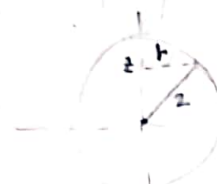


$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 1\}. \text{ (calcolare } \iiint_V x^2 y z \, dx \, dy \, dz)$$

Notiamo che il dominio di integrazione è una sfera di raggio 2, di cui "prendo" solo la parte a quota maggiore di 1.

Chiamata  $B_z$  la sezione a quota  $z$ , che risulta essere un cerchio (raggio  $r$ ) posso applicare il teorema di Fubini-Tonelli calcolando l'integrale per strati:

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \iint_{B_z} x^2 y z \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_1^2 z \iint_{B(0,0,z), \sqrt{4-z^2}} x^2 y \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$



Teorema di Pitagora:  
 $r = \sqrt{2^2 - z^2}$

Calcolo l'integrale su  $B_z$  utilizzando le coordinate polari:

$$\begin{aligned} \iint_{B_z} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \cos^2 \theta \, \rho \sin \theta \, d\rho \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho^4 \cos^2 \theta \sin \theta \, d\rho \, d\theta = \left( \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho^4 \, d\rho \right) \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sin \theta - \sin^3 \theta \, d\theta = 0 \end{aligned}$$

Non è necessario procedere visto che l'integrale vale zero.

È possibile svolgere l'integrale su  $B_z$  anche restando in coord. cartesiane:

$$\iint_{B_z} y x^2 \, dx \, dy = \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} x^2 \int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} y \, dy \, dx = \dots = 0$$

Il teorema di Fubini-Tonelli può essere anche applicato per fili:

$$\iint_{B_z} x^2 y \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \, dz \, dx \, dy = \dots \quad \text{dove } B_z \text{ è la sezione che si ottiene a quota } z=1$$

Ad ogni modo è possibile intuire che l'integrale sia nullo prima di calcolarlo: considerata la sezione a quota  $z$ , è possibile vedere che per ogni rettangolino infinitesimo ce n'è un altro (simmetrico rispetto all'asse  $y$ ) che dà identico contributo ma ce ne sono pure altri due (simmetrici rispetto all'asse  $x$ ) che danno contributo opposto (considerare la simmetria dell'integrande e del dominio).

Un'alternativa all'applicazione del teorema in questo caso è fornita dall'uso delle coordinate sferiche:

$$\iiint_V r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi \cdot r \sin \varphi \cos \psi \cdot r \sin \varphi \cdot r^2 \cos \psi \, dr \, d\varphi \, d\psi$$

$$= \iiint_V r^6 \cos^2 \varphi \sin \varphi \cdot \cos^4 \psi \sin \psi \, dr \, d\varphi \, d\psi =$$

$$= \left[ \frac{r^7}{7} \right]_0^2 \left[ \frac{-\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^{2\pi} \left[ \frac{-\cos^5 \psi}{5} \right]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

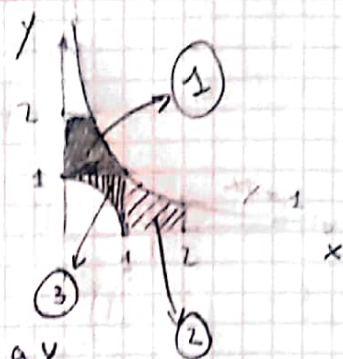
↓  
0!

$$\begin{aligned} z &> 1 \\ r \sin \psi &> 1 \\ \sin \psi &> \frac{1}{2} \\ \psi_{\min} &= \pi/6 \end{aligned}$$

$$\iint_T (x+y) dx dy$$

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c.} \\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ xy \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2\}$$

[E]



Parte (1):  $\begin{cases} 1 < y < 2 \\ 0 < x < \frac{1}{y} \end{cases}$  normale rispetto a y

$$\stackrel{(1)}{=} \iint_T (x+y) dx dy = \int_1^2 \left( \int_0^{\frac{1}{y}} (x+y) dx \right) dy = \int_1^2 \left[ xy + \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{y}} dy = \int_1^2 \left( 1 + \frac{1}{2y^2} \right) dy =$$

$$= \left[ y + \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{y} \right) \right]_1^2 = 2 + \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Parte (2):  $\begin{cases} 1 < x < 2 \\ 0 < y < \frac{1}{x} \end{cases}$

$$\stackrel{(2)}{=} \iint_T (x+y) dx dy = \int_1^2 \left( \int_0^{\frac{1}{x}} (x+y) dy \right) dx = \int_1^2 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \left[ x + \frac{1}{2x} \right]_1^2 = 2 + \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

Ma si vede anche dal grafico che (1) = (2)

(dominio e funzione sono simmetrici rispetto a  $y=x$ )

~~Parte (3):~~  $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \sqrt{1-x^2} < y < 1 \end{cases}$

$$\stackrel{(3)}{=} \iint_T (x+y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x+y) dy \right) dx = \int_0^1 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_{\sqrt{1-x^2}}^1 dx = \int_0^1 \left( x + \frac{1}{2} - x\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2} \right) dx$$



