Olympiadeklasse **11**

61. Mathematik-Olympiade
4. Runde (Bundesrunde)
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

611141

Es sei a eine reelle Zahl. Man bestimme alle Werte für a, für die das Gleichungssystem

$$3x^2 + 2y^2 + 2z^2 = a\,,$$
$$4x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 1 - a$$

mindestens eine Lösung $(x,\, y,\, z)$ in reellen Zahlen besitzt.

611142

In *Planland* lebt ein Volk, das die Planimetrie vor allen anderen Wissenschaften liebt. Deshalb denkt es sich sein Land als eben, alle Orte des Landes als geometrische Punkte und jede Straße als Strecke, die zwei Punkte verbindet. Zusätzlich zu den Orten können *Kreisverkehre* gebaut werden, das sind Punkte im Straßennetz, von denen jeweils zwei oder mehr Straßen ausgehen. Alle Straßenkreuzungen und Abzweigungen werden als Kreisverkehre ausgebaut. Über dieses Straßennetz soll jeder Ort mit jedem anderen über eine Folge von Straßen und gegebenenfalls Kreisverkehren verbunden sein. Als Länge einer Straße messen die Planländer die geometrische Länge der zugehörigen Strecke.

Der geniale Straßenbauingenieur Bodo Beton legt einen neuen Straßenplan vor, von dem bekannt ist, dass es kein Straßennetz mit kleinerer Gesamtlänge aller Straßen gibt.

Man zeige, dass im Netz von Bodo Beton von jedem Ort und jedem Kreisverkehr höchstens drei Straßen ausgehen können.

611143

Es seien M und N die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ beziehungsweise $\overline{AC}$ des Dreiecks ABC. Der Punkt Q liege so auf der Parallelen zur Seite $\overline{BC}$ durch den Punkt N, dass die Punkte Q und C auf entgegengesetzten Seiten der Geraden AB liegen und $|QN| \cdot |BC| = |AB| \cdot |AC|$ gilt.

Der Umkreis des Dreiecks AQN schneide die Strecke $\overline{MN}$ in einem weiteren, von N verschiedenen Punkt T.

Man beweise, dass es einen Kreis durch die Punkte T und N gibt, der sowohl die Gerade BC als auch den Inkreis des Dreiecks ABC berührt.

Olympiadeklasse **11**

61. Mathematik-Olympiade
4. Runde (Bundesrunde)
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

611144

Man bestimme alle Quadrupel (x, y, u, v) ganzer Zahlen, die der Gleichung

$$x^2 + 10y^2 = 2u^2 + 5v^2$$

genügen.

611145

Das Dreieck ABC sei gleichseitig mit Umkreis k. Der Kreis q berühre den Kreis k von außen im Punkt D, wobei D so auf k liegt, dass die Punkte D und C auf verschiedenen Seiten der Geraden AB liegen. Von A, B und C wird jeweils eine Tangente an den Kreis q gelegt. Die jeweiligen Tangentenabschnitte haben die Längen a, b bzw. c.

Man beweise, dass dann $a + b = c$ gilt.

611146

Es werden Funktionen f betrachtet, die den folgenden vier Bedingungen genügen.

(1) Die Funktion f ist reellwertig und für alle reellen Zahlen definiert.
(2) Für je zwei reelle Zahlen x und y gilt $f(xy) = f(x)\,f(y)$.
(3) Für je zwei reelle Zahlen x und y gilt $f(x + y) \leq 2\big(f(x) + f(y)\big)$.
(4) Es ist $f(2) = 4$.

Man beweise die folgenden Aussagen:

a) Es gibt eine Funktion f mit $f(3) = 9$, die den Bedingungen (1) bis (4) genügt.
b) Für jede Funktion f, die den Bedingungen (1) bis (4) genügt, gilt $f(3) \leq 9$.

Olympiadeklasse **11**

61. Mathematik-Olympiade
4. Runde (Bundesrunde)
Lösungen – 1. Tag

611141 Lösung *6 Punkte*

Erste Lösung: Angenommen, $(x,\ y,\ z)$ ist eine solche Lösung. Die Addition beider Gleichungen ergibt

$$7x^2 + 6y^2 + 7z^2 = 1\,.$$

Daraus folgt

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{7}\big(7x^2 + 7y^2 + 7z^2\big) \geq \frac{1}{7}\big(7x^2 + 6y^2 + 7z^2\big) = \frac{1}{7} \tag{1}$$

und

$$a = 3x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2\big(x^2 + y^2 + z^2\big) \geq \frac{2}{7}\,,$$
$$a = 1 - (1 - a) = 1 - \big(4x^2 + 4y^2 + 5z^2\big) \leq 1 - 4\big(x^2 + y^2 + z^2\big) \leq 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}\,.$$

Das Gleichungssystem kann nur Lösungen für $2/7 \leq a \leq 3/7$ besitzen.

Es sei nun umgekehrt a eine Zahl mit $2/7 \leq a \leq 3/7$. Der Gleichheitsfall in (1) regt an, eine Lösung mit $y = 0$ zu suchen. Aus

$$3x^2 + 2z^2 = a\,,$$
$$4x^2 + 5z^2 = 1 - a$$

erhalten wir, wieder durch Addition, eine notwendige Bedingung

$$x^2 + z^2 = \frac{1}{7}\,. \tag{2}$$

Unter dieser Bedingung ist das Gleichungssystem äquivalent zu

$$x^2 = a - \frac{2}{7}\,,$$
$$z^2 = 1 - a - \frac{4}{7} = \frac{3}{7} - a\,.$$

Beide rechte Seiten sind im betrachteten Intervall nichtnegativ, sodass die Quadratwurzeln gezogen werden können. Zur Probe reicht es aus, die notwendige Bedingung (2) zu überprüfen. Tatsächlich gilt

$$x^2 + z^2 = a - \frac{2}{7} + \frac{3}{7} - a = \frac{1}{7}\,.$$

Das Gleichungssystem besitzt für $2/7 \leq a \leq 3/7$ die Lösung

$$x = \sqrt{a - \frac{2}{7}}\,, \qquad y = 0\,, \qquad z = \sqrt{\frac{3}{7} - a}$$

und eventuell weitere Lösungen.

