第一章　计 算 问 题

1.1　四则运算

1.1.01 **计算**：$1.8+3\dfrac{7}{15}-1\dfrac{9}{10}=$ ________.　　(MO 1996)

解　**原式** $=3\dfrac{7}{15}-\dfrac{1}{10}=3\dfrac{11}{30}$.

1.1.02 **计算**：$28.9\times 61.3+111\times 6.15=$ ________.　　(W 1997)

解　**原式**$=289\times 6.13+111\times(6.13+0.02)=(289+111)\times 6.13+111\times 0.02$

$=400\times 6.13+2.22$

$=2454.22$.

点评　**本题先用积不变性质，再用乘法的分配律.**

1.1.03 **计算**：$7.03\div 0.37\times 2.4=$ ________.　　(W 1997)

解　$7.03\div 0.37\times 2.4$

$=19\times 2.4$

$=45.6$.

1.1.04 **计算下面的除法，答数保留两位小数（两位以后四舍五入）**：

$1.414\,213\,5\div 3.141\,592\,65=$ ________.　　(P 1987)

解

```
                 0.450
314159265)141421350.0
          125663706 0
           15757644 00
           15707963 25
              49680 750
```

故本题答数是 0.45.

1.1.05 **计算**：$63\div 34\times 51\div 72\times 64\div 36=$ ________.　　(MO 1995)

解　**原式** $=\dfrac{63\times 51\times 64}{34\times 72\times 36}=\dfrac{7}{3}=2\dfrac{1}{3}$.

1.1.06 **计算**：$1\dfrac{20}{387}\div 1\dfrac{10}{693}\times 10\dfrac{47}{77}=$ ________.　　(C 2004)

解　**原式**$=\dfrac{407}{387}\times\dfrac{693}{703}\times\dfrac{817}{77}$

$=\dfrac{11\times 37\times 3^2\times 7\times 11\times 19\times 43}{3^2\times 43\times 19\times 37\times 7\times 11}=11$.

1.1.07 **计算**：$2006+2006\times2006\div2006=$ ________. (HK 2006)

解 **原式** $=2006+2006=4012$.

1.1.08 **计算**：$2000\div2000\dfrac{2000}{2001}=$ ________. (Z 2000)

解法 1 **原式**
$$=2000\div\frac{2000\times2001+2000}{2001}$$
$$=2000\times\frac{2001}{2000\times(2001+1)}=\frac{2001}{2002}.$$

解法 2 **原式**
$$=2000\div\left(2000\times1\frac{1}{2001}\right)$$
$$=1\div1\frac{1}{2001}$$
$$=\frac{2001}{2002}.$$

1.1.09 **计算**：$2002\div2002\dfrac{2002}{2003}+\dfrac{1}{2004}=$ ________. (MO 2004)

解 **原式**
$$=2002\div\frac{2002\times2003+2002}{2003}+\frac{1}{2004}$$
$$=2002\times\frac{2003}{2002\times2004}+\frac{1}{2004}$$
$$=\frac{2003}{2004}+\frac{1}{2004}=1.$$

1.1.10 **计算**：$200\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1-\dfrac{1}{100}\right)=$ ________. (W 1997)

解 **原式**
$$=200\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{99}{100}$$
$$=200\times\frac{1}{100}=2.$$

1.1.11 **计算**：$\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(2-\dfrac{2}{3}\right)\times\left(3-\dfrac{3}{4}\right)\times\left(4-\dfrac{4}{5}\right)\times\left(5-\dfrac{5}{6}\right)\times\left(6-\dfrac{6}{7}\right)\times\left(7-\dfrac{7}{8}\right)\times\left(8-\dfrac{8}{9}\right)\times\left(9-\dfrac{9}{10}\right)=$ ________. (W 2001)

解 **原式**
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2^2}{3}\times\frac{3^2}{4}\times\frac{4^2}{5}\times\frac{5^2}{6}\times\frac{6^2}{7}\times\frac{7^2}{8}\times\frac{8^2}{9}\times\frac{9^2}{10}$$
$$=3\times4\times6\times7\times8\times9=36\,288.$$

1.1.12 **计算**：$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\dfrac{1}{99}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{99}\right)=$ ________. (W 2000)

解 **原式**$=\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{99}\right)\right]\times$

$\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{99}\right)\right]$

$=\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{100}{99}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{98}{99}\right)$

$=\frac{100}{2}\times\frac{1}{99}=\frac{50}{99}.$

1.1.13 **计算**：$(1\times2\times3\times4\times\cdots\times9\times10\times11)\div(27\times25\times24\times22)=$ ________. (MO 2002)

解 **原式**$=\frac{1\times2\times3\times4\times\cdots\times9\times10\times11}{27\times25\times24\times22}$

$=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10\times11}{3\times9\times5\times5\times4\times6\times2\times11}$

$=2\times7\times8=112.$

1.1.14 **计算**：$1\div(2\div3)\div(3\div4)\div(4\div5)\div(5\div6)=$ ________. (H 1988)

解 **原式**$=1\div\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}\div\frac{4}{5}\div\frac{5}{6}$

$=1\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}$

$=3.$

1.1.15 **计算**：$8-1.2\times1.5+742\div(2.544\div2.4)=$ ________. (MO 2005)

解 **原式** $=8-1.8+742\div1.06=6.2+700=706.2.$

1.1.16 **计算**：$85\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+71\frac{1}{6}\times\frac{6}{7}+56\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=$ ________. (C 2004)

解 **原式**$=\frac{256}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{427}{6}\times\frac{6}{7}+\frac{225}{4}\times\frac{4}{5}$

$=32+61+45=138.$

1.1.17 **计算**：$\left(\frac{1}{4}-0.1\div2\right)\times\frac{5}{13}+1\div1\frac{1}{12}=$ ________. (MO 1997)

解 **原式**$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{13}+1\times\frac{12}{13}$

$=\frac{1}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{12}{13}=\frac{1}{13}+\frac{12}{13}=1.$

1.1.18 **计算**：$2.4\div1\frac{24}{31}\times4.125-\left(18\frac{5}{37}-13.42\right)=$ ________. (MO 1997)

解 **原式**$=2.4\times\frac{31}{55}\times\frac{33}{8}-18\frac{5}{37}+13.42$

$=5.58+13.42-18\frac{5}{37}=\frac{32}{37}.$

1.1.19 **计算**：$1001\times5\frac{2}{13}+198\div198\frac{198}{199}+1\frac{1}{200}=$ ________. (C 2004)

解 原式$=1001\times\frac{67}{13}+198\div\frac{198\times199+198}{199}+1\frac{1}{200}$

$$=77\times67+198\times\frac{199}{198\times200}+1\frac{1}{200}$$

$$=5159+2=5161.$$

1.1.20 **计 算**：$\left(2\frac{1}{2003}\times9\frac{5}{8}+7\frac{2002}{2003}\times9.625\right)\div96\frac{1}{4}=$ ________. (MO 2004)

解 原式$=\left(2\frac{1}{2003}+7\frac{2002}{2003}\right)\times9\frac{5}{8}\div96\frac{1}{4}=10\times\frac{77}{8}\times\frac{4}{385}=1.$

1.1.21 **计算**：$(123\,456+234\,561+345\,612+456\,123+561\,234+612\,345)\div6=$ ________. (P 1988)

解 如果列出竖式加法：

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\
 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\
 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\
 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
+ & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
\end{array}$$

就知道每一列相加恰好都是 $1+2+3+4+5+6=21.$

因此，这一加法的答数是

$$21\times(100\,000+10\,000+1000+100+10+1)=21\times111\,111.$$

原式$=21\times111\,111\div6=111\,111\times21\div3\div2=777\,777\div2=388\,888.5.$

1.1.22 **计算**：$(56\,789+67\,895+78\,956+89\,567+95\,678)\div7=$ ________. (C 2004)

解 原式$=(5+6+7+8+9)\times11\,111\div7=5\times11\,111=55\,555.$

1.1.23 **计算**：$(123\,456+234\,561+345\,612+456\,123+561\,234+612\,345)\div111\,111=$ ________. (HK 2006)

解 $(123\,456+234\,561+345\,612+456\,123+561\,234+612\,345)\div111\,111$

$$=(1+2+3+4+5+6)\times111\,111\div111\,111=21.$$

1.1.24 **算式**$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$**的计算结果用循环小数表示是**________. (MO 2005)

解 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=\frac{945+630+378+270+210}{2\times3\times5\times7\times9}$

$$=\frac{2433}{1890}=1.2\dot{8}7\,301\,\dot{5}.$$

1.1.25 **计算**：$0.1\dot{6}+0.\dot{1}+0.125+0.\dot{1}4285\dot{7}=$ ________.（**精确到小数点后第三位**）　(MO 1997)

解　**原式**$=\dfrac{16-1}{90}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{142\,857}{999\,999}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{7}$

$=\dfrac{257}{504}\approx 0.546$（**保留三位小数**）

1.1.26 **计算**：$\left(0.\dot{3}\times 0.1875+\dfrac{1}{400}\right)\times 65=$ ________.　(MO 2004)

解　**原式**$=\left(\dfrac{1}{3}\times 0.1875+\dfrac{1}{400}\right)\times 65=(0.0625+0.0025)\times 65$

$=0.065\times 65=4.225.$

1.1.27 **计算**：$2.00\dot{4}\times 2.\dot{0}0\dot{8}$（**结果用最简分数表示**）.　(H 2004)

解　**原式**$=2\dfrac{4}{900}\times 2\dfrac{8}{999}=\dfrac{451}{225}\times\dfrac{2006}{999}=\dfrac{904\,706}{224\,775}=4\dfrac{5606}{224\,775}.$

1.1.28 **一位同学计算小数乘法时，把一个因数** $1.2\dot{3}$ **错看成了** 1.23，**使计算结果少了** 0.3. **正确的计算结果应是**________.　(Z 2004)

解　$0.3\div(1.2\dot{3}-1.23)=0.3\div 0.00\dot{3}=0.3\div\dfrac{3}{900}=90.$

$1.2\dot{3}\times 90=\left(1.2+\dfrac{3}{90}\right)\times 90=111.$

1.1.29 **计算**：$\dfrac{1}{4-\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}}=$ ________.　(W 1997)

解　**原式**$=\dfrac{1}{4-\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{2-\dfrac{2}{2+1}}}}=\dfrac{1}{4-\dfrac{1}{3+\dfrac{3}{6-2}}}=\dfrac{1}{4-\dfrac{4}{12+3}}=\dfrac{15}{60-4}=\dfrac{15}{56}.$

1.1.30 **计算**：$\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1}}}}}=$ ________.　(C 2004)

解　**原式**$=\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3}}}}=\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{4+\dfrac{3}{10}}}=\dfrac{1}{5+\dfrac{10}{43}}=\dfrac{43}{225}.$

1.1.31 **计算**：$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{84+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2}}}}}}=$ ________.　　(W 2005)

解　原式$=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{84+\cfrac{2}{13}}}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{13}{1094}}}}$

$$=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1094}{1107}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1107}{17\,699}}=3\frac{17\,699}{125\,000}=3.141\,592.$$

1.1.32 **计算**：$\frac{2}{2\times3}+\frac{3}{2\times3\times4}+\frac{4}{2\times3\times4\times5}+\cdots+\frac{9}{2\times3\times4\times\cdots\times10}=$ ________.　　(C 2004)

解　通分后，分母为 $2\times3\times4\times\cdots\times10=3\,628\,800$，**分子为** $(((((((2\times4)+3)\times5+4)\times6+5)\times7+6)\times8+7)\times9+8)\times10+9=1\,814\,399$.

点评　$\frac{2}{2\times3}=\frac{2}{1\times2\times3}=\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}$

$\frac{3}{2\times3\times4}=\frac{3}{1\times2\times3\times4}=\frac{1}{1\times2\times3}-\frac{1}{2\times3\times4}$

…

原式$=\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{1\times2\times3}-\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}-\frac{1}{2\times3\times4\times5}$

$+\cdots+\frac{1}{1\times2\times3\times\cdots\times9}-\frac{1}{2\times3\times4\times\cdots\times10}$

$=\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3\times4\times\cdots\times10}=\frac{1\,814\,399}{3\,628\,800}$

1.1.33 **计算**：$12\times\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)\div\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)=$ ________.　　(HK 2006)

解　原式 $=(9-8)\div\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{6}\right)=1\div\frac{2}{6}=3.$

1.1.34 **计算**：$\dfrac{\frac{2}{3}+\left(1\frac{2}{3}-\frac{7}{12}\right)}{\left(0.25+\frac{2}{7}\right)\times16}=$ ________.　　(C 2004)

解　原式$=\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{13}{12}}{4+\frac{32}{7}}=\frac{21}{12}\times\frac{7}{60}=\frac{49}{240}.$

1.1.35 **计算**：$\dfrac{2\dfrac{2}{3}\times\left(1\dfrac{7}{8}-\dfrac{5}{6}\right)}{3\dfrac{1}{4}\div\left(\dfrac{7}{8}+1\dfrac{5}{6}\right)}=$ ________. (P 1988)

解 **原式**$=\dfrac{\dfrac{8}{3}\times\dfrac{25}{24}}{\dfrac{13}{4}\div\dfrac{65}{24}}=\dfrac{\dfrac{25}{9}}{\dfrac{13}{4}\times\dfrac{24}{65}}=\dfrac{\dfrac{25}{9}}{\dfrac{6}{5}}=2\dfrac{17}{54}$.

1.1.36 **计算**：$\left(\dfrac{1}{4}+0.75\right)\div\left(2\dfrac{1}{2}\times0.4+1\dfrac{4}{5}\div1.8\right)=$ ________.
(MO 2000)

解 **原式**$=(0.25+0.75)\div\left(\dfrac{5}{2}\times\dfrac{2}{5}+1.8\div1.8\right)=1\div(1+1)=0.5$.

1.1.37 **计算**：$\left(0.5+\dfrac{1}{4}+3\dfrac{1}{8}\div1.25\right)\div\left(5\dfrac{1}{4}-1.25\times1\dfrac{3}{5}\right)=$ ________.
(W 1997)

解 **原式**$=\left(0.5+\dfrac{1}{4}+\dfrac{25}{8}\times\dfrac{4}{5}\right)\div\left(5\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{4}\times\dfrac{8}{5}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+2\dfrac{1}{2}\right)\div\left(5\dfrac{1}{4}-2\right)$

$=3\dfrac{1}{4}\div3\dfrac{1}{4}=1$.

1.1.38 **计算**：$\dfrac{3\dfrac{17}{20}\times\left(6-3\dfrac{6}{7}\right)\div1.25}{\left(\dfrac{4}{7}+1\dfrac{1}{3}\div\dfrac{7}{12}\right)\times2.1}=$ ________. (C 2004)

解 **原式**$=\dfrac{\dfrac{77}{20}\times\dfrac{15}{7}\times\dfrac{4}{5}}{\left(\dfrac{4}{7}+\dfrac{16}{7}\right)\times\dfrac{21}{10}}=\dfrac{33}{5}\div6=1.1$.

1.1.39 **计算**：$\dfrac{\left(4\dfrac{2}{3}+0.75\right)\times3\dfrac{9}{13}}{\left(5\dfrac{4}{45}-4\dfrac{1}{6}\right)\div5\dfrac{8}{15}}\div34\dfrac{2}{7}=$ ________. (H 1995)

解 **原式**$=\dfrac{\left(\dfrac{14}{3}+\dfrac{3}{4}\right)\times\dfrac{48}{13}}{\left(4\dfrac{49}{45}-4\dfrac{1}{6}\right)\div\dfrac{83}{15}}\div34\dfrac{2}{7}=\dfrac{\dfrac{65}{12}\times\dfrac{48}{13}}{\dfrac{83}{90}\times\dfrac{15}{83}}\times\dfrac{7}{240}$

$=\dfrac{20}{\dfrac{1}{6}}\times\dfrac{7}{240}$

$=\dfrac{120}{1}\times\dfrac{7}{240}=3\dfrac{1}{2}$.

1.1.40 **计算**：$\left(\dfrac{\dfrac{7}{18}\times 4.5+\dfrac{1}{6}}{13\dfrac{1}{3}-3\dfrac{3}{4}\div\dfrac{5}{16}}\div 2\dfrac{7}{8}\right)\times\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{15}-\dfrac{1}{10}}+\dfrac{1}{2}\right)$ $=$ ________. (W 2000)

解 原式$=\left(\dfrac{\dfrac{7}{18}\times\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{6}}{\dfrac{40}{3}-\dfrac{15}{4}\times\dfrac{16}{5}}\div\dfrac{23}{8}\right)\times\left(\dfrac{1}{\dfrac{5}{6}+\dfrac{2}{15}-\dfrac{1}{10}}+\dfrac{1}{2}\right)$

$$=\left(\frac{\frac{23}{12}}{\frac{4}{3}}\times\frac{8}{23}\right)\times\left(\frac{1}{\frac{13}{15}}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{15}{13}+\frac{1}{2}\right)=\frac{43}{52}.$$

1.1.41 **计算**：$\left[\left(10.75-4\dfrac{11}{12}\right)\times 2\dfrac{7}{11}\right]\div\left[\left(1.125+\dfrac{1}{12}\right)\div\left(2.25\div 10\dfrac{10}{11}\right)\right]=$ ________. (MO 2000)

解 原式$=\left[\left(10\dfrac{3}{4}-4\dfrac{11}{12}\right)\times\dfrac{29}{11}\right]\div\left[\left(1\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{12}\right)\div\left(2\dfrac{1}{4}\div 10\dfrac{10}{11}\right)\right]$

$$=\left(5\frac{5}{6}\times\frac{29}{11}\right)\div\left[1\frac{5}{24}\div\left(\frac{9}{4}\times\frac{11}{120}\right)\right]$$

$$=\frac{35}{6}\times\frac{29}{11}\times\frac{24}{29}\times\frac{9}{4}\times\frac{11}{120}=\frac{21}{8}=2\frac{5}{8}.$$

1.1.42 **计算**：$\dfrac{3\dfrac{1}{3}\times 1.9+19.5\div 4\dfrac{1}{2}}{\dfrac{62}{75}-0.16}\div\dfrac{3.5+4\dfrac{2}{3}+2\dfrac{2}{15}}{0.5\times\left(1\dfrac{1}{20}+4.1\right)}=$ ________. (H 2001)

解 原式$=\dfrac{\dfrac{10}{3}\times\dfrac{19}{10}+\dfrac{195}{10}\times\dfrac{2}{9}}{\dfrac{62}{75}-\dfrac{4}{25}}\div\dfrac{3\dfrac{15}{30}+4\dfrac{20}{30}+2\dfrac{4}{30}}{\dfrac{1}{2}\times\left(1\dfrac{1}{20}+4\dfrac{2}{20}\right)}$

$$=\frac{\frac{19}{3}+\frac{13}{3}}{\frac{50}{75}}\div\frac{9\frac{39}{30}}{\frac{1}{2}\times\frac{103}{20}}=\frac{\frac{32}{3}}{\frac{2}{3}}\div\frac{\frac{103}{10}}{\frac{103}{40}}=16\div 4=4.$$

1.1.43 **计算**：

$$\frac{1\frac{1}{4}\times 5+\left[\frac{1}{24}+\frac{3}{14}\times 2+\left(1\frac{7}{12}-0.625\right)\right]\times 0.7+1.875\div 7\frac{1}{2}}{3\frac{4}{5}\div\left(3-2.4\times\frac{14}{15}\right)\times 2.5}=$$

________. (MO 2004)

解 **分子**$=\frac{25}{4}+\left(\frac{1}{24}+\frac{3}{7}+\frac{23}{24}\right)\times\frac{7}{10}+\frac{15}{8}\div\frac{15}{2}$

$=\frac{25}{4}+1+\frac{1}{4}=\frac{15}{2}$；

分母$=\frac{19}{5}\div\left(3-\frac{12}{5}\times\frac{14}{15}\right)\times\frac{5}{2}=\frac{19}{5}\times\frac{25}{19}\times\frac{5}{2}=\frac{25}{2}$；

原式$=\frac{15}{2}\div\frac{25}{2}=\frac{3}{5}$.

1.1.44 **计算**：$\frac{19\frac{5}{9}+3\frac{9}{10}-5.22}{19\frac{5}{9}-6\frac{27}{50}+5.22}\div\left(\frac{1993\times 0.4}{1995\times 0.5}+\frac{1.6}{1995}\right)=$ ________.

(MO 2005)

解 **原式**$=\frac{19\frac{5}{9}-(5.22-3.9)}{19\frac{5}{9}-(6.54-5.22)}\div\frac{1993\times 4+8}{1995\times 5}$

$=\frac{19\frac{5}{9}-1.32}{19\frac{5}{9}-1.32}\div\frac{(1993+2)\times 4}{1995\times 5}$

$=1\div\frac{4}{5}=1\frac{1}{4}$.

