高难度习题

开心提示：此部分内容难度稍大，可能费时较多。大家加油！

一、问题求解题

1.已知x，y，z都是正数，且$2^x=3^y=6^z$，那么$\frac{z}{x}+\frac{z}{y}=$（　　）.

（A）-1　　（B）0　　（C）1　　（D）$\log_2 3$　　（E）$\log_3 2$

2.设多项式$f(x)$除以$(x-1)(x-2)(x-3)$的余式为$2x^2+x-7$，则以下说法中不正确的是（　　）.

（A）$f(x)$除以$x-1$的余式为-4

（B）$f(x)$除以$x-2$的余式为3

（C）$f(x)$除以$x-3$的余式为14

（D）$f(x)$除以$(x-1)(x-2)$的余式为$7x-11$

（E）$f(x)$除以$(x-2)(x-3)$的余式为$11x+19$

3.x^{12}除以$(x+1)^2$的余式是（　　）.

（A）$12x+11$　　（B）$-12x+11$　　（C）$-12x-11$

（D）$12x-11$　　（E）$11x-12$

4.$x^{12}+99$除以x^8+x^4+1的余式是（　　）.

（A）x^6+1　　（B）x^3+2　　（C）x^2+100　　（D）100　　（E）x^2-3

5.设$x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$，a是x的小数部分，b是$4-x$的小数部分，则$a^3+b^3+3ab(a+b)=$（　　）.

（A）4　　（B）2　　（C）3　　（D）1　　（E）6

6.使得n^3+100能被$n+10$整除的最大正整数n为（　　）.

（A）890　　（B）990　　（C）1000　　（D）1890　　（E）900

7. 已 知 $a+b+c=0$ 且 $\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}=0$ ， 则 $\frac{bc+b-c}{b^2c^2}+\frac{ca+c-a}{a^2c^2}+$

$\dfrac{ab+a-b}{a^2b^2}$的值为（　　）.

（A）90　　（B）0　　（C）10　　（D）1　　（E）100

8.求$\left(x^2-xy\right)\div\dfrac{x^2-2xy+y^2}{y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2}=$（　　），其中$x=-2$，$y=\dfrac{1}{2}$.

（A）$\dfrac{1}{8}$　　（B）$\dfrac{3}{8}$　　（C）$\dfrac{5}{8}$　　（D）$\dfrac{1}{4}$　　（E）$\dfrac{1}{2}$

9.已知$x-y=5$，且$z-y=10$，则整式$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$的值为（　　）.

（A）105　　（B）75　　（C）55　　（D）35　　（E）25

10.已知多项式$2x^3-x^2-13x+k$有一个因式$2x+1$，则其必含有下列因式（　　）.

（A）$x-1$　　（B）$x-2$　　（C）$x+1$　　（D）$x-3$　　（E）$x+3$

11.积$\left(1+\dfrac{1}{1\times3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2\times4}\right)\left(1+\dfrac{1}{3\times5}\right)\left(1+\dfrac{1}{4\times6}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{98\times100}\right)\left(1+\dfrac{1}{99\times101}\right)$的整数部分为（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4　　（E）5

12.已知a，b，c，d为互不相等的非零实数，且$ac+bd=0$，则$ab\left(c^2+d^2\right)+cd\left(a^2+b^2\right)$的值等于（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4　　（E）0

13.若$a-b=3$，$a-c=\sqrt[3]{26}$，则$(c-b)\left[(a-b)^2+(a-c)(a-b)+(a-c)^2\right]$的值为（　　）.

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）3.5　　（E）1

14.解方程$(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15=0$，有（　　）个整数解.

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）5　　（E）6

15.求方程$4x^2-4xy-3y^2=5$的整数解有（　　）种.

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）5　　（E）6

16.若$\dfrac{\lg x+\lg y}{\lg x}+\dfrac{\lg x+\lg y}{\lg y}+\dfrac{\left[\lg(x-y)\right]^2}{\lg x\lg y}=0$，则$\log_5(x+y)$的值为（　　）.

（A）0　　（B）2　　（C）4　　（D）8　　（E）0.5

17.已知$\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}=3$，则$\frac{\left(a\sqrt{a}+\frac{1}{a\sqrt{a}}+2\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}+3\right)}{\sqrt[4]{a}+\frac{1}{\sqrt[4]{a}}}$的值（　　）.

（A）$200\sqrt{11}$　（B）$100\sqrt{7}$　（C）$100\sqrt{5}$　（D）$200\sqrt{3}$　（E）$200\sqrt{5}$

18.已知$x\in[-3,2]$，则$f(x)=\frac{1}{4^x}-\frac{1}{2^x}+1$的最大值与最小值之差为（　　）.

