出 版 说 明

为了满足广大中学生学习数学和中学数学教师教学参考的需要，我们邀请湖北省暨武汉市数学会组织编写了这套《中学数学》：《代数解题引导》、《初等几何解题引导》、《解析几何解题引导》、《三角解题引导》和《国际数学竞赛试题讲解》（Ⅰ、Ⅱ）．

今后，我们将组织力量继续编写适合中学生课外学习和中学教师教学参考的读物．希望这套书和广大读者见面以后，能听到各方面的热情批评和建议，以便我们进一步修订，使其日臻完善．

一九八二年三月

目　录

第一章　中学平面几何概述

什么叫平面几何学？平面上适合某种条件的点的集合，叫平面图形；研究平面图形的形状、大小和相互间的位置关系的数学分科，叫平面几何学.

§1. 相交线与平行线

一、直　线

直线是原始概念，不定义，可作如下描述：直线是客观世界中很直很直的线的抽象，无粗细，可向两边无限延伸.

直线的基本性质：两点确定一条直线.

定义 1　在直线上某一点一旁的部分叫做射线，这一点叫射线的端点.

定义 2　直线上任意两点间的部分叫做线段，这两点叫线段的端点.

线段的基本性质：在所有连结两点的线中，线段最短．这线段的长叫这两点间的距离.

二、两直线的位置关系

(1) 有两公共点——重合；

(2) 有一公共点——相交；

(3) 没有公共点——平行.

三、角

1. 定义 从一点引出的两条射线所组成的图形叫做角. 或者说，把一条射线 OA，绕着它的端点 O，从原来的位置 OA 旋转到另一个位置 OB，这时 OA 和 OB 就生成了一个角. OA 叫始边，OB 叫终边，O 叫顶点，旋转方向是逆时针方向生成正角，顺时针方向生成负角. 记为 $\angle AOB$.

OA 沿逆时针方向转一圈回到原来的位置，生成的角叫做周角.

2. 角的度量

1）角度制：以周角的 $\frac{1}{360}$ 为一度；

2）弧度制：以所对弧长等于半径的圆心角为 1 弧度；

3）互换公式：π 弧度 $=180^\circ$；

4）弧长、半径、圆心角三者之间的关系：$l=\alpha R$.

3. 几类角 平角 $=180^\circ$；直角 $=90^\circ$；$0^\circ<$ 锐角 $<90^\circ$；$90^\circ<$ 钝角 $<180^\circ$.

4. 余角和补角 两角和等于 90°，那么这两个角叫做互余；两角和等于 180°，那么这两个角叫做互补.

5. 角平分线 由顶点出发，将角分成二等分的射线叫角平分线. 它是到角两边等距离的点的集合.

6. 定理 对顶角相等.

四、两直线垂直

1. 定义 若二直线相交成直角，则称二直线互相垂直. 其中一条是另一条的垂线. 交点叫垂足.

2. 垂线的基本性质 过一点可以作一条且只可以作一条

直线与已知直线垂直.

3. 点到直线的距离 从直线外一点到这条直线上各点所连的线段中，和这条直线垂直的线段最短. 称它的长度为这点到这直线的距离. 也叫这点到这直线的垂线的长.

4. 斜线长与射影 从直线外一点向直线引垂线与斜线，斜线与直线的交点叫斜足，这点到斜足的距离叫斜线的长，垂足与斜足间的线段叫斜线在直线上的射影.

5. 斜线长定理 从直线外一点向直线引垂线与斜线，射影长的相应的斜线也长，射影相等的相应的斜线长也相等，射影短的相应的斜线也短；反过来也一样.

6. 垂直平分线 过线段的中点且与线段垂直的直线叫线段的垂直平分线. 它是到线段两端等距离的点的集合.

五、平行线

1. 定义 在同一平面内不相交的两条直线叫做平行线.

2. 基本性质 过直线外一点可以作一条且只可以作一条直线与已知直线平行.

3. 判定方法

1）两直线被第三直线所截，若同位角相等，或内错角相等，或同旁内角互补，则二直线平行；

2）两直线同平行于第三直线，则此二直线平行；

3）两直线同垂直于第三直线，则此二直线平行；

4）一直线上的任意两点到另一直线的距离相等，则此二直线平行.

4. 平行线的性质

1）两直线平行，则同位角相等，内错角相等，同旁内角互补；

2）两直线平行，则平行于其中一条的直线必平行于另一条；

3）两直线平行，则垂直于其中一条的直线必垂直于另一条；

4）两直线平行，则夹在其间的平行线段相等.

习 题 一

1．一边公用，另一边互为延长线的两个角叫邻补角．试证：互为邻补角的两条角平分线互相垂直.

2．试证：一个角的平分线的反向延长线是这个角的对顶角的平分线.

3．在$\angle AEC$（小于平角）的两边上任取二点A、C，过A、C在角内部引两条平行的射线AB、CD；那么

$$\angle BAE+\angle AEC+\angle ECD=360^\circ.$$

4．求证：两条平行线被第三条直线所截，一对同位角的平分线互相平行.

§2．三 角 形

一、定 义

1．**折线** 由不在同一条直线上的几条线段顺次首尾相接组成的线叫做折线.

2．**多边形** 如果一条折线的两个端点重合，构成封闭折线，称为多边形.

3．**凸多边形** 把多边形的每一条边向两方延长，如果多边形的其他各边都在延长所得直线的同旁，则称它为凸多边形．否则叫非凸多边形．本书我们只研究凸多边形，并且省略“凸”

字.

4．三角形 只有三条边的多边形叫做三边形，也称三角形．若边数为四，五，……，n，……则分别称为四边形。五边形，……，n边形，…….

二、分 类

1．按角分 钝角三角形，直角三角形，锐角三角形．

2．按边分 等边三角形，二等边三角形，不等边三角形．

三、三角形的主要线段和特殊点

1．五 线 高线、中线、角平分线、边的中垂线、中位线．

2．五 心

1）垂心——三条高线的交点；

2）重心——三条中线的交点；

3）内心——三条内角平分线的交点，即内切圆心；

4）外心——三条边的中垂线的交点，即外接圆心；

5）旁心——一内角的平分线与其余两内角的外角平分线的交点，即旁切圆的圆心．

3．有关性质

1）三角形的中位线定理及其逆定理：三角形两边中点连线平行于第三边且等于第三边的一半；反过来，过三角形一边的中点且平行于另一边的直线必过第三边的中点．

2）三角形的重心定理：三角形三条中线交于一点，这点与三角形对应顶点间的部分是中线长的2/3．

3）三角形内角平分线定理其逆定理：三角形内角平分线分对边成两部分的比，等于夹这个角两边的比；反过来也成立．

4）三角形外角平分线定理及其逆定理：三角形外角平分线，如果和对边的延长线相交，外分对边成两条线段，这两条线段和夹相应内角的两边成比例；反过来也成立。

四、关于边角的性质

1．关于边的性质

在三角形中，

1）两边之和大于第三边；2）两边之差小于第三边．

2．关于角的性质

1）三角形三内角和等于 180°．

推论　多边形的各内角和等于$(n-2)\cdot 180°$．

2）三角形的每一个外角等于和它不相邻的两内角的和．

推论　三角形的每一个外角大于和它不相邻的任一内角．

3．关于边角的性质

1）在一个三角形中，如果两条边不等，则大边对大角；反过来，大角对大边．

2）在两个三角形中，有两对对应边相等，夹角不等，则大角对大边；反过来，大边对大角．

五、全等三角形

1．**定义**　两个三角形能完全重合，称为全等三角形．

2．**判定定理**　两个三角形具备下面五条之一的就全等：

1）三边对应相等；

2）两边夹一角对应相等；

3）两角夹一边对应相等；

4）两角和一边对应相等；

5）两边及大边所对的角对应相等。

3. 性质定理 全等三角形的对应元素（边或角、线段）相等.

六、直角三角形

1. 直角三角形全等的判定定理 除直角外，有一直角边对应相等，另外有任一对应边（或角）相等就可判定二直角三角形全等.

2. 直角三角形的性质

1）直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半；一个三角形一边上的中线等于这边的一半，则这三角形为直角三角形.

2）直角三角形中，锐角等于 30° 的对边等于斜边的一半；在直角三角形中，一直角边是斜边的一半，则这直角边所对的锐角为 30°.

3）勾股定理及其逆定理——在直角三角形中，斜边的平方等于两条直角边的平方的和；如果三角形一条边的平方等于其他两条边的平方的和，那末这条边所对的角是直角.

4）直角三角形中的射影定理：

a）直角三角形斜边上的高是两直角边在斜边上的射影的比例中项；

b）直角边是这直角边在斜边上的射影与斜边的比例中项.

5）勾股定理的推广（余弦定理）：在任何三角形中，一边的平方等于另两边的平方的和减去另两边与它们夹角的余弦的积的 2 倍.

七、等腰三角形和等边三角形

（1）等腰三角形两底角相等；一个三角形有两内角相等，则此三角形是等腰三角形.

(2) 等腰三角形五线合一(底边上的高、中线、中垂线、顶角平分线、对称轴).

(3) 等边三角形三个内角相等且为 60°；三个角均为 60° 的三角形是等边三角形.

八、轴对称图形

1. 定义 把一个图形沿着某一条直线折过来，如果它能够和另一个图形重合，那么这两个图形叫做关于这条直线成轴对称，这条直线叫做对称轴.

如果一个图形是由关于某一条直线成轴对称的两部分组成的，这个图形就叫做轴对称图形.

2. 几个轴对称图形的例子

1) 等腰三角形关于顶角平分线成轴对称；

2) 线段关于它的中垂线成轴对称；

3) 角关于它的平分线成轴对称.

3. 轴对称点性质 如果两点关于一条直线成轴对称，这条直线就是这两点联结线段的中垂线. 据此可找对称点.

习 题 二

1. 在$\triangle ABC$中，设边 BC 的中点为 D，设边 AB 三等分的点为 E、F，如果 AD 与 CE 的交点为 G，则 AG 与 GD 的比将等于多少？

2. 已知 D 是$\triangle ABC$ 内的任意一点，求证：

$$AD+BD+CD<AB+BC+CA.$$

3. 求证：三角形的三条中线的和小于周长.

4. 设 A、B 两点在直线 l 的同侧，试在 l 上求一点 C，使 $AC+CB$ 最短，并证明.

5. 两个三角形如果有两边对应相等，以及其中一边的对角也对应相等，这两个三角形一定全等吗？如果全等，请证明；如果不一定全等，请举一反例．

6. 试证：正三角形的外心与内心是同一点；反之，如果三角形的外心也是它的内心，则此三角形是正三角形．

7. 设在$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线与边BC的交点为D，从D向边AB、AC所引垂线的垂足分别是E、F；求证：$AD\perp EF$．

8. 在$\triangle ABC$中，$\angle B<\angle C$，BE、CF分别是$\angle B$、$\angle C$的平分线；求证：$BE>CF$．

§3. 四　边　形

一、种属关系

$$\text{凸四边形}\begin{cases}\text{平行四边形}\left\{\begin{array}{l}\text{菱形}\\ \text{矩形}\end{array}\right\}\text{正方形}\\ \text{梯形}\begin{cases}\text{等腰梯形}\\ \text{直形梯形}\end{cases}\end{cases}$$

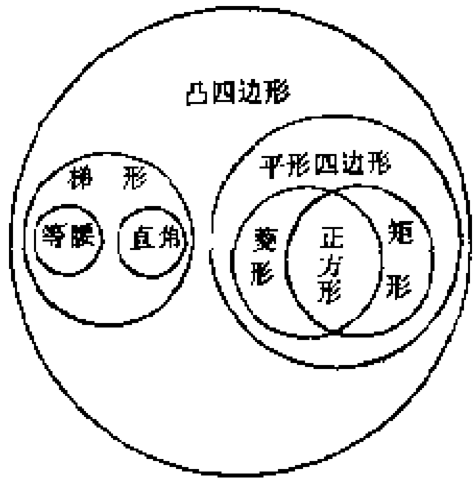


图 1. 1

定义 1　两组对边分别平行的四边形叫平行四边形；

有一组邻边相等的平行四边形叫菱形；

有一个角是直角的平行四边形叫矩形；

有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫正方形；正方形既是有一个角是直角的菱形，又是有一组邻边相等的矩形．

定义 2 一组对边平行而另一组对边不平行的四边形叫梯形；

两腰相等的梯形叫等腰梯形；

有一腰垂直于底的梯形叫直角梯形.

二、平行四边形

1. **性质** 1）对边相等；2）对角相等；3）邻角互补；4）对角线互相平分；5）关于对角线的交点成中心对称.

2. **判定** 1）两组对边分别平行；2）两组对边分别相等；3）一组对边平行且相等；4）两组对角分别相等；5）对角线互相平分.

三、中心对称图形

1. **定义** 把一个图形绕着某一定点旋转180°，如果它能和另一个图形重合，那么这两个图形叫做关于这定点成中心对称. 这定点叫对称中心.

如果一个图形绕着某一点旋转180°后，能和原来的图形本身重合，这个图形就叫做中心对称图形.