1.1.45 **计算**：$\frac{98\,765-56\,789}{(10\times 7-4)\times(19\times 3-4)\times(4\times 4-4)}=$ ________.

(W 1997)

解 **原式**$=\frac{41\,976}{66\times 53\times 12}=1$.

1.1.46 **计算**：$\frac{(1+7)\times\left(1+\frac{7}{2}\right)\times\left(1+\frac{7}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{7}{9}\right)}{(1+9)\times\left(1+\frac{9}{2}\right)\times\left(1+\frac{9}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{9}{7}\right)}=$ ________.

(HK 2006)

解 **原式**$=\frac{8\times\frac{9}{2}\times\frac{10}{3}\times\frac{11}{4}\times\cdots\times\frac{16}{9}}{10\times\frac{11}{2}\times\frac{12}{3}\times\frac{13}{4}\times\cdots\times\frac{16}{7}}$

$$=\frac{8\times9\times10\times11\times\cdots\times16\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{9}}{10\times11\times12\times13\times\cdots\times16\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{7}}$$

$$=8\times9\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{9}=1.$$

1.1.47 **若** $A=1921$，$B=1949$，$C=1976$，$D=2004$，**求**

$$(A+B+C-D)+(A+B+D-C)+(A+C+D-B)+(B+C+D-A)$$

的值. (HY 2004)

解 原式 $=(A+B+C+D)\times2=(1921+1949+1976+2004)\times2$
$=15\ 700.$

1.2 速算与巧算

1.2.01 **计算**：$123+345+877+655=$ ________. (HK 2006)

解 原式 $=(123+877)+(345+655)$
$=1000+1000$
$=2000.$

1.2.02 **计算**：$6.11+9.22+8.33+7.44+5.55+4.56+3.67+2.78+1.89$ $=$ ________. (W 1997)

解 原式 $=(6.11+1.89)+(9.22+2.78)+(8.33+3.67)+(7.44+4.56)$ $+5.55$
$=8+12+12+12+5.55$
$=49.55.$

1.2.03 **计算**：$3.72-2.73+4.6+5.28-0.27+6.4=$ ________. (HK 2006)

解 原式 $=(3.72+5.28)+(4.6+6.4)-(2.73+0.27)$
$=9+11-3$
$=17.$

1.2.04 **计算**：$89+899+8999+89\ 999+899\ 999=$ ________. (HK 2006)

解 原式 $=(90-1)+(900-1)+(9000-1)+(90\ 000-1)+(900\ 000-1)$
$=90+900+9000+90\ 000+900\ 000-5$
$=999\ 990-5$
$=999\ 985.$

1.2.05 **计算** $11+192+1993+19\ 994+199\ 995$ **所得和数的数字之和是多少？** (H 1995)

解 原式 $=(20-9)+(200-8)+(2000-7)+(20\ 000-6)+(200\ 000-5)$

$=(20+200+2000+20\,000+200\,000)-(9+8+7+6+5)$
$=222\,220-35$
$=222\,185.$

故所得数字之和等于 $2+2+2+1+8+5=20.$

1.2.06 计算：$19\,971\,997+9\,971\,997+971\,997+71\,997+1997+997+97+7=$ ________. (MO 1997)

解　原式$=10\,000\,000+9\,000\,000\times 2+900\,000\times 3+70\,000\times 4+1000\times 5+900\times 6+90\times 7+7\times 8$
$=10\,000\,000+18\,000\,000+2\,700\,000+280\,000+5000+5400+630+56$
$=30\,991\,086.$

1.2.07 计算：$5\times 64\times 25\times 125\times 2006=$ ________. (HK 2006)

解　原式$=5\times(2\times 4\times 8)\times 25\times 125\times 2006$
$=(5\times 2)\times(25\times 4)\times(125\times 8)\times 2006$
$=10\times 100\times 1000\times 2006$
$=1\,000\,000\times 2006$
$=2\,006\,000\,000.$

1.2.08 计算：$(2\times 4\times 8\times 16\times 32)\times(25\times 6.25\times 1.25\times 0.25)=$ ________. (C 2004)

解　原式$=2\times(4\times 25)\times(16\times 6.25)\times(8\times 1.25)\times(32\times 0.25)$
$=2\times 100\times 100\times 10\times 8=1\,600\,000.$

1.2.09 计算：$999\frac{997}{998}\div\frac{1}{499}=$ ________. (W 1997)

解　原式$=\left(1000-\frac{1}{998}\right)\times 499$

$=499\,000-\frac{1}{2}$

$=498\,999\frac{1}{2}.$

1.2.10 计算：$4\times 5\frac{3}{4}+5\times 6\frac{4}{5}+6\times 7\frac{5}{6}+7\times 8\frac{6}{7}+8\times 9\frac{7}{8}=$ ________. (N 2005)

解　原式$=\left(4\times 5+4\times\frac{3}{4}\right)+\left(5\times 6+5\times\frac{4}{5}\right)+\cdots+\left(8\times 9+8\times\frac{7}{8}\right)$

$=23+34+47+62+79=245.$

1.2.11 计算：$9\frac{7}{8}\times 8+8\frac{6}{7}\times 7+7\frac{5}{6}\times 6+6\frac{4}{5}\times 5=$ ________. (W 1997)

解　原式$=\left(9+\frac{7}{8}\right)\times 8+\left(8+\frac{6}{7}\right)\times 7+\left(7+\frac{5}{6}\right)\times 6+\left(6+\frac{4}{5}\right)\times 5$

$=72+7+56+6+42+5+30+4=222.$

1.2.12 计算：$41\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+51\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}+61\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}+71\frac{1}{6}\times\frac{6}{7}+81\frac{1}{7}\times\frac{7}{8}+91\frac{1}{8}\times\frac{8}{9}=$ ________. (W 1997)

解 观察 $41\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}$，我们可以这样计算：

$$41\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=40\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}=\left(40+\frac{4}{3}\right)\times\frac{3}{4}$$

$$=40\times\frac{3}{4}+\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}=30+1=31,$$ 其他类似.

原式 $=40\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}+50\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}+60\frac{6}{5}\times\frac{5}{6}+70\frac{7}{6}\times\frac{6}{7}+80\frac{8}{7}\times\frac{7}{8}+90\frac{9}{8}\times\frac{8}{9}$

$=30+1+40+1+50+1+60+1+70+1+80+1=336.$

1.2.13 计算：$51.25\times\frac{4}{5}+\frac{5}{6}\times61.2+71\frac{1}{6}\div\frac{7}{6}=$ ________. (Z 2005)

解 原式 $=51\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}+61\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}+71\frac{1}{6}\times\frac{6}{7}$

$=\left(50+\frac{5}{4}\right)\times\frac{4}{5}+\left(60+\frac{6}{5}\right)\times\frac{5}{6}+\left(70+\frac{7}{6}\right)\times\frac{6}{7}$

$=41+51+61=153.$

1.2.14 计算：$2001\times\frac{2003}{2002}+2002\times\frac{2004}{2003}+\frac{4005}{2002\times2003}=$ ________. (C 2004)

解 原式 $=2001\times\left(1+\frac{1}{2002}\right)+2002\times\left(1+\frac{1}{2003}\right)+\frac{2002+2003}{2002\times2003}$

$=2001+\frac{2001}{2002}+2002+\frac{2002}{2003}+\frac{1}{2003}+\frac{1}{2002}$

$=2001+2002+2=4005.$

1.2.15 计算：$0.7\times1\frac{4}{9}+2\frac{3}{4}\times15+0.7\times\frac{5}{9}+\frac{1}{4}\times15=$ ________. (N 2003)

解 原式 $=0.7\times\left(1\frac{4}{9}+\frac{5}{9}\right)+\left(2\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)\times15$

$=0.7\times2+3\times15=46.4.$

1.2.16 计算：$3.1415\times25^2-3.1415\times15^2=$ ________. (C 2004)

解 原式 $=3.1415\times(25^2-15^2)=3.1415\times(625-225)$

$=3.1415\times400=1256.6.$

1.2.17 **计算**：$8.88\times0.15+265\times0.0888+5.2\times8.88+0.888\times20=$ ________. (HK 2006)

解 **原式**$=8.88\times0.15+2.65\times8.88+5.2\times8.88+8.88\times2$

$=8.88\times(0.15+2.65+5.2+2)$

$=8.88\times10=88.8.$

1.2.18 **计算**：$85.42\times7903.29-286.5\times790.329+79\,032.9\times4.323=$ ________. (C 2004)

解 **原式**$=790\,329\times(0.8542-0.2865+0.4323)$

$=790\,329\times1=790\,329.$

1.2.19 **计算**：$752\times1.25+4.45\times12.5+0.035\times125=$ ________. (W 1997)

解 **原式**$=7.52\times125+0.445\times125+0.035\times125$

$=125\times(7.52+0.445+0.035)$

$=125\times8=1000.$

1.2.20 **计算**：$2005\times\frac{3}{8}-0.375\times1949+3.75\times2.4=$ ________. (Y 2005)

解 **原式**$=2005\times\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\times1949+\frac{3}{8}\times24$

$=(2005-1949+24)\times\frac{3}{8}$

$=80\times\frac{3}{8}=30.$

1.2.21 **计算**：$6.25\times8.27\times16+3.75\times0.827\times8=$ ________. (W 1997)

解 **原式**$=6.25\times16\times8.27+3.75\times0.8\times8.27$

$=8.27\times(6.25\times16+3.75\times0.8)$

$=8.27\times(100+3)$

$=8.27\times100+8.27\times3$

$=827+24.81$

$=851.81.$

1.2.22 **计算**：$147.75\times8.4+4.79^2+409\times2.1+0.9521\times479=$ ________. (W 2005)

解 **原式**$=(147.75\times4+409)\times2.1+(0.0479+0.9521)\times479$

$=1000\times2.1+479=2579.$

1.2.23 **计算**：$36\frac{19}{23}+63\frac{4}{23}\times0.125+\frac{1}{2}\times63\frac{4}{23}+63\frac{4}{23}\times\frac{3}{8}=$ ________. (MO 2000)

解 **原式**$=36\frac{19}{23}+63\frac{4}{23}\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\right)$

$$=36\frac{19}{23}+63\frac{4}{23}$$

$$=100.$$

1.2.24 计算：$0.1\div0.001-\left(39\frac{7}{12}\times3\frac{3}{5}\div39\frac{7}{12}+3.6\times5\frac{5}{8}+0.36\times33.75\right)=$ ________. (Y 2000)

解 原式$=100-\left(3\frac{3}{5}+3\frac{3}{5}\times5\frac{5}{8}+3\frac{3}{5}\times3.375\right)$

$$=100-3\frac{3}{5}\times\left(1+5\frac{5}{8}+3\frac{3}{8}\right)$$

$$=100-3\frac{3}{5}\times10$$

$$=100-36$$

$$=64.$$

1.2.25 计算：$3.6\times42.3\times3.75-12.5\times0.423\times28=$ ________. (MO 2002)

解 原式$=125\times3\times0.423\times3.6-125\times0.423\times2.8$

$$=125\times0.423\times(10.8-2.8)$$

$$=125\times8\times0.423=423.$$

1.2.26 计算：$\frac{10}{13}\div2\frac{19}{22}-1\frac{2}{5}\times\frac{11}{13}+7+\frac{1}{5}\times\frac{22}{63}=$ ________. (C 2004)

解 原式$=\frac{10}{13}\times\frac{22}{63}-\frac{7}{5}\times\frac{11}{13}+7+\frac{1}{5}\times\frac{22}{63}$

$$=7+\frac{22}{63}\times\left(\frac{10}{13}+\frac{1}{5}\right)-\frac{7}{5}\times\frac{11}{13}$$

$$=7+\frac{22}{13\times5}-\frac{77}{5\times13}$$

$$=7-\frac{55}{5\times13}$$

$$=7-\frac{11}{13}$$

$$=6\frac{2}{13}.$$

1.2.27 计算：$84\frac{4}{19}\times1.375+105\frac{5}{19}\times0.9=$ ________. (MO 1994)

解 原式$=\left(84+\frac{4}{19}\right)\times\frac{11}{8}+\left(105+\frac{5}{19}\right)\times\frac{9}{10}$

$$=\left(21+\frac{1}{19}\right)\times4\times\frac{11}{8}+\left(21+\frac{1}{19}\right)\times5\times\frac{9}{10}$$

$$= \left(21+\frac{1}{19}\right)\times\frac{11}{2}+\left(21+\frac{1}{19}\right)\times\frac{9}{2}$$
$$= 21\frac{1}{19}\times\left(\frac{11}{2}+\frac{9}{2}\right)=210\frac{10}{19}.$$

1.2.28 计算：$1.4477 \div 0.0031 - 19.816 \times 10.25 + 36.114 =$ ________. (MO 1995)

解 原式$= 467-(20-0.184)(10+0.25)+36.114$
$= 467-200-5+1.84+0.046+36.114$
$= 300.$

1.2.29 计算：$3.14^2+68.6\times 1.314=$ ________. (N 2005)

解 原式$= 3.14^2+68.6\times(1+0.314)$
$= 3.14\times 3.14+68.6+6.86\times 3.14$
$= 68.6+3.14\times(3.14+6.86)$
$= 68.6+3.14\times 10=100.$

1.2.30 计算：$1.2345^2+0.7655^2+2.469\times 0.7655=$ ________. (MO 2004)

解 原式$= 1.2345^2+0.7655\times(0.7655+2.469)$
$= 1.2345^2+0.7655\times(1.2345+2)$
$= 1.2345\times(1.2345+0.7655)+0.7655\times 2$
$= 1.2345\times 2+0.7655\times 2$
$= (1.2345+0.7655)\times 2$
$= 2\times 2=4.$

1.2.31 计算：$2004.05\times 1997.05-2001.05\times 1999.05=$ ________. (H 2004)

解 原式$= (3+2001.05)\times(1999.05-2)-2001.05\times 1999.05$
$= 3\times 1999.05-2\times 2001.05-6$
$= (1+2)\times(2001.05-2)-2\times 2001.05-6=1989.05.$

1.2.32 计算：$\left(19\frac{4}{9}+9\frac{4}{19}\right)\div\left(2\frac{7}{9}+1\frac{6}{19}\right)=$ ________. (HK 2006)

解 原式$= \left(\frac{19\times 9+4}{9}+\frac{9\times 19+4}{19}\right)\div\left(\frac{25}{9}+\frac{25}{19}\right)$

$$= 175\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{19}\right)\div\left[25\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{19}\right)\right]$$
$= 175\div 25=7.$

1.2.33 计算：$\left(1\frac{5}{66}+2\frac{5}{33}+6\frac{5}{11}\right)\div\left(1\frac{1}{66}+2\frac{1}{33}+6\frac{1}{11}\right)=$ ________. (HK 2006)

解 原式$= (66+5)\left(\frac{1}{66}+\frac{1}{33}+\frac{1}{11}\right)\div\left[(66+1)\times\left(\frac{1}{66}+\frac{1}{33}+\frac{1}{11}\right)\right]=\frac{71}{67}.$

1.2.34 **计算**：$\left(\frac{2002}{2003}+\frac{20\,022\,002}{20\,032\,003}+\frac{200\,220\,022\,002}{200\,320\,032\,003}\right)\div\frac{2\,002\,200\,220\,022\,002}{2\,003\,200\,320\,032\,003}$ $=$ ________. (C 2004)

解 **原式**$=\left[\frac{2002}{2003}\times\left(\frac{1}{1}+\frac{10\,001}{10\,001}+\frac{100\,010\,001}{100\,010\,001}\right)\right]\div$

$\left(\frac{2002}{2003}\times\frac{10\,001\,000\,100\,010\,001}{10\,001\,000\,100\,010\,001}\right)$

$=\frac{2002}{2003}\times 3\div\frac{2002}{2003}=3.$

1.2.35 **计算**：$9999\times 7777+3333\times 6666=$ ________. (C 2005)

解 **原式**$=9999\times 7777+9999\times 2222$

$=9999\times(7777+2222)$

$=9999\times(10\,000-1)$

$=99\,980\,001.$

1.2.36 **计算**：$111\,111\times 999\,999+999\,999\times 777\,777=$ ________. (MO 1997)

解 **原式**$=999\,999\times(111\,111+777\,777)$

$=(1\,000\,000-1)\times 888\,888$

$=888\,888\,000\,000-888\,888$

$=888\,887\,111\,112.$

1.2.37 **计算**：$2004\times 20\,032\,002-2002\times 20\,032\,004=$ ________. (C 2005)

解 **原式**$=(2002+2)\times 20\,032\,002-2002\times(20\,032\,002+2)$

$=2\times(20\,032\,002-2002)=40\,060\,000.$

1.2.38 **计算**：$333\times 332\,332\,333-332\times 333\,333\,332=$ ________. (W 2002)

解 **原式**$=333\times(332\,332\,332+1)-332\times(333\,333\,333-1)$

$=333\times(1\,001\,001\times 332+1)-332\times(333\times 1\,001\,001-1)$

$=333+332=665.$

1.2.39 **计算**：$55\,555\times 666\,667+44\,445\times 666\,666-155\,555=$ ________. (MO 2004)

解 **原式**$=55\,555\times 666\,666+55\,555+44\,445\times 666\,666-155\,555$

$=(55\,555+44\,445)\times 666\,666-(155\,555-55\,555)$

$=66\,666\,600\,000-100\,000=66\,666\,500\,000.$

1.2.40 **计算**：$20\,022\,003\times 20\,032\,002-20\,022\,002\times 20\,032\,003=$ ________. (MO 2003)

解 **原式**$=(20\,022\,002+1)\times 20\,032\,002-20\,022\,002\times(20\,032\,002+1)$

$=20\,032\,002-20\,022\,002=10\,000.$

1.2.41 **计算**：$1997\times 20\,002\,000-2000\times 19\,971\,997=$ ________. (W 1997)

解 **原式**$=1997\times 2000\times 10\,001-2000\times 1997\times 10\,001=0.$

1.2.42 计算：$2006\times 20\,002\,000-2\,000\times 20\,062\,006=$ ________. (HK 2006)

解　原式$=2006\times 2000\times 10\,001-2000\times 2006\times 10\,001=0.$

1.2.43 计算：$22\,222\times 22\,222=$ ________. (W 1997)

解　原式$=2\times 11\,111\times 11\,111\times 2$

$=(2\times 2)\times(11\,111\times 11\,111)$

$=4\times 123\,454\,321$

$=493\,817\,284.$

1.2.44 计算：$11.1\times 4\div 9\times 3\div 7.4\times 2=$ ________. (MO 1994)

解　原式$=3\times 3.7\times 4\times \dfrac{1}{9}\times 3\times \dfrac{1}{3.7\times 2}\times 2=4.$

点评　计算时一定要把整个算式看一遍，看看是否有化简运算的机会. 计算熟练的人就会发现 $11.1=3.7\times 3$，$7.4=3.7\times 2$，**这两数有公因数** 3.7. **只有乘法和除法的算式，用"颠倒相乘"把除法变成乘法，便于约分.**

1.2.45 下面有三组数：

(1) $2\dfrac{1}{3}$，1.5，$12\dfrac{1}{6}$；(2) 0.7，1.55；(3) $\dfrac{3}{4}$，$9\dfrac{1}{2}$，1.6，$8\dfrac{3}{20}$.

从每组数中取出一个数，把取出的三个数相乘，那么所有不同取法的三个数乘积的和是 ________. (MO 1994)

解　所有不同取法的三个乘积的和，也就是每组数之和的乘积，即

$$2\frac{1}{3}+1.5+12\frac{1}{6}=16,$$

$$0.7+1.55=2.25,$$

$$\frac{3}{4}+9\frac{1}{2}+1.6+8\frac{3}{20}=20,$$

$$16\times 2.25\times 20=16\times 45=720.$$

点评　0.7 **与第一组的** $2\dfrac{1}{3}$，1.5，$12\dfrac{1}{6}$ **每一个数相乘后相加，根据分配律，有**

$$0.7\times 2\frac{1}{3}+0.7\times 1.5+0.7\times 12\frac{1}{6}$$

$$=0.7\times\left(2\frac{1}{3}+1.5+12\frac{1}{6}\right).$$

类似地，

$$1.55\times 2\frac{1}{3}+1.55\times 1.5+1.55\times 12\frac{1}{6}$$

$$=1.55\times\left(2\frac{1}{3}+1.5+12\frac{1}{6}\right).$$

把这六个乘积相加，由分配律，得到

$$0.7\times\left(2\frac{1}{3}+1.5+12\frac{1}{6}\right)+1.55\times\left(2\frac{1}{3}+1.5+12\frac{1}{6}\right)$$
$$=(0.7+1.55)\times\left(2\frac{1}{3}+1.5+12\frac{1}{6}\right).$$

两组数是如此，三组数也可以进行完全类似的推演，请同学们不妨试试.

