



# Matemáticas para la IA

**Ivan Vladimir Meza Ruiz, IIMAS, UNAM**

@ivanvladimir



Escanear para acceder a las diapositivas

Link permanente

<https://docs.google.com/presentation/d/1jIEEwgZwUuKXQnRJeRCX2In9WvX56dxmWGuvlJQ575A/edit?usp=sharing>

# **¡Bienvenidos a MeIA!**

<https://www.taller-tic.redmacro.unam.mx/>

# Revolución.IA


A partir de ~2010 ha habido una revolución de *Inteligencia Artificial* (en la academia)

[2012] Imágenes: Hinton, G. E., Srivastava, N., Krizhevsky, A., Sutskever, I., & Salakhutdinov, R. R. (2012). Improving neural networks by preventing co-adaptation of feature detectors. arXiv preprint arXiv:1207.0580.

[2014] Traducción automática: Bahdanau, D., Cho, K., & Bengio, Y. (2014). Neural machine translation by jointly learning to align and translate. arXiv preprint arXiv:1409.0473.

[2017] Procesamiento de Lenguaje Natural: Vaswani, A., Shazeer, N., Parmar, N., Uszkoreit, J., Jones, L., Gomez, A. N., ... & Polosukhin, I. (2017). Attention is all you need. Advances in neural information processing systems, 30.

[2020] Generación de imágenes: Reddy, M. D. M., Basha, M. S. M., Hari, M. M. C., & Penchalaiah, M. N. (2021). Dall-e: Creating images from text. UGC Care Group I Journal, 8(14), 71-75.



# **Sin embargo, no esta revolución**

**(en la sociedad)**

# Meta MeIA

Apoyar el desarrollo del área de Inteligencia Artificial en las instituciones educativas de América Latina y el Caribe

# Objetivo

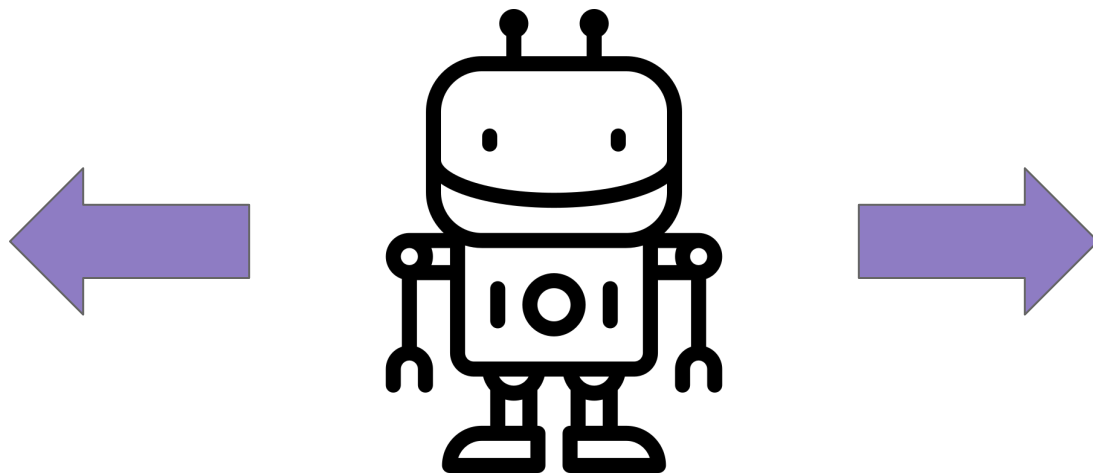
Presentar los conceptos básicos que conforman el campo de Inteligencia Artificial

- Para su comprensión global
- Para permitir la creación de sistemas inteligentes
- Para tener una injerencia en el futuro de esta tecnología

# Temás

1. Álgebra lineal
2. Estadística y probabilidades
3. Cálculo
4. Presentación: Mini-proyecto de matemáticas

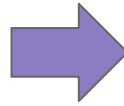
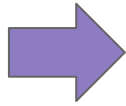




Agente

# Mecanismo general

Entrada y salida



Información  
antes de la  
decisión

La decisión

# Álgebra lineal

# Formalmente

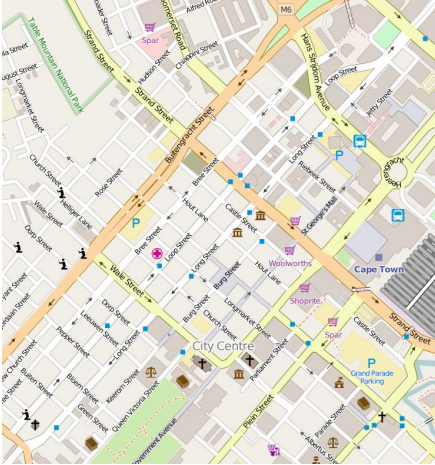
Estudio de **espacios vectoriales** y su representación como **matrices**; está muy asociado a las **ecuaciones lineales**

