MATH: Operations Research **2014-15 First Term**

Handout 1: Introduction to Linear Programming

Instructor: Junfeng Yang (jfyang@nju.edu.cn) *September 2, 2014*

Contents

1.1 简介

线性规划 (Linear Programming, LP) 是运筹学中研究较早、发展较快、应用广泛、方法较成熟的一个重要分支。它研究线性约束条件下线性目标函数的极值问题的数学理论和方法。

求解线性不等式系统至少可以追溯至法国数学家 Fourier (1768-1830). 1939年苏联数学家 Kantorovich 在《生产组织与计划中的数学方法》一书中提出线性规划问题，未引起重视。1947年美国数学家 Dantzing 提出求解线性规划的单纯形法，为这门学科奠定了基础。1947年美国数学家 von Neumann 提出对偶理论，开创了线性规划的许多新的研究领域，扩大了它的应用范围和解题能力。1951年美国经济学家 Koopman 把线性规划应用到经济领域，为此与 Kantorovich 一起获1975年诺贝尔经济学奖。20世纪50年代后对线性规划进行大量的理论研究，并涌现出一大批新的算法，如对偶单纯形法、灵敏度分析、参数规划问题、互补松弛定理、分解算法等。线性规划的研究成果还直接推动了其他数学规划问题包括整数规划、随机规划和非线性规划的算法研究。由于数字电子计算机的发展，出现了许多线性规划软件，如 CPLEX, 可以很方便地求解大规模、超大规模的线性规划问题。1979年苏联数学家 Khachian 提出解线性规划问题的椭球算法，并证明它是多项式时间算法。1984年美国贝尔电话实验室的印度数学家 Karmarkar 提出解线性规划问题的新的多项式时间算法：内点法, 既具有好的理论性质，又有很高的的数值计算效率。

1.2 线性规划的例子

Example 1.2.1 (生产问题) 某工厂在计划期内要安排生产*I*、*II*两种产品，已知生产单位产品所需要的设备台时，*A*、*B*两种原材料的消耗，以及资源的限制情况，如下表所示。该工厂每生产一单位产品*I*可获利*2*元，每生产一单位产品*II*可获利*3*元，问工厂应分别生产多少个*I*产品和*II*产品才能使工厂获利最大？

	产品*I*	产品*II*	资源总量
设备	*1*	2	8
材料*A*	*4*	*0*	*16*
材料*B*	*0*	*4*	*12*

设x_1, x_2分别表示计划期产品*I*、*II*的产品，则有下面线性规划模型：

$$\begin{aligned} \max z = 2x_1 + 3x_2 & & \\ s.t.\ x_1 + 2x_2 &\leq& 8 \\ 4x_1 \qquad &\leq& 16 \\ 4x_2 &\leq& 12 \\ x_1, x_2 &\geq& 0. \end{aligned}$$

Example 1.2.2 (饮食问题) 为了合理、健康、均衡饮食，人体每天必须必须摄入m中不同的营养元素，其中第i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ 种营养元素的日摄入量等于（不得少于） b_i 个单位. 另外，市场上有n种不同的食物，其中第j 种食物的单价为c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. 假设每单位的第j中食物中营养元素i 的含量为a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, n)$, 如何合理安排每种食物的购买量使得既能达到营养需求又最经济？

设第j种食物的购买量为x_j, 则有下面线性规划模型：

$$\begin{aligned}
\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\
s.t.\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= (\geq) & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= (\geq) & b_2 \\
&\ldots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= (\geq) & b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n &\geq & 0.
\end{aligned}$$

Example 1.2.3 (运输问题) 某资源有m个产地，产量分别为$a_1, a_2, \ldots, a_m$; 有n个需求地，需求量分别为$b_1, b_2, \ldots, b_n$. 每单位资源从产地i运往需求地j的运费为c_{ij}. 如何安排运输方案既能满足需求又最经济？

设从产地i运往需求地j的量为x_{ij}, 则有下面线性规划模型：

$$\begin{aligned}
\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & & \\
s.t.\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i,\ i = 1, 2, \ldots, m; \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n; \\
x_{ij} &\geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}$$

(Implication: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.*)*

Example 1.2.4 (世界杯投标问题) 世界杯开赛前组织赌局，规则如下. 任何球迷均可以赌阿根廷、巴西、意大利、德国与法国五支球队中的某一支球队或某几支球队中的一支会最终赢得冠军，并愿意以一定价格购买此种组合的股票若干。例如：球迷*#1* 愿意以每股*0.75*元的价格购买*10*股，赌阿根廷、巴西、意大利中的一支球队赢得冠军。赌局的组织者可以决定卖给球迷*#1* 此种股票若干。世界杯结束后，若冠军确由此三支球队中的某一支球队夺得，赌局的组织者每卖给球迷*#1* 一股此种股票就需付给他*1*元。假设订单信息已知，如何决定卖给每个球迷多少股？

