无穷级数

常数项级数和函数项级数：

I.
常数项级数的本质：每一项都是常数，即给定第几个（n），就能知道它是一个具体的数
函数项级数的本质：每一项都是一个函数，即给定第几个（n），就能知道它是一个f(x)

II.
无穷多个常数加起来，有可能是常数，有可能不是，如果加起来是一个常数C，那么就说它是收敛到C的。
无穷多个函数加起来，有可能还是一个函数，有可能不是，如果加起来是一个函数g(x)，那么就说这个函数项级数收敛到g(x)。

常数项级数求和：

常数项级数来说，一般是化成函数项级数，然后求出收敛到什么函数
但是也有例外
I. 等比级数，
粗略来看，n在指数上的，叫做等比级数
$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{aq}{1-q}, \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$，首先你要确定是等比数列，$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$常数就可以，然后不管是n从几开始反正是首项除以1-公比。
II. 裂项类型
即先求出Partial Sum，然后取极限。

函数项级数求和与展开：

求和与展开是互逆的过程
两者都可以先积分后求导，先求导后积分作恒等变换，只要先的那个变换之后方便进行求和或者展开就行了。注意如果后积分的话，积分区间是(0,x)。
注意最后都要标注范围，即一个函数和一个级数相等成立的条件。

I. 求和

函数项级数的求和也是可以先积后导、先导后积的，最后转化成等比级数的求和（当然也有可能是一些常见函数的级数展开式，比如$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$），并且公比只要是f(x)就可以了，注意讨论f(x) = 0的情况（x=x0代入得到一个常数项级数，然后对这个常数项级数求和）。
求和来说的话，用的变换技巧无非就是提x的有限次幂，如果提$\frac{1}{x}$记得讨论（x=0代入得到一个常数项级数，然后对这个常数项级数求和），或者就是提常数，要么就是拆分成多个级数。

II. 展开

对于展开来说，如果你想要展开为幂级数的话，你得记住常见的公式

1. $\sin x$

sinx ~ x，所以它是x开头的（忽略了高阶无穷小），后面就是$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}...$，收敛区间是R，如果实在忘了，也可以推$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=0$

2. $\cos x$

cosx ~ 1，所以是$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}...$收敛区间是R，如果实在忘了，也可以推

$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=0$

3. $(1+x)^\alpha$

$\frac{1}{1-x}$可以理解为公比是x，首项是1的等比数列，所以是$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+...$

$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1-x+x^2-...$

$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^n$（前面系数，两个指数，两个阶乘）

以上的收敛域都是(-1,1)，不信可以代入，比如说，$\sum_{n=0}^{\infty}1^n$就是发散的

4. $ln(1+x)$

$ln(1+x)=\int\frac{1}{1+x}dx=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

收敛域有点不同，是$(-1,1]$，因为-1肯定不行，代入进去没意义。

5. e^x

e^x不管多少阶导数都是1，所以就是$\sum\frac{x^n}{n!}$

收敛域也是R

然后以上的x都是可以随意替换成别的f(x)的，如果是在x0初展开的话，那么这里的f(x)就必须是(x-x0)^n

变换的技巧也是一样的，提x的有限次幂，拆成多项（包括利用上学期学的分数分解的方法），如果拆成多项的话，记得最后要把两个∑的n弄成一样，都是同样的f(x)^n，然后合并成一个∑

怎么弄成同样的f(x)^n呢，一个方法就是改∑的下标，比如$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n$，这样的话另一个就要被迫改变∑下标而x^n不变，$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}x^n$

