hao phí (gram/sản phẩm)	28	29	30	31	32
Số sản phẩm	3	11	17	11	8

a/ Tìm khoảng ước lượng mức hao phí nguyên liệu trung bình cho một đơn vị sản phẩm với độ tin cậy 98%.

b/ Với độ tin cậy 99%, nếu muốn bán kính ước lượng mức hao phí nguyên liệu trung bình cho một đơn vị sản phẩm là 0,333 thì cần phải khảo sát thêm bao nhiêu sản phẩm nữa?

c/ Trước đây mức hao phí nguyên liệu trung bình là 31 gram/sản phẩm. Số liệu của mẫu trên được thu thập sau khi nhà máy áp dụng một công nghệ sản xuất mới. Với mức ý nghĩa 2% có thể cho rằng sau khi áp dụng công nghệ sản xuất mới thì mức hao phí nguyên liệu trung bình cho một đơn vị sản phẩm giảm xuống hay không?

Bài 11: Khảo sát về thu nhập của một số người ở công ty A ta thu được số liệu sau: (đơn vị: triệu đồng/năm)

Thu nhập	6 - 10	10 - 12	12 - 14	14 - 16	16 - 18	18 - 20	20 - 22	22 - 26
Số người	5	15	22	34	25	20	14	9

a/ Hãy ước lượng khoảng thu nhập trung bình một người trên năm với độ tin cậy 95%.

b/ Những người có thu nhập từ 12 triệu đồng/năm trở xuống là những người có thu nhập thấp. Hãy ước lượng số người có thu nhập thấp của công ty A với độ tin cậy 98%. (Cho biết tổng số người làm việc tại công ty A là 3000 người).

c/ Nếu công ty này báo cáo mức thu nhập bình quân của một người là 1,3 triệu đồng/tháng thì có tin cậy được không? Với mức ý nghĩa 3%.

d/ Nếu muốn dùng mẫu trên để ước lượng thu nhập trung bình một người trên năm của công ty A với độ chính xác là 600 nghìn đồng thì độ tin cậy là bao nhiêu?

Bài 12: Khảo sát về doanh số bán hàng của một siêu thị, ta thu được số liệu như sau:

Doanh số (triệu đồng/ngày)	24	30	36	42	48	54	60	65	70
Số ngày	5	12	25	35	24	15	12	10	6

a/ Hãy ước lượng khoảng doanh số bán hàng trung bình trong một ngày với độ tin cậy 95%.

b/ Những ngày có doanh số bán hàng từ 60 triệu đồng/ngày trở lên là những ngày bán đắt hàng. Hãy ước lượng tỷ lệ những ngày bán dắt hàng ở siêu thị này với độ tin cậy 98%.

c/ Nếu siêu thị này báo cáo tỷ lệ những ngày bán đắt hàng là 20% thì có chấp nhận được không? Với mức ý nghĩa 2%.

d/ Trước đây doanh số bán hàng trung bình của siêu thị là 35 triệu đồng/ngày. Số liệu ở bảng trên được thu thập sau khi siêu thị áp dụng một phương thức bán hàng mới. Hãy cho nhận xét về phương thức bán hàng mới với mức ý nghĩa 5%.

Bài 13: Để nghiên cứu tác dụng của một chất kích thích sinh trưởng đối với năng suất ngô, người tag hi lại kết quả ở 5 mảnh ruộng thí nghiệm và 5 mảnh ruộng đối chứng được bảng số liệu sau (tính theo tạ/ha):

Với mức ý nghĩa 5%, hãy cho kết luận về hiệu quả của chất kích thích trên, xem năng

Năng suất ngô trên các mảnh ruộng thí nghiệm X	60	58	29	39	47
Năng suất ngô trên các mảnh ruộng đối chứng Y	55	53	30	37	49

suất ngô là BNN có phân phối chuẩn.

Bài 14: Đo chỉ số mỡ sữa của 130 con bò lai Hà - Ấn ta được bảng số liệu sau:

Chỉ số mỡ sữa	3,0 – 3,6	3,6 – 4,2	4,2 – 4,8	4,8 – 5,4	5,4 – 6,0	6,0 – 6,6	6,6 – 7,2
Số bò	2	8	35	43	22	15	5

a/ Hãy ước lượng chỉ số mỡ sữa trung bình của giống bò lai trên với độ tin cậy 94%.

b/ Biết rằng chỉ số mỡ sữa trung bình của giống bò thuần chuẩn là 4,95. Với mức ý nghĩa 1% hãy cho kết luận về việc lai giống.

Bài 15: Nhà trường muốn đánh giá số giờ tự học của sinh viên trong tuần, để biết điều này phòng đào tạo chọn ngẫu nhiên 25 sinh viên và nhận được kết quả sau:

Số giờ tự học (giờ)	2	3	4	5	6	7	8	9	11
Số sinh viên	2	1	3	1	5	5	5	2	1

a/ Hãy ước lượng số giờ tự học trung bình của sinh viên trong tuần với độ tin cậy 95%.

b/ Với độ tin cậy 95% phải khảo sát thêm ít nhất bao nhiêu sinh viên để có bán kính ước lượng số giờ tự học trung bình của sinh viên trong tuần là 0,8?

c/ Với mức ý nghĩa 2% có thể cho rằng số giờ tự học trung bình của sinh viên trong tuần là 8 giờ được không?