2. **中心对称图形的两个例子**

1）平行四边形关于对角线的交点成中心对称；

2）线段关于它的中点中心对称.

3. **中心对称点的性质** 如果两点关于一点成中心对称，那么这点就是这两点联结线段的中点，据此可找某点的中心对称点.

四、特殊的平行四边形

1. **菱形** 1）性质：四边相等；对角线互相垂直平分且平

分内角；两对角线所在直线都是它的对称轴.

2）判定：邻边相等的平行四边形；对角线互相垂直的平行四边形；一对角线平分顶角的平行四边形；四边相等的四边形.

2．矩形 1）性质：四个角均为直角；对角线平分且相等；有二对称轴，就是过每组对边中点的直线.

2）判定：有一角为直角的平行四边形；对角线相等的平行四边形；三个角是直角的四边形.

3．正方形 1）性质：具有平行四边形、菱形、矩形的一切性质，有四条对称轴，即两对角线所在直线和两条过对边中点的直线.

2）判定：邻边相等、一角为直角的平行四边形；邻边相等的矩形；有一角为直角的菱形.

五、两个定理

1．**平行线等分线段定理** 如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等，那么在任何一条与平行线相交的直线上截得的线段也相等.

2．**对应边平行或垂直的角定理** 如果一个角的两边分别平行于另一个角的两边，那么这两个角相等或互补（对应边平行且方向都相同或都相反的两角相等；如果方向一对相同而另一对的方向相反则互补）．如果一个角的两边分别垂直于另一个角的两边，那么这两个角相等或互补.

六、梯　形

(1) 梯形的中位线平行于底且等于两底和的一半.

(2) 等腰梯形在同一底上的两个角相等；反之，在同一底

上的两个角相等的梯形是等腰梯形.

习 题 三

1. 证明：若在▱$ABCD$的边AB, BC, CD, DA上分别取点P, Q, R, S, 使$AP=CR$, $BQ=DS$, 则四边形$PQRS$是平行四边形.

2. 设在▱$ABCD$的对角线BD上取两点E, F使$BE=DF$, 如果四边形$AECF$成为菱形时,那末原来的▱$ABCD$是什么样的四边形? 另外,在这时能在直线BD上取两点E',F',使四边形$AE'CF'$成为正方形吗?

3. 矩形$ABCD$的外角平分线HE、EF、FG、GH相交于E、F、G、H; 求证: $EFGH$为正方形.

4. 河的两岸成平行线，要在河上造一座桥，使桥垂直于河岸，并且使河对岸A、B两地间的路程最短. 试确定桥的位置并予证明.

5. 求证：连接梯形的两条对角线的中点的线段平行于两底并且等于两底差的一半.

6. (1) 连接四边形两对角线的中点的线段与连结这四边形一组对边中点的线段互相平分;

(2) 连接四边形一组对边中点的线段小于两条对角线的和的一半.

§4. 相 似 形

一、成比例线段

1. 两条线段的比 用同一长度单位度量两条线段所得量数的比，叫做这两条线段的比.

2. 成比例的线段　如果线段 a 和 b 的比等于线段 c 和 d 的比，则称线段 a、b、c、d 成比例．记为 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 或 $a:b=c:d$．其中 b、c 叫比例内项，a、d 叫比例外项，d 称为是 a、b、c 的第四比例项．若 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，则称 b 是 a、c 的比例中项，c 是第三比例项．

3. 比例的重要性质

1）基本性质：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc$，特别地，$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\Longleftrightarrow b^2=ac$．

2）反比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$．

3）更比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$；

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}.$$

4）合比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{c}$，$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$．

5）分比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$，$\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$．

6）合分比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$，$\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$．

7）等比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}(b+d+\cdots+n\neq 0)$

$$\Rightarrow\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}.$$

4. 平行线分线段成比例定理　三条平行线截两条直线，所得的四条线段对应成比例．

推论：平行于三角形一边的直线截其他两边，所得线段对应成比例；其中的一边和这边上截得的一条线段以及另一边和另一边上截得的对应线段成比例.

二、相似三角形

1. **定义** 对应边成比例，对应角相等的两个三角形叫相似三角形.

2. **判定** 1）两角对应相等；2）两边对应成比例夹角相等；3）三边对应成比例；4）平行于三角形一边的直线截三角形两边（或延长线）得一三角形与原三角形相似.

3. **直角三角形相似的判定** 1）一对锐角相等；2）任意两边对应成比例.

4. **相似三角形的性质** 1）任意对应线段的比等于对应边的比，叫做相似比；

2）周长的比等于它们的相似比；

3）相似三角形面积的比等于它们的相似比的平方.

三、相似多边形

1. **定义** 对应边成比例，对应角相等的两多边形叫做相似多边形.

2. **性质** 1）经过两个相似多边形的一对对应顶点的全部对角线把两个多边形分成个数相等并且排列顺序相同（或相反）的相似三角形；

2）相似多边形周长的比等于它们的相似比；

3）相似多边形面积的比等于它们的相似比的平方.

3. **判定** 1）根据定义；2）由两组个数相等、排列顺序相同，对应相似的三角形所组成的两个多边形相似.

4．位似图形 如果两个相似多边形的对应边互相平行，对应顶点的连线相交于一点，这两个多边形叫做位似多边形．对应顶点的连线的交点叫位似中心．若位似中心在对应顶点的连线上，叫做内位似中心；若在对应顶点的连线的延长线上，叫做外位似中心．

习　题　四

1．证明梯形二底的中点，二对角线的交点，二腰延长线的交点，这四点共线．

2．过梯形 $ABCD$ 的两对角线的交点 O，作 EF 平行于底 AB，分别交两腰于 E、F，(1)求证：$OE=OF$；(2)若 $CD=9$，$AB=12$，试求：$EF=?$

3．设 AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的三条高，H 是垂心，求证：$HA\cdot HD=HB\cdot HE=HC\cdot HF$．

4．过 $\triangle ABC$ 内的一点 O，作各边的平行线，在 AB 边上的交点为 D、H，在 BC 边上的交点为 G、E，在 CA 边上的交点为 K、F；求证：$\dfrac{DH}{AB}+\dfrac{GE}{BC}+\dfrac{KF}{CA}=1$．

5．$\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线 AD，其内心为 I，求证：

$$AI:ID=(AB+AC):BC.$$

§5．圆

一、定　义

平面内到定点的距离等于定长的点的集合叫圆．这个定点叫圆心，定长叫半径．

二、点与圆的位置关系

(1) 圆上的点到圆心距离等于半径；圆内的点到圆心的距离小于半径；圆外的点到圆心的距离大于半径. 反过来也对.

(2) 不在同一直线上的三点确定一圆.

三、直线与圆的位置关系

(1) 有两个公共点——相交，直线叫圆的割线；

(2) 有一个公共点——相切，直线叫圆的切线；

(3) 没有公共点——相离.

四、弦、直径、弦心距、劣弧和优弧

1. **定义** 连接圆上任意两点的线段叫做弦；过圆心的弦叫直径；圆心到弦的距离叫弦心距；圆周上任意两点间的部分叫做弧；小于半圆的弧叫劣弧；大于半圆的弧叫优弧.

2. **垂径定理** 垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的弧.

逆定理 除原定理外，垂直于弦、直径、平分弦、平分弧四者之中，只要二者成立，另二者也成立.

3. **弧、弦、弦心距的关系定理** 在同圆或等圆中，1) 弧等则弦等、弦心距等；2) 两劣弧不等，则大弧对大弦，但大弧的弦心距较小.

逆定理 在同圆或等圆中，1) 弦等则弦心距等，所对劣弧也等；2) 弦心距等，则弦等，所对劣弧也等；3) 弦不等则大弦的弦心距较小，但所对的劣弧较大；4) 弦心距不等则弦心距大的弦小，所对的劣弧也小.

4. **相交弦定理** 经过圆内一点引两条弦，各弦被这一点所

分成的两段的积相等.

推论 从圆上一点向直径引垂直线段，这垂直线段就是直径被垂足分成的两线段的比例中项.

五、切线与割线的有关定理

1. **切线的判定定理** 经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

逆定理 切线垂直于过切点的半径.

2. **切线长定理** 从圆外一个已知点到圆的两条切线的长相等.

推论 点与圆心的连线垂直平分过两切点的弦及所对的弧，平分两切线所夹的角.

3. **割线定理** 从圆外一点引圆的两条割线，一条割线和它在圆外部分的积等于另一条割线和它在圆外部分的积.

4. **圆幂定理** 从圆外一点引圆的任一割线和它在圆外部分的乘积等于从这一点所引圆的切线长的平方.

六、和圆有关的角

1. **圆心角** 1）定义：顶点在圆心的角叫圆心角.

2）圆心角定理：圆心角的度数等于它所对弧的度数.

推论 圆心角相等则所对弧相等；圆心角大对弧大，圆心角小对弧小；反过来也对.

2. **圆周角** 1）定义：顶点在圆周上并且两边均与圆周相交的角叫圆周角.

2）圆周角定理：圆周角的度数等于它所对的弧的度数的一半.

推论 a）在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角都相

等；相等的圆周角所对的弧都相等；

b）半圆（或直径）所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径；

c）圆的两条平行弦之间所夹的弧相等；

d）顶点在圆内（外）的角大于（小于）它所对的弧上的圆周角；

e）圆内接四边形的两对角互补；

f）圆内接四边形的任一外角等于它的内对角；

g）如果一个四边形的一组对角和等于180°，那么这个四边形可内接于一个圆；

h）如果一个四边形的一个外角等于它的内对角，那么这个四边形可以内接于一个圆；

i）在线段所在直线同侧所张的所有等角的顶点与线段两端点共圆.

注：后三个是四点共圆的判定定理.

3．弦切角　1）定义：顶点在圆上并且一边和圆相交，另一边和圆相切的角叫弦切角.

2）弦切角定理：弦切角的度数等于它所夹弧的度数的一半.

推论　弦切角与它所夹的弧所对的圆周角相等.

4．相交弦的夹角定理　两相交弦的夹角的度数等于所对两弧度数和的一半.

5．割（切）线所夹的角定理　割（切）线所夹的角的度数等于所对二弧度数之差的一半.

七、圆与圆的位置关系

1．两圆位置关系的判定　圆心连线为o_1o_2，半径为r_1、

r_2，且 $r_1 \geqslant r_2$.

1) 相离：$o_1o_2 > r_1 + r_2$；2) 外切：$o_1o_2 = r_1 + r_2$；3) 相交：$r_1 + r_2 > o_1o_2 > r_1 - r_2$；4) 内切：$o_1o_2 = r_1 - r_2$；5) 内含：$r_1 - r_2 > o_1o_2 > 0$；6) 同心：$o_1o_2 = 0$.

2. 性质

1) 相交两圆的圆心连线垂直平分公共弦，并且平分圆心向公共弦两端张的角；

2) 相切两圆在切点处有公共的切线，圆心连线过切点；相外切两圆有二外公切线且其长相等；

3) 相离两圆有其长分别相等的两外公切线和两内公切线.

习 题 五

1. 证明：过圆内的一点引两条弦，跟过这点的半径成角较小的一条弦是较大的弦.

2. 设半圆 O 的直径为 AB，以 OA 为直径在圆内作半圆，过圆心 O 作射线分别与小半圆、大半圆交于 C、D，过 D 作过 A 的切线的垂线，垂足为 E；证明：$CD = DE$.

3. 试证：由三角形任一高线的垂足向另二高线的垂足连线所构成的角被该高线平分.

4. 两圆的任一内公切线被两条外公切线所截得的线段，等于外公切线的长. 试加以证明.

5. $\odot O$ 与 $\odot O'$ 外切于 P，一直线与 $\odot O$ 相交于 A、B，与 $\odot O'$ 相切于 C，延长 AP 与 $\odot O'$ 相交于 D；
求证：$PC^2 = PB \cdot PD$.

6. 试证：三角两边的积等于第三边上的高和外接圆直径的积.

§6. 周长与面积

一、面　积

1. **图形的面积**　平面封闭图形所围的平面部分的大小叫这个平面图形的面积，面积相等的二图形叫等积形。

2. **面积单位**　边长为一个长度单位的正方形叫单位正方形，取单位正方形的面积做面积单位。

3. **面积的基本性质**　1）全等形一定等积；

2）一个图形的面积等于它的各部分的面积的和。

二、多边形的面积

1. **公式**　矩形＝长×宽；正方形＝边长^2；平行四边形＝底×高；三角形$=\frac{1}{2}\times$底$\times$高$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$（其中a、b、c是三边，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$）；菱形$=\frac{1}{2}\times$对角线×对角线；梯形$=\frac{1}{2}$(上底＋下底)×高$=\frac{1}{2}\times$中位线×高。

2. **性质**　1）等底等高的平行四边形等积；

2）等底等高的三角形等积；

3）三角形被一条中线分成两个等积形；

4）等底(高)三角形的面积的比等于高(底)的比；

5）等积三角形的底(高)等则高(底)等。

三、正多边形与圆

1. **定义**　各边等各角也等的多边形叫正多边形。

2. **正多边形与圆的关系定理及其逆定理**　如果把圆周分

成 n 个等分，那么顺次连接各分点所得的多边形是圆内接正 n 边形，经过各分点作圆的切线所组成的多边形是圆外切正 n 边形；反过来，任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，这两个圆同心，称为正多边形的中心，外接圆的半径叫正多边形的半径，内切圆的半径叫正多边形的边心距.