# Pregunta

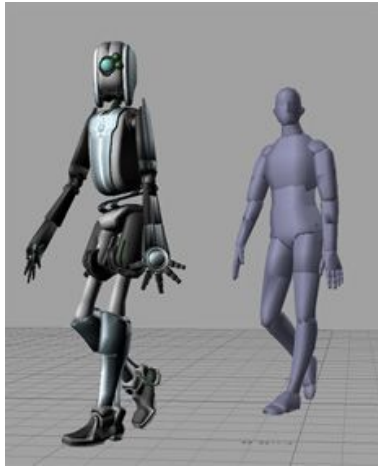
Ir al **link** y responder pregunta: <http://etc.ch/DmxV>



# Conjuntos de vectores en espacios vectoriales



Tomado de:  
[https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Long\\_and\\_Loop\\_Street\\_map.svg](https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Long_and_Loop_Street_map.svg)



Tomado de:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/3D\\_modeling#/media/File:Activemarker2.PNG](https://en.wikipedia.org/wiki/3D_modeling#/media/File:Activemarker2.PNG)

Q3		F6 0.00996147027079																F7 0.00996147027079																F8 0.00996147027079																F9 0.00996147027079															
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P																																
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34																															
2	No points	Q	V	A	R	R	PCA																																																										
3	1	0	0	0	0	0	70.71068		7.587221	7.587291	10.79317	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165		70.71068		7.587221	7.587291	10.79317	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165																																
4	2	10	0	0	0	30	63.69611		7.381716	8.415322	10.40429	0.002004	0.002004	0.002004	0.002004	0.002004		70.71068		7.587221	7.587291	10.79317	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165																																
5	3	0	0	0	0	30	56.50854		7.753518	8.104510	10.17790	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022		70.71068		7.587221	7.587291	10.79317	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165																															
6	4	0	0	0	0	30	49.97513		7.753518	8.104510	10.17790	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022		70.71068		7.587221	7.587291	10.79317	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165																															
7	5	0	0	0	0	40	42.42641		7.753518	8.104510	10.17790	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022		70.71068		7.587221	7.587291	10.79317	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165																															
8	6	0	0	0	0	50	35.35334		7.753518	8.104510	10.17790	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022		70.71068		7.587221	7.587291	10.79317	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165																															
9	7	0	0	0	0	60	28.28427		7.753518	8.104510	10.17790	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022		70.71068		7.587221	7.587291	10.79317	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165																															
10	8	0	0	0	0	70	21.2132		7.753518	8.104510	10.17790	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022		70.71068		7.587221	7.587291	10.79317	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165																															
11	9	0	0	0	0	80	14.14214		7.753518	8.104510	10.17790	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022		70.71068		7.587221	7.587291	10.79317	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165																															
12	10	0	0	0	0	90	7.071068		7.753518	8.104510	10.17790	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022		70.71068		7.587221	7.587291	10.79317	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165																															
13	11	0	0	0	0	100	0		7.753518	8.104510	10.17790	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022	0.002022		70.71068		7.587221	7.587291	10.79317	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165	0.001165																															
14	12	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
15	13	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
16	14	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
17	15	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
18	16	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
19	17	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
20	18	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
21	19	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
22	20	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
23	21	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
24	22	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
25	23	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
26	24	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
27	25	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
28	26	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
29	27	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
30	28	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
31	29	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																															
32	30	0	0	0	0	70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023		70.71068		10.852132	13.741114	10.85788	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023	0.003023																																	

Tomado de:  
<https://www.semanticscholar.org/paper/Application-of-Excel-spreadsheet-in-engineering-Niazkar-Afzali/01bd0731aecfb238e9594d42a77608b5a253fb48>

# Formalmente

Un **vector** es una **tupla** de algún tipo de números (aquí **reales**)

- A través de operaciones un **vector** específico se relaciona con todos los demás
- El conjunto de todos los vectores posibles conforman el **espacio vectorial**

Ejemplos: un espacio de 2 números:  $\mathbb{R}^2$

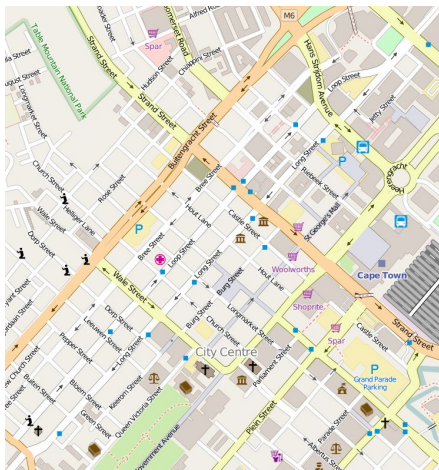
un espacio de 3 números:  $\mathbb{R}^3$

un espacio de 1024 números:  $\mathbb{R}^{1024}$

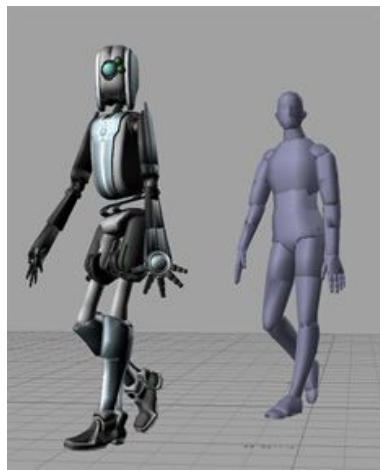
A la cantidad de números se le denomina **dimensión**, por eso es conocida como 3D

