



惯性导航原理 Principle of INS

牛小骥 陈起金

武汉大学卫星导航定位技术研究中心
(GNSS Center of Wuhan University)

2021年秋季学期

课程内容

1. 惯性导航系统原理
 - 1.1 惯性导航和惯性器件
 - 1.2 惯性器件的误差和标定
 - 1.3 惯导初始对准
 - 1.4 惯导设备的使用
2. 惯性导航算法
 - 2.1 惯导机械编排
 - 2.2 惯导误差方程和误差分析
3. 惯导系统设计
 - 3.1 惯导修正信息——组合导航

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

2



1.1 惯性导航和惯性器件

1.1 目录

- 惯性空间与牛顿运动定律
- 惯性传感器
 - 加速度计
 - 陀螺仪
- 惯性导航系统(INS)
 - IMU(惯性测量单元) → INS
 - INS的原理: 1D → 2D/3D
 - 平台式vs. 捷联式
 - INS特性和等级
- INS的历史回顾与发展趋势
- INS的应用

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

4

导航的背景

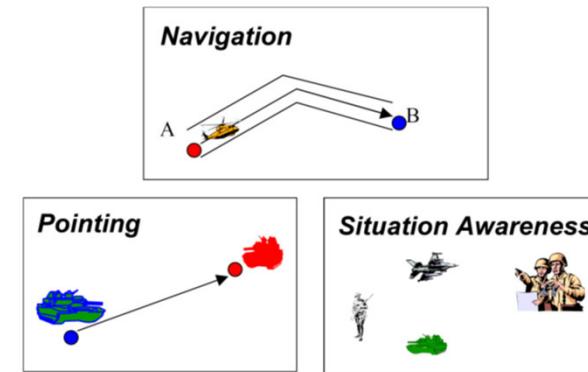


- 导航:
 - 运动物体随时间变化的位置、速度和姿态
- 导航状态:
 - 位置、速度和姿态 (PVA)
- 导航器件 vs. 导航系统.
- 导航原理:
 - 航位推算 (DR) vs. 直接定位 (Direct Fixing)

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

5

导航定位的需求



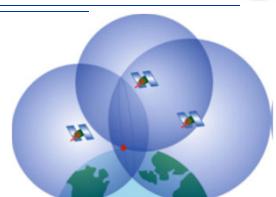
© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

6

导航定位原理分类



- 空间交汇测量 (距离、角度)
 - 全站仪
 - GPS



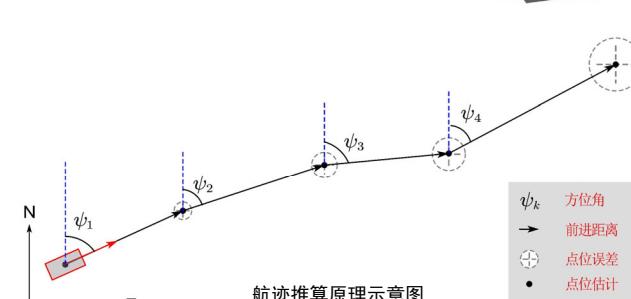
© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

7

导航定位原理分类



- 航位推算 (Dead-Reckoning)
 - 磁罗盘+里程计
 - 惯性导航



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

8

牛顿运动定律

- 惯性导航建立在牛顿经典力学定律的基础上
- 牛顿第一、第二运动定律

Newton's 1st law: " Every body continues in its state of rest, or uniform motion in straight line, unless it is compelled to change that state by forces impressed on it "

Newton's 2nd law: " Acceleration is proportional to the resultant force and is in the same direction as this force " ($F=m \cdot a$)

- 惯性坐标系
- 基于牛顿运动定律进行导航定位，需要测量载体相对惯性空间的加速度和角速度，这种传感器即加速计和陀螺仪。

* 《牛顿的水桶实验》

→ 加速度计

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU



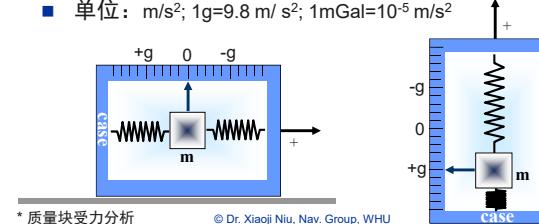
9

惯性传感器--加速度计

- 定义：一种用于测量相对于**惯性参考系**的加速度（称之为比力）的传感器

- $f = a - g$ (惯导比力方程)

- f = 加速度计输出 (比力, Specific Force)
- a = 相对于惯性空间的运动加速度
- g = 万有引力加速度
- 单位：m/s²; 1g=9.8 m/s²; 1mGal=10⁻⁵ m/s²



* 质量块受力分析

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

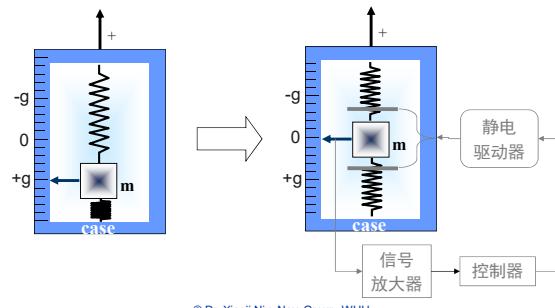


10

力反馈原理

- 开环 vs. 闭环

- 在力反馈（闭环）加速度计设计中，采用力矩装置给质量块或摆臂施加作用力，不论加速度计承受多大的比力，质量块或摆臂都将保持在力平衡位置。



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU



11

加速度计种类

- 摆式加速度计
- 振梁式加速度计
- 光纤加速度计
- MEMS加速度计
-

Micro-machined electromechanical system (MEMS)
微机电系统

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU



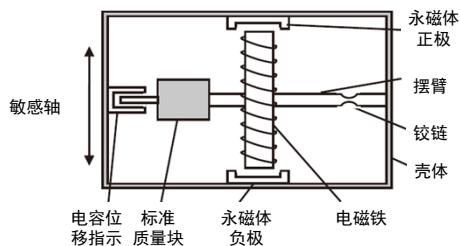
12

摆式加速度计



□ 摆式加速度计

- 摆臂相对壳体的位置变化导致电容的电量发生变化。质量块只能沿敏感轴方向自由滑动，另外两个轴向的运动受限。



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

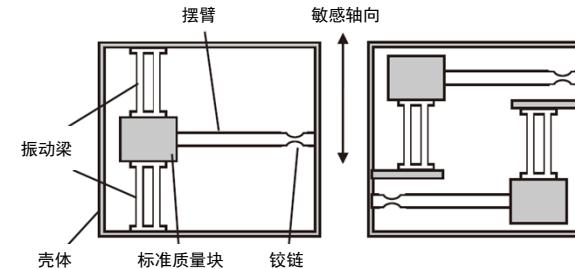
13

振梁式加速度计



□ 振梁式加速度计

- 也称共振加速度计：压缩或拉伸振梁会降低或升高其振动频率



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

14

光纤加速度计



- Mach-Zehnder 干涉型光纤加速度计
- 振动光纤加速度计
- 光弹性光纤加速度计
- Bragg格栅光纤加速度计
- 组合光纤敏感器

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

15

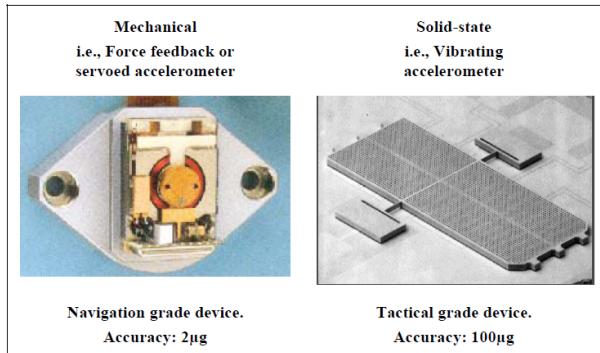
MEMS加速度计



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

16

实际的加速度计



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

17

惯性传感器--陀螺仪

- 定义:一种用于测量相对于**惯性参考系**的角速率的传感器
- 机械陀螺 vs. 光学陀螺
 - 机械陀螺 (转子陀螺, 振动陀螺 ...)
 - 光学陀螺: Sagnac 效应
 - 激光陀螺 (RLGs)
 - 光纤陀螺 (FOGs)



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

18

转子陀螺

- 陀螺定轴性

→ 方向基准

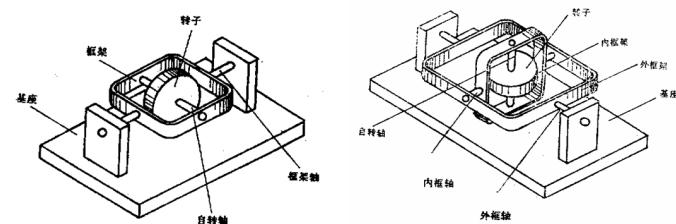


© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

19

转子陀螺

- 转子陀螺的实现



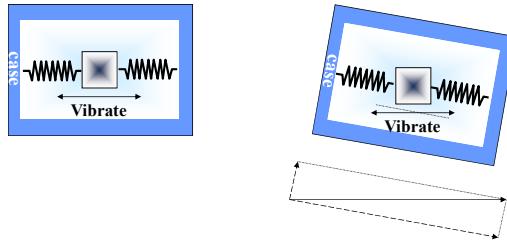
© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

20

振动陀螺的原理

□ 哥氏效应 (Coriolis Effect)

- 质量块受到内部激励产生固定频率和振幅的振动；
- 当外壳发生转动时，振动质量块会产生哥氏加速度，通过检测哥氏加速度就可以间接测量壳体的角运动。



⇒ Sagnac 效应

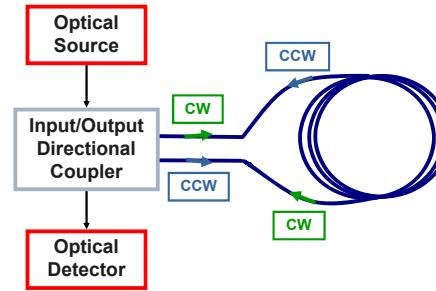
© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

21

光陀螺的原理

□ 萨格纳克效应 (Sagnac Effect)

- 反向传播光束之间的相移正比于旋转角速度



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

22

光陀螺的原理

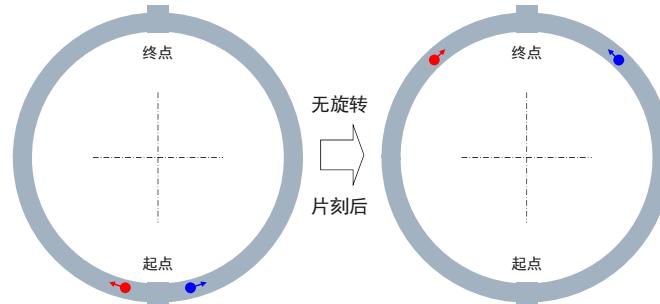
□ 萨格纳克效应 (Sagnac Effect)



