整数规划简介

杨俊锋

南京大学数学系
(jfyang@nju.edu.cn)

October 26, 2014

提纲

整数规划简介

分支定界法

割平面法

提纲

整数规划简介

分支定界法

割平面法

整数规划 (Integer Programming, IP)

- 要求一部分或全部决策变量取整数值的规划问题称为整数规划(integer programming).
- 不考虑整数约束条件，由余下的目标函数和约束条件构成的规划问题称为该整数规划问题的松弛问题(relaxed problem).
- 若该松弛问题是一个线性规划，则称该整数规划为整数线性规划(integer linear programming, ILP).

整数线性规划数学模型的一般形式：

$$
\begin{aligned}
\min_x / \max_x \quad & z = c^T x \\
\text{s.t.} \quad & Ax = b \\
& x \geq 0 \\
& x \text{ 的部分或全部分量为整数}
\end{aligned}
$$

通过对松弛问题的最优解进行“舍入化整" 得到的点，或者不可行，或者可行但非最优。因此，必须对整数规划另行研究。

整数线性规划问题的分类

- 纯整数线性规划(pure integer programming)：指全部决策变量都必须取整数值的整数线性规划。
- 混合整数线性规划(mixed integer programming)：决策变量中有一部分必须取整数值，另一部分可以不取整数值的整数线性规划。
- 0-1型整数线性规划(0-1 programming)：决策变量只能取值0或1的整数线性规划。

整数规划的例子

工厂A1和A2生产某种物资。由于该种物资供不应求，故需要再建一家工厂。相应的建厂方案有A3和A4两个。这种物资的需求地有B1, B2, B3, B4四个。各工厂年生产能力、各地年需求量、各厂至各需求地的单位物资运费c_{ij}，见下表

	B1	B2	B3	B4	年生产能力
A1	2	9	3	4	400
A2	8	3	5	7	600
A3	7	6	1	2	200
A4	4	5	2	5	200
年需求量	350	400	300	150	

工厂A3或A4开工后，每年的生产费用估计分别为1200万或1500万元。现要决定应该建设工厂A3还是A4, 才能使今后每年的总费用最少。

整数规划的例子

这是一个物资运输问题，特点是事先不能确定应该建A3 还是A4 中哪一个，因而不知道新厂投产后的实际生产物资。为此，引入0-1变量：

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{若建厂;} \\ 0, & \text{若不建厂.} \end{cases} \quad (i = 1, 2).$$

整数规划的例子

设x_{ij}为由A_i运往B_j的物资数量，单位为千吨, z表示总费用，单位万元。则该规划问题的数学模型可以表示为：

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} + 1200y_1 + 1500y_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 350 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 400 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 300 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 150 \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 400 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 600 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 200y_1 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 200y_2 \\
& x_{ij} \geq 0\,(i,j = 1,2,3,4),\, y_i \in \{0,1\}\,(i = 1,2).
\end{aligned}
$$

整数规划的例子

Remark

1. 最优解中y_1 与y_2 不会同时为0, 因为若不建厂，供给小于需求；
2. 最优解中y_1 与y_2 不会同时为1, 因为若同时建厂花费增加；
3. 分别计算$y = (1, 0)$ 与$y = (0, 1)$的花费再决定如何选择，相当于枚举法；当变量个数较大时，枚举法不可行。

整数规划的例子

现有资金总额为B, 可供选择的投资项目有n个，项目j所需投资额和预期收益分别为a_j 和c_j，$j = 1, 2, \ldots, n$. 此外由于种种原因，有三个附加条件：

- 若选择项目1, 就必须同时选择项目2. 反之不一定;
- 项目3 和4 中至少选择一个;
- 项目$5, 6, 7$ 中恰好选择2 个。

应该怎样选择投资项目，才能使总预期收益最大。

整数规划的例子

对每个投资项目都有被选择和不被选择两种可能，因此分别用0和1表示，令x_j表示第j 个项目的决策选择，记为：

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{对项目}j\text{投资;} \\ 0, & \text{对项目}j\text{不投资.} \end{cases} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

