二重积分的性质：

I. 不等号两边可以直接加积分号（要求在所积分的区域内不等式都成立），不等号方向不改变
II. 如果想要去掉积分号，只要证明积分式大于、小于某个常数，然后用性质1即可
III. 当然如果想要去掉积分号，也可以用等式关系，即积分中值定理

$\iint x d\sigma < \iint (x+y)d\sigma, \sigma = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2<2\}$这个式子是不成立的，因为在积分区域内x<x+y并不是恒成立的
有一种题型就是比较两个重积分的大小关系，一般两者要么是积分区域相同，要么是积分式相同，前者的话直接比较积分式的大小关系，后者的话则一般是$S=S_1+S_2$，另一个积分区域是S_1，你只需要知道在S_2里积分的正负即可（方法就是判断是否在S2区域内，积分式恒正或者恒负）

二重积分计算：

累次积分：

I. 画图
II. 选择先积分x还是先积分y，先积分后定限。比如说先对x积分，那么你要找出图中y的最小值和最大值，然后平行于y轴作射线，看先经过哪个曲线，后经过哪个曲线。
III. 求出曲线的表达式，即代入边界的不等式，然后用x表示y
IV. 把σ的区域表达式重新写出来，比如$\sigma = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 2, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$

注意：先积分x还是y，要看被积函数是否好去积分，甚至有些函数都不能求原函数；第二个考虑的因素是是否需要对区域切割。
求曲线表达式的时候要注意范围的问题，比如说
$x=y^2$，你在两边同时开根号的时候，应该得到两条曲线
$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y \ge 0 \end{cases}$和$\begin{cases} y=-\sqrt{x} \\ y<0 \end{cases}$即开根号的时候，一定要讨论下正负的问题，最后确定你保留的是哪部分的曲线。因为你开根号之后会得到两条曲线的方程，所以必须舍弃一个。
平方的时候也是，要保证根号内的部分是大于0的，或者等号左边是大于0的，但这只是在画图的时候有用，在积分定限的时候不需要考虑（另一个角度看，只有一个曲线的方程，而并不是两个曲线），因为比如你在确定上限的时候，你本来积分区域边界就只是曲线的一部分，这没有关系。举个例子，9.2A 8.1你在转化的时候，会得到ρ = 2a
cosθ，这是一个圆的方程，但它可以作为积分上限。
这就好比你的积分上限是x + 1，但是可能作为边界它只取了x + 1的一部分。
本质上你在变形的时候，要求从前往后推，从后往前推，都可以等价推出来

极坐标积分：

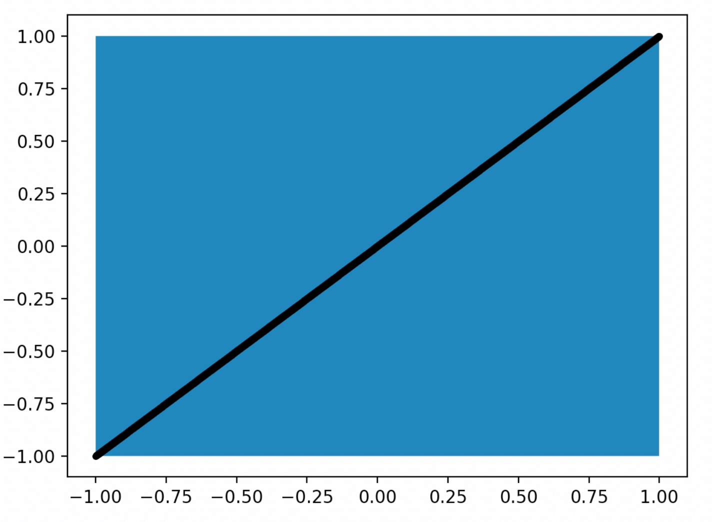
I. 画图
II. 一定是先积分ρ，再积分θ。从（0，0）发出射线，然后看先经过哪个曲线，后经过哪个曲线，如果只经过一个曲线，那么下限就是0.
III. 求出曲线的表达式，方法是代入$x=\rho\cos\theta, y=\rho\cos\theta, x^2+y^2=\rho^2, \frac{y}{x}=tan\theta$，然后用θ表示出ρ
IV. 把σ的区域表达式重新写出来