3．正多边形的计算

定理 1　正 n 边形的半径和边心距把正 n 边形分成 $2n$ 个全等的直角三角形，每个直角三角形的斜边是半径 R，一条直角边是边心距 r，另一条直角边等于正 n 边形边长 a_n 的一半，它所对的锐角等于 $\frac{180^\circ}{n}$.

定理 2　正多边形的面积等于二分之一的周长与边心距的乘积.

定理 3　边数相同的正多边形相似，它们的周长的比等于它们的边长(或半径、或边心距)的比，它们的面积的比等于它们的边长(或半径、或边心距)的比的平方.

4．关于正多边形的作图(略).

四、圆的周长和面积

1．定义　当圆的内接(或外切)正多边形的边数无限倍增时，圆内接正多边形的周长的极限叫圆的周长，面积的极限叫圆的面积.

2．公式　周长 $C=2\pi R$，面积 $S=\pi R^2$，其中 R 是圆的半径，$\pi=3.1415926\cdots\cdots$是圆周率，它是圆的周长与直径的比.

3．弧长、扇形面积与弓形面积.

弧长$L=\alpha R=\frac{n\pi R}{180}$，(其中 α、n 分别是圆心角的弧度数、角度数).

扇形面积 $S=\frac{1}{2}LR=\frac{n\pi R^2}{360}$.

弓形面积 = 扇形面积 − 三角形面积.

习　题　六

1. 试证：顺次连接四边形各边中点所得四边形的面积是原四边形面积的一半.

2. 已知四边形 $ABCD$ 的面积为 1，E、F 将 AB 三等分，G、H 将 CD 三等分；试证：四边形 $EFGH$ 的面积为 $\frac{1}{3}$.

3. 求证：梯形的面积等于一腰和另一腰中点到这腰的距离的积.

4. 在四边形 $ABCD$ 中，经过 BD 的中点 M 引 AC 的平行线交 AB 于 E，交 BC 于 F；求证：CE 把四边形 $ABCD$ 分成两个等积形.

5. 求正五边形的边长，已知其外接圆半径为 R.

6. 证明：以弓形高为直径的圆是弓形最大的内切圆.

7. (1) 由直角三角形的三边向外作三个半圆，证明：斜边上的半圆的面积等于其余两个半圆的面积的和；(2) 设向内作三个半圆，求证：直边外两弓形面积的和减去斜边外两弓形面积之和等于直角三角形内共弦的两弓形面积的和.

8. 把半圆的直径分成 n 等分，在每一份上作半圆，求证：(1) 所作的半圆的长的和等于原半圆的长；(2) 所作的半圆面积的和等于原半圆面积的 $\frac{1}{n}$.

第二章　证题通法

§1. 证题的思考方法

按照思考的途径，证题分为综合法与分析法. 综合法是由命题的题设条件出发，经过逻辑推理得到要证的结论，即由原因推导结果，简单地说，就是由因导果.

例 1　在正三角形的外接圆上任取一点，则这点同较远的一顶点的距离等于同另外两顶点距离的和.

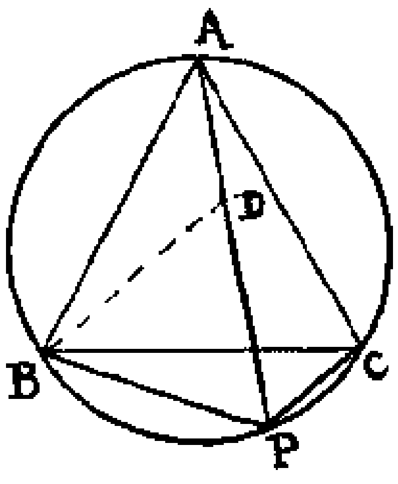


图 2.1

已知：$\triangle ABC$ 是正三角形，P 是外接圆 $\overset{\frown}{BC}$ 上的一点；

求证：$PA=PB+PC$.

分析（综合法）：因为 ABC 是正三角形，所以 $AB=BC=CA$，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CA}$. 又 P 是 $\odot ABC$ 的 $\overset{\frown}{BC}$ 上的一点，所以 $\angle APB=60°$. 因此，若在 PA 上取 $PD=PB$，则 $\triangle PBD$ 为正三角形. 于是，$BP=BD$，同时 $\angle PBC=60°-\angle CBD=\angle ABD$，又 $BC=BA$，从而 $\triangle BPC\cong\triangle BDA$，故 $PC=DA$. 总之，$PA=PD+DA=PB+PC$.

分析法是由要证的结论出发，一步一步地探索使结论成立

的充足理由，直达题设条件．即是探索结论所以成立的原因．简单地说，就是执果索因．

例 2 自圆外一点 P 向圆作切线 PA，切点为 A，再由 PA 的中点 M 作圆的割线和圆交于 B、C 两点，分别连结 PB、PC，交圆于 D、E 两点；求证：$DE \parallel PA$．

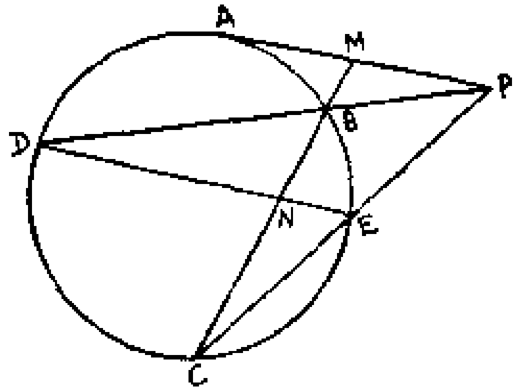
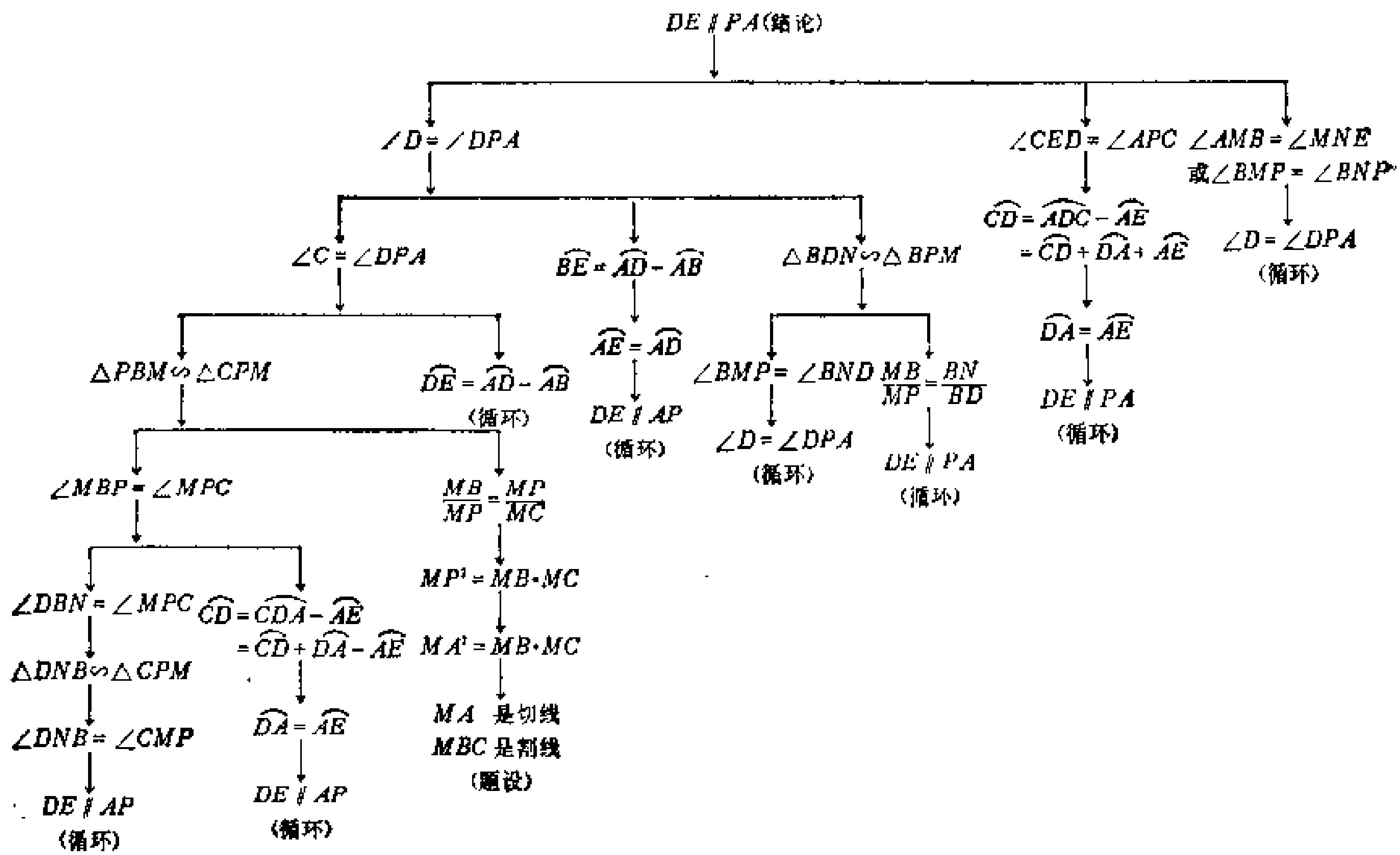


图 2.2

分析（分析法）：要证 $DE \parallel PA$，只须 $\angle D = \angle DPA$．又 $\angle D = \angle C$，所以只须证 $\angle C = \angle DPA$．$\angle C$、$\angle DPA$ 分别位于 $\triangle CPM$ 与 $\triangle PBM$ 中，是对应角，因此只须证明：$\triangle CPM \backsim \triangle PBM$．由于 $\angle PMC$ 公用，只须证 $\frac{MC}{MP} = \frac{MP}{MB}$，就是 $MP^2 = MB \cdot MC$．因为 M 是 PA 的中点，所以 $MP = MA$，因此只须证 $MA^2 = MB \cdot MC$．由题设，MA 是切线，MBC 是割线，根据圆幂定理，$MA^2 = MB \cdot MC$ 成立，故原命题可证．

注：(1) 在上述用分析法的思考过程中，每一步都是有目的地前进，容易达到目的，这是分析法较综合法优越的地方，思考证题路径时，多半采用分析法，只有在题设条件单一的简单题目中才采用综合法．当然，在用分析法时，也不是一次就把证题的道路都走通了，有时也会碰壁的；思考到某一步走不下去时，就换一条路径思考．经有限次，终会把证明的路径走通．（以本题为例，我们把各种思考途径列表于后，这里其中八条不通，只有一条通）读者如果掌握了这种方法，是有好处的．

下面是分析法思考例 2 的各种路径表：


$DE \parallel PA$(结论)
$\angle D = \angle DPA$
$\angle CED = \angle APC$
$\angle AMB = \angle MNE$
或$\angle BMP = \angle BNP$
$\angle C = \angle DPA$
$\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{AB}$
$\triangle BDN \backsim \triangle BPM$
$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{ADC} - \overset{\frown}{AE}$
$= \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{AE}$
$\angle D = \angle DPA$
(循环)
$\triangle PBM \backsim \triangle CPM$
$\overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{AB}$
(循环)
$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AD}$
$DE \parallel AP$
(循环)
$\angle BMP = \angle BND$
$\frac{MB}{MP} = \frac{BN}{BD}$
$\angle D = \angle DPA$
(循环)
$DE \parallel PA$
(循环)
$\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{AE}$
$DE \parallel PA$
(循环)
$\angle MBP = \angle MPC$
$\frac{MB}{MP} = \frac{MP}{MC}$
$MP^2 = MB \cdot MC$
$MA^2 = MB \cdot MC$
MA 是切线
MBC 是割线
(题设)
$\angle DBN = \angle MPC$
$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{CDA} - \overset{\frown}{AE}$
$= \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} - \overset{\frown}{AE}$
$\triangle DNB \backsim \triangle CPM$
$\angle DNB = \angle CMP$
$DE \parallel AP$
(循环)
$\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{AE}$
$DE \parallel AP$
(循环)

(2) 分析法思考的路径是逆行的，证明过程的书写不易得当，一不小心就犯逻辑上的错误，而且文辞冗长，不如综合法的叙述一目了然. 因此，对初学者，最好是用分析法思考，用综合法表述证明. 用综合法写例 2 的证明如下：

因为 MA 是切线，MBC 是割线，所以 $MA^2=MB\cdot MC$. 又 M 是 PA 的中点，所以 $PM=MA$，因此 $PM^2=MB\cdot MC$，即 $\frac{MB}{PM}=\frac{PM}{MC}$. 又 $\angle PMC$ 公用，所以 $\triangle PBM\backsim\triangle CPM$，于是 $\angle C=\angle DPA$. 而 $\angle D=\angle C$，所以 $\angle D=\angle DPA$，故有 $DE\parallel PA$.

