中等题目训练

【开心提示：题目难度加大，加油!】

一、问题求解题

1. 下列说法正确的是（　　）.

（A）有理数中，零的意义仅表示没有

（B）正有理数和负有理数组成了全体有理数

（C）0.9 既不是整数，也不是分数，因此它不是有理数

（D）只有 1 的倒数等于本身

（E）0 既不是正数，也不是负数

2. 下列叙述错误的有（ ）个.

（1）整数就是自然数和零　　（2）整数和分数统称为有理数

（3）正整数、0 和负整数统称为整数　　（4）整数不能只分成奇数和偶数两部分

（A）0 个　（B）1 个　（C）2 个　（D）3 个　（E）4 个

3. 已知实数 $a=2014^2-2015\times2013$，则 $a^{2015}+\frac{1}{a^{2015}}=$（　　）.

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4　（E）0

4. 把无理数 $\sqrt{5}$ 记为 a，它的小数部分记作 b，则 $a-\frac{1}{b}$ 等于（　　）.

（A）1　（B）-1　（C）2　（D）-2　（E）3

5. 若 y 与 $x-1$ 成正比，比例系数为 k_1；y 又与 $x+1$ 成反比，比例系数为 k_2，且 $k_1:k_2=2:3$，则 x 的值为（　　）.

（A）$\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$　（B）$\frac{\sqrt{15}}{3}$　（C）$-\frac{\sqrt{15}}{3}$　（D）$\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$　（E）$-\frac{\sqrt{10}}{2}$

6. 适合关系式 $|3x-4|+|3x+2|=6$ 的整数 x 的个数是（ ）.

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3　（E）4

7. 若 $(x-y-2)^2+|xy-3|=0$，则 $\left(\frac{3x}{x-y}-\frac{2x}{x-y}\right)\div\frac{1}{y}$ 的值等于（ ）.

（A）$\frac{3}{2}$　（B）$-\frac{3}{2}$　（C）$\frac{2}{3}$　（D）$-\frac{2}{3}$　（E）1

8. 代数式 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|abc|}{abc}$ 可能的取值有（ ）个.

（A）4 个　（B）3 个　（C）2 个　（D）1 个　（E）5 个

9. 已知 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{m}{4}\neq0$，那么式子 $\frac{x^2+y^2+m^2}{xy+ym+mx}$ 的值是（　　）.

（A）$\frac{27}{26}$　（B）$\frac{29}{26}$　（C）$\frac{26}{29}$　（D）1　（E）2

10. 已知$\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}$（$a$，$b$，$c$互不相等），求$x+y+z$的值为（　）.

（A）1 （B）$\dfrac{1}{2}$（C）±1　　（D）-1　　（E）0

11. 一个分数的分子减少 25%，而分母增加 25% ，则新分数比原来分数减少的百分率是（　）.

（A）30%　（B）35%　（C）40%　（D）50%　（E）60%

12. —箱书，平均分给 6 个小朋友，多余 1 本；平均分给 8 个小朋友，也多余 1 本；平均分给 9 个小朋友，也多余 1 本，这箱书最少有m本，则m的各个数位之和为（ ）.

（A）10　（B）3 （C）4 （D）5 （E）6

13. 在一家三口人中，每两个人的平均年龄加上余下一人的年龄分别得到 47，61，60，那么这三个人中年龄最大与年龄最小的差是（ ）.

（A）28　（B）27　（C）26　（D）25　（E）24

14. 已知a，b，c，d均为正数，且$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，则$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$的值为（　）.

（A）$\dfrac{a^2}{d^2}$　（B）$\dfrac{c^2}{d^2}$　（C）$\dfrac{a+b}{c+d}$　（D）$\dfrac{b^2}{d^2}$　（E）$\dfrac{c}{a}$

15. 已知x_1，x_2，…，x_n的几何平均值为 3，前面$n-1$个数的几何平均值为 2，则x_n的值是（　）.

（A）$\dfrac{9}{2}$　（B）$\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$　（C）$2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$　（D）$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$　（E）$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}$

16. 已知$x>0$，函数$y=\dfrac{2}{x}+3x^2$的最小值是（ ）.

（A）$2\sqrt{6}$　（B）$3\sqrt[3]{3}$　（C）$4\sqrt{2}$　（D）6 （E）$6\sqrt{2}$

17. —个两位质数，将它的十位数字与个位数字对调后仍是一个两位质数，我们称它为 “无暇质数”，则 50 以内的所有“无暇质数”之和等于（　）.

（A）87　（B）89　（C）99　（D）109　（E）119

18. 设$a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，则$\dfrac{a^5+a^4-2a^3-a^2-a+2}{a^2-a}=$（　）.

（A）-2　（B）2 （C）1 （D）-1　（E）0

19. 一个自然数被 2 除余 1，被 3 除余 2，被 5 除余 4，满足此条件的介于 100~200 的自然数有（　）个.

