MATH: Operations Research	**2014-15 First Term**

Handout 8: 博弈论简介

Instructor: Junfeng Yang — *October 28, 2014*

Contents

8.1 博弈论简介

博弈论，又称对策论，是自古以来的政治家和军事家都很注意研究的问题。20世纪40年代形成并发展起来的。1944年von Neumann 与Morgenstern 的《博弈论与经济行为》一书出版，标志着现代系统博弈理论的初步形成。20世纪50年代，Nash 建立了非合作博弈的“纳什均衡" 理论，标志着博弈的新时代开始，是纳什在经济博弈论领域划时代的贡献。1994年纳什获得了诺贝尔经济学奖。他提出的纳什均衡概念在非合作博弈理论中起着核心作用。由于纳什均衡的提出和不断完善，为博弈论广泛应用于经济学、管理学、社会学、政治学、军事科学等领域奠定了坚实的理论基础。

对策论亦称竞赛论或博弈论，是研究具有斗争或竞争性质现象的数学理论和方法。一般认为，它是现代数学的一个新分支，是运筹学的一个重要学科。对策论发展的历史并不长，但由于它研究的问题与政治、经济、军事活动乃至一般的日常生活等有着密切联系，并且处理问题的方法具有明显特色，所以日益引起广泛注意。在日常生活中，经常会看到一些相互之间具有斗争或竞争性质的行为，如下棋、打牌、体育比赛等。还比如战争活动中的双方，都力图选取对自己最有利的策略，千方百计去战胜对手。在政治方面，国际间的谈判，各种政治力量之间的斗争，各国际集团之间的斗争等无一不具有斗争的性质。在经济活动中，各国之间、各公司企业之间的经济谈判，企业之间为争夺市场而进行的竞争等，举不胜举。

战国时期，有一天齐王提出要与田忌赛马，双方约定从各自的上、中、下三个等级的马中各选一匹参赛，每匹马均只能参赛一次，每一次比赛双方各出一匹马，负者要付给胜者千金。已经知道，在同等级的马中，田忌的马不如齐王的马，而如果田忌的马比齐王的马高一等级，则田忌的马可取胜。当时，田忌手下的一个谋士孙膑给他出了个主意：每次比赛时先让齐王牵出他要参赛的马，然后来用下马对齐王的上马，用中马对齐王的下马，用上马对齐王的中马。比赛结果，田忌二胜一负，夺得千金。由此看来，两个人各采取什么样的出马次序对胜负是至关重要的。

对策行为的三个基本要素

1. 局中人：在一个对策行为(或一局对策)中，有权决定自己行动方案的对策参加者，称为局中人。一般要求一个对策中至少要有两个局中人。并且，局中人都是贪婪且理智的。如在“齐王赛马”的例子中，局中人是齐王和田忌。

2. 策略集：一局对策中，可供局中人选择的一个实际可行的完整的行动方案称为一个策略。参加对策的每一局中人，都有自己的策略集。一般，每一局中人的策略集中至少应包括两个策略。

   在“齐王赛马”的例子中，如果用(上，中，下)表示以上马、中马、下马依次参赛这样一个次序，这就是一个完整的行动方案，即为一个策略。可见，局中人齐王和田忌各自都有6个策略：(上，中，下)、(上，下，中)、(中，上，下)、(中，下，上)、(下，中，上)、(下，上，中)。

3. 赢得函数(支付函数)：在一局对策中，各局中人选定的策略形成的策略组称为一个局势，即若s_i 是第i个局中人的一个策略，则n个局中人的策略组

   $$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

   就是一个局势。全体局势的集合S 可用各局中人策略集的笛卡儿积表示，即

   $$S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n.$$

   当一个局势出现后，对策的结果也就确定了。也就是说，对任一局势$s \in S$, 局中人i 可以得到一个赢得值$H_i(s)$. 显然，$H_i(s)$ 是局势s 的函数，称为第i 个局中人的赢得函数。

在齐王与田忌赛马的例子中，局中人集合为$I = \{1, 2\}$, 齐王和田忌的策略集可分别用

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6\} \text{ 和 } S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_6\}$$

表示。这样，齐王的任一策略α_i 和田忌的任一策略β_j 就形成了一个局势s_{ij}. 如果$\alpha_1 =$ (上，中，下)，$\beta_1 =$ (上，中，下)，则在局势s_{11} 下齐王的赢得值为$H_1(s_{11}) = 3$, 田忌的赢得值为 $H_2(s_{11}) = -3$.