Genau dann, wenn $2/7 \leq a \leq 3/7$ gilt, ist das Gleichungssystem lösbar.

Bemerkung: Die allgemeine Lösung des Gleichungssystem lautet

$$x = \pm\sqrt{a - 2c}\,, \qquad y = \pm\sqrt{7c - 1}\,, \qquad z = \pm\sqrt{1 - a - 4c}\,.$$

In dieser Darstellung ist c eine beliebige reelle Zahl, die im Intervall $2/7 \leq a \leq 1/3$ die Bedingung $1/7 \leq c \leq a/2$ und im Intervall $1/3 \leq a \leq 3/7$ die Bedingung $1/7 \leq c \leq (1-a)/4$ erfüllt. Die drei Vorzeichen können beliebig kombiniert werden.

Zweite Lösung:

Angenommen, es existiert eine Lösung (x, y, z) des Gleichungssystems. Dann sind beide linken Seiten nur dann nichtpositiv, wenn $x = y = z = 0$ und damit $a = 1 - a = 0$ gilt, was unmöglich ist. Also folgt $0 < a < 1$.

Es seien $u = x^2$, $v = y^2$ und $w = z^2$. Gesucht sind dann genau die Werte von a, für die mindestens eine Lösung des folgenden Systems existiert:

$$3u + 2v + 2w = a\,, \tag{3}$$

$$4u + 4v + 5w = 1 - a\,, \tag{4}$$

$$u, v, w \geq 0\,. \tag{5}$$

Jede der Gleichungen (3) oder (4) beschreibt eine Ebene im Raum mit den kartesischen Koordinaten (u, v, w). Alle Punkte, die die Bedingungen (3) und (5) gleichzeitig erfüllen, bilden eine Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $(a/3, 0, 0)$, $(0, a/2, 0)$ und $(0, 0, a/2)$. Analog definieren die Bedingungen (4) und (5) ein Dreieck mit den Eckpunkten $((1-a)/4, 0, 0)$, $(0, (1-a)/4, 0)$ und $(0, 0, (1-a)/5)$. Genau dann, wenn diese Dreiecke einen gemeinsamen Punkt haben, ist das System (3)–(5) lösbar.

Es gibt also *genau dann keine Lösung*, wenn alle Eckpunkte eines der Dreiecke auf der gleichen Seite der anderen Ebene liegen, d. h. wenn entweder

$$\frac{a}{3} < \frac{1-a}{4}\,, \quad \frac{a}{2} < \frac{1-a}{4} \quad \text{und} \quad \frac{a}{2} < \frac{1-a}{5} \tag{6}$$

oder

$$\frac{a}{3} > \frac{1-a}{4}\,, \quad \frac{a}{2} > \frac{1-a}{4} \quad \text{und} \quad \frac{a}{2} > \frac{1-a}{5} \tag{7}$$

gilt.

Eine Vereinfachung von (6) ergibt $7a < 3$, $6a < 2$ und $7a < 2$, also $a < 2/7$. Analog ergeben sich für (7) die Bedingungen $7a > 3$, $6a > 2$ und $7a > 2$, also $a > 3/7$.

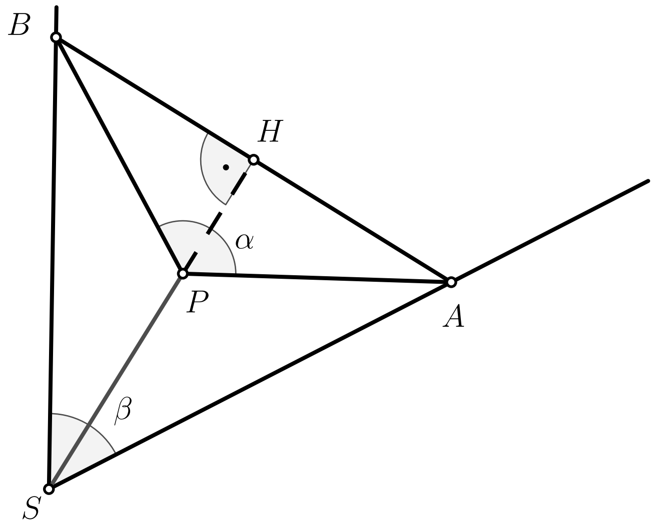
Damit erhält man wie in der ersten Lösung das Intervall $a \in [2/7, 3/7]$ für die Lösbarkeit.

Bemerkung: Deutet man im Ausgangssystem die Unbekannten (x, y, z) als kartesische Koordinaten, so definieren die Gleichungen zwei konzentrische Ellipsoide, deren Hauptachsen parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Die zweite Lösung entspricht der Aussage, dass sich in diesem Fall die Ellipsoide genau dann nicht schneiden oder berühren, wenn die Hauptachsen eines Ellipsoids innerhalb der Hauptachsen der anderen liegen, was bei der Aufgabe genau für $0 \leq a < 2/7$ oder $a > 3/7$ der Fall ist.