注：一般用于被积函数是$f(x^2+y^2)$，$f(\frac{y}{x})$，以及被积分的区域是圆形、圆环、扇形，主要原因是，如果被积函数是$f(x^2+y^2)$，$f(\frac{y}{x})$，就可以转化为一元函数$f(\rho^2), f(tan\theta)$，积分区域也是常数。

被积函数的变形：

要求在变形的时候，必须满足被积区域不等式才行，比如说

$\iint_{\sigma} |x+y| d\sigma$，其中$\sigma = \{(x,y) | -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$



需要分成x+y≥0，和x+y≤0，两个区域分别积分，才能够去掉绝对值符号

如果你写成累次积分的形式，你发现没法去根号、绝对值这些东西，也必须根据区域来去确定

积分变量的换元：

极坐标变换实际上是运用了

二重积分坐标系转换的通用的公式，其中$x=x(u,v)$、$y=y(u,v)$

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$$

直角坐标转极坐标，其中$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$，则

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} drd\theta = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} drd\theta$$

$$= |r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta)| drd\theta = rdrd\theta$$

但是我们在使用线性替换的时候，积分变量的替换是可以直接代入的

证明：

$x = a_1X + b_1, y = a_2Y + b_2$

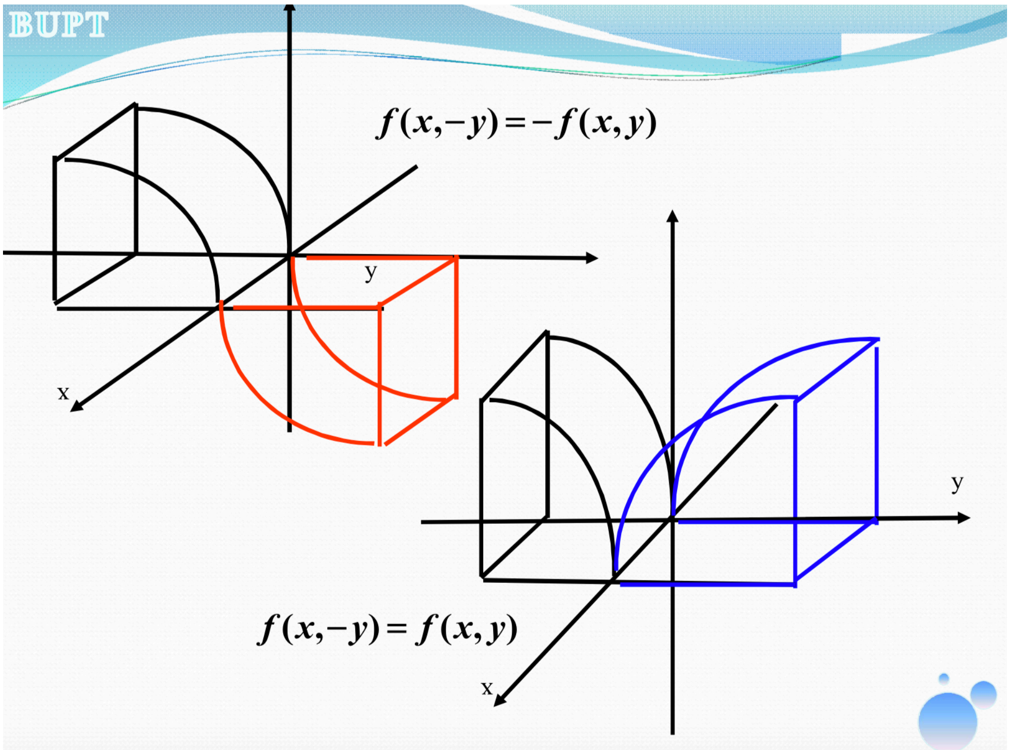
$$dxdy = |\frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}|dXdY = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} dXdY = a_1 b_1 dXdY$$

对称性

关于谁对称，谁不变，也就是说，对于(x_0, y_0, z_0)，关于x轴对称的点是$(x_0, -y_0, -z_0)$，关于xOy面对称的点是$(x_0, y_0, -z_0)$，关于原点对称，那就是全都变$(-x_0, -y_0, -z_0)$

对于一个曲面z = f(x,y)来说，如果积分区域σ关于x轴对称，并且曲面关于x轴是对称的，也就是说z = f(x,y), -z = f(x,-y)，f(x,y) = -f(x,-y)，那么积分结果是0