Order	*#1*	*#2*	*#3*	*#4*	*#5*	...
Argentina	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	...
Brazil	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	...
Italy	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	...
Germany	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	...
France	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	...
Bidding Price p	*0.75*	*0.35*	*0.4*	*0.95*	*0.75*	...
Quantity limit q	*10*	*5*	*10*	*10*	*5*	...
Order fill x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...

令 A 表示如下矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}.$$

若考虑在最坏情形下盈利，则有如下模型:

$$\max_x \{p^T x - \|Ax\|_\infty : \ s.t. \ 0 \le x \le q\}.$$

该模型可转化为如下线性规划问题：

$$\max_{x,z} \left\{p^T x - z : \ s.t. \ Ax \le z\mathbf{1}, \, 0 \le x \le q\right\},$$

这里 $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T$.

1.3 图解法

对于只有两个变量的线性规划问题（如上述生产问题），可通过画图的方法求出其最优解. 从图解法不难看出，对于一般的线性规划问题可能出现的情况有 (1) 最优解唯一; (2) 最优解无穷多; (3) 无界解; (4) 约束集为空. 另外，若线性规划有有限最优解，则最优解一定可以在约束集的边界上取得。

1.4 线性规划的一般形式与标准形式

线性规划的一般形式为：

$$\begin{aligned}
\min z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n & & \\
s.t. \ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n & \quad \le (=, \ge) & b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n & \quad \le (=, \ge) & b_2 \\
\cdots \ \cdots & & \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n & \quad \le (=, \ge) & b_m \\
(x_1, x_2, \ldots, x_n & \quad \ge & 0.)
\end{aligned}$$

其中$x_1, x_2, \ldots, x_n$称为决策变量. 线性规划的标准形式为：

$$\begin{aligned}
\min z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n & & \\
s.t. \ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n & = & b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n & = & b_2 \\
\cdots \ \cdots & & \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n & = & b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n & \ge & 0.
\end{aligned}$$

非标准形式的线性规划均可转化为标准形式：

1. $\max\{f(x) : x \in S\} = -\min\{-f(x) : x \in S\}$;
2. “$\le$"：引入松弛变量;
3. “$\ge$"：引入剩余变量;
4. 自由变量可通过两种方法处理.

线性规划标准形式的矩阵向量形式：令$c=(c_1,\ldots,c_n)^T$, $x=(x_1,\ldots,x_n)^T$, $b=(b_1,\ldots,b_m)^T$,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

则线性规划的标准形式可表示为

$$\begin{aligned} \min z = c^T x & \\ s.t.\ Ax &= b \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

其中x称为决策变量（向量），c称为价值系数（向量），b称为资源向量，A称为约束条件系数矩阵。令

$$a_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, a_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

线性规划的标准形式也可表示为：

$$\begin{array}{ll} \min & z=c^T x \\ s.t. & \sum_{j=1}^n x_j a_j = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Assumption 1.4.1 (基本假设) *(1) $m<n$ 且 $rank(A)=m$; (2) $b\geq 0$.*

1.5 作业

1. 用图解法求解如下线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max x_1+3x_2 & \\ s.t.\ 5x_1+10x_2 &\leq 50 \\ x_1+x_2 &\geq 1 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1,x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{array}{ll} \min & z=x_1+1.5x_2 \\ s.t. & x_1+3x_2\geq 3 \\ & x_1+x_2\geq 2 \\ & x_1\geq 0, x_2\geq 0. \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ll} \max & z=2x_1+2x_2 \\ s.t. & x_1-x_2\geq -1 \\ & -0.5x_1+x_2\leq 2 \\ & x_1\geq 0, x_2\geq 0. \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{ll} \max & z=x_1+x_2 \\ s.t. & x_1-x_2\geq 0 \\ & 3x_1-x_2\leq -3 \\ & x_1\geq 0, x_2\geq 0. \end{array}$$

(d)

2. Let f be a piecewise linear function given by $f(x)=\max\{c_1^T x+d_1,\ldots,c_p^T x+d_p\}$. Convert the following problem to a linear programming problem:

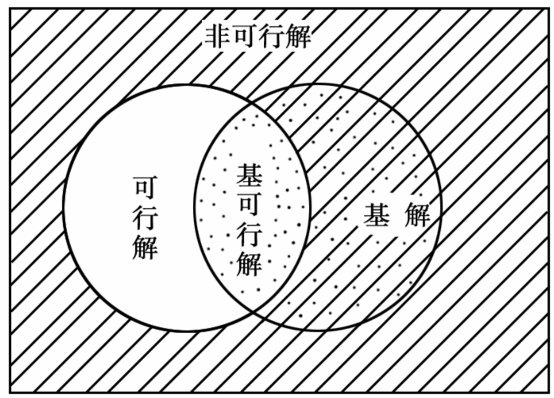
$$\min_x\{f(x):\ s.t.\ Ax=b, x\geq 0\}.$$

3. 下面数学规划模型在信号处理中被称为Basis Pursuit模型：
$$\min_{x\in R^n}\{\|x\|_1:\ s.t.\ Ax=b\},$$
其中$\|x\|_1:=\sum_{i=1}^n|x_i|$, $A\in R^{m\times n}$(一般$m\ll n$), $b\in R^m$. 在稀疏信号处理中，该模型通常用来逼近下面NP-难的组合优化问题：
$$\min_{x\in R^n}\{\|x\|_0:\ s.t.\ Ax=b\},$$
其中$\|x\|_0$表示x的非零元素的个数。试将Basis Pursuit模型转化为线性规划模型。

1.6 基本概念

- 可行域、可行解、最优解
  - 可行域（集）：$\mathcal{F}=\{x\in R^n: Ax=b, x\geq 0\}$;
  - 可行解：$x\in\mathcal{F}$ (对应一个可行的决策);
  - 最优（可行）解：可行域中使得目标函数达到最优值的点;
- 基、基向量、基变量
  - 基：设B是A的一个m阶非奇异子矩阵，则B的列向量构成R^m的一组基, 称B是线性规划问题的一个基;
  - 基向量/非基向量：B的列向量称为基向量，A的其他列向量称为非基向量;
  - 基变量/非基变量：与基向量相应的x的分量称为基变量，x的其他分量称为非基变量（为书写方便，经常令x_B表示基变量，x_N表示非基变量，此时，$(x_B,x_N)^T$为x的一个重排）;
- 基解、基可行解、可行基
  - 基解: 令所有非基变量为0，则$Ax=b$变为$Bx_B=b$. 不妨设x的前m个分量为基变量，即$x_1,x_2,\ldots,x_m$. 称$x=(B^{-1}b,0)^T$为线性方程组$Ax=b$的基解. 由基解的定义可知：
    1. 基解的非零分量个数至多为m
    2. 若某基解的非零分量个数小于m，则称其为退化的基解
    3. 若某基解非退化，则其非零分量对应的x的分量（共m个）为基变量
    4. 基解的非零分量对应的A的列向量线性无关
    5. 基解的数量不超过C_n^m 个
    6. 基解的非零分量可能为正、也可能为负
  - 基可行解: 若基解的非零分量均为正，则称该基解为基可行解.
    1. 基可行解的数量不超过基解的数量，从而不超过C_n^m个
    2. 若某基可行解的非零元素（即大于零的元素）的个数小于m，则称其为退化的基可行解.
  - 可行基: 对应于基可行解的基称为可行基。
- 最优基可行解: 若线性规划问题的某最优解是基解，则称其为最优基可行解.

不同概念之间的关系如下图：



1.7 线性规划的基本定理

Theorem 1.1 (线性规划的基本定理) 线性规划问题

$$\begin{aligned} \min z = c^T x & \\ s.t.\ Ax &= b \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

其中$A \in R^{m\times n}$满足*rank*$(A) = m$. 则

1. 若线性规划问题存在可行解，则一定存在基可行解;
2. 若线性规划问题存在最优解，则一定存在最优基可行解.

Proof: （1）设$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$为一个可行解, 即$Ax = b$, $x \geq 0$. 记A的列向量为$a_1, a_2, \dots, a_n$. 则$Ax = b$又可表示为

$$x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = b.$$

设x共有p个分量大于零，且不妨设该p个分量是最前面p个，从而有

$$x_1 a_1 + \ldots + x_p a_p = b.$$

不妨设$\{a_1, \dots, a_p\}$不全为零（否则, 该向量组无极大无关组，$b = 0$. 此时，显然有$x = 0$为基可行解）. 下面分两种情况讨论

1. $a_1, \dots, a_p$线性无关：此时显然有$p \leq m$. 若$p = m$, 则x为基解；若$p < m$，则x为退化的基解。证毕。
2. $a_1, \dots, a_p$线性相关：存在不全为零的系数$y_1, \dots, y_p$使得

$$y_1 a_1 + \ldots + y_p a_p = 0.$$

   不妨设至少有一系数$y_i > 0$.

