运筹作业

131110009 王瑾旸

1. 比尔霍夫定理

(a) 证：按照定义，所求的多边形为：

$$\begin{cases} -x \le 0 \\ Cx = d \end{cases}$$

若 X 为置换矩阵，则存在 1 到 n 的一个排列 $j_1 j_2 j_3 \cdots j_n$，使得 X 中有且仅有

$X_{1j_1}, X_{2j_2}, \cdots, X_{nj_n}$ 这 n 项为 1，其余均为 0。

则 $A_{J(\hat{x})}$ 为：（不积极的约束对应的行均记为 0，对结果没有影响）

$$\begin{pmatrix} E_I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}，其中 E_i = \begin{pmatrix} -1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

，对角线元中且仅有第 j_i 个为 0。

下面求 $rank\begin{pmatrix} A_{J(\hat{x})} \\ C \end{pmatrix}$，由于 $j_1 j_2 j_3 \cdots j_n$ 为一个排列，因此这些指标互不相同。将 C 中的后 n 行与 A 中的 0 对应的行交换位置，可以得到：

$$rank\begin{pmatrix} A_{J(\hat{x})} \\ C \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_n \\ I & I & I & I \end{pmatrix}，其中 B_i = \begin{pmatrix} -1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

可知：

$$rank\begin{pmatrix} A_{J(\hat{x})} \\ C \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_n \\ I & I & I & I \end{pmatrix} \geq rank\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_n \end{pmatrix} = n^2$$

所以 $rank\begin{pmatrix} A_{J(\hat{x})} \\ C \end{pmatrix} = n^2$，因此 X 为顶点。

(b) 先求 $rank(C)$。由于 C 的前 n 行和和后 n 行和相等，均为 $1_{n^2}^T$，因此秩最多为 2n-1。

再由 C 可通过行变换变为：$\begin{pmatrix} I & I & \cdots & I \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1^T \end{pmatrix}$，这个矩阵的秩为 2n-1，因此 $rank(C)$ =2n-1。

由之前的结论，若 x 为顶点，则 x 中至多有 2n-1 个非零元。因此，必然存在 X 的某行或者某列，使得改行只有一个非零元（否则与至多 2n-1 个非零元矛盾）。由双随机矩阵的定义，该行的非零元必定为 1。则 X 除去该行和该列后剩余部分组成的矩阵为 $(n-1)\times(n-1)$ 维的双随机矩阵。从 A 和 C 中去掉已满足的约束后，A 的剩余部分为 $(n-1)^2\times(n-1)^2$ 对角阵，C 的剩余部分为相同格式的 $2(n-1)\times(n-1)^2$ 阶矩阵，所以剩余部分的秩为 n-1，因此这个 $(n-1)\times(n-1)$ 的矩阵依然是 $(n-1)\times(n-1)$ 双随机矩阵的顶点。这样的过程可以依次做下去。由归纳可知，顶点均为置换矩阵。

2. 高曼塔克定理

(a) 记：$A_1 = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_M \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{M+1} & a_{M+2} & \cdots & a_N \end{pmatrix}$

则原命题为：

$$\exists v, s.t \begin{pmatrix} a_1^T \\ A_1^T \\ A_2^T \\ -A_2^T \end{pmatrix} v \leq \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由择一定理，得若原命题不成立，则下面的命题成立：

$$\exists u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\s\end{pmatrix}, s.t\begin{cases}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\s\end{pmatrix}\geq 0\\ \begin{pmatrix}a_1 & A_1 & A_2 & -A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\s\end{pmatrix}=0\\ \begin{pmatrix}\varepsilon & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\s\end{pmatrix}<0\end{cases}$$

由第三个不等式得：x>0。令 $w=\begin{pmatrix}1\\ \frac{y}{x}\\ \frac{z-s}{x}\end{pmatrix}$，即为题目中第二个命题所对的形式。

(b) 考虑互补松弛条件：

$$\begin{cases}z_i^*=0, i=1,\cdots,M\\ z_i^*>0, i=M+1,\cdots,N\\ z_i^*=0, i=N+1,\cdots,m\end{cases}$$

$$b_i-a_i'(x^*+\varepsilon v)=b_i-a_i'x^*-\varepsilon a_i'v=0$$
$$i=M+1,\cdots,N$$

因此 $x^*+\varepsilon v$ 也满足互补松弛条件，因而是最优解。

此时，找适当的 ε 使得 $\varepsilon a_i'v$ 较小，此时有：

$$\begin{cases}a_1'(x^*+\varepsilon v)<b\\ a_i'(x^*+\varepsilon v)\leq b, i=2,\cdots,N\\ a_i'(x^*+\varepsilon v)=b, i=N+1,\cdots,M\\ a_i'(x^*+\varepsilon v)<b, i=M+1,\cdots,m\end{cases}$$