Bài 16: Hàm lượng dầu trung bình trong một trái cây lúc đầu là 5%. Người ta chăm sóc bằng một loại phân N và sau một thời gian, kiểm tra một số trái ta được kết quả:

Hàm lượng dầu (%)	1 - 5	5 - 9	9 - 13	13 - 17	17 - 21	21 - 25	25 - 29	29 - 33	33 - 37
Số trái	50	40	30	31	30	8	7	3	2

a/ Cho kết luận về hiệu quả của loại phân N trên với mức ý nghĩa 1%.

b/ Tìm một ước lượng cho hàm lượng dầu trung bình của loại trái cây đó sau chăm bón với độ tin cậy 99,6%.

c/ Giả sử với số liệu điều tra ở trên, muốn ước lượng hàm lượng dầu trung bình với độ chính xác 0,8 (%) thì độ tin cậy đạt được là bao nhiêu?

d/ Những trái có hàm lượng dầu từ 21% trở lên là loại A. Có thể xem tỷ lệ loại A là 15% được không với mức ý nghĩa 5%?

e/ Hãy ước lượng cho tỷ lệ loại A với độ tin cậy 96%.

f/ Có thể xem phương sai của hàm lượng dầu là 5% được không với mức ý nghĩa 5%? Giả thiết hàm lượng này có luật phân phối chuẩn.

Bài 17: Hệ thống bán vé may bay online của công ty hàng không AP vừa được cải tiến quy trình và được theo dõi để ghi nhận trình trạng huỷ vé sau khi đã đặt chỗ. Khảo sát ngẫu nhiên một số ngày và nhận thấy trong 169 lần đặt vé thì có 15 lần huỷ vé.

a/ Với độ tin cậy 98%, hãy ước lượng tỷ lệ huỷ vé sau khi đặt chỗ qua hệ thống.

b/ Theo tài liệu trước khi cải tiến hệ thống cho biết tỷ lệ huỷ vé sau khi đặt chỗ là 15%. Với mức ý nghĩa 2%, hãy kiểm định xem hệ thống được cải tiến này có thực sự làm thay đổi tỷ lệ huỷ vé hay không?

c/ Nếu muốn ước lượng tỷ lệ huỷ vé có độ tin cậy 96% và độ chính xác 4%, cần phải khảo sát thêm bao nhiêu lần đặt vé nữa?

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Đặng Hấn, 1996: Xác suất thống kê – NXB Thống kê.
2. Nguyễn Hữu Khánh: Bài giảng Xác suất thống kê – ĐH Cần Thơ.
3. Đinh Văn Gắng: Xác suất và Thống kê toán – NXB Thống kê.
4. Hoàng Ngọc Nhậm: Xác suất và Thống kê toán – ĐH Kinh tế TP HCM.
5. Đặng Hấn, 1996: Bài tập Xác suất thống kê – NXB Thống kê.
6. Hoàng Hữu Như: Bài tập Xác xuất thống kê – NXB Thống kê.
7. Lê Khánh Luận: Bài tập Xác suất thống kê - Trường ĐH Kinh tế TP HCM.
8. Ninh Quang Hải: Xác suất và Thống kê toán – ĐH Kiến trúc Hà Nội.

PHỤ LỤC

Phụ lục 1: Bảng giá trị của hàm $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$

	0.00	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3725	0.3712	0.3697
0.4	0.3683	0.3668	0.3653	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1.7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0396	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0355	0.0347	0.0339	0.0332	0.0325	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2.3	0.0283	0.0277	0.0270	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	0.0107
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3.2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018
3.3	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013
3.4	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0009
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006
3.6	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004
3.7	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
3.8	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001

Phụ lục 2: Bảng giá trị của hàm $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt$

	0.00	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Phụ lục 3: **Bảng giá trị phân vị chuẩn** $\left(\gamma = 1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ **và** $\left(\gamma = 1 - \alpha\right)$

γ	Z_γ	γ	Z_γ	γ	Z_γ	γ	Z_γ	γ	Z_γ
0,50	0,000	0,70	0,524	0,90	1,282	0,960	1,751	0,980	2,054
0,51	0,025	0,71	0,553	0,905	1,311	0,961	1,762	0,981	2,075
0,52	0,030	0,72	0,583	0,910	1,341	0,962	1,774	0,982	2,097
0,53	0,075	0,73	0,613	0,915	1,372	0,963	1,787	0,983	2,120
0,54	0,100	0,74	0,643	0,920	1,405	0,964	1,799	0,984	2,144
0,55	0,125	0,75	0,674	0,925	1,440	0,965	1,812	0,985	2,170
0,56	0,151	0,76	0,706	0,930	1,476	0,966	1,825	0,986	2,197
0,57	0,175	0,77	0,739	0,935	1,514	0,967	1,837	0,987	2,226
0,58	0,202	0,78	0,772	0,940	1,555	0,968	1,852	0,988	2,257
0,59	0,228	0,79	0,806	0,945	1,598	0,969	1,866	0,989	2,290
0,60	0,253	0,80	0,842	0,950	1,645	0,970	1,881	0,990	2,326
0,61	0,279	0,81	0,878	0,951	1,655	0,971	1,896	0,991	2,368
0,62	0,305	0,82	0,915	0,952	1,665	0,972	1,911	0,992	2,449
0,63	0,332	0,83	0,954	0,953	1,675	0,973	1,927	0,993	2,457
0,64	0,358	0,84	0,994	0,954	1,685	0,974	1,943	0,994	2,512
0,65	0,385	0,85	1,036	0,955	1,695	0,975	1,960	0,995	2,576
0,66	0,412	0,86	1,080	0,956	1,706	0,976	1,977	0,996	2,652
0,67	0,440	0,87	1,126	0,957	1,717	0,977	1,996	0,997	2,748
0,68	0,468	0,88	1,175	0,958	1,728	0,978	2,014	0,998	2,878
0,69	0,496	0,89	1,227	0,959	1,739	0,979	2,034	0,999	3,090

