1) Verificare l'esistenza del limite

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(x-2)^2(y-1)}{(x-2)^4+(y-1)^2}$$

a) consideriamo il fascio di rette passanti per il punto $(x_0,y_0)=(2,1)$

$$y-y_0=m(x-x_0) \quad \text{con } m\in\mathbb{R}$$

$$\to y=1+m(x-2)$$

calcoliamo il limite della funzione ristretta al fascio di rette:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,1+m(x-2)) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2(\cancel{1}+m(x-2)-\cancel{1})}{(x-2)^4+m^2(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{m(x-2)^{\cancel{3}}}{\cancel{(x-2)^2}[(x-2)^2+m^2]} = 0$$

b) consideriamo le parabole aventi vertice in $(x_0,y_0)=(2,1)$

$$y=y_0+m(x-x_0)^2 \quad \text{con } m\in\mathbb{R}$$

calcoliamo il limite della funzione ristretta al fascio di parabole:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,1+m(x-2)^2) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2(\cancel{1}+m(x-2)^2-\cancel{1})}{(x-2)^4+(\cancel{1}+m(x-2)^2-\cancel{1})} = \lim_{x\to 2} \frac{m\cancel{(x-2)^4}}{\cancel{(x-2)^4}[1+m^2]} = \frac{m}{1+m^2}$$

Oss. 1 : il valore della f. ristretta non dipende da x, è una costante
→ ogni parabola di quelle considerate è una curva di livello della f. studiata

Oss. 2 : tale valore dipende dal parametro m
→ è diverso per ogni parabola considerata
→ è in generale diverso rispetto al valore 0 trovato per il fascio di rette
→ il limite non esiste!

✓

(2) Verificare l'esistenza del limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$$

a) consideriamo il fascio di rette passanti per il punto $(0,0)$

$y = mx$ con $m \in \mathbb{R}$

calcoliamo il limite della funzione ristretta al fascio di rette

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, mx) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-mx}{x+mx} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(1-m)}{\cancel{x}(1+m)} = \frac{1-m}{1+m}$$

<u>Oss</u>: tale valore dipende dal parametro m

$\longrightarrow$ il limite non esiste!

data $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1+3x^2+5y^2}}{x^2+y^2}$, studiare $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$

- esprimiamo la f. in coordinate polari

$$f(\rho,\theta) = \frac{\sqrt{1+3\rho^2\cos^2\theta+5\rho^2\sin^2\theta}}{\rho^2} = \frac{\sqrt{1+3\rho^2\cos^2\theta+3\rho^2\sin^2\theta+2\rho^2\sin^2\theta}}{\rho^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+3\rho^2+2\rho^2\sin^2\theta}}{\rho^2}$$

- consideriamo la funzione $f_1(\rho,\theta) = \dfrac{\sqrt{1+5\rho^2}}{\rho^2}$

abbiamo che $f_1(\rho,\theta) \geq f(\rho,\theta) \quad \forall \rho,\theta$ visto che $2\rho^2\sin^2\theta \leq 2\rho^2$

- possiamo utilizzare il teorema del confronto:

$$0 \leq f(\rho,\theta) \leq f_1(\rho,\theta)$$

$\longrightarrow$ dato che $\lim\limits_{\rho\to\infty} f_1(\rho,\theta) = 0$, abbiamo $\lim\limits_{\rho\to\infty} f(\rho,\theta) = 0$ ✓

③ studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^4+y^3)}{e^{x^2+y^2}-1}$$ ... riscriviamo la funzione in modo da mettere in evidenza limiti notevoli!

