高难度题型

【开心提示：下面题目难度相对较高，普通基础的不建议做】

【题型 1】有理数、无理数

【思路点拨】首先要能根据特征辨别有理数与无理数，其次对无理式进行配方化简，并能求出无理数的整数部分和小数部分。

【例 1】在$-\frac{2}{3}$，0，$\sqrt{3}$，-3.14，$\frac{\pi}{2}$，$\sqrt{4}$，—0.1010010001…（每两个 1 之间依次多一个 0），$\log_2 8$这 8 个实数中，无理数有（　）个.

（A）2 （B）3 （C）4 （D）5 （E）1

【解析】对实数分类，不能被表面形式迷惑，而应从最后结果特征判断.首先明确无理数的概念，即“无限不循环小数叫做无理数”.一般来说，用根号表示的数不一定就是无理数，如$\sqrt{4}=2$是有理数，关键在于这个形式上带根号的数的最终结果是不是无限不循环小数.同样，用对数符号表示的数也不一定就是无理数，如$\log_2 8=3$等.而一 0.1010010001…尽管有规律，但它是无限不循环小数，是无理数．$\frac{\pi}{2}$是无理数，而不是分数.在上面所给的实数中，只有$\sqrt{3}$，$\frac{\pi}{2}$，一0.1010010001…这三个数是无理数，其他五个数都是有理数，故选 B.

【例 2】已知x是无理数，且$(x+1)(x+3)$是有理数，则下列叙述有（　　）个正确：（1）x^2是有理数；（2）$(x-1)(x-3)$是无理数；（3）$(x+2)^2$是有理数；（4）$(x-1)^2$是无理数.

（A）2 （B）3 （C）4 （D）1 （E）0

【解析】（1）$x^2=(x+1)(x+3)-4x-3$，由于$(x+1)(x+3)$为有理数，$4x$为无理数，3 为有理数，故x^2是无理数；（2）$(x-1)(x-3)=(x+1)(x+3)-8x$，同理可得$(x-1)(x-3)$是无理数；（3）$(x+2)^2=(x+1)(x+3)+1$，可得$(x+2)^2$是有理数；（4）$(x-1)^2=(x+1)(x+3)-6x-2$，可得$(x-1)^2$是无理数，选 B.

【例 3】设整数a，m，n满足$\sqrt{a^2-4\sqrt{2}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$，则$a+m+n$的取值有（　）种.

（A）2 （B）3 （C）4 （D）1 （E）无数种

【解析】由$\sqrt{a^2-4\sqrt{2}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$，得到$a^2-4\sqrt{2}=\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2=m+n-2\sqrt{m\cdot n}$，

从而有$\begin{cases} m\cdot n=8(m>n) \\ m+n=a^2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m=8,n=1 \\ a=\pm 3 \end{cases}$，则$a+m+n$的取值有 2 种，选 A.

【题型 2】整数的除法

【思路点拨】掌握数的除法等式：被除数÷除数=商…余数=>被除数=除数×商+余数.当余数为 0 时，称为整除.

【例 4】若n是一个大于 100 的正整数，则n^3-n一定有约数（ ）.

（A）5 （B）6 （C）7 （D）8 （E）12

【解析】根据定理：连续两个整数乘积一定能被 2！整除，连续 3 个整数乘积一定能被 3！整除，连续 4 个整数乘积一定能被 4！整除，…，连续k个整数乘积能被k！整除.从而得到$n^3-n=(n-1)n(n+1)$表示 3 个连续整数，故能被 3！整除，所以选 B.

【评注】本题也可以采用特值法来验证选项.

【例 5】正整数N的 8 倍与 5 倍之和，除以 10 的余数为 9，则N的最末一位数字为（ ）.

（A）2 （B）3 （C）5 （D） 9 （E）7

【解析】$8N+5N=13N$，能被 10 除余 9，说明$13N$的个位为 9，得到N的个位为 3，从而选 B.

【例 6】9121 除以某质数，余数得 13，这个质数是（ ）.

（A）7 （B）11 （C）17 （D）23 （E）13

【解析】将 9121—13=9108 分解得到 9121—13 = 23×11×36，所以选 D.

【评注】在分解因式的时候，一定要分解出比 13 大的质数，因为除数要比余数大.