如果积分区域关于x轴对称，并且曲面是关于xOz平面对称，也就是说z = f(x,y), z = f(x,-y)，f(x,y) = f(x,-y)，那么积分结果就是2倍。



关于零点对称，如果被积函数是f(x)+g(y)，那么就可以转化成f(x)+g(x)

其他

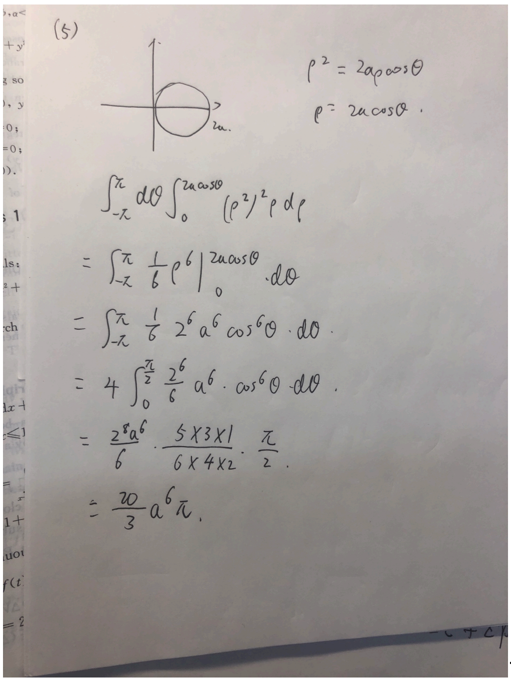
$$0 \le y \le x \le 1 \text{等价于} \begin{cases} y \le x \\ 0 \le y \\ x \le 1 \end{cases}$$

犯过的粗心错误

$\int_{\pi/2}^{2\pi} |cosy|dy$积分，结果画图的时候，想看正负然后去绝对值嘛，结果认为$(\pi,2\pi)$上可以抵消，所以只积分了$(\pi/2,\pi)$的部分

$(x^2)^{\frac{3}{2}} \neq x^3$左边是偶函数，右边是奇函数，如果要做这样的变形，必须先讨论积分区域，即x>0才可以，一般来说是进行对称，书上7.2A 7.(11)

定积分的时候，最后代入没有认真代入，$-\rho cos\rho|_{\pi}^{2\pi}=-2\pi+\pi$，而实际上应该是-3π


(5)

$\rho^2 = 2a\rho\cos\theta$

$\rho = 2a\cos\theta$.

$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} (\rho^2)^2 \rho\, d\rho$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{6}\rho^6 \Big|_0^{2a\cos\theta} \cdot d\theta$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{6} 2^6 a^6 \cos^6\theta \cdot d\theta$.

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^6}{6} a^6 \cdot \cos^6\theta \cdot d\theta$.

$= \frac{2^8 a^6}{6} \cdot \frac{5\times3\times1}{6\times4\times2} \cdot \frac{\pi}{2}$.

$= \frac{20}{3} a^6 \pi$.

误认为这个范围是（-π，π），实际上应该是（-π/2,π/2)

三重积分：

常见的积分区域：
柱面被平面截断
球、抛物面相交

先单后重：

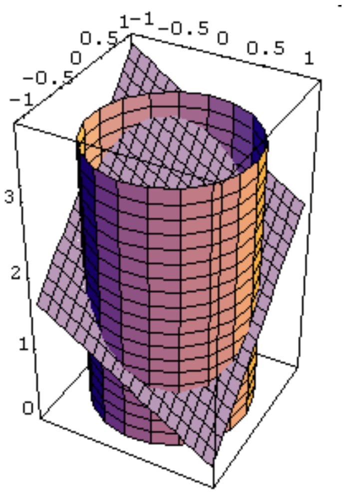
你必须找出积分区域在xOy、yOz、xOz上的投影，这就是二重积分的积分区域σ，并且从xOy、yOz、xOz射出的射线先后经过两个曲面，它们的方程写出来，用x、y表示z

先重后单：

首先你要找出来单的那个（以z为例子）的范围，即z的最大值和最小值，然后找出每个切片的方程，它就相当于积分区域σ，这时候z当作常数看待。
有一类积分特别适合用先重后单去做，以(x,y)为例子，如果被积函数不包含x,y，并且认为z是常数之后，积分区域的面积特别好求，比如说$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，记住椭圆的面积是πab。