对策问题的分类: 根据局中人的个数，分二人对策和多人对策；根据各局中人的赢得函数的代数和是否为零，分零和对策与非零和对策；根据各局中人之间是否允许合作，分为合作对策和非合作对策；根据局中人的策略集中的策略个数，分有限对策和无限对策；根据策略的选择是否与时间有关，分静态对策与动态对策；根据对策模型的数学特征，分矩阵对策、连续对策、微分对策、阵地对策、凸对策、随机对策等；其他分类方式。

二人有限零和对策 在众多的对策模型中，占有重要地位是二人有限零和对策，又称矩阵对策。这类对策是到目前为止在理论研究和求解方法方面都比较完善的一个对策分支。矩阵对策可以说是一类最简单的对策模型，其研究思想和方法十分具有代表性，体现了对策论的一般思想和方法，且矩阵对策的基本结果也是研究其他对策模型的基础。

8.2 矩阵对策的数学模型

在矩阵对策中，一般用I, II 分别表示两个局中人，并设局中人I有m 个纯策略$\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$，局中人II 有$n$ 个纯策略$\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. 则局中人I, II 的纯策略集分别为

$$S_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\},\ S_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}.$$

当局中人I 选定纯策略α_i, 局中人II 选定纯策略β_j 后，就形成了一个局势(α_i, β_j). 对任一局势(α_i, β_j), 记局中人I的赢得值为a_{ij}. 称

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为局中人I 的赢得矩阵(或局中人II 的支付矩阵)。由于假定对策为零和的，故局中人II 的赢得矩阵就是$-A$.

在齐王赛马的例子中:

田忌的策略

齐王的赢得矩阵 \ 齐王的策略	上中下	上下中	中上下	中下上	下中上	下上中
上中下	3	1	1	1	1	−1
上下中	1	3	1	1	−1	1
中上下	1	−1	3	1	1	1
中下上	−1	1	1	3	1	1
下中上	1	1	−1	1	3	1
下上中	1	1	1	−1	1	3

当局中人I, II 的纯策略集，以及局中人I的赢得矩阵A 确定后，一个矩阵对策也就给定了。通常，将一个矩阵对策记成

$$G = \{I, II; S_1, S_2; A\} \text{ 或 } G = \{S_1, S_2; A\}.$$

Example 8.2.1 设有一矩阵对策$G = \{S_1, S_2; A\}$, 其中

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\},\ S_2 = \{\beta_1, \beta_3, \beta_3\}.$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

如何求解两个局中人的最优纯策略？理智的局中人应采取“理智的行为”。

Definition 8.1 设有矩阵对策$G = \{S_1, S_2; A\}$, 其中

$$S_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\},\ S_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_n\},\ A = (a_{ij})_{m\times n}.$$

若存在$i^* \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j^* \in \{1, 2, \dots, n\}$ 使得

$$a_{i^*j^*} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

成立，则称$(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$为矩阵对策$G$在纯策略下的解（或平衡局势)，$\alpha_{i^*}$ 与β_{j^*} 分别称为局中人*I, II* 的最优纯策略。记$V_G = a_{i^*j^*}$, 并称其为矩阵对策的值。

Remark 8.2.1 在矩阵对策中两个局中人都采取最优纯策略*(*如果最优纯策略存在*)*才是理智的行动。

Example 8.2.2 矩阵对策$G = \{S_1, S_2; A\}$, 其中

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\},\ S_2 = \{\beta_1, \beta_3, \beta_3\}.$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

局中人的最优纯策略为(α_2, β_2), 因为

$$a_{22} = \max_j \min_i a_{ij} = \min_i \max_j a_{ij}.$$

元素a_{22} 为所在行的最小元素、所在列的最大元素。

Theorem 8.2 (纯策略意义下有解的条件) 矩阵对策$G = \{S_1, S_2; A\}$ 在纯策略意义下有解的充分必要条件为：存在纯局势$(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$ 使得