因此存在满足所给条件的最优解。

(c) 与上问同理，首先 $z^* + \delta w$ 满足互补松弛条件（其中 $w = \begin{pmatrix} 1 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$）：

$$\begin{cases} b_i - a_i' x^* = 0, i = 1, \cdots, M \\ b_i - a_i' x^* = 0, i = M+1, \cdots, N \\ b_i - a_i' x^* < 0, i = N+1, \cdots, m \end{cases}$$

$$z_i^* = 0, i = N+1, \cdots, m$$

因此 $z^* + \delta w$ 也是最优解。此时找适当小的 δ ，有：

$$\begin{cases} z_1^* > 0 \\ z_i^* \ge 0, i = 2, \cdots, M \\ z_i^* > 0, i = M+1, \cdots, N \\ z_i^* = 0, i = N+1, \cdots, m \end{cases}$$

因此存在满足条件的最优解。

(d) 由(b)和(c)知，存在一对最优解 $\tilde{z}$ 和 $\tilde{x}$ ，使得 $\tilde{z}_i = 0$ 和 $b_i - a_i' \tilde{x} = 0$ 仅在 i=2,⋯,M 内同时取到，即同时取 0 的约束个数至多为 M-1。

依次重复上面的过程，不断减小同时为 0 的项的个数，由归纳可知存在严格互补的最优解对。

3. 单纯形算法

程序：

```
A=[1,-2,-2,3;2,-3,-1,1;0,0,1,0;-1,0,0,0;0,-1,0,0;0,0,-1,0;0,0,0,-1]
b=[0;0;1;0;0;0;0]
c=[-3;5;-1;2]
x=[0;0;0;0]
J=[4,5,6,7]
y=[0,0,0,0]
z=[0;0;0;0;0;0;0]
while 1
b0=b-A*x;
i=0;
j=1;
A0=A(J,:)';
z(:)=0;
```

```
z(J)=-inv(A0)*c
k=0;
for i=1:7
if z(i)<0
k=i;
break
end
end
if k==0
break
end
for i=1:4
if J(i)==k;
y(i)=-1;
else
y(i)=0;
end
end
deltaX=inv(A0')*y'
A1=A*deltaX
a=min(b0(find(A1(:)>0))./A1(find(A1(:)>0)));
j=intersect(find(b0./A1(:)==a),find(A1(:)>0));
j=j(1);
for i=1:4
if J(i)==k;
J(i)=j;
end
end
J=sort(J)
x=x+a*deltaX;
end
x
```

输出：（最终结果）

```
x =

    0.5000
         0
    1.0000
         0
```

4. 凸函数性质

(a) 在定义域上$\phi'(x)=1-\frac{1}{1+x},\phi''(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$，因此由二阶导大于 0 可知$\phi$是凸的，因

此最小值点处$\phi'(x)=0$，求得 x=0 时取到最小值。

(b) $\Delta x_{nt}=-(\Delta\phi)^{-1}\nabla\phi=-(\frac{1}{(1+x^2)})^{-1}\frac{x}{1+x}=-x-x^2$

因此有：$x_{k+1}=x_k+\Delta x_{nt}=-x_k{}^2$

因此有二次收敛性。

(c) 当$x\in(-1,1)$时牛顿法收敛于最小值点，收敛速度为二次收敛；$x\in[1,+\infty)$时发散（出现不在定义域内的点）。

5. 不可行原始对偶路径算法

程序：

```
A=[1,-2,-2,3;2,-3,-1,1;0,0,1,0;-1,0,0,0;0,-1,0,0;0,0,-1,0;0,0,0,-1];
b=[0;0;1;0;0;0;0];
c=[-3;5;-1;2];
x0=[0;0;0;0];
z=[1;1;1;1;1;1;1];
s0=[1;1;1;1;1;1;1];
delta=0.0001;
for j=1:100
p1=A*x0+s0-b;
d1=A'*z+c;
if norm(p1)<delta && norm(d1)<delta && dot(s0,z)<delta;
break;
end;
S=diag(s0);
Z=diag(z);
m=size(A,1);n=size(A,2);
A0=[zeros(m,m),A,eye(m);A',zeros(n,n),zeros(n,m);S,zeros(m,n),Z];
b0=[-p1;-d1;-s0.*z];
X=A0\b0;
z1=X(1:7);
x1=X(8:11);
s1=X(12:18);
p2=1;
for i=1:7
if s0(i)>0 && s1(i)<0
p2=min(p2,-s0(i)/s1(i));
end
end
d2=1;
for i=1:7
```

```
if z(i)>0 && z1(i)<0
d2=min(d2,-z(i)/z1(i));
end
end
s=((s0+p2*s1)'*(z+d2*z1))/(s0'*z);
s=s*s*s;
b0(12:18)=b0(12:18)+s*(s0'*z/m)*ones(7,1);
X=A0\b0;
z1=X(1:7);
x1=X(8:11);
s1=X(12:18);
p2=1;
for i=1:7
if s0(i)>0 && s1(i)<0
p2=min(p2,-s0(i)/s1(i));
end
end
d2=1;
for i=1:7
if z(i)>0 && z1(i)<0
d2=min(d2,-z(i)/z1(i));
end
end
x0=x0+min(1,0.99*p2)*x1;
s0=s0+min(1,0.99*p2)*s1;
z=z+min(1,0.99*d2)*z1;
end
x0
```