Wir beweisen zunächst den folgenden

Hilfssatz: Für zwei gleichschenklige Dreiecke ABP und ABS mit Scheitelwinkeln $\alpha = |\sphericalangle APB| = 120°$ und $\beta = |\sphericalangle ASB| < 120°$, die so zueinander liegen, dass sich P im Innern des Dreiecks ABS befindet, gilt

$$|AS| + |BS| > |AP| + |BP| + |PS| \ .$$



L 611142

Beweis des Hilfssatzes: Der Höhenfußpunkt H auf $\overline{AB}$ halbiert diese Strecke, vgl. Abbildung L 611142. Wegen $|\sphericalangle APH| = \alpha/2 = 60°$ gilt $|HP| = |AP|/2$. Wendet man den Satz des Pythagoras an, so erhält man

$$|AH|^2 = |AP|^2 - \left(\frac{1}{2}|AP|\right)^2 = \frac{3}{4}|AP|^2 \ .$$

Wegen $|HS| = |HP| + |PS| = \frac{1}{2}|AP| + |PS|$ folgt weiter aus dem Satz des Pythagoras und der Gleichheit einander entsprechender Schenkellängen

$$\begin{aligned}
(|AS| + |BS|)^2 &= 4|AS|^2 = 4\left(|AH|^2 + |HS|^2\right)\\
&= 4|AH|^2 + 4\left(\frac{1}{2}|AP| + |PS|\right)^2\\
&= 3|AP|^2 + |AP|^2 + 4|AP||PS| + 4|PS|^2\\
&= (2|AP| + |PS|)^2 + 3|PS|^2\\
&> (2|AP| + |PS|)^2 = (|AP| + |BP| + |PS|)^2 \ .
\end{aligned}$$

Wurzelziehen ergibt wegen der Positivität der Streckenlängen die Behauptung des Hilfssatzes.

Beweis der Aussage der Aufgabe:

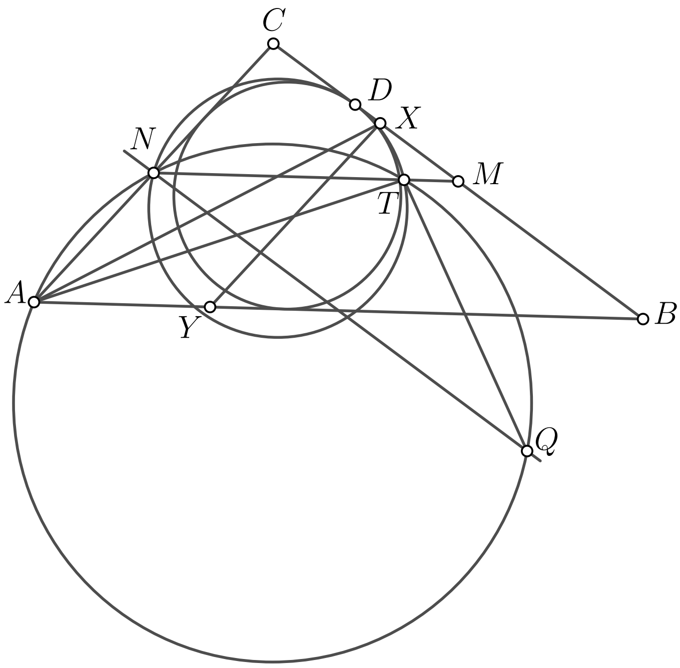
Um die Behauptung zu beweisen, nehmen wir an, dass im Plan des Ingenieurs ein Ort oder ein Kreisverkehr auftritt, von dem mindestens vier Straßen ausgehen. Es gibt also einen Punkt S, der Endpunkt von mindestens vier verschiedenen Strecken des Netzes ist. Wir wählen zwei dieser Strecken, die einen kleinsten Winkel einschließen. Die Größe dieses Winkels ist dann höchstens 90°. Wir wählen auf beiden Strecken je einen Punkt A bzw. B, der von S die Entfernung $a > 0$ hat. Wenn a ausreichend klein ist, befinden sich bei A und B keine Orte und im Inneren des Dreiecks ABS keine Straßen. Bei A und B bauen wir Kreisverkehre mit zwei Straßen.

Nach dem Hilfssatz gibt es dann im Dreieck ABS einen Punkt P, für den der Teilstreckenzug ASB länger ist als die Summe der Längen der drei Strecken $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ und $\overline{SP}$. Baut man im Punkt P einen weiteren Kreisverkehr und ersetzt den Straßenzug ASB durch diese drei Strecken, so erhält man einen Plan, bei dem die Summe der Längen aller Straßen kürzer ist als im Plan von Bodo Beton.

Da das nicht möglich sein soll, muss die Annahme falsch sein, also können von jedem Punkt des Planes höchstens drei Straßen ausgehen.

Bemerkung: Auf diesem Wege lässt sich sogar zeigen: Alle auftretenden Winkel sind größer oder gleich 120°. Winkel größer als 120° können dabei nur in Orten auftreten, von denen genau zwei Straßen ausgehen. Alle übrigen Punkte sind Orte oder Kreisverkehre, in denen jeweils drei Straßen zusammentreffen, die paarweise zueinander Winkel von 120° bilden.

611143 Lösung *7 Punkte*



L 611143

Wir setzen $a = |BC|$, $b = |CA|$ und $c = |AB|$.

Die Winkel $\sphericalangle TQN$ und $\sphericalangle TAN$ sind Peripheriewinkel zur Sehne $\overline{NT}$ und daher gleich groß. Es sei X der Punkt auf $\overline{BC}$, für den $|\sphericalangle BAX| = |\sphericalangle TQN| = |\sphericalangle TAN|$ gilt (Abbildung L 611143).

Da $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ und $\overline{NQ} \parallel \overline{BC}$ ist, ist $|\sphericalangle QNT| = |\sphericalangle XBA|$.

Demnach sind die Dreiecke ABX und QTN zueinander gegensinnig ähnlich, und es gilt

$$\frac{|BX|}{|NT|} = \frac{c}{|QN|}\,.$$

Da nach Konstruktion des Punktes Q

$$|QN| = \frac{bc}{a}$$

gilt, folgt

$$\frac{|BX|}{|NT|} = \frac{a}{b}\,. \tag{1}$$

Die Parallele zur Strecke $\overline{AC}$ durch den Punkt X schneide die Strecke $\overline{AB}$ im Punkt Y.