(3) 前面分别叙述了综合法与分析法，实际上在一个题目的思考过程中，二者是不可分割的，特别是对较困难的题目的思考，总是两者联合使用. 我们用综合法思考时，由因导果，从题设条件开始，进行推理，虽是盲目前进，但也时刻关注着结论的内容，使思考的路径向结论靠拢. 在用分析法思考时，执果索因，虽是在探索使结论成立的各种充分条件，但总是回顾题中的假设，千方百计地使题中假设成为我们探索的充分条件. 因此，在思考证题道路时，应自觉地将两种方法联合使用，以期收效更快. 一般地，先用分析法，分析到某一结果不能进行下去时，再用综合法由因导果，由题设条件导出这一结果，然后再用分析法继续前进，遇到障碍时又用综合法排除，如此继续进行，终会使命题获证. 对此，再举一例.

例 3 **求证**：对任意 $\triangle ABC$ 向外边作等边三角形，联结各正三角形的中心，则得一等边三角形.

已知：BCH、ACI、ABJ 分别是以 $\triangle ABC$的三边为边，向外作的正三角形，D、E、F 分别是它们的中心；

求证：DEF 为正三角形.

分析(综合法分析法联用)：首先用分析法，要证 DEF 为正三角形，只须证 $\angle D=\angle E=\angle F=60°$. 由于 $\triangle ABC$ 的任意性，所以 D、E、F 的位置可以轮换，只要证得 $\angle D=60°$ 就行了.（暂时分析不下去了）其次用综合法，因为 D、E、F 分别是三个正三角形的中心，所以可以以它们为圆心作三个正三角形的外接圆. 从图中发现，三圆交于一点，暂设为 G. 再用分析法继续进行分析，由于 $\angle BHC=60°$，$\angle BDC=120°$，因此要证 $\angle EDF=60°$，只须证明 DF、DE 分别平分 $\angle BDG$、$\angle CDG$. 这是显然的，因为相交圆的连心线垂直平分公共弦且平分圆心向公共弦两端张的角. 余下的问题是要证明 $\odot D$、$\odot E$、$\odot F$ 交于一点. 再用分析法，要证三圆共点，只须证 $\odot E$、$\odot F$ 的异于 A 的另一个交点 G 在 $\odot D$ 上，就是要证 G、B、H、C 四点共圆. 这只须证 $\angle BGC$ 与 $\angle H$ 互补，而 $\angle H=60°$，只须证 $\angle BGC=120°$. 最后，再用综合法，连 GA、GB、GC，因为 $\triangle ACI$、$\triangle ABJ$ 是正三角形，所以 $\angle AGB=\angle AGC=120°$，故 $\angle BGC=360°-\angle AGB-\angle AGC=120°$. 命题获证.

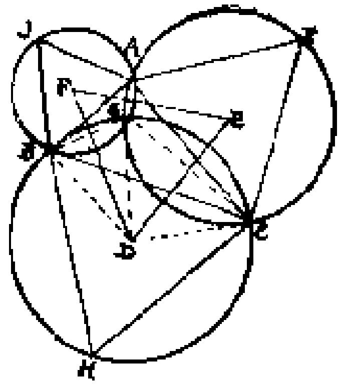


图 2.3

证明：分别以 D、E、F 为圆心，作三个正三角形的外接圆，设 G 是 $\odot E$、$\odot F$ 的另一个交点，连 AG、BG、CG，因为 $\angle I=\angle J=60°$，所以 $\angle AGB=\angle AGC=120°$. 因此 $\angle BGC=120°$，又 $\angle H=60°$，所以 B、H、C、G 四点共圆，即 G 在 $\odot D$ 上，于是，DF 平分 $\angle BDG$，DE 平分 $\angle CDG$，然而 $\angle BDC=180°-\angle H=120°$，因此 $\angle EDF=60°$. 同理，$\angle E=\angle F=60°$，故 DEF 为正三角形.

习 题 一

1. 用综合法证明：设自平行四边形一对角线的一端至一非邻边的中点连以直线，而自他端至该边对边的中点也连以直线，则所连两直线必三等分另一对角线.

2. 用分析法证明：若圆内接四边形的对角线互相垂直，则圆心至任一边的距离等于该边对边的一半.

3. 联合使用综合法与分析法证明：在三角形 ABC 中，$\angle A<90^\circ$，以 BC 为直径画圆，并过 A 作圆的切线 AD，切点为 D，在 AB 上取 $AE=AD$，再过 E 作 AB 的垂线交 AC 的延长线于 F，则 $\triangle AEF$ 与 $\triangle ABC$ 等积.

4. 已知 AB 是 $\odot o$ 的弦，过 A、B 分别引这圆的切线交于点 C，P 为 $\odot O$ 上任意一点，自 P 引 AB、BC、CA 的垂线，垂足依次为 D、E、F；求证：PD 是 PE 及 PF 的比例中项.

§2. 证题的推理方法

证题按逻辑推理①的方式，分为演绎法与归纳法. 所谓演绎法就是由一般性命题正确，推出特殊的命题正确. 本章第一节中的三个例子，从逻辑推理的角度看，都属于演绎法，此处恕不再对演绎法举例.

---

① 推理：推理是由一个或几个判断推出另一个新判断的思维形式，也是人们认识客观事物的一种逻辑方法。按推理的方向，推理可分为演绎推理（一般到特殊）、归纳推理（特殊到一般）、类比推理（特殊到特殊）. 演绎推理从真的前提必然地推出真的结论，可用作证明的工具。归纳推理分为完全归纳推理和不完全归纳推理两类，其中完全归纳推理从真实的前提必然得到真实的结论，也可用作证明。其余推理不能作证明。

所谓归纳法就是用完全归纳推理的方式进行证题，即枚举欲证论题的各种可能的情况，证明在每种情况下命题真实，从而确立原命题真实。这就要求我们考虑问题要全面，而且要善于对问题的各种情况进行正确的分类.

例 1 两圆相切，过切点作一直线和两圆相交，过这两交点的两条切线必平行.

已知：$\odot O$ 与 $\odot O'$ 相切于 P，直线 AB 过 P 并与 $\odot O$、$\odot O'$ 分别相交于 A、B，CD、EF 分别是过 A、B 的切线.

求证：$CD \parallel EF$.

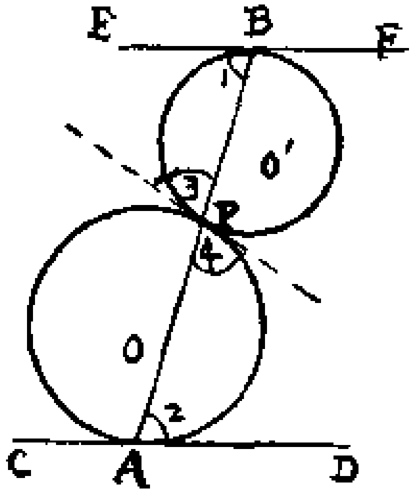


图 2.4

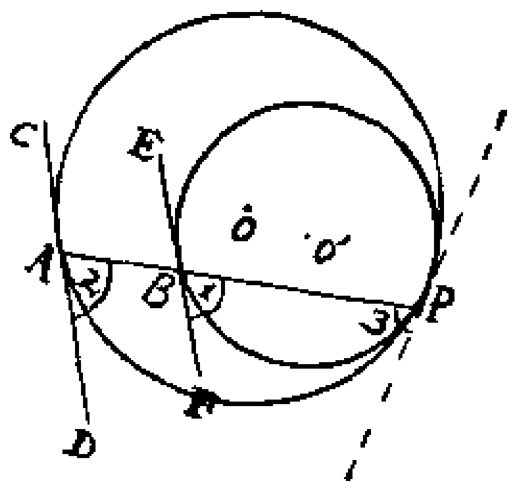


图 2.5

分析：两圆相切可分为外切、内切两种情况，于是证明需用归纳法.

证明：(1) 当$\odot O$ 与 $\odot O'$ 外切时，过 P 引公切线，如图示，因为$\angle 1 = \angle 3$，$\angle 2 = \angle 4$，而$\angle 3 = \angle 4$，所以$\angle 1 = \angle 2$，故 $CD \parallel EF$.

(2) 当$\odot O$ 与 $\odot O'$ 内切时，过 P 引公切线，如图示，因为$\angle 1 = \angle 3$，$\angle 2 = \angle 3$，所以 $\angle 1 = \angle 2$，故有 $CD \parallel EF$.

例 2 单位正方形周界上任意两点之间连一曲线，如果它把这个正方形分成两个面积相等的部分，试证这个曲线段的长度不小于1.

分析：正方形周界上任意两点的位置关系有三种情况，第一，两点分别在对边上；第二，两点分别在邻边上；第三，两点在同一条边上．因此，要证明命题的真实性，必须对上述三种情况一一给予论证，需用归纳法．并且我们从简单的第一种情况开始．

证明：设点 M、N 是单位正方形 $ABCD$ 的周界上的任意两点，曲线 MN 是连接 M、N 间的一条曲线，它们把 $ABCD$ 分成两个面积相等的部分，就以 $\overset{\frown}{MN}$ 表示曲线段 MN 及其长度．按 M、N 在周界上的位置，分三种情况进行证明．

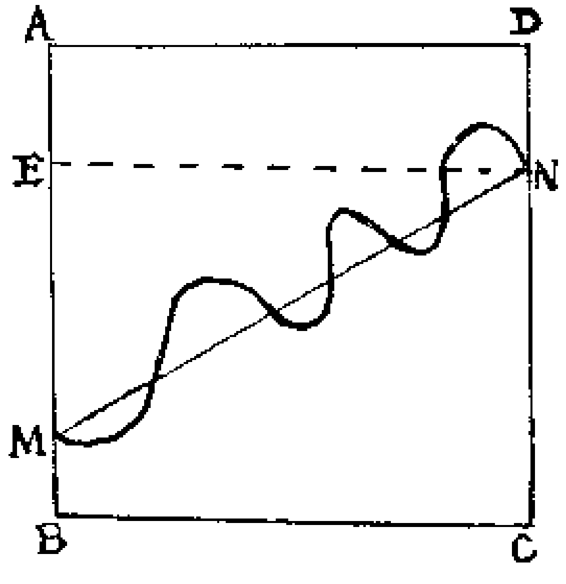


图 2.6

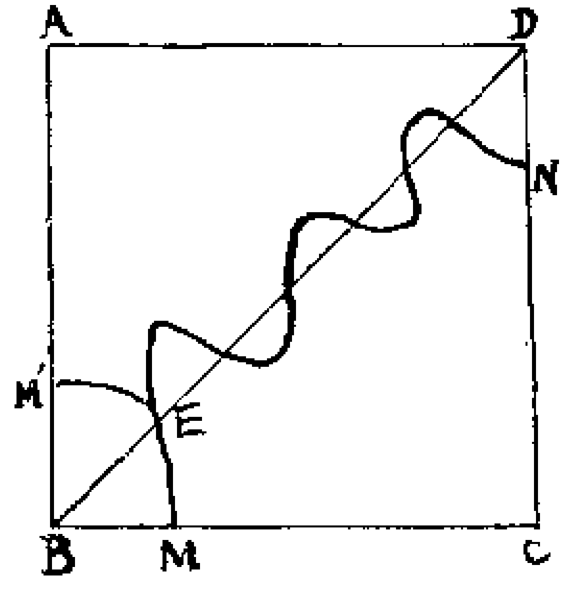


图 2.7

(1) 点 M、N 分别在正方形的一双对边上，如图．作 $NE\perp AB$，垂足为 E，则有 $NE=1$．而 $MN\geqslant NE$．$\therefore MN\geqslant 1$．而 $\overset{\frown}{MN}\geqslant MN$，$\therefore$ $\overset{\frown}{MN}\geqslant 1$.

(2) 点 M、N 分别在一双邻边上，如图，设 M 在 BC 上，N 在 CD 上，那么 $\overset{\frown}{MN}$ 一定要和对角线 BD 相交（否则 $\overset{\frown}{MN}$ 分正方形成的两部分不等积）．假设从 M 出发，$\overset{\frown}{MN}$ 与 BD 的第一个交点是 E，作 $\overset{\frown}{ME}$ 关于 BD 的轴对称图形 $\overset{\frown}{M'E}$，则 M' 必在 AB 上，且 $\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{MEN}=\overset{\frown}{M'EN}\geqslant 1$.

(3) 点 M、N 在同一条边 BC 上（M、N 可以重合）设 E、F 分别是 AB、CD 的中点，那么 $\overset{\frown}{MN}$ 一定要和 EF 相交(否则 $\overset{\frown}{MN}$ 分正方形的两部分不等积)．假设从 M 出发，$\overset{\frown}{MN}$ 与 EF 的第一个交点为 G，作 $\overset{\frown}{MG}$ 关于 EF 的对称图形 $\overset{\frown}{M'G}$，如图，则 M' 在 AD 上，且有 $\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{MGN}=\overset{\frown}{M'GN}\geqslant 1$.