1.2.46 计算：$2\ 004\ 200\ 420\ 042\ 004\div 4\ 002\ 400\ 240\ 024\ 002=$ ________. (W 2004)

解 原式$=2004\times 1\ 000\ 100\ 010\ 001\div 4002\times 1\ 000\ 100\ 010\ 001$

$=2004\div 4002=\dfrac{334}{667}.$

1.2.47 计算：$1998\div 28+802\div 28=$ ________. (HK 2006)

解 原式$=(1998+802)\div 28$

$=2800\div 28$

$=100.$

1.2.48 计算：$2003\times 2001\div 111+2003\times 73\div 37=$ ________. (W 2004)

解 原式$=2003\times 2001\div 111+2003\times 73\times 3\div 111$

$=2003\times(2001+73\times 3)\div 111$

$=2003\times 2220\div 111$

$=2003\times 20=40\ 060.$

1.2.49 计算：$\dfrac{0.0057\times 0.14}{0.02\times 0.04\times 0.05}=$ ________. (MO 1995)

解 原式 $=\dfrac{57\times 14}{2\times 4\times 5}=19.95.$

1.2.50 计算：$\dfrac{0.1+\dfrac{2}{5}+7\dfrac{1}{8}\div 1.25}{18.25-5\dfrac{1}{2}\times 3\dfrac{1}{5}}=$ ________. (MO 1995)

解 原式$=\dfrac{0.5+5.7}{18.25-17.6}=\dfrac{6.2}{0.65}=9\dfrac{7}{13}.$

1.2.51 计算：$\dfrac{60\div\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\right)}{\left(5\dfrac{13}{20}+3\dfrac{2}{11}+11.35-2\dfrac{5}{33}\right)\div 5\dfrac{2}{3}}=$ ________. (MO 1995)

解 原式$=\dfrac{60\times\dfrac{60}{77}}{\left[\left(5\dfrac{13}{20}+11\dfrac{7}{20}\right)+\left(3\dfrac{6}{33}-2\dfrac{5}{33}\right)\right]\div\dfrac{17}{3}}=\dfrac{\dfrac{60\times 60}{77}}{\left(17+\dfrac{34}{33}\right)\times\dfrac{3}{17}}$

$=\dfrac{12\times 60}{49}=14\dfrac{34}{49}.$

1.2.52 **计算**：$\frac{205+794\times2003}{2004\times794-589}-\frac{5}{17}=$ ________.　　(W 2004)

解　原式$=\frac{2003\times794+205}{2003\times794+794-589}-\frac{5}{17}$

$=1-\frac{5}{17}=\frac{12}{17}.$

1.2.53 **计算**：$\frac{1234+4567\times7890}{4568\times7890-6656}=$ ________.　　(W 2000)

解　原式$=\frac{(1234+6656)+4567\times7890-6656}{4568\times7890-6656}$

$=\frac{7890+4567\times7890-6656}{4568\times7890-6656}=\frac{4568\times7890-6656}{4568\times7890-6656}=1.$

1.2.54 **计算**：$\left[\frac{33.761}{3.71}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{13}{8}-\frac{19}{56}\right)\right]\times18.2\div\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=$ ________.　　(W 2004)

解　原式$=(9.1+0.9)\times18.2\div\frac{13}{12}=182\times\frac{12}{13}=168.$

1.2.55 **计算**：$\left[32+4\div\left(0.875-\frac{3}{4}\right)\right]\times0.0625+\left(\frac{1}{371}+\frac{15}{53}\right)\div\frac{2}{21}=$ ________.　　(W 2005)

解　原式$=\left[32+4\div\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{4}\right)\right]\times\frac{5}{80}+\frac{2}{7}\div\frac{2}{21}=64\times\frac{5}{80}+\frac{2}{7}\times\frac{21}{2}$

$=4+3=7.$

1.2.56 **计算**：$2\frac{2}{3}\times\left(1\frac{7}{8}-\frac{5}{6}\right)\div\left[3\frac{1}{4}\div\left(\frac{1}{8}+1\frac{5}{6}\right)\right]=$ ________.
(MO 1997)

解　原式$=2\frac{2}{3}\times\left(1\frac{21}{24}-\frac{20}{24}\right)\div\left[3\frac{1}{4}\div\left(\frac{3}{24}+1\frac{20}{24}\right)\right]$

$=\frac{8}{3}\times\frac{25}{24}\div\left(\frac{13}{4}\times\frac{24}{47}\right)$

$=\frac{25}{9}\times\frac{47}{78}=1\frac{473}{702}.$

1.2.57 **计算**：$(0.5+0.25+0.125)\div(0.5\times0.25\times0.125)\times\frac{\frac{7}{18}\times\frac{9}{2}+\frac{1}{6}}{13\frac{1}{3}-\frac{15}{4}\times\frac{16}{5}}=$ ________.　　(H 1988)

解　原式$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\div\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}\right)\times\frac{\frac{7}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}{13\frac{1}{3}-3\times4}$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\times 2\times 4\times 8\times\frac{\frac{7}{4}+\frac{1}{6}}{13\frac{1}{3}-12}$$

$$=(4+2+1)\times 2\times 4\times\frac{\frac{21}{12}+\frac{2}{12}}{1\frac{1}{3}}=7\times 2\times 4\times\frac{\frac{23}{12}}{\frac{4}{3}}$$

$$=7\times 2\times 4\times\frac{23}{4\times 4}=7\times\frac{23}{2}=80\frac{1}{2}.$$

1.2.58 计算： $\dfrac{19\frac{5}{9}+3\frac{9}{10}-5.22}{19\frac{5}{9}-6\frac{27}{50}+5.22}\div\left(\dfrac{1993\times 0.4}{1995\times 0.5}+\dfrac{1.6}{1995}\right)=$ ________.

(H 1995)

解　原式 $=\dfrac{19\frac{5}{9}+\frac{45}{50}-2-\frac{11}{50}}{19\frac{5}{9}-1-\frac{27}{50}+\frac{11}{50}}\div\left(\dfrac{1993\times 0.4}{1995\times 0.5}+\dfrac{4\times 0.4\times 0.5}{1995\times 0.5}\right)$

$$=\frac{19\frac{5}{9}-1\frac{8}{25}}{19\frac{5}{9}-1\frac{8}{25}}\div\left(\frac{1993+2}{1995}\times\frac{0.4}{0.5}\right)=1\div\frac{0.4}{0.5}=1\frac{1}{4}.$$

1.2.59 计算： $\dfrac{1\times 2\times 3+2\times 4\times 6+4\times 8\times 12+7\times 14\times 21}{1\times 3\times 5+2\times 6\times 10+4\times 12\times 20+7\times 21\times 35}=$ ________.

(MO 1995)

解　原式 $=\dfrac{1\times 2\times 3\times(1+2+4+7)}{1\times 3\times 5\times(1+2+4+7)}=\dfrac{2}{5}.$

1.2.60 计算：

$\dfrac{1\times 2\times 3+2\times 4\times 6+3\times 6\times 9+4\times 8\times 12+5\times 10\times 15}{1\times 3\times 5+2\times 6\times 10+3\times 9\times 15+4\times 12\times 20+5\times 15\times 25}=$ ________.

(B 1998)

解　原式 $=\dfrac{1\times 2\times 3(1+8+27+64+125)}{1\times 3\times 5(1+8+27+64+125)}=\dfrac{2}{5}.$

1.2.61 计算：

$\dfrac{1\times 3\times 5+2\times 6\times 10+3\times 9\times 15+4\times 12\times 20+5\times 15\times 25}{1\times 2\times 3+2\times 4\times 6+3\times 6\times 9+4\times 8\times 12+5\times 10\times 15}=$ ________.

(MO 2001)

解　原式 $=\dfrac{1\times 3\times 5}{1\times 2\times 3}\times\dfrac{1+2^3+3^3+4^3+5^3}{1+2^3+3^3+4^3+5^3}$

$$=\frac{1\times 3\times 5}{1\times 2\times 3}=\frac{5}{2}.$$

1.2.62 **计算**：$\dfrac{1\times2\times3+2\times4\times6+3\times6\times9+\cdots+200\times400\times600}{1\times3\times5+2\times6\times10+3\times9\times15+\cdots+200\times600\times1000}$ $=$ ________. (N 2002)

解 **原式**$=\dfrac{(1\times2\times3)(1+2+3+\cdots+200)}{(1\times3\times5)(1+2+3+\cdots+200)}$

$=\dfrac{1\times2\times3}{1\times3\times5}=\dfrac{2}{5}$.

1.2.63 **计算**：$\dfrac{1\times2\times4+2\times4\times8+3\times6\times12+\cdots+100\times200\times400}{1\times3\times9+2\times6\times18+3\times9\times27+\cdots+100\times300\times900}=$ ________. (H 2001)

解 **原式** $=\dfrac{1\times2\times4\times(1^3+2^3+\cdots+100^3)}{1\times3\times9\times(1^3+2^3+\cdots+100^3)}=\dfrac{8}{27}$.

1.2.64 **计算**：$\dfrac{2000+20\,002\,000+\cdots+\overbrace{20\,002\,000\cdots2000}^{2000\text{个}2000}}{2001+20\,012\,001+\cdots+\underbrace{20\,012\,001\cdots2001}_{2000\text{个}2001}}=$ ________.

(W 2000)

解 **原式**$=\dfrac{2000\times(1+10\,001+\cdots+\overbrace{10\,001\,000\cdots10\,001}^{1999\text{个}1000})}{2001\times(1+10\,001+\cdots+\underbrace{10\,001\,000\cdots10\,001}_{1999\text{个}1000})}=\dfrac{2000}{2001}$.

1.2.65 **计算**：$1+10+4\dfrac{10}{35}+2\dfrac{24}{63}+1\dfrac{51}{99}+1\dfrac{7}{143}=$ ________. (MO 2005)

解 **原式**$=19+\left(\dfrac{2}{7}+\dfrac{8}{21}\right)+\dfrac{17}{33}+\dfrac{7}{143}$

$=19+\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{17}{33}\right)+\dfrac{7}{143}$

$=20+\left(\dfrac{2}{11}+\dfrac{7}{143}\right)$

$=20\dfrac{3}{13}$.

1.2.66 **计算**：$\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{40}+\dfrac{1}{60}+\dfrac{1}{84}+\dfrac{1}{112}+\dfrac{1}{144}+\dfrac{1}{180}=$ ________.

(C 2004)

解 **原式**$=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{40}+\dfrac{1}{60}+\dfrac{1}{84}+\dfrac{1}{112}+\dfrac{1}{144}+\dfrac{1}{180}$

$=\dfrac{3}{20}+\dfrac{1}{60}+\dfrac{1}{84}+\dfrac{1}{112}+\dfrac{1}{144}+\dfrac{1}{180}$

$=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{84}+\dfrac{1}{112}+\dfrac{1}{144}+\dfrac{1}{180}$

$=\dfrac{5}{28}+\dfrac{1}{112}+\dfrac{1}{144}+\dfrac{1}{180}$

$$=\frac{3}{16}+\frac{1}{144}+\frac{1}{180}$$

$$=\frac{7}{36}+\frac{1}{180}=\frac{36}{180}=\frac{1}{5}.$$

1.2.67 **计算**：$\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+\frac{1}{165}-\frac{1}{726}=$ ________. (W 1997)

解 **原式**$=\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+\frac{1}{11\times15}-\frac{1}{11\times66}$

$$=\frac{15}{11\times15}-\frac{11}{11\times15}+\frac{1}{11\times15}-\frac{1}{11\times66}$$

$$=\frac{5}{11\times15}-\frac{1}{11\times66}=\frac{1}{11\times3}-\frac{1}{11\times66}$$

$$=\frac{22}{11\times66}-\frac{1}{11\times66}=\frac{21}{11\times66}=\frac{7}{242}.$$

1.2.68 **计算**：$\left[\left(\frac{35}{6}-\frac{49}{12}+\frac{63}{20}-\frac{77}{30}+\frac{91}{42}-\frac{105}{56}\right)-1\frac{3}{8}\right]\div\frac{1}{8}=$ ________.

(Z 2004)

解 **原式**$=\left[\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}\right)\times7-1\frac{3}{8}\right]\times8$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)\times7-\frac{11}{8}\right]\times8$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)\times7\times8-\frac{11}{8}\times8=21-11=10.$$

1.2.69 **计算**：$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{5}{7}+\frac{7}{8}+\frac{9}{20}+\frac{10}{21}+\frac{11}{24}+\frac{19}{35}=$ ________.

(MO 2004)

解 **原式**$=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{5}{7}+\frac{7}{8}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right)$

$$=5.$$

1.2.70 **计算**：$1-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}-\frac{9}{20}+\frac{11}{30}-\frac{13}{42}+\frac{15}{56}-\frac{17}{72}+\frac{19}{90}=$ ________.

(Z 2002)

解 **原式**$=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}.$$

1.2.71 **计算**：$\frac{1^2+2^2}{1\times2}+\frac{2^2+3^2}{2\times3}+\frac{3^2+4^2}{3\times4}+\cdots+\frac{2002^2+2003^2}{2002\times2003}=$ ________.
(N 2003)

解 **原式**$=\left(\frac{2}{1}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{2003}{2002}+\frac{2002}{2003}\right)$

$$=\frac{2}{1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{2001}{2002}+\frac{2003}{2002}\right)+\frac{2002}{2003}$$

$$=\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{2002\text{个}2}+\frac{2002}{2003}$$

$$=4004\frac{2002}{2003}.$$

1.2.72 **计算**：$8\frac{1}{2}+7\frac{1}{4}+6\frac{1}{8}+5\frac{1}{16}+4\frac{1}{32}=$ ________. (HK 2006)

解 **原式**$=(8+7+6+5+4)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)$

$$=30+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}\right)-\frac{1}{32}$$

$$=30+1-\frac{1}{32}$$

$$=30\frac{31}{32}.$$

1.2.73 **计算**：$2^{2003}-2^{2002}-2^{2001}-\cdots-2^2-2=$ ________. (FY 2003)

解 **原式**$=2\times2^{2002}-2^{2002}-2^{2001}-\cdots-2^2-2$

$$=2\times2^{2001}-2^{2001}-\cdots-2^2-2$$

$$=\cdots=2^2-2=2.$$

1.2.74 **计算**：$19\,961\,997\times19\,971\,996-19\,961\,996\times19\,971\,997=$ ________.
(MO 1997)

解 **设** $A=19\,961\,996$，$B=19\,971\,997$，**则**

原式$=(A+1)\times(B-1)-A\times B$

$$=AB-A+B-1-AB$$

$$=B-A-1$$

$$=19\,971\,997-19\,961\,996-1$$

$$=10\,000.$$

1.2.75 **计算**：$\left(\frac{321}{123}+\frac{345}{234}+\frac{432}{543}\right)\times\left(\frac{345}{234}+\frac{432}{543}+\frac{123}{321}\right)-\left(\frac{321}{123}+\frac{345}{234}+\frac{432}{543}+\frac{123}{321}\right)\times\left(\frac{345}{234}+\frac{432}{543}\right)=$ ________. (W 1997)

解 **设** $\frac{345}{234}+\frac{432}{543}=a$，**则**

原式$=\left(\frac{321}{123}+a\right)\times\left(a+\frac{123}{321}\right)-\left(\frac{321}{123}+a+\frac{123}{321}\right)\times a$

$=\frac{321}{123}a+\frac{321}{123}\times\frac{123}{321}+a^2+\frac{123}{321}a-\frac{321}{123}a-a^2-\frac{123}{321}a=1.$

1.2.76 **计算**：$\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}\right)\times\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{51}\right)-\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{51}\right)\times\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}\right)=$ ________. (W 2002)

解 设 $a=\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}$,则

原式$=\left(\frac{1}{11}+a\right)\left(a+\frac{1}{51}\right)-\left(\frac{1}{11}+a+\frac{1}{51}\right)a$

$=\frac{1}{11}a+\frac{1}{11}\times\frac{1}{51}+a^2+\frac{1}{51}a-\frac{1}{11}a-a^2-\frac{1}{51}a$

$=\frac{1}{11}\times\frac{1}{51}=\frac{1}{561}.$

1.2.77 **计算**：$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2006}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2005}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2006}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2005}\right)=$ ________. (HK 2006)

解 设 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2005}=a$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2005}=b$,则

原式$=\left(b+\frac{1}{2006}\right)a-\left(a+\frac{1}{2006}\right)b=ba+\frac{a}{2006}-ab-\frac{b}{2006}$

$=\frac{a-b}{2006}=\frac{1}{2006}.$

1.2.78 **小明按照下列算式：**

乙组的数□甲组的数○1=

对甲、乙两组数逐个进行计算，其中方框是乘号或除号，圆圈是加号或减号. 他将计算结果填入下表：

结果 甲 / 乙	0.625	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{14}$	3
$2\frac{17}{32}$	5.05	$4\frac{51}{64}$	$4\frac{5}{16}$	$1\frac{27}{32}$
2	3.4	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{3}$	1.5

有人发现表中 14 **个数中有两个数是错的，请你改正，改正后的两个数的和是** ________. (MO 1994)

解 甲组的前三个数 0.625，$\frac{2}{3}$，$\frac{9}{14}$ 都是小于 1 的数，$2\frac{17}{32}$ 与这三个数运算后，得 5.05，$4\frac{51}{64}$，$4\frac{5}{16}$，不论减 1 或加 1 后，这三个数都比 $2\frac{17}{32}$ 大，而这是 $2\frac{17}{32}$ 与小于 1 的数运算的结果，因此可以猜想方框内是除号.

现在验算一下：

$$2\frac{17}{32}\div 0.625=\frac{81}{32}\times\frac{8}{5}=\frac{81}{20}=4.05,$$

$$2\frac{17}{32}\div\frac{2}{3}=\frac{81}{32}\times\frac{3}{2}=3\frac{51}{64},$$

$$2\frac{17}{32}\div\frac{9}{14}=\frac{81}{32}\times\frac{14}{9}=\frac{63}{16}=3\frac{15}{16},$$

$$2\frac{17}{32}\div 3=\frac{27}{32}.$$

从上面四个算式来看，圆圈内填加号，这样有三个结果是对的，而 $4\frac{5}{16}$ 是错的.

按照算式：

$$\text{乙组的数}\div\text{甲组的数}+1 \qquad ①$$

$2\div 3+1=1\frac{2}{3}$，明显不等于 1.5，而上面已认定 3 是正确的，因此，只有把 2 改为 1.5，才有 $1.5\div 3+1=1\frac{1}{2}$，而

$$1.5\div 0.625+1=3.4,\ 1.5\div\frac{2}{3}+1=3.25,$$

由此可见，确定的算式 ① 是对的.

表中有两个错误，$4\frac{5}{16}$ 应改为 $4\frac{15}{16}$，2 应改为 1.5，则

$$4\frac{15}{16}+1\frac{1}{2}=5+\frac{15+8}{16}=6\frac{7}{16}.$$

改正后的两个数的和是 $6\frac{7}{16}$.

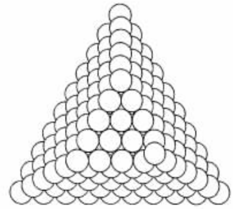
点评 题目指出“有两个数是错的”，就是只有两个数是错的，这是非常重要的条件. 例如，算式

$$\text{乙组的数}\div\text{甲组的数}+1$$

对每一个乙数和每一个甲数进行验算，结果符合表中的数，那么乙数、甲数，结果都是正确的. 否则这三个数都是错的，就与题目条件不相符.

1.3 数列的求和

1.3.01 如图，有码放整齐的一堆球，从上往下看，这堆球共有多少个？ (H 2001)



解 最上层有 1 个球；

第二层有 $1+2+3+4+5=15$(个)；

第三层有 $15+6=21$(个)；

第四层有 $21+7=28$(个)；

……

七层共有球 $1+15+21+28+36+45+55=201$(个).