【题型 3】余数

【思路点拨】余数可以分为两大类，一类是同余，一类是不同余.对子同余问题，可以转化为整除分析.

【例 7】一个盒子装有不多于 200 颗糖，每次 2 颗、3 颗、4 颗或 6 颗地取出，最终盒内都只剩下 1 颗糖，如果每次以 11 颗取出，那么正好取完，则盒子里共有m颗糖，m的各个数位之和为（ ）.

（A）8 （B）10 （C）4 （D）12 （E）6

【解析】每次 2 颗、3 颗、4 颗或 6 颗地取出，最终盒内都只剩下 1 颗糖，可得糖的数量减 1 后能被 2，3，4，6 整除.由 2，3，4，6 的最小公倍数为 12，则糖的数量减 1 能被 12 整除，可设糖的数量为$12k+1$.又由每次以 11 颗取出，正好取完，说明糖的数量为 11 的倍数，根据$12k+1=11k+(k+1)\Rightarrow k+1=11\Rightarrow k=10$，因此共有 121 颗糖，选 C.

【例 8】一盒围棋子，4 个 4 个数多 3 个，6 个 6 个数多 5 个，15 个 15 个数多 14 个，这盒围棋子在 150∽200 个之间.则这盒围棋子 11 个 11 个地数，最后余（ ）个.

（A）2 （B）3 （C）4 （D）5 （E）6

【解析】由题可得，棋子的数量被 4 除余 3、被 6 除余 5、被 15 除余 14，由于余数均比除数少 1，故棋子的数量加 1 则能被 4，6，15 整除.又 4，6，15 的最小公倍数为 60，并且棋子的数量介于 150∽200 个之间，所以棋子的数量为

60×3－1=179 个.由于 179 除以 11 余 3，故如果 11 个 11 个地数，则最后余 3 个，故选 B.

【题型 4】循环小数

【思路点拨】把纯循环小数化成分数，并不像有限小数那样，明 10，100，1000 等做分母，而要用 9，99，999 等这样的数做分母，其中“9”的个数等于一个循环节数字的个数；一循环节的数字听相成的数，就是这个分数的分子，如 $0.\dot{a}\dot{b}=\frac{ab}{99}$.

【例 9】纯循环小数 $0.\dot{a}b\dot{c}$ 写成最简分数时，分子与分母之和是 58，这个循环小数是（ ）.

（A）$0.\dot{5}6\dot{7}$ （B）$0.\dot{5}3\dot{7}$ （C）$0.\dot{5}1\dot{7}$ （D）$0.\dot{5}6\dot{9}$ （E）$0.\dot{5}6\dot{2}$

【解析】$0.\dot{a}b\dot{c}$ 化为分数时是 $\frac{abc}{999}$，当化为最简分数时，因为分母大于分子，所以分母大于 58÷2=29，即分母是大于 29 的两位数，由 999=3×3×3×37，推知 999 大于 29 的两位数约数只有 37，所以分母是 37，分子是 58—37=21.因为 $\frac{21}{37}=\frac{21\times27}{37\times27}=\frac{567}{999}$，所以这个循环小数是 $0.\dot{5}6\dot{7}$，选 A.

【例 10】$0.\dot{a}b\dot{c}$ 是一个纯循环小数（a，b，c 表示数字)，已知小数点右边前 1000 位上，各数字之和是 4664，且字母 a，b，c 中表示的数字有两个是相等的.求 a，b，c 的乘积为（ ）.

（A）72 （B）76 （C）64 （D）56 （E）84

【解析】从题目中可知，该循环小数的循环节是“abc”，因此可以写下小数点右边前 1000 位上的数字，依次为 $abcabcabc\cdots$，用 1000÷3=333（商）……1，求出前 1000 位中有 333 组“abc”并余 1，即知第 1000 位上的字母为 a，所以前 1000 位中出现了 333+1=334 个 a、333 个 b 和 333 个 c.已知这些数位上的数字之和是 4664，用 4664÷333=14……2，求出每组中 $a+b+c=14$，而余数 2 也就是第 1000 位上的 a，因此 $a=2$，$b+c=14-2=12$.根据条件“字母 a，b，c 中表示的数字有两个是相等的”，先假设 b，c 中有一个与 a 相等，那么另一个必定为 12—2=10，但我们知道在一个数位上只能有一个数字，显然不可能出现 10，原来的假设不成立，而只有当 $b=c=12\div2=6$ 时才符合题意.因此得到：$a=2$，$b=c=6$，选 A.