Phụ lục 4: Bảng giá trị phân vị của phân phối student

df	0.900	0.905	0.910	0.915	0.920	0.925	0.930	0.935	0.940	0.945	0.950
1	3.078	3.251	3.442	3.655	3.895	4.165	4.474	4.829	5.242	5.730	6.314
2	1.886	1.953	2.026	2.104	2.189	2.282	2.383	2.495	2.620	2.760	2.920
3	1.638	1.688	1.741	1.798	1.859	1.924	1.995	2.072	2.156	2.249	2.353
4	1.533	1.577	1.623	1.671	1.723	1.778	1.838	1.902	1.971	2.048	2.132
5	1.476	1.516	1.558	1.602	1.649	1.699	1.753	1.810	1.873	1.941	2.015
6	1.440	1.478	1.517	1.559	1.603	1.650	1.700	1.754	1.812	1.874	1.943
7	1.415	1.451	1.489	1.529	1.572	1.617	1.664	1.715	1.770	1.830	1.895
8	1.397	1.432	1.469	1.508	1.549	1.592	1.638	1.687	1.740	1.797	1.860
9	1.383	1.418	1.454	1.492	1.532	1.574	1.619	1.666	1.718	1.773	1.833
10	1.372	1.406	1.442	1.479	1.518	1.559	1.603	1.650	1.700	1.754	1.812
11	1.363	1.397	1.432	1.468	1.507	1.548	1.591	1.636	1.686	1.738	1.796
12	1.356	1.389	1.424	1.460	1.498	1.538	1.580	1.626	1.674	1.726	1.782
13	1.350	1.383	1.417	1.453	1.490	1.530	1.572	1.616	1.664	1.715	1.771
14	1.345	1.377	1.411	1.447	1.484	1.523	1.565	1.609	1.656	1.706	1.761
15	1.341	1.373	1.406	1.441	1.478	1.517	1.558	1.602	1.649	1.699	1.753
16	1.337	1.369	1.402	1.437	1.474	1.512	1.553	1.596	1.642	1.692	1.746
17	1.333	1.365	1.398	1.433	1.469	1.508	1.548	1.591	1.637	1.686	1.740
18	1.330	1.362	1.395	1.429	1.466	1.504	1.544	1.587	1.632	1.681	1.734
19	1.328	1.359	1.392	1.426	1.462	1.500	1.540	1.583	1.628	1.677	1.729
20	1.325	1.357	1.389	1.424	1.459	1.497	1.537	1.579	1.624	1.672	1.725
21	1.323	1.354	1.387	1.421	1.457	1.494	1.534	1.576	1.621	1.669	1.721
22	1.321	1.352	1.385	1.419	1.454	1.492	1.531	1.573	1.618	1.665	1.717
23	1.319	1.350	1.383	1.417	1.452	1.489	1.529	1.570	1.615	1.662	1.714
24	1.318	1.349	1.381	1.415	1.450	1.487	1.526	1.568	1.612	1.660	1.711
25	1.316	1.347	1.379	1.413	1.448	1.485	1.524	1.566	1.610	1.657	1.708
26	1.315	1.346	1.378	1.411	1.446	1.483	1.522	1.564	1.608	1.655	1.706
27	1.314	1.344	1.376	1.410	1.445	1.482	1.521	1.562	1.606	1.653	1.703
28	1.313	1.343	1.375	1.408	1.443	1.480	1.519	1.560	1.604	1.651	1.701
29	1.311	1.342	1.374	1.407	1.442	1.479	1.517	1.558	1.602	1.649	1.699
30	1.310	1.341	1.373	1.406	1.441	1.477	1.516	1.557	1.600	1.647	1.697
40	1.303	1.333	1.365	1.397	1.432	1.468	1.506	1.546	1.589	1.635	1.684
50	1.299	1.329	1.360	1.392	1.426	1.462	1.500	1.539	1.582	1.627	1.676
60	1.296	1.326	1.357	1.389	1.423	1.458	1.496	1.535	1.577	1.622	1.671
70	1.294	1.323	1.354	1.386	1.420	1.456	1.493	1.532	1.574	1.619	1.667
80	1.292	1.322	1.353	1.385	1.418	1.453	1.491	1.530	1.572	1.616	1.664
90	1.291	1.321	1.351	1.383	1.417	1.452	1.489	1.528	1.570	1.614	1.662
100	1.290	1.320	1.350	1.382	1.416	1.451	1.488	1.527	1.568	1.613	1.660
200	1.286	1.315	1.345	1.377	1.410	1.445	1.482	1.520	1.561	1.605	1.653
300	1.284	1.314	1.344	1.376	1.409	1.443	1.480	1.518	1.559	1.603	1.650
400	1.284	1.313	1.343	1.375	1.408	1.442	1.479	1.517	1.558	1.602	1.649