$\forall \epsilon \in R$, 都有

$$(x_1 - \epsilon y_1) a_1 + \ldots + (x_p - \epsilon y_p) a_p = b.$$

令$y=(y_1,\ldots,y_p,0,\ldots,0)^T$, 则有$A(x-\epsilon y)=b, \forall \epsilon \in R$. 令$\epsilon=\min_i\{x_i/y_i: y_i>0\}$, 则有$x-\epsilon y\geq 0$, 从而$x-\epsilon y$ 为可行解. 另外，$x-\epsilon y$ 的非零分量（正分量）的个数至多为$p-1$.

如必要，重复上述过程（每次至少消去一个正的分量，得到的解仍为可行解），直至得到一个可行解，其非零元素对应的列向量组线性无关（此时，非零元素对应的列向量组即为初始向量组$\{a_1,\ldots,a_p\}$ 的极大无关组）。此时可归结为第一种情况。证毕。[1]

（2）设$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$为一个最优可行解($Ax=b$, $x\geq 0$, 且目标函数值达到最优). 记A的列向量为$a_1,a_2,\ldots,a_n$. 则$Ax=b$又可表示为

$$x_1a_1+\ldots+x_na_n=b.$$

设x共有p个分量大于零，且不妨设该p个分量是最前面p个，从而有

$$x_1a_1+\ldots+x_pa_p=b.$$

不妨设$\{a_1,\ldots,a_p\}$不全为零（否则, 该向量组无极大无关组，$b=0$. 此时，可证$x=0$为最优基可行解. $c^Tx=c_B^Tx_B+c_N^Tx_N$. 必有最优值$c_B^Tx_B=0$. 否则，若$c_B^Tx_B>0$ 可取可行解εx ($\varepsilon\in(0,1)$), 使目标函数值更小，此与x最优相矛盾；若$c_B^Tx_B<0$, 可取$\varepsilon x, \varepsilon\to+\infty$，此时无界解，与条件矛盾）. 下面分两种情况讨论

1. $a_1,\ldots,a_p$线性无关：此时显然有$p\leq m$. 若$p=m$, 则x为基解；若$p<m$，则x为退化的基解。总之，x为最优基可行解. 证毕。

2. $a_1,\ldots,a_p$线性相关：存在不全为零的系数$y_1,\ldots,y_p$使得

$$y_1a_1+\ldots+y_pa_p=0.$$

   不妨设至少有一系数$y_i>0$.

$\forall\epsilon\in R$, 都有

$$(x_1-\epsilon y_1)a_1+\ldots+(x_p-\epsilon y_p)a_p=b.$$

令$y=(y_1,\ldots,y_p,0,\ldots,0)^T$, 则有$A(x-\epsilon y)=b, \forall\epsilon\in R$. 当$|\epsilon|$充分小时，$x-\epsilon y\geq 0$，从而$x-\epsilon y$可行。由于$x$最优，所以$c^Tx\leq c^T(x-\epsilon y), \forall|\epsilon|$充分小。这意味着$c^Ty=0$.

令$\epsilon=\min_i\{x_i/y_i: y_i>0\}$, 则有$x-\epsilon y\geq 0$, 从而$x-\epsilon y$为可行解, 且最优. 另外，$x-\epsilon y$ 的非零分量（正分量）的个数至多为$p-1$. 如必要，重复上述过程（每次消去一个正的分量，得到的解仍为最优可行解），直至得到一个最优可行解，其非零元素对应的列向量组线性无关。此时可归结为第一种情况。 ■

Remark 1.7.1 (几点说明) *（1）*线性规划可能没有最优解（无界解）*; (2)* 线性规划有可能有最优的非基可行解（此时一定有无穷多解）*; (3)* 线性规划的基可行解的总数不超过$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 个. 逐个计算并比较函数值的方法仅在理论上可行！

1.8 几何解释

Definition 1.2 (凸集) 设$C\subset R^n$. 称C为凸集，如果对$\forall x\in C, y\in C$ 以及$\forall\alpha\in(0,1)$, 都有

$$\alpha x+(1-\alpha)y\in C.$$

[1]每次消去（至少）一个正分量后，相应的列向量组中也消去（至少）一个向量，并且消去前后，向量组的极大无关组保持不变。这保证了一定可以通过此过程得到一个可行解，其非零元素对应的列向量组线性无关（并且为初始向量组的极大无关组）。

Theorem 1.3 *Consider linear programming in standard form. If nonempty, the feasible set*

$$\mathcal{F} = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\}$$

is convex.

