# Gabartio Lista 2

## Exercício 1

Vamos definir o evento **S** sendo a ocorrência do sorteio RRRMMMMM. Utilizando o teorema de Bayes, a probabilidade do colégio **C** ter sido selecionado *dado* o evento S será dada pela fórmula

$$P(C|S) = \frac{P(S|C)P(C)}{P(S)}$$

onde P(C) é a probabilidade de o colégio C ser selecionado e P(S) é a probabilidade do sorteio mencionado acima ocorrer.
Do enunciado, sabe-se que P(C) é igual à 1/3.
Para determinar P(S) deve-se ter a informação da probabilidade de sortearmos um rapaz, e a probabilidade de sortearmos uma moça (complementar). No evento temos um total de oito pessoas sorteadas onde a ordem do sorteio não nos importa pois queremos saber apenas quantos rapazes e quantas moças estão presentes em S. Como a escolha é feita de forma independente, pode-se dizer que S é o resultado de uma binomial com $n = 8$ e probabilidade de sucesso sendo a proporção de rapazes (ou a proporção de moças), mas temos essas informaçoes para três colégios diferentes, portanto devemos utilizar um resultado dado na aula seis do site do curso. Feita essa interpretação, temos que:

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C) \\ &= \binom{8}{3}(0.4)^3(0.6)^5\frac{1}{3} + \binom{8}{3}(0.2)^3(0.8)^5\frac{1}{3} + \binom{8}{3}(0.1)^3(0.9)^5\frac{1}{3} \\ &= \frac{8!}{3!(8-3)!}\frac{1}{3}\left((0.4)^3(0.6)^5 + (0.2)^3(0.8)^5 + (0.1)^3(0.9)^5\right) \\ &= \frac{56}{3}(0.0050 + 0.0026 + 0.0006) \\ &= 0.1531 \end{aligned} \tag{1}$$

portanto, a probabilidade do colégio C ser selecionado dado o evento S será:

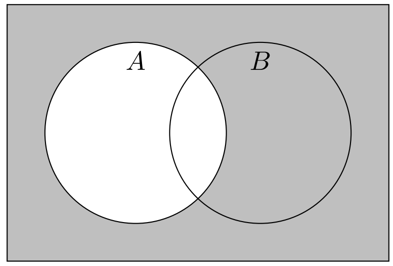
$$\begin{aligned} P(C|S) &= \frac{P(S|C)P(C)}{P(S)} \\ &= \frac{\binom{8}{3}(0.1)^3(0.9)^5\frac{1}{3}}{0.1531} \\ &= \frac{0.0112}{0.1531} \\ &= 0.0732 \end{aligned} \tag{2}$$

## Exercício 2

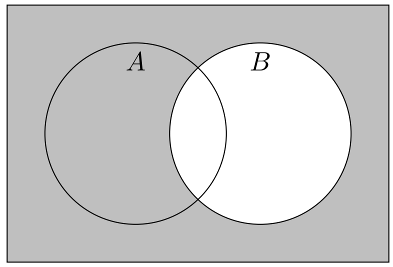
Sabe-se inicialmente que A e B são independentes, então $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Primeiro caso: $A^c \cap B^c$ independentes.

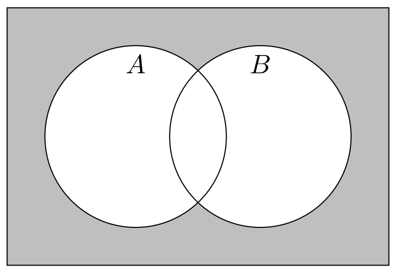
Para começar, o mais importante é enxergar o que esta intersecção significa. Temos que $A^c$ é:




e $B^c$ é:




portanto, a intersecção de $A^c$ com $B^c$ será:

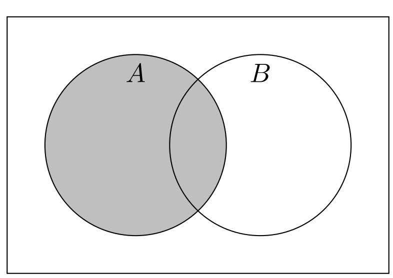



e isso é equivalente à $[A \cup B]^c$, logo:

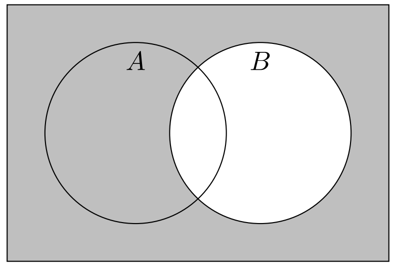
$$
\begin{aligned}
P(A^c \cap B^c) &= P([A \cup B]^c) \\
&= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\
&= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\
&= P(A^c) - P(B) + P(A)P(B) \\
&= P(A^c) - P(B)[1 - P(A)] \\
&= P(A^c) - P(B)P(A^c) \\
&= P(A^c)[1 - P(B)] \\
&= P(A^c)P(B^c) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Segundo caso: $A \cap B^c$ independentes.