df	0.955	0.960	0.965	0.970	0.975	0.980	0.985	0.990	0.995
1	7.026	7.916	9.058	10.579	12.706	15.895	21.205	31.821	63.657
2	3.104	3.320	3.578	3.896	4.303	4.849	5.643	6.965	9.925
3	2.471	2.605	2.763	2.951	3.182	3.482	3.896	4.541	5.841
4	2.226	2.333	2.456	2.601	2.776	2.999	3.298	3.747	4.604
5	2.098	2.191	2.297	2.422	2.571	2.757	3.003	3.365	4.032
6	2.019	2.104	2.201	2.313	2.447	2.612	2.829	3.143	3.707
7	1.966	2.046	2.136	2.241	2.365	2.517	2.715	2.998	3.499
8	1.928	2.004	2.090	2.189	2.306	2.449	2.634	2.896	3.355
9	1.899	1.973	2.055	2.150	2.262	2.398	2.574	2.821	3.250
10	1.877	1.948	2.028	2.120	2.228	2.359	2.527	2.764	3.169
11	1.859	1.928	2.007	2.096	2.201	2.328	2.491	2.718	3.106
12	1.844	1.912	1.989	2.076	2.179	2.303	2.461	2.681	3.055
13	1.832	1.899	1.974	2.060	2.160	2.282	2.436	2.650	3.012
14	1.821	1.887	1.962	2.046	2.145	2.264	2.415	2.624	2.977
15	1.812	1.878	1.951	2.034	2.131	2.249	2.397	2.602	2.947
16	1.805	1.869	1.942	2.024	2.120	2.235	2.382	2.583	2.921
17	1.798	1.862	1.934	2.015	2.110	2.224	2.368	2.567	2.898
18	1.792	1.855	1.926	2.007	2.101	2.214	2.356	2.552	2.878
19	1.786	1.850	1.920	2.000	2.093	2.205	2.346	2.539	2.861
20	1.782	1.844	1.914	1.994	2.086	2.197	2.336	2.528	2.845
21	1.777	1.840	1.909	1.988	2.080	2.189	2.328	2.518	2.831
22	1.773	1.835	1.905	1.983	2.074	2.183	2.320	2.508	2.819
23	1.770	1.832	1.900	1.978	2.069	2.177	2.313	2.500	2.807
24	1.767	1.828	1.896	1.974	2.064	2.172	2.307	2.492	2.797
25	1.764	1.825	1.893	1.970	2.060	2.167	2.301	2.485	2.787
26	1.761	1.822	1.890	1.967	2.056	2.162	2.296	2.479	2.779
27	1.758	1.819	1.887	1.963	2.052	2.158	2.291	2.473	2.771
28	1.756	1.817	1.884	1.960	2.048	2.154	2.286	2.467	2.763
29	1.754	1.814	1.881	1.957	2.045	2.150	2.282	2.462	2.756
30	1.752	1.812	1.879	1.955	2.042	2.147	2.278	2.457	2.750
40	1.737	1.796	1.862	1.936	2.021	2.123	2.250	2.423	2.704
50	1.729	1.787	1.852	1.924	2.009	2.109	2.234	2.403	2.678
60	1.723	1.781	1.845	1.917	2.000	2.099	2.223	2.390	2.660
70	1.719	1.776	1.840	1.912	1.994	2.093	2.215	2.381	2.648
80	1.716	1.773	1.836	1.908	1.990	2.088	2.209	2.374	2.639
90	1.714	1.771	1.834	1.905	1.987	2.084	2.205	2.368	2.632
100	1.712	1.769	1.832	1.902	1.984	2.081	2.201	2.364	2.626
200	1.704	1.760	1.822	1.892	1.972	2.067	2.186	2.345	2.601
300	1.701	1.757	1.818	1.888	1.968	2.063	2.180	2.339	2.592
400	1.700	1.755	1.817	1.886	1.966	2.060	2.178	2.336	2.588