（A）2 （B）3 （C）4 （D）5 （E）6

20. 有 4 个小朋友，4 人年龄逐个相差一岁，4 人年龄的乘积是 360，则 4 人现在年龄之和为（ ）.

（A）14　（B）16　（C）22　（D）20　（E）18

21. 用 1155 个大小相同的正方形拼成一个长方形，有（ ）种不同的拼法.

（A）2 （B）4 （C）6 （D）8 （E）10

22.已知$1176\times a=b^4$，a，b是正整数，a的最小值为（ ）.

（A）2646 （B）2246 （C）2686 （D）1176 （E）2866

23.王老师领一班同学去种树，学生恰好平均分成三组，如果老师与学生每人种树一样多，则共种了572棵，且每人种树多于2棵而不超过20棵，那么，这个班有学生（　　）人，每人种树（ ）棵.

（A）51，11 （B）46，11 （C）46，13 （D）51，13 （E）52，9

24.如果两数之和是64，两数之积可以整除4875，那么这两数之差是（ ）.

（A）11 （B）12 （C）13 （D）14 （E）15

25.$|x-2|+|x-1|+|x-3|$的最小值是（ ）.

（A）0 （B）1 （C）2 （D）3 （E）4

二、充分性判新题

1. $\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$.

（1）$x\le 5$ （2）$x>3$

2. $\dfrac{|a|}{a+a^2}=-\dfrac{1}{a+1}$.

（1）$a<0$ （2）$a<-1$

3.已知$x<0<z$，$xy>0$，则$|x+z|+|y+z|-|x-y|$的值为 0.

（1）$|y|>|z|>|x|$ （2）$|x|>|z|>|y|$

4. x和y的算术平均值为5，且$\sqrt{x}$和$\sqrt{y}$的几何平均值为2.

（1）$x=4$，$y=6$ （2）$x=2$，$y=8$

5.能确定$\dfrac{2n}{5}$是整数.

（1）$m=\sqrt{5}+2$，$m+\dfrac{1}{m}$的整数部分是n

（2）n为整数，且$\dfrac{13n}{10}$是整数

6. $|x-2|+|1+x|=3$.

（1）$x<\dfrac{\pi}{2}$ （2）$x>0$

7. $\left|\dfrac{2x-1}{3}\right|\le\dfrac{2-x}{3}$.

（1）$-1<x<\dfrac{1}{2}$ （2）$\dfrac{1}{2}<x<2$

8. $\left|\dfrac{3}{2x-1}\right|=\dfrac{3}{1-2x}$.

（1）$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　（2）$x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

进阶训练详解

一、问题求解题

1.【解析】E. A 中零的意义不仅仅表示没有，还表示绝对值中最小的数和正、负数的分界点；B 中缺少一个 0；C 中 0. 9 是有限小数，是有理数；D 中-1 的倒数也为它本身.

2.【解析】C.（1）自然数已经包含了 0，所以是错误的，改成整数包括自然数和负整数就对了；（2）正确的；（3）正确的；（4）整数按照奇偶性只能分为奇数和偶数.

3.【解析】B. 利用 $a=2014^2-2015\times2013=2014^2-(2014+1)(2014-1)=1$，代入求出 $a^{2015}+\frac{1}{a^{2015}}=2$.

4.【解析】D. $\sqrt{5}$ 的小数部分为 $b=\sqrt{5}-2$，所以 $a-\frac{1}{b}=\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}-2}=-2$.

5.【解析】D. 方法一：由 $y=k_1(x-1)$（式①）及 $y=\frac{k_2}{x+1}$（式②），用式①除以式②，$1=\frac{k_1}{k_2}(x-1)(x+1)$，即 $x^2-1=\frac{3}{2}$，$x^2=\frac{5}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

方法二：可令 $k_1=2$，$k_2=3$，则有 $y=2(x-1)=\frac{3}{x+1}$，所以得 $x=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$.

6.【解析】C. 因为$|3x-4|+|3x+2|=6$，所以$\left|x-\frac{4}{3}\right|+\left|x+\frac{2}{3}\right|=2$，由绝对值的几何意义，$-\frac{2}{3}\le x\le\frac{4}{3}$，因为$x$是整数，所以$x=0$或 1.

7. 【解析】A. 由$(x-y-2)^2+|xy-3|=0$可知$x-y=2$，$xy=3$，所以$\left(\frac{3x}{x-y}-\frac{2x}{x-y}\right)\div\frac{1}{y}=\frac{xy}{x-y}=\frac{3}{2}$

8.【解析】B. 讨论$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|abc|}{abc}$的取值，实质是讨论$a$，$b$，$c$的正负，分情况讨论如下：

a，b，c为两正一负：$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|abc|}{abc}=0$；

a，b，c为两负—正：$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|abc|}{abc}=0$；

a，b，c为三负时：$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|abc|}{abc}=-4$；

a，b，c为三正时：$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|abc|}{abc}=4a$.