Temos que A é:



e $B^c$ é:




portanto a intersecção de A com $B^c$ é equivalente a $A - A \cap B$. Em termos de probabilidade teremos:

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)[1 - P(B)] \\ &= P(A)P(B^c) \end{aligned} \tag{4}$$

Terceiro caso: $A^c \cap B$ independentes.

Este caso tem o mesmo raciocínio do anterior mas com os eventos trocados, logo:

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) \\ &= P(B)[1 - P(A)] \\ &= P(B)P(A^c) \end{aligned} \tag{5}$$

## Exercício 3

Neste exercício, se o curso aumenta a produtividade de uma certa população de fucionários em 80 % dos casos, então um indivídiduo que fizer o curso tem probabilidade de 80 % de aumentar sua produtividade. O exercício envolve 10 indivíduos que realizam o curso de forma independente, portanto podemos pensar em uma binomial com $n = 10$ e probabilidade de sucesso igual à 0.8. Para a resolução dos itens será adotado os eventos **S** sendo o número de sucessos (aumento da produtividade) e **F** número de fracassos (sem aumento da produtividade).

a) Exatamente sete funcionários aumentarem a produtividade

$$\begin{aligned} P(S = 7) &= \binom{10}{7}(0.8)^7(0.2)^3 \\ &= \frac{10!}{3!(10-3)!}(0.8)^7(0.2)^3 \\ &= 0.2013 \end{aligned} \tag{6}$$

b) Não mais do que oito funcionários aumentarem a produtividade

$$
\begin{aligned}
P(S \leq 8) &= 1 - \Big(P(S=9) + P(S=10)\Big) \\
&= 1 - \left(\binom{10}{9}(0.8)^9(0.2)^1 + \binom{10}{10}(0.8)^10(0.2)^0\right) \\
&= 1 - (0.2684 + 0.1074) \\
&= 0.6242
\end{aligned} \tag{7}
$$

c) Pelo menos três funcionarios não aumentarem a produtividade.

Neste caso o que foi pedido é mesmo que a probabilidade de não mais do que 7 funcionários aumentarem a produtividade.

$$
\begin{aligned}
P(F \geq 3) &= P(F=3) + P(F=4) + P(F=5) + ... + P(F=10) \\
&= P(S=7) + P(S=6) + P(S=5) + ... + P(S=0) \\
&= P(S \leq 7) \\
&= 1 - \Big(P(S=8) + P(S=9) + P(S=10)\Big) \\
&= 1 - \left(\binom{10}{8}(0.8)^8(0.2)^2 + \binom{10}{9}(0.8)^9(0.2)^1 + \binom{10}{10}(0.8)^10(0.2)^0\right) \\
&= 1 - (0.3020 + 0.2684 + 0.1074) \\
&= 0,3222
\end{aligned} \tag{8}
$$

## Exercício 4

Neste exercício temos a variável X = volume da garrafa de refrigerante. Como X segue uma distribuição normal com média $\mu = 1000cm^3$ e desvio padrão $\sigma = 10cm^3$, temos X $\sim$ N(1000, 100)

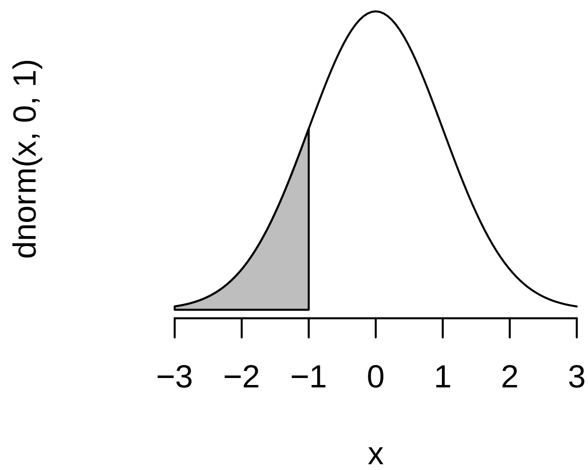
a) Porcentagem de garrafas em que o volume do líquido é menor que 990 $cm^3$

$$
P(X < 990) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{990-\mu}{\sigma}\right) \tag{9}
$$

