Análise de Variância

A técnica de análise de variância permite fazer a comparação de múltiplas médias por meio de um teste de hipóteses. A construção do teste se dá pela decomposição da variabilidade em componentes referentes aos diferentes grupos e à variabilidade inerente das observações dentro dos grupos.

Considera-se o seguinte modelo:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + e_{ij}$$

Nesse modelo a variável resposta Y é descrita pela média geral μ mais um efeito de grupo τ mais um erro aleatório. O índice $i = 1, 2, \ldots, a$ representa os diferentes grupos e o índice $j = 1, 2, \ldots, n$ representa os diferentes elementos dentro de cada grupo. Considerando $\bar{y}_{..} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{ij}}{n}$ a média geral e $\bar{y}_{i.} = \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{ij}}{n}$ a média do grupo i, a decomposição da variabilidade se dá na forma:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{..}) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{i.})$$

$$SQTOT = SQTRAT + SQRES$$

Partido da suposição que os erros e_{ij} são independentes e idênticamente distribuidos *(i.i.d)* com distribuição $Normal(\mu = 0, \sigma^2)$ pode-se testar as seguintes hipóteses:

- $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0$
- $H_a : \exists \tau_i \neq 0$

Usando a seguinte estatística de teste:

$$F = \frac{\frac{SQTRAT}{(a-1)}}{\frac{SQRES}{(an-a)}}$$

que sob hipótese nula tem distribuição $F((a-1), (an-a))$

Exemplo

O conjunto de dados *iris* disponível no R apresenta medidas de comprimento e largura de pétalas e sépalas e classificação de 3 espécies de um tipo de flor. Nesse exemplo de aplicação a técnica de análise de variância será utilizada para avaliar se existem diferenças entre as médias de comprimento das pétalas das flores das diferentes espécies.

```
modelo <- aov(iris$Petal.Length~iris$Species)
summary(modelo)
```

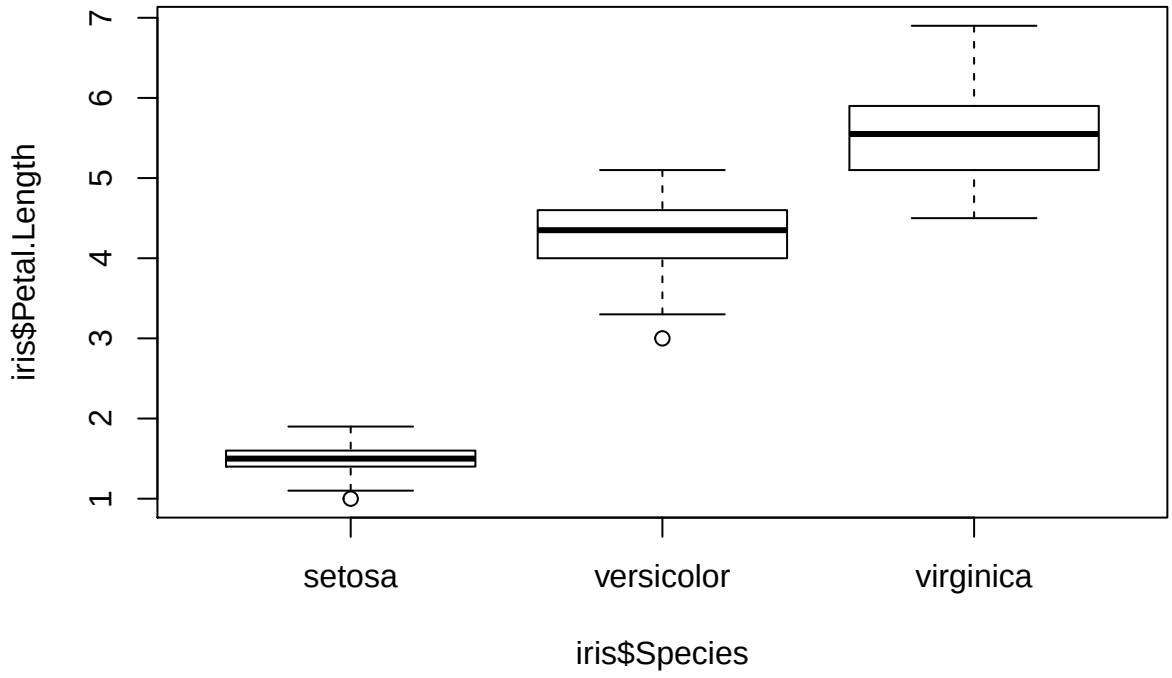
```
##               Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
## iris$Species   2  437.1  218.55    1180 <2e-16 ***
## Residuals    147   27.2    0.19
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

O resultado acima é uma representação da tabela de análise de variância, que apresenta as principais informações consideradas para realizar o teste, sendo elas:

- As somas de quadrado, que são os componentes da decomposição da variabilidade
- Os quadrados médias, que são as somas de quadrados divididas pelos seus graus de liberdade
- A estatística de teste F
- O p-valor para o teste

Como se pode perceber nesse teste o p-valor é muito pequeno, indicando a rejeição da hipótese de igualdade entre as médias. O gráfico abaixo ilustra a distribuição dos comprimentos de pétalas para as diferentes espécies, e pode-se notar a evidente diferença entre as espécies, confirmando o resultado do teste.