1.3.02 计算：$\left(10-\frac{4}{55}\times 1\right)+\left(9-\frac{4}{55}\times 2\right)+\left(8-\frac{4}{55}\times 3\right)+\cdots+\left(1-\frac{4}{55}\times 10\right)=$ ________. (C 2004)

解
$$\begin{aligned}原式&=(10+9+8+\cdots+1)-\frac{4}{55}\times(1+2+3+\cdots+10)\\&=55-\frac{4}{55}\times 55=51.\end{aligned}$$

1.3.03 计算：$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\cdots+\frac{9}{10}\right)=$ ________. (W 1997)

解
$$\begin{aligned}原式&=0.5+1+1.5+2+\cdots+4.5\\&=(0.5+4.5)\times 9\div 2=22.5.\end{aligned}$$

1.3.04 分母不超过 2005 的所有真分数的和是________. (HY 2004)

解 分母为 $n(n>1)$ 的所有真分数之和等于$\frac{n-1}{2}$，分母不超过 2005 的所有真分数之和是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{2004}{2}\\=&\frac{1}{2}(1+2+3+\cdots+2004)\\=&1\,004\,505.\end{aligned}$$

1.3.05 计算：$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{60}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{2}{60}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{3}{60}\right)+\cdots+\left(\frac{58}{59}+\frac{58}{60}\right)+\frac{59}{60}=$ ________. (W 2002)

解 将原式中所有分母为 $n(2\leqslant n\leqslant 60)$ 的分数求和：

$$\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}\times\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n-1}{2}.$$

$$\text{原式}=1+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{59}{2}$$
$$=1+\frac{1}{2}\times(1+2+\cdots+59)=886.$$

1.3.06 计算：

$\left(\frac{2}{343}+\frac{4}{343}+\frac{6}{343}+\cdots+\frac{98}{343}\right)-\left(\frac{3}{686}+\frac{5}{686}+\frac{7}{686}+\cdots+\frac{99}{686}\right)=$ ________.

(Z 2000)

解法 1 原式$=\left(\frac{4}{686}-\frac{3}{686}\right)+\left(\frac{8}{686}-\frac{5}{686}\right)+\left(\frac{12}{686}-\frac{7}{686}\right)+\cdots$
$$+\left(\frac{196}{686}-\frac{99}{686}\right)$$
$$=\frac{1}{686}\times(1+3+5+\cdots+97)$$
$$=\frac{1}{686}\times\frac{(1+97)\times 49}{2}=3.5.$$

解法 2 原式$=\frac{1}{686}[(2\times2+4\times2+6\times2+\cdots+98\times2)-(3+5+7+\cdots$
$$+99)]$$
$$=\frac{1}{686}[(4-3)+(8-5)+(12-7)+\cdots+(196-99)]$$
$$=\frac{1}{686}(1+3+5+\cdots+97)=3.5.$$

1.3.07 黑板上写有从 1 开始的一些连续奇数：

$$1,3,5,7,9,\cdots,$$

擦去其中一个奇数以后，剩下的所有奇数的和是 2008，那么擦去的奇数是________. (HY 2004)

解 $1,3,5,7,\cdots,(2n-1)$，这 n 个奇数之和等于 n^2，$45^2=2025$，擦去的奇数是

$$2025-2008=17.$$

1.3.08 小明往一个大池里扔石子，第一次扔 1 块石子，第二次扔 2 块石子，第三次扔 3 块石子，第四次扔 4 块石子……他准备扔到大池里的石子总数被 106 除，余数是 0 为止，那么小明应扔________次. (KP 2004)

解 $106=2\times53$.

设小明应扔 n 次，则扔的石子总数为 $\frac{(1+n)n}{2}$.

当 $n+1=53$，即 $n=52$ 时，石子总数第一次能被 53 整除.

1.3.09 对于每一个四位数将其 4 个数字相乘，然后将所有得到的乘积相加，其和为________. (W 2005)

解 对于一位数，$1+2+3+\cdots+9=45$；

对于两位数，

$10\sim19$ 得到 $1+2+3+\cdots+9=45$；

$20\sim29$ 得到 $2\times(1+2+3+\cdots+9)=2\times45$；

$30\sim39$ 得到 $3\times(1+2+3+\cdots+9)=3\times45$；

……

$90\sim99$ 得到 $9\times(1+2+3+\cdots+9)=9\times45$.

总和为 $45\times(1+2+3+\cdots+9)=45^2$.

类似可得，对于三位数总和为 45^3，对于四位数总和为 45^4.

1.3.10 所有个位数与十位数都是奇数的两位数的和是________. (HK 2006)

解
$$\begin{aligned}&(11+13+\cdots+19)+(31+33+\cdots+39)+\cdots+(91+93+\cdots+99)\\=&50+(1+3+\cdots+9)+30\times5+(1+3+\cdots+9)+\cdots+90\times5+\\&(1+3+\cdots+9)\\=&50\times(1+3+\cdots+9)+5\times(1+3+\cdots+9)\\=&55\times(1+3+\cdots+9)\\=&55\times25\\=&1375.\end{aligned}$$

1.3.11 小于 1000 的能被 3 整除但不是 5 的倍数的所有自然数之和为________. (W 2005)

解 $3+6+9+\cdots+999=(3+999)\times333\div2=166\,833$，

$15+30+45+\cdots+990=(15+990)\times66\div2=33\,165$，

$166\,833-33\,165=133\,668$.

1.3.12 在两位数 10, 11, …, 98, 99 中，将每个被 7 除余 2 的数的个位与十位之间添加一个小数点，其余的数不变. 问：经过这样改变之后，所有数的和是多少？(H 1995)

解 原来数的总和是

$$10+11+\cdots+98+99=\frac{(10+99)\times90}{2}=4905.$$

被 7 除余 2 的两位数是

$$7\times2+2=16,\ 7\times3+2=23,\ \cdots,\ 7\times13+2=93,$$

共 12 个数. 这些数按题中要求添加小数点以后，都变为原数的 $\frac{1}{10}$，因此这一改变使

总和减少了

$$\begin{aligned}&(16+23+\cdots+93)\times\left(1-\frac{1}{10}\right)\\=&\frac{(16+93)\times 12}{2}\times\frac{9}{10}\\=&588.6.\end{aligned}$$

所以，经过改变之后，所有数的和是

$$4905-588.6=4316.4.$$

1.3.13 下面各数的和是________. (MO 2004)

0	1	2	3	4	5	…	48	49
1	2	3	4	5	6	…	49	50
2	3	4	5	6	7	…	50	51
…	…	…	…	…	…	…	…	…
48	49	50	51	52	53	…	96	97
49	50	51	52	53	54	…	97	98

解 数表中从右上到左下对角线上的数都是 49，以此对角线为对称轴，对称的两个数的平均数都是 49. 所以数表中 50^2 个数的平均数是 49，和为

$$49\times 50^2=350^2=122\,500.$$

1.3.14 在下面的表中，所有数之和为________. (W 2005)

1	2	3	…	50
2	3	4	…	51
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50	51	52	…	99

解 将此方阵沿右上到左下的对角线折叠，相互重叠的两数之和都等于 100，所以这 2500 个数的平均数是 50，总和为

$$50\times 2500=125\,000.$$

1.3.15 如图 1，25 个同样大小的等边三角形拼成了大等边三角形，在图中每个结点处都标上一个数，使得图中每条直线上所标的数都顺次成等差数列. 已知在大等边三角形的三个顶点放置的数分别是 100，200，300. 求所有结点上数的总和. (HY 2004)

解 如图 2，各结点上放置的数如图所示.

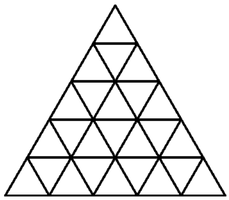


图 1

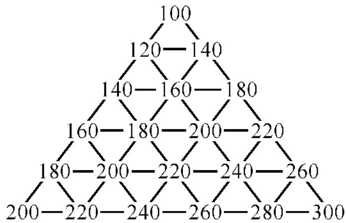


图 2

从 100 到 300 这条直线上的各数的平均数是 200，平行于这条直线的每条直线上的各数的平均数都是 200. 所以 21 个数的平均数是 200，总和为

$$200\times 21=4200.$$

1.3.16 **计算**：$1+2-3+4+5-6+7+8-9+\cdots+97+98-99=$________. (W 1997)

解 **原式**$=(1+2-3)+(4+5-6)+(7+8-9)+\cdots+(97+98-99)$

$=0+3+6+9+\cdots+96$

$=(3+96)\times[(96-3)\div 3+1]\div 2$

$=1584.$

1.3.17 **计算**：$1+2-3-4+5+6-7-8+9+10-11-12+13+\cdots+2006=$________. (HK 2006)

解 **原式**$=1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+(10-11-12+13)+\cdots+(2002-2003-2004+2005)+2006$

$=2007.$

1.3.18 **计算**：$1997+1-2-3+4+5-6-7+8+9-10-11+12+13-14-15+\cdots+1993-1994-1995+1996=$________. (W 1997)

解 **原式**$=1997+(1-2-3+4)+(5-6-7+8)+\cdots+(1993-1994-1995+1996)$

$=1997+0+0+\cdots+0$

$=1997.$

1.3.19 **计算**：$2003+2002-2001-2000+1999+1998-1997-1996+\cdots+3+2-1=$________. (C 2004)

解 **原式**$=(2003+2002-2001-2000)+(1999+1998-1997-1996)+\cdots+(3+2-1-0)$

$=4\times(2004\div 4)$

$=2004.$

1.3.20 **计算**：$2005+2004-2003-2002+2001+2000-1999-1998+1997+1996-\cdots-7-6+5+4-3-2+1=$ ________. (MO 2005)

解 将后 2004 项每 4 项分为一组，每组的计算结果都是 0，后 2004 项的计算结果是 0. 剩下第一项，结果是 2005.

1.3.21 **计算**：$1989+1988+1987-1986-1985-1984+1983+1982+1981-1980-1979-1978+\cdots+9+8+7-6-5-4+3+2+1=$ ________. (P 1989)

解 从 1989 起，每 6 个数一组，

$$1989+1988+1987-1986-1985-1984=9.$$

以后每一组 6 个数加、减后都等于 9.

$$1989\div 6=331\cdots\cdots 3.$$

最后还剩下三个数 3，2，1，

$$3+2+1=6.$$

因此，原式 $=331\times 9+6=2985$.

1.3.22 **计算**：$\dfrac{1}{13\times 15}+\dfrac{1}{15\times 17}+\dfrac{1}{17\times 19}+\cdots+\dfrac{1}{37\times 39}=$ ________. (W 2001)

解 原式 $=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{15}\right)+\left(\dfrac{1}{15}-\dfrac{1}{17}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{37}-\dfrac{1}{39}\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{39}\right)=\frac{1}{39}.$$

1.3.23 **计算**：$1+3\dfrac{1}{6}+5\dfrac{1}{12}+7\dfrac{1}{20}+9\dfrac{1}{30}+11\dfrac{1}{42}+13\dfrac{1}{56}+15\dfrac{1}{72}+17\dfrac{1}{90}=$ ________. (W 2001)

解 原式 $=(1+3+5+\cdots+17)+\left(\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{9\times 10}\right)$

$$=81+\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right]$$

$$=81+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)=81\frac{2}{5}.$$

1.3.24 **计算**：$1\dfrac{1}{3}+2\dfrac{1}{15}+3\dfrac{1}{35}+4\dfrac{1}{63}+\cdots+8\dfrac{1}{255}=$ ________. (HK 2006)

解 原式 $=(1+2+3+\cdots+8)+\left(\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+\dfrac{1}{5\times 7}+\cdots+\dfrac{1}{15\times 17}\right)$

$$=\frac{8\times 9}{2}+\frac{1}{2}\times\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\right)\right]$$

$$=36+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{17}\right)=36\frac{8}{17}.$$

1.3.25 **计算**：$\left(1-\frac{1}{15}\right)+\left(1-\frac{1}{35}\right)+\left(1-\frac{1}{63}\right)+\left(1-\frac{1}{99}\right)+\left(1-\frac{1}{143}\right)+\left(1-\frac{1}{195}\right)+\left(1-\frac{1}{255}\right)+\left(1-\frac{1}{323}\right)+\left(1-\frac{1}{399}\right)+\left(1-\frac{1}{483}\right)=$ ______.

(W 2000)

解 **原式**$=10-\left(\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{21\times23}\right)$

$$=10-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{21}-\frac{1}{23}\right)$$

$$=10-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{23}\right)=9\frac{59}{69}.$$

1.3.26 **计算**：$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+99}=$ ______.

(W 2005)

解 $\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\dfrac{1}{\frac{(1+n)n}{2}}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right).$

原式$=2\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$

$$=2\times\left(1-\frac{1}{100}\right)=1\frac{49}{50}.$$

1.3.27 **计算**：$\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{1}{3}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)}+\cdots+\dfrac{\frac{1}{9}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{9}\right)}=$ ______. (MO 2004)

解 **共** 8 **项，第** n **项为**

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{2}}$$

$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}=2\times\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right).$$

原式$=2\times\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right]$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)=\frac{4}{5}.$$

1.3.28 **计算**：$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{99\times100\times101}=$ ________． (W 2005)

解 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.

原式 $=\frac{1}{2}\times\left[\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99\times100}-\frac{1}{100\times101}\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{100\times101}\right]=\frac{5049}{20\,200}.$$

1.3.29 **计算**：$1-\frac{2}{1\times(1+2)}-\frac{3}{(1+2)\times(1+2+3)}-\cdots-\frac{10}{(1+2+\cdots+9)\times(1+2+\cdots+10)}=$ ________． (W 2000)

解 $\frac{n}{[1+2+\cdots+(n-1)]\times(1+2+\cdots+n)}$

$$=\frac{n}{\frac{(n-1)n}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{4n}{n(n-1)\times n(n+1)}$$

$$=2\times\left[\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n(n+1)}\right].$$

原式 $=1-2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{90}-\frac{1}{110}\right)$

$$=1-2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{110}\right)=1-\frac{54}{55}=\frac{1}{55}.$$

1.3.30 **计算**：$1\frac{1}{3}-\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}+\frac{17}{72}-\frac{19}{90}=$ ________． (W 2002)

解 **原式** $=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)$

$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

1.3.31 **计算**：$\frac{2\times2}{1\times3}+\frac{4\times4}{3\times5}+\frac{6\times6}{5\times7}+\frac{8\times8}{7\times9}+\frac{10\times10}{9\times11}=$ ________． (W 2000)

解 **原式** $=\left(2-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{8}{3}-\frac{8}{5}\right)+\left(\frac{18}{5}-\frac{18}{7}\right)+\left(\frac{32}{7}-\frac{32}{9}\right)+\left(\frac{50}{9}-\frac{50}{11}\right)$

$$=2+\frac{6}{3}+\frac{10}{5}+\frac{14}{7}+\frac{18}{9}-\frac{50}{11}=10-4\frac{6}{11}=5\frac{5}{11}.$$

1.3.32 **计算**：$\frac{1}{1\times3\times5}+\frac{1}{3\times5\times7}+\frac{1}{5\times7\times9}+\cdots+\frac{1}{2001\times2003\times2005}=$ ________. (H 2005)

解 **原式**$=\frac{1}{4}\times\left[\left(\frac{1}{1\times3}-\frac{1}{3\times5}\right)+\left(\frac{1}{3\times5}-\frac{1}{5\times7}\right)+\cdots+\right.$

$\left.\left(\frac{1}{2001\times2003}-\frac{1}{2003\times2005}\right)\right]$

$=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2003\times2005}\right)=\frac{1\,004\,003}{12\,048\,045}.$

1.3.33 **计算**：$\frac{2}{3\times4\times5}+\frac{2}{4\times5\times6}+\frac{2}{5\times6\times7}+\frac{2}{6\times7\times8}+\frac{2}{7\times8\times9}+\frac{2}{8\times9\times10}=$ ________. (W 2001)

解 **因为** $\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}$，**所以**

原式$=\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}\right)+$

$\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{8}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=\frac{13}{180}.$

1.3.34 **计算**：$\frac{1}{1\times2}+\frac{2}{1\times2\times3}+\frac{3}{1\times2\times3\times4}+\cdots+\frac{9}{1\times2\times3\times\cdots\times10}=$ ________. (W 2000)

解 **原式**$=\frac{2}{1\times2}+\frac{3}{1\times2\times3}+\frac{4}{1\times2\times3\times4}+\cdots+\frac{10}{1\times2\times3\times\cdots\times10}$

$-\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{1\times2\times3}-\cdots-\frac{1}{1\times2\times3\times\cdots\times9}-\frac{1}{1\times2\times\cdots\times10}$

$=1-\frac{1}{1\times2\times3\times\cdots\times10}$

$=\frac{3\,628\,799}{3\,628\,800}.$

1.3.35 **计算**：$3\times4+4\times5+5\times6+\cdots+19\times20+20\times21=$ ________. (Z 2001)

解 **原式**$=(3\times4\times3+4\times5\times3+5\times6\times3+\cdots+19\times20\times3+20\times21\times3)\div3$

$=[3\times4\times(5-2)+4\times5\times(6-3)+5\times6\times(7-4)+\cdots+19\times20\times(21-18)+20\times21\times(22-19)]\div3$

$=(3\times4\times5-2\times3\times4+4\times5\times6-3\times4\times5+5\times6\times7-4\times5$

$\times 6+\cdots+19\times 20\times 21-18\times 19\times 20+20\times 21\times 22-19\times 20\times 21)\div 3$

$=(20\times 21\times 22-2\times 3\times 4)\div 3$

$=20\times 7\times 22-8$

$=3072.$

点评 **因为** $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$，

所以，原式 $=\frac{1}{3}\times 20\times 21\times 22-1\times 2-2\times 3=3072.$

1.3.36 **计算：** $\frac{1^2+2^2}{1\times 2}+\frac{2^2+3^2}{2\times 3}+\frac{3^2+4^2}{3\times 4}+\cdots+\frac{2000^2+2001^2}{2000\times 2001}=$ ________. (H 2001)

解 **原式** $=\left(\frac{2^2}{1\times 2}+\frac{1^2}{1\times 2}\right)+\left(\frac{3^2}{2\times 3}+\frac{2^2}{2\times 3}\right)+\left(\frac{4^2}{3\times 4}+\frac{3^2}{3\times 4}\right)+\cdots+\left(\frac{2001^2}{2000\times 2001}+\frac{2000^2}{2000\times 2001}\right)$

$=\frac{2}{1}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{2001}{2000}+\frac{2000}{2001}.$

因为上式中分母为 $1\sim 2000$ **的同分母的两个分数之和都是** 2**，所以**

原式 $=2\times 2000+\frac{2000}{2001}=4000\frac{2000}{2001}.$

点评 **一般有** $\frac{1^2+2^2}{1\times 2}+\frac{2^2+3^2}{2\times 3}+\frac{3^2+4^2}{3\times 4}+\cdots+\frac{n^2+(n+1)^2}{n\times(n+1)}=2n+\frac{n}{n+1}.$

1.3.37 **所有分母不大于** 7 **的真分数共有** 17 **个，按从小到大的顺序排成一列，分别作第** 1 **个数与** $\frac{1}{18}$ **的差，第** 2 **个数与** $\frac{2}{18}$ **的差……第** 17 **个数与** $\frac{17}{18}$ **的差，那么这** 17 **个差之和为** ________.**（注意：两个不同数的差指的是较大数减去较小数）** (W 2004)

解 **分母不大于** 7 **的真分数按从小到大排列为**

$$\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7}.$$

以 $\frac{1}{2}$ **为中心，对称的两个分数之和都等于** 1. **同样，在** $\frac{1}{18}\sim\frac{17}{18}$ **中，以** $\frac{9}{18}$ **为中心，对称的两个分数之和也都等于** 1. **所以只要求出上面数列中前** 8 **个分数与** $\frac{1}{18}\sim\frac{8}{18}$ **相对应的差之和，再乘以** 2**，即为所求.**

$\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{18}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{18}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{18}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{18}\right)+\left(\frac{2}{7}-\frac{5}{18}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{6}{18}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{7}{18}\right)+\left(\frac{8}{18}-\frac{3}{7}\right)$

$$=\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{7}-\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{18}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right)+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{18}+\frac{2}{18}+\frac{4}{18}+\frac{5}{18}+\frac{7}{18}-\frac{8}{18}\right)$$

$$=\frac{3}{5}+\frac{1}{4}-\frac{11}{18}=\frac{43}{180}.$$

$$\frac{43}{180}\times 2=\frac{43}{90}.$$

1.3.38 **计算**：$\frac{1+2}{2}\times\frac{1+2+3}{2+3}\times\frac{1+2+3+4}{2+3+4}\times\cdots\times\frac{1+2+\cdots+50}{2+3+\cdots+50}=$ ________. (W 2002)

解 $\frac{1+2+\cdots+n}{2+3+\cdots+n}=\frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)}$.

原式$=\frac{2\times 3}{1\times 4}\times\frac{3\times 4}{2\times 5}\times\frac{4\times 5}{3\times 6}\times\cdots\times\frac{49\times 50}{48\times 51}\times\frac{50\times 51}{49\times 52}=\frac{3}{1}\times\frac{50}{52}=2\frac{23}{26}$.

1.3.39 **计算**：$\dfrac{1\frac{2}{3}+2\frac{3}{4}+\cdots+2000\frac{2001}{2002}+2001\frac{2002}{2003}}{3\frac{1}{3}+5\frac{2}{4}+\cdots+4001\frac{2000}{2002}+4003\frac{2001}{2003}}=$ ________.