（A）$56\frac{1}{2}$　（B）$56\frac{1}{4}$　（C）$55\frac{1}{4}$　（D）$55\frac{3}{4}$　（E）$53\frac{1}{2}$

二、充分性判断题

1.已知a，b，c均是非零实数，有$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$.

（1）$a+b+c=0$　（2）$a+b+c=1$

2.已知a，b，c均是不等于零的实数，有$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0$.

（1）$a+b+c=0$　（2）$a^2=b^2=c^2$

3.$\frac{x^4-33x^2-40x+244}{x^2-8x+15}=5$成立.

（1）$x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$　（2）$x=\sqrt{19+8\sqrt{3}}$

4.$2m^3-5m^2-3+\frac{3}{m^2+1}$的值为$-1$.

（1）实数m是方程：$x^2-3x+1=0$的根

（2）实数m是方程：$x^2+3x-1=0$的根

5.$\frac{(a^2-4a+4)(a^3-2)}{a^3-6a^2+12a-8}-\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a-2}$的值是正整数.

（1）$a=1$　（2）$a=-1$

6.$x^3+y^3+z^3+mxyz$能被$x+y+z$整除（$xyz\neq 0$，$x+y+z\neq 0$）.

（1）$y+z=0$　（2）$m=-3$

7.$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=k\cdot$

（1）$k=4$　　　　　　　　　　（2）$k=3$

综合提高题详解

一、问题求解题

1.【解析】C.由于 $2^x=3^y=6^z$，取自然对数，有 $x\ln 2=y\ln 3=z\ln 6$，$\frac{z}{x}=\frac{\ln 2}{\ln 6}$，$\frac{z}{y}=\frac{\ln 3}{\ln 6}$，从而 $\frac{z}{x}+\frac{z}{y}=1$.

2.【解析】E.设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)q(x)+2x^2+x-7$，（A）$f(x)$ 除以 $x-1$ 的余式为 $f(1)=-4$；（B）$f(x)$ 除以 $x-2$ 的余式为 $f(2)=3$；（C）$f(x)$ 除以 $x-3$ 的余式为 $f(3)=14$；（D）$f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的余式为 $2x^2+x-7$，除以 $(x-1)(x-2)$ 的余式为 $7x-11$；（E）$f(x)$ 除以 $(x-2)(x-3)$ 的余式为 $2x^2+x-7$，除以 $(x-2)(x-3)$ 的余式为 $11x-19$.

3.【解析】C.设 $x^{12}=(x+1)^2q(x)+a(x+1)+b$，将 $x=-1$ 代入，得 $b=1$，故有 $x^{12}-1=(x+1)^2q(x)+a(x+1)$，再除以 $x+1$，得 $x^{11}-x^{10}+x^9-x^8+x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1=(x+1)q(x)+a$，以 $x=-1$ 代入，得 $a=-12$，故所求余式为 $-12(x+1)+1=-12x-11$.

4.【解析】D.令 $x^8+x^4+1=0$，则 $x^8=-x^4-1$，那么有

$$x^{12}+99=x^8\cdot x^4+99=\left(-x^4-1\right)x^4+99$$

$$=-x^8-x^4+99=\left(x^4+1\right)-x^4+99=100$$

5.【解析】D.由 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 得，$a^3+b^3+3ab(a+b)=(a+b)^3$，a，b 分别为 x 和 $4-x$ 的小数部分，$a<1$，$b<1$，$x+(4-x)=4$，则 $a+b=1$，即 $(a+b)^3=1$.

6.【解析】A.$n^3+100=n^3+1000-900=(n+10)(n^2-10n+100)-900$，于是若 $n+10\mid n^3+100$，则 $n+10\mid 900$.由于 $n+10\leqslant 900$，因此为使 n 最大，取 $n+10=900$，则 $n=890$.

7.【解析】B.由 $a+b+c=0$，得 $a^2bc+ab^2c+abc^2=0$（式①）.由 $\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+$

$\dfrac{a-b}{c}=0$，得 $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)=0$，即 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ $=0$（式②）.

式①＋式②，得 $a^2(bc+b-c)+b^2(ac+c-a)+c^2(ab+a-b)=0$.由题可知 a，b，c 均不得为 0，所以两边同除以 $a^2b^2c^2$，得

$$\frac{bc+b-c}{b^2c^2}+\frac{ca+c-a}{a^2c^2}+\frac{ab+a-b}{a^2b^2}=0$$

8.【解析】B.原式 $=x(x-y)\cdot\dfrac{y}{(x-y)^2}\cdot\dfrac{(x+y)(x-y)}{x^2}=\dfrac{y(x+y)}{x}$；若 $x=-2$，$y=\dfrac{1}{2}$，则有

$$\text{原式}=\frac{\frac{1}{2}\left(-2+\frac{1}{2}\right)}{-2}=\frac{3}{8}$$

9.【解析】B. $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\dfrac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$，$\begin{cases}x-y=5\\z-y=10\end{cases}\Rightarrow z-x=5$，代入计算，可知选 B.