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

23

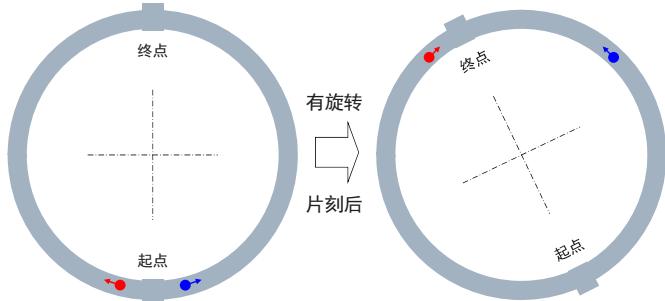
Sagnac效应说明



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

24

Sagnac效应说明

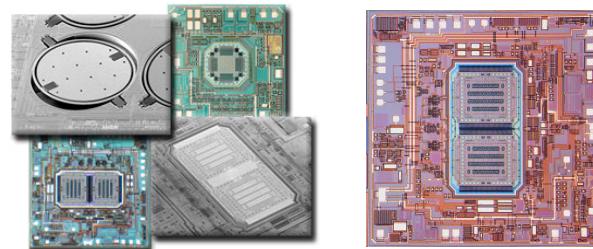


© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

25

MEMS陀螺

- MEMS陀螺都是基于振动陀螺的原理制造的
 - 框架式角振动陀螺仪
 - 音叉式线振动陀螺仪
 - 振动轮式陀螺仪



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

26

实际的陀螺仪



转子陀螺



激光陀螺

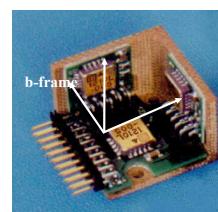
→ IMU

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

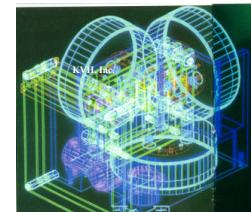
27

惯性测量单元 (IMU)

- 惯性测量单元 = 3轴加速度计 + 3轴陀螺
 - 加速度计测量相互正交的三个方向上的比力，陀螺测量相互正交的三个方向上的角速度
 - 通常三轴陀螺和三轴加速度计的轴向是平行对齐的
 - 传感器与载体固联，载体系原点为三轴加速度计的交点



三轴加速度计



三轴光纤陀螺

28

惯性导航系统

ISA, IMU, INS

Inertial Sensor Assembly (ISA)	<ul style="list-style-type: none"> 3轴陀螺 + 3轴加速度计； 输出原始传感器数据
Inertial Measurement Unit (IMU)	<ul style="list-style-type: none"> ISA经误差标定补偿（零偏和比例因子误差等）和数据转换； 输出补偿后的数据
Inertial Navigation System (INS)	<ul style="list-style-type: none"> IMU + 惯性导航算法（惯导机械编排）； 输出位置、速度、姿态角等导航状态量 + 补偿后的传感器数据

→ ID INS

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

29

惯性导航原理- 2D/3D

2D/3D出现的问题

- 由传感器数据获得载体相对于参考坐标系的方向及其变化的问题。
- 将传感器数据从“相对于惯性坐标系”转换到“相对于参考坐标系”。
- 需要补偿地球万有引力（重力）加速度。

→ 平台式系统 和 捷联式系统
(Gimbal vs. Strapdown)

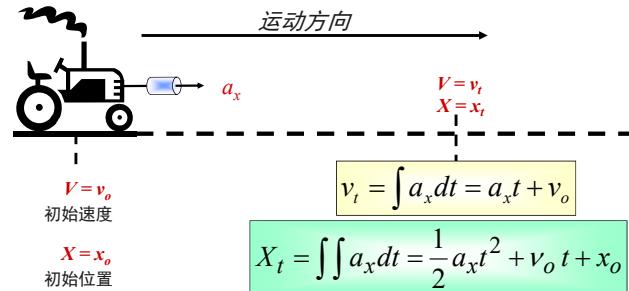
© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

31

惯性导航原理- 1D

惯性导航原理：递推式航位推算

- 假设有一小车在水平直线轨道上运动
- 在小车上沿运动方向上安装了一只加速度计



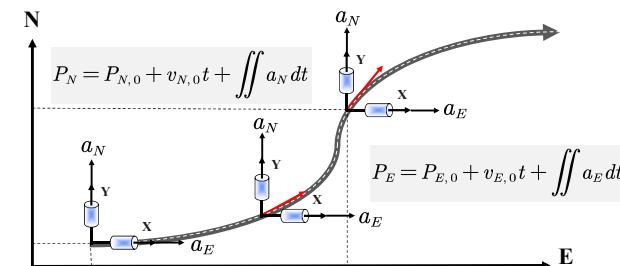
© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

30

二维平面惯性导航——平台式系统

物理平台

- 加速度计敏感轴始终指向东向和北向
- 载体航向的变化由陀螺感知，据此控制稳定平台的转动，使其始终跟踪东向和北向



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

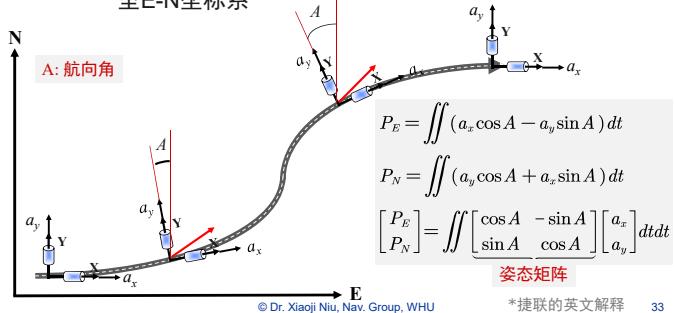
32

二维平面惯性导航——捷联式系统



□ 数学平台

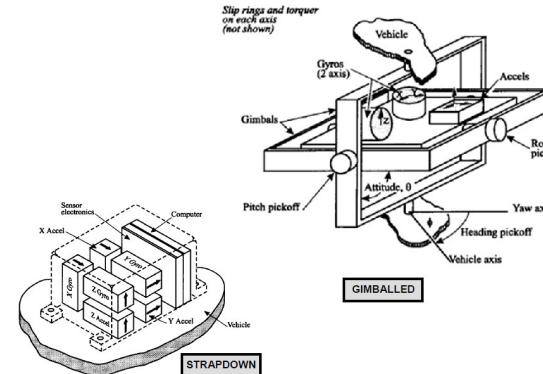
- 加速度计和陀螺与载体固联 (strapdown)
- 根据陀螺输出更新姿态矩阵, 将比力向量投影变换至E-N坐标系



惯性导航系统的物理实现



□ 平台式与捷联式惯导



惯性导航系统的物理实现



□ 平台式与捷联式惯导特点对比

	平台式	捷联式
体积	相对较大	小
重量	重	轻
成本	高	低
性能	可达最高精度	最高到导航级
自标定能力	有	无
环境适应性	对冲击和振动敏感	抗冲击和振动

→ Features of INS

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

35

惯性导航系统特性



□ 优点

- 完全自主性和高可靠性 (军用和航空航天)
- 导航信息丰富
- 动态性能好 (采样率高、频带宽)

□ 缺点

- 惯性导航误差随时间累积

$$\delta r_N = \delta r_{N,0} + \delta v_{N,0} \cdot t + \frac{1}{2}(g \cdot \delta \theta_0 + b_{aN})t^2 + \frac{1}{6}(g \cdot b_{gE})t^3$$

- 需要初始信息
- 成本高、笨重

→ 引入辅助信息

→ 惯导等级分类

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

36

INS的精度等级

	战略级 Strategic-Grade	导航级 Navigation-Grade	战术级 Tactical-Grade	微机械级 MEMS
定位 误差*	< 30 m/hr	0.5 – 2 nmi/hr (70-100k USD)	10-20 nmi/hr (10-20K USD)	/
陀螺 零偏	0.0001 deg/hr	大约地球自转的 1/1000, 0.015 deg/hr	1- 10 deg/hr	/
加速度 计零偏	1 ug	50 – 100 ug	100 – 1000 ug	/
应用 领域	<input type="checkbox"/> 洲际弹道导弹 <input type="checkbox"/> 潜艇	<input type="checkbox"/> 航空、航海 <input type="checkbox"/> 高精度测绘	<input type="checkbox"/> 短时间应用（战 术导弹） <input type="checkbox"/> 与GPS组合使用	/

* 陀螺零偏是核心指标

* 1 nmi (海里) ≈1.8 km

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

37

典型战术级惯导



System Performance

	Gyro	Accelerometer
Bias Repeatability	1 deg/hr (1 sigma)	0.3 mg (1 sigma)
In-Run Stability	<0.1 deg/hr (1 sigma, 100 sec)	35 µg (1 sigma, 60 sec)
Scale Factor	100 ppm (1 sigma)	350 ppm (1 sigma)
Random Walk	0.07 deg/sqrt(hr)	60 µg/sqrt(hz)
Non-orthogonality	0.1 mrad (1 sigma)	0.2 mrad (1 sigma)

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

38

MEMS惯导



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

39

惯性器件的相对测量能力

以导航级惯导的陀螺为例

- 陀螺零偏 0.01 deg/hr
- 陀螺量程 1000 deg/s = 3600,000 deg/hr
- 相对测量能力 = 量程 / 零偏 = 3.6×10^8 ! (非严谨类比: 等效于测量 武汉—北京 距离, 精度3mm!)