Phụ lục 5: Bảng giá trị phân vị của phân phối chi bình phương

Df	0.050	0.045	0.040	0.035	0.030	0.025	0.020	0.015	0.010	0.005
1	0.004	0.003	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2	0.103	0.092	0.082	0.071	0.061	0.051	0.040	0.030	0.020	0.010
3	0.352	0.326	0.300	0.273	0.245	0.216	0.185	0.152	0.115	0.072
4	0.711	0.670	0.627	0.582	0.535	0.484	0.429	0.368	0.297	0.207
5	1.145	1.090	1.031	0.969	0.903	0.831	0.752	0.662	0.554	0.412
6	1.635	1.566	1.492	1.414	1.330	1.237	1.134	1.016	0.872	0.676
7	2.167	2.085	1.997	1.903	1.802	1.690	1.564	1.418	1.239	0.989
8	2.733	2.638	2.537	2.428	2.310	2.180	2.032	1.860	1.646	1.344
9	3.325	3.218	3.105	2.982	2.848	2.700	2.532	2.335	2.088	1.735
10	3.940	3.822	3.697	3.561	3.412	3.247	3.059	2.837	2.558	2.156
11	4.575	4.446	4.309	4.160	3.997	3.816	3.609	3.363	3.053	2.603
12	5.226	5.087	4.939	4.778	4.601	4.404	4.178	3.910	3.571	3.074
13	5.892	5.743	5.584	5.411	5.221	5.009	4.765	4.476	4.107	3.565
14	6.571	6.412	6.243	6.058	5.856	5.629	5.368	5.057	4.660	4.075
15	7.261	7.094	6.914	6.718	6.503	6.262	5.985	5.653	5.229	4.601
16	7.962	7.785	7.596	7.390	7.163	6.908	6.614	6.263	5.812	5.142
17	8.672	8.487	8.288	8.071	7.832	7.564	7.255	6.884	6.408	5.697
18	9.390	9.197	8.989	8.762	8.512	8.231	7.906	7.516	7.015	6.265
19	10.117	9.915	9.698	9.462	9.200	8.907	8.567	8.159	7.633	6.844
20	10.851	10.641	10.415	10.169	9.897	9.591	9.237	8.810	8.260	7.434
21	11.591	11.374	11.140	10.884	10.601	10.283	9.915	9.471	8.897	8.034
22	12.338	12.113	11.870	11.605	11.313	10.982	10.600	10.139	9.542	8.643
23	13.091	12.858	12.607	12.333	12.030	11.689	11.293	10.815	10.196	9.260
24	13.848	13.609	13.350	13.067	12.754	12.401	11.992	11.497	10.856	9.886
25	14.611	14.365	14.098	13.807	13.484	13.120	12.697	12.187	11.524	10.520
26	15.379	15.125	14.851	14.551	14.219	13.844	13.409	12.882	12.198	11.160
27	16.151	15.891	15.609	15.301	14.959	14.573	14.125	13.583	12.879	11.808
28	16.928	16.660	16.371	16.055	15.704	15.308	14.847	14.290	13.565	12.461
29	17.708	17.434	17.138	16.813	16.454	16.047	15.574	15.002	14.256	13.121
30	18.493	18.212	17.908	17.576	17.208	16.791	16.306	15.719	14.953	13.787
40	26.509	26.168	25.799	25.394	24.944	24.433	23.838	23.113	22.164	20.707
50	34.764	34.370	33.943	33.473	32.951	32.357	31.664	30.818	29.707	27.991
60	43.188	42.746	42.266	41.738	41.150	40.482	39.699	38.744	37.485	35.534
70	51.739	51.253	50.724	50.143	49.495	48.758	47.893	46.836	45.442	43.275
80	60.391	59.864	59.290	58.659	57.955	57.153	56.213	55.061	53.540	51.172
90	69.126	68.560	67.944	67.266	66.509	65.647	64.635	63.394	61.754	59.196
100	77.929	77.326	76.671	75.949	75.142	74.222	73.142	71.818	70.065	67.328
200	168.279	167.380	166.400	165.320	164.111	162.728	161.100	159.096	156.432	152.241
300	260.878	259.752	258.524	257.169	255.650	253.912	251.864	249.338	245.972	240.663
400	354.641	353.324	351.886	350.299	348.520	346.482	344.078	341.112	337.155	330.903