# Intuitivamente

Un **vector** es una coordenada, y el espacio vectorial es el espacio en el que ponemos esa coordenada



Tomado de:  
[https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Long\\_and\\_Loop\\_Street\\_map.svg](https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Long_and_Loop_Street_map.svg)

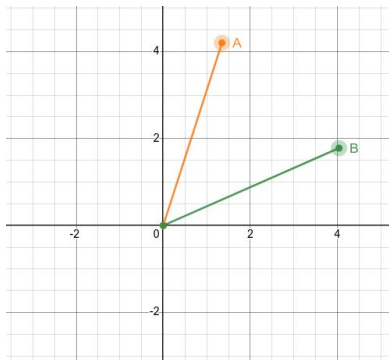


Tomado de:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/3D\\_modeling#/media/File:Activemarkerz.PNG](https://en.wikipedia.org/wiki/3D_modeling#/media/File:Activemarkerz.PNG)

Sin embargo, más de 3 dimensiones son difícil de visualizar



# Manipular



<https://www.desmos.com/calculator/d43yiwzrhl>

# Operaciones

Suma

$$S = A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_d + b_d]$$

Multiplicación por escalar

$$E = eA = [e * a_1, e * a_2, \dots, e * a_d]$$

# Deben satisfacer

Suma	Multiplicación por escalar	Ambas
$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ <i>Asociatividad</i>	$a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$ <i>Computabilidad mult.</i>	$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$ <i>Distributividad suma vectores</i>
$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ <i>Conmutatividad</i>		$(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$ <i>Distributividad suma escalar</i>
$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ <i>Elemento identidad</i>	$1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ Elemento identidad	
$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ <i>Elemento inverso</i>		

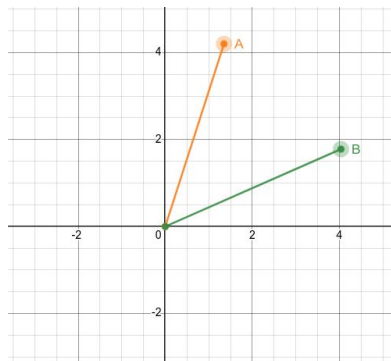
# Producto punto

$$P = A \cdot B = a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots a_d * b_d$$

Notar:

- Pasamos de dos vectores a un valor numérico
- Se puede asociar a que tanto se parecen
  - Apuntan al mismo lugar: más grande
  - Apuntan perpendicularmente: más pequeño
  - Apuntan a otro lado: más grande pero negativo

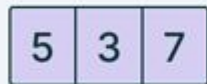
# Manipular (2)



<https://www.desmos.com/calculator/sit26yznye>

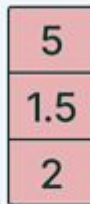
# Más allá de $\mathbb{R}^n$

(11)

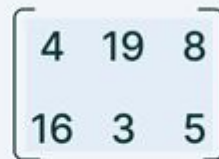


Scalar

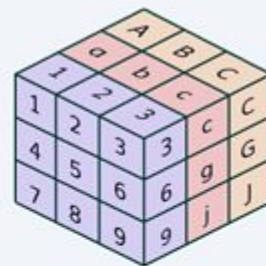
Row Vector  
(shape 1×3)



Column Vector  
(shape 3×1)

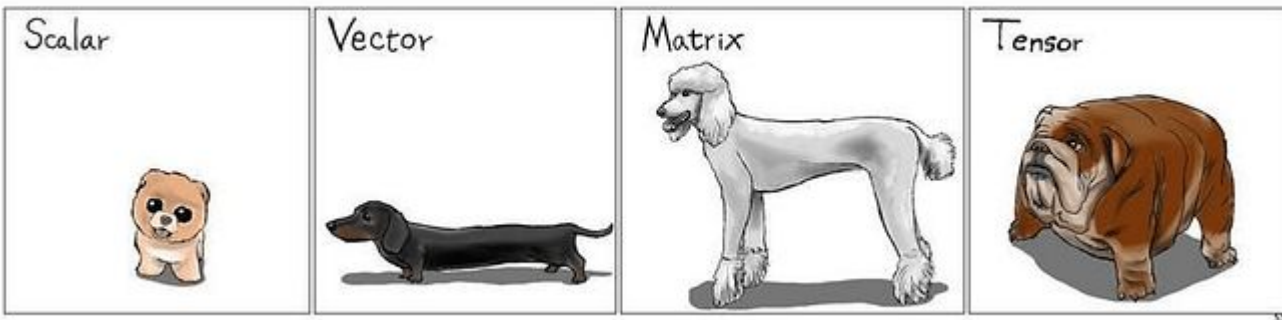


Matrix



Tensor

# Más allá de $\mathbb{R}^n$



<https://discuss.boardinfinity.com/t/what-are-tensors/19073>

# Matrices

$$\mathbb{R}^m \mathbb{R}^n$$

Ahora la coordenada se especifica en una malla

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tomada de:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix\\_\(mathematics\)  
#/media/File:MatrixLabelled.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_(mathematics)#/media/File:MatrixLabelled.svg)