画图：

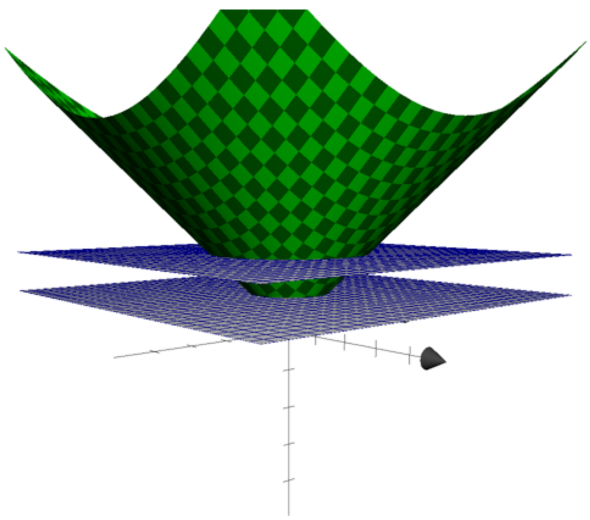
最后画柱面，因为你可以想象它向另一个曲面做投影（无数条射线延伸出去，碰到曲面就停下来），一般来说柱面的描述都是在xOy、yOz、xOz面上的曲线，所以你往别的曲面上投影，投影的交线在xOz、yOz、xOz上的投影就是自身
比如



这是$x^2+y^2=1$和$2x+3y+3z=6$，如果你要去想象这个图的话，先把圆柱画出来，然后再去切圆柱反而不太好去想投影是什么，最好就是先画出来平面的图形，然后想象是$x^2+y^2=1$在平面上的投影。

柱面坐标积分：

一定要注意必须投影射出去的每条线都是经过两个相同的面（这个跟二维的不一样，二维只要是比如说垂直于x轴发出的线，从左到右扫过去都经过两个相同的线就可以了）



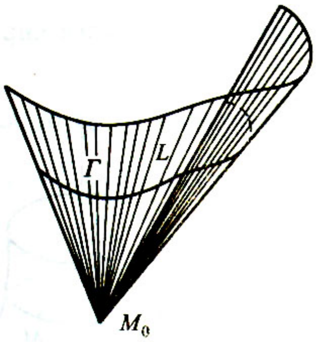
比如这个，$z=\sqrt{x^2+y^2}, z=1, z=2$就不能说柱面坐标积分的上下限就是1和2，因为有一部分，即$\begin{cases} x^2+y^2<4 \\ x^2+y^2>1 \end{cases}$这部分圆环发出的线是先经过$z=\sqrt{x^2+y^2}$这个面的

球面坐标积分：

球面坐标积分要求侧面一定是cone（如果不是的话你也不可能从原点发射的射线只经过两个曲面），然后首先你要从原点发射射线，先后经过两个面，写出上下面的方程，代入r,θ,φ，用θ、φ表示r

然后表示出φ的范围，用躺在xOy面上的射线移动上来，看先后经过的两个面的方程，一般来说就是φ = constant。你也可以通过代入r,θ,φ，代入的方程就是描述边界上的点的x,y,z关系的方程，一般来

说都会给的，即使是cone，比如说$z=\sqrt{x^2+y^2}$，就是代入$rcos\phi=\sqrt{r^2sin^2\phi}$，得到$\phi=\dfrac{\pi}{4}$.
要注意也必须是所有的θ从z轴躺下去经过的都是同样的两个曲面
最后是θ的范围，整个要积分的区域最大和最小的θ即可。
注意：
在确定φ的范围的时候，即便不是圆锥，也至少得是锥（当然第一步求ρ的范围的时候就已经保证了这一点）
也就是说，对于一个θ，只能确定一个φ，这样才能有求出φ(θ)的可能；从集合的角度，这个图形的边界上的所有点，只要是θ相同的，一定φ相同。



最后，积分函数即便是$f(x^2+y^2)$也挺好，因为$f(r^2sin^2\phi)$也不错，至少没有增加变量，如果同时简化了积分限就好了。

其他：

10.4A 3.Find the area of surface (S), where (S) is the part of the sphere $x^2+y^2+z^2=1$ contained in the cylindrical surface $x^2+y^2-x=0$. 这句话的意思是求这个球含在圆柱里面的表面积，所以是不包括上下底面（即两者交线围起来的面积）的面积的，要注意不能求。

格林公式使用的条件是线积分围住的区域内，导数都是连续的（初等函数在没有定义的点以外都连续）