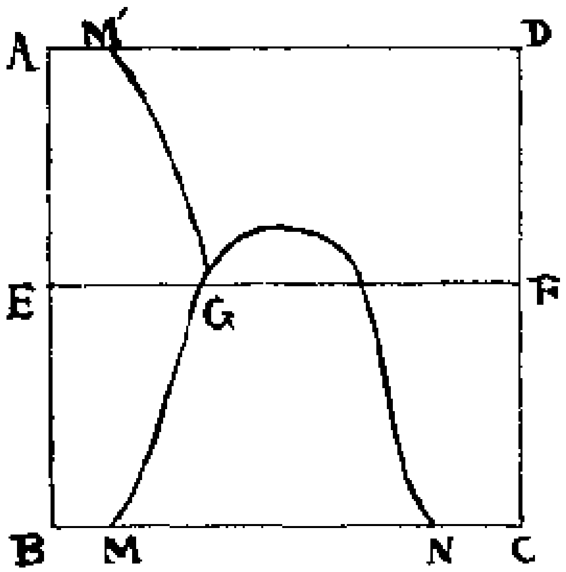


图 2.8

在归纳证法中，有一种情况就是论题是关于自然数 n 的命题．自然数的个数是无穷的，我们不可能将论题的各种情况一一列举出来证明．此时可借助于数学归纳法，现以凸 n 边形内角和公式的证明为例．

例 3　已知 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$，求证：n 边形内角和 $S_n=(n-2)\cdot 180^\circ$.

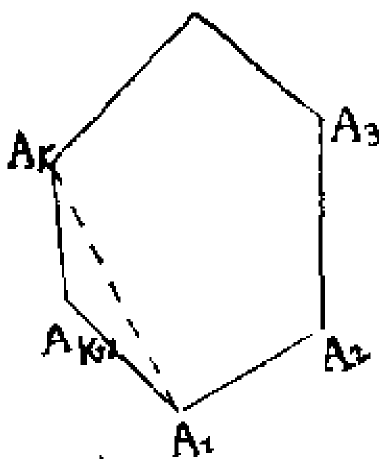


图 2.9

证明(用数学归纳法)：

(1) 当 $n=3$ 时，n 边形为三角形，$S_3=180°=(3-2)\cdot180°$. 命题为真.

(2) 假设 $n=K$ 时命题为真，即 K 边形的内角和为 $S_k=(k-2)\cdot180°$. 那么，对于 $K+1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$，连对角线 A_1A_k，把 $k+1$ 边形分成一个 k 边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 和一个三边形 $A_1A_kA_{k+1}$. 其内角和为 $S_{k+1}=S_k+180°$，已假设 $S_k=(k-2)\cdot180°$，$\therefore S_{k+1}=(k-2)\cdot180°+180°=(\overline{k+1}-2)\cdot180°$. 这说明当 $n=k+1$ 时，命题亦真.

习 题 二

1. 已知⊙O 和⊙O' 相切于 A 点，经过 A 点的直线 BC、DE 分别交⊙O 于 B、D，交⊙O' 于 C、E，求证：

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}.$$

2. 在一圆上，设 M、N 各是 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$(劣弧或优弧)的中点，则 AB、AC、MN 三直线交成一个等腰三角形.

3. 用归纳法证明圆周角定理：圆周角的度数等于所对弧的度数的一半.

4. 用不完全归纳法探求 n 边形的对角线的条数，然后用数学归法予以证明.

5. 平面内有 n 条直线，其中任意的两条都不平行，任意的三条不经过同一点，求证：这 n 条直线把平面分成 $N=1+$

$\frac{n(n+1)}{2}$个部分.

§3. 证题的基本过程

证题按入手的命题，分为直接证法与间接证法. 所谓直接证法就是从原命题的题设出发逐步推出结论的证明方法. 前面两节所举各例，不论是综合法，还是分析法；不论是演绎法，还是归纳法，它们的一个共性都是对原命题进行论证，即直接证法.

有些定理或证明题，不易甚至不能用直接证法进行证明，我们就改证与它等效的命题，从而间接地证明原命题的真实性. 这种证题方法叫做间接证法. 间接证法又分为反证法和同一法.

一、反证法

证明结论的反面是错误的，从而肯定结论的真实性的证题方法叫反证法. 其具体过程如下：首先否定结论，由结论的反面经过逻辑推理，得到一个与临时假定或原题设或某公理、某定义、某定理、或与自身相矛盾的结论，根据矛盾律，矛盾着的二结论其中必有一错，但是临时假定和原题设，根据同一律，在证此题的此时此刻被假定为正确的，公理、定义、定理是真理，也是正确的. 推理过程依据充足理由律也是正确的. 因此，只有结论的反面是错误的. 根据排中律，结论的正面与结论的反面二者之中有一个且仅有一个是正确的，现已证明结论的反面是错误的，因此，结论本身是真实的，原命题证毕. 简单地说：假设反面成立，据理推出矛盾，否定所设反面，确定结论为真.

可见反证法的逻辑根据是逻辑思维的四个基本规律. 不过从基本思路——证明结论反面不真，从而由排中律肯定结论为真——来看，反证法的逻辑基础是排中律.

例 1 证明不等角的凸四边形至少有一个钝角.

证明： 设四内角中没有一个是钝角，而凸多边形的内角均小于 180°，因此每个内角不超过 90°，又四内角不等，所以不能同时为直角. 于是四内角和小于 360°. 这与凸四边形四内角之和为 360° 矛盾. 故四内角中至少有一个为钝角.

可见，“证明”从结论的反面——四内角中没有一个是钝角出发，以题设、多边形内角的定义、钝角的定义、补角的定义、不等量的性质定理等为论据，根据充足理由律，逻辑地推出一个结论——凸四边形的内角和小于 360°，与一个已知定理（任意凸四边形内角和为 360°）矛盾. 由矛盾律，结论反面不真. 再由排中律，结论本身为真，即四内角中至少有一个为钝角，命题获证.

此例的结论反面仅有一种可能，是简单的反证法也称为归谬法. 若结论的反面不止一种，用反证法时需一一予以否定，这种反证法叫穷举法. 也举一例.

例 2 设 P 是 $\triangle ABC$ 内部的一点，又 $AB=AC$，且 $\angle APB>\angle APC$，则 $PB<PC$.

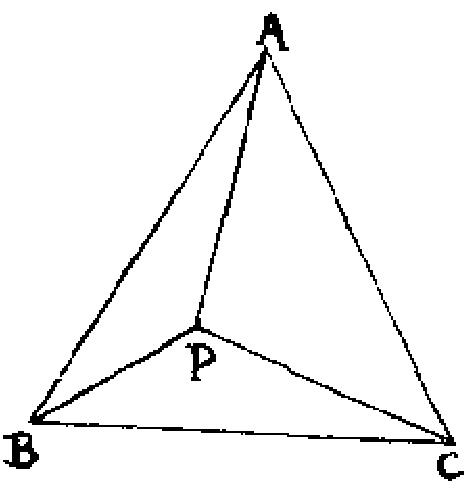


图 2.10

证明： 假设 $PB \nless PC$，则有两种可能发生：$PB=PC$，$PB>PC$.

(1) 若 $PB=PC$. 在 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PAC$ 中，$PB=PC$，$PA=PA$. $\angle APB>\angle APC$，$\therefore$ $AB>AC$. 与原题设 $AB=AC$ 矛盾.

(2) 若 $PB>PC$. 在 $\triangle PBC$ 中，$\angle PBC<\angle PCB$. 由 $AB=AC$ 知，$\angle ABC=\angle ACB$，所以 $\angle ABP>\angle ACP$ 又已知 $\angle APB>\angle APC$.

而三角形的三内角和为 180°， 所以在 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PAC$ 中，$\angle BAP<\angle CAP$， 又 $AP=AP$，$AB=AC$， $\therefore$ $PB<PC$，与结论反面自身矛盾.

综合(1)、(2)，必有 $PB<PC$.

二、同一法

当论题符合同一法则时①，证明逆命题正确，从而由等效性肯定原论题正确的证明方法，叫同一证法②. 具体过程如下：第一步，判明论题符合同一法则；第二步，假设结论成立，推出题设成立，从而证明逆命题为真；第三步，由同一法则知，原论题与逆命题等效，断言原论题为真.

同一法的逻辑根据就是同一法则. 还应该指出，同一证法是一个逻辑方法，它不仅适用于几何证题，而且也适合数学其他各科的证题. 同一法在证某图形具有某种特殊性质时比较有效. 逆定理的证明也经常用同一法.

例 3 用同一法证三角形内分角线定理的逆定理.

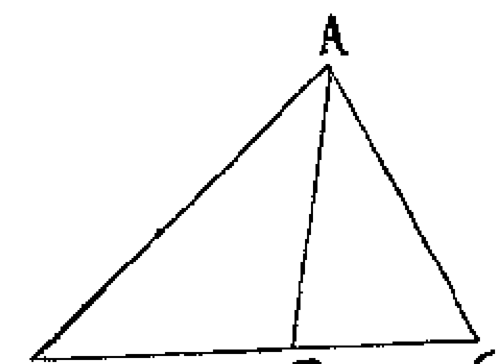


图 2.11

已知：D 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的一点，满足 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$；

求证：AD 是 $\angle A$ 的平分线.

证明：(第一步，判明论题符合同一法则) $\triangle ABC$ 为

---

① 同一法则：假如命题的条件和结论所指概念的外延一致，那么原命题与逆命题同真同假.

② 关于同一法则和同一证法，参见梁绍鸿《初等数学复习及研究(平面几何)》(人民教育出版社，1979年版).

已知，$\frac{AB}{AC}$为定值，而$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$，所以 D 是线段 BC 的定比分点，对线段 BC 来说，此点唯一，因此 AD 唯一．另一方面，$\angle A$ 的平分线也唯一，因此，本命题符合同一法则，本命题与它的逆命题等效．（第二步，改证逆命题．）而逆命题是已经证明了的定理，为真．（第三步，断言原论题为真）故本命题为真．

注：这是用同一法证题的一种简单的情况，本命题的逆命题是已经证明了的定理．因此，证逆命题成立的过程没有必要重写．

例 4 以正方形一边为底在正方形内作一等腰三角形，若它的底角等于 15°，则它的顶点与正方形另两个顶点连接时，必构成一个正三角形．

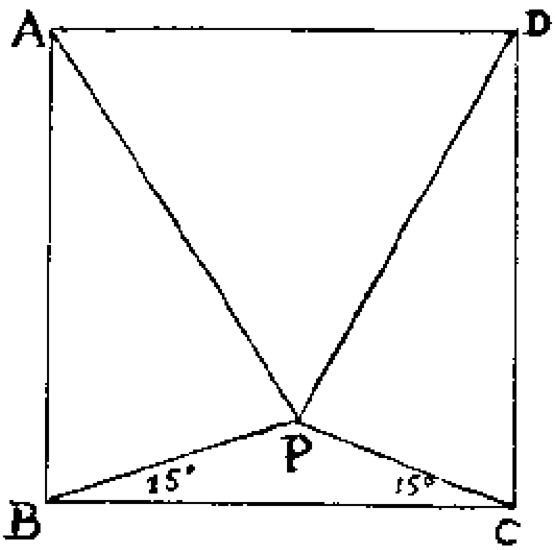


图 2.12

已知：在正方形 $ABCD$ 内，$\angle PBC=\angle PCB=15°$；

求证：$\triangle APD$ 是正三角形．

分析：题设中，在正方形内与 BC 成 15° 角的边 BP、CP 是唯一的，因此，它们的交点是唯一的．结论中，在正方形内以 AD 为边的正三角形是唯一的，因此，它的顶点是唯一的．故原论题符合同一法则，可用同一法．

证明：因为论题符合同一法则，所以原论题与它的逆命题等效．现改证它的逆命题．设 APD 是正方形 $ABCD$ 内的正

三角形，所以$\angle PAD=60^\circ$，$AP=AB$. 因此，$\triangle ABP$ 是等腰三角形，且$\angle BAP=90^\circ-60^\circ=30^\circ$，从而$\angle ABP=\frac{1}{2}(180^\circ-30^\circ)=75^\circ$，故$\angle PBC=90^\circ-75^\circ=15^\circ$，同理，$\angle PCB=15^\circ$. 逆命题为真. 即原命题获证.

注：此例的逆命题正确性有待证明，这点与例 3 不同.

从这两个例子可以看出，一个证明题能不能用同一法，关键是判明论题符不符合同一法则，而用同一法进行证明的关键是改证逆命题. 同时，从这两个例子还可以看出，要判明一个论题符不符合同一法则，主要就是看题设和结论所指的图形是否唯一（或一致），这是可以判明的. 此外，在中学几何中，用同一法证题一般采用“另行构图”（即先作出适合结论的图形，证明该图与原图重合，从而断言原图具有结论性质）. 如例 3 、例 4 虽然没有另行构图. 但是，也可以另行构图来证，读者不妨试一试. 为了进一步说明这个问题，兹再举一例.