【题型 5】非负性的应用

【思路点拨】根号内的表达式要求为非负的，当根号里面的表达式互为相反数时，则这个数必然为零.

【例 11】设 x，y，z 之满足

$$|3x+y-z-2|+(2x+y-z)^2=\sqrt{x+y-2002}+\sqrt{2002-x-y}，$$

试求 $x+y+z$ 的值为（ ）.

（A）4006 （B）4004 （C）4012 （D）4016 （E）4002

【解析】由 $x+y-2002\geq0$ 且 $2002-x-y\geq0$，可得 $x+y=2002$.

由此可得等式右边的值为零.那么原方程可化为 $|3x+y-z-2|+(2x+y-z)^2=0$.

由非负性可得 $3x+y-z-2=0$， $2x+y-z=0$.

由以上解得 $x=2$， $y=2000$， $z=2004$，故选 A.

【评注】此题等式右边其实隐藏了两等式必为零的条件，利用这个条件，又可推导右边两个被开方数必为 0 的结果，从而得解.隐藏解题条件是常见的出题方式.

【题型 6】绝对值的几何意义

【思路点拨】绝对值的几何意义：一个数的绝对值，是数轴上表示的点到原点的距离.两个数的绝对值的几何意义：$|a-b|$ 表示在数轴上，数 a 和数 b 之间的距离.

【例 12】已知 $\dfrac{8x+1}{12}-1\le x-\dfrac{x+1}{2}$，关于 $|x-1|-|x-3|$ 的最值，下列说法正确的是（　　）.

（A）最大值为 1，最小值为-1 （B）最大值为 2，最小值为-1

（C）最大值为 2，最小值为-2 （D）最大值为 1，最小值为-2

（E）无最大值和最小值

【解析】 $\dfrac{8x+1}{12}-1\le x-\dfrac{x+1}{2}\Rightarrow x-\dfrac{x+1}{2}\Rightarrow\dfrac{8x-11}{12}\le\dfrac{x-1}{2}$，得到 $8x-11\le 6x-6$，$\Rightarrow 2x\le 5$，解得 $x\le\dfrac{5}{2}$.

当 $x\le 1$ 时，$|x-1|-|x-3|=1-x-(3-x)=-2$；

当 $1<x\le\dfrac{5}{2}$ 时，$|x-1|-|x-3|=x-1-(3-x)=2x-4$，当 $x=\dfrac{5}{2}$ 时，有最大值 1.

所以当 $x\le\dfrac{5}{2}$ 时，$|x-1|-|x-3|$ 的最大值是 1，最小值是-2，选 D.

【题型 7】三角不等式的应用

【思路点拨】根据三角不等式 $|a|-|b|\le|a\pm b|\le|a|+|b|$ 进行分析解题.是每年考试的重点、难点和热点问题，处理方法可以从绝对值的运算法则、性质或绝对值的几何意义入手.也可以用分类后画;也可以用分类后画图像的方法处理.注意三角不等式推广.有限个实数之和的绝对值不大于它们的绝对值之和.

【例 13】已知，则 $|2x-a|\le 1$，$|2x-y|\le 1$，则 $|y-a|$ 的最大值为（ ）.

（A）1 （B）3 （C）2 （D）4 （E）5

【解析】根据三角不等式 $|y-a|=|(2x-a)-(2x-y)|\le|2x-a|+|2x-y|\le 1+1=2$，从而选 C.

【例 14】已知 $x\in[2,5]$，$|a|=5-x$，$|b|=x-2$，则 $|b-a|$ 的取值范围是（　）.

（A）[-3，5] （B）[0，5] （C）[1，3] （D）[3，5] （E）[0，3]

【解析】首先根据$|b-a|\le|a|+|b|=3$，排除选项A、B、D. 当$x=3.5$时，再由$|b-a|$的最小值可以取到0，故选择E.

【例 15】已知$|a|\ne|b|$，$m=\frac{|a|-|b|}{|a-b|}$，$n=\frac{|a|+|b|}{|a+b|}$，则m，n之间的关系（　）.