投资问题可以表示为:

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq B, \\ & x_2 \geq x_1, \\ & x_3 + x_4 \geq 1, \\ & x_5 + x_6 + x_7 = 2, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \; j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

指派问题(分配问题)

人事部门欲安排四人到四个不同岗位工作，每个岗位一个人。经考核四人在不同岗位的成绩（百分制）如表所示，如何安排他们的工作使总成绩最好。

人员 \ 工作	A	B	C	D
甲	85	92	73	90
乙	95	87	78	95
丙	82	83	79	90
丁	86	90	80	88

设$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{分配第}i\text{人做}j\text{工作;} \\ 0, & \text{不分配第}i\text{人做}j\text{工作.} \end{cases}$

指派问题(分配问题)

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = {} & 85x_{11} + 92x_{12} + 73x_{13} + 90x_{14} \\
& +95x_{21} + 87x_{22} + 78x_{23} + 95x_{24} \\
& +82x_{31} + 83x_{32} + 79x_{33} + 90x_{34} \\
& +86x_{41} + 90x_{42} + 80x_{43} + 88x_{44} \\
\text{s.t.} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \\
& x_{ij} \in \{0, 1\},\ i, j = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}
$$

整数规划问题解的特征

- 整数规划问题的可行解集合是它松弛问题可行解集合的一个子集，任意两个可行解的凸组合不一定满足整数约束条件，因而不一定仍为可行解。
- 整数规划问题的可行解一定是它的松弛问题的可行解（反之不一定）。
- 整数规划问题的最优解的目标函数值不会优于其松弛问题的最优解的目标函数值。

例子

设整数规划问题如下

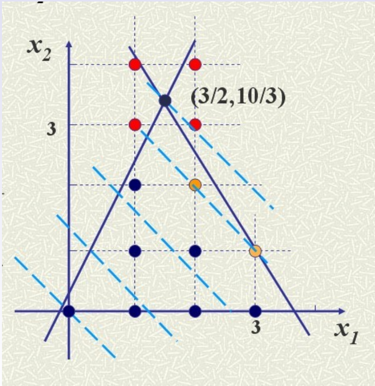
$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 14x_1 + 9x_2 \leq 51 \\
& -6x_1 + 3x_2 \leq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且为整数.}
\end{aligned}
$$

首先不考虑整数约束，得到松弛线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 14x_1 + 9x_2 \leq 51 \\
& -6x_1 + 3x_2 \leq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

例子

用图解法求出最优解为：$(x_1, x_2) = (3/2, 10/3)$, 且有$z = 29/6$. 如用舍入取整法可得到4个点, 即$(1,3)$, $(2,3)$, $(1,4)$, $(2,4)$. 它们都不是整数规划的最优解。按整数规划约束条件，其可行解肯定在线性规划问题的可行域内且为整数点。故整数规划问题的可行解集是一个有限集。易见，$(2,2)$, $(3,1)$ 是该整数线性规划的最优解。



提纲

分支定界法(Branch and bound method) 的解题步骤

1. 求整数规划的松弛问题最优解；若松弛问题的最优解满足整数要求，则得到整数规划的最优解，否则转下一步；
2. 分支：任意选一个非整数解的变量x_i, 在整数规划中加上约束：
$$x_i \leq [x_i],\quad x_i \geq [x_i] + 1$$
组成两个新的整数规划问题，称为分支。
3. 求解所有分支问题的松弛问题，得到各松弛问题的解及目标函数值。
   - 若某分支的松弛问题的解是整数，并且目标函数值优于其它分支问题的松弛问题的目标值，则将其它分支剪去不再计算；
   - 若还存在某分支，其松弛问题的解为非整数，并且目标值优于目前找到的最优的整数解的目标值，则需要(1) 为原整数规划问题的最优目标函数值定下界与上界; (2) 继续分支，再检查，直到得到最优解。