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$$

对一切$i \in \{1, \dots, m\}$ 以及$j \in \{1, \dots, n\}$成立。

Proof: 充分性：因为对任意的i, j 都有$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$, 因此

$$\max_i a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le \min_j a_{i^*j}.$$

由于$\min_j \max_i a_{ij} \le \max_i a_{ij^*}$ 和 $\min_j a_{i^*j} \le \max_i \min_j a_{ij}$ 因此有

$$\min_j \max_i a_{ij} \le a_{i^*j^*} \le \max_i \min_j a_{ij}.$$

另外，下式永远成立

$$\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij}.$$

综上有

$$a_{i^*j^*} = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij}.$$

必要性：矩阵对策在纯策略意义下有解的定义：存在$i^* \in \{1, 2, \ldots, m\}, j^* \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 使得

$$a_{i^*j^*} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

成立. 因此有

$$a_{i^*j^*} = \min_j a_{i^*j} = \max_i a_{ij^*}.$$

对一切$i \in \{1, \ldots, m\}$ 以及$j \in \{1, \ldots, n\}$, 都有

$$a_{ij^*} \leq \max_i a_{ij^*} = a_{i^*j^*} = \min_j a_{i^*j} \leq a_{i^*j}.$$

■

Definition 8.3 (鞍点) 设$f(x, y)$为一个定义在$x \in A$ 及 $y \in B$ 上的实值函数，如果存在$x^* \in A, y^* \in B$ 使得对一切$x \in A$ 及 $y \in B$ 都有

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y),$$

则称(x^*, y^*) 为函数f的鞍点。

由上述定理可知，矩阵对策在纯策略意义下有解的充分必要条件是：$a_{i^*j^*}$ 为矩阵A的鞍点（也称为对策的鞍点）。

Remark 8.2.2 纯策略意义下达到最优解时的直观解释：设$a_{i^*j^*}$ 为矩阵A的鞍点。当局中人I 选择策略α_{i^*}时，局中人II 为减少损失，只会选择策略β_{j^*}; 当局中人II 选择策略β_{j^*} 时，局中人I 为增加所得，也只会选择策略α_{i^*}.

Example 8.2.3 设有一矩阵对策$G = \{S_1, S_2; A\}$, 其中

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\},\ S_2 = \{\beta_1, \beta_3, \beta_3, \beta_4\}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

求对策的解。

矩阵对策的解不一定唯一。对策的解具有如下性质

Theorem 8.4
- 无差别性：若$(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 和$(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$ 都是矩阵对策G的解，则$a_{i_1j_1} = a_{i_2j_2}$.
- 可交换性：若$(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 和$(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$ 都是矩阵对策G的解，则$(\alpha_{i_1}, \beta_{j_2})$ 与$(\alpha_{i_2}, \beta_{j_1})$ 也是解。

Remark 8.2.3 矩阵对策的值是唯一的，即当局中人I 采用构成解的最优纯策略时，能保证他的赢得V_G不依赖于对方的纯策略。

8.3 矩阵对策的混合策略

局中人存在纯策略意义下的最优解的充要条件是

$$\max_j \min_i a_{ij} = \min_i \max_j a_{ij}.$$

当$\max_j \min_i a_{ij} < \min_i \max_j a_{ij}$, 不存在纯策略意义下的最优解，此时局中人如何进行博弈？

Example 8.3.1 设有一矩阵对策G, 局中人I 的赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

局中人应采取何种决策进行博弈？

设有矩阵对策$G = \{S_1, S_2; A\}$, 其中$S_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, $S_2 = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$. 记

$$S_1^* = \left\{x \in R^m : x \geq 0, \sum\nolimits_{i=1}^m x_i = 1\right\}$$
$$S_2^* = \left\{y \in R^n : y \geq 0, \sum\nolimits_{j=1}^n y_j = 1\right\}.$$

则S_1^* 与S_2^* 分别称为局中人I 和II 的混合策略集(或策略集)；$x \in S_1^*$ 与$y \in S_2^*$ 分别称为局中人I 和II 的混合策略(或策略)，称(x, y) 为一个混合局势(或局势)。局中人I 的赢得函数为

$$E(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = x^T A y.$$

得到的新对策记成$G^* = \{S_1^*, S_2^*, E\}$, 称其为对策$G$的混合扩充。

Remark 8.3.1 *1.* 纯策略是混合策略的特例。例如局中人I 的纯策略α_k 可理解为混合策略$x = e_k$.