(C 2004)

解 观察分子、分母相对应的项知，分子、分母相对应的项的比都是$\frac{1}{2}$，所以

原式$=\frac{1}{2}$.

1.3.40 **计算**：$\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\cdots+\frac{11}{2^{10}}=$ ________. (MO 2001)

解 **原式**$=\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\frac{6}{32}+\frac{1}{2^6}\times\left(\frac{7}{1}+\frac{8}{2}+\frac{9}{4}+\frac{10}{8}+\frac{11}{16}\right)$

$$=2\frac{3}{4}+\frac{1}{2^6}\times 15\frac{3}{16}$$

$$=2\frac{3}{4}+\frac{243}{1024}=2\frac{1011}{1024}.$$

点评 此题还有一个按部就班的解法，即从左到右，逐次通分，逐次计算.

1.3.41 **计算**：$\frac{1}{1024}+\frac{1}{512}+\frac{1}{256}+\cdots+\frac{1}{2}+1+2+4+8+\cdots+1024=$ ________. (MO 2005)

解 **原式**$=\left(\frac{1}{1024}+\frac{1}{1024}+\frac{1}{512}+\frac{1}{256}+\cdots+\frac{1}{2}\right)+$

$$(1+1+2+4+8+\cdots+1024)-\frac{1}{1024}-1$$

$$= \left(\frac{1}{512}+\frac{1}{512}+\frac{1}{256}+\cdots+\frac{1}{2}\right)+$$

$$(2+2+4+8+\cdots+1024)-1\frac{1}{1024}$$

$$= \left(\frac{1}{256}+\frac{1}{256}+\cdots+\frac{1}{2}\right)+(4+4+8+\cdots+1024)-1\frac{1}{1024}$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+(1024+1024)-1\frac{1}{1024}$$

$$= 2049-1\frac{1}{1024}=2047\frac{1023}{1024}.$$

1.3.42 计算：$1\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+5\frac{1}{8}+7\frac{1}{16}+9\frac{1}{32}+11\frac{1}{64}+13\frac{1}{128}+15\frac{1}{256}+17\frac{1}{512}+19\frac{1}{1024}=$________. (C 2004)

解　原式$=(1+3+5+\cdots+19)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1024}+\frac{1}{1024}\right)-\frac{1}{1024}$

$$=100+1-\frac{1}{1024}=100\frac{1023}{1024}.$$

1.3.43 计算：$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+\frac{31}{32}+\frac{63}{64}+\frac{127}{128}+\frac{255}{256}=$________. (MO 2001)

解　原式$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{256}\right)$

$$=8-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}\right).$$

将上式括号中的算式再加上$\frac{1}{256}$**，从后向前逐项求和等于** 1. **所以，**

原式 $=8-\left(1-\frac{1}{256}\right)=7\frac{1}{256}.$

1.3.44 计算：$20-\frac{5}{2}-\frac{9}{4}-\frac{17}{8}-\frac{33}{16}-\frac{65}{32}-\frac{129}{64}=$________. (W 2002)

解　原式$=20-2\frac{1}{2}-2\frac{1}{4}-2\frac{1}{8}-2\frac{1}{16}-2\frac{1}{32}-2\frac{1}{64}$

$$=20-2\times6-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}\right)+\frac{1}{64}$$

$$=8-1+\frac{1}{64}=7\frac{1}{64}.$$

1.3.45 在 $1^2=1$，$2^2=4$，$3^2=9$，$4^2=16$…… **中** 1，4，9，16，… **叫做"完全平方数". 从** 1 **到** 500 **这** 500 **个整数中，去掉所有的"完全平方数"，剩下的整数的和**

是________.　　(MO 2004)

解　$1^2+2^2+3^2+\cdots+22^2=3795$.

$(1+2+3+\cdots+500)-(1^2+2^2+3^2+\cdots+22^2)$

$=125\,250-3795=121\,455$.

点评　$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

1.4　比较大小

1.4.01 **英文字典中的单词是按照下面的字典排法排列的，即：先比较第一个字母而不管后面的字母是什么，也不管后面的字长，只要第一个字母在先，这个单词就排在先；如果第一个字母相同，则比较第二个字母，依次类推. 根据字典排法，请你排出下列各单词**：about，a，back，cabana，aba，backbone，cabala.　　(HK 2006)

解　a，aba，about，back，backbone，cabala，cabana.

1.4.02 **将** 3.14，$3.\dot{1}\dot{4}$，$3.1\dot{4}$，3.141 **按从大到小的顺序排列.**　　(HK 2006)

解　**因为** $3.\dot{1}\dot{4}=3.141\,414\cdots$，

$3.1\dot{4}=3.1444\cdots$，

$3.14=3.1400\cdots$，

$3.141=3.141\,00\cdots$，

所以 $3.1\dot{4}>3.\dot{1}\dot{4}>3.141>3.14$.

1.4.03 **设** $A=\dfrac{29}{62}$，$B=\dfrac{293\,031}{626\,160}$，**比较大小**：$A$ ________ B.　　(MO 2001)

解　**因为** $A=\dfrac{29}{62}=\dfrac{29\times 10\,101}{62\times 10\,101}=\dfrac{292\,929}{626\,262}<\dfrac{292\,929}{626\,160}<\dfrac{293\,031}{626\,160}=B$.

所以 $A<B$.

1.4.04 **试比较** $\dfrac{111}{1111}$ **和** $\dfrac{1111}{11\,111}$ **哪个分数大？**　　(H 1988)

解　**观察这两个分数的倒数**：

$\dfrac{111}{1111}$ **的倒数是** $\dfrac{1111}{111}=10\dfrac{1}{111}$，

$\dfrac{1111}{11\,111}$ **的倒数是** $\dfrac{11\,111}{1111}=10\dfrac{1}{1111}$，

因为 $10\dfrac{1}{111}>10\dfrac{1}{1111}$，**即** $\dfrac{1111}{111}>\dfrac{11\,111}{1111}$，

所以 $\dfrac{111}{1111}<\dfrac{1111}{11\,111}$.

点评　**本题还可以利用分数的性质**：

“一个真分数的分子、分母分别加上一个相同的正数，所得的分数大于原来的分

数.”比较如下：

$$\frac{111}{1111}=\frac{1110}{11\,110}<\frac{1110+1}{11\,110+1}=\frac{1111}{11\,111}.$$

如果利用循环小数的分数表示法，也可以这样做：

$$\frac{111}{1111}=\frac{999}{9999}=0.\dot{0}99\dot{9},$$

$$\frac{1111}{11\,111}=\frac{9999}{99\,999}=0.\dot{0}99\,9\dot{9},$$

再比较这两个循环小数的大小，可以得到答案.

1.4.05 在A医院，甲种药有20人接受试验，结果6人有效；乙种药有10人接受试验，结果只有2人有效. 在B医院，甲种药有80人接受试验，结果40人有效；乙种药有990人接受试验，结果478人有效. 综合A、B两家医院的试验结果，________种药总的疗效更好.　(SXB 2001)

解　甲种药的有效率为 $(6+40)\div(20+80)=46\%$；乙种药的有效率为 $(2+478)\div(10+990)=48\%$. 因为 $48\%>46\%$，所以乙种药总的疗效更好.

1.4.06 甲透露他的考试分数给乙、丙、丁三人知道，但其余的人都隐匿他们的分数. 乙想：“至少我们四个人之中有两个人分数一样”. 丙想：“我的分数不是最低的”. 丁想：“我的分数不是最高的”. 将乙、丙、丁三人的分数从最低至最高由左而右排列，得____________________.　(N 2004)

解　由乙、丙、丁知道甲的分数后的想法，推知：乙＝甲，丙＞甲，丁＜甲.

所以，丁＜甲＜丙. 应填：丁、乙、丙.

1.4.07 将下面的五个分数：

$$\frac{2}{3},\ \frac{5}{8},\ \frac{15}{23},\ \frac{10}{17},\ \frac{12}{19};$$

按从小到大的顺序排列成____________________.　(N 2004)

解　五个分子的最小公倍数是60，将五个分数通分子：

$$\frac{2}{3}=\frac{60}{90},\ \frac{5}{8}=\frac{60}{96},\ \frac{15}{23}=\frac{60}{92},\ \frac{10}{17}=\frac{60}{102},\ \frac{12}{19}=\frac{60}{95}.$$

分子相同，分母大的分数小，所以有

$$\frac{10}{17}<\frac{5}{8}<\frac{12}{19}<\frac{15}{23}<\frac{2}{3}.$$

1.4.08 比较分数 $\frac{2}{3},\ \frac{7}{10},\ \frac{17}{26},\ \frac{19}{29}$ 的大小.　(MO 1997)

解　这道题若用通分的办法来比较大小，显然非常麻烦，可尝试比较它们各自与1的差，谁与1的差越大，谁越小.

$$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3},\ 1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10},$$

$$1-\frac{17}{26}=\frac{9}{26},\ 1-\frac{19}{29}=\frac{10}{29}.$$

$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{10}$，$\frac{9}{26}$ 这三个数可采用通分子的办法很快得出 $\frac{9}{26}>\frac{1}{3}>\frac{3}{10}$.

而$\frac{9}{26}>\frac{10}{29}>\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$，故有$\frac{9}{26}>\frac{10}{29}>\frac{1}{3}>\frac{3}{10}$. 结果：与 1 的差越大，这个数越小，可知原题中 4 个数的大小为 $\frac{17}{26}<\frac{19}{29}<\frac{2}{3}<\frac{7}{10}$.

1.4.09 a、b、c、d 分别表示四个自然数，且 $a>b>c>d$. 请你写出一个算式，表示一个数与另外三个数的和相乘的积，其中乘积最大的算式是________. （Y 2000）

解　一个数乘以三个数的和有以下四种情况：

(1) $a\times(b+c+d)=a\times b+a\times c+a\times d$；

(2) $b\times(a+c+d)=b\times a+b\times c+b\times d$；

(3) $c\times(a+b+d)=c\times a+c\times b+c\times d$；

(4) $d\times(a+b+c)=d\times a+d\times b+d\times c$.

(1) 与(2) 比较 $a\times c+a\times d>b\times c+b\times d$，所以(1) $>$ (2)；

同理得到(1) $>$ (3)；(1) $>$ (4).

所以最大的算式是 $a\times(b+c+d)$.

1.4.10 下面九个分数算式中，哪一个和最小？它的和是________.　（MO 1996）

$$\frac{3}{5}+\frac{5}{20},\ \frac{3}{6}+\frac{6}{20},\ \frac{3}{7}+\frac{7}{20},\ \frac{3}{8}+\frac{8}{20},\ \frac{3}{9}+\frac{9}{20},$$

$$\frac{3}{10}+\frac{10}{20},\ \frac{3}{11}+\frac{11}{20},\ \frac{3}{12}+\frac{12}{20},\ \frac{3}{13}+\frac{13}{20}.$$

解　由于每个和式的两个加数之积均为$\frac{3}{20}$，可知这两个加数越接近，其和越小. 所以和最小是 $\frac{3}{8}+\frac{8}{20}=\frac{31}{40}$.

1.4.11 有四个分数：$\frac{12}{25}$，$\frac{11}{24}$，$\frac{19}{39}$，$\frac{11}{29}$；其中最大的分数与最小的分数的差等于________________.　（MO 1994）

解　很明显 $\frac{11}{29}<\frac{11}{24}$，

$$\frac{11}{24}=\frac{12}{24}-\frac{1}{24}=\frac{1}{2}-\frac{1}{24},$$

$$\frac{19}{39}=\frac{19.5}{39}-\frac{0.5}{39}=\frac{1}{2}-\frac{1}{78},$$

$$\frac{12}{25}=\frac{12.5}{25}-\frac{0.5}{25}=\frac{1}{2}-\frac{1}{50}.$$

因为 $\frac{1}{78}<\frac{1}{50}<\frac{1}{24}$，所以$\frac{19}{39}>\frac{12}{25}>\frac{11}{24}$.

这四个分数中，最大的是$\frac{19}{39}$，最小的是$\frac{11}{29}$，两者的差是

$$\frac{19}{39}-\frac{11}{29}=\frac{122}{1131}.$$

点评 容易看出 $\frac{19}{39}$，$\frac{12}{25}$，$\frac{11}{24}$这三个分数与$\frac{1}{2}$十分接近，我们就用$\frac{1}{2}$作为基准数来进行比较. 这三个数都比$\frac{1}{2}$小，比较$\frac{1}{2}$与这三个分数的差，因为差非常容易计算，哪个差小，那个数就大.

1.4.12 在一列数：$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{7}{9}$，$\frac{9}{11}$，$\frac{11}{13}$，…中，从哪一个数开始，1 与每个数之差都小于$\frac{1}{1000}$？ (H 2004)

解 这列数的第 n 个数可以表示为 $\frac{2n-1}{2n+1}$，根据题意有

$$1-\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{2}{2n+1}<\frac{1}{1000},$$

也即$\frac{2n+1}{2}>1000$. 所以 $2n+1>2000$.

由此可知 $2n+1$ 应取最接近 2000 的整数 2001，$n=1000$.

所以，从$\frac{1999}{2001}$开始，1 与每一个数之差都小于$\frac{1}{1000}$.

1.4.13 有 24 个整数：

112，106，132，118，107，102，189，153，142，134，116，254，
168，119，126，445，135，129，113，251，342，901，710，535.

问：当将这些数从小到大排列起来时，第 12 个数是多少？ (H 1995)

解 这 24 个整数中，百位数为 1 的共有 17 个. 所以从小到大排第 12 个应在百位为 1 的数中去找，其中十位数字为 0 的共有 3 个，十位数字为 1 的共有 5 个，十位数字为 2 的共有 2 个，这些数共计 10 个；因此，再找出十位数字为 3 的数，它们是 132，134，135. 所以从小到大排第 12 个是 132，134，135 中的第二个数——134.

1.4.14 给出以下 10 个自然数：

6907，73，769，3043，19，1480，373，41 321，21 768，178.

请你说出 25 758 是其中哪几个数之和？　(H 1995)

解　**将 10 个数从小到大排列：**

$$19,73,178,373,769,1480,3043,6907,21\,768,41\,321.$$

发现左边连续几个数之和都小于其右边紧邻的那个数. 如：

$$19<73,19+73=92<178,19+73+178=270<373,$$
$$19+73+178+373=643<769\text{ 等等.}$$

这时，我们从大往小选取，41 321 显然应淘汰，选 21 768；6907 应淘汰，选 3043；1480 应淘汰，选 769；373 不能选，选 178，从尾数上看所选的四个数之和的尾数已经恰好是 8. 计算知 $21\,768+3043+769+178$ **之和恰好等于 25 758.**

1.4.15 **现有五个自然数，其中第一个数小于第二个数的 2 倍，第二个数小于第三个数的 3 倍，第三个数小于第四个数的 4 倍，第四个数小于第五个数的 5 倍，而第五个数小于 100，那么第一个数的最大值是________.**　(W 2001)

解　**第五个数最大是 99，第四个数最大是** $99\times5-1=494$，

第三个数最大是 $494\times4-1=1975$，**第二个数最大是** $1975\times3-1=5924$，**第一个数最大是** $5924\times2-1=11\,847$.

1.4.16 **将所有形如** $\frac{m}{n}$ **的分数排成一行，其中** m、n **都是自然数，且满足下面的规定：**

(1) **若** $m_1\times n_1<m_2\times n_2$，**则** $\frac{m_1}{n_1}$ **必须排在** $\frac{m_2}{n_2}$ **的前面；**

(2) **若** $m_1\times n_1=m_2\times n_2$，**且** $n_1<n_2$，**则** $\frac{m_1}{n_1}$ **也必须排在** $\frac{m_2}{n_2}$ **的前面.**

那么在 $\frac{1998}{1}$ **和** $\frac{1}{1998}$ **两数中间共排有多少个分数？**　(B 1998)

解　$1\times1998=1998$. **如果** $n\cdot m<1998$，**则** $\frac{m}{n}$ **排在** $\frac{1998}{1}$ **前面；**

如果 $n\cdot m>1998$，**则** $\frac{m}{n}$ **排在** $\frac{1}{1998}$ **后面.**

所以排在 $\frac{1998}{1}$ **和** $\frac{1}{1998}$ **两数中间的数只能是** $n\cdot m=1998$.

因 $1998=2\times3^3\times37$，**按题目要求排法如下：** $\frac{1998}{1},\frac{999}{2},\frac{666}{3},\frac{333}{6},\frac{222}{9},\frac{111}{18},\frac{74}{27},\frac{54}{37},\frac{37}{54},\frac{27}{74},\frac{18}{111},\frac{9}{222},\frac{6}{333},\frac{3}{666},\frac{2}{999},\frac{1}{1998}$. **所以在** $\frac{1998}{1}$ **和** $\frac{1}{1998}$ **两数中间共排有 14 个分数即 1998 的正约数个数减 2 个，为 14 个.**

1.4.17 **试比较** $\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{296\text{个}2}$ **与** $\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3}_{185\text{个}3}$ **哪一个大？**　(H 1995)

解　**因为** $296=37\times8$，$185=37\times5$，**所以**

$$\frac{\overbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}^{296\text{个}2}}{\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3}_{185\text{个}3}}$$

$$=\underbrace{\frac{\overbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}^{8\text{个}2}}{\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3}_{5\text{个}3}}\times\frac{\overbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}^{8\text{个}2}}{\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3}_{5\text{个}3}}\times\cdots\times\frac{\overbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}^{8\text{个}2}}{\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3}_{5\text{个}3}}}_{37\text{个}}.$$

因为$\frac{\overbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}^{8\text{个}2}}{\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3}_{5\text{个}3}}=\frac{256}{243}>1$,所以

$$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{296\text{个}2}>\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3}_{185\text{个}3}.$$

1.4.18 比较 2^{234} 和 5^{100} 的大小,并说明理由. (H 2005)

解 逐次计算:

$2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, $2^6=64$, $2^7=128$;

$5^2=25$, $5^3=125$.

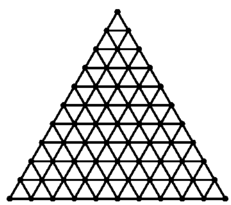
可见,2^7 和 5^3 较为接近,且

$$128=2^7>5^3=125.$$

由此可得

$$(2^7)^{33}>(5^3)^{33}\Rightarrow 8\times2^{231}>5\times5^{99}\Rightarrow 2^{234}>5^{100}.$$

1.4.19 如图,每相邻的三个圆点组成一个小三角形,问:图中这样的小三角形个数多还是圆点个数多? (H 1988)



解法1 我们用"一一对应就一样多"这个原理,将每个"头朝上"(即一个顶点在上方)的三角形和它上面的顶点,对应起来,再把最下一行"头朝下"的三角形和最下一行的圆点对应起来,这样只剩下最下一行两端的两个圆点没有和三角形对应,而剩下的没有和圆点对应的三角形显然不止两个,可见三角形比圆点多.

解法2 如图,图中共有 11 行小圆点,10 层小三角形.

小圆点的个数为 $1+2+3+4+5+\cdots+10+11$,

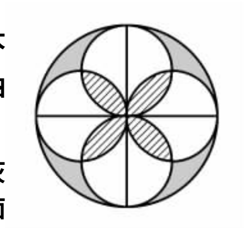
三角形的个数为 $1+3+5+7+\cdots+17+19$.

上面一行前三项之和 $1+2+3=6$,下面一行前二项之和 $1+3=4$,两者只差 2,但两行余下的八项比较,下面一行都比上面一行大. 因此下面一行的和比上面一

行的和大.

故小三角形的个数多.

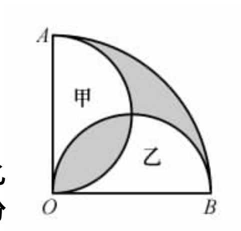
1.4.20 如图是一个对称的图形,问:灰色部分面积大还是阴影(打剖面线)部分面积大? (H 1988)



解 因为是对称图形,四个小圆半径相等,且恰好是大圆半径的一半.这样,每个小圆面积等于大圆面积的$\frac{1}{4}$,四个小圆面积之和正好等于大圆面积.

阴影部分(打剖面线)是四个小圆相重叠的部分,而灰色部分则是由于重叠而空余出来的部分,所以这两部分面积相等.

1.4.21 如图所示,OAB是一个直角扇形,分别以OA、OB为直径在扇形内部作半圆.你看,图中阴影部分像不像一条悠闲自得的大尾巴金鱼?那么这条金鱼的鱼身和鱼尾的面积哪个大些?为什么? (SXB 2005)



解 设$OA=OB=2r$.