Aufgrund des Strahlensatzes (Zentrum B) gilt

$$\frac{|BX|}{|XY|} = \frac{a}{b}\,.$$

Mit (1) folgt also

$$|NT| = |XY|\ . \tag{2}$$

Da außerdem $\sphericalangle XYA$ und $\sphericalangle ANT$ als gegenüberliegende Winkel in einem Parallelogramm gleich groß sind und $|\sphericalangle YAX| = |\sphericalangle BAX| = |\sphericalangle TAN|$ gilt, sind die Dreiecke AYX und ATN zueinander kongruent. Somit ist

$$|AY| = |AN| = \frac{b}{2}\,.$$

Folglich ist

$$|BY| = c - |AY| = c - \frac{b}{2}\,,$$

und zusammen mit

$$\frac{|XY|}{|BY|} = \frac{b}{c} \quad \text{(Strahlensatz mit Zentrum } B\text{)}$$

sowie (2) folgt

$$|NT| = |XY| = |BY| \cdot \frac{b}{c} = \left(c - \frac{b}{2}\right) \cdot \frac{b}{c} = \frac{2bc - b^2}{2c}\,.$$

Hiernach ist

$$|MN| \cdot |MT| = |MN| \cdot (|MN| - |NT|) = \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{c}{2} - \frac{2bc - b^2}{2c}\right) = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2\,.$$

Der Inkreis des Dreiecks ABC berühre die Seite $\overline{BC}$ im Punkt D. Dann ist

$$|CD| = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}\,.$$

Somit gilt

$$|DM| = \left|\frac{a}{2} - |CD|\right| = \left|\frac{a}{2} - \frac{a+b-c}{2}\right| = \left|\frac{c-b}{2}\right|\,.$$

Man beachte, dass der Betrag erforderlich ist, da die Punkte M und D auch in umgekehrter Reihenfolge auf der Strecke $\overline{CB}$ liegen können.

Zusammengefasst gilt

$$|DM|^2 = |MT| \cdot |MN|\ .$$

Aufgrund der Umkehrung des Sekanten-Tangenten-Satzes ist MD eine Tangente an den Kreis durch die Punkte N, T und D, der somit die Gerade BC in D berührt. Da der Inkreis des Dreiecks ABC die Gerade BC ebenfalls in D berührt, berühren sich auch der Inkreis und der Kreis durch die Punkte N, T und D in D, womit dieser alle geforderten Eigenschaften besitzt und die Existenz eines solchen Kreises bewiesen ist.

Olympiadeklasse 11

61. Mathematik-Olympiade
4. Runde (Bundesrunde)
Lösungen – 2. Tag

611144 Lösung *6 Punkte*

Erste Lösung: Wie sofort zu sehen ist, ist das Quadrupel $(x, y, u, v) = (0, 0, 0, 0)$ eine Lösung der gegebenen Gleichung

$$x^2 + 10y^2 = 2u^2 + 5v^2\,. \tag{1}$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass es keine andere Lösung gibt.

1. Wir nehmen dazu an, dass eine ganzzahlige Lösung (x, y, u, v) mit

$$s = |x| + |y| + |u| + |v| > 0$$

existiert. Weil s eine positive ganze Zahl ist, gibt es unter allen solchen Lösungen eine mit dem kleinstmöglichen Wert von s. Wir betrachten nun eine solche minimale Lösung (x, y, u, v).

2. Weil die gegebene Gleichung (1) zu

$$x^2 - 2u^2 = 5\,(v^2 - 2y^2) \tag{2}$$

äquivalent ist, muss $x^2 - 2u^2$ durch 5 teilbar sein. Die Tabelle

$x \equiv$	0	1	2	3	4	(mod 5)
$x^2 \equiv$	0	1	-1	-1	1	(mod 5)

der Reste der Quadratzahlen bei Division durch 5 zeigt, dass x^2 nur die Reste 0, 1 oder -1 annehmen kann. Somit kann $2u^2$ nur die Reste 0, 2 und -2 annehmen. Durch Betrachtung der möglichen Kombinationen sieht man, dass die Differenz $x^2 - 2u^2$ nur dann durch 5 teilbar ist, wenn dies bereits für x und u gilt. Es gibt also ganze Zahlen x' und u' mit $x = 5x'$ und $u = 5u'$. Setzt man dies in (2) ein, folgt

$$25x'^2 - 50u'^2 = 5\,(v^2 - 2y^2)\,,$$

also

$$v^2 - 2y^2 = 5x'^2 - 10u'^2\,.$$

Das Quadrupel (v, u', y, x') ist also ebenfalls eine Lösung von (1).

3. Ist $x = u = 0$, so folgt aus (2) die Gültigkeit von $v^2 = 2y^2$. Weil vorausgesetzt wurde, dass nicht alle Variablen Null sein sollen, müssen v und y von Null verschiedene ganze Zahlen sein. Für diese würde dann $|v|\,/\,|y| = \sqrt{2}$ gelten, was wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ unmöglich ist.

4. Nach dem vorangehenden Schritt ist (wenigstens) eine der Zahlen x oder u ungleich Null, also $|x'| + |u'| < |x| + |u|$. Für das Lösungsquadrupel (v, u', y, x') gilt deshalb

$$0 < s' = |v| + |u'| + |y| + |x'| < |x| + |y| + |u| + |v| = s\,,$$

was der angenommenen Minimalität von s widerspricht.

Damit ist gezeigt, dass $(0,0,0,0)$ die einzige ganzzahlige Lösung der gegebenen Gleichung ist.