分支定界法– 例子

用分支定界法求解整数规划问题

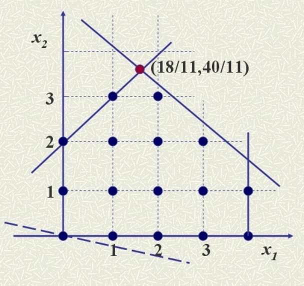
$$
\begin{aligned}
\text{ILP:}\quad \min \quad & z = -x_1 - 5x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 \geq -2 \\
& 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\
& x_1 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且均为整数.}
\end{aligned}
$$

分支定界法– 例子

首先去掉整数约束，变成一般线性规划问题(即原整数规划问题的松驰问题)

$$\begin{aligned} \text{LP:} \quad \min \quad & z = -x_1 - 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 \geq -2 \\ & 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ & x_1 \leq 4, \ x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

解得$x = (18/11, 40/11)$, $z = -218/11 \approx -19.8$, 此亦为原整数规划问题最优函数值的下界.



分支定界法– 例子

对于$x_1 = 18/11 \approx 1.64$, 利用约束条件$x_1 \le 1$ 与$x_1 \ge 2$ 将原整数规划问题分支为ILP1 与ILP2:

$$
\begin{aligned}
\text{ILP1:} \quad \min \quad & z = -x_1 - 5x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 \ge -2 \\
& 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\
& x_1 \le 4 \\
& x_1 \le 1 \\
& x_1, x_2 \ge 0 \text{ 且均为整数.}
\end{aligned}
$$

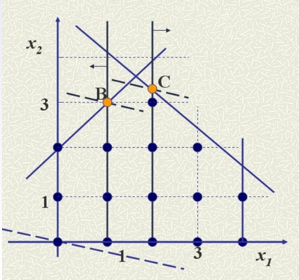
$$
\begin{aligned}
\text{ILP2:} \quad \min \quad & z = -x_1 - 5x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 \ge -2 \\
& 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\
& x_1 \le 4 \\
& x_1 \ge 2 \\
& x_1, x_2 \ge 0 \text{ 且均为整数.}
\end{aligned}
$$

分支定界法– 例子

称与ILP1/ILP2 相应的松弛问题为LP1/LP2. 解LP1 与LP2 得

$$LP1: \quad x = (1,3), z = -16$$
$$LP2: \quad x = (2, 10/3), z = -56/3 \approx -18.7.$$

- 分支ILP1 已探明（最优整数解为$x = (1,3)$, 最优函数值$z = -16$），此分支停止计算；
- 由于LP2的最优函数值$-56/3 < -16$, 故分支ILP2 可能存在函数值小于-16的整数解, 因此该分支需继续计算。
- 定界：$-56/3 \leq$ ILP 的最优函数值 ≤ -16.



分支定界法– 例子

分支较多时，为ILP 的最优函数值定界的具体步骤如下：

1. 将所有分支分为两类：松弛问题的最优解为整数解的分支、松弛问题的最优解不是整数解的分支；
2. 上界*ub* 应定为目前找到的最好的整数解所对应的函数值；若尚未找到整数解，则定为$+\infty$;
3. 若某分支所对应的松弛问题的最优函数值大于*ub*, 则应剪去该分支(无论松弛问题的最优解是否为整数解)；
4. 而下界*lb* 则应定为尚未找到整数解的所有分支(已剪去的分支除外)所对应的松弛问题的最优函数值的最小者。若剪去所有可以剪掉的分支后，剩余分支均已找到整数解，则最优解已定，停止结算。

分支定界法– 例子

在ILP2 中分别再加入条件$x_2 \le 3$ 与$x_2 \ge 4$, 得如下两分支：

$$
\begin{aligned}
\text{ILP21:}\quad \min \quad & z = -x_1 - 5x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 \ge -2 \\
& 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\
& x_1 \le 4, x_1 \ge 2 \\
& x_2 \le 3 \\
& x_1, x_2 \ge 0 \text{ 且均为整数.}
\end{aligned}
$$