2. 混合策略x 可理解为当两个局中人多次重复进行对策G 时，局中人I 分别采取纯策略$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 的频率.

3. 若只进行一次对策，混合策略x 可理解为局中人I 对各纯策略的偏爱程度.

当局中人I 采取某混合策略x 时，在最不利的情况下他只能赢得

$$\min_{y\in S_2^*} E(x, y).$$

因此，局中人I 会采取混合策略使得在最不利情况下的赢得最大化，即

$$\max_{x\in S_1^*} \min_{y\in S_2^*} E(x, y).$$

同理，局中人II 需考虑如下问题

$$\min_{y\in S_2^*} \max_{x\in S_1^*} E(x, y).$$

上面极大极小、极小极大问题均有意义，因为E 关于(x, y) 连续，且S_1^*, S_2^* 为有界闭集。下式恒成立：

$$\max_{x\in S_1^*} \min_{y\in S_2^*} E(x, y) \leq \min_{y\in S_2^*} \max_{x\in S_1^*} E(x, y).$$

Definition 8.5 设$G^* = \{S_1^*, S_2^*, E\}$ 是矩阵对策$G = \{S_1, S_2, A\}$ 的混合扩充。如果

$$\max_{x\in S_1^*}\min_{y\in S_2^*} E(x,y) = \min_{y\in S_2^*}\max_{x\in S_1^*} E(x,y),$$

则称其值，记为V_G, 为对策G 的值。称使上面等式成立的混合局势(x^*, y^*) 为矩阵对策G 在混合策略意义下的解(或简称解)，x^* 与y^* 分别称为局中人I 和II 的最优混合策略(或简称最优策略).

注： 一般，对$G = \{S_1, S_2, A\}$ 及其混合扩充$G^* = \{S_1^*, S_2^*, E\}$ 不加区别，通常都用$G = \{S_1, S_2, A\}$ 表示。当G 在纯策略意义下无解时，自动认为讨论的是在混合策略意义下的解，相应的局中人I 的赢得函数为$E(x,y)$.

当G 在纯策略意义下有解时，上述V_G 定义与前面定义一致。设G 在混合策略意义下的解为(x^*, y^*), 则$V_G = E(x^*, y^*)$.

Theorem 8.6 矩阵对策$G = \{S_1, S_2; A\}$ 在混合策略意义下有解的充分必要条件为：存在$x^* \in S_1^*$, $y^* \in S_2^*$ 使得(x^*, y^*) 为$E(x,y)$ 的一个鞍点，即对一切$x \in S_1^*$ 以及$y \in S_2^*$ 都有

$$E(x, y^*) \le E(x^*, y^*) \le E(x^*, y).$$

Proof: 与纯策略情形完全一致，只需$E(x,y) \leftrightarrow a_{ij}, x \leftrightarrow i, y \leftrightarrow j$. ■

Example 8.3.2 求矩阵对策$G = \{S_1, S_2; A\}$ 的解，其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

在纯策略意义下无解。设$x = (x_1, x_2)^T$, $y = (y_1, y_2)^T$ 为局中人I, II 的混合策略，混合策略集为$\{(u,v)^T \in R^2 : u, v \ge 0, u + v = 1\}$. 局中人$I$的赢得函数为

$$E(x,y) = x^T A y = -4(x_1 - 1/4)(y_1 - 1/2) + 9/2.$$

则易见$x^* = (1/4, 3/4)^T$, $y^* = (1/2, 1/2)^T$为$E(x,y)$的鞍点，为两局中人的最优混合策略。$V_G = 9/2$.

