On the deconvolutions of probability densities

A Preprint

November 5, 2024

Abstract

xxx

Keywords deconvolution · characteristic functions

1 XXX

The convolution of two probability densities f, g is the density given by $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du$. We shall denote h by $f * g$. The convolution $f * g$ also corresponds to the density of the sum $X + Y$ of independent random variables X and Y with density f, g, respectively.

Let f_X, f_Y and f_Z be the probability densities with support on $\mathbb{R}$. In this paper we study under which conditions $f_X * f_Y = f_X * f_Z \implies f_Y = f_Z$. This question is related to the deconvolution problem.

One might ask why this is not always the case. In this regard Feller [1957] provides an illustrating example with characteristic functions.

Example 1.1 (Feller page 502 section XV.2a)**.** *Let X be a random variable with density given by*

$$f_X(x) = \frac{(1-\cos(x))}{\pi x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

Then the characteristic function $\varphi_X(t)$ of $f(x)$ is given by:

$$\varphi_X(t) = (1 - |t|)\mathbb{I}_{[-1,1]}(t).$$

Eu não cheguei a fazer a conta na mão, mas está explicitamente mencionado no Feller que esse é o caso. Vou tentar rascunhar a demonstração abaixo: Lembrando que $\sin(x/2)^2 = (1 - cos(x))^2$ e que a densidade é simétrica ao redor de 0 notamos que $E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{(1-cos(x))}{\pi x^2}dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\pi x^2}dx$. Substituindo $u = x/2$ temos $2\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\pi x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2tu}\frac{\sin(u)^2}{\pi u^2}du$. Logo o problema é equivalente a encontrar a transformada de Fourier de $\frac{\sin^2(u)}{u^2}$. O truque mais que considero mais tragável pra calcular isso é notar que $\frac{\sin(t)}{t} = \int_{-1}^{1} e^{itv}dv$. Sendo assim dá pra substituir essa fórmula na integral anterior, aplicar Fubini e resolver a integral em uma ordem conveniente em que aparece esse triângulo.

Now, Pólya criterion (Example 3.b of chapter XV of Feller [1957]) guarantees that any even, convex and continuous function φ_Y with $\varphi_Y(0) = 1$ is the characteristic function of some random variable Y. Therefore it's possible to define two characteristic functions φ_{Y_1} and φ_{Y_2} that coincide in $[-1, 1]$ and diverge outside this interval.

In this case:

$$\varphi_X(t)\varphi_{Y_1}(t) = \varphi_X(t)\varphi_{Y_2}(t), \forall t,$$

but $\varphi_{Y_1}(t) \neq \varphi_{Y_2}(t)$ *for* t *outside* $[-1, 1]$. *Therefore* $f_{Y_1} \neq f_{Y_2}$.

The distribution of f_X is very pathologic. It is 0 on an infinite enumerable number of points and it has no finite moments. We ask ourselves what conditions are sufficient for the deconvolution to be possible.

Seguindo o comentário do Feller na página 506, o próximo passo poderia ser:

1 - Provar que $\mathbf{F} \star G_1 = \mathbf{F} \star G_2$ implica que $G_1 = G_2$ quando $\mathbf{F}$ é a distribuição Normal.

2 - Trocar $\mathbf{F}$ por qualquer F tal que a sua função característica não se anule na reta.

3 - Quando $\mathbf{H} \star G_1 = \mathbf{H} \star G_2$ implicar que $G_1 = G_2$ então H tem função característica que não se anula na reta.

4 - Onde entra a condição da função característica ser ou não integrável nos passos acima...?

Acredito que a sugestão de próximos passos pode ser um caminho para o que queremos. Vou verificar. Abraço

References

W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 2*. Number v. 1-2 in An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Wiley, 1957. ISBN 9780471257097. URL `https://books.google.com.br/books?id=BsSwAAAAIAAJ`.