甲、乙两个半圆的面积和为$r^2\pi$,扇形OAB的面积为

$$(2r)^2\pi\times\frac{1}{4}=r^2\pi.$$

因为甲、乙的面积和等于扇形OAB的面积,所以甲、乙重叠的部分(即鱼身)等于甲、乙没有覆盖扇形AB的部分(即鱼尾).

1.4.22 如图1,在半径为4厘米的圆中有两条互相垂直的线段,把圆分成A、B、C、D四块.圆心O落在C中,O到M点距离为1厘米,M点到N点距离为2厘米,那么$A+C$和$B+D$相比较,________的面积大,大________平方厘米. (MO 1997)

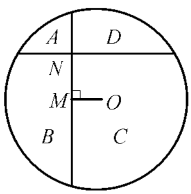


图1

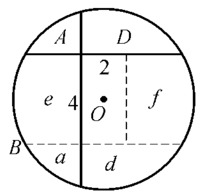


图2

解 如图2所示,$B+D=e+a+D$,而$A=a$,$D=d$,$e=f$,所以$(A+C)$比$(B+D)$的面积大,它们的面积相差恰好为中间的小长方形,面积为$4\times2=8$(平方厘米).

1.4.23 如图 1、图 2、图 3，有三条线段 a、b、c，a 长 2.12 米，b 长 2.71 米，c 长 3.53 米. 以它们作为上底、下底和高，可以作出三个不同的梯形. 问：哪个梯形的面积最大？　(H 1988)

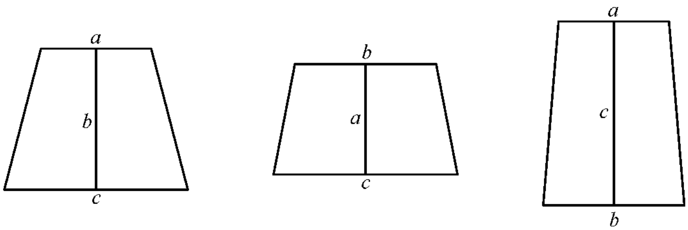


图 1　　图 2　　图 3

解　首先注意，梯形的面积＝(上底＋下底)×高÷2. 但我们现在是比较三个梯形面积的大小，所以不妨把它们的面积都乘以 2，这样只需比较(上底＋下底)×高的大小就行了. 我们用乘法分配律：

图 1 面积的 2 倍是

$$(2.12+3.53)\times 2.71=2.12\times 2.71+3.53\times 2.71;$$

图 2 面积的 2 倍是

$$(2.71+3.53)\times 2.12=2.71\times 2.12+3.53\times 2.12;$$

图 3 面积的 2 倍是

$$(2.12+2.71)\times 3.53=2.12\times 3.53+2.71\times 3.53.$$

先比较图 1 和图 2. 两个式子右边的第一个加数，一个是 2.12×2.71，另一个是 2.71×2.12. 由乘法交换律，这两个积相等. 因此只需比较第二个加数的大小就行了. 显然 3.53×2.71 比 3.53×2.12 大，因为 2.71 比 2.12 大. 因此图 1 梯形比图 2 梯形的面积大.

类似地，如果比较图 1 和图 3，我们发现它们右边第二个加数相等，而第一个加数 $2.12\times 2.71<2.12\times 3.53$. 因此图 3 梯形比图 1 梯形面积大.

综上所述，图 3 梯形面积最大.

1.4.24 如图 1，图中的大圆盖住了小圆的一半面积. 问：在小圆内的大圆的弧线 AMB 的长度和小圆的直径相比，哪个比较长一些？　(H 1995)

解　首先，如图 3，小圆的圆心必定位于两圆相重叠的区域之内. 否则，如图 2 所示，大圆盖住的部分不会达到小圆面积的一半.

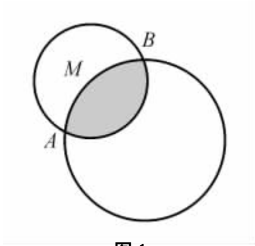


图 1

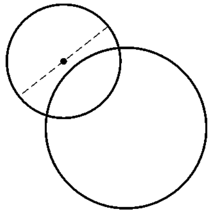


图 2

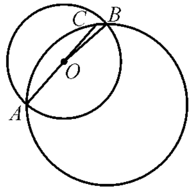


图 3

其次，设 A、B 为两圆圆周的交点，O 是小圆的圆心，连结 OA、OB，延长 AO 交大圆弧线于 C，易见

$$AC + CB > AO + OC + CB,$$
$$OC + CB > OB.$$

所以， $AC + CB > OA + OB =$ 小圆直径的长度.

而 大圆弧线的长 $> AC + CB$，

所以它更大于小圆的直径，即大圆的弧线长一些.

1.4.25 园林小路，曲径通幽. 如图 1 所示，小路由白色正方形石板和青、红两色的三角形石板铺成. 问：内圈三角形石板的总面积大还是外圈三角形石板的总面积大？请说明理由. （SXB 2005）

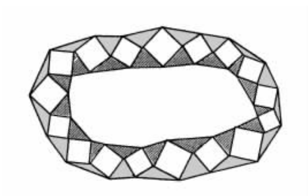


图 1

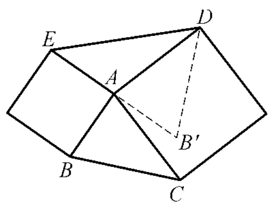


图 2

解　两个相接触的正方形夹着一个外圈三角形石板和一个内圈三角形石板，如图 2 所示.

将 $\triangle ABC$ 绕 A 点逆时针旋转 $90°$，此时 C 点与 D 点重合，B 点到 B' 点.

因为 $\angle EAD + \angle BAC = 180°$，而 $\angle BAC = \angle B'AD$，所以

$$\angle EAD + \angle B'AD = 180°,$$

即 EAB' 是一条直线.

又因为 $EA = AB'$，所以 $\triangle EAD$ 与 $\triangle AB'D$ 面积相等，从而与 $\triangle ABC$ 面积相等.

因为两个相接触的正方形所夹的内、外圈的两个三角形面积相等，所以内圈三角形石板的总面积等于外圈三角形石板的总面积.

1.4.26 在正九边形内，用若干条对角线把它分成白色及有阴影的三角形，如图 1所示. 你能证明这两种三角形的面积总和是相等的吗？ (X 2004)

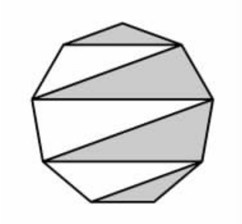


图 1

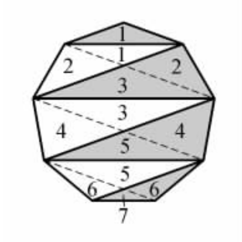


图 2

解 如图 2，再作若干条辅助的对角线，把正九边形分成更多的三角形. 根据对称的原则，不妨给对应的两种三角形都注上编号，于是编号 1～6 的每两个三角形面积都相等，但是还多出了编号为 7 的阴影三角形. 所以，有阴影的三角形的总面积大.

1.4.27 如图 1、图 2、图 3 是三块形状不同的铁皮，将每块铁皮沿虚线弯折后焊接成一个无盖的长方体铁桶，铁桶底面是正方形. 其中，装水最多的铁桶是由________铁皮焊接的. (X 2004)

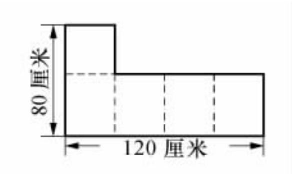


图 1

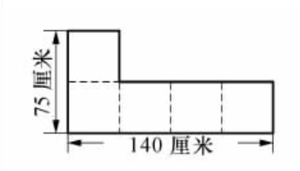


图 2

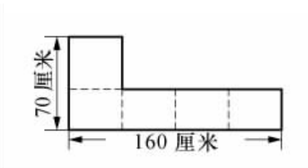


图 3

解 图 1 铁皮焊接的铁桶的容积是

$$\frac{120}{4}\times\frac{120}{4}\times\left(80-\frac{120}{4}\right)=45\,000(\text{立方厘米})；$$

图 2 铁皮焊接的铁桶的容积是

$$\frac{140}{4}\times\frac{140}{4}\times\left(75-\frac{140}{4}\right)=49\,000(\text{立方厘米})；$$

图 3 铁皮焊接的铁桶的容积是

$$\frac{160}{4}\times\frac{160}{4}\times\left(70-\frac{160}{4}\right)=48\,000(\text{立方厘米}).$$

所以装水最多的铁桶是由图 2 铁皮焊接的.

1.4.28 春天时，甲比乙高 1 cm，比丙高 2 cm，比丁高 3 cm. 经过一个夏天，四个人都长高了，但各人所长的高度不一样，不过都长高了整数厘米. 秋天量身高时，他

们发现四个人仍然是一个比一个矮 1 cm,只是丁紧接在甲之后. 试问:现在谁最高?(LMO 1989)

解 丙最高. 事实上,丙不能第二高,因为在这种情况下,他将紧接在乙之后,从而与乙长了同样的高度;丙也不能第三高,因为在这种情况下,甲和丁在他前面,这意味着甲仍比他高 2 厘米,此亦不行;最后,丙也不能最矮,因为在这种情况下,如果他紧接乙之后,当然不行,如果他不紧接乙之后,则必由高到矮依次为 乙、甲、丁、丙,此时他又比甲矮 2 厘米,当然又不行.

所以秋天时,四人由高到矮的顺序是 丙、甲、丁、乙,从而丙最高.

1.4.29 有四位朋友的体重都是整千克数,他们两两合称体重,共称了五次,称得的千克数分别为 99, 113, 125, 130, 144,其中有两人没有一起称过,那么这两人中体重较重的人的体重是多少千克? (MO 1994)

解 在已称出的五个数中,其中有两对数,每一对两数之和,恰好是四人的体重之和. 从

$$113+130=99+144=243$$

就知道四人体重之和是 243 千克,因此没有一起称过的两人体重之和为

$$243-125=118(\text{千克}).$$

设四人的体重从小到大排列是 a、b、c、d,那么一定是

$$a+b=99,\ a+c=113.$$

因为有两种可能情况:

$$a+d=118,\ b+c=125,$$

或者

$$b+c=118,\ a+d=125.$$

因为 99 与 113 都是奇数,

$$b=99-a,\ c=113-a,$$

所以 b 与 c 都是奇数,或者 b 与 c 都是偶数,于是 $b+c$ 一定是偶数,这样就确定了

$$b+c=118.$$

a、b、c 三数之和是

$$(99+113+118)\div 2=165.$$

而 b 与 c 中较重的人体重是

$$\begin{aligned} c&=(a+b+c)-(a+b)\\ &=165-99\\ &=66(\text{千克}). \end{aligned}$$

所以,没有一起称过的两人中,较重体重的是 66 千克.

点评 四个人中每两人各称一次，共要称六次. 于是 a、b、c、d 从小到大排列，就可以列出比较大小的关系式

$$a+b<a+c<\begin{matrix}a+d\\b+c\end{matrix}<b+d<c+d.$$

在上面列出的六个数中，有四个数的大小关系非常清楚，只有 $a+d$ 与 $b+c$，只知道它们在 $a+c$ 与 $b+d$ 之间，但是 $a+d$ 与 $b+c$ 谁大谁小还不能确定. 例如 1，3，5，6 四个数，$3+5$ 比 $1+6$ 大，而 2，3，4，6 四个数 $2+6$ 比 $3+4$ 大.

这道题由 118 与 125 奇、偶不同来断定 $b+c=118$，才能找出唯一确定的解答；如果没有这样的奇偶差别，解答就不一定是唯一的. 例如，四个数两两之和是

$$6,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 20.$$

我们就不能断定 12 是第一、第二两数之和，还是第三、第四两数之和. 事实上，可以有两组解答：

$$1,\ 5,\ 9,\ 11;\quad 2,\ 4,\ 8,\ 12.$$

1.5 估算与取整

1.5.01 两个带小数相乘，乘积四舍五入以后是 76.5，这两个数都只有一位小数，两个数的个位数字都是 8. 问：这两个数的乘积四舍五入前是多少？ (P 1987)

解 这两个数都小于 9，$76.5\div 9=8.5$. 因此这两个数是 8.6，8.7，8.8，8.9 中的两个数(可能是相同的).

这两个数的乘积应在 76.45 至 76.54 之间，四舍五入后，才会得到 76.5.

试算一下：

$$8.6\times 8.9=76.54,$$
$$8.6\times 8.8=75.68,$$
$$8.7\times 8.8=76.56,$$
$$8.7\times 8.7=75.69.$$

因此只有 8.6 和 8.9 符合题目的要求.

1.5.02 所有适合不等式 $\frac{7}{18}<\frac{n}{5}<\frac{20}{7}$ 的自然数 n 之和为________.

(MO 2000)

解 根据题意，n 可以是 2 到 14 中的任意自然数，于是

$$2+3+\cdots+14=104.$$

1.5.03 如果 $\frac{1}{2}<\frac{7}{\square}<\frac{4}{5}$，那么 $\square$ 中可以填写的自然数共有多少个？

(M 1997)

解 由 $\frac{1}{2}<\frac{7}{\square}$ 可推知 $\square<14$，由 $\frac{7}{\square}<\frac{4}{5}$ 可推知 $\square>8$，所以 $\square$ 中可以填 9，10，11，12，13 五个自然数.

1.5.04 一个最简分数 $\frac{a}{b}$ 满足 $\frac{1}{7}<\frac{a}{b}<\frac{1}{6}$，当分母 b 最小时，$a+b=$ ________. （Y 2003）

解 （1）分子为 1 的分数中，不存在这样的分数；

（2）分子为 2 的分数中，$\frac{1}{7}=\frac{2}{14}$，$\frac{1}{6}=\frac{2}{12}$，所以 $\frac{2}{13}$ 是分子为 2 的唯一答案；

（3）分子扩大，分母也随之扩大，如当分子为 3 时，分母可以是 20，19.

所以分母 $b=13$ 时为最小值，$a+b=15$.

1.5.05 如果 $x^3=1999$，$y^2=1999$，其中 x、$y>0$. 试问：介于 x 与 y 之间共有多少个整数？ （B 1999）

解 因 $12^3=1728$，$13^3=2197$，$44^2=1936$，$45^2=2025$，所以 $12<x<13$，$44<y<45$. 介于 x 与 y 之间的整数有 13，14，15，…，44，共 32 个.

1.5.06 $\frac{a}{3}$，$\frac{b}{7}$ 都是真分数，且 $\frac{a}{3}+\frac{b}{7}\approx 1.38$. 那么 $\frac{a}{b}=$ ________. （SXB 2000）

解 因为 $\frac{a}{3}+\frac{b}{7}\approx 1.38$，所以

$$1.37<\frac{a}{3}+\frac{b}{7}<1.39,$$

$$28.77<7a+3b<29.19,$$

可推知 $7a+3b=29$，解得 $a=2$，$b=5$. 所以 $\frac{a}{b}=\frac{2}{5}$.

1.5.07 一个四位数的数码都是由非零的偶数码组成，它又恰是某个偶数码组成的数的平方，则这个四位数是________. （MO 1997）

解 一个四位数是由偶数码组成的数的平方，而这个四位数都是由非零的偶数码组成，显然这个偶数码组成的数必大于 46，因为 $44\times44=1936$，$46\times46=2116$，而 $24\times24<1000$（不合题意），$42\times42=1764$（1，7 不是偶数）.

经尝试，$68^2=4624$（符合题意）.

1.5.08 有一个四位整数，在它的某位数字前面加上一个小数点，再和这个四位数相加，得数是 2000.81，求这个四位数. （H 1988）

解 注意到在原来的四位数中，一定会按顺序出现 8，1 两个数字. 小数点不可能加在个位数之前；也不可能加在千位数之前，否则原四位数只能是 8100，大于 2000.81 了.

无论小数点加在十位数还是百位数之前，所得的数都大于 1 而小于 100. 这个数加上原来的四位数等于 2000.81，所以原来的四位数一定比 2000 小，但比 1900 大，这说明它的前两个数字必然是 1，9. 由于它还有 8，1 两个连续的数字，所以只能是 1981，即 $1981+19.81=2000.81$，符合题意.

1.5.09 将 0～9 这 10 个数字填入下面的 10 个方格中，每个数字只能用一次，并让所得的和尽量接近 2004. 那么，所得的和是多少？ （HY 2004）

$$\begin{array}{r} \square \\ \square\square \\ \square\square\square \\ +\square\square\square\square \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ 6\ 8 \\ 5\ 0\ 7 \\ +\ 1\ 4\ 2\ 3 \\ \hline 2\ 0\ 0\ 7 \end{array}$$

解 因为 $0+1+2+\cdots+9=45$ 是 9 的倍数，所以和必是 9 的倍数. 又最接近 2004 的 9 的倍数是 2007，所以所得的和是 2007.

例如上式的填法.

1.5.10 已知 2 不大于 A，A 小于 B，B 不大于 7，A 和 B 都是自然数，那么 $\dfrac{A+B}{AB}$ 的最小值是________. （MO 2001）

解 因为 $2\leqslant A<B\leqslant 7$，$\dfrac{A+B}{AB}=\dfrac{A}{AB}+\dfrac{B}{AB}=\dfrac{1}{B}+\dfrac{1}{A}$，$A$ 与 B 的值越大，$\dfrac{A+B}{AB}$ 的值越小，故取 $A=6$，$B=7$. 从而最小值是 $\dfrac{6+7}{6\times 7}=\dfrac{13}{42}$.

1.5.11 15 个互不相等的自然数（不包括 0）相加，和是 2001. 将这 15 个数从小到大排列，要求第十个数尽可能大. 则第十个数最大是________. （SXB 2001）

解 要使第十个数尽可能大，前九个数应尽量小（取 1～9），后六个数应尽量接近. 后六个数的平均数是

$$[2001-(1+2+3+\cdots+9)]\div 6=326,$$

最接近的是 323，324，325，327，328，329. 所以第十个数最大是 323.

1.5.12 某同学把他最喜爱的书顺序次编号为 1，2，3，…，所有编号之和是 100 的倍数且小于 1000，则他编号的最大数是________. （MO 2002）

解法 1 设最大编号为 n，则 $1+2+\cdots+n<1000$，即

$$n(n+1)<2000.$$

因为编号之和是 100 的倍数，所以 $n(n+1)$ 是 100 的倍数，即 $n(n+1)$ 中有因数 5×5 和 2×2.

因为 $1+2+\cdots+49>1000$，即 $49\times 50>2000$，所以含有因数 5×5 的最大数只能是 25，因此另一个数应含有因数 2×2.

故 $n+1=25$，$n=24$，最大编号为 24.

解法 2 设编号的最大数是 n，则编号之和是

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}.$$

因为编号和是 100 的倍数，所以在 n 与 $(n+1)$ 中，必有一个是 25 的倍数.

若 $n=25$ 时，则 $n+1=26$，编号之和不是 100 的倍数，不合题意；

若 $n+1=25$，则 $n=24$，编号之和是 300，符合题意；

若 $n+1\geqslant 50$，编号之和都大于 1000，不合题意.

所以，$n=24$.

1.5.13 一队运动员，发给他们从 1 开始的连续自然数的号码布，一位姓金的女运动员走了，其他所有运动员的号码数相加的和再减去小金的号码数，正好是 200. 小金的号码是________. （SXB 2001）

解 设共有 n 个运动员，则 $1\sim n$ 的和是 $\frac{n(n+1)}{2}$.

由题意知，$\frac{n(n+1)}{2}>200$，即 $n(n+1)>400$，经试算得 $n\geqslant 20$. 又

$$\frac{n(n+1)}{2}-2n\leqslant 200,\text{即 } n(n-3)\leqslant 400,$$

经试算得 $n\leqslant 21$. 所以 n 只能是 20 或 21.

当 $n=20$ 时，$1\sim 20$ 的和是 210，小金的号码是 $(210-200)\div 2=5$.

当 $n=21$ 时，$1\sim 21$ 的和是 231，$(231-200)\div 2=15.5$，不合题意.

所以，小金的号码是 5 号.

1.5.14 向电脑输入汉字，每个页面最多可以输入 46 行，每行最多可输入 46 个五号字. 现在页面中有 1 个五号字，将它复制后经两次粘贴到该页面，就得到共计 3 个字；再将这 3 个字复制后粘贴两次到该页面，就得到 9 个字，每次复制和粘贴为 1 次操作，要使整个页面都排满五号字，至少需要操作________次. （N 2004）

解 每页可排 $46\times 46=2116$（个）字，每操作一次字数变为操作前的 3 倍. 经计算

$$3^6=729<2116,\ 3^7=2187>2116,$$

所以至少要操作 7 次.