典型应用: 铁路轨道不平顺测量



→ Example of INS

武汉大学GNSS中心多源智能导航实验室设计开发的铁路轨道几何状态惯性测量仪, 充分发挥惯导的相对测量能力, 在移动过程中, 可将高铁轨道变形精确测量至 1 mm。 www.i2nav.cn

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

40

惯导技术的历史回顾与发展趋势



□ 惯导系统的诞生

- Dr. Schmidt 介绍文章
 - 二战: V2 火箭
 - Charles Stark Draper 实验室, MIT
 - 冷战: 弹道导弹, 潜艇

□ 惯导的发展趋势

- 惯性传感器的趋势(原子传感器)
- 惯性导航的趋势

© Dr. Xiaoqi Niu, Nav. Group, WHU

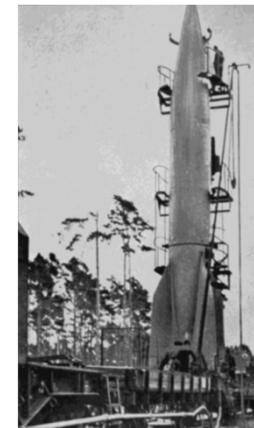
41

惯导技术发展回顾——早产



□ 惯导系统的诞生

- 二战末期
- 德国V2火箭
- 精度差, 基本不可用



Ref: G.T. Schmidt, INS/GPS Technology Trends(2011)

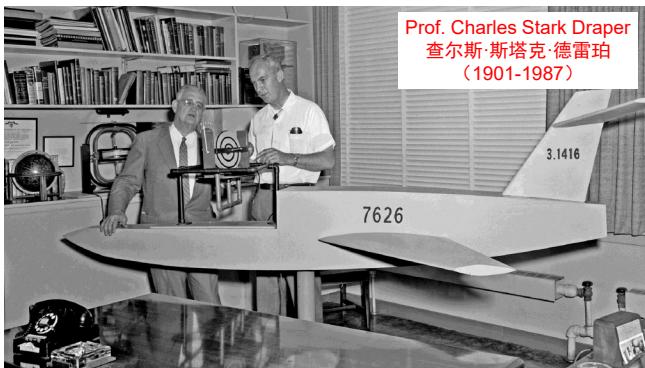
© Dr. Xiaoqi Niu, Nav. Group, WHU

42

惯导技术发展回顾——准生证



□ 二战后惯导可用性的争论



© Dr. Xiaoqi Niu, Nav. Group, WHU

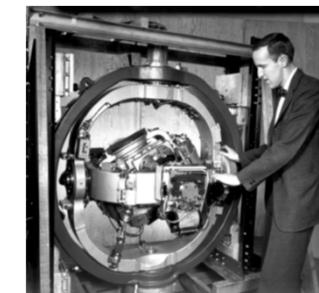
43

惯导技术发展回顾——准生证



□ SPIRE系统

- Space Inertial Reference Equipment (SPIRE)
- MIT Draper 实验室, 1953年
- 直径1.5m
- 重1.2 吨
- 1 nmile/hr



Ref: G.T. Schmidt, INS/GPS Technology Trends(2011)

© Dr. Xiaoqi Niu, Nav. Group, WHU

44

我国的惯导先驱（部分）

- 林士鄂先生（1913-1987）
 - 1939年, MIT博士, C.S. Draper
 - 1958年, 创立北航陀螺研究室, 研制国内第一个液浮陀螺和动力调谐陀螺
- 陆元九先生（1920-）
 - 1954年, MIT博士, C.S. Draper
- 高伯龙先生（1928-2017）
 - 1951年, 清华大学
 - 成功研制激光陀螺



1980年, Draper教授
(左二)访问北航



林士鄂

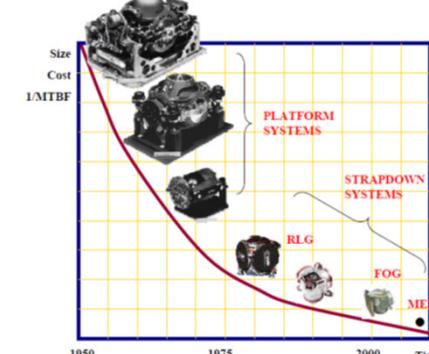


陆元九

45

惯导技术发展回顾——青春期

- 美苏冷战时期的迅猛发展



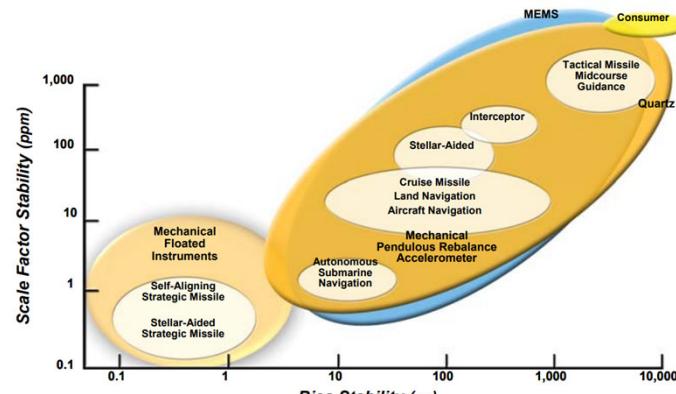
→ 器件发展趋势

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU



46

加速度计应用的现状

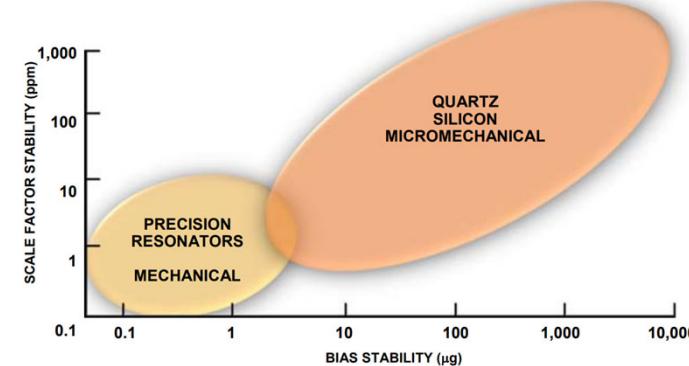


Ref: G.T. Schmidt, INS/GPS Technology Trends(2011)

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

47

加速度计的明天—近期应用



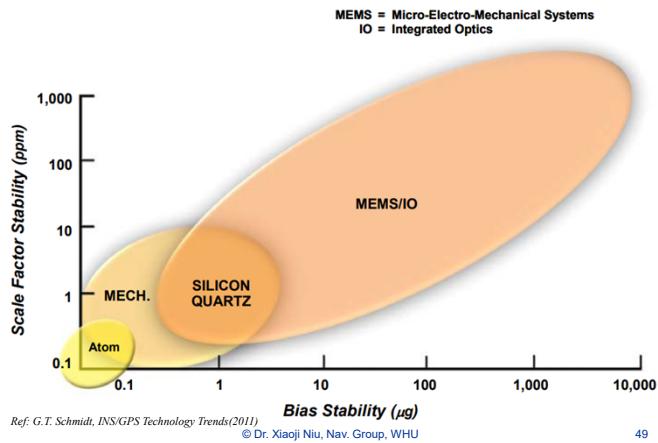
Ref: G.T. Schmidt, INS/GPS Technology Trends(2011)

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

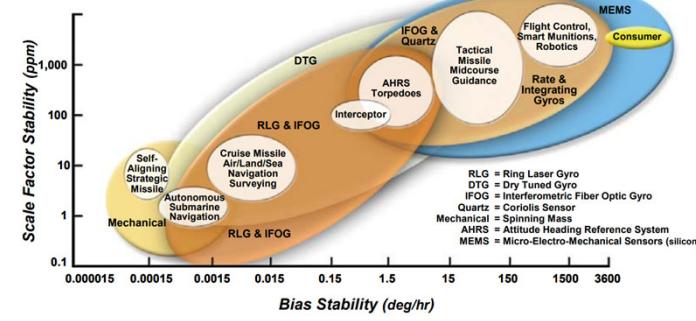


48

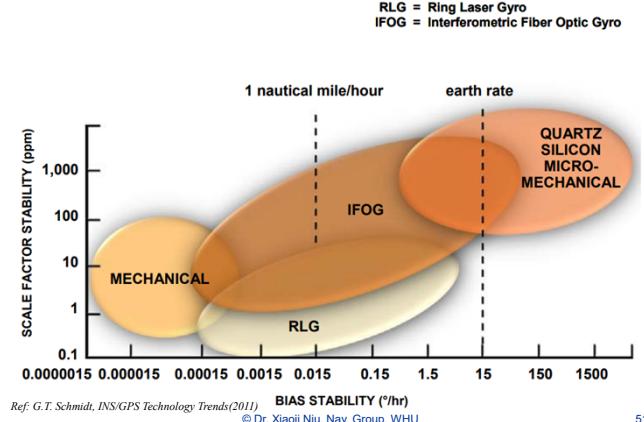
加速度计的未来



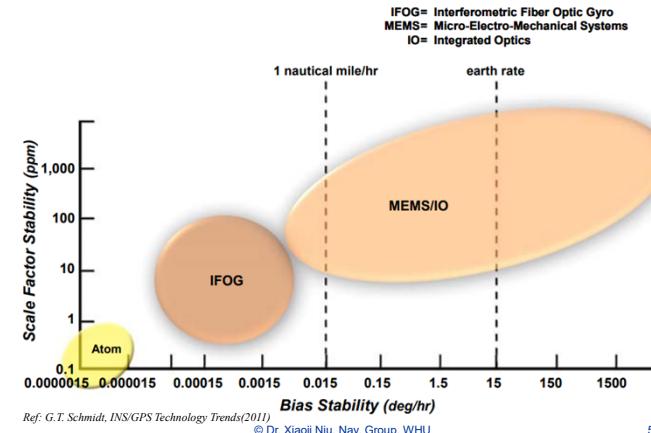
陀螺仪的现状



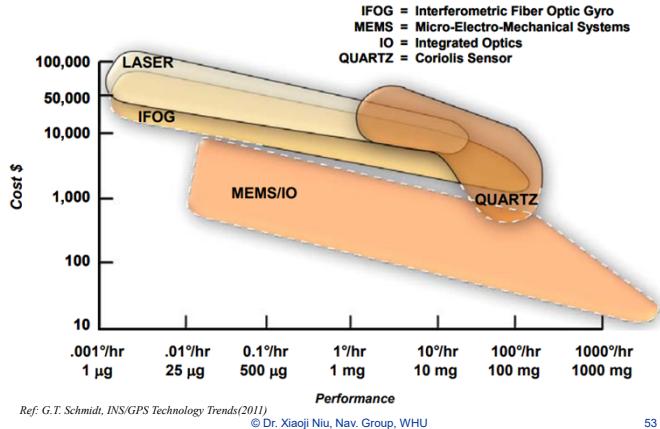
陀螺仪的明天



陀螺仪的未来

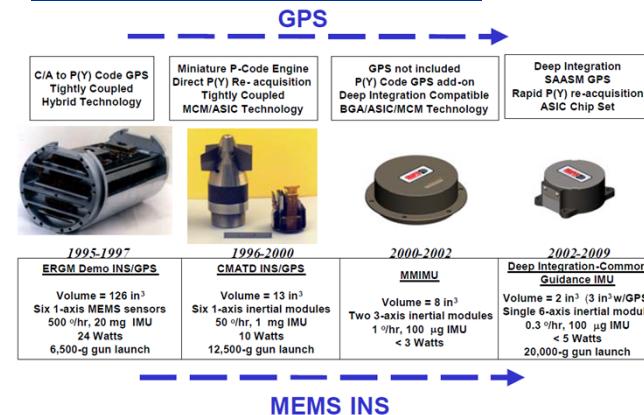


捷联惯导的成本



53

INS/GPS制导系统的发展



→ 惯导应用 54

惯性导航技术的应用

- 军用和航空航天
- 专业应用
- 日常应用

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU



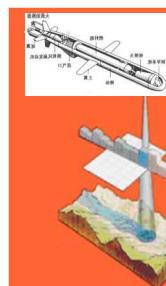
55

军事应用

- 潜艇（惯导+重力/地磁匹配）
- 弹道导弹（惯导+末端制导）
- 巡航导弹（惯导+地形匹配）
- 智能弹药（JDAM）



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU



56

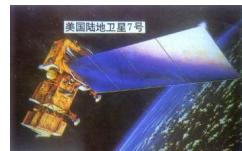
航空航天

□ 航天

- 卫星姿态控制 (陀螺定姿 + 星敏感器)

