$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} e^{nx}$$ studiarne la convergenza su $S=(-\infty,+\infty)$

condizione <u>necessaria</u> per la convergenza puntuale:
infinitesimalità del termine n-esimo della serie

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{n^2}{n^2+1}}_{\to 1} e^{nx} \overset{?}{=} 0$$ solo se $x<0$

riduco S a $S=(-\infty,0)$
provo a vedere se è verificata la conv. totale

$$\|f_n\|_S = \sup_{x<0} \left|(-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} e^{nx}\right| = \frac{n^2}{n^2+1}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_S$ non converge (il termine n-esimo tende a 1!)

quindi $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ non converge totalmente su $(-\infty,0)$
non converge neppure uniformemente su tale insieme
(infatti non è rispettata la condizione necessaria $\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_S=0$.)

studio allora insiemi $S=(-\infty,a)$ con $a<0$

$$\|f_n\|_S = \frac{n^2}{n^2+1} e^{na}$$ (la f. è monotona crescente in x)

$e^{na} = (e^{a})^{n} = b^n$ con $0<b<1$ perchè $a<0$

$\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ converge perchè serie geometrica (il valore assoluto di b è <1)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} b^n$ converge per il criterio del confronto $\left(\frac{n^2}{n^2+1}<1\right)$

quindi $M_n = \frac{n^2}{n^2+1} e^{na} = \|f_n\|_S$ è il termine n-esimo di una serie numerica convergente, non-negativa e tale che $\|f_n\|_S \le M_n$

→ ho conv. totale su tutti gli insiemi contenuti in $(-\infty,a]$ con $a<0$
→ dunque uniforme sugli stessi insiemi
→ conv. puntuale $\forall x<0$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n+x^2)}$ studiare la convergenza $x \in \mathbb{R}$

conv. totale

la conv. assoluta puntuale è condizione necessaria per la c. totale (infatti c. totale implica c. ass. puntuale)

fissato $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_k| = \left|(-1)^k \frac{1}{\log(k+x^2)}\right| \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{\log(k)}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n)}$ non converge, infatti $\log(n) < n \ \forall n > 0$, $\frac{1}{\log(n)} > \frac{1}{n}$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è serie armonica (che non converge)

... vale il criterio del confronto

---

utilizzo il criterio del confronto asintotico per concludere che

$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^k \frac{1}{\log(k+x^2)}\right|$ non converge

cioè $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\log(k+x^2)}$ non converge ass. puntualmente

quindi non può nemmeno convergere totalmente su alcun insieme!

conv. puntuale

si tratta di una serie del tipo $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ con $a_k \geq 0$, una volta fissato $x \in \mathbb{R}$

quindi uso il criterio di Leibniz

- $\frac{1}{\log(n+x^2)} \geq 0 \quad \forall n \geq 1$
- $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log(n+x^2)} = 0$
- $\frac{1}{\log(n+x^2)}$ decrescente in n

$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n+x^2)}$ c. puntualmente

c. uniforme

in questo caso è possibile verificare esplicitamente

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in S} \left| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in S} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\log(k+x^2)} \right| = \dots$$

la serie, fissato un certo x, gode di un'ulteriore proprietà, garantita sempre dal criterio di Leibniz, $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k\right| \le a_{n+1}$, quindi:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\log(k+x^2)} \right| \le \frac{1}{\log(n+1+x^2)}$$

spiegazione intuitiva per $k=n+1$ pari:
consideriamo il primo termine della serie come valore iniziale
se ci sommiamo il successivo (che sarà di segno negativo)
otterremo un valore >0 (infatti il valore assoluto dei termini decresce)
Sommando il termine successivo (di nuovo positivo)
ci riavviciniamo al valore iniziale
ma non lo raggiungiamo ($|\ |$ decrescente!)
possiamo continuare a sommare all'infinito ma l'effetto non cambia:
saremo sempre indietro rispetto al valore iniziale!

$$\le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1+x^2)} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0$$

indipendentemente da x

→ conv. uniforme in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x \left(\sin \frac{x}{n}\right)^n = x \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\sin \frac{x}{n}\right)^n}$$

lo studio della convergenza
non cambia se considero
questa serie (almeno
finchè discuto insiemi limitati)

Posso studiare $\sum_{n=1}^{\infty} nx \left(\frac{x}{n}\right)^n$ visto che $\sin t \to t$ per $t \to 0$?
questo passaggio implica l'uso del criterio del confronto asintotico,
ma posso applicarlo per serie a termini non-negativi!

- - - - - - -

$|\sin t| < |t|$,
$\frac{|\sin t|}{|t|} < 1$

Studio la conv. assoluta uniforme

$$|x| \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n |\sin \frac{x}{n}|^n}{\frac{|x|^n}{n^n}}}_{\leq 1} \cdot \frac{|x|^n}{n^n} \leq |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n |x|^n}{n^n}$$

$\downarrow$

è una serie di potenze
nella variabile $y = |x|$
centrata in zero
con $a_n = \frac{n}{n^n}$

calcolo il raggio di convergenza

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} \to 0$$

infatti $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\downarrow$

raggio di convergenza infinita:
- conv. puntuale $|x| < \infty$
- conv. uniforme per ogni compatto in $(-\infty, \infty)$

tramite il criterio del confronto so che questi risultati valgono anche per $|x| \sum n \left|\sin \frac{x}{n}\right|^n$
e poichè la conv. assoluta implica quella normale
valgono anche per $x \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\sin \frac{x}{n}\right)^n$