Bemerkung 1: Um von $5 \mid (x^2 - 2u^2)$ auf $5 \mid x$ und $5 \mid u$ zu schließen, kann man auch den kleinen Satz von Fermat anwenden. Wäre nämlich eine der Zahlen x oder u (und damit auch die andere) nicht durch die Primzahl 5 teilbar, wären beide Zahlen zu 5 teilerfremd. Aus $x^2 \equiv 2u^2 \pmod 5$ würde dann durch Quadrieren folgen

$$1 \equiv x^4 \equiv 4u^4 \equiv 4 \qquad (\mathrm{mod}\ 5)\,.$$

Bemerkung 2: Statt $|x| + |u| > 0$ nachzuweisen, kann man auch den Schluss aus dem zweiten Schritt nochmals anwenden. Dies zeigt, dass $(x', y', u', v') = (x/5, y/5, u/5, v/5)$ ebenfalls eine Lösung ist, für die dann $0 < s' = s/5 < s$ gelten würde.

Bemerkung 3: Neben $s = |x| + |y| + |u| + |v|$ gibt es weitere geeignete Bewertungsfunktionen. Verwendet man beispielsweise

$$s_1 = |x| + 2\,|y| + |u| + 2\,|v| > 0\,,$$

erhält man für die Lösung (v, u', y, x') sofort den Wert

$$s_1' = |v| + 2\,|u'| + |y| + 2\,|x'| = |v| + \frac{2}{5}\,|u| + |y| + \frac{2}{5}\,|x| \le \frac{1}{2} s_1 < s_1\,.$$

Auf den Nachweis von $|x| + |u| > 0$ kann dann verzichtet werden.

Auch die Bewertungsfunktion $s_2 = |x^2 - 2u^2| + 2\,|v^2 - 2y^2|$ besitzt eine ähnliche Eigenschaft.

Zweite Lösung: Um zu beweisen, dass es keine von $(0,0,0,0)$ verschiedenen Lösungen gibt, sei (x, y, u, v) ein Lösungsquadrupel mit minimalem positiven

$$s = |x| + |y| + |u| + |v| > 0\,.$$

Fall 1: x ist ungerade. Dann ist die linke Seite von (1) ungerade. Damit die rechte Seite ebenfalls ungerade wird, muss v ungerade sein. Demnach gilt $x^2 \equiv v^2 \equiv 1 \pmod 8$, also

$$10y^2 - 2u^2 = 5v^2 - x^2 \equiv 4 \pmod 8$$

und weiter

$$2(y^2 - u^2) \equiv 4 \quad (\mathrm{mod}\ 8)\,,$$

was $y^2 - u^2 \equiv 5y^2 - u^2 \equiv 2 \pmod 4$ nach sich zieht. Da Quadratzahlen modulo 4 immer zu 0 oder 1 kongruent sind, ist dies unmöglich. Fall 1 kann also gar nicht eintreten.

Fall 2: x ist gerade. Aus der gegebenen Gleichung folgt, dass v nun ebenfalls gerade sein muss. Es seien x' und v' diejenigen ganzen Zahlen, die $x = 2x'$ beziehungsweise $v = 2v'$ erfüllen. Aus $(2x')^2 + 10y^2 = 2u^2 + 5(2v')^2$ folgt dann

$$u^2 + 10v'^2 = 2x'^2 + 5y^2\,,$$

d. h. das Quadrupel (u, v', x', y) löst die gegebene Gleichung ebenfalls. Infolge der vorausgesetzten Minimalität von s haben wir nun

$$s' = |u| + \frac{1}{2}\,|v| + \frac{1}{2}\,|x| + |y| \le |x| + |y| + |u| + |v| = s\,, \tag{3}$$

woraus $x = v = 0$ folgt. Damit nimmt die gegebene Gleichung die Gestalt $5y^2 = u^2$ an. Da $\sqrt{5}$ irrational ist, müssen y und u ebenfalls verschwinden, womit wir bei dem Widerspruch $(x, y, u, v) = (0,0,0,0)$ angekommen sind.

Bemerkung: Wenn man statt s die Größe

$$s_3 = 2\,|x| + 3\,|y| + 3\,|u| + 2\,|v|$$

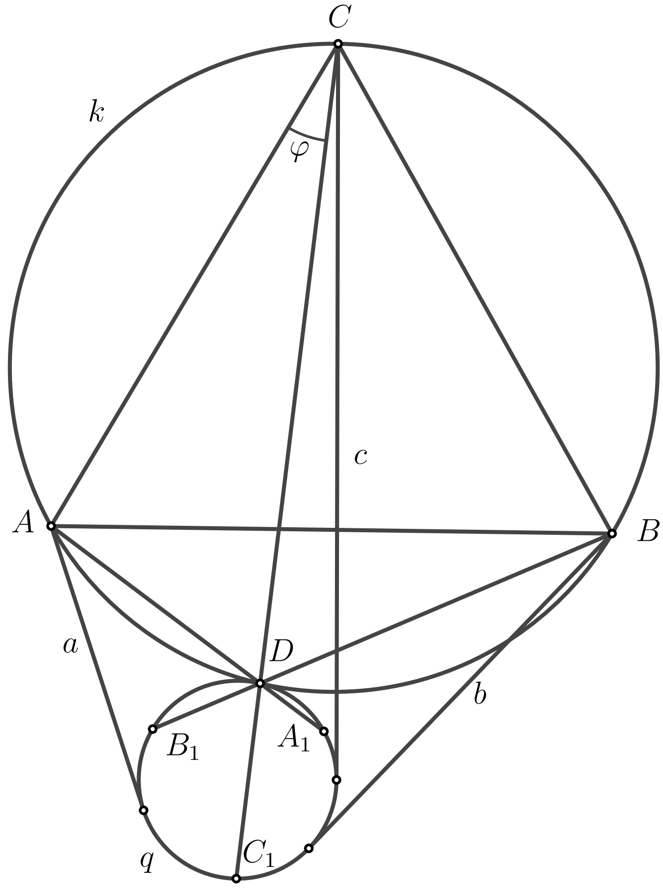
betrachtet, erhält man für die Lösung $(u, v/2, x/2, y)$ anstelle von (3)

$$s_3' = 2\,|u| + \frac{3}{2}\,|v| + \frac{3}{2}\,|x| + 2\,|y| \leq s_3 = 2\,|x| + 3\,|y| + 3\,|u| + 2\,|v|$$

und damit sofort $(x, y, u, v) = (0, 0, 0, 0)$.