□ 航空

- 飞机导航
- 飞机姿态控制



© Dr. Xiaoqi Niu, Nav. Group, WHU

57

消费电子产品

- “旧时王谢堂前燕，飞入寻常百姓家”
- 车载导航和手机导航



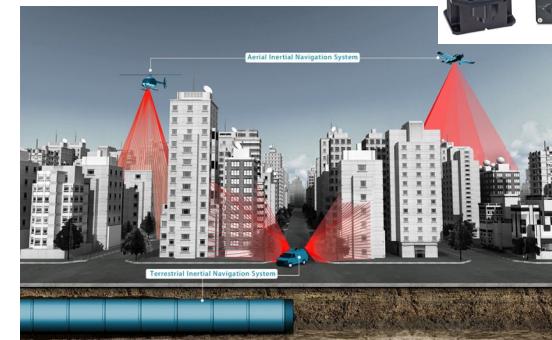
© Dr. Xiaoqi Niu, Nav. Group, WHU

59

专业应用

□ 移动测图 (MMS)

- 定位定姿系统 (POS)



© Dr. Xiaoqi Niu, Nav. Group, WHU

58

消费电子产品

- 导航仪(PND,Portable Navigation Device)
- GPS + 惯导 (+里程计)



© Dr. Xiaoqi Niu, Nav. Group, WHU

60

消费电子产品

□ iPhone 4: xSensor, SensorLog, ...



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

61

消费电子产品

High-performance 3-axis accelerometer



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

62

消费电子产品

□ 电子游戏 (Wii)



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

63

消费电子产品

□ 玩具 (遥控直升机) □ 照相机/摄像机防抖技术



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

64

消费电子产品

□ 易步车 (RobStep)



cn.libgo.com

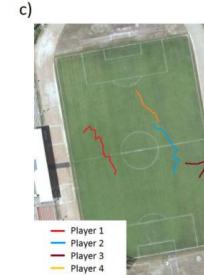
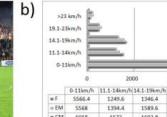
→ 发展趋势

© Dr. Xiaoqi Niu, Nav. Group, WHU

65

消费电子产品

□ 智能鞋/智能足球



© Dr. Xiaoqi Niu, Nav. Group, WHU

66

惯性导航的发展趋势

- 高端: 原子陀螺和加速度计
- 低端: MEMS惯导
- 组合导航: GPS, WiFi, 匹配定位

- 应用: 无处不在, “有运动就有惯导”
- 思考题:
 - 还有哪些地方用到了惯导?
 - 还有哪些地方可以使用惯导?

→ 总结

© Dr. Xiaoqi Niu, Nav. Group, WHU

67

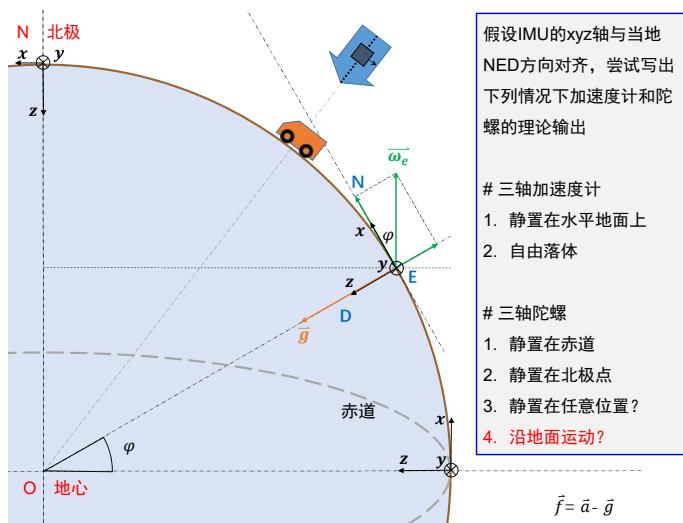
总结

- 古老而年轻的技术
- 人类智慧的结晶, 体现了工程技术的极限
- 走下神坛
 - 上可摘星揽月, 下可改变生活
- 未来有无限的发展空间和潜力
 - 欢迎大家今后投身相关研究和产业

© Dr. Xiaoqi Niu, Nav. Group, WHU

68

1.2 惯性器件的误差和标定



1.2 目录

- 加速度计和陀螺的理论输出
 - what inertial sensors measure
- 常用坐标系
 - 惯性系
 - 地心地固坐标系
 - 导航坐标系
 - 载体坐标系
- 误差分类
- 误差模型
- 测试和标定

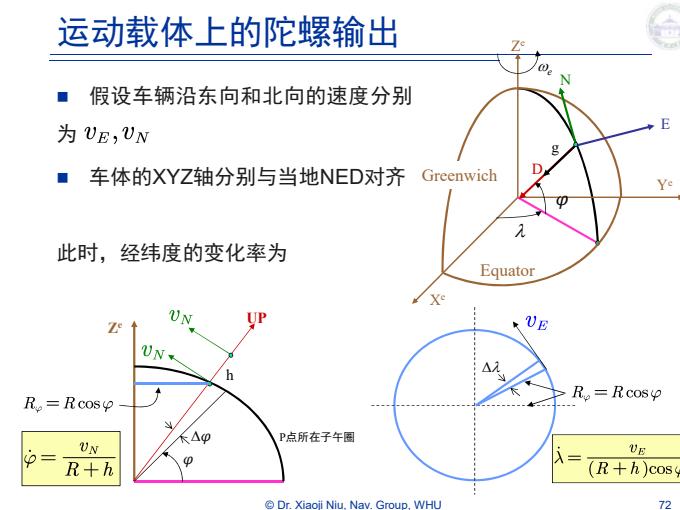
© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

70

运动载体上的陀螺输出

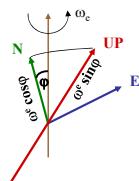
- 假设车辆沿东向和北向的速度分别为 v_E, v_N
- 车体的XYZ轴分别与当地NED对齐

此时, 经纬度的变化率为



运动载体上的陀螺输出

■ 陀螺输出



$$\dot{\lambda} = \frac{v_E}{(R+h)\cos\varphi}$$

$$\omega_E = -\dot{\varphi} = -\underbrace{\frac{v_N}{R+h}}_{\text{动态分量}}$$

$$\begin{aligned}\omega_N &= \dot{\lambda} \cos\varphi + \omega_e \cos\varphi \\ &= \underbrace{\frac{v_E}{R+h}}_{\text{动态分量}} + \underbrace{\omega_e \cos\varphi}_{\text{静态分量}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_D &= -\dot{\lambda} \sin\varphi - \omega_e \sin\varphi \\ &= -\underbrace{\frac{v_E}{R+h} \tan\varphi}_{\text{动态分量}} - \underbrace{\omega_e \sin\varphi}_{\text{静态分量}}\end{aligned}$$

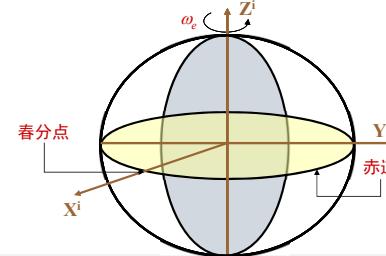
© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU



73

常用坐标系

□ 实用惯性坐标系(*i*-frame)



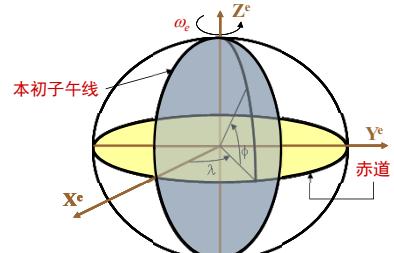
- 原点：地球质心
- z轴：沿地球自转轴方向，从地心指向北极点（协议地极）
- x轴：在赤道平面内，从地心指向春分点
- y轴：与x、z轴构成右手坐标系



74

常用坐标系

□ 地心地固坐标系 (ECEF, e-frame)



- 原点：地球质心
- z轴：沿地球自转轴方向，从地心指向北极点（协议地极）
- x轴：在赤道平面内，从地心指向赤道与本初子午线的交点
- y轴：位于赤道平面内，与x、z轴构成右手坐标系

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

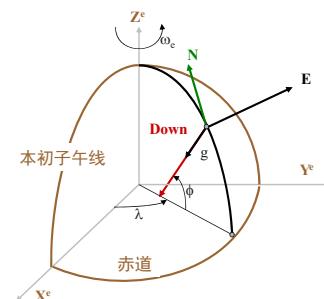


75

常用坐标系

□ 导航坐标系(n-frame)

- 又称当地水平坐标系、地理坐标系



- 原点：载体中心或参考点
- z轴：沿参考椭球的法线方向向下
- x轴：参考椭球北向
- y轴：参考椭球东向

* N-E-D vs. E-N-U

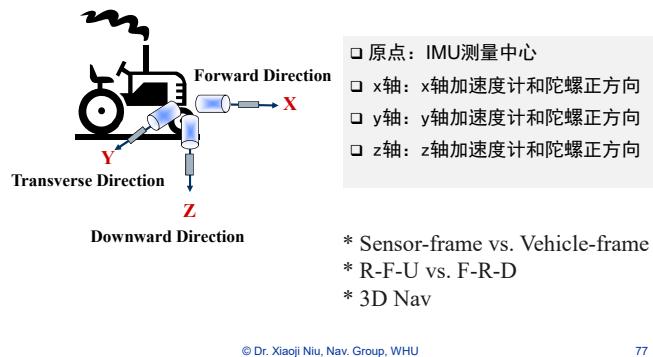
© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU



76

常用坐标系

□ IMU坐标系(b-frame)



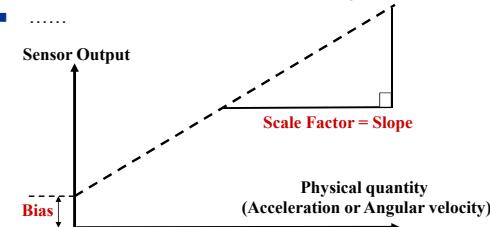
传感器误差类型

□ 静态误差 (加性误差)

- 零偏 Bias, 噪声 Noise

□ 动态误差 (乘性误差)

- 比例因子误差 Scale factor
- 包含非线性 non-linearity
- 轴偏移/轴交叉/交轴耦合 (Axes misalignment / cross-axis)
-



78

传感器误差的成分

□ 基本的误差成分

- 常值误差 (Constant error)
- 重复性 (Repeatability) -- multiple runs
- 稳定性 (Stability) -- within one run
- 噪声 (Noise)
- 热敏感度 (Thermal sensitivity, 温漂)

□ 确定性和随机性

(deterministic vs. stochastic)

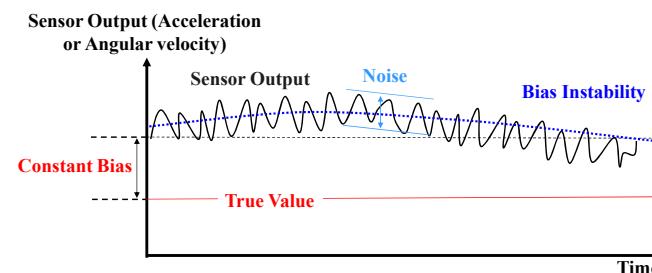
© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

79

静态误差

□ 以零偏为例来理解不同的误差成分

- 常值零偏
- 零偏稳定性, 噪声



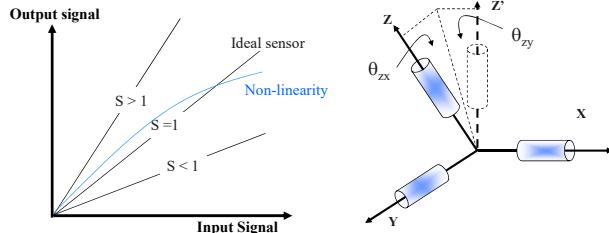
© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

80

动态误差

- 比例因子:
 - 输出被测量的信号/输入物理量
- 非线性:
 - 随输入信号变化的比例因子
- 轴偏移/轴交叉:
 - 每个轴的输出受到其它两个轴的输入的影响

* 比例因子有没有噪声?