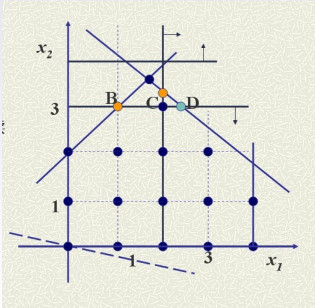
$$
\begin{aligned}
\text{ILP22:}\quad \min \quad & z = -x_1 - 5x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 \ge -2 \\
& 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\
& x_1 \le 4, x_1 \ge 2 \\
& x_2 \ge 4 \\
& x_1, x_2 \ge 0 \text{ 且均为整数.}
\end{aligned}
$$

分支定界法– 例子

分别求出松弛问题LP21和LP22的最优解.

$$LP21: \quad x = (2.4, 3), z = -87/5 \approx -17.4$$
$$LP22: \quad \text{无可行解, 剪支.}$$

因为没有找到更好的整数解，故ub无需更新；LP21 的最优解不是整数点，且最优函数值小于$ub = -16$, 因此$lb = -87/5$, 需继续对ILP21 进行分支。



分支定界法– 例子

加入$x_1 \le 2$ 与$x_1 \ge 3$, 继续对ILP21 进行分支:

$$
\begin{aligned}
\text{ILP211:}\quad \min\quad & z = -x_1 - 5x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 - x_2 \ge -2 \\
& 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\
& x_1 \le 4, x_1 \ge 2, x_2 \le 3 \\
& {\color{red} x_1 \le 2} \\
& x_1, x_2 \ge 0 \text{ 且均为整数.}
\end{aligned}
$$

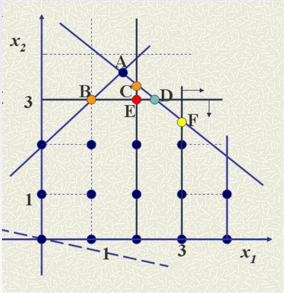
$$
\begin{aligned}
\text{ILP212:}\quad \min\quad & z = -x_1 - 5x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 - x_2 \ge -2 \\
& 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\
& x_1 \le 4, x_1 \ge 2, x_2 \le 3 \\
& {\color{red} x_1 \ge 3} \\
& x_1, x_2 \ge 0 \text{ 且均为整数.}
\end{aligned}
$$

分支定界法– 例子

分别求出松弛问题LP211和LP212的最优解.

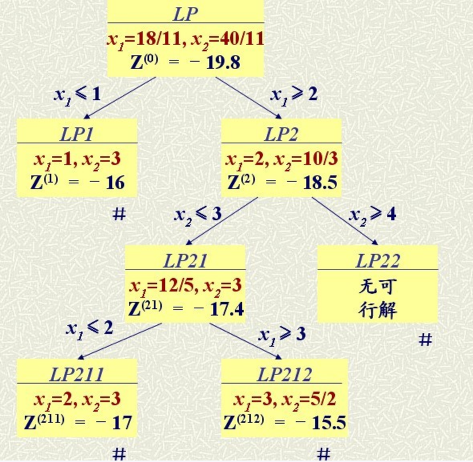
$$LP211: \quad x = (2,3), z = -17$$
$$LP212: \quad x = (3,2.5), z = -15.5.$$

找到更好的整数解，故更新$ub = -17$; LP212 的最优函数值大于ub, 故可以剪支。此时，找到最优解$(2,3)$.



分支定界法– 例子

原整数规划问题的最优解为(2, 3), 最优函数值为-17.



分支定界法

优点： 通过解LP 来解ILP, 而LP 的理论、算法、软件等已相当成熟。

缺点： 对大、难的ILP 问题，分支分层可能会非常多，本质上相当于枚举法；分支分层很多时，需解的LP数量相当可观；分层越深，LP 的约束条件越多，程序实现需考虑到简化约束条件、热启动等加速计算的技巧。

其他问题： 如何快速改善最优函数值的上下界；如何分支更合理；如何加速剪枝；与割平面法结合使用；推广到解混合整数线性规划问题...

