Redes neuronales 2020-2021

Profesora: Verónica Esther Arriola Ríos
Correo: v.arriola@ciencias.unam.mx
Ayudante de teoría/Autor del documento: Dimitri Semenov Flores
Correo: dimavita@ciencias.unam.mx
Ayudante laboratorio: Osvaldo Baruch Acevedo Badillo
Correo: goruch@ciencias.unam.mx

1. Pequeño repaso de Ecuaciones diferenciales

¿Qué es una ecuación diferencial?.

Podemos definir de forma no muy formal que son ecuaciones donde aparecen varias funciones y al menos la derivada de una de esas funciones. Nuestro objetivo en ecuaciones diferenciales es analizar si hay funciones que cumplan las ecuaciones y en caso de que existan encontrar estas funciones.

Un ejemplo clásico y sencillo es la ecuación:

$$\frac{dy}{dt} = 2y \tag{1}$$

Donde y es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, en este caso estamos buscando una función en la cual su primer derivada es ella misma multiplicada por dos.

Al recordar un poco de lo visto en calculo recordamos que por regla de la cadena la derivada de la función e^{at} con a una constante es ae^{at}

De lo anterior notamos que una solución a nuestra ecuación es la función $y = e^{2t}$, pero también tenemos otras soluciones, por ejemplo $y = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} + \pi$... en general las soluciones son de la forma $y = e^{2t} + c$ con $c \in \mathbb{R}$

Lo anterior es un ejemplo de juguete y en general hay muchos tipos de ecuaciones diferenciales donde necesitaremos otros métodos más complejos para encontrar soluciones y en otros casos nos tendremos que conformar con encontrar aproximaciones a las soluciones

Recordemos algunos términos de ecuaciones diferenciales:

- **Ecuaciones diferenciales ordinarias.** Estas son ecuaciones donde la función desconocida depende únicamente de una única variable independiente.
- **Ecuaciones diferenciales parciales.** Estas son ecuaciones donde la función desconocida depende de dos o más variables independientes
- El **orden** de una ecuación diferencial se refiere a la derivada de mayor grado que aparece en la ecuación. En general si tenemos la ecuación

  $$F(t, y, y', y^{(2)}, ..., y^{(n)}) = 0 \tag{2}$$

  Donde $y^{(i)}$ es la i-ésima derivada de la función y, decimos que la ecuación anterior es de orden n.

- Una ecuación diferencial ordinaria $F(t, y, y', y^{(2)}, ..., y^{(n)}) = 0$ de orden n es **lineal** si F es una función lineal de las variables $y, y^{(2)}, ..., y^{(n)}$. Es decir la función F tiene la forma general:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_n(t)y = g(t) \tag{3}$$

  Una forma intuitiva de verlo es pensar que la función F se parece a un polinomio.

  Si la función F no cumple la definición anterior decimos que la ecuación diferencial ordinaria $F(t, y, y', y^{(2)}, ..., y^{(n)}) = 0$ de orden n es **no lineal**.

2. Ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden

Nosotros nos vamos a enfocar en las soluciones para una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden.

Consideremos la forma original más simple de una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b \tag{4}$$

Donde a, b son constantes.

Si consideramos que $a \neq 0$ y que $y \neq \frac{b}{a}$ podemos reescribir la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y - (\frac{b}{a})} = -a \tag{5}$$

Al integrar ambos lados de la igualdad con respecto de t obtenemos que:

$$\ln{(y - \frac{b}{a})} = -at + C \tag{6}$$

Para la integración del lado izquierdo simplemente recuerden que la derivada de $\ln{(y - \frac{b}{a})}$*, usando regla de la cadena, es en efecto* $\frac{\frac{dy}{dt}}{y-(\frac{b}{a})}$

Si le aplicamos la función exponencial a ambos términos de la ecuación tenemos que:

$$e^{\ln{(y-\frac{b}{a})}} = y - \frac{b}{a} = e^{-at+C} \tag{7}$$

Recordando que C es una constante arbitraria de integración tenemos que e^C también va a ser una constante que depende de C. Para facilitar la notación renombramos la constante e^C como simplemente c.

Con lo anterior y despejando y en la ecuación tenemos que las soluciones a nuestra ecuación diferencial tienen la forma:

$$y = \frac{b}{a} + ce^{(-at)} \tag{8}$$

Ahora consideremos el caso más general donde a y b no necesariamente son constantes, si no funciones que dependen de la variable independiente t, consideremos las funciones $g(t)$ y $h(t)$, con estas podemos reescribir la forma general de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dt} + h(t)y = g(t) \tag{9}$$

Para estas ecuaciones no podemos usar un camino tan directo, en su lugar utilizamos un método atribuido a *Leibniz* donde buscamos una función $\mu(t)$ tal que al multiplicar la ecuación por $\mu(t)$ obtenemos una ecuación *fácilmente* integrable

Multipliquemos la ecuación diferencial por esta función $\mu(t)$ misteriosa que por el momento no conocemos:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + h(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t) \tag{10}$$

Como pequeño paréntesis recuerden que: $\frac{d(\mu(t)y)}{dt} = \frac{d(\mu(t))}{dt}y + \mu(t)\frac{dy}{dt}$

Con lo anterior notamos que la parte izquierda de la ecuación corresponde a la derivada del producto $\mu(t)y$, si la función misteriosa $\mu(t)$ cumple que:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = h(t)\mu(t) \tag{11}$$

Si suponemos por el momento que la función $\mu(t) > 0$ para toda $t \in \mathbb{R}$ tenemos que :

$$\frac{\frac{d\mu(t)}{dt}}{\mu(t)} = h(t) \tag{12}$$

Esta ecuación es similar a la ecuación (5) y podemos integrar de forma directa ambos lados de la ecuación obteniendo:

$$\ln(\mu(t)) + K = \int h(t) \tag{13}$$

Y nuevamente aplicando la función exponencial tenemos que:

$$\mu(t) = \exp\left((\int h(t) - K)\right) \tag{14}$$

Como K es una constante arbitraria de integración podemos considerar el valor $K = 0$ para obtener la forma más simple de $\mu(t)$.

$$\mu(t) = \exp\left(\int h(t)\right) \tag{15}$$

Notemos que la función $\mu(t)$ que encontramos cumple que en efecto $\mu(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ya que la función exponencial es positiva en todos los reales, por lo que la función $\mu(t)$ que encontramos no violenta nuestra suposición arriesgada que tomamos en la ecuación (12)

Por lo anterior como hemos encontrado una función $\mu(t)$ que cumple la ecuación (11) tenemos que la ecuación (10) la podemos reescribir de la siguiente forma:

$$\frac{d(\mu(t)y)}{dt} = \mu(t)g(t) \tag{16}$$

Y por lo tanto si integramos tenemos que:

$$\mu(t) * y + C = \int \mu(t)g(t) \tag{17}$$

Con C una constante de integración arbitraria de integrar $\frac{d(\mu(t)y)}{dt}$.

Finalmente despejando tenemos que:

$$y = \frac{\int(\mu(t)g(t)) + C}{\mu(t)} \tag{18}$$

Donde $\mu(t) = \exp\left(\int h(t)\right)$