10.【解析】D.使用待定系数法，设 $2x^3-x^2-13x+k=(2x+1)(x^2+ax+k)$，则 $2x^3-x^2-13x+k=2x^3+(2a+1)x^2+(a+2k)x+k$.

所以 $\begin{cases}2a+1=-1\\a+2k=-13\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-1\\k=-6\end{cases}$.

$2x^3-x^2-13x-6=(2x+1)(x^2-x-6)=(2x-1)(x-3)(x+2)$，故选 D.

11.【解析】A.这道题要求 99 个括号里的数值的乘积，当然不能用常规方法去实乘.观察其特点：每个分数是相邻奇数或偶数的积，记为 $n(n+2)$；每个括号的分子相加又都是 $n(n+2)+1=(n+1)^2$，于是，设所求式子之积为 S，则有

$$S=\frac{2^2}{1\times3}\times\frac{3^2}{2\times4}\times\frac{4^2}{3\times5}\times\frac{5^2}{4\times6}\cdots\frac{99^2}{98\times100}\times\frac{100^2}{99\times101}$$

$$=\frac{2^2\times3^2\times4^2\times5^2\cdots99^2\times100^2}{1\times2\times3^2\times4^2\times5^2\cdots99^2\times100\times101}=\frac{200}{101}\text{（}1<S<2\text{）}.$$

故应选 A.

12.【解析】E.原式$=(abc^2+a^2cd)+(abd^2+b^2cd)=ac(bc+ad)+bd(ad+bc)=$ $(ad+bc)(ac+bd)=(ad+bc)\times 0=0$.

【评注】利用分解因式，先化简代数式，上述的求值题就变得十分容易了.当然，本题也可以采用特值法求解.

13.【解析】E.所求的代数式中含有$c-b$，可以通过已知的$a-b=3$与$a-c=\sqrt[3]{26}$，推出$c-b=3-\sqrt[3]{26}$.

所以原式$=\left(3-\sqrt[3]{26}\right)\left[3^2+\sqrt[3]{26}\times 3+\left(\sqrt[3]{26}\right)^2\right]=3^2-\left(\sqrt[3]{26}\right)^3=27-26=1$.

14.【解析】C.将原方程式左边分解因式，可得$\left(x^2+4x+3\right)\left(x^2+4x-5\right)=0$.$\left(x+1\right)$ $\left(x+3\right)\left(x-1\right)\left(x+5\right)=0$，由此得$x+1=0$，或$x+3=0$，或$x-1=0$，或$x+5=0$（原方程的解是$-1$，$-3$，$1$，$-5$）.

15.【解析】C.原方程或化为$\left(2x-3y\right)\left(2x+y\right)=5$.因为$x$，$y$是整数，故$2x-3y$和$2x+y$必是整数.又因为$5=5\times 1=\left(-5\right)\times\left(-1\right)$，因此原方程可化为四个方程组：

$$\begin{cases}2x-3y=1\\2x+y=5\end{cases}\text{或}\begin{cases}2x-3y=5\\2x+y=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}2x-3y=-1\\2x+y=-5\end{cases}\text{或}\begin{cases}2x-3y=-5\\2x+y=-1\end{cases}$$

解这四个方程组，便可得原方程的四组解为

$$\begin{cases}x_1=2\\y_1=1\end{cases};\ \begin{cases}x_2=1\\y_2=-1\end{cases};\ \begin{cases}x_3=-2\\y_3=-1\end{cases};\ \begin{cases}x_4=-1\\y_4=1\end{cases}.$$

所以选C.

16.【解析】E.去分母得$\left(\lg x+\lg y\right)^2+\left[\lg\left(x-y\right)\right]^2=0$，所以$\begin{cases}\lg x+\lg y=0\\\lg\left(x-y\right)=0\end{cases}\Rightarrow$ $\begin{cases}xy=1\\x-y=1\end{cases}$，所以$x$，$-y$是二次方程$t^2-t-1=0$的两实数根，且$x>0$，$y>0$，$x\neq 1$，$y\neq 1$，$x>y$，解得$t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，因为$x>0$，所以$x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以$\log_5\left(x+y\right)=0.5$.

17.【解析】E.