# Suma

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 & 1+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 8 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Ir a: <https://www.wolframalpha.com/input?i=matrix+sum>

Tomada de:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix\\_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_(mathematics)#/media/File:MatrixLabelled.svg)  
#/media/File:MatrixLabelled.svg

# Multipliación escalar

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 8 & 2 \cdot -3 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot -2 & 2 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

Tomada de:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix\\_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_(mathematics)#/media/File:MatrixLabelled.svg)  
[#/media/File:MatrixLabelled.svg](#)

# Transpuesta

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Tomada de:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix\\_\(mathematics\)  
#/media/File:MatrixLabelled.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_(mathematics)#/media/File:MatrixLabelled.svg)

Ir a:

<https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=Transpose%5C%2891%29%7B%7B1%2C2%2C3%2C4%7D%2C%7B3%2C2%2C1%2C5%7D%2C%7B2%2C1%2C3%2C6%7D%7D%5C%2893%29>

# Manipular (3)

Ir a: <https://www.desmos.com/matrix>

# **La versatilidad de las matrices**

# Versatilidad

Información 2D



Tomado de <https://www.widewalls.ch/magazine/pixel-art>

Como una colección de vectores

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

Tomado de [https://en.wikipedia.org/wiki/Row\\_and\\_column\\_spaces](https://en.wikipedia.org/wiki/Row_and_column_spaces)

# Menti



Tomado de <https://www.widewalls.ch/magazine/pixel-art>

$\mathbb{R}^{altura} \mathbb{R}^{ancho} \mathbb{R}^3$

# Multiplicación matricial

$r$ , son renglones de A  
 $c$ , son columnas de B

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \cdot c_1 & r_1 \cdot c_2 & r_1 \cdot c_3 \\ r_2 \cdot c_1 & r_2 \cdot c_2 & r_2 \cdot c_3 \\ r_3 \cdot c_1 & r_3 \cdot c_2 & r_3 \cdot c_3 \\ r_4 \cdot c_1 & r_4 \cdot c_2 & r_4 \cdot c_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} \quad 4 \times 2 \qquad \mathbf{B} \quad 2 \times 3 \qquad \mathbf{D} \quad 4 \times 3 \end{array}$$



# Multiplicación matricial

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} * b_{1,1} + a_{1,2} * b_{2,1} + a_{1,3} * b_{3,1} & a_{1,1} * b_{1,1} + a_{1,2} * b_{2,2} + a_{1,3} * b_{3,2} & a_{1,1} * b_{1,3} + a_{1,2} * b_{2,3} + a_{1,3} * b_{3,3} \\ a_{2,1} * b_{1,1} + a_{2,2} * b_{2,1} + a_{2,3} * b_{3,1} & a_{2,1} * b_{1,1} + a_{2,2} * b_{2,2} + a_{2,3} * b_{3,2} & a_{2,1} * b_{1,3} + a_{2,2} * b_{2,3} + a_{2,3} * b_{3,3} \\ a_{3,1} * b_{1,1} + a_{3,2} * b_{2,1} + a_{3,3} * b_{3,1} & a_{3,1} * b_{1,1} + a_{3,2} * b_{2,2} + a_{3,3} * b_{3,2} & a_{3,1} * b_{1,3} + a_{3,2} * b_{2,3} + a_{3,3} * b_{3,3} \\ a_{4,1} * b_{1,1} + a_{4,2} * b_{2,1} + a_{4,3} * b_{3,1} & a_{4,1} * b_{1,1} + a_{4,2} * b_{2,2} + a_{4,3} * b_{3,2} & a_{4,1} * b_{1,3} + a_{4,2} * b_{2,3} + a_{4,3} * b_{3,3} \end{bmatrix}$$

# Pregunta

Ir a: <http://etc.ch/ewiC>



# Transformaciones 2D

- Rotación
- Reflejo
- Cizallamiento eje X
- Cizallamiento eje Y
- Escala

# Transformaciones

$r$ , son renglones de  $D$   
 $c$ , son columnas de  $T$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \cdot c_1 & r_1 \cdot c_2 \\ r_2 \cdot c_1 & r_2 \cdot c_2 \\ r_3 \cdot c_1 & r_3 \cdot c_2 \\ \vdots & \vdots \\ r_n \cdot c_1 & r_n \cdot c_2 \end{bmatrix}$$

$D$   $N \times 2$   $T$   $2 \times 2$   $R$   $N \times 2$

# Escalamiento

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \cdot c_1 & r_1 \cdot c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} * c & a_{1,2} * c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{a_{1,1} * b_{1,1} + a_{1,2} * b_{2,1}} & \underline{a_{1,1} * b_{1,2} + a_{1,2} * b_{2,2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} * c & a_{1,2} * c \end{bmatrix}$$

