



دانشکده علوم  
دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

مهلت تحویل: ۳۰ مهر

تمرین سری اول طراحی و تحلیل الگوریتم

مسئله ۱. پنج مرحله‌ی طراحی الگوریتم را بر روی Bubble Sort اعمال کنید.

مسئله ۲. هر یک از موارد زیر را ثابت یا رد کنید:

۱. برای هر دو تابع دلخواه  $f$  و  $g$  داریم:  $f(n) = O(g(n))$  یا  $g(n) = O(f(n))$ .

۲.  $\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$ .

۳. اگر  $f(n) = O(g(n))$ ، آنگاه  $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$ .

۴.  $f(n) + g(n) = \Theta(\min\{f(n), g(n)\})$ .

مسئله ۳. مجموعه‌ی  $S_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  را در نظر بگیرید. یک دگرگونی بر روی مجموعه‌ی  $S_n$ ، یک جایگشت  $\pi: S_n \rightarrow S_n$  با حداکثر درجه‌ی ۲ است. به عبارت دیگر،  $\pi^2(i) = i$ ،  $1 \leq i \leq n$ . رابطه‌ی بازگشتی برای محاسبه‌ی تعداد دگرگونی‌ها برای یک مجموعه به اندازه‌ی  $n$  را بیابید و رابطه‌ی حاصل را به کمک توابع مولد حل کنید.

مسئله ۴. دو آرایه‌ی مرتب شده‌ی  $X$  و  $Y$  هر یک به طول  $n$  داده شده است. الگوریتمی طراحی و پیاده سازی کنید که میانه‌ی این  $2n$  عدد را در اردر زمانی  $\log(n)$  حل کند.

مسئله ۵. هر یک از روابط بازگشتی زیر را در صورت امکان با استفاده از قضیه‌ی اصلی حل کنید. در غیر این صورت، از روش جایگذاری استفاده کنید.

$$1. T(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + n^3$$

$$2. T(n) = T(n-1) + \frac{1}{n}$$

$$3. T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n \log(n)$$

$$4. T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$$