Testes Qui-Quadrado

Vimos nas aulas de estatística descritiva que podemos utilizar a estatística de Qui-quadrado $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n_{ij}-n_{ij}^{\star})^2}{n_{ij}^{\star}}$ para medir a associação entre variáveis qualitativas. Veremos como utilizar essa estatística para realizar testes de independência, aderências e de variâncias.

1 Teste de independência

A tabela abaixo contêm os resultados obtidos por estudantes em um exame com questões de física e matemática. Deseja-se testar se existe dependência entre as notas nas duas disciplinas.

$Fisica \setminus Matematica$	Alta	Média	Baixa	Total
Alta	56	71	12	139
Média	47	163	38	248
Baixa	14	42	85	141
Total	117	276	135	528

Queremos testar:

- H_0 As notas de física e matemática são independentes
- H_A As notas de físcia e matemática são relacionadas

Considerando a hipótese de independência pode-se construir uma tabela de valores esperados. Lembrando que $n_{ij}^{\star} = \frac{n_{i.}n_{.j}}{n_{..}}$

$Fisica \setminus Matematica$	Alta	Média	Baixa	Total
Alta	30,80	72,66	35,54	139
Média	54,95	129,64	63,41	248
Baixa	31,25	73,7	36,05	141
Total	117	276	135	528

Sob hipótese de independência a estatística $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n_{ij}-n_{ij}^{\star})^2}{n_{ij}^{\star}}$ tem distribuição Qui-quadrado com $(r-1)(s-1)$ graus de liberdade. Essa distribuição, representada por $\chi^2_{(k-1)}$, é para valores contínuos não negativos. Sua função de densidade tem expressão complexa de forma que as probabilidades serão obtidas em tabela. A utilização dessa distribuição é válida para grandes amostras e será melhor se todas as frequencias esperadas forem maiores ou iguais a 5, devendo-se combinar categorias caso necessário.

No exemplo acima vamos considerar $\alpha = 0,01$ e assim $\alpha = P(\chi^2 \geq \chi^2_{crit}|H_0 verdadeiro) = P(\chi^2 \geq 13,28) = 0,01$, definindo-se assim a região crítica ou região de rejeição.

Na amostra observada temos: $\chi^2_{observado} = \frac{(56-30,8)^2}{30,8} + \frac{(71-72,66)^2}{72,66} \dots \frac{(85-36,05)^2}{36,05} = 145,78$, e como o valor observado na amostra está na região crítica, concluimos pela rejeição de H_0, e portanto as notas de física e matemática não são independentes.

2 Teste de Aderência

Além dos testes para médias de V.As podemos não conhecer o comportamento da V.A e testar se um certo modelo proposto é adequado para aquela variável.

Exemplo: Deseja-se estudar a tolerância de um equipamento eletrônico ao número de impactos termo-elétricos. Representando por X o número de impactos anteriores à falha do equipamento, pretende-se verificar se o modelo Geométrico com p=0,4 é adequado para caracterizar essa V.A.

O teste será em relação a:

- $H_0 : X \sim Geom(p = 0,4)$
- H_A : X tem outra distribuição de probabilidades.

A decisão do teste será baseada na estatística de Qui-quadrado calculada com resultados amostrais e as frequencias esperadas sob a hipótese nula. Se uma variável tem distribuição geométrica com $p = 0,4$ temos: $P(X = k) = p(1-p)^k = 0,4(0,6^k)$ e assim as frequencias esperadas $n_k^\star = nP(X = k)$.

Considerando os valores observados em uma amostra com $n = 80$ observações

Impactos	0	1	2	3	4	Mais de 4
Observado	30	26	10	5	5	4
Esperado	32	19,2	11,5	6,9	4,1	6,3

Como a categoria 4 tem frequencia esperada menor do que 5, agregamos as duas últimas categorias obtendo-se:

Impactos	0	1	2	3	Mais de 3
Observado	30	26	10	5	9
Esperado	32	19,2	11,5	6,9	10,4

e calculamos a estatística de teste $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - n_i^\star)^2}{n_i^\star} = \frac{(30-32)^2}{32} + \ldots + \frac{(9-10,4)^2}{10,4} = 3,44$

Fixando $\alpha = 0,05$ e olhando na tabela $\chi^2_{(4)}$ temos: $P(\chi^2 \geq \chi_{crit}|H_0) = P(\chi^2 \geq 9,49) = 0,05$.

Como o valor observado na amostra não está na região crítica, não existem evidências contra o modelo geométrico com $p = 0,4$ para descrever a variável aleatória considerada.

Exemplo com caso contínuo:

Verificar se os dados das distribuição das alturas de 100 estudantes do sexo feminino se aproxima de uma distribuição normal com $\alpha = .05$

Altura	Freq absoluta	Probabilidade	Freq esperada
$150\vert--156$	4	0,026	2,6
$156\vert--162$	12	0,123	12,3
$162\vert--168$	22	0,295	29,5
$168\vert--174$	40	0,332	33,2
$174\vert--180$	20	0,175	17,5
$180\vert--186$	2	0,048	4,8
k=6	100	1	100

O objetivo é testar:

- H_0: A distribuição das alturas é Normal
- H_A: As alturas tem outra distribuição

Como os parâmetros da distribuição normal não são conhecidos, eles precisam ser estimados. Usando os pontos méidos das classes temos:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{xm_i freq_i}{n} = 168,96$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (xm_i - \bar{x})^2 freq_i}{n-1} = 44,48$$

As frequencias esperadas são calculadas na forma: $n_i^\star = P(X \in x_i)100$ e assim é necessário calcular a probabilidade da variável aleatória Y pertencer a cada uma das classes na tabela.

Deve-se agrupar as duas primeiras e as duas últimas classes, e a partir da tabela calcula-se:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - n_i^\star)^2}{n_i^\star} = \frac{(16-14,9)^2}{14,9} + \ldots + \frac{(22-22,3)^2}{22,3} = 3,38$$

Para calcular a região crítica, o número de graus de liberdade da distribuição Qui-quadrado é: $k - 1 - m = 4 - 1 - 2$, onde $k = 4$ é o número de classes, e $m = 2$ é o número de parâmetros (μ, σ^2) que precisaram ser estimados para o cálculo das probabilidades.

Com $\alpha = 0,05$ obtêm-se $\alpha = P(\chi^2 \geq \chi^2_{crit} | H_0 verdadeiro) = P(\chi^2 \geq 3,84) = 0,05$
como $\chi^2_{obs} = 3,38 \leq 3,84 = \chi^2_{crit}$ e a hipótese nula não é rejeitada.