8.4 矩阵对策的基本理论

一般矩阵对策在纯策略意义下的解往往是不存在的; 一般矩阵对策在混合策略意义下的解总是存在的; 通过一个构造性的证明，导出求解矩阵对策的基本方法：线性规划方法.

当局中人I 取纯策略α_i 时，其赢得函数记为$E(i,y)$, 即

$$E(i,y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j.$$

当局中人II 取纯策略β_j 时，其赢得函数记为$E(x,j)$, 即

$$E(x,j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i.$$

因此有

$$E(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\right)x_i=\sum_{i=1}^{m}E(i,y)x_i,$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i\right)y_j=\sum_{j=1}^{n}E(x,j)y_j.$$

Theorem 8.7 矩阵对策$G=\{S_1,S_2;A\}$ 在混合策略意义下有解的充分必要条件为：存在$x^*\in S_1^*$, $y^*\in S_2^*$ 使得对任意$i=1,2,\dots,m$ 以及$j=1,2,\dots,n$ 都有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j^*=E(i,y^*)\le E(x^*,y^*)\le E(x^*,j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i^*.$$

Proof: 必要性：首先，存在$x^*\in S_1^*$, $y^*\in S_2^*$ 使得对一切$x\in S_1^*$ 以及$y\in S_2^*$ 都有

$$E(x,y^*)\le E(x^*,y^*)\le E(x^*,y).$$

纯策略是混合策略的特例，取$x=e_i, y=e_j$ ($i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$) 即可。

充分性：对一切$x\in S_1^*$ 以及$y\in S_2^*$ 都有

$$E(x,y^*)=\sum_{i=1}^{m}E(i,y^*)x_i\le E(x^*,y^*)\sum_{i=1}^{m}x_i=E(x^*,y^*)$$
$$E(x^*,y)=\sum_{j=1}^{n}E(x^*,j)y_j\ge E(x^*,y^*)\sum_{j=1}^{n}y_j=E(x^*,y^*).$$

因此

$$E(x,y^*)\le E(x^*,y^*)\le E(x^*,y).$$

矩阵对策G 在混合策略意义下有解。 ■

Theorem 8.8 (von Neumann, 1944) 任一矩阵对策$G=\{S_1,S_2;A\}$ 在混合策略意义下一定有解。

Proof: 只需证明，存在x^* 与y^* 使得

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j^*\le E(x^*,y^*),\ i=1,\dots,m,$$
$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i^*\ge E(x^*,y^*),\ j=1,\dots,n,$$
$$\sum_{i=1}^{m}x_i^*=1,\qquad x^*\ge 0,$$
$$\sum_{j=1}^{n}y_j^*=1,\qquad y^*\ge 0.$$

为此考虑如下一对线性规划问题

$$\begin{aligned}\max_{x,u} \quad & u \\ \text{s.t.} \sum_{i=1}^{m} & a_{ij}x_i \geq u,\ j=1,\ldots,n, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x \geq 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min_{y,v} \quad & v \\ \text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} & a_{ij}y_j \leq v,\ i=1,\ldots,m, \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad y \geq 0.\end{aligned}$$

矩阵形式：

$$\text{P:} \quad \begin{aligned}\max_{x,u} \quad & u \\ \text{s.t. } & A^T x \geq u\mathbf{1}_n \\ & \mathbf{1}_m^T x = 1 \\ & x \geq 0.\end{aligned}$$

$$\text{D:} \quad \begin{aligned}\min_{y,v} \quad & v \\ \text{s.t. } & Ay \leq v\mathbf{1}_m \\ & \mathbf{1}_n^T y = 1 \\ & y \geq 0.\end{aligned}$$

此二问题互为对偶，且显然均可行。由强对偶定理，存在(x^*, u^*) 与(y^*, v^*) 分别为原问题与对偶问题的最优解，且$u^* = v^*$. 记$w^* := u^* = v^*$. 由可行性得$x^* \in S_1^*$, $y^* \in S_2^*$, 且

$$E(i, y^*) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^* \leq w^* \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i^* = E(x^*, j).$$

另外，

$$E(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^{m} E(i, y^*)x_i^* \leq w^* \sum_{i=1}^{m} x_i^* = w^*,$$
$$E(x^*, y^*) = \sum_{j=1}^{n} E(x^*, j)y_j^* \geq w^* \sum_{j=1}^{n} y_j^* = w^*.$$

因此，$w^* = E(x^*, y^*)$ 且

$$E(i, y^*) \leq E(x^*, y^*) \leq E(x^*, j).$$

即(x^*, y^*) 是对策G 的解。 ■

记矩阵对策G 的解集为$T(G)$, 对策的值为$V(G)$.