例 5 D 是$\triangle ABC$ 中线 AM 上的任一定点，连 CD 并延长交 AB 于 P，连 BD 并延长交 AC 于 Q，求证：$PQ\parallel BC$.

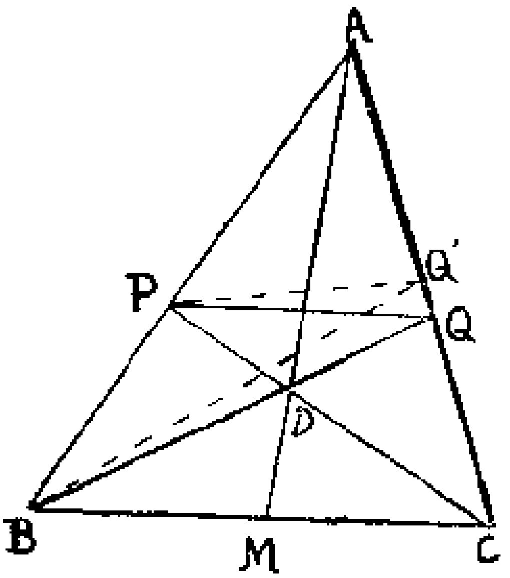


图 2.13

分析：因为 D 是 AM 上的一定点，所以 BD、CD 是唯一确定的直线，它们与 AC、AB 的交点 Q、P 也分别唯一确定，因此线段 PQ 被唯一确定. 另外，过直线 BC 外一点 P 而与 BC 平行的直线，有一条且只有一条，其介于三角形 ABC 内的线段唯一确定. 故可用同一法.

证明一： 因为命题符合同一法则，改证逆命题：假设 D 是 $\triangle ABC$ 的中线 AM 上的一定点，P 是 CD 的延线与 AB 的交点，过 P 作 $PQ \parallel BC$ 交 AC 于 Q，求证 BQ 经过 D 点. 事实上，$\because PQ \parallel BC$，BP、CQ 的延线交于 A 点，$\therefore BCQP$ 是梯形. 因此两对角线 BQ、CP 的交点，在底边中点与两腰延线的交点的联线上，即在 AM 上. 这说明 CP、BQ、AM 交于一点，即 BQ 过 D 点.

这个题也可以按通常讲的另行构图法来证.

证明二：（第一步，作出适合结论要求的图形）过点 P 作 $PQ' \parallel BC$ 交 AC 于 Q'，（第二步，证明所作图形与原图形重合）则 $PBCQ'$ 为梯形. 令 BQ' 与 CP 交于 D'，则 D' 在直线 AM 上.（梯形对角线的交点在底边中点与两腰延长线的交点的联线上.）但已知 CP 上的 D 点也在直线 AM 上，因此 CP 与 AM 有两个交点 D、D'. 但 CP 与 AM 不重合，所以 D、D' 重合，于是直线 BQ 与 BQ' 重合，Q' 与 Q 重合，（第三步，断言原图形具有结论性质）故 $PQ \parallel BC$.

注： 这个证明过程是通常指的同一法的另行构图证明过程. 根据课本的要求，中学生在平面几何中掌握的同一法应是这种另行构图法. 这种方法可以不依赖于同一法则而独立存在①.

再举例说明，有的论题，虽然整个论题不符合同一法则，但仍可用同一证法.

例 5 梯形两底的和等于一腰，则这腰与两底的夹角的平分线通过另一腰的中点.

这个论题不符合同一法则. 将题设与结论的位置交换，得

① 参见武汉师范学院数学系主编《中学数学》杂志 1979年第一期安明道：《论同一法》.

到原论题的一个逆命题： 若四边形 $ABCD$ 的一边 AB 上的两内角的平分线的交点是对边 CD 的中点，则这个四边形是梯形且 $AB=AD+BC$. 显然，这个逆命题是不真实的，只需举一反例：作$\odot E$ 的外切 $\triangle ABO$，如图，M、N 是 BO、AO 边上的切点，过 E 作 $CD\parallel MN$，交 BO、AO 于 C、D，则四边形 $ABCD$ 的 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的平分线的交点 E，是 CD 的中点，但 $ABCD$ 不是梯形，且 $AB\neq AD+BC$.

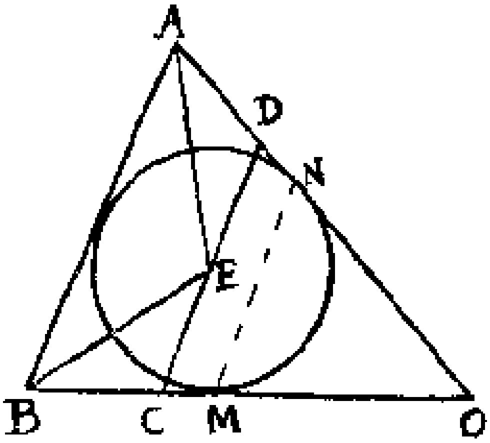


图 2.14

但是，我们可以将原命题的题设、结论的事项细分，按一对一进行交换(其余固定)，得出逆命题. 只要题设中某一事项与结论中的某一事项指的概念的外延是一致的（或者说指的对象是唯一的），则交换之，得到的逆命题为真，使我们有可能利用同一法. 考察本例，如图 2.15. 论题的原命题为：

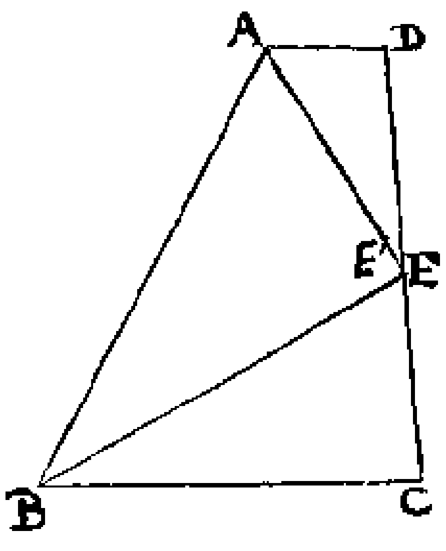


图 2.15

$$\left.\begin{array}{r}E'\text{是}\angle A\text{、}\angle B\text{的平分线的交点，}\\ \text{在梯形 }ABCD\text{ 中，}E\text{ 是 }CD\text{ 的中点，}\\ AB=AD+BC,\end{array}\right\}\Rightarrow E'\text{与 }E\text{ 重合.}$$

在梯形的大前提下，可以制造如下三个逆命题：

$$\text{(1)}\quad\left.\begin{array}{r}E'\text{与 }E\text{ 重合，}\\ \text{在梯形 }ABCD\text{ 中，}E\text{ 是 }CD\text{ 的中点，}\\ AB=AD+BC,\end{array}\right\}\Rightarrow E'\text{是}\angle A\text{、}\angle B\text{的平分线的交点.}$$

$$\text{(2)}\quad\left.\begin{array}{r}E'\text{是}\angle A\text{、}\angle B\text{的平分线的交点，}\\ \text{在梯形 }ABCD\text{ 中，}E'\text{与 }E\text{ 重合，}\\ AB=AD+BC,\end{array}\right\}\Rightarrow E\text{ 是 }CD\text{ 的中点.}$$

$$\text{(3)}\quad\left.\begin{array}{r}E'\text{是}\angle A\text{、}\angle B\text{的平分线的交点，}\\ \text{在梯形 }ABCD\text{ 中，}E\text{ 是 }CD\text{ 的中点，}\\ E'\text{与 }E\text{ 重合，}\end{array}\right\}\Rightarrow AB=AD+BC.$$

不难证明，这三个逆命题都是真实的，相应于每一个逆命题都存在一个证明原命题的同一法．现分述如下．

已知：在梯形 $ABCD$ 中，$AB=AD+BC$，E 是 CD 的中点；

求证：$\angle BAD$、$\angle ABC$ 的平分线经过 E 点．

相应于逆命题（1）的同一证法．

分析：因为$\angle BAD$、$\angle ABC$ 的平分线分别是唯一的，所以它们的交点也是唯一的；而 CD 的中点也是唯一的．因此这

两个概念的外延是一致的，符合同一法则，可用同一法．为此，连 AE、BE，证明它们分别是 $\angle A$、$\angle B$ 的平分线．

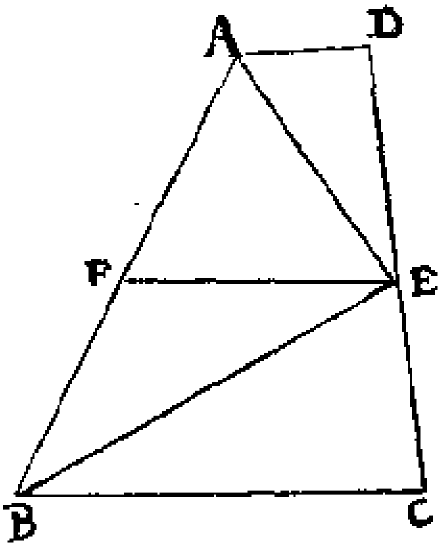


图 2.16

证明：连 AE、BE．过 E 作 $EF \parallel AD$，交 AB 于 F．因为 E 是 CD 的中点，所以 F 是 AB 的中点，因此，EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线，于是 $EF=\frac{1}{2}(AD+BC)=\frac{1}{2}AB=AF=BF$．由此可知，$\angle EAF=\angle AEF$，又 $\angle DAE=\angle AEF$，所以 $\angle EAF=\angle EAD$，即 AE 是 $\angle DAB$ 的平分线．同理，BE 是 $\angle ABC$ 的平分线．故 $\angle BAD$ 与 $\angle ABC$ 的平分线均过 E 点(如图 2.16)．

对应于逆命题(2)的同一证法：设 E' 是 $\angle A$，$\angle B$ 的平分线的交点，F 是 AB 的中点，连 FE'，因为 $\angle DAB$、$\angle ABC$ 是平行线 AD、BC 的同旁内角，所以 $\angle DAB+\angle ABC=180°$，从而 $\angle BAE'+\angle ABE'=90°$，因此 $\triangle ABE'$ 为直角三角形，$\angle AE'B=90°$，于是 $AF=FB=FE'$．因为 $\angle FE'A=\angle FAE'=\angle E'AD$，所以 $FE' \parallel AD$．令 FE 是梯形中位线，所以，$FE \parallel AD$．因此 F、E'、E 共线，但 $FE'=\frac{1}{2}(AF+FB)=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(AD+BC)=FE$．故 E' 与 E 重合，即 E' 是 CD 的中点(如图 2.17)．

对应于逆命题(3)的同一证法：设 E' 是 $\angle DAB$、$\angle ABC$ 的平分线的交点，则 $\triangle ABE'$ 是直角三角形．令 F 是 AB 的中点，则 $FE' \parallel AD$ 且 $FE'=\frac{1}{2}AB$，连 DE'，延长交 BC 于 C'，

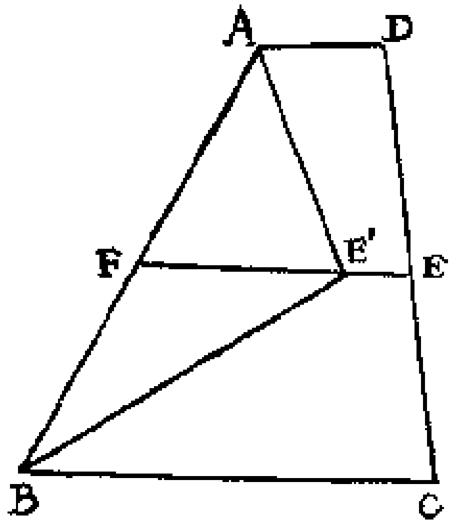


图 2.17

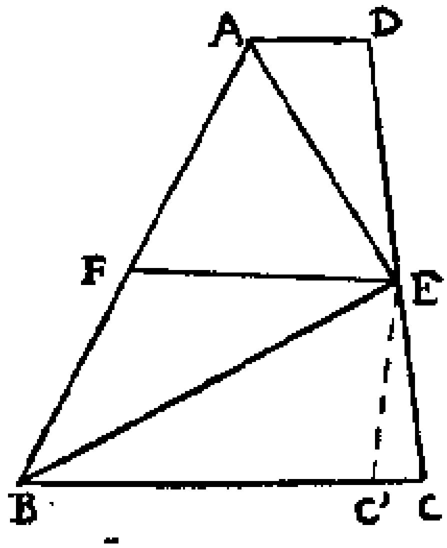


图 2.18

于是 $DE'=E'C'$，因此，$FE'=\frac{1}{2}(AD+BC')$ 故 $AB=AD+BC'$. 但已知 $AB=AD+BC$，所以 $BC'=BC$，即 C' 与 C 重合，也即 E' 是 CD 的中点(如图 2.18).

注：证题时，只需取其中一种证法. 这里介绍三种证法的目的是说明使用同一法的原理，供读者参考，以帮助读者开阔思路.