# Manipular (4)

Ir a: <https://web.ma.utexas.edu/users/ysulyma/matrix/>

# Lo que nos separa

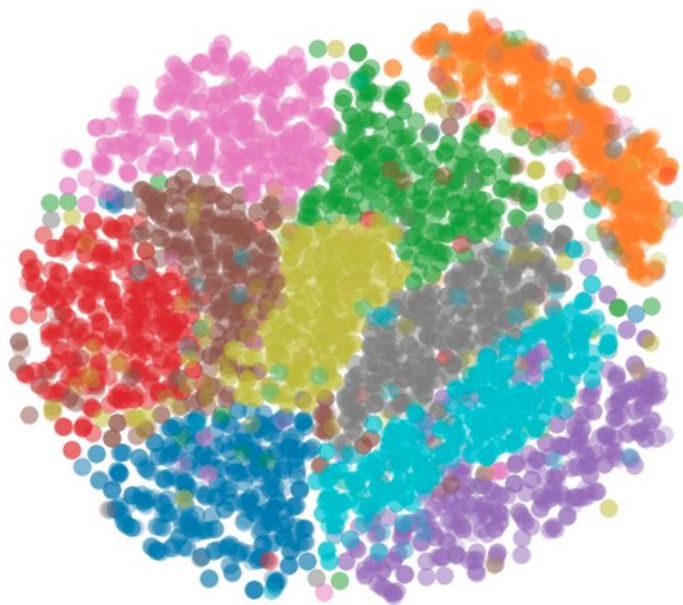
En espacio vectorial es posible calcular distancias, en una interpretación euclidiana

- Distancia euclidiana:

$$d_E(A, B) = |A - B| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

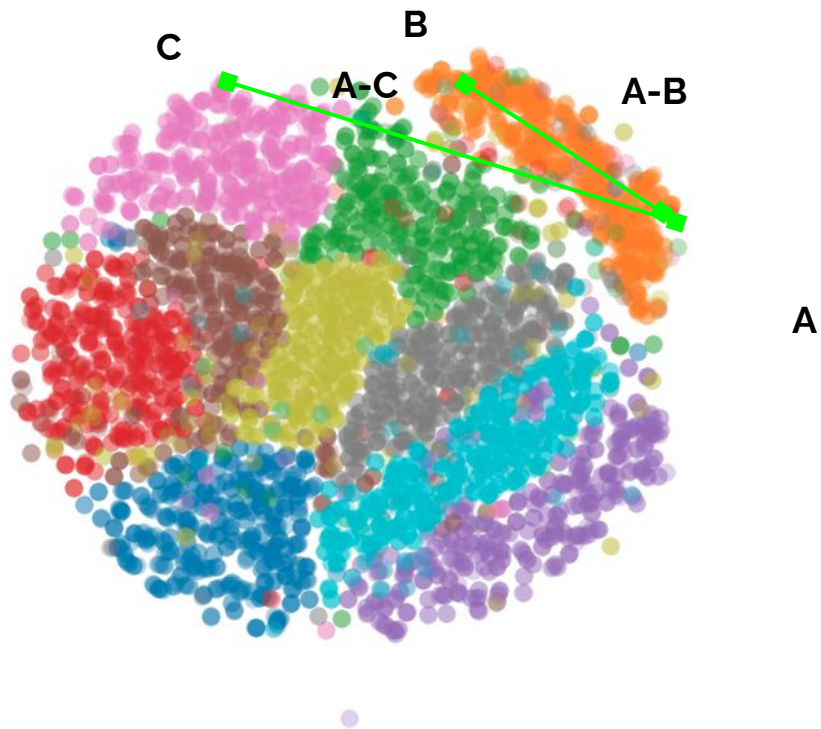
- Distancia coseno:

$$d_c(A, B) = \frac{A \cdot B}{|A||B|}$$

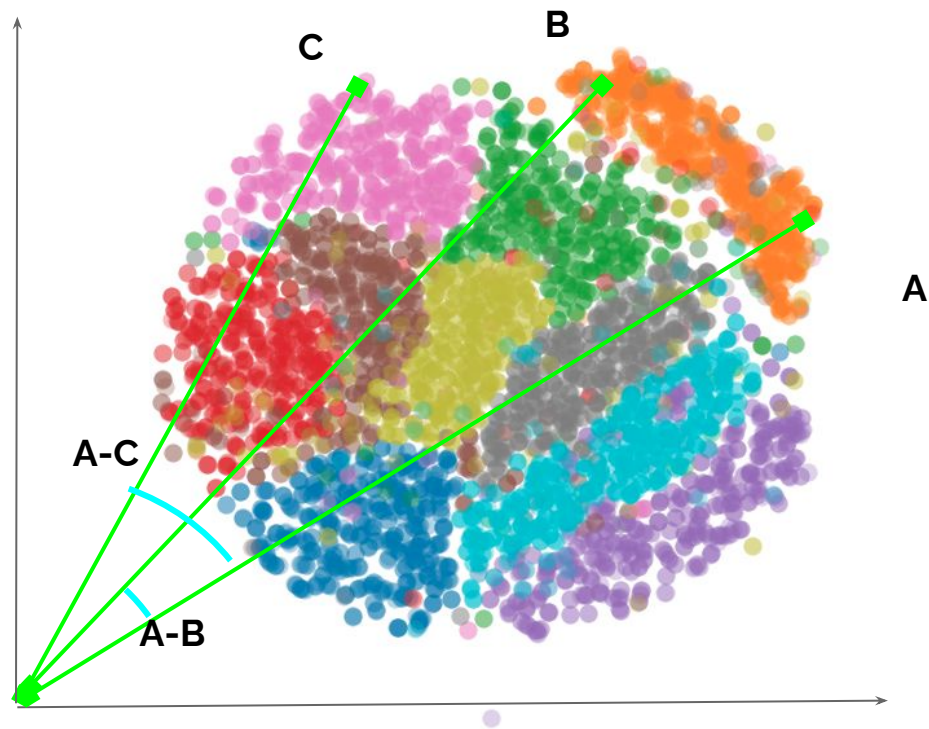


Ejemplo





Ejemplo: Distancia euclidiana



Ejemplo: Distancia euclidiana

# Estadística y probabilidad

<https://es.wikipedia.org/wiki/Probabilidad>

<https://es.wikipedia.org/wiki/Estad%C3%ADstica>

# Probabilidad

Una forma formal de ver la incertidumbre del universo

- Naturaleza estocástica
- Errores

# Elementos

Fenómeno de interés

- El fenómeno ocurre: **evento**
- Cuando se repiten eventos: **experimento**
- La observación resultante del evento se le denomina: **resultado**

# Fenómeno de interés: Lanzamiento de dados justos



Ir a: <http://etc.ch/k5AS>



# Más elementos

1. **Espacio de muestra**

El conjunto de todos los resultados posibles

2. **Variable aleatoria**

Abstracción sobre un conjunto de resultados

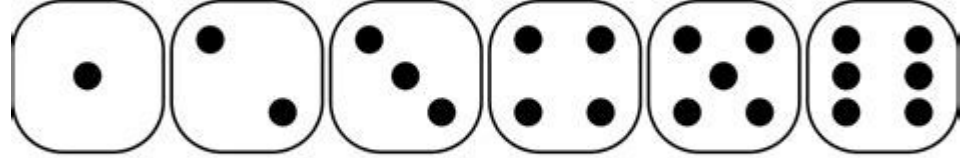
3. **Probabilidades**

Valor que cuantifica la plausibilidad de un resultado

4. **Independencias asumidas**

Relaciones del fenómeno que asumimos no influye la experimentación

# Dados



1. **Espacio de muestra**

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. **Variable aleatoria**

A=Caras pares

B=Caras impares

3. **Probabilidades**

$P(A) = \frac{1}{2}$

4. **Independencias asumidas**

Los lanzamientos no influyen entre sí



# Leyes de probabilidad

1.  $P(A) \geq 0$
2.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  si A y B son eventos disjuntos
3.  $P(\Omega) = 1.0$

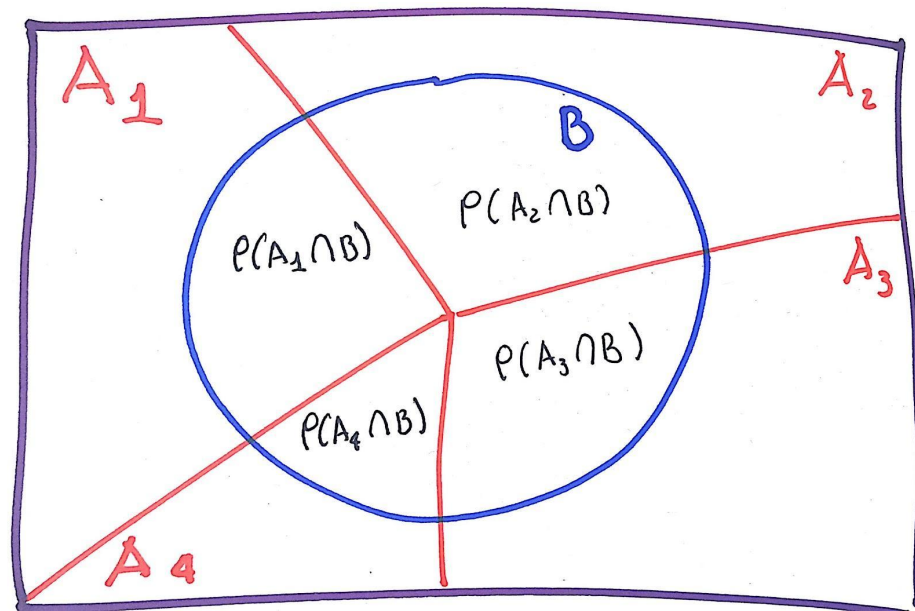
Hay que notar, que de 2 se puede inferir para eventos complejos

- $P(\{E1, E2, \dots, E_n\}) = P(\{E1\}) + P(\{E2\}) + \dots + P(\{E_n\})$

# P. Condicional

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \text{ cuando } P(A) > 0.0$$