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^4+y^3)}{x^4+y^3} \cdot \frac{x^4+y^3}{e^{x^2+y^2}-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^4+y^3)}{x^4+y^3} \frac{x^4+y^3}{x^2+y^2} \frac{x^2+y^2}{e^{x^2+y^2}-1}$$

calcoliamo separatamente:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^4+y^3)}{x^4+y^3} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3}{x^2+y^2} = ?$

$q(x,y) = \frac{x^4+y^3}{x^2+y^2}$. riscriviamola in coord. polari $q(\rho,\theta) = \frac{\rho^4\cos^4\theta + \rho^3\sin^3\theta}{\rho^2} = \rho\sin^3\theta + \rho^2\cos^4\theta$

- consideriamo la funzione $q_1(\rho,\theta) = \rho + \rho^2 = |q_1(\rho,\theta)|$

  abbiamo che $q_1(\rho,\theta) \geq q(\rho,\theta)\ \forall \rho,\theta$ visto che $\begin{cases} \rho\sin^3\theta \leq \rho \\ \rho^2\cos^4\theta \leq \rho^2 \end{cases}$

- possiamo utilizzare il teorema del confronto?

  sì, ma bisogna prestare particolare attenzione visto che $q(\rho,\theta)$ non è sempre ≥ 0

  quindi occupiamoci di $|q(\rho,\theta)|$

  $|q(\rho,\theta)| = |\rho\sin^3\theta + \rho^2\cos^4\theta| \leq |\rho\sin^3\theta| + |\rho^2\cos^4\theta| \leq \rho + \rho^2 = |q_1(\rho,\theta)|$

  quindi $0 \leq |q(\rho,\theta)| \leq |q_1(\rho,\theta)|$ e $\lim_{\rho\to 0} |q_1(\rho,\theta)| = 0 \longrightarrow \lim_{\rho\to 0} |q(\rho,\theta)| = 0$

  da cui $\lim_{\rho\to 0} q(\rho,\theta) = 0$

visto che i tre limiti esistono finiti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^4+y^3)}{e^{x^2+y^2}-1} = \frac{1\cdot 0}{1} = 0$$ ✓

era necessario il passaggio alle coordinate polari? svolgimento alternativo

$$|q(x,y)| = \left|\frac{x^4+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^4}{x^2}\right| + \left|\frac{y^3}{y^2}\right| = x^2 + |y| = |q_1(x,y)|$$

visto che $\left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^4}{x^2}\right|$ e $\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{y^3}{y^2}\right|$

quindi

$$0 \leq |q(x,y)| \leq |q_1(x,y)| \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} |q_1(x,y)| = 0 \longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} |q(x,y)| = 0$$

da cui

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} q(x,y) = 0$$

(4) studiare il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$

- passiamo in coord. polari.

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 \sin^3\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho \sin^3\theta$$

- un modo immediato di risolvere questo limite è osservare che si tratta del prodotto tra una quantità infinitesima (ρ) e una quantità limitata ($\sin^3\theta$)
  $\longrightarrow$ il limite è 0 ✓

(5) studiare il limite $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x^2-xy-y^2}{x^2-y^2}$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x^2-2xy+xy-y^2}{x^2-y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x(2x+y)-y(2x+y)}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(2x+y)\cancel{(x-y)}}{(x+y)\cancel{(x-y)}} = \frac{3}{2}$$ ✓

... fattorizzare e semplificare non funziona soltanto ad Analisi I.

(6) studiare il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$

- riscriviamo in coord. polari: $f(\rho,\theta) = \frac{\rho^3\cos^3\theta \cdot \rho\sin\theta}{\rho^6\cos^6\theta + \rho^2\sin^2\theta} = \frac{\rho^2\cos^3\theta\sin\theta}{\sin^2\theta + \rho^4\cos^6\theta}$

non sembra facile svincolarsi dalla dipendenza in θ...
esisterà il limite oppure no? facciamo qualche verifica.

- restringo la funzione all'asse x
$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$
- restringo la funzione all'asse y
$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$
- restringo la funzione alle rette passanti per l'origine:
$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^6+m^2x^2} \sim x^2 = 0$
- restringo la funzione alle cubiche $y=x^3$
$\lim_{x\to 0} f(x,x^3) = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^6}}{2\cancel{x^6}} = \frac{1}{2} \longrightarrow$ allora $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste!

Oss.: perchè pensare proprio a questa restrizione?
scelgo la restrizione da provare in modo che numeratore e denominatore vadano a zero "con la stessa velocità"!