Df	0.950	0.955	0.960	0.965	0.970	0.975	0.980	0.985	0.990	0.995
1	3.841	4.019	4.218	4.445	4.709	5.024	5.412	5.916	6.635	7.879
2	5.991	6.202	6.438	6.705	7.013	7.378	7.824	8.399	9.210	10.597
3	7.815	8.049	8.311	8.607	8.947	9.348	9.837	10.465	11.345	12.838
4	9.488	9.742	10.026	10.345	10.712	11.143	11.668	12.339	13.277	14.860
5	11.070	11.342	11.644	11.985	12.375	12.833	13.388	14.098	15.086	16.750
6	12.592	12.879	13.198	13.557	13.968	14.449	15.033	15.777	16.812	18.548
7	14.067	14.369	14.703	15.079	15.509	16.013	16.622	17.398	18.475	20.278
8	15.507	15.822	16.171	16.563	17.010	17.535	18.168	18.974	20.090	21.955
9	16.919	17.246	17.608	18.015	18.480	19.023	19.679	20.513	21.666	23.589
10	18.307	18.646	19.021	19.442	19.922	20.483	21.161	22.021	23.209	25.188
11	19.675	20.025	20.412	20.846	21.342	21.920	22.618	23.503	24.725	26.757
12	21.026	21.386	21.785	22.232	22.742	23.337	24.054	24.963	26.217	28.300
13	22.362	22.733	23.142	23.601	24.125	24.736	25.472	26.403	27.688	29.819
14	23.685	24.065	24.485	24.956	25.493	26.119	26.873	27.827	29.141	31.319
15	24.996	25.385	25.816	26.298	26.848	27.488	28.259	29.235	30.578	32.801
16	26.296	26.695	27.136	27.629	28.191	28.845	29.633	30.629	32.000	34.267
17	27.587	27.995	28.445	28.949	29.523	30.191	30.995	32.011	33.409	35.718
18	28.869	29.285	29.745	30.259	30.845	31.526	32.346	33.382	34.805	37.156
19	30.144	30.568	31.037	31.561	32.158	32.852	33.687	34.742	36.191	38.582
20	31.410	31.843	32.321	32.855	33.462	34.170	35.020	36.093	37.566	39.997
21	32.671	33.111	33.597	34.141	34.759	35.479	36.343	37.434	38.932	41.401
22	33.924	34.373	34.867	35.420	36.049	36.781	37.659	38.768	40.289	42.796
23	35.172	35.628	36.131	36.693	37.332	38.076	38.968	40.094	41.638	44.181
24	36.415	36.878	37.389	37.960	38.609	39.364	40.270	41.413	42.980	45.559
25	37.652	38.123	38.642	39.221	39.880	40.646	41.566	42.725	44.314	46.928
26	38.885	39.363	39.889	40.477	41.146	41.923	42.856	44.031	45.642	48.290
27	40.113	40.598	41.132	41.729	42.407	43.195	44.140	45.331	46.963	49.645
28	41.337	41.828	42.370	42.975	43.662	44.461	45.419	46.626	48.278	50.993
29	42.557	43.055	43.604	44.217	44.913	45.722	46.693	47.915	49.588	52.336
30	43.773	44.277	44.834	45.455	46.160	46.979	47.962	49.199	50.892	53.672
40	55.758	56.324	56.946	57.640	58.428	59.342	60.436	61.812	63.691	66.766
50	67.505	68.123	68.804	69.563	70.423	71.420	72.613	74.111	76.154	79.490
60	79.082	79.749	80.482	81.299	82.225	83.298	84.580	86.188	88.379	91.952
70	90.531	91.242	92.024	92.895	93.881	95.023	96.388	98.098	100.425	104.215
80	101.879	102.632	103.459	104.380	105.422	106.629	108.069	109.874	112.329	116.321
90	113.145	113.936	114.806	115.774	116.869	118.136	119.648	121.542	124.116	128.299
100	124.342	125.170	126.079	127.092	128.237	129.561	131.142	133.120	135.807	140.169
200	233.994	235.118	236.351	237.722	239.270	241.058	243.187	245.845	249.445	255.264
300	341.395	342.746	344.228	345.873	347.731	349.874	352.425	355.605	359.906	366.844
400	447.632	449.175	450.866	452.744	454.862	457.305	460.211	463.832	468.724	476.606

Phụ lục 6: Bảng giá trị phân vị của phân phối Fisher ($\gamma = 1 - \alpha = 95\%$)

Df	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.883	240.543	241.882
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366	2.321
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320	2.275
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300	2.255
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.265	2.220
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.250	2.204
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236	2.190
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223	2.177
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993
70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017	1.969
80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999	1.951
90	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.043	1.986	1.938
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975	1.927
200	3.888	3.041	2.650	2.417	2.259	2.144	2.056	1.985	1.927	1.878
300	3.873	3.026	2.635	2.402	2.244	2.129	2.040	1.969	1.911	1.862
400	3.865	3.018	2.627	2.394	2.237	2.121	2.032	1.962	1.903	1.854

Df	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	242.983	243.906	244.690	245.364	245.950	246.464	246.918	247.323	247.686	248.013
2	19.405	19.413	19.419	19.424	19.429	19.433	19.437	19.440	19.443	19.446
3	8.763	8.745	8.729	8.715	8.703	8.692	8.683	8.675	8.667	8.660
4	5.936	5.912	5.891	5.873	5.858	5.844	5.832	5.821	5.811	5.803
5	4.704	4.678	4.655	4.636	4.619	4.604	4.590	4.579	4.568	4.558
6	4.027	4.000	3.976	3.956	3.938	3.922	3.908	3.896	3.884	3.874
7	3.603	3.575	3.550	3.529	3.511	3.494	3.480	3.467	3.455	3.445
8	3.313	3.284	3.259	3.237	3.218	3.202	3.187	3.173	3.161	3.150
9	3.102	3.073	3.048	3.025	3.006	2.989	2.974	2.960	2.948	2.936
10	2.943	2.913	2.887	2.865	2.845	2.828	2.812	2.798	2.785	2.774
11	2.818	2.788	2.761	2.739	2.719	2.701	2.685	2.671	2.658	2.646
12	2.717	2.687	2.660	2.637	2.617	2.599	2.583	2.568	2.555	2.544
13	2.635	2.604	2.577	2.554	2.533	2.515	2.499	2.484	2.471	2.459
14	2.565	2.534	2.507	2.484	2.463	2.445	2.428	2.413	2.400	2.388
15	2.507	2.475	2.448	2.424	2.403	2.385	2.368	2.353	2.340	2.328
16	2.456	2.425	2.397	2.373	2.352	2.333	2.317	2.302	2.288	2.276
17	2.413	2.381	2.353	2.329	2.308	2.289	2.272	2.257	2.243	2.230
18	2.374	2.342	2.314	2.290	2.269	2.250	2.233	2.217	2.203	2.191
19	2.340	2.308	2.280	2.256	2.234	2.215	2.198	2.182	2.168	2.155
20	2.310	2.278	2.250	2.225	2.203	2.184	2.167	2.151	2.137	2.124
21	2.283	2.250	2.222	2.197	2.176	2.156	2.139	2.123	2.109	2.096
22	2.259	2.226	2.198	2.173	2.151	2.131	2.114	2.098	2.084	2.071
23	2.236	2.204	2.175	2.150	2.128	2.109	2.091	2.075	2.061	2.048
24	2.216	2.183	2.155	2.130	2.108	2.088	2.070	2.054	2.040	2.027
25	2.198	2.165	2.136	2.111	2.089	2.069	2.051	2.035	2.021	2.007
26	2.181	2.148	2.119	2.094	2.072	2.052	2.034	2.018	2.003	1.990
27	2.166	2.132	2.103	2.078	2.056	2.036	2.018	2.002	1.987	1.974
28	2.151	2.118	2.089	2.064	2.041	2.021	2.003	1.987	1.972	1.959
29	2.138	2.104	2.075	2.050	2.027	2.007	1.989	1.973	1.958	1.945
30	2.126	2.092	2.063	2.037	2.015	1.995	1.976	1.960	1.945	1.932
40	2.038	2.003	1.974	1.948	1.924	1.904	1.885	1.868	1.853	1.839
50	1.986	1.952	1.921	1.895	1.871	1.850	1.831	1.814	1.798	1.784
60	1.952	1.917	1.887	1.860	1.836	1.815	1.796	1.778	1.763	1.748
70	1.928	1.893	1.863	1.836	1.812	1.790	1.771	1.753	1.737	1.722
80	1.910	1.875	1.845	1.817	1.793	1.772	1.752	1.734	1.718	1.703
90	1.897	1.861	1.830	1.803	1.779	1.757	1.737	1.720	1.703	1.688
100	1.886	1.850	1.819	1.792	1.768	1.746	1.726	1.708	1.691	1.676
200	1.837	1.801	1.769	1.742	1.717	1.694	1.674	1.656	1.639	1.623
300	1.821	1.785	1.753	1.725	1.700	1.677	1.657	1.638	1.621	1.606
400	1.813	1.776	1.745	1.717	1.691	1.669	1.648	1.630	1.613	1.597

