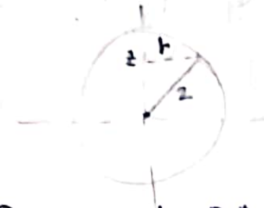
$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge 1\}$. Calcolare $\iiint_V x^2yz\,dx\,dy\,dz$

Notiamo che il dominio di integrazione è una sfera di raggio 2, di cui "prendo" solo la parte a quota maggiore di 1.
Chiamata B_z la sezione a quota z, che risulta essere un cerchio (raggio r) posso applicare il teorema di Fubini-Tonelli calcolando l'integrale per strati

$$\int_1^2 \iint_{B_z} x^2yz\,dx\,dy\,dz$$



$$= \int_1^2 z \iint_{B((0,0,z)),\sqrt{4-z^2})} x^2y\,dx\,dy\,dz$$

Teorema di Pitagora: $r = \sqrt{2^2-z^2}$

Calcolo l'integrale su B_z utilizzando le coordinate polari:

$$\iint_{B_z} \rho^2\cos^2\theta\,\rho\sin\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho^4\cos^2\theta\sin\theta\,d\rho\,d\theta = \left(\int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho^4\,d\rho\right)\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\cdot\sin\theta\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta - \sin^3\theta\,d\theta = 0$$

Non è necessario procedere visto che l'integrale vale zero.
È possibile svolgere l'integrale su B_z anche restando in coord. cartesiane:

$$\iint_{B_z} yx^2\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} x^2 \int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} y\,dy\,dx = \dots = 0$$

Il teorema di Fubini-Tonelli può essere anche applicato per fili:

$$\iint_{B_1} x^2y\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz\,dx\,dy = \dots$$

dove B_1 è la sezione che si ottiene a quota $z=1$

Ad ogni modo è possibile intuire che l'integrale sia nullo prima di calcolarlo: considerata la sezione a quota z, è possibile vedere che per ogni rettangolino infinitesimo ce n'è un altro (simmetrico rispetto all'asse y) che dà identico contributo ma ce ne sono pure altri due (simmetrici rispetto all'asse x) che danno contributo opposto (considerare la simmetria dell'integranda e del dominio).

Un'alternativa all'applicazione del teorema in questo caso è fornita dall'uso delle coordinate sferiche:

$$\iiint_V r^2\cos^2\varphi\cos^2\psi \cdot r^{*}\sin\varphi\cos\varphi \cdot r\sin\psi \cdot r^2\cos\psi \, dr\, d\varphi\, d\psi$$

$$= \iiint_V r^6\cos^2\varphi\sin\varphi \cdot \cos^4\psi\sin\psi \, dr\, d\varphi\, d\psi =$$

$$= \left[\frac{r^7}{7}\right]_0^2 \left[\frac{-\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} \left[\frac{-\cos^5\psi}{5}\right]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$z > 1$

$r\sin\psi > 1$

$\sin\psi > \frac{1}{2}$

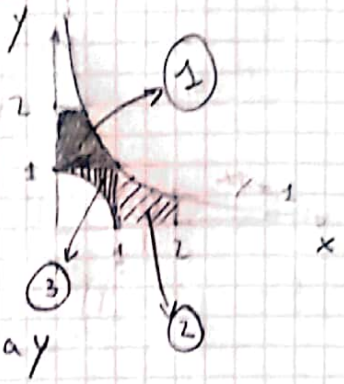
$\psi_{min} = \pi/6$

$\downarrow$

$0!$

$\boxed{E}$

$$\iint_T (x+y)\,dx\,dy \qquad T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x^2+y^2\ge 1,\ xy\le 1,\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\}$$



Parte ① : $\begin{cases} 1<y<2 \\ 0<x<\frac{1}{y} \end{cases}$ normale rispetto a y

$$=\iint_{①}(x+y)\,dx\,dy = \int_1^2\left(\int_0^{\frac{1}{y}} x+y\,dx\right)dy = \int_1^2 \left[xy+\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{y}} dy = \int_1^2\left(1+\frac{1}{2y^2}\right)dy =$$

$$=\left[y+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{y}\right)\right]_1^2 = 2-\frac{1}{4}-1+\frac{1}{2} = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

Parte ② : $\begin{cases} 1<x<2 \\ 0<y<\frac{1}{x} \end{cases}$

$$\iint_{②}(x+y)\,dx\,dy = \int_1^2\left(\int_0^{\frac{1}{x}}(x+y)\,dy\right)dx = \int_1^2 dx\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{x}} = \int_1^2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\left[x-\frac{1}{2x}\right]_1^2 = 2-\frac{1}{4}-1+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$$

Ma si vede anche dal grafico che ① = ②
(dominio e funzione sono simmetrici rispetto a $y=x$)

Parte ③ : $\begin{cases} 0<x<1 \\ \sqrt{1-x^2}<y<1 \end{cases}$

$$\iint_{③}(x+y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x+y)\,dy\right)dx = \int_0^1 dx\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{1-x^2}}^1 = \int_0^1\left(x+\frac{1}{2}-x\sqrt{1-x^2}-\frac{1-x^2}{2}\right)dx$$

