

# 独立成分分析：原理、公式、应用与实战

2025 年 9 月 17 日

## 1 引言

独立成分分析（Independent Component Analysis, ICA）通过高阶统计量将混合的观测信号拆解为互相独立的潜在源。与只消除二阶相关性的主成分分析（PCA）不同，ICA 借助非高斯性最强的投影方向实现盲源分离，广泛应用于多声道音频、功能性脑影像和高光谱成像等场景。由于 ICA 保留了线性生成模型，被恢复的成分还可回混获得原始信号，从而具备良好的可解释性。

## 2 原理与公式

### 2.1 线性混合模型

设观测向量  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  由  $n$  个独立源  $\mathbf{s}$  经可逆混合矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  线性组合而来：

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{s}] = \mathbf{0}, \quad \text{Cov}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}. \quad (1)$$

ICA 旨在估计解混矩阵  $\mathbf{W}$ ，使  $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{W}\mathbf{x}$  近似原始源信号。由于交换或取反某个源并相应调整  $\mathbf{W}$  仍可保持观测不变，解具有排列与符号的不确定性。

### 2.2 非高斯性与对比函数

核心思想是：独立非高斯变量的任意线性组合往往比原始变量更趋近高斯分布（中央极限定理）。因此可最大化投影  $y = \mathbf{w}^\top \mathbf{z}$  的非高斯程度，其中  $\mathbf{z}$  表示白化后的数据。常用的对比函数包括峰度与近似负熵：

$$\text{Kurt}(y) = \mathbb{E}[y^4] - 3, \quad (2)$$

$$J(y) \approx (\mathbb{E}[G(y)] - \mathbb{E}[G(v)])^2, \quad (3)$$

其中  $v$  为标准高斯变量， $G$  为非二次函数，如  $G(y) = \log \cosh(y)$ 。FastICA 的迭代更新为

$$\mathbf{w}_{\text{new}} = \mathbb{E}[\mathbf{z}g(\mathbf{w}^\top \mathbf{z})] - \mathbb{E}[g'(\mathbf{w}^\top \mathbf{z})]\mathbf{w}, \quad g = G'. \quad (4)$$

每次迭代后需对向量与已有成分正交化，从而保证结果彼此独立。

## 2.3 白化、似然与收敛

预先对白化数据 ( $\mathbf{z} = \mathbf{V}^{-1/2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$ ) 能消除二阶相关，将问题化简为寻找正交矩阵。亦可从最大似然角度出发，最小化独立成分间的互信息：

$$\min_{\mathbf{w}} I(\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n) = \sum_{i=1}^n H(\hat{s}_i) - H(\hat{\mathbf{s}}), \quad (5)$$

其中  $H$  为微分熵。实际实现通常通过监控相邻迭代中  $\mathbf{w}$  的夹角或对数似然的变化来判断收敛，并在必要时加入小的正则项以提升数值稳定性。

## 3 应用与技巧

- **盲源分离**：在鸡尾酒会问题中分离多路语音，或在 fMRI/EEG 中提取功能网络与噪声源。
- **稀疏特征构造**：在自然图像上训练 ICA，可得到局部化、类似边缘的滤波器，用于识别或压缩。
- **金融与工业监测**：独立成分能够揭示潜在风险因子或设备故障模式，补充传统相关性分析。
- **实用建议**：务必居中并白化数据，尝试不同的对比函数，多次随机初始化，并借助相关系数或互信息诊断结果的独立性。

## 4 Python 实战

脚本 `gen_ica_figures.py` 构造正弦、方波与拉普拉斯噪声三类独立源，经随机矩阵混合后使用 FastICA 分离，输出源/混合/恢复信号对比以及混合矩阵热力图。核心流程如下所示。

Listing 1: 脚本 `gen_ica_figures.py`

```
1 from sklearn.decomposition import FastICA
2
3 ica = FastICA(
4     n_components=3,
5     whiten=True,
6     max_iter=1000,
7     tol=1e-4,
8     random_state=0,
```

```

9 )
10 sources_hat = ica.fit_transform(mixed_signals)
11
12 mixing = ica.mixing_
13 unmixing = ica.components_
14 correlations = np.corrcoef(true_sources, sources_hat, rowvar=True)