611145 Lösung *7 Punkte*

Erste Lösung:



L 611145

Von einem Punkt existieren zwei Tangenten an einen Kreis. Diese haben gleich lange Tangentenabschnitte. Daher spielt es keine Rolle, welche der beiden Tangenten betrachtet wird.

Die Geraden AD, BD und CD schneiden den Kreis q außer in D jeweils in einem weiteren Punkt, den wir mit A_1, B_1 bzw. C_1 bezeichnen, vgl. Abbildung L 611145. Die Radien der Kreise k und q seien R bzw. r.

Aufgrund des Sekanten-Tangenten-Satzes gelten dann die Beziehungen

$$a^2 = |AD| \cdot |AA_1| \;, \tag{1}$$
$$b^2 = |BD| \cdot |BB_1| \tag{2}$$

und

$$c^2 = |CD| \cdot |CC_1| \;. \tag{3}$$

Weiterhin berührt der Kreis q den Kreis k in D von außen. Das bedeutet, die zentrische Streckung mit Zentrum D und dem negativen Verhältnis der Kreisradien $(-r/R)$ als Streckungsfaktor überführt den Kreis k in den Kreis q. Dabei sind folglich A_1, B_1 und C_1 die Abbilder von A, B bzw. C.

Dies zeigt, dass $|DA_1| = |AD| \cdot r/R$, $|DB_1| = |BD| \cdot r/R$ und $|DC_1| = |CD| \cdot r/R$ gelten sowie damit

$$|AA_1| = |AD| + |DA_1| = |AD| + |AD| \cdot \frac{r}{R} = |AD| \cdot \frac{r+R}{R},$$
$$|BB_1| = |BD| + |DB_1| = |BD| + |BD| \cdot \frac{r}{R} = |BD| \cdot \frac{r+R}{R}$$

und

$$|CC_1| = |CD| + |DC_1| = |CD| + |CD| \cdot \frac{r}{R} = |CD| \cdot \frac{r+R}{R}.$$

Zusammen mit den Gleichungen (1), (2) und (3) ergibt sich also

$$a = |AD| \cdot \sqrt{\frac{r+R}{R}}, \qquad b = |BD| \cdot \sqrt{\frac{r+R}{R}}, \qquad c = |CD| \cdot \sqrt{\frac{r+R}{R}}$$

und somit die Äquivalenz der Behauptung $a + b = c$ zur Beziehung $|AD| + |BD| = |CD|$.

Um diese zu zeigen, wird jetzt noch beachtet, dass nach dem Satz des Ptolemäus im Sehnenviereck $ADBC$ die Gleichheit

$$|AD| \cdot |BC| + |BD| \cdot |CA| = |CD| \cdot |AB| \tag{4}$$

gilt. Es ist nun aber das Dreieck ABC gleichseitig, das heißt, die Gleichheit

$$|BC| = |CA| = |AB|$$

ist bekannt. Damit liefert (4) die zur Behauptung äquivalente Beziehung $|AD|+|BD| = |CD|$, womit die Behauptung $a + b = c$ bewiesen ist.

Zweite Lösung: Es werden die Bezeichnungen wie in der ersten Lösung verwendet. Die Beziehungen (1), (2) und (3) werden wie dort hergeleitet, ebenso die Tatsache, dass A_1, B_1 und C_1 die Abbilder von A, B bzw. C unter der zentrischen Streckung mit Zentrum D und dem Streckungsfaktor $(-r/R)$ sind.

Es sei nun $|\sphericalangle ACD| = \varphi$. Dann gilt $|\sphericalangle DCB| = 60°-\varphi$. Da $\sphericalangle ACD$ und $\sphericalangle ABD$ Umfangswinkel über der Sehne $\overline{AD}$ sind, gilt auch $|\sphericalangle ABD| = \varphi$ und folglich $|\sphericalangle CBD| = 60°+\varphi$. Der erweiterte Sinussatz zeigt damit

$$|AD| = 2R\sin\varphi\,, \quad |BD| = 2R\sin(60° - \varphi) \quad \text{und} \quad |CD| = 2R\sin(60° + \varphi)\,.$$

Weiterhin ist das Dreieck $A_1B_1C_1$ als Abbild des Dreiecks ABC unter einer zentrischen Streckung wiederum gleichseitig, und es gilt $|\sphericalangle A_1C_1D| = \varphi$. Somit findet man in analoger Weise

$$|DA_1| = 2r\sin\varphi\,, \quad |DB_1| = 2r\sin(60° - \varphi) \quad \text{und} \quad |DC_1| = 2r\sin(60° + \varphi)\,.$$

Aufgrund von (1), (2) und (3) ergibt dies nun

$$a^2 = |AD| \cdot (|AD| + |DA_1|) = 4R(R + r)\,\sin^2\varphi\,,$$
$$b^2 = |BD| \cdot (|BD| + |DA_1|) = 4R(R + r)\,\sin^2(60° - \varphi)$$

und

$$c^2 = |CD| \cdot (|CD| + |DC_1|) = 4R(R+r)\,\sin^2(60^\circ + \varphi)\,,$$

also

$$\begin{aligned} a &= 2\,\sqrt{R(R+r)}\,\sin\varphi\,,\\ b &= 2\,\sqrt{R(R+r)}\,\sin(60^\circ - \varphi) \end{aligned}$$

und

$$c = 2\,\sqrt{R(R+r)}\,\sin(60^\circ + \varphi)\,.$$

Da nach den Additionstheoremen

$$\sin(60^\circ + \varphi) - \sin(60^\circ - \varphi) = 2\cos 60^\circ \sin\varphi$$

gilt und $\cos 60^\circ = 1/2$ ist, folgt $c - b = a$, also die Behauptung.