前三节，我们已按思考的方法、推理的方式、入手的命题等三个方面对不同的证题方法作了介绍，那么，当我们拿到一个几何论题时，究竟应该用哪种证题法呢？一般来说，我们都是先对原命题进行论证，只有当直接论证感到困难时，才考虑间接证法. 推理方式一般都取演绎证法，只有对论题需讨论几个方面情况时，才采用归纳证法. 无论哪种证法，从思考的方法来说，我们一般都以分析法为主，伴之以综合法，从结论和题设两方面进行思考. 以上各类，均属纯几何证法. 现在初中教材，已引进直角坐标系、解三角形、直线与圆的方程等内容. 这些内容从研究的对象来说，都属于平面几何的范畴，只是研

究的工具进步了，数量化了．因而，引用三角的方法和解析几何的方法，可以解决平面几何的相当一部分问题，有时还显得特别简单．因此，证几何题按使用的工具分，有纯几何法和非纯几何法．非纯几何法主要有解析法、三角法．在下节予以介绍．

习 题 三

1．用归谬法证明：(1) 两直线最多只有一个交点．(2) 圆内非直径的两弦，必不能互相平分．

2．用穷举法证明下面定理的逆定理：(1)“在一个三角形中，如果两边不等，那么它们所对角也不等，大边所对的角较大．”(2)“同圆或等圆中，较大的圆心角所对的弧也较大．”

3．用反证法证：若四边形中有一双对边中点的连接线等于他双对边的和的一半，则他们对边必互相平行．

4．用反证法证：设三角形有两个角的平分线相等，则这两角的对边必相等．

5．用同一法证明：三角形外分角线定理的逆定理．

6．用同一法证明：弦的垂直平分线必过圆心．

7．用同一法证：如果一直线截三角形的两边所得的线段对应成比例，那么这条直线平行于第三边．

8．如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle A=20°$，又作CD、BE使$\angle BCD=60°$，$\angle CBE=50°$．

求证：$\angle CDE=30°$，$\angle BED=80°$．

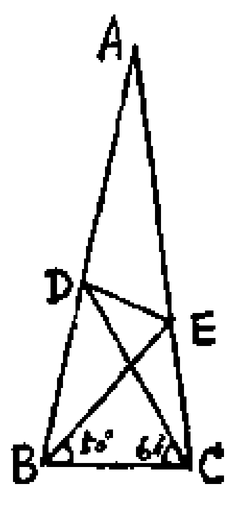


图 2.19

9．在四边形$ABCD$中，如果$\angle A$和$\angle C$的平分线的交点E在

BD 上，则 $\angle B$ 和 $\angle D$ 的平分线的交点 F 在 AC 上.

§4. 证题的解析法与三角法

用解析法、三角法证几何题，可以克服纯几何证法的缺点. 纯几何法是就图形研究图形的性质，一题一法，没有一般的方法可循，因此比较费思. 而解析法、三角法比较容易找到证题途径. 特别是解析法，简直是一个思考途径：几何图形，译成代数语言，变成代数方程，用代数方法研究方程的性质，将方程的性质译成几何的语言，成为几何图形的性质. 当然，解析法也有缺点，一般说来计算量较大，需要有较强的计算能力.

首先举一例，阐明解析法和三角法，并与纯几何法比较优劣.

例 1 已知：如图，$ABCD$ 为正方形，$CE \parallel BD$，$BE=BD$；求证：$DE=DH$.

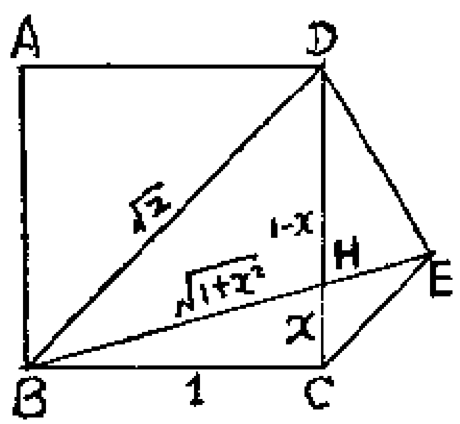


图 2.20

证法一 （分析）：欲证 $DE=DH$，只需 $\angle DEH=\angle DHE$. $\because$ $BD=BE$. $\therefore$ $\angle DEH=\angle BDE$，$\therefore$ 只要证 $\angle DHE=\angle BDE$ 就行了. 又 $\angle DHE=\angle BDH+\angle DBH$. 因此只要证 $\angle EDH=\angle DBH$. 这只要能证明 $\triangle CDE \backsim \triangle DBH$ 就行了. 又 $BD \parallel CE$，$\angle ECD=\angle BDH$，故只要证明 $\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{DH}{DB}$，本题就得证了. 为此，设正方形的边长为 1，$CH$ 为 x，则图中有关线段可以算出（见

图 2.20). $\because$ $CE \parallel BD$, $\therefore \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1-x}{1}$, 解之得, $x=2-\sqrt{3}$. 由 $\dfrac{CE}{\sqrt{2}}=\dfrac{x}{1-x}$ 得, $CE=\dfrac{\sqrt{2}x}{1-x}=\dfrac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$. $\therefore$ $\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, 又 $\dfrac{DH}{DB}=\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}=\dfrac{1-(2-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$. 因此, $\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{DH}{DB}$. 于是本题可证(证明从略).

证法二 (分析): 假设 $DE=DH$ 则 $\angle DEH=\angle DHE$. 又 $BE=BD$, $\therefore$ $\angle DEH=\angle BDE$. 因此 $\angle EDH=\angle DBE$, 令 $\angle EDH=x$, 注意到 $\angle BDC=45^\circ$ 则有 $x+2(45^\circ+x)=180^\circ$, $\therefore$ $x=30^\circ$. 因此, 只要证明 $\angle DBE=30^\circ$, 则本题获证. 根据定理"在直角三角形中, 若直角边等于斜边之半, 则其所对的锐角为 30°", 构造 $rt\triangle EBF$ (即作辅助线 $EF\perp BD$, F 为垂足), 只要证明 $EF=\dfrac{1}{2}BE=\dfrac{1}{2}BD$ 即可. 连 AC 交 BD 于 O, 由于 AC、BD 垂直而且平分, 由于 $CE \parallel BD$, 所以 $EF=OC=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}BD$. 故获证(证明从略).

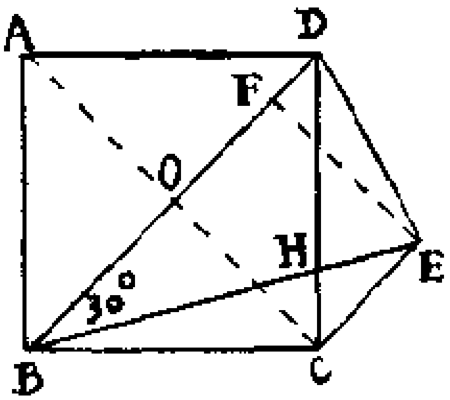


图 2.21

证法一与证法二都是纯几何的方法, 证法一不添辅助线, 但证题过程较长, 转弯较多, 没有较强的逻辑推理能力难以证出; 证法二简捷, 但要添加辅助线, 思路难以寻觅, 没有较强的灵活性也不足以证出. 可见纯几何法的共性是比较费思. 下面介绍的解析法与三角法, 则思路简单, 容易想到, 容易证

出。

证法三(解析法)　(分析)：从解析法的角度，欲证 $|DE|=|DH|$，只要分别算出 $|DE|$ 与 $|DH|$ 即可．因此只要知道 D、E、H 在某一坐标系下的坐标即可．为此，要适当选择坐标系，务使 D、E、H 的坐标尽可能简单，以简化运算．

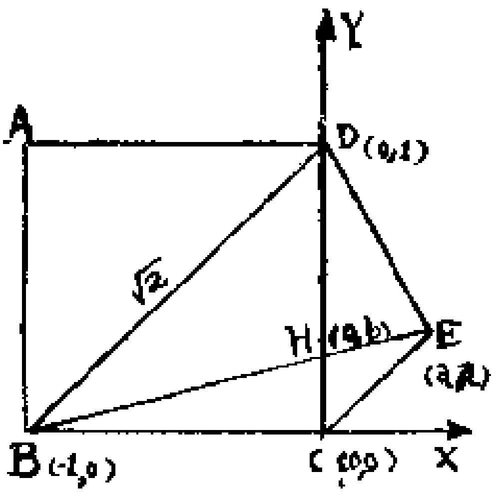


图 2.22

证明：取坐标系如图，设正方形的边长为 1，则 B、C、D 的坐标如图示．$\because$ $CE\parallel BD$，$\therefore$ $\angle ECX=\angle DBC=45^\circ$，$\therefore$ CE 的方程为 $y=x$．于是可设 E 的坐标为 $(a,\ a)$，由 $|BE|=|BD|=\sqrt{2}$ 知，$\sqrt{(a+1)^2+a^2}=\sqrt{2}$，$\because$ E 在第一象限，$\therefore$ $a>0$，解方程得 $a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，因此，$|DE|=$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}-1\right)^2}=\sqrt{3}-1.$$

又 BE 的方程为：

$$\frac{y}{x+1}=\frac{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}{-1+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}=2-\sqrt{3}.$$

由于 H 在 y 轴上，可设其坐标为 $(0,\ b)$，代入上方程得 $b=2-\sqrt{3}$．于是 $|DH|=1-(2-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1$．故 $|DE|=|DH|$．

证法四(三角法)(分析)：在证法二的分析中，欲证 $\angle DBE=30^\circ$，从三角学的角度出发，就是要解斜三角形求 $\angle DBE=?$，注意到 $\triangle BDE$ 不可解，但 $CE\parallel BD$，$\angle BEC=\angle DBE$，而

$\triangle BCE$ 可解.

证明：在$\triangle BCE$中，设 $BC=1$，$BE=BD=\sqrt{2}$. $\angle BCE=90^\circ+45^\circ=135^\circ$，由正弦定理：$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}=\dfrac{1}{\sin\angle BEC}$，$\therefore$ $\sin\angle BEC=\dfrac{1}{2}$，因此，$\angle BEC=30^\circ$，$\angle DHE=\angle HCE+\angle HEC=45^\circ+30^\circ=75^\circ$，又由 $CE\parallel BD$，$\angle DBE=\angle BEC=30^\circ$. $\because$ $BE=BD$，$\therefore$ $\angle BED=\dfrac{1}{2}(180^\circ-30^\circ)=75^\circ$. $\therefore$ $\triangle DHE$ 为等腰三角形. 故 $DE=DH$.

为了进一步说明问题，我们再举两个例子，分别说明解析法与三角法.

例 2 证明：若圆的内接四边形的两条对角线互相垂直，则从对角线的交点到一边中点的线段长等于从圆心到这一边的对边的距离.

已知：$ABCD$ 为$\odot O$的内接四边形，$AC\perp BD$，相交于 H，E 是 AD 的中点，$OF\perp BC$，F 为垂足.

求证：$HE=OF$.

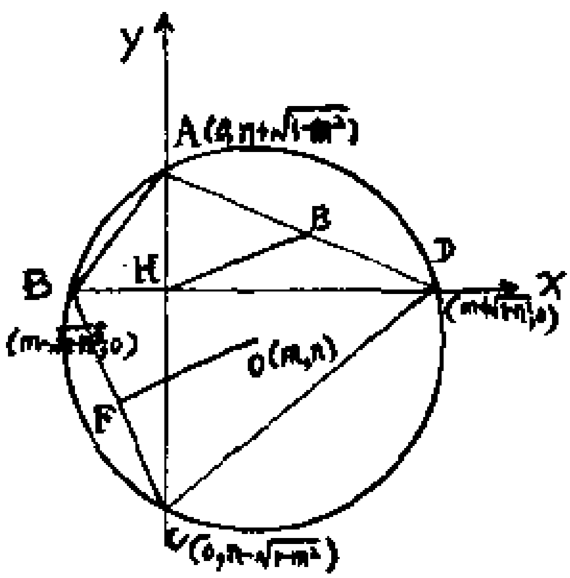


图 2.23

证明：分别以 BD、AC 为 x、y 轴，得坐标系如图. 可设$\odot O$的方程为：$(x-m)^2+(y-n)^2=1$. 令 $y=0$，得 $x=m\pm\sqrt{1-n^2}$ 是 D、B 的横标；令 $x=0$，得 $y=n\pm\sqrt{1-m^2}$ 是 A、C 的纵标，$\because$ E 是 AD 的中点，$\therefore$

E 的坐标为$\left(\frac{m+\sqrt{1-n^2}}{2}, \frac{n+\sqrt{1-m^2}}{2}\right)$. $\therefore$ $HE^2 =$ $\left(\frac{m+\sqrt{1-n^2}}{2}\right)^2+\left(\frac{n+\sqrt{1-m^2}}{2}\right)^2$. 又 $\because OF\perp BC$, $\therefore F$ 是 BC 的中点，$\therefore F$ 的坐标为：$\left(\frac{m-\sqrt{1-n^2}}{2}, \frac{n-\sqrt{1-m^2}}{2}\right)$,

$$\therefore OF^2=\left(m-\frac{m-\sqrt{1-n^2}}{2}\right)^2+\left(n-\frac{n-\sqrt{1-m^2}}{2}\right)^2$$

$=\left(\frac{m+\sqrt{1-n^2}}{2}\right)^2+\left(\frac{n+\sqrt{1-m^2}}{2}\right)^2$. 因此，$HE^2=OF^2$, 故 $|HE|=|OF|$.

