Programación Declarativa, 2023-2
Nota Adicional sobre Formas Normales en Lógica de Primer Orden*

Manuel Soto Romero

2 de febrero de 2023
Facultad de Ciencias UNAM

- El objetivo es llegar a una forma clausular que permita definir el método de resolución binaria en la Lógica de Primer Orden. El proceso general a seguir es el siguiente:
  1. Rectificación de fórmulas
  2. Forma Normal Negativa
  3. Forma Normal Prenex
  4. Forma Normal de Skolem
  5. Forma Clausular

  Resultando una fórmula de la forma:

  $$\forall x_1 ... \forall x_n \left(\mathcal{C}_1 \land ... \land \mathcal{C}_k\right)$$

  donde $(\mathcal{C}_1 \land ... \land \mathcal{C}_k)$ son cláusulas y puesto que todos los cuantificadores son universales, no es necesario escribirlos.

- La rectificación asegura que cada cuantificador tenga nombres de variables distintos y que las variables ligadas no aparezcan libres. Además de eliminar cuentificadores vácuos o repetidos.

  Definición 0.1. *Una fórmula φ está rectificada si y sólo sí se cumplen las siguientes condiciones:*

  - *φ no tiene presencias libres y ligadas de una misma variables, es decir $FV(\varphi) \cap BV(\varphi) = \varnothing$.*
  - *φ no tiene cuantificadores de la misma variable con alcances ajenos.*
  - *φ no tiene cuantificadores múltiples de la misma variable, es decir, subfórmulas de la forma $\forall x \forall x \psi$, $\exists x \exists x \psi$, $\forall x \exists x \psi$.*
  - *φ no tiene cuantificadores vacíos, es decir, cuantificadores de la forma $\forall x \psi$ o $\exists x \psi$ donde $x \notin FV(\psi)$.*

  Algunas equivalencias útiles:

*Basado en las Notas de Clase de Lógica Computacional de Favio Miranda, A. Liliana Reyes, et. al.

$\forall x \forall x \varphi \equiv \forall x \varphi$	$\forall x \exists x \varphi \equiv \exists x \varphi$	$\forall x \varphi \equiv \varphi \; x \notin FV(\varphi)$
$\exists x \exists x \varphi \equiv \exists x \varphi$	$\forall x \varphi \equiv \forall y (\varphi[x := y]) \; y \notin FV(\varphi)$	
$\exists x \forall x \varphi \equiv \forall x \varphi$	$\exists x \varphi \equiv \exists y (\varphi[x := y]) \; y \notin FV(\varphi)$	$\exists x \varphi \equiv \varphi \; x \notin FV(\varphi)$

Representamos a la rectificación de una fórmula φ como $\texttt{rec}(\varphi)$.

Ejercicio 0.1. Sea $\varphi = \forall x \exists y \neg \forall w \exists z (P(x,y) \vee \neg Q(x) \to \exists w \neg T(a,w))$, encontrar su rectificación.

Solución:

$\equiv \forall x \exists y \neg (P(x,y) \vee \neg Q(x) \to \exists w \neg T(a,w))$

$\square$

- La Forma Normal Negativa se encarga de introducir las negaciones hacia las fórmulas atómicas, ademas de quitar implifaciones y equivalencias.

  Definición 0.2. *Una fórmula φ está en Forma Normal Negativa si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

  - *φ no contiene símbolos de equivalencia ni implicaciones*
  - *Las negaciones que figuren en φ sólo afectan a fórmulas atómicas*

  Algunas equivalencias útiles:

$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$	$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv \neg\varphi \leftrightarrow \psi \equiv \varphi \leftrightarrow \neg\psi$
$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$	$\neg\forall x \varphi \equiv \exists x \neg\varphi$
$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$	
$\neg(\varphi \to \psi) \equiv \varphi \wedge \neg\psi$	$\neg\exists x \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$

  Representamos a la Forma Normal Negativa de una fórmula φ como $\texttt{fnn}(\varphi)$.

Ejercicio 0.2. Sea φ la fórmula definida en el Ejercicio 1, encontrar $\texttt{fnn}(\texttt{rec}(\varphi))$.

Solución:

$\equiv \forall x \exists y \neg (P(x,y) \vee \neg Q(x) \to \exists w \neg T(a,w))$

$\equiv \forall x \exists y (P(x,y) \vee \neg Q(x) \wedge \neg(\exists w \neg T(a,w)))$

$\equiv \forall x \exists y (P(x,y) \vee \neg Q(x) \wedge (\forall w \neg\neg T(a,w)))$

$\equiv \forall x \exists y (P(x,y) \vee \neg Q(x) \wedge (\forall w T(a,w)))$

$\square$

- La Forma Normal Prenex se encarga de *factorizar* los cuantificadores en una fórmula. Es decir, transforma a una fórmula dada en una fórmula equivalente que tenga la forma

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 ... Q_n x_n \varphi$$

donde Q_i es un cuantificador $\forall$ o $\exists$ y la fórmula φ no tiene ningún cuantificador.