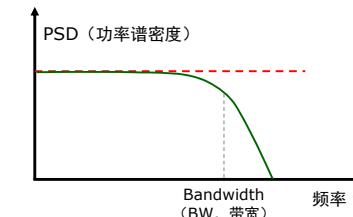


© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

81

噪声 (Noise)

- 噪声
 - 高频误差, 完全随机 (相邻历元不相关)
 - 白噪声模型: 功率谱密度在整个频域内均匀分布的噪声
 - 实际白噪声的带宽
 - 别名: angular random walk (ARW) & velocity random walk (VRW)



→ Example of noise vs. averaging time © Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

82

噪声 (Noise)

- 白噪声模型参数
 - 功率谱密度 (PSD) : (信号单位)²/Hz
 - 常用PSD单位开根号来表示: (信号单位)/sqrt(Hz)
 - 谱密度单位
 - 角速度: rad/s/sqrt(Hz), deg/s/sqrt(Hz), deg/sqrt(hr)
 - 加速度: m/s²/sqrt(Hz), m/s/sqrt(hr), mGal/sqrt(Hz)
 - 幅度(RMS)与带宽的平方根成正比

$$\text{信号总能量} = \text{PSD} \times \text{BW} = \text{RMS}^2$$

- 通过求平均来降低噪声的幅度: 幅度(RMS)与平均时间的平方根成反比

→ Example of noise vs. averaging time

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

83

陀螺白噪声与角度随机游走的关系

$$\begin{array}{c} \text{陀螺输出: 角速度} \\ \text{误差模型: 白噪声} \\ \text{模型参数: 谱密度 } q \\ \xrightarrow{\quad \int \quad} \text{积分结果: 角度} \\ \text{误差模型: 随机游走} \\ \text{模型参数: 发散率 } q \end{array}$$

$$E\{w^2(t)\} = q \cdot \delta(0)$$

$$E\{\beta^2(t)\} = q \cdot t$$

对白噪声求平均

$$\bar{w}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t w(\tau) d\tau = \frac{1}{t} \beta(t)$$

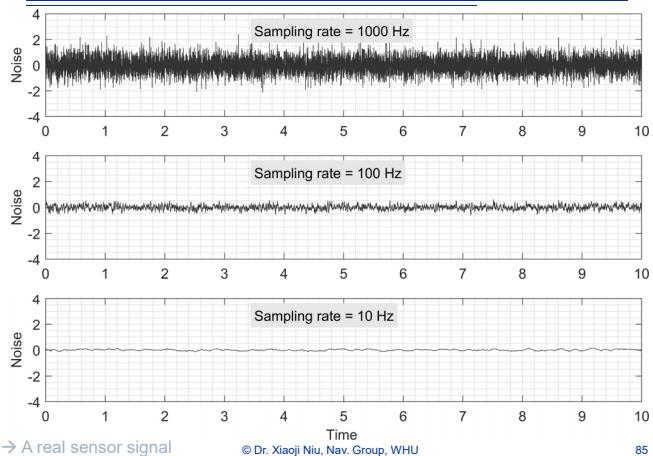
举例: ARW=0.1 deg/sqrt(h)

$$E\{\bar{w}^2(t)\} = E\left\{\left[\frac{\beta(t)}{t}\right]^2\right\} = \frac{1}{t^2} E\{\beta^2(t)\} = \frac{1}{t^2} q \cdot t = \frac{q}{t}$$

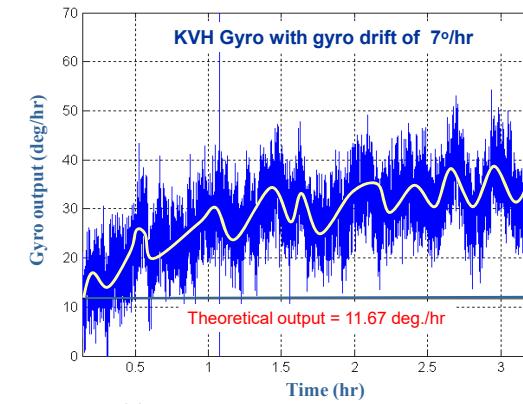
© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

84

白噪声RMS vs. 平均时长（举例）



实际的传感器信号



陀螺测量模型

□ 陀螺的测量值

$$\tilde{\omega} = \omega + \mathbf{b}_\omega + \mathbf{S}\omega + \mathbf{N}\omega + \boldsymbol{\varepsilon}_\omega$$

- $\tilde{\omega}$: 测量值 (deg/hr)
- ω : 真实的角速度(deg/hr)
- \mathbf{b}_ω : 陀螺零偏 (deg/hr)
- \mathbf{S} : 陀螺比例因子误差矩阵
- \mathbf{N} : 陀螺交轴耦合误差矩阵
- $\boldsymbol{\varepsilon}_\omega$: 陀螺传感器噪声矢量 (deg/hr)

$$\mathbf{b}_\omega = \begin{bmatrix} b_{\omega,x} \\ b_{\omega,y} \\ b_{\omega,z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & 0 & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

87

加速度计测量模型

□ 加速度计的测量值

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + \mathbf{b}_f + \mathbf{S}_1 \mathbf{f} + \mathbf{S}_2 \mathbf{f}^2 + \mathbf{N} \mathbf{f} + \boldsymbol{\delta g} + \boldsymbol{\varepsilon}_f$$

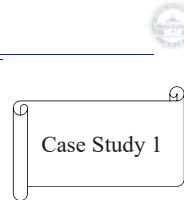
- $\tilde{\mathbf{f}}$: 测量值 (m/sec²)
- \mathbf{f} : 真实比力 (m/sec²)
- \mathbf{b}_f : 加速度计零偏 (m/sec²)
- \mathbf{S}_1 : 线性比例因子误差矩阵
- \mathbf{S}_2 : 非线性比例因子误差矩阵
- \mathbf{N} : 交轴耦合矩阵
- $\boldsymbol{\delta g}$: 重力异常
- $\boldsymbol{\varepsilon}_f$: 加速度计传感器噪声矢量 (m/sec²)

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

88

术语解释

- 易混淆的概念:
 - Bias vs. Bias error; SF vs. SF error;
 - Random Walk vs. White Noise
- 同义词:
 - Drift, variation, instability, stability;
 - Non-orthogonality, cross-axis, axis-misalignment
- 易混淆的单位:
 - Accel: m/s², g, mg, ug, mGal, m/s/h;
 - Gyro: rad/s, deg/s, deg/h;
 - For white noise (or random walk):
 - Spectrum density (q) vs. sqrt(q)
 - rad/s/sqrt(Hz), deg/s/sqrt(Hz) = deg/sqrt(s), deg/sqrt(h);
 - m/s²/sqrt(Hz) = m/s/sqrt(s), ug/sqrt(Hz), m/s/sqrt(h).



- RMS
- P-P
- +/-
- <

* Reference: IEEE Standard for Inertial Sensor Terminology

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

89

战术级(Tactical grade)*

□ LN200 from Litton

Performance - Gyro	
Bias Repeatability	1deg./hr to 10deg./hr 1[sigma]
Random Walk	0.04 to 0.1deg/[sqr root]hr power spectral density (PSD) level
Scale Factor stability	100 ppm 1[sigma]
Bias Variation	0.35deg./hr 1[sigma] with 100-second correlation time
Nonorthogonality	20 arcsec 1[sigma]
Bandwidth	> 500 Hz
Performance - Accelerometer	
Bias Repeatability	200 [micron]g to 1 milli-g, 1[sigma]
Scale Factor stability	300 ppm 1sigma
Vibration Sensitivity	50 [micron]g/g 1[sigma]
Bias Variation	50 micro-g 1sigma with 60-second correlation time
Nonorthogonality	20 arcsec 1[sigma]
White Noise	50 micro-g/[sqr root]Hz PSD level
Bandwidth	100 Hz

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

91

案例研究1*

- 如何阅读惯导传感器和IMU的规格参数?
 - 战术级(Tactical grade): LN200
 - 微机电系统(MEMS): ADIS16488
 - 转换成我们所需要的参数

□ 惯导传感器参数详细解读文章

- 新手入门系列1——如何区分惯性器件的零偏误差?

https://mp.weixin.qq.com/s/hpw_AkZR2zEa5HxnD8aKsg
- 新手入门系列2——如何读懂MEMS惯性器件的精度指标?