（A）$m>n$ （B）$m<n$ （C）$m=n$ （D）$m\le n$ （E）无法确定

【解析】根据$|a+b|\le|a|+|b|$，所以$n=\frac{|a|+|b|}{|a+b|}\ge1$.

又由$|a-b|\ge|a|-|b|$，$m=\frac{|a|-|b|}{|a-b|}\le1$，所以$n\ge m$，从而选D.

【评注】当a，b同号且$|a|>|b|$时，$m=n=1$.

【题型 8】比例定理

【思路点拨】主要掌握合分比与等比定理的应用.在比例运算中，要汪意的是分母保证有意义.所以不要忘记讨论分母的取值情况.

【例 16】若非零实数a，b，c满足等式$\frac{a}{b+c+d}=\frac{b}{a+c+d}=\frac{c}{a+b+d}=\frac{d}{a+b+c}=n$，则$n$的值为（ ）.

（A）-1 或 4 （B）$\frac{1}{3}$ （C）$\frac{1}{4}$（D）-1 （E）-1 或$\frac{1}{3}$

【解析】方法一：由$\frac{a}{b+c+d}=\frac{b}{a+c+d}=\frac{c}{a+b+d}=\frac{d}{a+b+c}=n$，所以当$a+b+c+d\ne0$时，由等比定理得：$n=\frac{a+b+c+d}{3(a+b+c+d)}=\frac{1}{3}$；

当$a+b+c+d=0$时，将$b+c+d=-a$代人得：$n=\frac{a}{b+c+d}=\frac{a}{-a}=-1$，故选E.

方法二：由$\frac{a}{b+c+d}=\frac{b}{a+c+d}=\frac{c}{a+b+d}=\frac{d}{a+b+c}=n$，得到如下等式：

$a=(b+c+d)n$，$b=(a+c+d)n$，$c=(a+b+d)n$，$d=(a+b+c)n$，四个式相加得到：

$a+b+c+d=(a+b+c+d)3n\Rightarrow(a+b+c+d)(3n-1)=0$

所以得到$a+b+c+d=0$或$n=\frac{1}{3}$，从而$n=-1$或$\frac{1}{3}$，故选E.

【评注】该题的难点是容易漏掉第二种情况，因此在比例计算时，不要忘记讨论分母的情况.

【题型 9】利用平均值定理求最值

【思路点拨】先验证给定函数是否满足最值三条件：（1）各项均为正.（2）乘积（或者和）为定值，（3）等号能否取到；然后利用平均值公式求出最值.可总结为口诀“一正二定三相等”.

【例 17】求函数 $y=3x+\frac{4}{x^2}(x>0)$ 的最小值为（ ）.

（A）$3\sqrt[3]{9}$ （B）$2\sqrt{9}$ （C）$\sqrt[3]{9}$ （D）$4\sqrt[3]{9}$ （E）6

【解析】$y=\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{4}{x^2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{4}{x^2}}=3\sqrt[3]{9}$，当 $\frac{3x}{2}=\frac{3x}{2}=\frac{4}{x^2}$ 时，即 $x=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$ 取到最小值，故选 A.

【评注】此题的变形拆分是解题的关键，在拆分时，为了保证取到最值，要进行平均分.

【例 18】已知 x， $y\in R$，且 $x+y=4$，则 3^x+3^y 的最小值是（ ）.

（A）$3\sqrt{2}$ （B）18 （C）9 （D）$2\sqrt{2}$ （E）$\sqrt{6}$

【解析】$3^x+3^y\ge 2\sqrt{3^x3^y}=2\sqrt{3^{xy}}=2\sqrt{3^4}=18$，从而选 B.

【例 19】若 $x>0$， $y>0$，且 $x+2y=4$，则 $\lg x+\lg y$ 的最大值是（ ）.

（A）lg2 （B）21g2 （C）$\frac{1}{2}$lg2 （D）31g2 （E）lg3

【解析】根据 $4=x+2y\ge 2\sqrt{2xy}$，得到 $\sqrt{2}\ge\sqrt{xy}$， $xy\le 2$，从而 $\lg x+\lg y=\lg xy\le\lg 2$，选 A.