Prof. Dr. Titus Dose
Fakultät für Informatik und Mathematik
OTH Regensburg

Probeklausur – Theoretische Informatik

1 Berechenbarkeit — 28 Punkte

1.1 Verschiedenes — 9 Punkte

1. Geben Sie die Church-Turing-These an! — 2 Punkte

   Solution: Jede im intuitiven Sinne berechenbare Funktion is Turing-berechenbar.

2. Aus welchem Grund wird die Church-Turing-These allgemein akzeptiert? — 3 Punkte

   Solution: Der Grund hierfür ist, dass alle bisher definierten, sinnvollen Berechnungsmodelle (u.a. die Turingmaschine) genau die gleiche Berechnungsstärke haben. Dies unterstützt die Annahme, dass wir mit den bisherigen Berechnungsmodellen das getroffen haben, was Berechenbarkeit im intuitiven Sinne ist.

3. Berechnen Sie die dyadische Darstellung von 45 (dezimal dargestellt) — 2 Punkte

   Solution: 12221

4. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Geben Sie eine kurze Begründung an! — 2 Punkte
   Eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist genau dann RAM-berechenbar, wenn es eine RAM ohne indirekte Adressierung gibt, die f berechnet.

   Solution: Die Aussage stimmt. Eine Funktion, die von einer RAM ohne indirekte Adressierung berechnet wird, wird insbesondere von einer RAM berechnet und ist somit RAM-berechenbar. Umgekehrt: Ist eine Funktion RAM berechenbar, so lässt sich diese mittels der Konstruktion aus der Vorlesung durch ein Python-Programm simulieren, welches wiederum mit den Verfahren aus der Vorlesung in ein While-Programm, Mini-While-Programm und eine RAM umgewandelt werden kann. Unser Beweis für die Umwandlung eines Mini-While-Programms in ein RAM-Programm kommt dabei ohne indirekte Adressierung aus.

1.2 Registermaschinen — 9 Punkte

Geben Sie das kommentierte Programm einer RAM an, welche die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ ist ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechnet.

Solution:

```
0 R1 <- 1
1 R3 <- 2
2 R2 <- R0 - R1
3 IF R2 = 0 GOTO 6
4 R0 <- R0 - R3
5 GOTO 2
```

1.3 Satz von Rice — 10 Punkte

Es sei $M_0, M_1, \ldots$ die aus der Vorlesung bekannte Gödelisierung (Gödel numbering) aller RAMs. Beweisen Sie, dass folgende Sprache unentscheidbar ist!

$$A = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{auf jeder Eingabe } x\text{, auf der } M_i \text{ hält, liefert } M_i \text{ den Wert } x+1\}$$

Solution: Sei $S = \{f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f$ berechenbar und für alle $x \in D_f$ gilt $f(x) = x + 1\}$. Somit ist S nicht leer, weil die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = x+1$ in S ist. Weiterhin ist S eine echte Teilmenge der Menge aller berechenbaren Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, weil die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = x$ nicht in S ist.
Folglich ist der Satz von Rice anwendbar und die Menge $I(S)$ ist unentscheidbar.
Weiter gilt

$$\begin{aligned} I(S) &= \{i \in \mathbb{N} \mid \text{die von } M_i \text{ berechnete Funktion ist in } S\} \\ &= \{i \in \mathbb{N} \mid \text{für die von } M_i \text{ berechnete Funktion } f \text{ gilt: } \forall_{x \in D_f} f(x) = x + 1\} \\ &= \{i \in \mathbb{N} \mid \text{auf jeder Eingabe } x\text{, auf der } M_i \text{ hält, liefert } M_i \text{ den Wert } x + 1\} \\ &= A, \end{aligned}$$

weswegen auch A unentscheidbar ist.

2 Automaten 22 Punkte

2.1 Reguläre Ausdrücke 6 Punkte

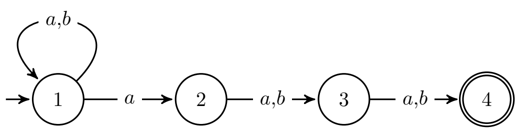
Geben Sie einen regulären Ausdruck α an, sodass

$$L(\alpha) = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{in } w \text{ kommt mindestens ein } a \text{ und mindestens zwei } b\text{'s vor}\}.$$