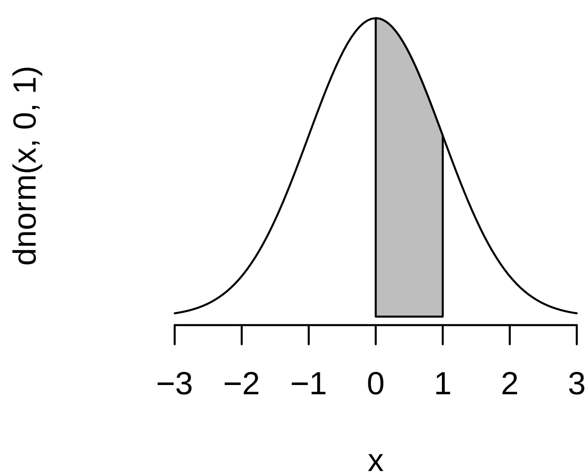
e sabemos que $\frac{X-\mu}{\sigma}$ possui distribuição Normal com média zero e variância 1, que usualmente denotamos por $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, ou seja Z $\sim$ N(0, 1). Continuando a resolução temos:

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{990-\mu}{\sigma}\right) &= P\left(Z < \frac{990-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(Z < \frac{990-1000}{10}\right) \\
&= P(Z < -1)
\end{aligned} \tag{10}
$$

e agora devemos procurar na tabela da distribuição da normal padrão a área da probalidade que corresponde a $Z < -1$. Pelo gráfico abaixo, temos a área em cinza que representa a probabilidade que desejamos saber:




Para obter o valor devemos consultar a tabela da distribuição normal padrão, lembrando que essa distribuição é simétrica e que o valor obtido da tabela não dará exatamente o valor que procuramos. O valor que procuramos é 0.34134 e corresponde a seguinte probabilidade:




No caso desse item do exercício queremos o complementar à direita dessa área em cinza, logo:

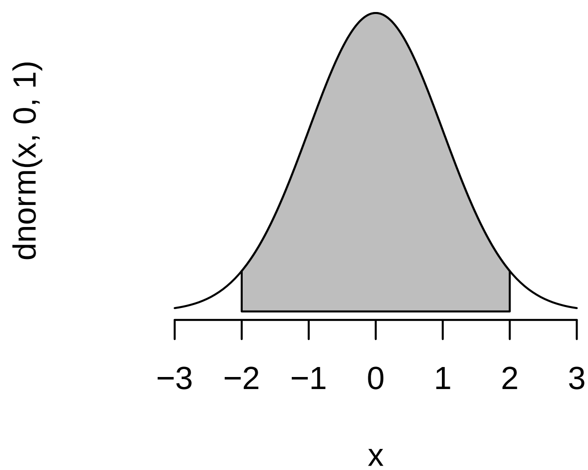
$$\begin{aligned} P(Z < -1) &= 0.5 - 0.34134 \\ &= 0.15866 \end{aligned} \tag{11}$$

e essa área à direita equivale a área do primeiro gráfico devido a simetria da distribuição.

b) porcentagem das garrafas em que o volume líquido não se desvia da média em mais que dois desvios padrões.

$$\begin{aligned} P(1000 - 2\sigma < X < 1000 + 2\sigma) &= P(980 < X < 1020) \\ &= P\left(\frac{980 - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{1020 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{980 - 1000}{10} < \frac{X - 1000}{10} < \frac{1020 - 1000}{10}\right) \\ &= P(-2 < Z < 2) \end{aligned} \tag{12}$$

novamente temos $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ sendo uma normal padrão, ou seja Z $\sim$ N(0, 1). A área do gráfico da distribuição normal padrão em que z está entre $-2$ e 2 é:




Na tabela encontraremos o valor da probabilidade em z está entre zero e dois (0.47725), logo a probabilidade que queremos encontrar será o dobro desse valor devido a simetria da distribuição:

$$\begin{aligned} P(-2 < Z < 2) &= 2 \times 0.47725 \\ &= 0.9545 \end{aligned} \tag{13}$$

c) O que acontecerá com a porcentagem do item (b) se a máquina for regulada de forma que a média seja 1200 $cm^3$ e o desvio padrão 20 $cm^3$?

$$\begin{aligned} P(1200 - 2\sigma < X < 1200 + 2\sigma) &= P(1160 < X < 1240) \\ &= P\left(\frac{1160 - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{1240 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{1160 - 1200}{20} < \frac{X - 1200}{20} < \frac{1240 - 1200}{20}\right) \\ &= P(-2 < Z < 2) \end{aligned} \tag{14}$$

e chegamos a algo igual que foi feito no item (b), logo:

$$
\begin{aligned}
P(-2 < Z < 2) &= 2 \times 0.47725 \\
&= 0.9545 \qquad (15)
\end{aligned}
$$