611146 Lösung *7 Punkte*

Teil a) Die Funktion $f(x) = x^2$ erfüllt die Bedingungen (1) bis (4), denn für alle reellen Zahlen x und y ist

$$f(xy) = (xy)^2 = x^2\,y^2 = f(x)\,f(y)$$

und wegen $0 \le (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ auch

$$f(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \le 2\,(x^2 + y^2) = 2\,\big(f(x) + f(y)\big)\,.$$

Schließlich gilt $f(2) = 2^2 = 4$.

Die in Teilaufgabe a) verlangte Eigenschaft $f(3) = 9$ ist ebenfalls erfüllt.

Teil b) Es sei nun f eine beliebige Funktion mit den Eigenschaften (1), (2), (3) und (4).

Erster Schritt: Aus (2) folgt für alle $x \ge 0$ die Ungleichung $f(x) = f(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}) = \big(f(\sqrt{x})\big)^2 \ge 0$. Wegen $f(0) = f(2\cdot 0) = f(2)f(0) = 4f(0)$ gilt weiterhin

$$f(0) = 0\,. \tag{5}$$

Ebenso zeigt $4 = f(2) = f(2\cdot 1) = f(2)f(1) = 4f(1)$, dass

$$f(1) = 1 \tag{6}$$

gelten muss.

Zweiter Schritt: Für jede nichtnegative ganze Zahl n ist $f(2^n) = 4^n$.

In der Tat ist die Behauptung wegen (6) für $n = 0$ wahr. Mithilfe von

$$f\big(2^n\big) = f\big(2 \cdot 2^{n-1}\big) = f(2) \cdot f\big(2^{n-1}\big) = 4f\big(2^{n-1}\big)$$

schließt man rekursiv für $n = 1, 2, \ldots$ auf

$$f\big(2^n\big) = 4^n\,. \tag{7}$$

Dritter Schritt: Ist M eine Zweierpotenz, so gilt für alle reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_M$ die Ungleichung $f\big(x_1 + x_2 + \cdots + x_M\big) \le M\big(f\big(x_1\big) + f\big(x_2\big) + \cdots + f\big(x_M\big)\big)$.

In der Tat stimmt die Behauptung sicher für $M = 1$, und wenn sie für die Zahl $M/2$ als richtig bekannt ist, dann erhält man unter Benutzung von (3)

$$\begin{aligned} f\big(x_1 + x_2 + \cdots + x_M\big) &\le 2\big(f(x_1 + \cdots + x_{M/2}) + f(x_{M/2+1} + \cdots + x_M)\big) \\ &\le 2\left(\frac{M}{2}\big(f(x_1) + \cdots + f(x_{M/2})\big) + \frac{M}{2}\big(f(x_{M/2+1}) + \cdots + f(x_M)\big)\right) \\ &= M\Big(f\big(x_1\big) + f\big(x_2\big) + \cdots + f\big(x_M\big)\Big)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Vierter Schritt: Für jede positive ganze Zahl m gilt $f(m) < 2m^2$.

Ist nämlich m eine positive ganze Zahl, so gibt es eine nichtnegative ganze Zahl n mit $2^{n-1} < m \le 2^n$. Schreibt man m als Summe von m Einsen und $(2^n - m)$ Nullen, dann folgt aus (8) zusammen mit (6) und (5)

$$f(m) \le 2^n\big(m\,f(1) + (2^n - m)\,f(0)\big) = 2^n m = 2\cdot 2^{n-1} m < 2m^2\,. \tag{9}$$

Fünfter Schritt: Schlussfolgerung.

Bezeichnet k eine nichtnegative ganze Zahl, so kann man wie im zweiten Schritt durch iterative Verwendung von (2) die Gleichung $f(3)^k = f(3^k)$ zeigen. Zusammen mit der Abschätzung aus dem vorigen Schritt zeigt dies $f(3)^k < 2 \cdot 9^k$, d. h.

$$f(3) < \sqrt[k]{2} \cdot 9\,. \tag{10}$$

Da $\sqrt[k]{2}$ im Limes $k \to \infty$ gegen 1 geht, existiert für $f(3)$ kein möglicher Wert größer als 9, für den die Ungleichung (10) für alle k erfüllt ist.

Somit folgt die Behauptung $f(3) \le 9$.

Bemerkungen: 1. Im fünften Schritt kann man statt der Grenzwertüberlegung auch wie folgt argumentieren:

Angenommen, es wäre $f(3) > 9$. Wähle eine positive ganze Zahl k mit

$$k > \frac{9}{f(3) - 9}\,.$$

Die Bernoulli'sche Ungleichung impliziert $\big(1 + \frac{1}{k}\big)^k \ge 2$. Dies führt auf den Widerspruch

$$f(3) \overset{(10)}{<} 9\left(1 + \frac{1}{k}\right) = 9 + \frac{9}{k} < 9 + \big(f(3) - 9\big) = f(3)\,.$$

Dies zeigt, dass $f(3) \le 9$ doch gelten muss.