<https://mp.weixin.qq.com/s/loyKmWUG92wBlrw1270ozw>

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

90

MEMS: ADIS16488 from ADI*

Parameter	Test Conditions/Comments	Min	Typ	Max	Unit
GYROSCOPES					
Dynamic Range		± 450	± 480		/sec
Sensitivity		3.052×10^{-7}		± 1	/sec/LSB
Initial Sensitivity Tolerance	x_GYRO_OUT and x_GYRO_LOW (32-bit)				%
Sensitivity Temperature Coefficient	$-40^\circ\text{C} \leq T_x \leq +70^\circ\text{C}, 1 \sigma$	± 35	± 35		ppm/°C
Misalignment	Axis-to-axis	± 0.05	± 0.05		Degrees
Nonlinearity	Axis-to-frame (package)	± 1.0	± 1.0		Degrees
Initial Bias Error	Best-fit straight line, $F_5 = 450^\circ/\text{sec}$	0.01	0.01		% of FS
In-Run Bias Stability	1σ	± 0.2	± 0.2		/sec
Angular Random Walk	1σ	6.25	6.25		°/hr
Bias Temperature Coefficient	$-40^\circ\text{C} \leq T_x \leq +70^\circ\text{C}, 1 \sigma$	0.3	0.3		°/sec/°C
Linear Acceleration Effect on Bias	$\text{Acc. Axis: 1 (OFNG27 = 1)}$	± 0.0025	± 0.0025		/sec/°C
Output Noise	0.009	0.009	0.009		/sec rms
Rate Noise Density	No filtering	0.16	0.16		/deg./sec rms
3 dB Bandwidth	$f = 25 \text{ Hz}$	0.005	0.005		/deg./Hz rms
Sensor Resonant Frequency		330	330		Hz
		18	18		kHz
ACCELEROMETERS	Each axis				
Dynamic Range		± 18	1.221×10^{-4}		g
Sensitivity				± 0.5	g/LSB
Initial Sensitivity Tolerance	x_ACCL_OUT and x_ACCL_LOW (32-bit)				%
Sensitivity Temperature Coefficient	$-40^\circ\text{C} \leq T_x \leq +85^\circ\text{C}, 1 \sigma$	± 25	± 25		ppm/°C
Misalignment	Axis-to-axis	± 0.035	± 0.035		Degrees
Nonlinearity	Axis-to-frame (package)	± 1.0	± 1.0		Degrees
Initial Bias Error	Best-fit straight line, $\pm 10 \text{ g}$	0.1	0.1		% of FS
In-Run Bias Stability	1σ	0.5	0.5		mg
Velocity Random Walk	1σ	± 16	± 16		mg
Bias Temperature Coefficient	$-40^\circ\text{C} \leq T_x \leq +85^\circ\text{C}$	0.1	0.1		mg
Output Noise	No filtering	0.06	0.06		mg/Hz
Noise Density	$f = 25 \text{ Hz}$, no filtering	0.1	0.1		mg/°C
3 dB Bandwidth		330	330		mg rms
Sensor Resonant Frequency		5.5	5.5		Hz
					kHz

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

92

误差模型

- 基本的误差成分
 - 常值误差
 - 重复性
 - 不稳定性
 - 噪声
- 随机模型
 - 高斯白噪声
 - 随机游走
 - 一阶高斯马尔科夫过程
 - 随机常数
- 误差模型的识别与参数确定方法
 - 自相关分析 (auto-correlation)
 - 功率谱密度分析 (power spectrum density, PSD)
 - Allan方差分析 (Allan variance analysis)

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

93

自相关 (Auto correlation)*

- 白噪声过程

■ 随机过程 $x(t)$ 表示如下:

$$x(t) = w(t)$$

- 一阶马尔可夫过程

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau} x(t) + \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\tau}} w(t)$$

$$R(t) = \sigma^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Estimate the correlation time at $t = \tau$

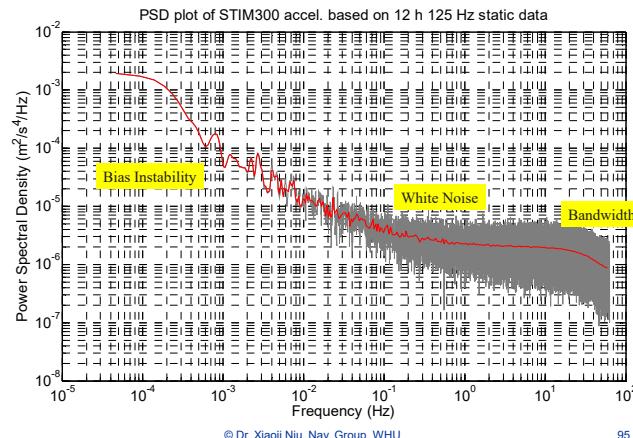
$$i.e. R(t) = \sigma^2 e^{-1} = \sigma^2 / e = \sigma^2 / 2.7 \\ = 0.3678 \sigma^2$$

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU



94

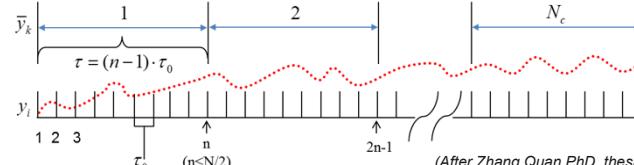
功率谱密度* (PSD) – Example



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

95

Allan方差计算



□ Step 1 分块: 按窗口长度 $\tau = (n-1) \tau_0$ 将序列 y 分成 N_c 块 (clusters), 每块包含 n 个数据点, 块间无重叠。

□ Step 2 块平均: 分别计算各块内 n 个数据点的均值, 记为 $\bar{y}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{k+n-1} y_i$ 。

□ Step 3 计算Allan方差:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2(N_c-1)} \sum_{k=1}^{N_c-1} (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2$$

□ 改变块长度, 重复1~3, 并画出Allan标准差随块长度 τ 变化的双对数曲线。

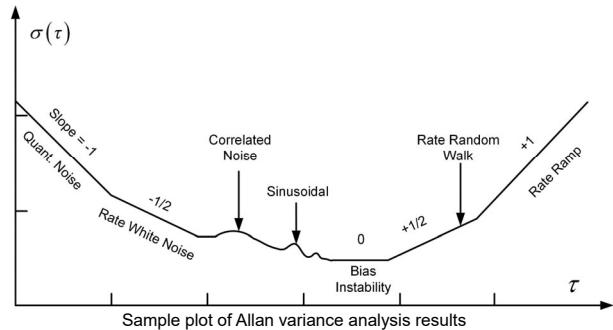
→ 注意事项

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

96

Allan方差分析方法

- 根据Allan标准差曲线的形状识别主要随机误差类型，计算随机误差的模型参数



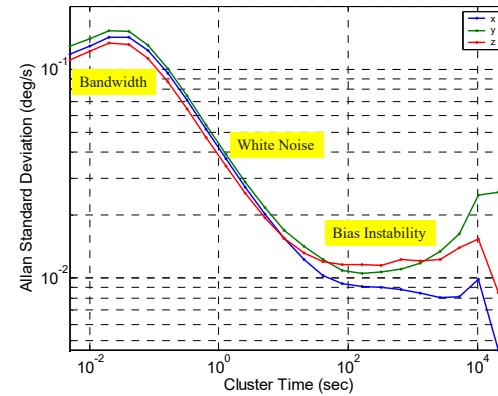
(After IEEE Std 647-1995, Annex C)

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

97

Allan 方差 – 误差模型识别案例

Allan of ADI gyros based on 28h 200Hz static data



→ 举例画图

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

98

测试与标定

- 测试 vs. 标定
- 系统误差 vs. 随机误差
- 静态测试
- 转台测试



Reference: David Titterton, Strapdown Inertial Navigation Technology (2nd edition.)
Chapter 8: Testing, calibration and compensation

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

99

其它的测试与标定

- 测试内容
 - 静态测试
 - 转台测试
 - 温度测试
 - 磁敏感性
 - 离心测试
 - 冲击测试
 - 振动测试
 - 综合测试
 - 老化和存贮测试
 - ...
- 标定
 - 零偏
 - 比例因子
 - 交轴耦合
 - 温度漂移
 - 加速度敏感性*
 - 上电过程（启动、预热）*
 - ...

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

100

IMU的标定

□ 经典描述

- Calibration is the process of comparing instrument outputs with known reference information and determining the coefficients that force the output to agree with the reference information over a range of output values (Chatfield 1997).
- All systematic errors can be compensated. But consider only the major errors. Some random error can be estimated by the navigation algorithm and compensated online.

□ 标定的重要性

- 去除系统误差

$$\delta r_N = \delta r_{N,0} + \delta v_{N,0} \cdot t + \frac{1}{2}(g \cdot \delta \theta_0 + b_{aN})t^2 + \frac{1}{6}(g \cdot b_{gE})t^3$$

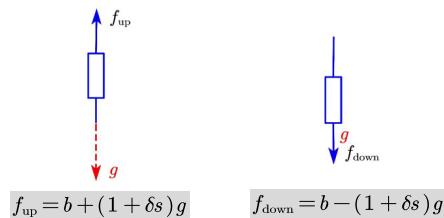
→ Two-position Cali

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

101

加速度计的两位置法静态标定

□ 考虑一个静止加速度计的敏感轴分别朝上和朝下 (两位置)



□ 加速度计的零偏b和比例因子delta s误差可以这样计算：

$$b = \frac{f_{up} + f_{down}}{2}$$

$$\delta s = \frac{f_{up} - f_{down}}{2g} - 1$$

* 与测绘操作类比

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

103

IMU的标定

□ 可用参考源:

- 加速度计: 地球重力
- 陀螺仪: 地球自转或转台旋转

□ 方法:

- 两位置、六位置法静态测试
- 角速率测试

□ 所需设备:

- 转台
- 立方体

Reference: David Titterton, Strapdown Inertial Navigation Technology (2nd edition.)
Chapter 8: Testing, calibration and compensation

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

102

加速度计的两位置法静态标定 (续)

□ 假设基准方向上有一个倾角θ

* Robust



$$f'_{up} = b + (1 + \delta s)g \cos \theta \quad f'_{down} = b - (1 + \delta s)g \cos \theta$$

□ 加速度计的零偏和比例因子误差估值如下：

$$b = \frac{f'_{up} + f'_{down}}{2}$$

$$\delta s = \frac{f'_{up} - f'_{down}}{2g \cos \theta} - 1$$

□ 鲁棒: 加速度计零偏和比例因子的两位置法标定对倾角θ不敏感

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

104

加速度计的六位置法标定算法

- 加速度计的测量模型可写作如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_x \\ \tilde{f}_y \\ \tilde{f}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & s_y & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & s_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{ax} \\ b_{ay} \\ b_{az} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{f}_x \\ \tilde{f}_y \\ \tilde{f}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} & b_{ax} \\ \gamma_{xy} & s_y & \gamma_{zy} & b_{ay} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & s_z & b_{az} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{f} = M \begin{bmatrix} f \\ 1 \end{bmatrix}$$

- \tilde{f} 三轴加速度计的实际输出
- γ 交轴耦合误差分量
- s 比例因子, *注意不是比例因子误差
- f 理想加速度计输出

- 六位置法: 依次让XYZ三轴加速度计敏感轴分别竖直向上和竖直向下静置一段时间, 采集六次加速度计的原始输出, 取均值。
- 六位置: 1 = x_up; 2 = x_down; 3 = y_up; 4 = y_down; 5 = z_up; 6 = z_down;
- 各位置理想加速度计输出

$$f_1 = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_2 = \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad f_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

105

$$\tilde{f} = f + b_f + Sf + Nf + \varepsilon_f$$

加速度计的六位置法标定算法 (续)

- 六位置的加速度计输出模型可以写作如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_1 & \tilde{f}_2 & \tilde{f}_3 & \tilde{f}_4 & \tilde{f}_5 & \tilde{f}_6 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \end{bmatrix}$$

- 简写为

$$L = M A$$

- 其中

$$L = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 & \tilde{f}_2 & \tilde{f}_3 & \tilde{f}_4 & \tilde{f}_5 & \tilde{f}_6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \end{bmatrix}$$

- M矩阵中包含12个待估参数, 共有18个方程。可用最小二乘法求解M

$$\hat{M} = L A^T (A A^T)^{-1}$$

*12位置法标定方法

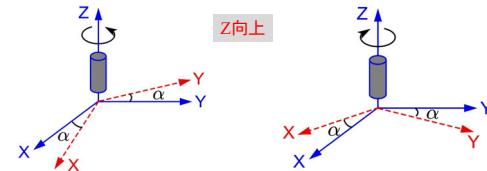
→ Summary of standard cali.