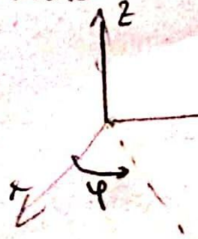
$$= \left[\frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{1}{2}x} + \frac{\cancel{2}}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} - \cancel{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{3+1-2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$1 + 2 + 3 \longrightarrow \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{3} + \frac{10}{4} = \frac{4+30}{12} = \frac{17}{6}$$

Coord. cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \\ z = z \end{cases}$$



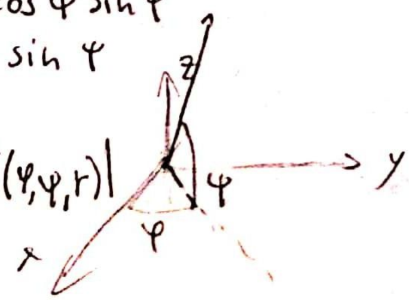
$$|\det J_{C^{-1}}(\varphi,\rho,z)| = \rho$$

Coord. sferiche

$$\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi \\ y = r\cos\psi\sin\varphi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$$

$\psi \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

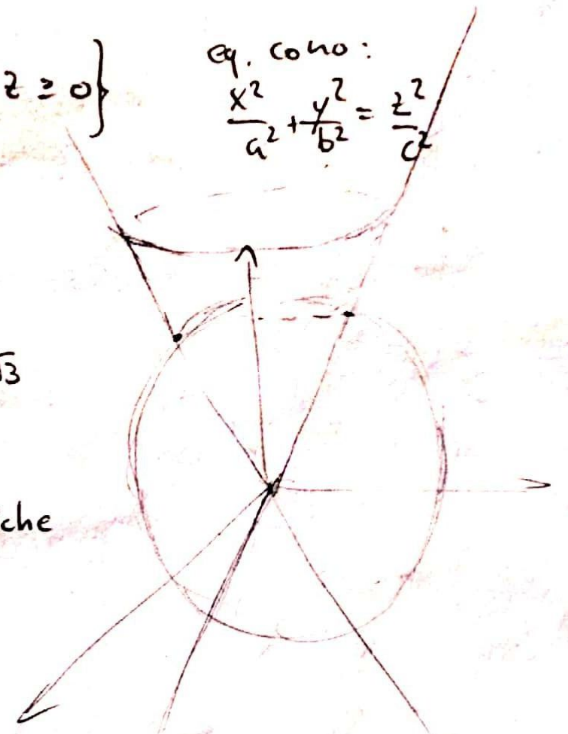
$\varphi \to [0, 2\pi]$



$$|\det J_{S}^{-1}(\varphi,\psi,r)| = r^2\cos\psi$$

$\boxed{C}$ $\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2 \le \frac{z^2}{3},\ z \ge 0\right\}$

eq. cono: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

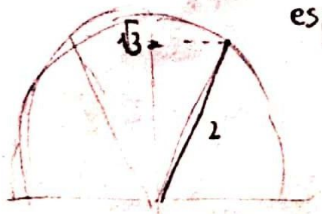


Calcolare

$\iiint_\Omega dx\,dy\,dz$ con coord. sferiche

studio l'intersezione tra i due solidi:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = 4 \\ x^2+y^2 = \frac{z^2}{3} \end{array}\right| \to \frac{z^2}{3}+z^2 = 4,\ \frac{4}{3}z^2 = 4,\ z^2 = 3,\ z = \pm\sqrt{3}$$



esprimo il vincolo in coord. sferiche

$z = r\sin\psi$

$\hookrightarrow \sin\psi_{min} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\to \psi_{min} = \frac{\pi}{3},\ \psi_{max} = \frac{\pi}{2}$

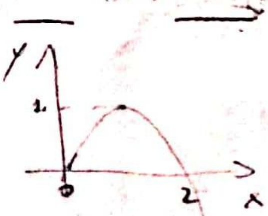
in coord. sferiche il dominio risulta "rettangolare" (facilmente integrabile)

$$\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz = \iiint r^2\cos\psi\, d\varphi\, d\psi\, dr =$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 \left[\sin\psi\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 2\pi$$

$\boxed{G}$ $\displaystyle\int_0^h\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} z\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx\,dz =$

USO COORD. CILINDRICHE poichè il dominio di integrazione è CILINDROIDE



$y < \sqrt{2x-x^2}$, $\rho\sin\varphi < \sqrt{2\rho\cos\varphi - \rho^2\cos^2\varphi}$, $\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi < 2\rho\cos\varphi$,

$0 < \rho < 2\cos\varphi$ con $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^h z\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\varphi} \rho^2\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^h z\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi\, dz = \int_0^h \frac{8z}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\, d\varphi\, dz$$

$$= \frac{4}{3}h^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi(1-\sin^2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{4}{3}h^2 \cdot \left[\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}h^2\ \frac{2}{3} = \frac{8}{9}h^2$$