Definición 0.3. *Una fórmula φ está en Forma Normal Prenex sí y sólo si φ es de la forma $Q_1 x_1 ... Q_n, x_n \psi$ donde ψ es una fórmula sin cuantificadores y $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ para toda $1 \leq i \leq n$. En tal caso, la cadena de cuantificadores $Q_1 x_1 ... Q_n, x_n$ se conoce como el prefijo de φ y ψ es la matriz de φ.*

Algunas equivalencias útiles:

Si $x \notin FV(\varphi)$ y $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$:

$\varphi \star \forall x \psi \equiv \forall x (\varphi \star \psi)$ $\quad$ $\forall x \varphi \rightarrow \psi \equiv \exists x (\varphi \rightarrow \psi)$

$\varphi \star \exists x \psi \equiv \exists x (\varphi \star \psi)$ $\quad$ $\exists x \varphi \rightarrow \psi \equiv \forall x (\varphi \rightarrow \psi)$

Representamos a la Forma Normal Prenex de una fórmula φ como $\texttt{fnp}(\varphi)$.

Ejercicio 0.3. Sea φ la fórmula obtenida en el Ejercicio 2, encontrar $\texttt{fnp}(\varphi)$.

Solución:

$\equiv \forall x \exists y ((P(x, y) \vee \neg Q(x)) \wedge (\forall w T(a, w)))$

$\equiv \forall x \exists y \forall w (P(x, y) \vee \neg Q(x) \wedge T(a, w))$

$\square$

- La Forma Normal de Skolem se encarga de eliminar los cuantificadores existenciales usando una técnica llamada *skolemnización*. Esta técnica consiste en sustituir las fórmulas existenciales por *testigos* nuevos de los cuantificadores existenciales, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rll} \exists x \varphi & \text{se sustituye por} & \varphi[x := c] \\ \forall x_1 ... \forall x_n \exists y \varphi & \text{se sustituye por} & \forall x_1 ... \forall x_n \varphi[y := g(x_1, ..., x_n)] \end{array}$$

c es un símbolo de constante *nuevo*, llamado *constante de Skolem* y g es un símbolo de función *nuevo* llamado *función de Skolem*. El proceso de sokolemnización se denota $\texttt{Sko}(\varphi)$.

Definición 0.4. *Un enunciado de la forma $\forall x_1 ... \forall x_n \varphi$ donde φ no tiene cuantificadores y además φ está en forma normal conjuntiva es una fórmula en forma normal de Skolem.*

Representamos a la Forma Normal de Skolem de una fórmula φ como $\texttt{fns}(\varphi)$.

Ejercicio 0.4. Sea φ la fórmula obtenida en el Ejercicio 3, encontrar $\texttt{fns}(\varphi)$.

Solución:

$\equiv \forall x(\exists y(\forall w\,(P\,(x,y) \lor \neg Q\,(x) \land T\,(a,w))))$

$\equiv \forall x \forall w\,((P\,(x, f\,(x)) \lor \neg Q\,(x)) \land T\,(a,w))$

$\square$

- La <u>Forma Clausular</u> se obtiene de forma idéntica a la lógica proposicional a partir de la matriz de la Forma Normal de Skolem.

  Definición 0.5. *Sean φ una fórmula y $\texttt{fns}(\varphi) = \forall x_1 ... \forall x_n \psi$ la forma normal de Skolem de φ. Si ψ es $\mathcal{C}_1 \land ... \land \mathcal{C}_n$ entonces la forma clausular de φ, denotada $Cl\,(\varphi)$ es la secuencia de cláusulas*

  $$Cl\,(\varphi) = \mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n$$

  donde sin perder generalidad, las variables en cualquier de las cláusulas son distintas. Es decir, cualesquiera dos cláusulas tienen variables ajenas.

Ejercicio 0.5. Sea φ la fórmula obtenida en el Ejemplo 4, encontrar $Cl\,(\varphi)$.

Solución:

$\equiv \forall x \forall w\,((P\,(x, f\,(x)) \lor \neg Q\,(x)) \land T\,(a,w))$

$Cl\,(\varphi) = P\,(x, f\,(x)) \lor \neg Q\,(x)\,, T\,(a,w)$

$\square$

Ejercicio 0.6. Sea $\varphi = \forall z\,(\exists x\,(R\,(x,z) \land R\,(z,x)) \to \neg \exists w\,(\forall x R\,(x,w) \to R\,(z,w)))$ encontrar su forma clausular.