Theorem 8.9 设有两个矩阵对策$G_1=\{S_1,S_2;A_1\}$ 与$G_2=\{S_1,S_2;A_2\}$, 其中$A_1=(a_{ij})$, $A_2=(a_{ij}+L)$, L 为任一常数，则有

- $V_{G_2}=V_{G_1}+L$;
- $T_{G_1}=T_{G_2}$.

Theorem 8.10 设有两个矩阵对策$G_1=\{S_1,S_2;A\}$ 与$G_2=\{S_1,S_2;\alpha A\}$, 其中$\alpha>0$ 为任一常数，则有

- $V_{G_2}=\alpha V_{G_1}$;
- $T_{G_1}=T_{G_2}$.

8.5 解矩阵对策的线性规划法

上述定理表明，求矩阵对策G 的解可通过解如下一对线性规划得到：

$$\begin{aligned} \text{P:} \qquad \max_{x,v} \quad & v \\ \text{s.t. } A^T x & \geq v\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_m^T x & = 1 \\ x & \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D:} \qquad \min_{y,v} \quad & v \\ \text{s.t. } Ay & \leq v\mathbf{1}_m \\ \mathbf{1}_n^T y & = 1 \\ y & \geq 0. \end{aligned}$$

不妨设对策值$v^*=V(G)>0$ (否则, 可考虑$A \longleftarrow A+|v^*|+1$). 作变换$x \leftarrow x/v$, $y \leftarrow y/v$, 将P 与D 等价转化为

$$\begin{aligned} \text{P':} \qquad \min_{x} \quad & \mathbf{1}_m^T x \\ \text{s.t. } A^T x & \geq \mathbf{1}_n \\ x & \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D':} \qquad \max_{y} \quad & \mathbf{1}_n^T y \\ \text{s.t. } Ay & \leq \mathbf{1}_m \\ y & \geq 0. \end{aligned}$$

设已求得P' 与D'的最优解，分别为x^*, y^*. 令$v^*=1/\mathbf{1}_m^T x^*$. 则对策G的解$T(G)=v^*(x^*,y^*)$, 对策的值$V(G)=v^*$.

Example 8.5.1 求矩阵对策$G=\{S_1,S_2;A\}$ 的解，其中

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

解：该对策问题的解可通过解如下线性规划模型得到：

$$
\begin{aligned}
\text{P'}: \quad & \min_x \quad x_1 + x_2 \\
& \text{s.t. } 3x_1 + 5x_2 \geq 1 \\
& \quad 6x_1 + 4x_2 \geq 1 \\
& \quad x \geq 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{D'}: \quad & \max_y \quad y_1 + y_2 \\
& \text{s.t. } 3y_1 + 6y_2 \leq 1 \\
& \quad 5y_1 + 4y_2 \leq 1 \\
& \quad y \geq 0.
\end{aligned}
$$

用单纯形法解对偶问题, 第一张表

y_1	y_2	y_3	y_4	b
3	6	1	0	1
5	4	0	1	1
-1	-1	0	0	0

最后一张表

y_1	y_2	y_3	y_4	b
0	1	5/18	-1/6	1/9
1	0	-2/9	1/3	1/9
0	0	1/18	1/6	2/9

D' 的最优解与最优函数值分别为$(1/9, 1/9)$, $2/9$. P' 的最优解与最优函数值分别为$(1/18, 1/6)$, $2/9$. 对策G的值为$v^* = V(G) = 9/2$. 对策的解为

$$
\begin{aligned}
x^* &= v^*(1/18, 1/6) = (1/4, 3/4) \\
y^* &= v^*(1/9, 1/9) = (1/2, 1/2).
\end{aligned}
$$