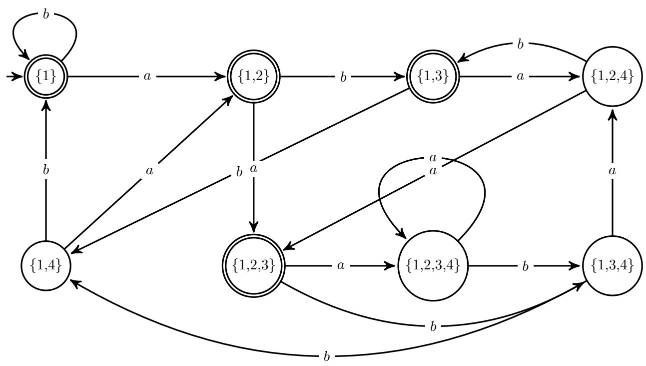
Solution: $(a + b)^*a(a + b)^*b(a + b)^*b(a + b)^* + (a + b)^*b(a + b)^*a(a + b)^*b(a + b)^* + (a + b)^*b(a + b)^*b(a + b)^*a(a + b)^*$

2.2 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen 10 Punkte

Unten finden Sie die Zeichnung eines endlichen Automaten A über dem Alphabet $\{a, b\}$. Geben Sie einen endlichen Automaten (deterministisch oder nichtdeterministisch) an, der die Menge $\{a, b\}^* - L(A)$ akzeptiert. Zeichnen Sie den resultierenden Automaten und geben Sie ihn als 5-Tupel an.



Solution: Wir erzeugen mittels Potenzmengenkonstruktion einen äquivalenten DFA, bei dem wir dann das Akzeptanzverhalten eines jeden Zustandes ändern. Somit erhalten wir den Automaten



Dieser Automat lässt sich in Tupelschreibweise wie folgt schreiben:

$(\{a, b\}, \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}, \delta, \{1\}, \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\})$

mit

$$\delta(s,e) = \begin{cases} \{1\} & \text{falls } e = b \text{ und } s \in \{\{1\},\{1,4\}\} \\ \{1,2\} & \text{falls } e = a \text{ und } s \in \{\{1\},\{1,4\}\} \\ \{1,3\} & \text{falls } e = b \text{ und } s \in \{\{1,2\},\{1,2,4\}) \\ \{1,2,4\} & \text{falls } e = a \text{ und } s \in \{\{1,3\},\{1,3,4\}\} \\ \{1,4\} & \text{falls } e = b \text{ und } s \in \{\{1,3\},\{1,3,4\}\} \\ \{1,2,3\} & \text{falls } e = a \text{ und } s \in \{\{1,2\},\{1,2,4\}\} \\ \{1,2,3,4\} & \text{falls } e = a \text{ und } s \in \{\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}\} \\ \{1,3,4\} & \text{falls } e = b \text{ und } s \in \{\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}\} \end{cases}$$

2.3 Umwandeln eines Automaten in eine rechtslineare Grammatik — 6 Punkte

Geben Sie für den DFA aus Aufgabe 2.2 eine rechtslineare Grammatik an, welche die vom Automaten akzeptierte Sprache erzeugt.

Solution: $G = (\{a,b\},\{1,2,3,4\},1,\{1 \to a1, 1 \to b1, 1 \to a2, 2 \to a3, 2 \to b3, 3 \to a4, 3 \to b4, 3 \to a, 3 \to b\})$

3 Generative Grammatiken — 24 Punkte

3.1 Erstellen einer kontextfreien Grammatik — 14 Punkte

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache

$$L = \{vw \mid v,w \in \{a,b\}^*, |v| = |w|, v \neq w\}$$

an.
Begründen Sie kurz, warum Ihre Grammatik die Sprache L erzeugt.
Tipp: Ein Wort w der Länge $2n$ ist genau dann in L, wenn es ein i gibt, sodass der i-te Buchstabe vom $n+i$-ten Buchstaben verschieden ist. Betrachten Sie für ein solches Wort zwei Teilwörter, von denen eines den i-ten (bzw. $n+i$-ten) Buchstaben in der Mitte haben.

Solution: Betrachte die kontextfreie Grammatik $G = (\{a,b\},\{S,A,B\},S,R)$, wobei R die folgenden Regeln enthält.

$$\begin{array}{cccc} S \to AB & S \to BA & A \to a & B \to b \\ A \to aAa & A \to aAb & A \to bAa & A \to bAb \\ B \to aBa & B \to aBb & B \to bBa & B \to bBb \end{array}$$

Jedes Wort w der Sprache L hat gerade Länge (sagen wir: $2n$) und ein i, sodass der i-te Buchstabe vom $n+i$-ten verschieden ist.
Der i-te Buchstabe liegt in der Mitte des Präfixes der Länge $2i-1$ von w.
Der $n+i$-te Buchstabe liegt in der Mitte des restlichen Wortes von w (das restliche Wort hat $2n-2i+1$ Buchstaben und hinter dem $n+i$-ten Buchstaben gibt es $2n-(n+i) = n-i$ weitere Buchstaben).

In obiger Grammatik können aus A (bzw. B) heraus genau die Wörter ungerader Länge erzeugt werden, die in der Mitte ein a (bzw. b) haben. Somit erzeugt die Grammatik die Sprache L.