# P. Total

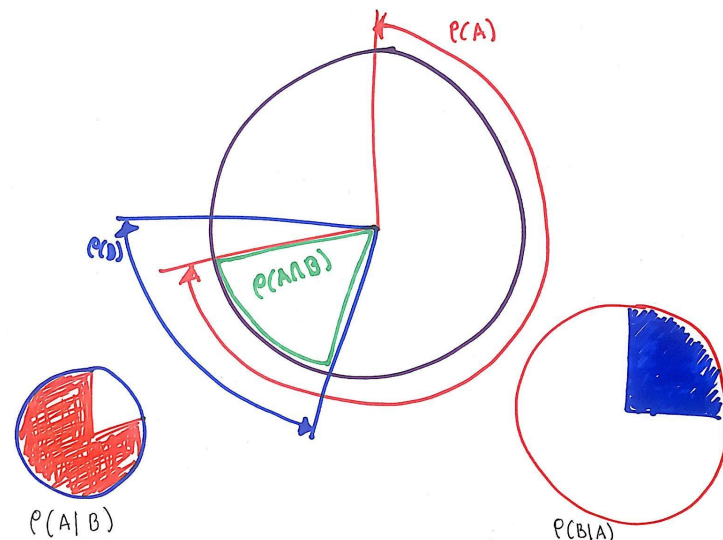


$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

# Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$P(\text{causa}|\text{efecto}) = \frac{P(\text{efecto}|\text{causa})P(\text{causa})}{P(\text{efecto})}$$



# Procesos Markovianos

Probabilidad de secuencia de eventos, cuando hay influencia entre eventos:

No markoviano:

$$P(\text{"este día es muy bonito"}) \sim \\ P(\text{este})P(\text{día})P(\text{es})P(\text{muy})P(\text{bonito})$$

Markoviano:

$$P(\text{"este día es muy bonito"}) \sim \\ P(\text{este})P(\text{día}|\text{este})P(\text{es}|\text{este día})P(\text{muy}|\text{este día es})P(\text{bonito}|\text{este día es muy})$$

Markoviano 1er grado:

$$P(\text{"este día es muy bonito"}) \sim \\ P(\text{este})P(\text{día}|\text{este})P(\text{es}|\text{este})P(\text{muy}|\text{es})P(\text{bonito}|\text{muy})$$

**Cuando tenemos muchos  
experimentos**

# Estadística

Tenemos mucho experimentos

- Caso variable aleatoria real ( $\mathcal{R}$ ) interesante
- Buscamos entender a la variable, descripción sobre estas