2. Es ist möglich, erheblich schärfere Aussagen zu zeigen als die Behauptung der Aufgabenstellung.

a) Zunächst einmal gilt für alle nichtnegativen reellen Zahlen a und b die Ungleichung

$$f(a + b) \le \Big(\sqrt{f(a)} + \sqrt{f(b)}\Big)^2\,. \tag{11}$$

Um dies zu zeigen, betrachte man eine beliebige natürliche Zahl n und setze $k = 2^n - 1$. Nun erhält man

$$\begin{aligned} f(a+b)^k &= f\big((a+b)^k\big) = f\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^i b^{k-i}\right) \le (k+1)\sum_{i=0}^{k} f\left(\binom{k}{i}a^i b^{k-1}\right) \\ &\le (k+1)\sum_{i=0}^{k} f\left(\binom{k}{i}\right) f(a)^i f(b)^{k-i} \le 2(k+1)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}^2 f(a)^i f(b)^{k-i} \\ &\le 2(k+1)\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} f(a)^{i/2} f(b)^{(k-i)/2}\right)^2 = 2(k+1)\Big(\sqrt{f(a)}+\sqrt{f(b)}\Big)^{2k}, \end{aligned}$$

also

$$f(a+b) \le \sqrt[k]{2(k+1)}\Big(\sqrt{f(a)}+\sqrt{f(b)}\Big)^2,$$

was im Limes $n \to \infty$ auf (11) führt.

b) Aus (11) erhält man dann unmittelbar $f(3) = 9$, weil die Annahme $f(3) < 9$ zusammen mit $f(1) = 1$ sofort $f(4) < 16$ und damit einen Widerspruch zu (7) nach sich zöge.

Auf dieselbe Art lässt sich mit (11) und (7) auch $f(n) = n^2$ für alle positiven ganzen Zahlen n zeigen. Eine nochmalige Anwendung von (2) liefert schließlich $f(x) = x^2$ für alle rationalen Zahlen $x \ge 0$.

c) Es ist

$$f(-1) = 1\,.$$

In der Tat liefert (2) zunächst $f(-1)^2 = f\big((-1)^2\big) = f(1) = 1$, also $f(-1) = \pm 1$. Die Annahme $f(-1) = -1$ hat aber wegen (3), (5) und (6) den Widerspruch

$$-1 = f(-1) = f\big(0+(-1)\big) \le 2\,\big(f(0)+f(-1)\big) = 2\cdot(0-1) = -2$$

zur Folge. Eine abermalige Anwendung von (2) zeigt jetzt $f(x) = x^2$ für alle rationalen Zahlen x.

3. Man könnte vermuten, die einzige Funktion, die den Bedingungen (1), (2), (3) und (4) genügt, wäre f mit $f(x) = x^2$ für alle reellen Zahlen x. Diese Vermutung ist jedoch *falsch.* Die Existenz weiterer Lösungen lässt sich beispielsweise wie folgt nachweisen.

Wie man unmittelbar nachrechnen kann, bilden alle reellen Zahlen der Form

$$a + b\sqrt{2} \tag{12}$$

mit rationalen Zahlen a und b einen *Körper* $\mathbb{K}$. Dies bedeutet, dass Summen, Differenzen und Produkte von Zahlen der Form (12) wieder von der Form (12) sind und dass der Kehrwert jeder von Null verschiedenen Zahl der Form (12) ebenfalls von der Form (12) ist. Offenbar sind alle rationalen Zahlen in dem Körper $\mathbb{K}$ enthalten.

Die Selbstabbildung φ des Körpers $\mathbb{K}$, die

$$a + b\sqrt{2} \quad \text{auf} \quad a - b\sqrt{2}$$

abbildet, hat nun die Eigenschaften, dass

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{und} \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \tag{13}$$

für alle $x \in \mathbb{K}$ gelten. Auch dies rechnet man unmittelbar nach. Die Abbildung φ ist ein sogenannter *Automorphismus* von $\mathbb{K}$.

Wie nun zum Beispiel von P. Yale in [Automorphisms of the complex numbers, Math. Mag. 39(1966), 135–141, Theorem 7] gezeigt wird, lässt sich φ unter Erhaltung der Eigenschaften (13) auf den Körper aller komplexen Zahlen fortsetzen.

Mit einer solchen Fortsetzung von φ setzen wir für alle reellen Zahlen x

$$f(x) = |\varphi(x)|^2 ,$$

wobei mit $|z|$ der Betrag einer komplexen Zahl z bezeichnet wird. Es gilt dann offenbar $f(xy) = f(x)\,f(y)$ für alle reellen Zahlen x und y sowie $f(2) = 4$. Weiterhin ist auch

$$\begin{aligned} f(x+y) &= |\varphi(x+y)|^2 = |\varphi(x)+\varphi(y)|^2 \le \big(|\varphi(x)| + |\varphi(y)|\big)^2 \\ &= |\varphi(x)|^2 + |\varphi(y)|^2 + 2\,|\varphi(x)|\,|\varphi(y)| \le 2\big(|\varphi(x)|^2 + |\varphi(y)|^2\big) \\ &= 2\,\big(f(x) + f(y)\big) \end{aligned}$$

für alle reellen Zahlen x und y, was zeigt, dass f tatsächlich den Bedingungen (1) bis (4) genügt. Es gilt jedoch nach Konstruktion zum Beispiel

$$f(1+\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2})^2 \neq (1+\sqrt{2})^2 .$$

4. Unter der Zusatzvoraussetzung der Stetigkeit von f kann man auf die Bedingung (3) verzichten und erhält wie folgt $f(x) = x^2$ als einzige Lösung im Bereich $x > 0$: Wir wissen bereits, dass $f(x) \ge 0$ für alle $x \ge 0$ gilt. Für $x > 0$ gilt sogar $f(x) > 0$, denn es ist $f(2) = f(x) \cdot f(2/x) \neq 0$. Die stetige Funktion $g(x) = \log_2 f(2^x)$ erfüllt offenbar die Cauchy'sche Funktionalgleichung $g(x+y) = g(x) + g(y)$ für alle reellen x und y sowie die Bedingung $g(1) = 2$. Hieraus folgt $g(x) = 2x$ für alle reellen x und schließlich $f(x) = x^2$ für alle $x > 0$.

Auch mit der Voraussetzung der Stetigkeit kann aber ohne (3) nicht $f(-1) = 1$ gezeigt werden, denn auch $f(x) = \operatorname{sgn}(x)x^2 = x \cdot |x|$ ist eine stetige Funktion, die die Bedingungen der Aufgabe außer (3) erfüllt. Neben den beiden genannten gibt es keine weiteren Funktionen mit diesen Eigenschaften.