df	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	248.309	248.579	248.826	249.052	249.260	249.453	249.631	249.797	249.951	250.095
2	19.448	19.450	19.452	19.454	19.456	19.457	19.459	19.460	19.461	19.462
3	8.654	8.648	8.643	8.639	8.634	8.630	8.626	8.623	8.620	8.617
4	5.795	5.787	5.781	5.774	5.769	5.763	5.759	5.754	5.750	5.746
5	4.549	4.541	4.534	4.527	4.521	4.515	4.510	4.505	4.500	4.496
6	3.865	3.856	3.849	3.841	3.835	3.829	3.823	3.818	3.813	3.808
7	3.435	3.426	3.418	3.410	3.404	3.397	3.391	3.386	3.381	3.376
8	3.140	3.131	3.123	3.115	3.108	3.102	3.095	3.090	3.084	3.079
9	2.926	2.917	2.908	2.900	2.893	2.886	2.880	2.874	2.869	2.864
10	2.764	2.754	2.745	2.737	2.730	2.723	2.716	2.710	2.705	2.700
11	2.636	2.626	2.617	2.609	2.601	2.594	2.588	2.582	2.576	2.570
12	2.533	2.523	2.514	2.505	2.498	2.491	2.484	2.478	2.472	2.466
13	2.448	2.438	2.429	2.420	2.412	2.405	2.398	2.392	2.386	2.380
14	2.377	2.367	2.357	2.349	2.341	2.333	2.326	2.320	2.314	2.308
15	2.316	2.306	2.297	2.288	2.280	2.272	2.265	2.259	2.253	2.247
16	2.264	2.254	2.244	2.235	2.227	2.220	2.212	2.206	2.200	2.194
17	2.219	2.208	2.199	2.190	2.181	2.174	2.167	2.160	2.154	2.148
18	2.179	2.168	2.159	2.150	2.141	2.134	2.126	2.119	2.113	2.107
19	2.144	2.133	2.123	2.114	2.106	2.098	2.090	2.084	2.077	2.071
20	2.112	2.102	2.092	2.082	2.074	2.066	2.059	2.052	2.045	2.039
21	2.084	2.073	2.063	2.054	2.045	2.037	2.030	2.023	2.016	2.010
22	2.059	2.048	2.038	2.028	2.020	2.012	2.004	1.997	1.990	1.984
23	2.036	2.025	2.014	2.005	1.996	1.988	1.981	1.973	1.967	1.961
24	2.015	2.003	1.993	1.984	1.975	1.967	1.959	1.952	1.945	1.939
25	1.995	1.984	1.974	1.964	1.955	1.947	1.939	1.932	1.926	1.919
26	1.978	1.966	1.956	1.946	1.938	1.929	1.921	1.914	1.907	1.901
27	1.961	1.950	1.940	1.930	1.921	1.913	1.905	1.898	1.891	1.884
28	1.946	1.935	1.924	1.915	1.906	1.897	1.889	1.882	1.875	1.869
29	1.932	1.921	1.910	1.901	1.891	1.883	1.875	1.868	1.861	1.854
30	1.919	1.908	1.897	1.887	1.878	1.870	1.862	1.854	1.847	1.841
40	1.826	1.814	1.803	1.793	1.783	1.775	1.766	1.759	1.751	1.744
50	1.771	1.759	1.748	1.737	1.727	1.718	1.710	1.702	1.694	1.687
60	1.735	1.722	1.711	1.700	1.690	1.681	1.672	1.664	1.656	1.649
70	1.709	1.696	1.685	1.674	1.664	1.654	1.646	1.637	1.629	1.622
80	1.689	1.677	1.665	1.654	1.644	1.634	1.626	1.617	1.609	1.602
90	1.675	1.662	1.650	1.639	1.629	1.619	1.610	1.601	1.593	1.586
100	1.663	1.650	1.638	1.627	1.616	1.607	1.598	1.589	1.581	1.573
200	1.609	1.596	1.583	1.572	1.561	1.551	1.542	1.533	1.524	1.516
300	1.591	1.578	1.565	1.554	1.543	1.533	1.523	1.514	1.505	1.497
400	1.582	1.569	1.556	1.545	1.534	1.523	1.514	1.505	1.496	1.488