1.5.15 若干人的年龄的和是 4476 岁，其中年龄最大的不超过 79 岁，最小的不低于 30 岁，而年龄相同的人不超过 3 人，这些人中至少有________位老年人.（年龄不低于 60 岁的为老年人） （MO 2001）

解 非老年人越多，老年人越少. 当 $30\sim 59$ 岁的各有 3 人时，非老年人最多，他们的年龄和为

$$(30+31+32+\cdots+59)\times 3=4005.$$

老年人的年龄和为 $4476-4005=471$(岁). 因为

$$60\times 6=360<471<79\times 6=474,$$

所以老年人至少有 6 人.

1.5.16 一位一百多岁的老寿星，公元 x^2 年时年龄为 x 岁，则此老寿星现年________岁. (MO 2001)

解 2001 年，老寿星 100 多岁，说明出生年份是 18××年. 在此后的某一年，他的年龄为 x 岁，而那一年恰是公元 x^2 年. 平方大于 1800 而小于 2001 的数在 40 与 45 之间，这就大大缩小了思考范围，再通过检验就可确定 x，进而确定老寿星的出生年份及 2001 年的岁数.

$40^2=1600$，$45^2=2025$，所以 x 应在 $41\sim 44$ 之间.

$41^2=1681$，$42^2=1764$，$43^2=1849$，$44^2=1936$.

x 显然不等于 41，42. 若 $x=43$，即 1849 年时 43 岁，则出生于 1806 年，2001 年 195 岁；若 $x=44$，即 1936 年时 44 岁，出生于 1892 年，今年 109 岁.

所以，比较合乎实际的答案是老寿星 2001 年 109 岁.

1.5.17 某厂制定的 2005 年某产品的生产计划，现有如下数据：

(1) 生产此产品的现有工人数为 400 人；

(2) 每个工人的年工时约计 2200 小时；

(3) 预测 2005 年的销售量在 10 万到 17 万箱之间；

(4) 每箱需用工 4 小时，需用料 10 千克；

(5) 目前存料 1000 吨，到 2005 年 6 月底可补充 1400 吨.

试根据上述数据确定 2005 年可能的产量，并根据产量定人数. (Z 2005)

解 按人数算，可生产

$$400\times 2200\div 4=220\,000(\text{箱})=22(\text{万箱});$$

按材料算，可生产

$$(1000+1400)\times 1000\div 10=240\,000(\text{箱})=24(\text{万箱});$$

按市场需求，最多需 17 万箱.

以上三项比较，应确定产量为 17 万箱，需工人

$$170\,000\times 4\div 2200=309\frac{1}{11}\approx 310(\text{人}).$$

1.5.18 西安市出租车车费的起步价是 3 千米以内都是 5 元，往后每增加 0.5 千米，计价器就增加 0.6 元. 现在有一人从甲地到乙地乘出租车共支付车费 12.20 元，如果这个人从甲地到乙地先步行 300 米，然后再乘出租车，也要支付车费 12.20

元. 那么坐出租车从甲地到甲、乙两地的中点需支付出租车费多少元？ (Z 2004)

解 甲、乙两地相距 $3+0.5\times(12.2-5)\div 0.6=9$(千米).

$$8.5+0.3<\text{甲、乙两地距离}\leqslant 9,$$
$$8.8<\text{甲、乙两地距离}\leqslant 9,$$
$$4.4<\frac{1}{2}\text{甲、乙两地距离}\leqslant 4.5.$$

到甲、乙两地中点需支付

$$5+0.6\times(4.5-3)\div 0.5=6.8(\text{元}).$$

1.5.19 $8.01\times 1.24+8.02\times 1.23+8.03\times 1.22$ **的整数部分是多少？** (H 1995)

解 当两个数的和不变时，两数越接近（即差越小）它们积越大. 所以

$$8.03\times 1.22<8.02\times 1.23<8.01\times 1.24.$$

从而

$$\begin{aligned}8.01\times 1.24+8.02\times 1.23+8.03\times 1.22&<8.01\times 1.24\times 3\\&<8\times 1.25\times 3=30;\\8.01\times 1.24+8.02\times 1.23\times 8.03\times 1.22&>8\times(1.24+1.23+1.22)\\&=8\times 3.69=29.52.\end{aligned}$$

所以，$8.01\times 1.24+8.02\times 1.23+8.03\times 1.22$ 的整数部分是 29.

点评 由于此题的运算不是太复杂，所以也可以通过直接“硬算”而求解.

1.5.20 $\dfrac{621^2}{739^2+358^2+947^2}+\dfrac{739^2}{621^2+358^2+947^2}+\dfrac{358^2}{621^2+739^2+947^2}+\dfrac{947^2}{621^2+358^2+739^2}$ **的整数部分＝________.** (W 2004)

解 4 个分数的分母中最小的是

$$621^2+358^2+739^2=1\,059\,926,$$

最大的是

$$621^2+739^2+947^2=1\,828\,571.$$

4 个分数的分子之和是

$$621^2+739^2+358^2+947^2=1\,956\,735.$$

原式 $<\dfrac{1\,956\,735}{1\,059\,926}<2$，原式 $>\dfrac{1\,956\,735}{1\,828\,571}>1$.

所以，原式的整数部分是 1.

1.5.21 **已知** $a=\dfrac{11\times 66+12\times 67+13\times 68+14\times 69+15\times 70}{11\times 65+12\times 66+13\times 67+14\times 68+15\times 69}\times 100$，

问：a 的整数部分是多少？ (H 1988)

解 $a=\frac{11\times66+12\times67+13\times68+14\times69+15\times70}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100$

$$=\frac{\begin{array}{c}11\times(65+1)+12\times(66+1)+13\times(67+1)\\+14\times(68+1)+15\times(69+1)\end{array}}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100$$

$$=\frac{\begin{array}{c}(11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69)\\+(11+12+13+14+15)\end{array}}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100$$

$$=\left(1+\frac{11+12+13+14+15}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\right)\times100$$

$$=100+\frac{11+12+13+14+15}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100.$$

观察 a 的第二项的分母，一方面

$11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69<11\times69+12\times69+13\times69+14\times69+15\times69$；

另一方面

$11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69>11\times65+12\times65+13\times65+14\times65+15\times65$.

由于一个正的分数，分母变小分数变大，分母变大分数变小. 所以

$$\frac{11+12+13+14+15}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100<\frac{11+12+13+14+15}{(11+12+13+14+15)\times65}\times100,$$

即

$$\frac{11+12+13+14+15}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100<\frac{100}{65};$$

同样分析可得

$$\frac{11+12+13+14+15}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100>\frac{100}{69},$$

也就是

$$\frac{100}{69}<\frac{11+12+13+14+15}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100<\frac{100}{65},$$

$100+\frac{100}{69}<100+\frac{11+12+13+14+15}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100<100+\frac{100}{65}$,

$$100+\frac{100}{69}<a<100+\frac{100}{65},$$

$$100+1\frac{31}{69}<a<100+1\frac{35}{65}.$$

所以 a 的整数部分是 101.

1.5.22 某书店对顾客实行一项优惠措施：每次买书 200 元至 499.99 元者优惠 5%；每次买书 500 元以上者(包含 500 元)优惠 10%. 某顾客到书店买了三次书，如果第一次与第二次合并一起买，比分开买便宜 13.5 元；如果三次合并一起买比三次分开买便宜 39.4 元. 已经知道第一次的书价是第三次书价的$\frac{5}{8}$，问：这位顾客第二次买了多少钱的书？　(MO 1994)

解　设第一、二、三次买书的钱数分别是 a、b、c 元.

因为三次合买比三次分开买便宜 39.4 元，比 $13.5\times2=27$(元)还多，所以 $c<500$，并且 $a+b<500$.

第一、二次中，每次买的钱数至多获得 5% 的优惠，但是只有原来少于 200 元，合买后超过 200 元才能得 5% 的优惠，每次买的钱数，能得的优惠少于 10 元，现在得 13.5 元的优惠，因此第一、二次每次买的钱数都少于 200 元，而

$$a+b=13.5\div5\%=270(\text{元}).$$

只有三次合买 $a+b+c>500$，合买后才能得更多的优惠，因此

$$c=(39.4-13.5\times2)\div5\%=248(\text{元}).$$

而
$$a=248\times\frac{5}{8}=155(\text{元}),$$

因此
$$b=270-155=115(\text{元}).$$

第二次买了 115 元的书.

点评　本题在计算之前，要先经过一些推理，确定买东西用钱数的大致范围，才能知道得到的优惠所占的百分数.

1.5.23 (1) 要求写出一个既约分数，分子是偶数，并且这个分数与$\frac{5}{47}$的差小于 0.000 000 1. 那么这个分数可以是________；

(2) 要求写出一个既约分数，分子是偶数，并且这个分数与$\frac{5}{48}$的差小于 0.000 000 1. 那么这个分数可以是________.　(N 2002)

解　答案不唯一，下面给出一个解：

(1) 因为 $3^{15}=14\ 348\ 907>10^7$，所以$\frac{1}{3^{15}}<0.000\ 000\ 1$，$\frac{5}{47}+\frac{1}{3^{15}}=\frac{5\times3^{15}+47}{47\times3^{15}}$与$\frac{5}{47}$的差等于$\frac{1}{3^{15}}$，小于 0.000 000 1，而且分子是偶数，由于 3，47 都不能整除分子，所以此分数是既约分数，符合题目要求；

(2) $\frac{5}{48}=\frac{5}{2^4\times 3}=\frac{2^{20}\times 5}{2^{4+20}\times 3}$,它与$\frac{2^{20}\times 5}{(2^{4+20}+1)\times 3}$的差为

$$\frac{2^{20}\times 5}{3}\left(\frac{1}{2^{24}}-\frac{1}{2^{24}+1}\right)$$
$$=\frac{2^{20}\times 5}{3}\times\frac{1}{2^{24}\times(2^{24}+1)}$$
$$=\frac{5}{3\times 2^4\times(2^{24}+1)}=\frac{5}{48\times(2^{24}+1)}.$$

因为$2^{24}+1=16\,777\,217>10^7$,所以$\frac{5}{48}$与$\frac{2^{20}\times 5}{(2^{4+20}+1)\times 3}$的差小于$\frac{1}{10^7}=0.000\,000\,1$. 分数$\frac{2^{20}\times 5}{(2^{4+20}+1)\times 3}$中,2 与 5 都不能整除分母,所以此分数是既约分数,且分子是偶数,符合题目要求.

1.6 分数的分拆

1.6.01 分数$\frac{37}{13}$可写成 $2+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}}$ 的形式,则 $x=$ ________, $y=$ ________, $z=$ ________. (M 2005)

解 $\frac{37}{13}=2+\frac{11}{13}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{11}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2}}}$,则 $x=1$,$y=5$,$z=2$.

1.6.02 古埃及人看待分数的方式和我们现在颇有不同,对于他们来说,$\frac{3}{4}$还只是一个不完整的分数. 他们相信,除了$\frac{2}{3}$外,所有的分数都是一系列单位分数(即所有分子为 1 的分数,如$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$等等)的和.

例如:$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$,而$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$.

下面的这道题,就是请你用两个单位分数来表示一个分数:

如果$\frac{2}{103}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$且 x 和 y 均是自然数,$x\neq y$,那么 $x=$ ________ 和 $y=$ ________;$x=$ ________ 和 $y=$ ________. (M 2005)

解 $\frac{2}{103}=\frac{2\times(103+1)}{103\times(103+1)}=\frac{2\times 103+2}{103\times 104}=\frac{2\times 103}{103\times 104}+\frac{2}{103\times 104}=\frac{1}{52}+\frac{1}{5356}$,所以 $x=52$, $y=5356$;或 $x=5356$, $y=52$.

1.6.03 在等式 $\frac{1}{10}=\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}$ 中，(   )内的两个不同自然数可以是________和________(填一组即可). (X 2005)

解 10的约数有1，2，5，10，两两互质的有下面四组：

$$1,\ 2;\ 1,\ 5;\ 1,\ 10;\ 2,\ 5.$$

每组可得到一组解：

$$\frac{1}{10}=\frac{1+2}{10(1+2)}=\frac{1}{10(1+2)}+\frac{2}{10(1+2)}=\frac{1}{30}+\frac{1}{15};$$
$$\frac{1}{10}=\frac{1+5}{10(1+5)}=\frac{1}{10(1+5)}+\frac{5}{10(1+5)}=\frac{1}{60}+\frac{1}{12};$$
$$\frac{1}{10}=\frac{1+10}{10(1+10)}=\frac{1}{10(1+10)}+\frac{10}{10(1+10)}=\frac{1}{110}+\frac{1}{11};$$
$$\frac{1}{10}=\frac{2+5}{10(2+5)}=\frac{2}{10(2+5)}+\frac{5}{10(2+5)}=\frac{1}{35}+\frac{1}{14}.$$

1.6.04 已知两个不同的单位分数之和是$\frac{1}{12}$，则这两个单位分数之差(较大分数为被减数)的最小值是________. (MO 1997)

解 要使两个单位分数之差最小，那么这两个分数应最接近. 12的两个约数中最接近的是3和4，可把$\frac{1}{12}$拆成两个最接近的单位分数之和为

$$\frac{1}{12}=\frac{1\times(3+4)}{12\times(3+4)}=\frac{3}{12\times7}+\frac{4}{12\times7}=\frac{1}{28}+\frac{1}{21},$$
$$\frac{1}{21}-\frac{1}{28}=\frac{1}{84}.$$

1.6.05 在算式

$$\frac{1}{18}+\frac{1}{\bigcirc}+\frac{1}{\square}+\frac{1}{\triangle}=1$$

中，符号○、□、△分别代表三个不同的自然数. 这三个数的和是________. (P 1987)

解 已知 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$，一种很自然的想法：能否把$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$这三个单位分数之一，变成$\frac{1}{18}$与另一个单位分数之和？

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{18}=\frac{4}{9},\ \frac{1}{3}-\frac{1}{18}=\frac{5}{18},\ \frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{1}{9}.$$

只有$\frac{1}{6}$能写成$\frac{1}{18}$与另一单位分数$\frac{1}{9}$之和,也就是

$$\frac{1}{18}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=1.$$

所以□、○、△这三个数之和是

$$2+3+9=14.$$

1.6.06 $\frac{1}{2001}=\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}$,请找出 4 个不同的自然数,分别填入 4 个(　　)中,使这个等式成立.　(H 2001)

解　本题是开放性问题,解答不唯一. 注意到 $\frac{1}{2001}=\frac{1}{2001}\times 1$,而

$$\begin{aligned}1&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{2001}&=\frac{1}{2001}\times 1=\frac{1}{2001}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)\\&=\frac{1}{4002}+\frac{1}{8004}+\frac{1}{12\,006}+\frac{1}{24\,012}.\end{aligned}$$

若注意到 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$,可得

$\frac{1}{2001}=\frac{1}{4002}+\frac{1}{6003}+\frac{1}{16\,008}+\frac{1}{48\,024}$ 也是一解.

1.6.07 四个连续的自然数的倒数之和等于$\frac{19}{20}$,则这四个自然数两两乘积的和等于________.　(MO 2001)

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{19}{20}$,这四个自然数是 3,4,5,6. 它们两两乘积的和为

$$3\times(4+5+6)+4\times(5+6)+5\times 6=119.$$

1.6.08 把$\frac{16}{29}$表示成最少的几个分子为 1、分母尽可能小且互不相同的分数的和,则$\frac{16}{29}=$________.　(MO 2002)

解　因为 $\frac{16}{29}=\frac{1}{2}+\frac{3}{58}$,且$\frac{3}{58}=\frac{1.5}{29}=\frac{1}{29}+\frac{1}{58}$,所以

$$\frac{16}{29}=\frac{1}{2}+\frac{1}{29}+\frac{1}{58}.$$

1.6.09 若四个两两不同的自然数的倒数之和为 1,则这样的自然数组(次序不同认为是同样的)共有________组. (W 2005)

解 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$,

共有 6 组.

1.6.10 把$\frac{1}{28}$表示为两个不同的单位分数之和,那么共有________种不同的表示方法(仅求和次序不同视为一种). (W 2000)

解 $\frac{1}{28}=\frac{1}{29}+\frac{1}{812}=\frac{1}{30}+\frac{1}{420}=\frac{1}{32}+\frac{1}{224}=\frac{1}{35}+\frac{1}{140}$

$=\frac{1}{36}+\frac{1}{126}=\frac{1}{42}+\frac{1}{84}=\frac{1}{44}+\frac{1}{77}$,

共有 7 种.

1.6.11 在下式的○和□中,分别填入适当的自然数,使等式成立:

$$\frac{1}{\bigcirc}+\frac{7}{\square}=\frac{13}{15},$$

则□中应填________. (P 1988)

解 我们用 A 和 B 分别表示○和□中填的数,那么 A 和 B 的最小公倍数将是 15 的倍数,并且 B 比 7 大.

如果 A 和 B 的最小公倍数是 15,B 是 15 的约数,又要比 7 大,那么只有 $B=15$. 可是

$$\frac{1}{A}=\frac{13}{15}-\frac{7}{15}=\frac{2}{5}$$

不是分子为 1 的单位分数,也就是找不到合适的 A.

现在,A 和 B 的最小公倍数,必须是 30, 45, 60, … 中的一个数. 从上面算式可以看出,如果 B 大于 15,那么$\frac{1}{A}$就要比$\frac{2}{5}$大. 比$\frac{2}{5}$大的单位分数只有一个$\frac{1}{2}$,可是$\frac{7}{B}=\frac{13}{15}-\frac{1}{2}=\frac{11}{30}$. 也找不到合适的 B,因此 B 不能大于 15.

假设 B 是 30, 45, 60, … 中某一数的约数,又要比 7 大,比 15 小,经试验,只有 $B=10$. 因此

$$\frac{1}{A}=\frac{13}{15}-\frac{7}{10}=\frac{1}{6},$$

就有 $A=6$.

故□中只能填 10.

1.6.12 下列算式中，所有分母都是四位数，请在每个方格中各填入一个数字，使等式成立. （H 1988）

$$\frac{1}{\square\square\square\square}+\frac{1}{1988}=\frac{1}{\square\square\square\square}$$

解　自然的想法是将 1988 这个数做质因数分解：

$$1988=2\times2\times7\times71.$$

先用 1988 的约数来代替 1988，试着找一组解，然后再将分母都乘以适当的倍数，检查一下是否都是四位数就行了.

例如：1988 的质因数分解中有约数 4，很容易看出：

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}.$$

由于 $1988=2\times2\times7\times71=4\times497$，所以，将上面等式的两边均乘上 $\frac{1}{497}$，就得

$$\frac{1}{12\times497}+\frac{1}{4\times497}=\frac{1}{3\times497},$$

即
$$\frac{1}{5964}+\frac{1}{1988}=\frac{1}{1491}.$$

这样就给出了一组适合条件的解.

点评　再如，

$$\begin{aligned}1988&=2\times2\times7\times71\\&=(2\times7)\times(2\times71)\\&=14\times142,\end{aligned}$$

而且有 $\frac{1}{35}+\frac{1}{14}=\frac{1}{10}$，两边同乘以 $\frac{1}{142}$，就得

$$\frac{1}{35\times142}+\frac{1}{14\times142}=\frac{1}{10\times142},$$

即
$$\frac{1}{4970}+\frac{1}{1988}=\frac{1}{1420}.$$

这就给出了另一组解.

1.6.13 写出两组满足条件 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2001}$（$a$、$b$ 为不相等的两个四位数）的 a、b 的值. （SXB 2001）

$\begin{cases} a= \\ b= \end{cases}$ $\qquad\qquad$ $\begin{cases} a= \\ b= \end{cases}$

解 $2001=1\times3\times23\times29$，只要用 2001 的两个不同的约数作分子，它们的和与 2001 的乘积作分母，即可求得一组解.

例如，取 2001 的两个不同的约数 x 和 y，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2001}&=\frac{x+y}{2001(x+y)}=\frac{x}{2001(x+y)}+\frac{y}{2001(x+y)}\\&=\frac{1}{\frac{2001}{x}(x+y)}+\frac{1}{\frac{2001}{y}(x+y)}.\end{aligned}$$

因为 x、y 是 2001 的约数，所以 $\frac{2001}{x}$、$\frac{2001}{y}$ 都是整数，所以

$$\begin{cases} a=\dfrac{2001(x+y)}{x}, \\ b=\dfrac{2001(x+y)}{y}, \end{cases} \qquad ①$$

是一组解.

因为 a、b 都大于 2001，所以要保证 a、b 都是四位数，a、b 之比应小于 5，即 x、y 之比应小于 5. 2001 的两个互质且其比小于 5 的约数有下面 4 组：

$$(1,3)\quad(23,29)\quad(23,87)\quad(29,69)$$

依次取 x、y 为上面数对中的数，代入①式，可得 a、b 有 4 组解：

$$\begin{cases}2668,\\8004;\end{cases}\quad\begin{cases}3588,\\4524;\end{cases}\quad\begin{cases}2530,\\9570;\end{cases}\quad\begin{cases}2842,\\6762.\end{cases}$$

1.6.14 若 $\frac{1}{2004}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，其中 a、b 都是四位数，且 $a<b$，那么满足上述条件的所有数对 (a, b) 是________________. （W 2004）

解 $2004=2\times2\times3\times167$.