Solución:

1. Rectificación $\texttt{rec}(\varphi)$
   - Observamos que existen dos cuentificadores de la misma variable con alcances ajenos.

     $$\varphi = \forall z \left(\boxed{\exists x}\,(R\,(x,z) \land R\,(z,x)) \to \neg \exists w \left(\boxed{\forall x} R\,(x,w) \to R\,(z,w)\right)\right)$$

   - Como $y \notin FV\,(\varphi)$ podemos aplicar la equivalencia $\exists x \varphi \equiv \exists y\,(\varphi[x := y])$ para que tengan nombres de variables distintos.

     $$\varphi = \forall z \left(\boxed{\exists y} \left(R\left(\boxed{y}, z\right) \land R\left(z, \boxed{y}\right)\right) \to \neg \exists w\,(\forall x R\,(x,w) \to R\,(z,w))\right)$$

$$\therefore \varphi_1 = \texttt{rec}(\varphi) = \forall z\left(\exists y\left(R\left(y,z\right) \wedge R\left(z,y\right)\right) \to \neg\exists w\left(\forall x R\left(x,w\right) \to R\left(z,w\right)\right)\right)$$

2. Forma Normal Negativa $\texttt{fnn}\left(\varphi_1\right)$

- Observamos que la operación principal es una implicación.

$$\forall z\left(\exists y\left(R\left(y,z\right) \wedge R\left(z,y\right)\right) \boxed{\to} \neg\exists w\left(\forall x R\left(x,w\right) \to R\left(z,w\right)\right)\right)$$

- Eliminamos la implifcación usando la equivalencia $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$.

$$\forall z\left(\neg\exists y\left(R\left(y,z\right) \wedge R\left(z,y\right)\right) \vee \neg\exists w\left(\forall x R\left(x,w\right) \to R\left(z,w\right)\right)\right)$$

- Observamos otra implifcación en el lado derecho.

$$\forall z\left(\neg\exists y\left(R\left(y,z\right) \wedge R\left(z,y\right)\right) \vee \neg\exists w\left(\forall x R\left(x,w\right) \boxed{\to} R\left(z,w\right)\right)\right)$$

- Eliminamos la implifcación usando la equivalencia $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$.

$$\forall z\left(\neg\exists y\left(R\left(y,z\right) \wedge R\left(z,y\right)\right) \vee \neg\exists w\left(\neg\forall x R\left(x,w\right) \vee R\left(z,w\right)\right)\right)$$

- Observamos tres negaciones que afectan a cuantificadores.

$$\forall z\left(\boxed{\neg}\exists y\left(R\left(y,z\right) \wedge R\left(z,y\right)\right) \vee \boxed{\neg}\exists w\left(\boxed{\neg}\forall x R\left(x,w\right) \vee R\left(z,w\right)\right)\right)$$

- Aplicamos las equivalencias $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$ y $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$.

$$\forall z\left(\forall y\neg\left(R\left(y,z\right) \wedge R\left(z,y\right)\right) \vee \forall w\neg\left(\exists x\neg R\left(x,w\right) \vee R\left(z,w\right)\right)\right)$$

- Observamos dos negaciones que se pueden introducir.

$$\forall z\left(\forall y\boxed{\neg}\left(R\left(y,z\right) \wedge R\left(z,y\right)\right) \vee \forall w\boxed{\neg}\left(\exists x\neg R\left(x,w\right) \vee R\left(z,w\right)\right)\right)$$

- Aplicamos las equivalencias $\neg\left(\varphi \wedge \psi\right) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ y $\neg\left(\varphi \vee \psi\right) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

$$\forall z\left(\forall y\left(\neg R\left(y,z\right) \vee \neg R\left(z,y\right)\right) \vee \forall w\left(\neg\exists x\neg R\left(x,w\right) \wedge \neg R\left(z,w\right)\right)\right)$$

- Volvemos a tener una negación que afecta a un cuantificador.

$$\forall z\left(\forall y\left(\neg R\left(y,z\right) \vee \neg R\left(z,y\right)\right) \vee \forall w\left(\boxed{\neg}\exists x\neg R\left(x,w\right) \wedge \neg R\left(z,w\right)\right)\right)$$

- Aplicamos la equivalencia $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$.

$$\forall z\left(\forall y\left(\neg R\left(y,z\right) \vee \neg R\left(z,y\right)\right) \vee \forall w\left(\forall x\neg\neg R\left(x,w\right) \wedge \neg R\left(z,w\right)\right)\right)$$

- Observamos una doble negación.

$$\forall z\left(\forall y\left(\neg R\left(y,z\right) \vee \neg R\left(z,y\right)\right) \vee \forall w\left(\forall x\boxed{\neg\neg} R\left(x,w\right) \wedge \neg R\left(z,w\right)\right)\right)$$