所以可能情况有 3 种. 或者对上述 4 种情况a，b，c分别取特值，也可以快速求解.

9.【解析】B. 令$x=2k$，$y=3k$，$m=4k$代入$\frac{x^2+y^2+m^2}{xy+ym+mx}=\frac{4k^2+9k^2+16k^2}{6k^2+12k^2+8k^2}=\frac{29}{26}$.

【评注】本题也可以取特值求解，可令$x=2$，$y=3$，$m=4$代入求解.

10.【解析】E. 设$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}=k$，则$x=(a-b)k$，$y=(b-c)k$，$z=(c-a)k$.

所以$x+y+z=(a-b)k+(b-c)k+(c-a)k=(a-b+b-c+c-a)k=0$.

【评注】本题也可以取特值求解，可令$x=a-b$，$y=b-c$，$z=c-a$代入求解.

11.【解析】C. 方法一：设原分数为$\frac{a}{b}$，由题意得到新分数为$\frac{0.75a}{1.25b}$，从而$\left(\frac{a}{b}-\frac{0.75a}{1.25b}\right)\div\frac{a}{b}=40\%$.

方法二：（特值法）假定原分数为某一特值，可设原分数为$1=\frac{100}{100}$，由题得到新分数为$\frac{75}{125}=0.6$，从而 1-0.6=40%.

12.【解析】A. 由题可得书的数量减 1 后能被 6，8，9 整除，由于 6，8，9 的最小公倍数为 72，则书最少为 73 本，各个数位之和为 10.

13.【解析】A. 设这三个人的年龄分别为a、b、c，由题目可知：

$$\begin{cases}\dfrac{a+b}{2}+c=47\\ \dfrac{a+c}{2}+b=61\\ \dfrac{b+c}{2}+a=60\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+2c=94 & ①\\ a+c+2b=122 & ②\\ b+c+2a=120 & ③\end{cases}$$

所以式②一式①，$b-c=28$.

【评注】或者让三式两两相减取差最大的即可，得到：$b-c=28$.

14.【解析】C.方法一：将 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 平方，得 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$，由合分比定理：$\frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{c^2+d^2}{d^2}$，交换两内项：$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{b^2}{d^2}$，开平方根：$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{b}{d}$.

研究C选项：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，由合分比定理：$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$，交换两内项：$\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}$，从而有 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}$.

方法二：令 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\left(k\neq0\right)\Rightarrow\begin{cases}a=bk\\ c=dk\end{cases}$，代入得

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{\sqrt{b^2k^2+b^2}}{\sqrt{d^2k^2+d^2}}=\frac{\sqrt{1+k^2}\cdot b}{\sqrt{1+k^2}\cdot d}=\frac{b}{d}$$

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{bk+b}{dk+d}=\frac{(1+k)b}{(1+k)d}=\frac{b}{d}$$

15.【解析】C.考查几何平均值的定义，因为 $\begin{cases}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=3\\ \sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1x_2\cdots x_n=3^n\\ x_1x_2\cdots x_{n-1}=2^{n-1}\end{cases}$，相除得 $x_n=3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=2\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

16.【解析】B.根据几何平均数和算术平均数之间的性质，有：$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+3x^2}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}3x^2}=\sqrt[3]{3}$，所以 y 的最小值为B选项.

17.【解析】D.设“无暇质数”为 $\overline{xy}$.

根据题意，$\overline{xy}$ 与 $\overline{yx}$ 均为质数，并且 $\overline{yx}$ 也是“无暇质数”，且 50 以内的“无暇质数”分别是 11，13，17，31，37，共计 5 个.它们的和是 11 + 13 + 17 + 31 + 37 = 109.

18. A【解析】A.因为 $a\left(a+1\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1$，所以 $a^2+a=1$.

将$\dfrac{a^5+a^4-2a^3-a^2-a+2}{a^3-a}$变形为$\dfrac{a^3\left(a^2+a\right)-2a^3-\left(a^2+a\right)+2}{a\cdot\left(a^2-1\right)}$，把$a^2+a=1$代入，

则$\dfrac{a^3\left(a^2+a\right)-2a^3-\left(a^2+a\right)+2}{a\cdot\left(a^2-1\right)}=\dfrac{a^3-2a^3-1+2}{-a^2}=\dfrac{1-a^3}{1-a}=-\left(1+a+a^2\right)=-\left(1+1\right)=-2$.

19.【解析】B.被 5 除余 4，说明这个数的个位数为 4 或 9；被 2 除余 1，说明是奇数，故这个数的个位只能为 9.经检验，119 满足被 3 除余 2，又由于 2，3，5 的最小公倍数为 30，从而介于 100~200 的数有 119，149，179，共 3 个数.