Definition 1.4 (凸集的极点) 设C 为R^n 中凸集, $x \in C$. 如果对任意的$y \in C, z \in C$, $y \neq z$, 以及$\alpha \in (0,1)$, 都有$x \neq \alpha y + (1-\alpha)z$, 则称$x$ 为C 的极点或顶点。

Definition 1.5 (凸组合) 设$x_i \subset R^n$, $\alpha_i \in [0,1]$, $i = 1,2,\ldots,k$, 并且$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, 其中$k$为任意正整数。称$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ 为$x_1, x_2, \ldots, x_k$的凸组合。

Definition 1.6 (凸包, convex hull) 设S 为R^n 的子集。R^n 中包含S 的最小的凸集称为S 的凸包，记为$conv(S)$.

Theorem 1.7 *If* $\mathcal{F}$ *is bounded, then* $\mathcal{F} = \text{conv}(\text{extreme points of } \mathcal{F})$.

Remark 1.8.1 *More general result: A closed bounded convex subset of* R^n *is equal to the closed convex hull of its extreme points.*

Theorem 1.8 (基可行解与极点的等价性) 设$rank(A) = m$, $\mathcal{F} = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\}$. $x \in \mathcal{F}$为线性规划的基可行解当且仅当x为$\mathcal{F}$的极点。

Proof: **必要性**：设$x = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$为线性规划的基可行解. 则

$$x_1 a_1 + \ldots + x_m a_m = b,$$

并且$a_1, \ldots, a_m$线性无关。假设存在$y, z \in \mathcal{F}$, $y \neq z$, 以及$\alpha \in (0,1)$, 使得$x = \alpha y + (1-\alpha)z$. 易见$y$和$z$的最后面$n-m$个分量全部为0. 因此有

$$y_1 a_1 + \ldots + y_m a_m = b$$

以及

$$z_1 a_1 + \ldots + z_m a_m = b.$$

由$a_1, \ldots, a_m$的线性无关可得$x = y = z$. 由反证法，必要性得证。

充分性：设$x \in \mathcal{F}$ 为极点，并且不妨设x的全部非零分量（即正分量）为最前面k个。则$x_1, \ldots, x_k > 0$,

$$x_1 a_1 + \ldots + x_k a_k = b.$$

为了证明x是基可行解, 只需证明$a_1, \ldots, a_k$线性无关。假设$a_1, \ldots, a_k$线性相关，则存在非平凡组合

$$y_1 a_1 + \ldots + y_k a_k = 0.$$

定义$y = (y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)^T$. 取$\epsilon$充分小，则有$x + \epsilon y \geq 0$, $x - \epsilon y \geq 0$. 由$Ay = 0$得$x + \epsilon y \in \mathcal{F}$和$x - \epsilon y \in \mathcal{F}$. 显然有$x = \frac{1}{2}(x + \epsilon y) + \frac{1}{2}(x - \epsilon y)$. 此与$x \in \mathcal{F}$为极点矛盾。由反证法，充分性得证。 ■

Corollary 1.9 *If* $\mathcal{F} = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\}$ *is nonempty, it has at least one extreme point.*

Corollary 1.10 *If there is a finite optimal solution to a linear programming problem, there is a finite optimal solution which is an extreme point of the constraint set.*

Corollary 1.11 *The constraint set $\mathcal{F}$ possesses at most a finite number of extreme points.*

Summary 1.8.1 *Basic points to know:*

1. 线性规划问题的可行域$\mathcal{F}$是凸集，可能有界，也可能无界。
2. 若线性规划问题有最优解，必定可以在某顶点上达到最优。
3. $\mathcal{F}$有有限个顶点，每个基可行解对应一个顶点。
4. 若$\mathcal{F}$非空有界，则线性规划问题一定有最优解。
5. 若$\mathcal{F}$无界，则线性规划问题可能无最优解，也可能有最优解。若有最优解，也必定在某顶点上达到。
6. 虽然顶点数目是有限的，但当m, n较大时，"枚举法"是行不通的，所以要继续讨论如何有效寻找最优解的方法。

单纯形法：从一个基可行解（顶点）移动到另一个基可行解（顶点）, ... 在移动的过程中，目标函数值逐步改进，直至最优基可行解.

References

[Luenberger-Ye] David G. Luenberger and Yinyu Ye, Linear and nonlinear programming.

[TsinghuaOR] 清华大学运筹学教材编写组编, 运筹学.