注意：1️⃣$\frac{1}{x^2}$在x = -3这一点展开，必须得先积分后求导，因为你没法配成$\frac{1}{1+(x+3)^2}$的形式

2️⃣展开的时候千万不要忘记写收敛域！！！！如果有多个展开的时候，定义域取交集

3️⃣求完展开以后，就相当于求得了n阶导数，因为$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

常数项级数判敛：

常数项级数分为三大类，
第一类是全部≥0，注意可以等于0，相当于缺项
第二类是正负交替，要求>0，不能等于0，缺项将会导致不能正负交替
第三类则是正负号任意

两个常见级数的收敛性：p级数和等比级数

首先你要确定是等比数列，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$常数就可以，公比的绝对值大于等于1都是发散的，等于1你想想a + a + a…肯定是发散的，至于为什么是绝对值，因为$\frac{a(1-q^n)}{1-q}$，绝对值小于1肯定都是收敛的。

p级数就是$\frac{1}{n^p}$了，p>1就是收敛的，p≤1就是发散的（包括负数）
（它们分别是通过求出Sn和积分判别法去证明的）

如果能够求出Sn的解析式的话，那么直接就可以看极限是否存在从而判别是否收敛，以下都是无法求出Sn，但是知道an的情况下的判敛方法。

I. 正项级数：

①比较判别法的放缩形式主要是用来处理三角函数的，sinx < x < tanx，以及cosx, sinx < 1
②比较判别法的极限形式
如果是纯粹的幂级数（包括n的n次方）一般是去找p级数，怎么找呢，就是用次数。直接次数理论，n+常数不改变次数，开几次根号就除以几，+lnn也不改变次数。
对于lnn/n的类型，只考虑趋近于0的情况（因为趋近于无穷本质是等效的），那么说明分子趋近0的速度更快，即分子更小，如果分母都收敛，那么分子是必然收敛的。如果分子发散，分母必然发散。
还有一个就是利用等价无穷小。
③达朗贝尔判别法
多个因式的乘积或者商，这个因式可以是阶乘，幂函数，指数函数，tanx（等价无穷小可以替换）等等

注：
这里记住一个常用的变换：$\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\pi=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

函数项级数求收敛域：

求收敛域，本质上是求收敛半径，再去验证两点
求收敛半径本质上是求出哪些x代入比值判别式符合要求
只要找到绝对收敛域就可以了，因为绝对收敛域是一个对称区间，除此以外都是发散的。在幂级数收敛区间（非收敛域）内，只要收敛就一定是绝对收敛的，只有在端点有可能是条件收敛。
不一定要去用an+1/an，也可以用柯西判别法，总之就是只要你能用其中一种方法，然后n趋向于无穷大的时候能求出来关于x的表达式就好了
比如，n^n
有时候需要拆分成两个级数的和，然后分别判敛，最后取交集

还有就是收敛域无穷大，一般就是把x给放缩掉，变成一个永远收敛的常数项级数

傅立叶级数：

如何去记忆傅立叶级数的系数呢，可以通过证明过程来记，因为这个证明非常简单，就是求a_k的系数，只需要左右两边同时乘以coskx然后积分就行了，左边是$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx$右边是$\pi a_k$，对于b_k也是一样的
这样你会求出来一个无穷级数，那么这个无穷级数收敛到什么函数呢，可以证明只要$f(x_0)$连续，那么这个级数在x_0处收敛到$f(x_0)$，换句话来说，在连续区间内，都收敛到f(x)。但是如果是第一类间断点（注意必须是第一类间断点，因为第一类间断点的定义就是左右极限都存在），那么就收敛到左右极限的平均值。
对于[-l,l]上的函数，就是本来是cosnx，不管是$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$
还是$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$、$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$，都只需要把n换成$\frac{n\pi x}{l}$（字母都在分子上，常数在分母），再把前面的积分区间和1/π改成l就行了。
如果是奇延拓偶延拓的话，一般题目会让你去求f(x)的余弦级数（或者正弦级数），这时候你只需要把$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$的sinnx 部分给去掉就行了，求$a_n$还是一样的。

如果是最高次数乘以lnn和低次数乘以lnn是不一样的，因为除完以后，一个是正无穷，一个是0