因为$\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}=3\Rightarrow\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=9\Rightarrow a+\frac{1}{a}=7$，所以$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=49\Rightarrow a^2+\frac{1}{a^2}$

$=47$，所以 $a\sqrt{a}+\frac{1}{a\sqrt{a}}=a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)\left[\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2-a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}+\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2\right]$

$$=\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(a-1+\frac{1}{a}\right)=3\times6=18,$$

而
$$\sqrt[4]{a}+\frac{1}{\sqrt[4]{a}}=\sqrt{\left(\sqrt[4]{a}+\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^2}=\sqrt{\sqrt{a}+2+\frac{1}{\sqrt{a}}}=\sqrt{5},$$

所以原式$=\frac{(18+2)\times(47+3)}{\sqrt{5}}=\frac{20\times50}{\sqrt{5}}=200\sqrt{5}$.

18.【解析】B. $f(x)=\frac{1}{4^x}-\frac{1}{2^x}+1=4^{-x}-2^{-x}+1=2^{-2x}-2^{-x}+1=\left(2^{-x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，因为$x\in[-3,2]$，所以$\frac{1}{4}\leqslant 2^{-x}\leqslant 8$，则当$2^{-x}=\frac{1}{2}$，即$x=1$时，有最小值$\frac{3}{4}$；当$2^{-x}=8$，即$x=-3$时，$f(x)$有最大值$57$，故最大值与最小值之差为$56\frac{1}{4}$.

二、充分性判断题

1.【解析】A. $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}$.条件（1），有$a+c=-b$，$b+c=-a$，$a+b=-c$，从而有$\frac{a+b}{b}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}=-3$，充分；条件（2），有$a+c=1-b$，$b+c=1-a$，$a+b=1-c$，从而$\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}=-3+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ $\neq-3$，不充分.

2.【解析】A.

由条件（1）知，$a=-(b+c)$，代入$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}$中，得$\frac{1}{b^2+c^2-\left[-(b+c)\right]^2}=-\frac{1}{2bc}$；

同理有$\frac{1}{c^2+a^2-b^2}=\frac{1}{-2ac}$，$\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=-\frac{1}{2ab}$，故$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=\frac{1}{-2bc}+\frac{1}{-2ac}+\frac{1}{-2ab}=0$，充分.

根据条件（2）可以得到$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{a^2}\neq 0$，不充分.

3.【解析】D.由条件（1）和条件（2）得到$x^2-19=\pm 8\sqrt{3}$，从而$x^4-33x^2-40x+244-5(x^2-8x+15)=x^4-38x^2+169=(x^2-19)^2-192=0$.

4.【解析】A.条件（1），因为实数m是方程$x^2-3x+1=0$的根，所以$m^2-3m+1=0\Rightarrow m^2+1=3m$，则$2m^3-5m^2-3+\frac{3}{m^2+1}=2m(m^2-3m+1)+m^2-2m-3+\frac{3}{3m}=m^2-3m+1+m+\frac{3}{3m}-4=m+\frac{1}{m}-4=\frac{m^2+1}{m}-4=\frac{3m}{m}-4=-1$；条件（2），同理条件（1），但是得不出结论，故选 A.

5.【解析】D.原式$=\frac{a^3-2}{a-2}-\frac{a^3+1}{a-2}=-\frac{3}{a-2}$，所以$a-2=-1$或$-3$，得$a=\pm 1$.

6.【解析】D.当$x^3+y^3+z^3+mxyz$能被$x+y+z$整除时，它含有$x+y+z$因式.令$x+y+z=0$，得$x=-\left(y+z\right)$，代入原式其值比为 0，即$\left[-\left(y+z\right)\right]^3+y^3+z^3-myz\left(y+z\right)=0$，把左边因式分解，得$-yz\left(y+z\right)\left(m+3\right)=0$，因为$yz\neq 0$，所以当$y+z=0$或$m+3=0$时等式成立.故当$x$，$y$（或$y$，$z$或$x$，$z$）互为相反数时，$m$可取任何值，而当$m=-3$时，$x$，$y$，$z$不论取什么值，原式都能被$x+y+z$整除.

7.【解析】A.设$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=x$，$\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=y$.那么$x^3+y^3=40$，$xy=\sqrt[3]{400-196\times 2}=2$.因为$x^3+y^3=\left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)$，所以$40=\left(x+y\right)^3-6\left(x+y\right)$.设$x+y=u$，得$u^3-6u-40=0$.$(u-4)(u^2+4u+10)=0$.因为$u^2+4u+10=0$没有实数根，所以$u-4=0$，$u=4$，故$x+y=4$，即$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.故选 A.