8.6 作业

一位陌生的美女主动过来和你搭讪，并要求和你一起玩个游戏。美女提议：“让我们各自亮出硬币的一面，或正或反。如果我们都是正面，那么我给你3元，如果我们都是反面，我给你1元，剩下的情况你给我2元就可以了。”这个游戏公平吗？用线性规划法求双方的最优混合策略。

8.7 其他类型的对策

8.7.1 n 人有限非合作博弈

前面讨论的矩阵博弈属于二人有限零和博弈：

- 二人：只有两个局中人
- 有限：每个局中人的纯策略集为有限集
- 零和：局中人I, II 的赢得函数之和为零
- 非合作：不允许结盟

Nash 将von Neumann 关于二人有限零和博弈推广到n 人有限非零和非合作博弈：

- n 人：n 个局中人, $n \geq 2$
- 有限：每个局中人的纯策略集为有限集
- 非零和：局中人$1, 2, \ldots, n$ 的赢得函数之和不必为零
- 非合作：不允许局中人进行结盟，不允许局中人对支付（赢得）进行再分配

二人有限非零和博弈, 也称为双矩阵博弈。设局中人I, II 的纯策略集分别为

$$\{\alpha_i : i = 1, 2, \ldots, m\}, \quad \{\beta_j : j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

赢得矩阵分别为$A, B \in R^{m\times n}$. 非零和意味着不要求对所有的(i, j) 都成立$a_{ij} + b_{ij} = 0$. 若对某(i, j)成立$a_{ij} > 0, b_{ij} > 0$, 此时称为双赢。显然，在纯策略意义下不一定总是有解。如果两局中人分别选择混合策略$x \in R^m$ $(x \geq 0, \mathbf{1}^T x = 1)$ 与$y \in R^n$ $(y \geq 0, \mathbf{1}^T y = 1)$, 则赢得分别为

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j.$$

分别用S_1^* 与S_2^* 表示两局中人的混合策略集。如果存在混合策略$x^* \in S_1^*$ 与$y^* \in S_2^*$ 使得

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^* = \max_{x\in S_1^*} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j^*,$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i^* y_j^* = \max_{y\in S_2^*} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i^* y_j,$$

则称(x^*, y^*)为此双矩阵博弈的一个Nash 平衡（均衡）点. 此时，两局中人都不能通过单方改变自己的策略来获得更大的利益。

Theorem 8.11 (Nash, 1950) 在混合策略意义下，任何n ($n \geq 2$) 人有限非零和非合作博弈必存在平衡点(在平衡点处，任何局中人均不能通过单方改变自己的策略来获得更大的利益)。

Example 8.7.1 (囚徒困境(Prisoner's Dilemma)) 属双矩阵博弈。局中人I 与II 的赢得矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} -1 & -12 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \textit{and} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -12 & -3 \end{pmatrix}.$$

纳什均衡点存在且唯一：双方均坦白，各获刑三个月。

大猪 \ 小猪	action	wait
action	(5,1)	(4,4)
wait	(9,-1)	(0,0)

Table 8.1: Win > Tie > Lose > Crash.

I \ II	swerve/退让	straight/进攻
swerve/退让	(Tie,Tie)	(Lose,Win)
straight/进攻	(Win,Lose)	(Crash,Crash)

Example 8.7.2 (智猪博弈(Nash, 1950)) 假设猪圈里有一头大猪、一头小猪。猪圈的一头有猪食槽，另一头安装着控制猪食供应的按钮，按一下按钮会有*10*个单位的猪食进槽，但是谁去按按钮就会首先付出2个单位的成本。若大猪先到槽边，大小猪吃到食物的收益比是*9:1;* 同时到槽边，收益比是*7:3;* 小猪先到槽边，收益比是*6:4;* 那么，在两头猪都有智慧的前提下，最终结果是小猪选择等待。 纳什均衡点存在且唯一：即大猪行动，小猪等待。