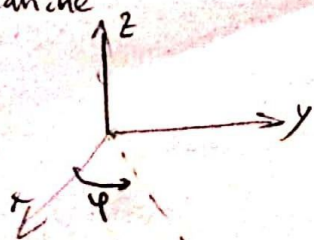
$$= \int \left[ \frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{1}{2}x} + \cancel{\frac{2}{3}x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{x} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{3+1-2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \rightarrow \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{5}{5} = \frac{1}{3} + \frac{10}{5} = \frac{6+30}{12} = \frac{17}{6}$$

Coord. cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

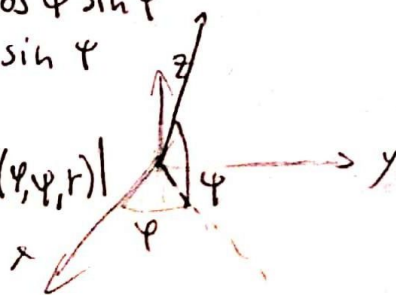


$$|\det J C^{-1}(\varphi, \rho, z)| = \rho$$

Coord. sferiche  $\rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \cos \varphi \sin \psi \\ z = r \sin \psi \end{cases} \rightarrow [0, 2\pi]$$

$$|\det J S^{-1}(\varphi, \psi, r)| = r^2 \cos \psi$$



C

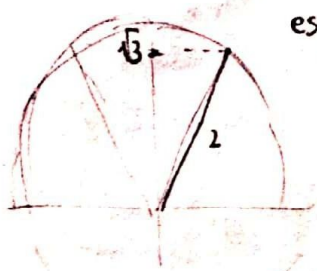
$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq \frac{z^2}{3}, z \geq 0\}$$

Calcolare

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz \quad \text{con coord. sferiche}$$

studio l'intersezione tra i due solidi:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \\ x^2 + y^2 &= \frac{z^2}{3} \end{aligned} \rightarrow \frac{z^2}{3} + z^2 = 4, \frac{4}{3}z^2 = 4, z^2 = 3, z = \sqrt{3}$$



esprimo il vincolo in coord. sferiche

$$z = r \sin \psi$$

$$\sin \psi_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\psi_{\min} = \frac{\pi}{3}, \psi_{\max} = \frac{\pi}{2}$$

in coord. sferiche il dominio risulta "rettangolare" (facilmente integrabile)

$$\iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iiint r^2 \cos \psi d\varphi d\psi dr =$$

$$= \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^2 \left[ \sin \psi \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{8}{3} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 2\pi$$

G

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z \sqrt{x^2+y^2} dy dx dz =$$

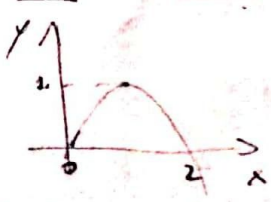
uso COORD. CILINDRICHE  
poiché il dominio di integrazione  
è CILINDROIDE

$$y < \sqrt{2x-x^2}, \quad \rho \sin \psi \leq \sqrt{2} \rho \cos \varphi - \rho^2 \cos^2 \varphi, \quad \rho^2 \sin^2 \psi \leq \sqrt{2} \rho \cos \varphi - \rho^2 \cos^2 \varphi$$

$$\int_0^4 z \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 d\varphi dz = \int_0^4 z \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^{2 \cos \varphi} d\varphi dz = \int_0^4 \frac{8z}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi dz$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^4 z \int_0^{\pi/2} \cos \varphi (1 - \sin^2 \varphi) d\varphi dz$$

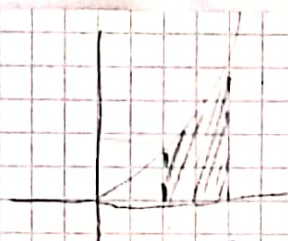
$$= \frac{4}{3} \int_0^4 z \left[ \sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right]_0^{\pi/2} dz = \frac{4}{3} \int_0^4 z \frac{2}{3} dz = \frac{8}{9} \int_0^4 z dz = \frac{8}{9} \cdot \frac{16}{2} = \frac{64}{9}$$





E: 14.6

[D]



$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2} dx dy$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^2, 1 \leq x \leq 2\}$$

il dominio è normale rispetto a entrambi gli assi, ma se lavoro rispetto a y devo scomporlo. conviene rispetto a x

$$= \int_1^2 \left( \int_0^{x^2} \frac{x}{x^2+y^2} dy \right) dx$$

sostituzione  $t = \frac{y}{x} \quad dt = \frac{1}{x} dy$

$y=0 \quad t=0$   
 $y=x^2 \quad t=x$

$$= \int_0^{x^2} \frac{x}{x^2(1+\frac{y^2}{x^2})} dy = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctg t]_0^x = \arctg x$$

integrazione per parti!

$$= \int_1^2 \arctg x \, dx = x \arctg x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= 2 \arctg 2 - \frac{\pi}{4} - \left[ \frac{1}{2} \ln |1+x^2| \right]_1^2 =$$

$$= 2 \arctg 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$$