# Manipular

Ir a: <https://www.desmos.com/calculator/meo65gxsuw>

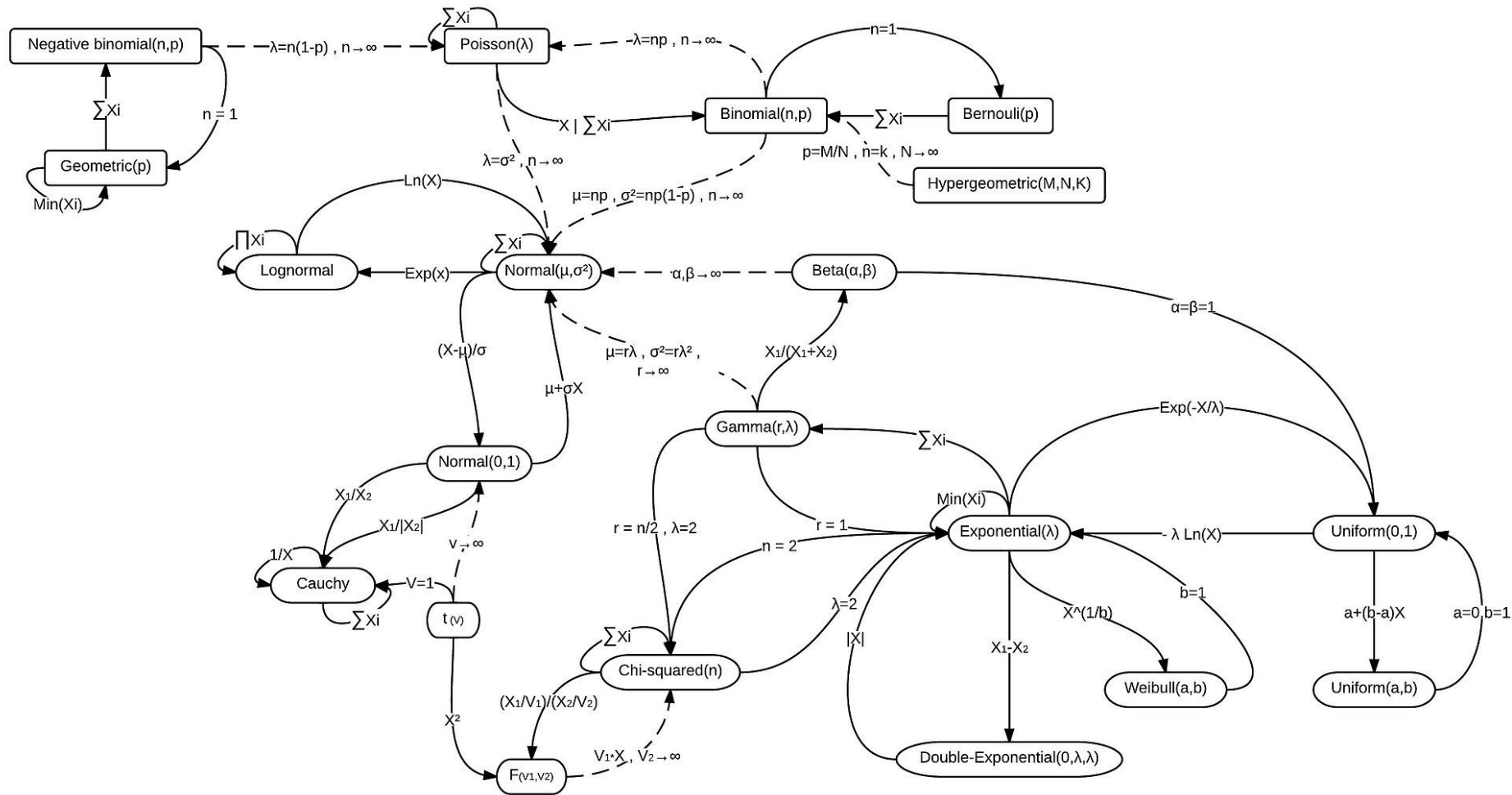


# Muestreo

De una población (espacio de muestra/experimento natural), escoger un espacio de muestra representativo.

- El espacio de muestra/experimento tiene una organización orgánica

Si conozco la distribución, puedo muestrear "eventos"



# Nota histórica

Durante mucho tiempo el análisis estadístico formó parte de las técnicas para IA, conceptualmente se siguen utilizando en el campo; sin embargo, en lugar de calcular las distribuciones se aproximan; en particular en los últimos meses se usan redes neuronales

# Los ingredientes secretos: GPT, Generativo (informal)

Modelos del lenguaje masivos (*LLM*)

- Modelo del lenguaje

$$\mathcal{P}(w_1, \dots, w_n)$$

- En su modalidad condicional (discriminativo)

$$\mathcal{P}(w_{n+1} | w_1 \dots w_n)$$

- Se puede aproximar por un modelo autorregresivo (basado en red neuronal)

$$f_{\mathcal{RN}}(w_{n+1} | w_1 \dots w_n, C_{\mathcal{RN}})$$

$$f_{\mathcal{RN}}(w_{n+1} | w_1 \dots w_n, C_{\mathcal{RN}}) \Rightarrow w_1 \dots w_n w_{n+1} \dots w_{n+m}$$

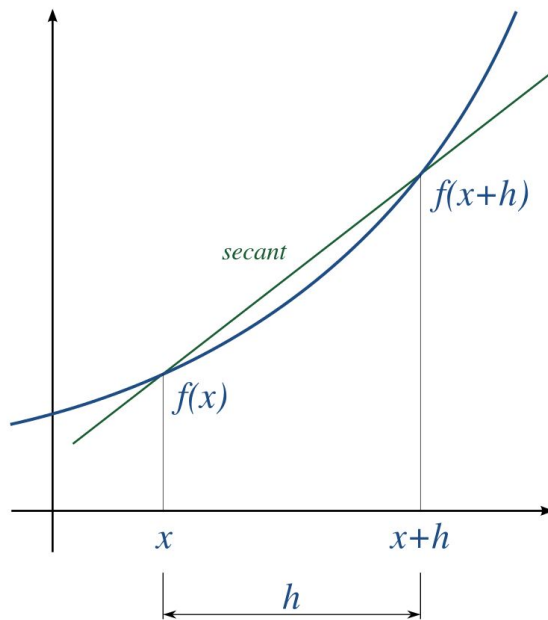
# Cálculo

[https://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo\\_infinitesimal](https://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo_infinitesimal)

# Tipos

- **Diferencial**
- Integral
- **Vectorial**
- Multivariable

# Cambio



Tomada de:  
[https://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo\\_diferencial#/media/Archivo:Derivativa.svg](https://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo_diferencial#/media/Archivo:Derivativa.svg)

# Manipular

Ir a: <https://www.desmos.com/calculator/wgmdvloxim>



# Minimización

Cuando tenemos un comportamiento representado como una función matemática es posible preguntarnos dónde está su mínimo o máximo:

- Esto se traduce en dónde la función tiene un cambio de o, es decir donde su derivada es ***cero***

# Regla de la cadena

Es bien sabido que una función puede tomar otra función como parámetro

- $f(x)$
- $g(f(x))$

Las derivadas se pueden encadenar

- $$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \frac{df}{dx}$$

# Cálculo vectorial

$$\vec{v} = c\vec{u}$$

$$\nabla \vec{v}(\vec{u}) = \left[ \frac{\partial(c\vec{u})}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial(c\vec{u})}{\partial u_d} \right]$$

# Manipular

Ir a: <https://www.desmos.com/calculator/azt4uaopy5>

# iGracias!

Ivan Vladimir Meza Ruiz, IIMAS/UNAM

[ivanvladimir@turing.iimas.unam.mx](mailto:ivanvladimir@turing.iimas.unam.mx)

@ivanvladimir