```
boxplot(iris$Petal.Length~iris$Species)
```



Os resultados de análise de variância não permitem identificar entre quais grupos as médias são distintas, e uma das possíveis técnicas para identificar os pares de grupos que tenhas médias diferentes é o teste de Tukey, que tem por propriedade controlar o erro global do experimento.

```
TukeyHSD(modelo)
```

```
##   Tukey multiple comparisons of means
##     95% family-wise confidence level
##
## Fit: aov(formula = iris$Petal.Length ~ iris$Species)
##
## $`iris$Species`
##                       diff     lwr     upr p adj
## versicolor-setosa    2.798 2.59422 3.00178     0
## virginica-setosa     4.090 3.88622 4.29378     0
## virginica-versicolor 1.292 1.08822 1.49578     0
```

Os resultados desse teste confirmam a impressão visual de que todas as espécies tem médias distintas quando comparadas duas a duas.

É importante perceber que as conclusões da análise de variância será valida somente se as suposições adotadas forem adequadas. A seguir será realizado um teste de normalidade para os resíduos.

```
shapiro.test(modelo$residuals)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  modelo$residuals
## W = 0.98108, p-value = 0.03676
```

No teste de Shapiro-Wilk a hipótese nula é de que os dados tenham distribuição Normal e pelo p-valor obtido para os resíduos do modelo considerado, deve-se rejeitar a hipótese de normalidade e portanto a técnica de análise de variância para esses dados não se mostra adequada.

Uma alternativa à Análise de Variância é o teste de Kruskal-Wallis, que é um teste dito não paramétrico pois não faz suposições sobre a forma ou os parâmetros das distribuições dos dados em teste. As hipóteses em teste são semelhantes às hipóteses consideradas na análise de variância.

```
kruskal.test(iris$Petal.Length,iris$Species)
```

```
##
##  Kruskal-Wallis rank sum test
##
## data:  iris$Petal.Length and iris$Species
## Kruskal-Wallis chi-squared = 130.41, df = 2, p-value < 2.2e-16
```

Considerando o pequeno valor observado para o p-valor do teste, deve-se rejeitar a hipótese de igualdade entre as médias.

Uma alternativa não paramétrica para o teste de Tukey seria o teste de Dunn, disponível no pacote *dunn.test*

```
require(dunn.test)
```

```
## Loading required package: dunn.test
```

```
dunn.test(iris$Sepal.Length,iris$Species)
```

```
##   Kruskal-Wallis rank sum test
##
## data: x and group
## Kruskal-Wallis chi-squared = 96.9374, df = 2, p-value = 0
##
##
##                            Comparison of x by group
##                                  (No adjustment)
## Col Mean-|
## Row Mean |     setosa   versicol
## ---------+----------------------
## versicol |  -6.106326
##          |    0.0000*
##          |
## virginic |  -9.741784  -3.635458
##          |    0.0000*    0.0001*
##
## alpha = 0.05
```

```
## Reject Ho if p <= alpha/2
```