启示：小企业需学会如何"搭便车"，在某些时候如果能够注意等待，让其他大企业首先开发市场，是一种明智的选择。这时候有所不为才能有所为！

Example 8.7.3 (Game of Chicken) 两人狭路相逢，每人有两个行动选择：一是退下来，一是进攻。如果一方退下来，而对方没有退下来，对方获得胜利，这人就很丢面子；如果对方也退下来，双方则打个平手；如果自己没退下来，而对方退下来，自己则胜利，对方则失败；如果两人都前进，那么则两败俱伤。因此，对每个人来说，最好的结果是，对方退下来，而自己不退。

纳什均衡点存在, 但不唯一：一方退让，一放进攻*!* 如果一方理智，一方强硬，则理智的一方通常会吃亏。

Hawk-Dove (variant of game of Chicken) *Imagine that two players (animals) are contesting an indivisible resource and both can choose between two strategies: Hawk or Dove. Suppose V is the value of the contested resource, and C is the cost of an escalated fight.*

- *Nash equilibria exist but not unique: one plays hawk and the other plays dove.*
- *If $C \le V$, the resulting game is not a game of Chicken but is instead a Prisoner's Dilemma. Which one is the equilibrium?*
- 纳什均衡点唯一的博弈，博弈结果可预测；否则，难以预测；但可以断言：不会发生鱼死网破、两败俱伤的情况。
- 在外交上的应用：政治博弈、强硬-让步/谈判

Table 8.2: Assume $C > V > 0$.

I \ II	Dove	Hawk
Dove	$(\frac{V}{2},\frac{V}{2})$	$(0,V)$
Hawk	$(V,0)$	$(\frac{V-C}{2},\frac{V-C}{2})$

8.7.2 二人无限零和博弈

至少有一个局中人的纯策略集为无限集（可数集、不可数集），赢得函数之和恒为零。此时，一个混合策略是指取每个纯策略的概率（分布/密度）。局中人I 的赢得函数可以为如下四种形式

$$
\begin{aligned}
&H(x,y)\\
&H(X,y)=\int_{S_1}H(x,y)\mathrm{d}F_X(x)\\
&H(x,Y)=\int_{S_2}H(x,y)\mathrm{d}F_Y(y)\\
&H(X,Y)=\int_{S_1}\int_{S_2}H(x,y)\mathrm{d}F_X(x)\mathrm{d}F_Y(y).
\end{aligned}
$$

Definition 8.12 如果有

$$\sup_X\inf_Y H(X,Y)=\inf_Y\sup_X H(X,Y)=V_G,$$

则称V_G为对策G 的值。称使上式成立的(X^*,Y^*) 为对策的解（平衡点），X^* 与Y^* 分别为两局中人的最优策略。

Theorem 8.13 (X^*,Y^*) 为对策$G=\{S_1,S_2;H\}$ 的解的充要条件为：对任意$X\in\bar{X}$, $Y\in\bar{Y}$, 都有

$$H(X,Y^*)\le H(X^*,Y^*)\le H(X^*,Y).$$

当$S_1=S_2=[0,1]$, $H(x,y)$ 连续时，称这样的对策为连续对策。

Theorem 8.14 对任何连续对策一定有$\sup_X\inf_Y H(X,Y)=\inf_Y\sup_X H(X,Y)$.

8.7.3 合作博弈

- 局中人可以结盟（合作）
- 博弈结束后，局中人需对赢得进行再分配
- 所有局中人可以形成若干联盟，每个局中人仅能参加一个联盟，联盟的所得需在联盟内再分配
- 一般地，合作可以提高联盟的所得，也可以提高每个局中人的所得
- 联盟能否形成，以何种形式存在，一个局中人是否参加联盟，以及参加哪个联盟，不仅取决于对策的规则，更取决于赢得的再分配方案是否合理
- 合作博弈主要研究联盟形成的条件，联盟的稳定性等
- 通俗地讲，如果某局中人参加一个联盟后的赢得不少于不参加联盟时的赢得，该局中人才会参加结盟。

References

[TsinghuaOR] 清华大学运筹学教材编写组编运筹学.

[YuJ1] 俞建，科学出版社《博弈论与非线性分析》

[YuJ2] 俞建，科学出版社《博弈论与非线性分析绪论》