```

通过检查 ‘correlations’ 中的最大绝对值，可验证恢复成分与原始源是否一一对应（忽略符号与排列）。

## 5 实验结果

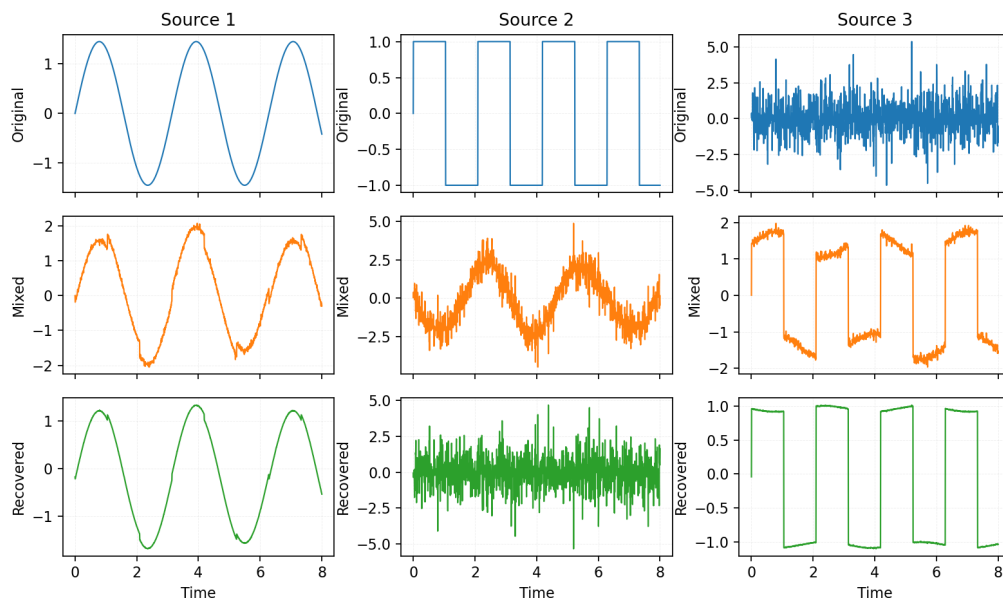


图 1: 三路信号的原始源、混合观测与 ICA 恢复结果对比

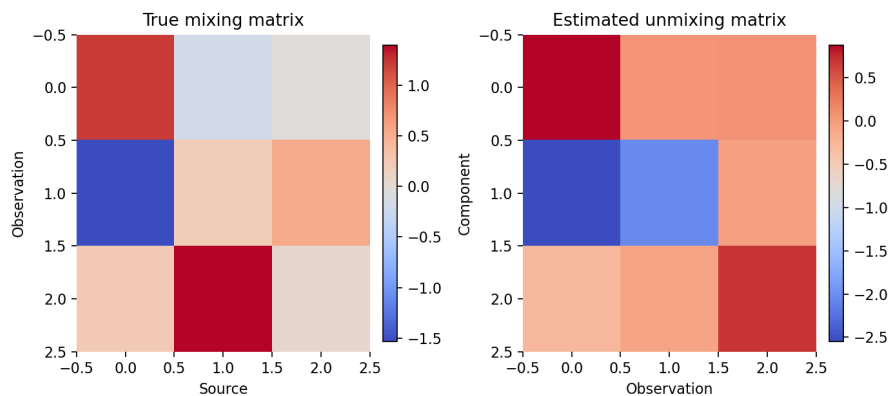


图 2: 真实混合矩阵（左）与估计解混矩阵（右）的热力图，非对角元素提示残余混合

## 6 总结

ICA 通过最大化非高斯性在去相关基础上进一步恢复独立潜在因子。只要完成白化、选用合适的对比函数并对结果进行诊断，就能在多信号场景中实现可靠的盲源分离。合成案例示范了如何借助时间序列与矩阵可视化评估分离效果。