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

106

陀螺标定原理

- IMU分别绕Z轴陀螺正方向和反方向旋转相同大小的参考角度(α)



$$\hat{\alpha}_1 = b_{gz} t + (1 + \delta s_{gz}) \alpha + (\omega_e \sin \varphi) t \quad \hat{\alpha}_2 = b_{gz} t - (1 + \delta s_{gz}) \alpha + (\omega_e \sin \varphi) t$$

- Z轴陀螺的零偏和比例因子误差的计算如下:

$$b_{gz} = \frac{\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2}{2t} - (\omega_e \sin \varphi)$$

$$\delta s_{gz} = \frac{\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2}{2\alpha} - 1$$

- t 表示转动的时间; 忽略了比例因子误差对地球自转角速度的影响
- 思考: 为什么不用角速度率标定? 应该采用多大的角速度率?

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

107

标定方法总结

- 标定的精度依赖于各轴相对于参考坐标对准的准确性。
- 为了获得准确的标定结果, 需要一些**专业设备** (如转台或规则的立方体) 来获得IMU的精确姿态和旋转角。
- 由于对专业设备的依赖性, 这些标定方法主要设计用于实验室测试、厂家校准和对较高精度的IMU的标定。

→ New calibration method

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

108

新的标定方法



□ 系统级标定

- 不需要专业设备
- 使用间接的参考
- 用于低端传感器
- 现场的标定和维护



→ Case studies

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

109

案例研究2



□ 如何测试和标定一个新的IMU?

- 首先检查功能是否正常
- 静态测试: 稳定平台, Allan方差分析
- 立方体: 标定加速度计(陀螺?)
- 单轴转台 + 立方体:
- 多轴转台:
- 温度试验箱:
- 带试验箱的转台:
- 其它工具: 分度头

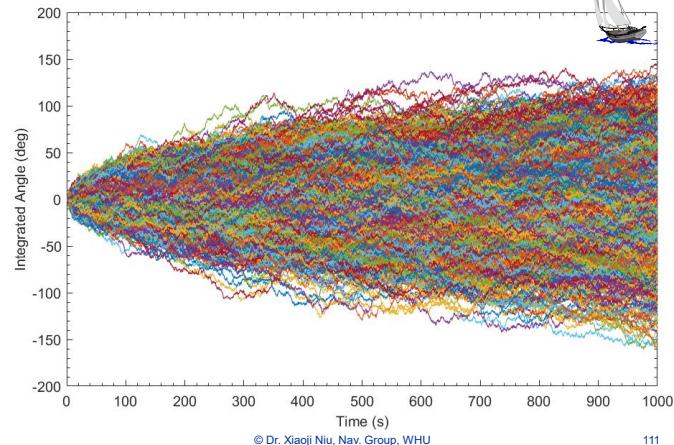
* 也依赖于传感器精度等级



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

110

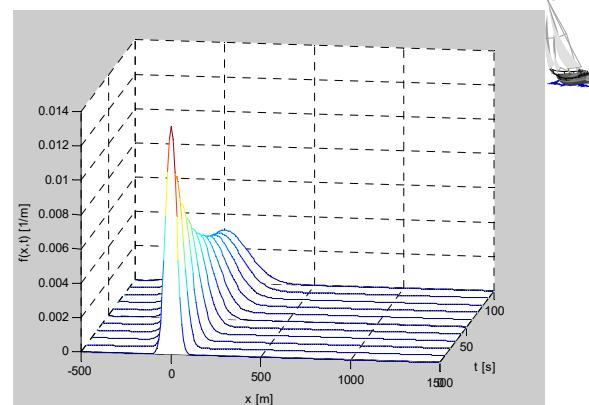
Part2 附录: 随机游走的发散



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

111

Part2 附录: 随机游走的发散



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

112

Part2 附录：一阶高斯马尔可夫过程



□ 连续时间方程

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{T}x(t) + w(t)$$

- 一阶高斯马尔科夫过程可用相关时间T和均方根 σ 来描述。 $w(t)$ 为驱动白噪声

$$E\{w^2(t)\} = q = \frac{2\sigma^2}{T}$$

□ 离散化形式

$$x_{k+1} = e^{-\Delta t/T}x_k + w_k$$

- Δt 为序列的采样间隔

$$E\{w_k^2\} = q_k = \sigma^2(1 - e^{-\Delta t/T})$$

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

113

课后练习1：读书笔记—随机过程基本概念*



- Robert Grover Brown and Patrick Y.C. Hwang (1992), Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering: Second Edition, John Wiley and Sons, Inc. 0471-52573-1. Chapter-2: Mathematical Description of Random Signals

□ 思考并回答以下问题：

1. 随机过程概念，它与随机变量的差别；
2. 平稳随机过程和各态遍历的概念，并举例说明；
3. 自相关函数、功率谱密度函数的概念和含义，如何从具体实验数据中计算；
4. 白噪声、Gauss-Markov过程（一阶）、随机游走的概念和特性。

注：可跳过2.6, 2.8, 2.11, 2.12, 2.14；并且不必计较随机过程二阶以上的统计特性。

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

114

课后练习2：常用基本随机过程的仿真*



1. 用 Matlab 中的 randn 函数产生 Sigma 值为 0.03 度/小时，采样率 1000Hz，长度为 3600 秒的角速度随机时间序列作为原始白噪声；
2. 仿真有限带宽白噪声：用不同截止频率（如 100Hz, 10Hz, 1Hz）的低通滤波器（Buttsworth 滤波器）对原始白噪声信号进行滤波，研究滤波后的白噪声的均方根值（即一倍 Sigma 值）与滤波带宽的关系。结果列成表格。
3. 仿真随机游走：将上述原始白噪声和有限带宽的白噪声按时间积分后得到角度随机游走（ARW），研究随机游走信号的统计方差随积分时间（如 10 秒, 60 秒, 360 秒, 3600 秒）而发散的关系（建议做 100 次以上的仿真样本）。结果列成表格并画图表示。
4. 仿真一阶高斯马尔可夫过程：将上述原始白噪声作为一阶高斯马尔可夫过程的驱动白噪声，取不同的相关时间（如 4 秒, 40 秒, 400 秒, 4000 秒）；研究所得信号的 Sigma 值与原始白噪声的功率谱密度 q 和相关时间 Tau 的关系，观察不同相关时间下的一阶高斯马尔可夫过程的时间变化特征（接近白噪声还是接近随机游走）

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

115



Part 3 INS 的初始对准

Part 3 内容

- 惯导初始化
- 静态粗对准
- 初始对准的影响因素
- 双矢量定姿原理

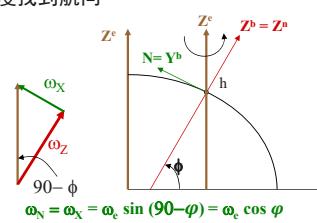
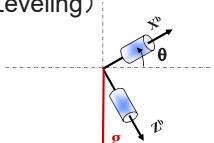
© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU



117

静态粗对准

- 加速度计调平 (Accelerometer Leveling)
 - 通过感应重力加速度找到水平
- 陀螺罗盘 (Gyro Compassing)
 - 通过感应地球自转角速度找到航向



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

119

INS的初始化

- 初始位置: 给定 (例如从 GPS)
- 初始速度: 零 (静止状态) 或给定
- 初始姿态: 初始对准
 - 粗对准 vs. 精对准
 - 静止状态 vs. 运动状态
 - 重要性: 失之毫厘, 谬以千里

$$\delta r_N = \delta r_{N,0} + \delta v_{N,0} \cdot t + \frac{1}{2}(g \cdot \delta \theta_0 + b_{aN})t^2 + \frac{1}{6}(g \cdot b_{gE})t^3$$

* 定义姿态角 roll, pitch, yaw/azimuth/heading

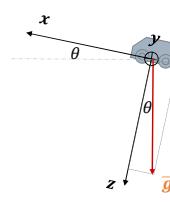
* 强调载体坐标系(b-frame) 采用前右下(F-R-D)

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

118

静态粗对准—加速度计调平原理

- 加速度计调平
 - 利用加速度计测量值确定水平姿态角



$$a_x = g \cdot \sin \theta \Rightarrow \theta = \arcsin \frac{a_x}{g} \approx \frac{a_x}{g}$$

$$\hat{a}_x = a_x + \delta a_x = g \cdot \sin \theta + \delta a_x$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \arcsin \frac{\hat{a}_x}{g} \approx \frac{\hat{a}_x}{g} = \frac{a_x + \delta a_x}{g}$$

$$= \theta + \frac{\delta a_x}{g}$$

$$\Rightarrow \delta \hat{\theta} \approx \frac{\delta a_x}{g}$$

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

120

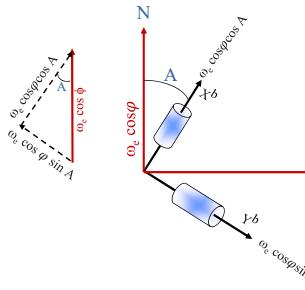
静态粗对准—陀螺罗盘

□ 在加速度计调平的基础上：

$$\omega_x^b = \omega_e \cos \varphi \cos A$$

$$\omega_y^b = -\omega_e \cos \varphi \sin A$$

$$\tan A = -\omega_y^b / \omega_x^b \Rightarrow \text{Azimuth}$$



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU



121

思考题(续)

答3：纬度 = 30°, 东向陀螺零偏 = 0.01 °/hr, 所以

$$\begin{aligned}\delta A &= \frac{b_{gx}}{\omega_e \cos \varphi} = \frac{0.01 (\text{°}/\text{hr})}{15 (\text{°}/\text{hr}) \cos 30^\circ} \\ &= 7.698 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.0441^\circ \\ &= 2.65'\end{aligned}$$

答4：纬度 = 80°, 东向陀螺零偏 = 0.01 °/hr, 所以

$$\delta A = 0.22^\circ$$

* Depend on latitude!