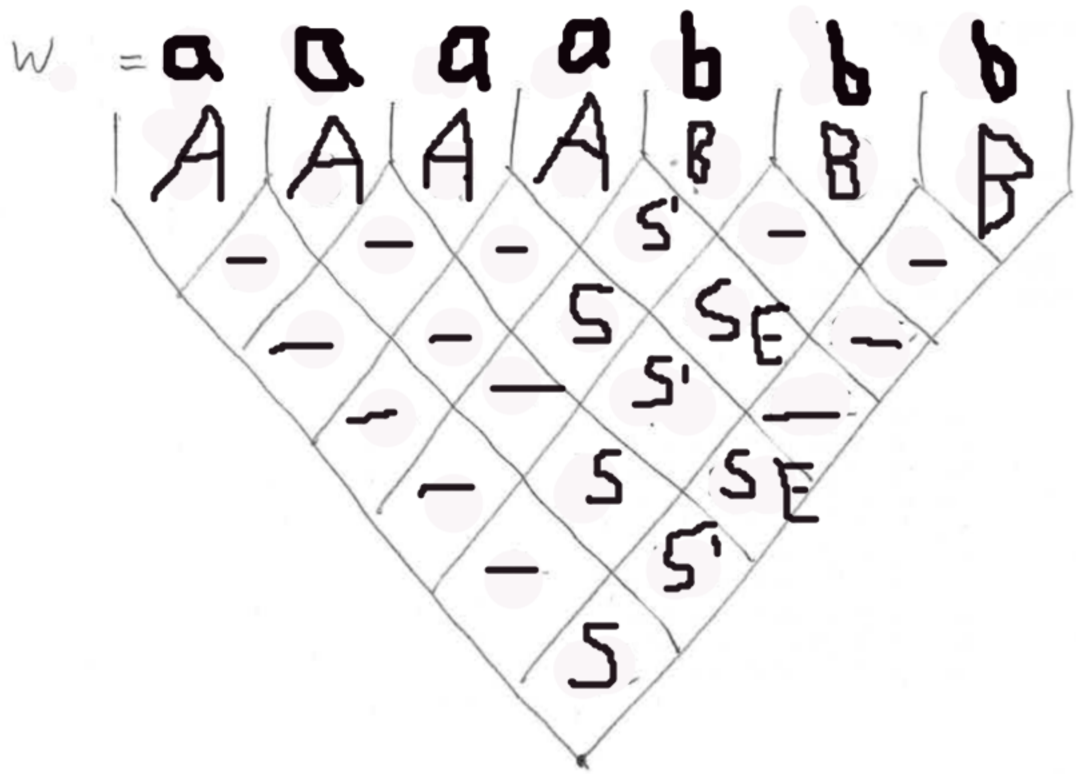
3.2 CYK-Algorithmus — 10 Punkte

Gegeben sei die Grammatik $G = (\{a,b\},\{S,S',A,B,E\},S,R)$ mit

$$R = \{S \to S'B,\ S \to AS',\ S' \to AE,\ S' \to AB,\ E \to S'B,\ A \to a,\ B \to b\}$$

und das Wort $w = aaaabbb$. Wenden Sie den CYK-Algorithmus in nachvollziehbarer Weise an, um zu testen, ob G das Wort w erzeugt. Geben Sie eine Folge von Regeln dafür an, wie das Wort aus S erzeugt werden kann.

Solution:



Ein Weg zur Erzeugung ist

$$S \Rightarrow_G AS' \Rightarrow_G AAE \Rightarrow_G AAS'B \Rightarrow_G AAAEB \Rightarrow_G AAAS'BB \Rightarrow_G \Rightarrow_G AAAABBB \stackrel{*}{\Rightarrow}_G aaaabbb$$

4 Verständnis der Beweise — 16 Punkte

Die folgende Aufgabe ist schwieriger als die anderen und wird strenger korrigiert. Gegeben sei die Sprache $L = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n \neq m\} \subseteq \{a, b\}^*$.

1. Beweisen Sie, dass L nicht regulär ist. Verwenden Sie dabei die Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen. 8 Punkte
2. Beweisen Sie, dass L nicht 3-pumpable ist 8 Punkte

Solution:

1. Es gilt $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \overline{L} \cap a^* b^*$. Die letztgenannte Sprache ist durch einen regulären Ausdruck definiert und somit regulär. Wäre nun $\overline{L}$ regulär, so wäre auch $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, im Widerspruch zu einem in der Vorlesung gezeigten Resultat. Also ist $\overline{L}$ nicht regulär und wegen der Abschlusseigenschaften von REG ist dann auch L nicht regulär.
2. s. Übungsblatt 9.

Grading scheme: roughly 74 points are required for a 1.0, roughly 40 points are required for a 4.0.