程序与软件

解整数线性规划问题的软件[1]:

- LINGO: Linear Interactive and General Optimizer 的缩写，即“交互式的线性和通用优化求解器”，由美国LINDO系统公司（Lindo System Inc.）推出的，可以用于求解非线性规划，也可以用于一些线性和非线性方程组的求解等，功能十分强大，是求解优化模型的最佳选择。
- CPLEX: 提供灵活的高性能优化程序，解决线性规划(Linear Programming)、二次方程规划(Quadratic Programming)、二次方程约束规划(Quadratically Constrained Programming) 和混合整型规划(Mixed Integer Programming) 问题。

[1] 摘自百度百科

Matlab 中无解一般整数规划问题的程序；Matlab 中解0-1 线性规划问题的命令“bintprog" (方法：分支定界), 求解问题形式：

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & Cx = d \\ & x \text{ binary.} \end{aligned}$$

调用格式：

[x,fval,exitflag,output] = bintprog(f,A,b,C,d,x0,options).

作业

用分支定界法求解（松弛为题可借助计算机或用图解法求解）

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -4x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 25 \\ & 4x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \text{且均为整数}. \end{aligned}$$

提纲

整数规划简介

分支定界法

割平面法

割平面法(cutting plane method)

割平面法仍然是用解线性规划的方法去解整数线性规划问题，其基本思想如下：

首先不考虑变量是整数这一条件，解松弛问题。若得到非整数的最优解，则增加能割去非整数解的线性约束条件(或称为割平面)，使得原可行域被切割掉一部分，而这部分只包含非整数解，不包含任何整数可行解。

割平面方法就是指出怎样找到适当的割平面(通常需要反复切割很多次)，使得切割后最终得到这样的可行域：它的一个整数极点恰好是问题的最优解。

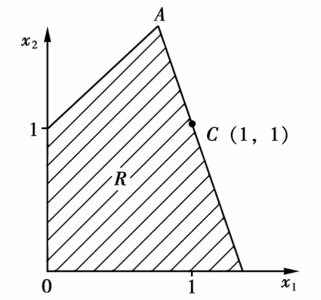
以下仅讨论纯整数线性规划的情形。

割平面法– 例子

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = -x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 \le 1 \\
& 3x_1 + x_2 \le 4 \\
& x_1, x_2 \ge 0 \text{ 且为整数.}
\end{aligned}
$$

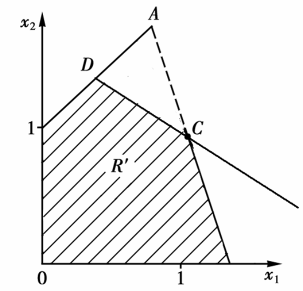
先不考虑整数约束条件，求得相应的松弛问题的最优解为：

$$x_1 = 3/4, x_2 = 7/4, \min z = -5/2.$$



割平面法– 例子

现设想，如能找到像CD 那样的直线去切割可行域R, 去掉三角形域ACD, 那么具有整数坐标的C 点$(1, 1)$ 就是域R' 的一个极点。



若在域R' 上优化目标函数, 而得到的最优解又恰巧在C 点，则得到原整数线性规划问题的解。

解法的关键是怎样构造一个这样的“割平面" CD, 尽管它可能不是唯一的，也可能不是一步能求到的。

割平面法– 例子

在原问题的前两个不等式中增加非负松弛变量x_3 与x_4, 使两式变成等式约束：

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 &= 4. \end{aligned}$$

不考虑整数约束条件，用单纯形表解题，见下表：

x_1	x_2	x_3	x_4	b
-1	1	1	0	1
3	1	0	1	4
-1	-1	0	0	0

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	-1/4	1/4	3/4
0	1	3/4	1/4	7/4
0	0	1/2	1/2	5/2

割平面法– 例子

由于目前得到的解不满足整数要求，需要考虑将可行域割去一部分，再求最优解，而割去的部分不含整数可行点。可从最终计算表中得到非整数变量对应的关系式：

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 &= \frac{3}{4} \\ x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 &= \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

