Exercícios de distribuição Normal

1) Considere uma variável Z com distribuição normal com média $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = 1$ e calcule as seguintes probabilidades: (Use pnorm)

- $P(Z \leq -1,55)$
- $P(Z \leq 0,73)$
- $P(Z \geq -0,88)$
- $P(-1,5 \leq Z1,5)$

2) Segundo levantamento feito pela Anac, a população adulta brasileira tem altura média de 173cm com desvio-padrão de 7,3cm. Supondo que as alturas sejam representadas pela variável X e a distribuição normal seja adequada e uma pessoa seja escolhida de forma aleatória dessa população, calcule:

- Qual a probabilidade dessa pessoa medir menos de 163cm? $P(X < 163)$
- Qual a probabilidade dessa pessoa medir menos de 180cm? $P(X < 180)$
- Qual a probabilidade dessa pessoa medir mais de 170cm? $P(X > 170)$
- Qual a probabilidade dessa pessoa medir entre 172cm e 175cm? $P(172 < X < 175)$

Dica para questão 2:

Vimos em sala que a tabela é referente a distribuição normal padrão ($\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$) e para calcular probabilidades referentes a uma distribuição normal com diferentes parâmetros é preciso fazer uma transformação para a variável Z com distribuição normal padrão, de forma que:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Demonstração para aqueles que tem interesse:

Vejamos o sentido e motivo da transformação utilizada por meio de demonstração algébrica semelhante à demonstração de probabilidades que ao subtrair a média dos valores de uma variável o valor da nova média será zero:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

com a subtração $k_i = x_i - \bar{x}$ tem-se:

$$\bar{k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \bar{x}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n}[x_1 - \bar{x} + x_2 - \bar{x} + \ldots + x_n - \bar{x}] = \frac{1}{n}[x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n\bar{x}] = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} - \frac{n\bar{x}}{n} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

Vejamos agora que ao se dividir a variável pelo seu desvio padrão a variável transformada tem variância igual a 1. A variância é dada por:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

com a divisão $w_i = \frac{xi}{\sigma}$ tem-se:

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n\sigma} = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \frac{\bar{x}}{\sigma}$$

e assim a variância de W é dada por:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(w_i-\bar{w})^2}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{x_i}{\sigma}-\frac{\bar{x}}{\sigma})^2}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})^2}{n\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1$$

Dica para a utilização da linguagem R

Para calcular uma probabilidade associada a uma distribuição normal padrão ($\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$) por exemplo $P(Z < -0,75)$

```
pnorm(-0.75,0,1)
```

```
## [1] 0.2266274
```

Para calcular uma probabilidade associada a uma distribuição normal com outros parâmetros diferentes da Normal como na questão dois com média de 173cm e desvio-padrão de 7,3cm no caso $P(X > 180)$ utiliza-se:

```
1 - pnorm(180, 173, 7.3)
```

```
## [1] 0.1688035
```

Note que o valor foi subtraido de um pois a função *pnorm* calcula por padrão, como a tabela vista, as probabilidades à esquerda, ou seja de observar um valor menor ou igual da variável. Como no exemplo o interesse era na probabilidade de uma pessoa maior que 180cm encontra-se a probabilidade e uma pessoa ter menos que 180 e obtem-se o complementar subtraindo esse valor de 1.

Use o software para calcular os valores obtidos nas questões 1 e 2. Para os itens da questão 2 faça tambêm as contas aplicando a transformação para normal padrão.