20.【解析】E.$360=2\times2\times2\times3\times3\times5=3\times4\times5\times6$.由于逐个大 1 岁，所以 4 个小朋友的年龄分别是 3 岁、4 岁、5 岁、6 岁，所以 4 人年龄之和为 18 岁.

21.【解析】D.根据题意，可知将 1155 个同样大小的正方形拼成长宽不一的各种长方形， 其面积不变，可应用分解质因数的原理分解组合成两个数的乘积形式.

分解：1155=1×1155=3×385=5×231=7×165=11×105=15×77=21×55=33×35.因此，共有 8 种拼法.

【注意】此题可用 1155 的约数个数除以 2，即为所得.因为 1155=3×5×7×11，所以， 1155 的约数个数为$C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=2^4=16$（个），则 16÷2=8（个）.

22.【解析】A.因为$1176=2^3\times3\times7^2$，所以$2^3\times3\times7^2\times a=b^4$，$b^4$的各个质因数的指数都应为 4 的倍数，故$a=2\times3^3\times7^2=2646$为最小值.

23.【解析】A.依题意知，种树总数=每人种树棵数×师生总人数，即 572=每人种树棵数×（1+学生数），而学生数恰好平均分成三组，即学生数是 3 的倍数，再加上王老师一人， 则师生总数被 3 除余 1.

下面先将 572 分解质因数：$572=2\times2\times11\times13$，然后按照题意进行组合使之为两数之积.

若$572=44\times\left(1+12\right)$，1+12=13 为师生总人数，则每人种 44 棵，这不符合题意.

若$572=11\times\left(1+51\right)$，1+61=52 为师生总人数，则每人种 11 棵.

若$572=2\times\left(285+1\right)$，285+1=286 为师生总人数，则每人种 2 棵，这不符合题意.

因此，这个班共有学生 51 人，每人种树 11 棵.

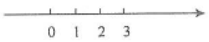
24.【解析】D.设两数分别为a和b，由题意可知：$4875=\left(a\times b\right)\cdot n$（$n$为整数）.

根据被除数=除数×商的关系，则有$4875=\left(a\times b\right)\cdot n$.这样，运用分解质因数的原理进行分解，再根据$a+b=64$进行组合.$4875=3\times5\times5\times5\times13=\left(39\times25\right)\times5$.

故这两个数分别是 39 和 25，它们之差是：39—25=14.

25.【解析】C.设 A（1），B（2），C（3），P（x），如图所示，求$|x-1|+|x-2|+|x-3|$

的最小值，即是在数轴上求一点 P，使 AP+BP+PC 为最小，显然，当 P 与 B 重合，即 $x=2$ 时，其和有最小值 2.



二、充分性判断题

1.【解析】B. 题干只需 $x>2$ 即可，所以条件(2) 充分.

2.【解析】B. 由 $\frac{|a|}{a+a^2}=-\frac{1}{a+1}\Rightarrow\frac{|a|}{a(1+a)}=-\frac{1}{a+1}\Rightarrow a<0$ 且 $a\neq-1$，故条件(2) 充分.

3.【解析】D. 方法一：由(1)，因为 $x<0<z, xy>0$，$|y|>|z|>|x|$，可知：$x+z>0$，$y+z<0, x-y>0$.

所以 $|x+z|+|y+z|-|x-y|=0$，充分；同理，条件(2) 也充分.

方法二：利用数轴画图：

$x<0<z, xy>0$，$|y|>|z|>|x|$，可知 $x+z>0, y+z<0, x-y>0$.

所以 $|x+z|+|y+z|-|x-y|=x+z-y-z-x+y=0$；同理，条件(2) 也充分.

4.【解析】B. 本题考查平均值的定义，由题得到 $x+y=10, xy=16$，故条件(2) 充分.

5.【解析】B. 条件(1)$m+\frac{1}{m}=\sqrt{5}+2+\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2=2\sqrt{5}$，由于$\sqrt{5}<2.5$，故整数部分 $n=4$，不充分；条件(2) $\frac{13n}{10}$ 为整数，所以 n 应该为 10 的倍数，充分.

6.【解析】C. 题干的几何意义为：$|x-2|+|x+1|=3$，即在数轴上 x 到 2 的距离与到 -1 的距离之和为 3 的点，因为点 -1 与点 2 的距离为 3，所以点 x 在 $[-1,2]$，因此联合起来充分.

7.【解析】A. 根据绝对值的性质，对不等式两边同时平方，$(2x-1)^2\leqslant(2-x)^2\Rightarrow x^2\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$，可知(1) 是充分的.

8.【解析】A. 根据绝对值的性质，可知 $2x-1<0\Rightarrow x<\frac{1}{2}$，所以条件(1) 是充分的.