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

123

思考题

- 1. 加速度计调平的精度取决于什么？
- 2. 陀螺罗盘的精度取决于什么？
- 3. 在静基座对准中，纬度 = 30°, 东向陀螺零偏 = 0.01 °/hr, 那么造成的航向误差是多少？
- 4. 如果纬度 = 80°呢？
- 5. 如果陀螺的ARW=0.002 deg/sqrt(hr), 为了在纬度 =45°的地方实现航向对准的标准差小于0.7 mrad, 初始对准时间至少应为多长？

* bias, noise, SF

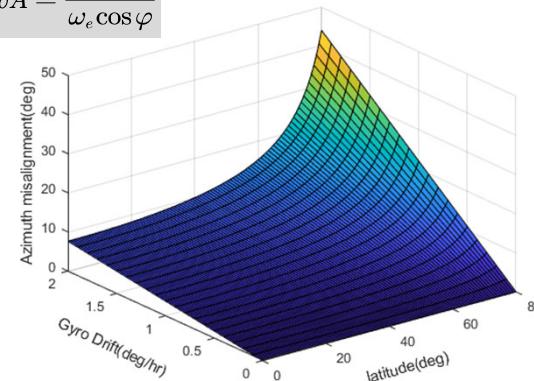
© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

122



航向角精度依赖于？

$$\delta A = \frac{b_{gx}}{\omega_e \cos \varphi}$$



124

陀螺噪声对初始对准的影响——对准时间

- 对静置时段陀螺的输出取均值, 以降低白噪声的影响, 平均之后陀螺均值的RMS值与静置时长(对准时长 T_a) 的关系为

$$\text{RMS}^2 = E\{\bar{w}^2(t)\} = \frac{q}{T_a} = \frac{\text{ARW}^2}{T_a}$$

思考题5: 如果陀螺的ARW=0.002 deg/sqrt(hr), 为了在纬度=45°的地方实现航向对准的标准差小于0.7 mrad, 初始对准时间至少应为多长?

$$\sigma_{\delta A} = \frac{\text{RMS}}{\omega_e \cos \varphi} = \frac{\text{ARW}}{\omega_e \cos \varphi \sqrt{T_a}}$$

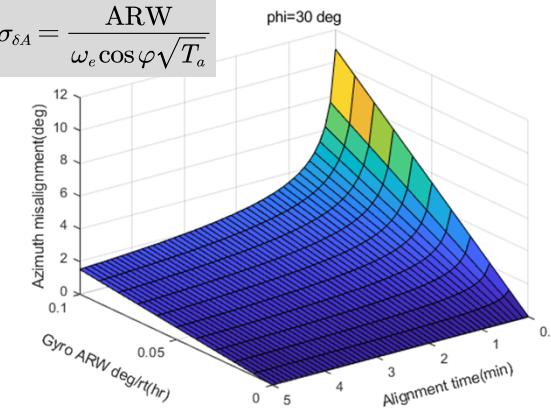
$$T_a = \left(\frac{\text{ARW}}{\omega_e \cos \varphi \sigma_{\delta A}} \right)^2 = \left(\frac{0.002^2 / \sqrt{h}}{15^\circ / h \cdot \cos 45^\circ \cdot 0.7 \text{mrad}} \right)^2 = 4.36 \text{min}$$

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

125

陀螺噪声对初始对准的影响(续)

$$\sigma_{\delta A} = \frac{\text{ARW}}{\omega_e \cos \varphi \sqrt{T_a}}$$



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

126

静基座对准的航向角精度取决于?

- 陀螺(东向轴)零偏
- 纬度(φ)
- 陀螺角度随机游走(ARW)
- 对准时间
- 加速度计调平精度
- 载体的晃动

© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

127

静态解析粗对准—双矢量定姿

- 静置在地面上的IMU, 其加速度计测量值的是重力加速度向量在b系中的分量, 陀螺输出为地球自转角速度向量在b系中的投影。
- 根据向量在不同坐标系下的转换关系, 有

$$\mathbf{g}^b = \mathbf{C}_n^b \mathbf{g}^n, \quad \boldsymbol{\omega}_{ie}^b = \mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^n$$

定义向量

$$\mathbf{v} = \mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}_{ie}$$

$$\mathbf{v}^b = \mathbf{C}_n^b \mathbf{v}^n$$

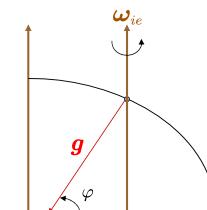
写成矩阵: $[\mathbf{g}^b \quad \boldsymbol{\omega}_{ie}^b \quad \mathbf{v}^b] = \mathbf{C}_n^b [\mathbf{g}^n \quad \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \quad \mathbf{v}^n]$

求解姿态矩阵

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^n)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^T \\ (\mathbf{v}^n)^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^b)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^b)^T \\ (\mathbf{v}^b)^T \end{bmatrix}$$

\mathbf{C}_b^n 为从b系到n系的坐标变换矩阵, 是正交矩阵
*上下标的含义

$$\mathbf{C}_b^n = (\mathbf{C}_n^b)^{-1} = (\mathbf{C}_n^b)^T$$



© Dr. Xiaoji Niu, Nav. Group, WHU

128

静态解析粗对准 (续)

□ 具体算法实现

$$\mathbf{g}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix} \omega_e \cos \varphi \\ 0 \\ -\omega_e \sin \varphi \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_{ie}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \begin{bmatrix} \omega_{ib,x} \\ \omega_{ib,y} \\ \omega_{ib,z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}^b = -\mathbf{f}^b = \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ -f_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{g}^n)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^T \\ (\mathbf{v}^n)^T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\tan \varphi}{g} & \frac{1}{\omega_e \cos \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g \omega_e \cos \varphi} \\ \frac{1}{g} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 只有当 $\mathbf{g}^n, \boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ 两个向量不共线时, 上述逆矩阵才存在。
- 解析粗对准方法不能用于地球两极地区; 测量误差的存在使得姿态矩阵不是正交矩阵。

© Dr. Xiaoqi Niu, Nav. Group, WHU

129

静态解析粗对准 (续)

□ 数值稳定性: 先对参与解算的矢量做单位化和正交化处理

$$\text{定义向量 } \mathbf{v}_g = \frac{\mathbf{g}^n}{|\mathbf{g}^n|}, \quad \mathbf{v}_\omega = \frac{\mathbf{g}^n \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^n}{|\mathbf{g}^n \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^n|}, \quad \mathbf{v}_{g\omega} = \frac{\mathbf{g}^n \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{g}^n}{|\mathbf{g}^n \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{g}^n|}$$

$$\text{定义向量 } \mathbf{w}_g = \frac{\mathbf{g}^b}{|\mathbf{g}^b|}, \quad \mathbf{w}_\omega = \frac{\mathbf{g}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^b}{|\mathbf{g}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^b|}, \quad \mathbf{w}_{g\omega} = \frac{\mathbf{g}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^b \times \mathbf{g}^b}{|\mathbf{g}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^b \times \mathbf{g}^b|}$$

$$\text{求解姿态矩阵 } \mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_g^T \\ \mathbf{v}_\omega^T \\ \mathbf{v}_{g\omega}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_g^T \\ \mathbf{w}_\omega^T \\ \mathbf{w}_{g\omega}^T \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_g \quad \mathbf{v}_\omega \quad \mathbf{v}_{g\omega}] \begin{bmatrix} \mathbf{w}_g^T \\ \mathbf{w}_\omega^T \\ \mathbf{w}_{g\omega}^T \end{bmatrix}$$

- 如此得到的姿态矩阵必然为单位正交矩阵, 再根据所得姿态矩阵求解相应的姿态角。

© Dr. Xiaoqi Niu, Nav. Group, WHU

130

静态解析粗对准 (续)

□ 根据姿态矩阵计算姿态角

- 方向余弦矩阵 \mathbf{C}_b^n 的第 i 行第 j 列的元素记作 c_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$
- 首先计算俯仰角

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-c_{31}}{\sqrt{c_{32}^2 + c_{33}^2}}, \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2}$$

- 计算横滚角

$$\phi = \tan^{-1} \frac{c_{32}}{c_{33}}, \quad |\phi| \leq \pi$$

- 计算航向角

$$\psi = \tan^{-1} \frac{c_{21}}{c_{11}}, \quad |\psi| \leq \pi$$

© Dr. Xiaoqi Niu, Nav. Group, WHU

131

其它初始对准方法

□ 精对准:

- 当载体姿态有轻微晃动时;
- 以粗对准作为初始值, 利用零速等先验信息通过 Kalman 滤波器修正惯导姿态, 使精度进一步收敛, 跟上实时变化。

□ 动对准:

- 当载体运动时;
- 利用 GPS 等外界辅助信息, 以重力、载体速度、加速度等作为观测向量。

© Dr. Xiaoqi Niu, Nav. Group, WHU

132

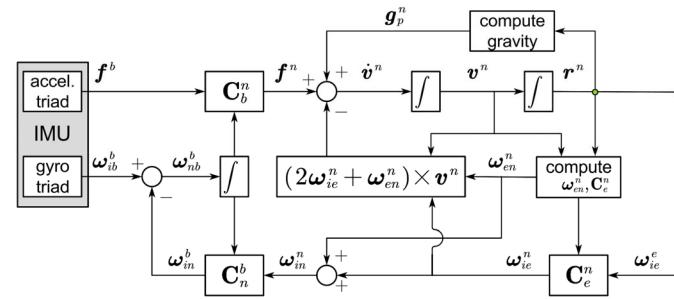
Part 4 惯导设备的使用

INS测量

- 在使用惯导系统做测量应用之前
 1. 认真阅读设备使用手册
 2. 测试标定惯导系统, 估计出加速度计和陀螺仪的零偏和比例因子误差的确定性部分, 并加以补偿
 3. 采集长时间的设备数据, 用来估计加速度计和陀螺的随机误差特性(例如, 白噪声、零偏的一阶Gauss-Markov过程参数)
 4. 根据陀螺的噪声参数 (ARW) 估算所需初始对准的时长 (考虑现实可行性), 以保证初始对准的航向角精度
- 做动态测试来演练并考核系统性能
 1. 验证导航算法实现的正确性, 精调算法参数, 预估辅助信息更新所需要的频率来保障一定的测量精度.
 2. 需要一个好的参考轨迹(参考真值, 通常 是 GPS).
 3. 测试轨迹通常是富含典型动态信息的“L”或“S”形轨迹.

INS 算法

□ 一种典型的INS机械编排框图



INS测量 (续)

- 典型的正式测试任务

外业:

 1. 静态模式下5-15分钟初始对准
 2. INS初始化 (初始化速度和位置)
 3. (初始动态以便组合导航算法收敛)
 4. 定期进行零速修正 (ZUPT) 或坐标修正 (CUPT)
 5. (结束前动态改善反向平滑算法效果)
 6. 结束前静止1-2分钟

内业:

 7. 用惯导算法和Kalman 滤波进行数据处理 (实时或事后)
 8. 反向平滑处理 (事后)
 9. 结果显示、检查和输出