因为 a 与 b 都是 4 位数，所以 a 与 b 之比小于 5. 在 2004 的所有约数中，两个不同约数之比小于 4 的最简比只有

$$1:2,\ 1:3,\ 2:3,\ 3:4.$$

所以满足题意的拆分有

$$\frac{1}{2004}=\frac{1}{\frac{2004}{1}\times(1+2)}+\frac{1}{\frac{2004}{2}\times(1+2)}=\frac{1}{6012}+\frac{1}{3006},$$

$$\frac{1}{2004}=\frac{1}{\frac{2004}{1}\times(1+3)}+\frac{1}{\frac{2004}{3}\times(1+3)}=\frac{1}{8016}+\frac{1}{2672},$$

$$\frac{1}{2004}=\frac{1}{\frac{2004}{2}\times(2+3)}+\frac{1}{\frac{2004}{3}\times(2+3)}=\frac{1}{5010}+\frac{1}{3340},$$

$$\frac{1}{2004}=\frac{1}{\frac{2004}{3}\times(3+4)}+\frac{1}{\frac{2004}{4}\times(3+4)}=\frac{1}{4676}+\frac{1}{3507}.$$

1.6.15 已知等式 $\frac{1}{15}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$，其中 A、B 是正整数，求 $A+B$ 的最大值.
(H 2005)

解　$\frac{1}{15}=\frac{1}{60}+\frac{1}{20}=\frac{1}{90}+\frac{1}{18}=\frac{1}{240}+\frac{1}{16}=\frac{1}{30}+\frac{1}{30}=\frac{1}{40}+\frac{1}{24}$.

由上式可得，$(A+B)$ 的最大值是 $240+16=256$.

1.6.16 黑板上写有三个最简真分数，它们的和等于 1，分子各不相同. 如果把分子分母都颠倒过来，那么所得三个分数之和是一个自然数. 试举出这样三个分数的实例.　(ARO 2004)

解　这是可能的，例如 $\frac{2}{11}$，$\frac{3}{11}$ 及 $\frac{6}{11}$.

事实上 $\frac{2}{11}+\frac{3}{11}+\frac{6}{11}=1$，而 $\frac{11}{2}+\frac{11}{3}+\frac{11}{6}=11$.

1.6.17 有 11 根一样长的糖棍，把一根糖棍切开，必须等分成若干份. 例如：把一根糖棍切 3 刀，可以分成相等的 4 份. 如果有 12 人要均分这些糖棍，最少要切________刀.(不能把两根或多根糖棍并在一起切)　(W 1995)

解　因为每根糖棍都是等分成若干段，故每个人得到的都是若干个分子是 1 的真分数之和. 由于 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<\frac{11}{12}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$，所以每个人至少要分到 3 段. 而

$$\frac{11}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12},$$

我们可以取一根糖棍等分成 12 份，每人分一段；再取 6 根糖棍各等分成 2 份，每人分一段；最后剩下 4 根糖棍各等分成 3 份，每人分一段. 这样每人都刚好分得 $\frac{11}{12}$.

由于每切一刀就增加一段，原来共有 11 段，现在有 $12\times3=36$(段)，所以一共切了 $36-11=25$(刀).

1.7 定义新运算

1.7.01 **设** $a*b$ **表示** $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{2}$，**计算**：$(1992*996)*(996*498)=$ ______. (MO 2005)

解 $(1992*996)*(996*498)$

$$=\left(\frac{1992}{996}+\frac{996}{1992}+\frac{1}{2}\right)*\left(\frac{996}{498}+\frac{498}{996}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=3*3=\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}.$$

1.7.02 **规定**：③$=2\times3\times4$，④$=3\times4\times5$，⑤$=4\times5\times6$，…，⑩$=9\times10\times11$，…；**如果** $\frac{1}{⑯}-\frac{1}{⑰}=\frac{1}{⑰}\times\square$，**那么**$\square$**代表的数是** ______. (MO 1996)

解 $\square=\frac{⑰}{⑯}-1=\frac{16\times17\times18}{15\times16\times17}-1=\frac{1}{5}.$

1.7.03 **如果** $a\square=a\times(a+1)$，$a\square\square=a\square\times(a\square+1)$，…，**那么** $1\square\square\square=$ ______. (X 2004)

解 **因为** $1\square=1\times(1+1)=2$，

$1\square\square=1\square\times(1\square+1)=2\times(2+1)=6$，

所以 $1\square\square\square=1\square\square\times(1\square\square+1)=6\times(6+1)=42.$

1.7.04 **如果** $A◆B=\frac{B-A}{A\times B}$，**那么**

$1◆2-2◆3-3◆4-\cdots-2002◆2003-2003◆2004=$ ______. (X 2004)

解 **因为** $A◆B=\frac{B-A}{A\times B}=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}$，**所以**

$1◆2-2◆3-3◆4-\cdots-2002◆2003-2003◆2004$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2002}-\frac{1}{2003}\right)-\left(\frac{1}{2003}-\frac{1}{2004}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2002}+\frac{1}{2003}-\frac{1}{2003}+\frac{1}{2004}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2002}+\left(\frac{1}{2003}-\frac{1}{2003}\right)+\frac{1}{2004}$$

$$=\frac{1}{2004}.$$

1.7.05 如果 $5*2=5+6=11$，$6*3=6+7+8=21$，那么 $1*9+2*9+3*9+\cdots+9*9=$ ________.　　(HK 2006)

解 $1*9=1+2+\cdots+8+9=45$，

$2*9=2+3+\cdots+9+10=54$，

$3*9=3+4+\cdots+10+11=63$，

……

$9*9=9+10+\cdots+16+17=117$；

原式 $=45+54+63+\cdots+117=\dfrac{45+117}{2}\times 9=729$.

1.7.06 观察 $5*2=5+55=60$，$7*4=7+77+777+7777=8638$，推知 $9*5$ 值是________.　　(X 2003)

解
$$\begin{aligned}9*5&=9+99+999+9999+99\,999\\&=(10-1)+(100-1)+(1000-1)+(10\,000-1)+(100\,000-1)\\&=(10+100+1000+10\,000+100\,000)-5\\&=111\,110-5=111\,105.\end{aligned}$$

1.7.07 对于正整数 a 与 b，规定

$$a*b=a\times(a+1)\times(a+2)\times\cdots\times(a+b-1).$$

如果 $(x*3)*2=3660$，那么 $x=$ ________.　　(MO 2005)

解 设 $x*3=a$，

$$a*2=a(a+1)=3660=60\times 61,$$

所以 $a=60$.

$$x*3=x(x+1)(x+2)=60=3\times 4\times 5,$$

所以 $x=3$.

1.7.08 用 $\{a\}$ 表示 a 的小数部分，$[a]$ 表示不超过 a 的最大整数. 例如：

$$\{0.3\}=0.3,\ [0.3]=0;\ \{4.5\}=0.5,\ [4.5]=4.$$

记 $f(x)=\dfrac{x+2}{2x+1}$，请计算 $\left\{f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right\}$，$\left[f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right]$；$\{f(1)\}$，$[f(1)]$ 的值.
(X 2004)

解 由 $f(x)=\dfrac{x+2}{2x+1}$，得

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\frac{1}{3}+2}{2\times\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{7}{5}=1.4,$$

$$f(1)=\frac{1+2}{2\times1+1}=1.$$

由$\{a\}$表示a的小数部分，$[a]$表示不超过a的最大整数，得

$$\left\{f\left(\frac{1}{3}\right)\right\}=\{1.4\}=0.4,$$

$$\left[f\left(\frac{1}{3}\right)\right]=[1.4]=1;$$

$$\{f(1)\}=\{1\}=0,$$

$$[f(1)]=[1]=1.$$

1.7.09 我们规定，符号"$\circ$"代表选择两数中较大数的运算，例如：$3.5\circ2.9=2.9\circ3.5=3.5$，符号"$\triangle$"表示选择两数中较小数的运算，例如：$3.5\triangle2.9=2.9\triangle3.5=2.9$. 请计算：$\dfrac{\left(0.625\triangle\dfrac{23}{33}\right)\times\left(\dfrac{155}{384}\circ0.4\right)}{\left(\dfrac{1}{3}\circ0.3\right)+\left(\dfrac{235}{104}\triangle2.25\right)}=$________. (MO 1995)

解 原式$=\dfrac{0.625\times\dfrac{155}{384}}{\dfrac{1}{3}+2.25}=\dfrac{\dfrac{5}{8}\times\dfrac{155}{384}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{9}{4}}$

$$=\frac{5}{8}\times\frac{155}{384}\times\frac{12}{31}=\frac{25}{256}.$$

1.7.10 定义$*$运算如下：对两个自然数a和b，它们的最小公倍数与最大公约数的差记为$a*b$. 计算：$10*14=$________. (HK 2006)

解 10和14的最小公倍数为70，最大公约数为2，所以$10*14=70-2=68$.

1.7.11 设M、N都是自然数，记P_M是自然数M的各位数字之和，P_N是自然数N的各位数字之和. 又记$M*N$是M除以N的余数. 已知$M+N=4084$，那么$(P_M+P_N)*9$的值是________. (MO 2005)

解 如果在$(M+N)$的过程中没有进位，则$(M+N)$的各位数字之和就等于M的各位数字之和加N的各位数字之和，即$P_{M+N}=P_M+P_N$；如果在$(M+N)$的过程中进位K次(K为自然数)，则$P_{M+N}=P_M+P_N-9K$. 也就是说，P_{M+N}与(P_M+P_N)除以9的余数相同. 又因为$(M+N)$与P_{M+N}除以9的余数相同，所以(P_M+P_N)与$(M+N)=4084$除以9的余数相同，即

$$(P_M+P_N)*9=(M+N)*9=4084*9=7.$$

1.7.12 如果a、b、c是3个整数，则它们满足加法交换律和结合律，即

(1) $a+b=b+a$；

(2) $(a+b)+c=a+(b+c)$.

现在规定一种运算"$*$"，它对于整数 a、b、c、d 满足：

$$(a, b)*(c, d)=(a\times c+b\times d, a\times c-b\times d).$$

例：$(4, 3)*(7, 5)=(4\times 7+3\times 5, 4\times 7-3\times 5)=(43, 13)$.

请你举例说明，"$*$"运算是否满足交换律，结合律. (X 2003)

解 (1) **因为** $(7, 5)*(4, 3)=(7\times 4+5\times 3, 7\times 4-5\times 3)$

$$=(4\times 7+3\times 5, 4\times 7-3\times 5)$$

$$=(4, 3)*(7, 5).$$

所以"$*$"运算满足交换律.

(2) **因为** $(4, 3)*(7, 5)=(43, 13)$，**所以**

$$[(4, 3)*(7, 5)]*(2, 1)=(43, 13)*(2, 1)$$

$$=(43\times 2+13\times 1, 43\times 2-13\times 1)$$

$$=(99, 73),$$

而 $(4, 3)*[(7, 5)*(2, 1)]=(4, 3)*(7\times 2+5\times 1, 7\times 2-5\times 1)$

$$=(4, 3)*(19, 9)$$

$$=(4\times 19+3\times 9, 4\times 19-3\times 9)$$

$$=(103, 49)\neq(99, 73).$$

所以"$*$"运算不满足结合律.

1.7.13 **羊和狼在一起时，狼要吃掉羊. 所以关于羊和狼，我们规定一种运算，用符号△表示：**

羊△羊＝羊；羊△狼＝狼；狼△羊＝狼；狼△狼＝狼.

以上运算的意思是：羊与羊在一起还是羊，狼与狼在一起还是狼，但是狼与羊在一起便只剩下狼了.

小朋友总是希望羊能战胜狼. 所以我们规定另一种运算，用符号☆表示：

羊☆羊＝羊；羊☆狼＝羊；狼☆羊＝羊；狼☆狼＝狼.

这个运算的意思是：羊与羊在一起还是羊，狼与狼在一起还是狼，但由于羊能战胜狼，当狼与羊在一起时，它便被羊赶走而只剩下羊了.

对羊或狼，可以用上面规定的运算作混合运算，混合运算的法规是从左到右，括号内先算. 运算的结果或是羊、或是狼.

求：羊△(狼☆羊)☆羊△(狼△狼)＝________. (H 1995)

解 **依法则，原式＝羊△羊☆羊△狼＝羊☆羊△狼＝羊△狼＝狼.**

1.7.14 **如图** 2，**一只甲虫从画有方格的木板上的** A **点出发，沿着一段一段的横线、竖线爬行到** B **点. 图** 1 **中的路线对应下面的算式：**

$$1-2+1+2+2-1+2+1=6.$$

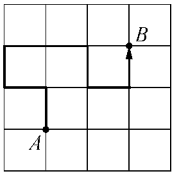


图 1

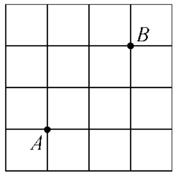


图 2

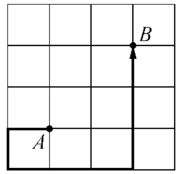


图 3

请在图 2 中用粗线画出对应于算式 $-2-1+2+2+2+1+1+1$ 的路线.
(X 2003)

解 如图 3 所示,向上前进一格要加上 1,向下前进一格要减去 1,向左前进一格要减去 2,向右前进一格要加上 2.

1.7.15 在计算机中,对于如图 1、图 2 中的数据(或运算)的读法规则是:先读第一分支圆圈中的,再读与它相连的第二分支左边的圆圈中的,最后读与它相连的第二分支右边的圆圈中的. 也就是说,对于每一个圆圈中的数据(或运算)都是按"中→左→右"的顺序. 如:图 1 表示:$2+3$;图 2 表示:$2+3\times2-1$. 则图 3 表示的式子的运算结果是________. (X 2003)

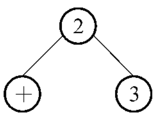


图 1

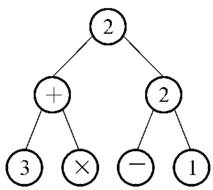


图 2

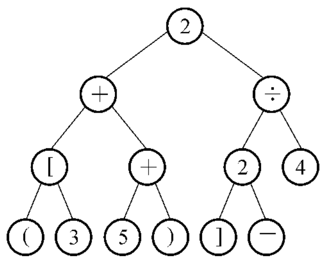
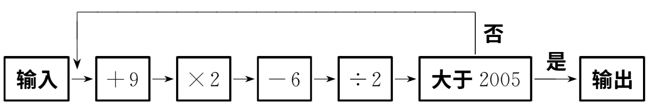


图 3

解 图 3 表示 $2+[(3+5)\div2]-4$,结果为 2.

1.7.16 如图是计算机的某个计算程序,当输入数据后,计算机会按照既定程序,从左到右进行运算. 如果输入数字 5,那么输出的数字是多少? (SXB 2005)



解 设一开始输入 A,到条件语句 $\boxed{\text{大于 } 2005}$,其中的运算过程如下:

$$[(A+9)\times 2-6]\div 2=(A+9)-3=A+6.$$

问题可变为：一开始输入 5，每次加 6，求第一次大于 2005 的结果. 所以，输出的数字是

$$5+6\times 334=2009.$$

1.7.17 有一台计算器，只有两个运算键，红键将给的数乘以 2，黄键将给的数的最后一个数字去掉. 比如，给出 234，按红键得 468，按黄键得 23. 如果开始给的数是 8，为了得到数 17，那么按若干次红键外，至少要按黄键________次.　（MO 2004）

解　用→表示按红键，⇒表示按黄键. 下面是一种得到 17 的方式：

$$\begin{aligned}&8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow 64\rightarrow 128\Rightarrow 12\rightarrow 24\rightarrow 48\rightarrow 96\\&\Rightarrow 9\rightarrow 18\rightarrow 36\rightarrow 72\Rightarrow 7\rightarrow 14\rightarrow 28\rightarrow 56\rightarrow 112\\&\Rightarrow 11\rightarrow 22\rightarrow 44\rightarrow 88\rightarrow 176\Rightarrow 17.\end{aligned}$$

1.7.18 一台计算器大部分按键失灵，只有数字“7”和“0”，以及加法键“+”尚能使用. 因此可以输入 77，707 这样只含数字 7 和 0 的数，并且进行加法运算. 为了显示出 222 222，那么最少要按“7”键________次.　（B 1997）

解　因为个位是 2，所以个位上要按 6 次“7”，此时向十位进 4，再考虑十位是 2，所以十位要按 4 次“7”，依次类推，百位、千位、万位上依次要按 7 次、1 次、3 次“7”. 共按键 6+4+7+1+3=21(次).

1.7.19 在二进制数中，

1_2 表示 1；10_2 表示 2；11_2 表示 3；

100_2 表示 4；101_2 表示 5；……

那么在六进制数中，1111_6 所表示的十进制数为________.　（MO 2005）

解　$1111_6=6^3+6^2+6^1+6^0=216+36+6+1=259.$

1.7.20 从 5 个互不相等的正整数中任意取 2 个、3 个、4 个分别相加，所得的和都称为部分和. 为方便起见，将这 5 个正整数本身也称为部分和. 现有 5 个互不相等的正整数，它们的和是 31，它们的部分和互不相等.

(1) 其中最大的一个部分和是________；

(2) 这 5 个正整数分别是________，________，________，________，________.（SXB 2002）

解　由二进制数与十进制数的一一对应知，1，2，4，8，16 的部分和互不相等.

(1) 最大的部分和为

$$16+8+4+2=30;$$

(2) 这 5 个正整数分别是 1，2，4，8，16.

第二章　智 巧 趣 题

2.1　算式填数

2.1.01 如果 $10+9+8\times 7\div\square+6-5\times 4-3\times 2=1$，那么 $\square=$ ________.（HK 2006）

解　能计算的部分先计算，原式可化简为

$$19+56\div\square-20=1,$$
$$56\div\square=2,$$
$$\square=28.$$

2.1.02 要使算式 $\left(\frac{7}{12}-\frac{1}{4}\right)\div\frac{5}{12}-\left(\square-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{5}$ 成立，$\square$内应填的数是 ________.　（MO 1994）

解　由 $\left(\frac{7}{12}-\frac{1}{4}\right)\div\frac{5}{12}=\frac{4}{5}$，算式就可写成

$$\frac{4}{5}-\left(\square-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{5},$$

也就是

$$\square-\frac{2}{3}=\frac{3}{5},$$
$$\square=\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=1\frac{4}{15}.$$

故$\square$内应填的数是 $1\frac{4}{15}$.

点评　　甲数－乙数＝丙数，

相当于　　甲数－丙数＝乙数，

或　　甲数＝乙数＋丙数.

2.1.03 要使算式 $\frac{7}{8}\times\left(\square-\frac{3}{7}\right)\div 0.625+0.2=1$ 成立，$\square$内应填的数是 ________.　（MO 1994）

解　原算式可逐步演变为

$$\frac{7}{8}\times\left(\square-\frac{3}{7}\right)\div 0.625=1-0.2,$$

学奥数

这里总有一本适合你

华东师范大学出版社

学奥数，这里总有一本适合你

2000 年华东师范大学出版社出版了《奥数教程》丛书，首次在书名中使用“奥数”一词。《奥数教程》由国家集训队教练组执笔联合编写，获得第十届全国教育图书展优秀畅销图书奖，深受读者喜爱，被奉为经典奥数蓝皮书。

自《奥数教程》出版以来，华东师范大学出版社聚集国内最顶尖的作者团队，陆续为不同层次、不同需求的读者打造了近 200 种奥数图书，形成多品种、多层次、全系列的格局，“奥数”图书累计销量超 1000 万册，由此奠定了奥数品牌出版社的地位。

“奥数”入门篇——《从课本到奥数》（1-9 年级）A、B 版

“奥数”智优篇——《优等生数学》（1-9 年级）

“奥数”辅导篇——《奥数教程》、《学习手册》、《能力测试》（一至高三年级）

“奥数”小学顶级篇——《高思学校竞赛数学课本》、《高思学校竞赛数学导引》

“奥数”专题篇——《数学奥林匹克小丛书》（小学、初中、高中共 30 种）

“奥数”题库篇——《多功能题典 数学竞赛》（小学、初中、高中共 3 种）

“奥数”高中预赛篇——《高中数学联赛备考手册（预赛试题集锦）》

“奥数”联赛冲刺篇——《高（初）中数学联赛考前辅导》

“奥数”IMO 终极篇——《走向 IMO：数学奥林匹克试题集锦》

“奥数”域外篇——《日本小学数学奥林匹克》、《全俄中学生数学奥林匹克》