为了得到整数最优解，将上式变量的系数和常数项都分解成整数和非负真分数两部分之和：

$$\begin{aligned} (1+0)x_1 + (-1+\frac{3}{4})x_3 + (0+\frac{1}{4})x_4 &= 0+\frac{3}{4} \\ (1+0)x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 &= 1+\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

割平面法– 例子

将整数部分与分数部分分开，分别移到等式左右两边，得到：

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= \frac{3}{4} - (\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4) \\ x_2 - 1 &= \frac{3}{4} - (\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4). \end{aligned}$$

由x_1, x_2 为非负整数可知x_3, x_4 亦为非负整数，故上式左端为整数，因此右端也为整数。因此有

$$\frac{3}{4} - (\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4) \leq 0$$

或

$$-3x_3 - x_4 \leq -3.$$

此即为一个切割方程，将其作为约束条件加入原来的问题中，再解。引入非负松弛变量x_5:

$$-3x_3 - x_4 + x_5 = -3.$$

割平面法– 例子

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	-1/4	1/4	0	3/4
0	1	3/4	1/4	0	7/4
0	0	-3	-1	1	-3
0	0	1/2	1/2	0	5/2

用对偶单纯形法解之：

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	0	1/3	-1/12	1
0	1	0	0	1/4	1
0	0	1	1/3	-1/3	1
0	0	0	1/3	1/6	2

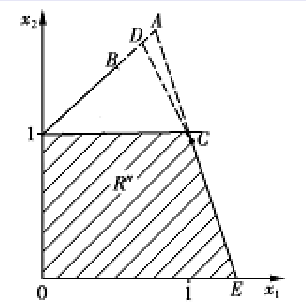
由于x_1, x_2 的值已都是整数，解题完成。

割平面法– 例子

注：新得到的约束条件$-3x_3 - x_4 \le -3$ 等价于$x_2 \le 1$, 仅需将

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 &= 4 - 3x_1 - x_2, \end{aligned}$$

代入即可。而$x_2 \le 1$ 将可行域中$x_2 > 1$ 的部分切割掉，被切割掉的部分不含整数点，且在切割后的可行域上优化目标函数恰好得到整数解。



求切割方程的步骤

1. 设x_i 是相应线性规划最优解中为分数值的一个基变量（若不存在，则已经最优），由最终的单纯形表得

$$x_i + \sum_j y_{ij} x_j = b_i,$$

其中$i \in Q$ (Q 表示基变量的下标集合), $j \in K$ (K 表示非基变量的下标集合).

2. 将b_i 和y_{ij} 都分解成整数部分N 与非负真分数f 之和，即

$$\begin{aligned} b_i &= N_i + f_i \\ y_{ij} &= N_{ij} + f_{ij}, \end{aligned}$$

其中$0 < f_i < 1$, $0 \le f_{ij} < 1$. 代入得

$$x_i + \sum_j N_{ij} x_j - N_i = f_i - \sum_j f_{ij} x_j,$$

求切割方程的步骤

3. 考虑变量(包括松弛变量)为整数的约束条件(当然还有非负的条件)。这时，上式由左边看必须是整数, 但从由右边看，因为$0 < f_i < 1$, 所以不能为正，即

$$f_i - \sum_j f_{ij} x_j \leq 0.$$

此即为一个切割方程。

易见：（1）切割方程真正进行了切割，因为至少把非整数最优解这一点割掉了；（2）没有割掉整数解，这是因为相应的线性规划的任意整数可行解都满足切割方程。

Remark

(1) 先对切割方程化简，使系数均为整数，再引入松弛变量；
（*2*）切割方程加入最后一张单纯形表后，右端项一定为负（其他分量均为正），因此使用对偶单纯形法仅需一次旋转运算。

割平面法

割平面法自1958年由Gomory 提出后便引起广泛关注。但割平面法经常遇到收敛很慢的情形，因而很少单独使用。割平面法可与其他方法，如分支定界法，配合使用，通常是有效的。

参考书

清华大学运筹学教材编写组编
运筹学.