	40	50	60	70	80	90	100	200	300	400
1	251.143	251.774	252.196	252.497	252.724	252.900	253.041	253.677	253.889	253.996
2	19.471	19.476	19.479	19.481	19.483	19.485	19.486	19.491	19.492	19.493
3	8.594	8.581	8.572	8.566	8.561	8.557	8.554	8.540	8.536	8.533
4	5.717	5.699	5.688	5.679	5.673	5.668	5.664	5.646	5.640	5.637
5	4.464	4.444	4.431	4.422	4.415	4.409	4.405	4.385	4.378	4.375
6	3.774	3.754	3.740	3.730	3.722	3.716	3.712	3.690	3.683	3.680
7	3.340	3.319	3.304	3.294	3.286	3.280	3.275	3.252	3.245	3.241
8	3.043	3.020	3.005	2.994	2.986	2.980	2.975	2.951	2.943	2.939
9	2.826	2.803	2.787	2.776	2.768	2.761	2.756	2.731	2.723	2.719
10	2.661	2.637	2.621	2.610	2.601	2.594	2.588	2.563	2.555	2.551
11	2.531	2.507	2.490	2.478	2.469	2.462	2.457	2.431	2.422	2.418
12	2.426	2.401	2.384	2.372	2.363	2.356	2.350	2.323	2.314	2.310
13	2.339	2.314	2.297	2.284	2.275	2.267	2.261	2.234	2.225	2.220
14	2.266	2.241	2.223	2.210	2.201	2.193	2.187	2.159	2.150	2.145
15	2.204	2.178	2.160	2.147	2.137	2.130	2.123	2.095	2.085	2.081
16	2.151	2.124	2.106	2.093	2.083	2.075	2.068	2.039	2.030	2.025
17	2.104	2.077	2.058	2.045	2.035	2.027	2.020	1.991	1.981	1.976
18	2.063	2.035	2.017	2.003	1.993	1.985	1.978	1.948	1.938	1.933
19	2.026	1.999	1.980	1.966	1.955	1.947	1.940	1.910	1.899	1.894
20	1.994	1.966	1.946	1.932	1.922	1.913	1.907	1.875	1.865	1.859
21	1.965	1.936	1.916	1.902	1.891	1.883	1.876	1.845	1.834	1.828
22	1.938	1.909	1.889	1.875	1.864	1.856	1.849	1.817	1.806	1.800
23	1.914	1.885	1.865	1.850	1.839	1.830	1.823	1.791	1.780	1.774
24	1.892	1.863	1.842	1.828	1.816	1.808	1.800	1.768	1.756	1.750
25	1.872	1.842	1.822	1.807	1.796	1.787	1.779	1.746	1.735	1.729
26	1.853	1.823	1.803	1.788	1.776	1.767	1.760	1.726	1.714	1.709
27	1.836	1.806	1.785	1.770	1.758	1.749	1.742	1.708	1.696	1.690
28	1.820	1.790	1.769	1.754	1.742	1.733	1.725	1.691	1.679	1.673
29	1.806	1.775	1.754	1.738	1.726	1.717	1.710	1.675	1.663	1.656
30	1.792	1.761	1.740	1.724	1.712	1.703	1.695	1.660	1.647	1.641
40	1.693	1.660	1.637	1.621	1.608	1.597	1.589	1.551	1.537	1.530
50	1.634	1.599	1.576	1.558	1.544	1.534	1.525	1.484	1.469	1.461
60	1.594	1.559	1.534	1.516	1.502	1.491	1.481	1.438	1.422	1.414
70	1.566	1.530	1.505	1.486	1.471	1.459	1.450	1.404	1.388	1.379
80	1.545	1.508	1.482	1.463	1.448	1.436	1.426	1.379	1.361	1.353
90	1.528	1.491	1.465	1.445	1.429	1.417	1.407	1.358	1.340	1.331
100	1.515	1.477	1.450	1.430	1.415	1.402	1.392	1.342	1.323	1.314
200	1.455	1.415	1.386	1.364	1.346	1.332	1.321	1.263	1.240	1.228
300	1.435	1.393	1.363	1.341	1.323	1.308	1.296	1.234	1.210	1.196
400	1.425	1.383	1.352	1.329	1.311	1.296	1.283	1.219	1.193	1.179