- Aplicamos la equivalencia $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$.

$$\forall z \left(\forall y \left(\neg R\left(y, z\right) \vee \neg R\left(z, y\right)\right) \vee \forall w \left(\forall x R\left(x, w\right) \wedge \neg R\left(z, w\right)\right)\right)$$

$$\therefore \varphi_2 = \texttt{fnn}\left(\varphi_1\right) = \forall z \left(\forall y \left(\neg R\left(y, z\right) \vee \neg R\left(z, y\right)\right) \vee \forall w \left(\forall x R\left(x, w\right) \wedge \neg R\left(z, w\right)\right)\right)$$

3. Forma Normal Prenex $\texttt{fnp}\left(\varphi_2\right)$

- Observamos todos los cuantificadores internos

$$\forall z \left(\boxed{\forall y} \left(\neg R\left(y, z\right) \vee \neg R\left(z, y\right)\right) \vee \boxed{\forall w} \left(\boxed{\forall x} R\left(x, w\right) \wedge \neg R\left(z, w\right)\right)\right)$$

- Aplicamos la equivalencia $\varphi \star \forall x \equiv \forall x \left(\varphi \star \psi\right)$ repetidas veces, hasta obtener la forma factorizada.

$$\forall z \left(\forall y \left(\neg R\left(y, z\right) \vee \neg R\left(z, y\right)\right) \vee \forall w \boxed{\forall x} \left(R\left(x, w\right) \wedge \neg R\left(z, w\right)\right)\right)$$

$$\forall z \boxed{\forall y} \left(\left(\neg R\left(y, z\right) \vee \neg R\left(z, y\right)\right) \vee \forall w \forall x \left(R\left(x, w\right) \wedge \neg R\left(z, w\right)\right)\right)$$

$$\forall z \forall y \boxed{\forall w} \left(\left(\neg R\left(y, z\right) \vee \neg R\left(z, y\right)\right) \vee \forall x \left(R\left(x, w\right) \wedge \neg R\left(z, w\right)\right)\right)$$

$$\forall z \forall y \forall w \boxed{\forall x} \left(\left(\neg R\left(y, z\right) \vee \neg R\left(z, y\right)\right) \vee \left(R\left(x, w\right) \wedge \neg R\left(z, w\right)\right)\right)$$

$$\therefore \varphi_3 = \texttt{fnp}\left(\varphi_2\right) = \forall z \forall y \forall w \forall x \left(\left(\neg R\left(y, z\right) \vee \neg R\left(z, y\right)\right) \vee \left(R\left(x, w\right) \wedge \neg R\left(z, w\right)\right)\right)$$

4. Forma Normal de Skolem $\texttt{fns}(\varphi 3)$

- Al no haber cuantificadores, únicamente debemos obtener la forma normal conjuntiva de la matriz. En este caso, podemos aplicar distribuitibidad.

$$\left(\left(\neg R\left(y, z\right) \vee \neg R\left(z, y\right)\right) \vee \left(R\left(x, w\right) \wedge \neg R\left(z, w\right)\right)\right)$$

$$\left(\left(\neg R\left(y, z\right) \vee \neg R\left(z, y\right)\right) \vee R\left(x, w\right)\right) \wedge \left(\left(\neg R\left(y, z\right) \vee \neg R\left(z, y\right)\right) \vee \neg R\left(z, w\right)\right)$$

$$\therefore \varphi_4 = \texttt{fns}\left(\varphi_3\right) = \forall z \forall y \forall w \forall x ((\neg R\left(y, z\right) \vee \neg R\left(z, y\right)) \vee R\left(x, w\right)) \wedge ((\neg R\left(y, z\right) \vee \neg R\left(z, y\right)) \vee \neg R\left(z, w\right))$$

5. Forma Clausular $Cl\left(\varphi_4\right)$

- Separamos la matriz en cláusulas

$$Cl\left(\varphi_4\right) = \left(\left(\neg R\left(y, z\right) \vee \neg R\left(z, y\right)\right) \vee R\left(x, w\right)\right), \left(\left(\neg R\left(y, z\right) \vee \neg R\left(z, y\right)\right) \vee \neg R\left(z, w\right)\right)$$

- Renombramos las variables de forma que cada cláusula tenga variables distintas

$$Cl\left(\varphi_4\right) = \left(\left(\neg R\left(y, z\right) \vee \neg R\left(z, y\right)\right) \vee R\left(x, w\right)\right), \left(\left(\neg R\left(u, v\right) \vee \neg R\left(v, u\right)\right) \vee \neg R\left(v, s\right)\right)$$

$\square$