例 3 求证：对于任意 $\triangle ABC$，以其三边为边向外作三个等边三角形，联结它们的中心，构成一个等边三角形.

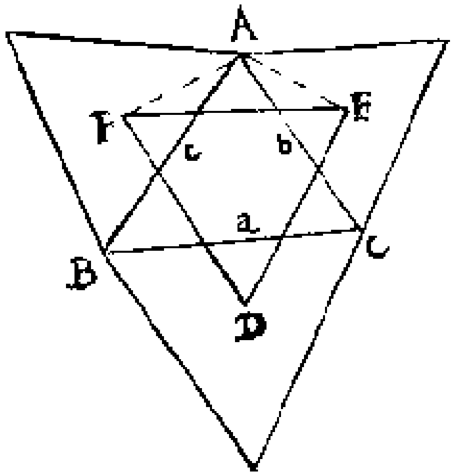


图 2.24

证明：设$\triangle ABC$ 的边长为 a、b、c，向外所作正三角形的中心分别为 D、E、F，如图.

$\because$ AE 为所在正三角形中线长的 $\frac{2}{3}$, $\therefore$ $AE=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{\sqrt{3}}{3}b$;

同理，$AF=\frac{\sqrt{3}}{3}c$. 又 $\angle EAF=60^\circ+\angle BAC$, 因此在 $\triangle AEF$ 中：

$$EF^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}b\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}b\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}c\cdot\cos(60^\circ+\angle BAC)$$

$$=\frac{1}{3}[b^2+c^2-2bc(\cos60^\circ\cos\angle BAC-\sin60^\circ\sin\angle BAC)]$$

$$=\frac{1}{3}\left[b^2+c^2-bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\sqrt{3}bc\cdot\frac{a}{2R}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{\sqrt{3}abc}{2R}\right]$$

(其中 R 为外接圆半径)

同理可求，$FD^2=DE^2=\frac{1}{3}\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{\sqrt{3}abc}{2R}\right]$，于是 $EF^2=FD^2=DE^2$，即 $|EF|=|FD|=|DE|$. 故 $\triangle DEF$ 为等边三角形.

下面，我们将解析法与三角法施于较困难的平面几何题，可以看出，这样作可收到很好的效果.

例 4 在一个面积为 $32cm^2$ 的平面凸四边形中，两条对边和一条对角线的长度之和为 $16cm$. 确定另一条对角线的所有可能的长度.

解法一(解析法)：设 $S_{\square ABCD}=32cm^2$，$|AB|+|CD|+|AC|=16cm$，取坐标系如图示. 可设 A、B、C、D 的坐标为 $(-a,\ 0)$、$(b,\ -b')$、$(c,\ 0)$、$(0,\ d)$. 其中 a、b'、c、d 为非负数，b 为实数. 于是，$\frac{1}{2}(c+a)d+\frac{1}{2}(c+a)b'=32$，或 $(a+c)(b'+d)=64$ (1)，$\sqrt{(a+b)^2+b'^2}+\sqrt{c^2+d^2}+a+c=16$ (2). 由于 $b'\leqslant\sqrt{(a+b)^2+b'^2}$，$d\leqslant\sqrt{c^2+d^2}$. 所以 $b'+d\leqslant\sqrt{(a+b)^2+b'^2}+\sqrt{c^2+d^2}=16-(a+c)$ (3). 将(3)代入(1)：$(a+c)[16-(a+c)]\geqslant 64$，$(a+c)^2-16(a+c)+64\leqslant 0$，即 $(a+c-8)^2\leqslant 0$. 只有等号可以成立，即 $a+c=8$. 此时，由(3)知：

$$\begin{cases}c=0,\\a+b=0.\end{cases}$$

解方程组$\begin{cases}a+c=8, \\ c=0, \\ a+b=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}a=8, \\ b=-8, \\ c=0,\end{cases}$ 代入(2)：

$b'+d+8=16$，$b'+d=8$．故另一条对角线 $|BD|=$ $\sqrt{b^2+(b'+d)^2}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}\ (cm)$．

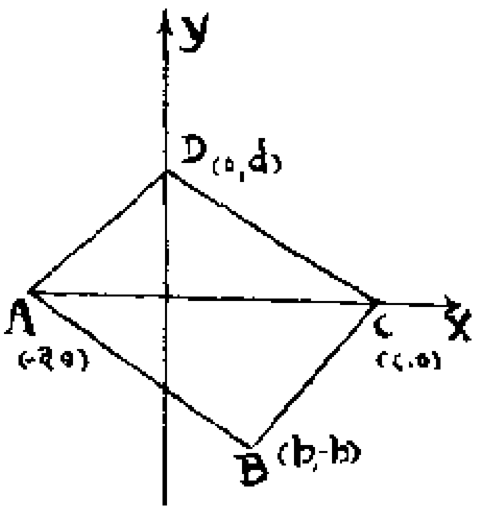


图 2.25

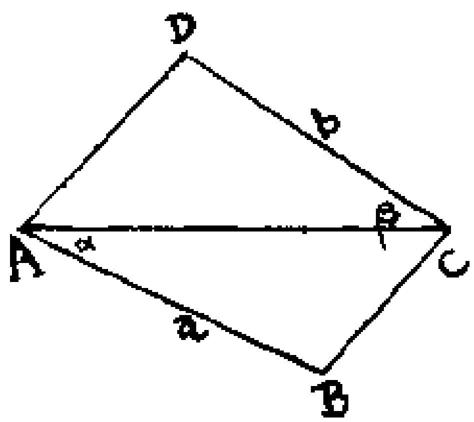


图 2.26

解法二(三角法)：设凸四边形 $ABCD$ 两对边 $AB=a$，$CD=b$，一条对角线 $AC=c$．则 $a+b+c=16\cdots(1)$
又设$\angle BAC=\alpha$，$\angle ACD=\beta$．$0<\alpha$、$\beta<\pi$．于是，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin\alpha$，$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}bc\sin\beta$．故 $S_{\square ABCD}=\frac{1}{2}ac\sin\alpha+\frac{1}{2}bc\sin\beta=\frac{1}{2}c(a\sin\alpha+b\sin\beta)=32\cdots(2)$．由(2)：$64=c(a\sin\alpha+b\sin\beta)\leqslant c(a+b)$，$\cdots(3)$．其中等号当且仅当 $\alpha=\beta=90°$ 时才能成立．由(1)：$a+b=16-c$，代入(3)：$64\leqslant c(16-c)=16c-c^2$，即$c^2-16c+64\leqslant 0$，$(c-8)^2\leqslant 0$，只有等号能成立，故 $c=8$．此时，$\alpha=\beta=90°$，四边形 $ABCD$ 如图 2.27 示：
另一条对角线 $BD=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}\ (cm)$．

例 5 在已知正方形 $ABCD$ 内侧，作等边△ABK、BCL、CDM 和 DAN. 试证：KL，LM，MN 和 NK 这四条线段的中点和 AK、BK、BL、CL、CM、DM、DN、AN 等八个线段的中点是一个正十二边形的顶点.

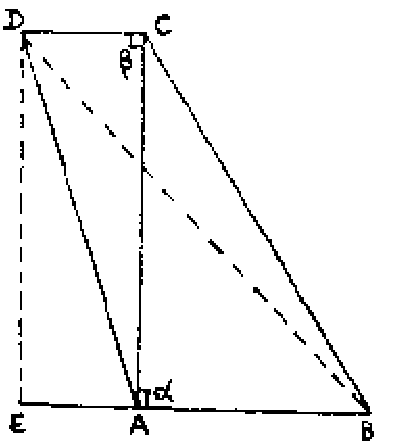


图 2.27

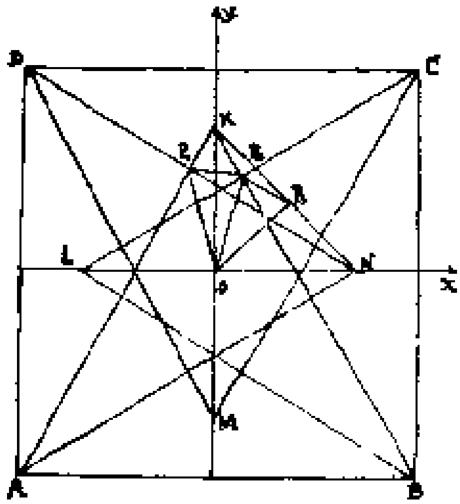


图 2.28

证明(解析法)：设正方形的中心为 O，取坐标系如图所示. 设 P_1、P_2、P_3 分别是 DN、CL、NK 的中点，若能证明 $|OP_1|=|OP_2|=|OP_3|$，则依对称性，题中十二个线段的中点均在以 O 为心的圆周上；若能证明 $|P_1P_2|=|P_2P_3|$，则依对称性，题中十二个线段的中点将圆周十二等分，故十二边形 $P_1P_2P_3\cdots$ 为正十二边形. 事实上，令 $|AB|$ 为 2 个长度单位，则 P_1 的坐标为 $\left(-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$P_2$ 的坐标为 $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$P_3$ 的坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$. 经计算得：$|OP_1|=|OP_2|=|OP_3|=\sqrt{2-\sqrt{3}}$，$|P_1P_2|=|P_2P_3|=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$. 证毕.

例 6 在一个定圆内有一定点 P，圆周上有 A、B 两个

动点，$\angle BPA=90^\circ$，以 PA，PB 为边，构成平行四边形，点 Q 是 P 斜对的一个顶点，当 A、B 在圆周上移动时，求证：Q 点的轨迹是一个圆.

证：以 P 为原点，PA、PB 所在直线为 x 轴、y 轴，构成平面直角坐标系. 那么 Q 的坐标就是 A、B 在两个坐标轴上的坐标. 设圆心为 $O(a,b)$，半径为 r，$|OP|=d$，则圆 O 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. 令 $y=0$，得 Q 之横标为 $x=a+\sqrt{r^2-b^2}$. 同理，纵标为 $y=b+\sqrt{r^2-a^2}$，因此，$|OQ|^2=(a+\sqrt{r^2-b^2}-2)^2+(b+\sqrt{r^2-a^2}-b)^2=2r^2-(a^2+b^2)=2r^2-d^2$. 故 $|OQ|=\sqrt{2r^2-d^2}$，为定值. 即 Q 之轨迹为以 O 为心，$\sqrt{2r^2-d^2}$ 为半径的同心圆.

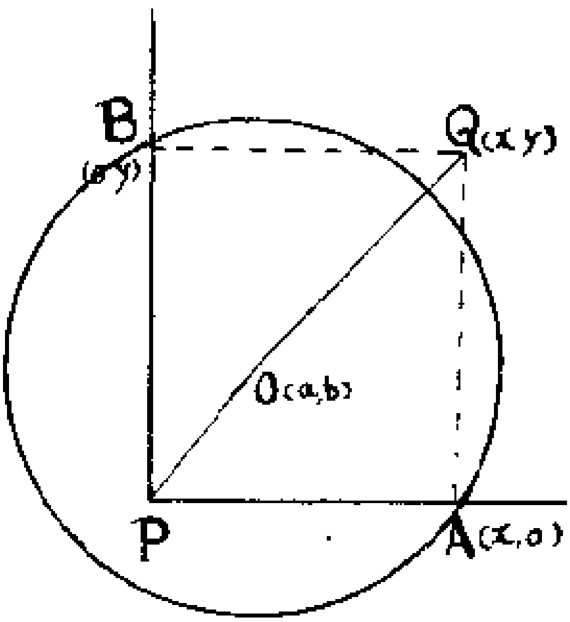


图 2.29

最后说明几点：

第一，解析法、三角法虽然是证几何题的一种有效办法，但它同其他的证题法一样，也不是万能的. 不是所有的几何题都能用它证出或使证明简单. 如下面的题目，用解析法、三角法就困难：已知$\triangle ABC$ 中 BE、CF 分别是$\angle B$、$\angle C$ 的平分线，且$\angle B<\angle C$；求证：$BE>CF$.

第二，用解析法证题有些必要的定理、公式需要熟练地掌握，以备应用. 如：两点间的距离公式，定比分点公式、三角形的面积公式，直线的斜率公式，两直线夹角的正切公式，两直线平行、垂直的充要条件，点到直线的距离公式，直线和圆

的各种类型的方程式，圆的切线的方程式等.

第三，在用解析法证题时要特别注意坐标系的选取，务使坐标系选在特定位置. 如利用图形中的垂直线段为坐标轴，对称中心为原点，半径或正方形的边长为长度单位，等等. 以便使得图形上的主要点的坐标尽可能简单，巴不得都是零和一；使得直线或圆的方程尽可能简单，从而简化计算过程. 当图中既有直线又有圆时，坐标系的选取一般应使圆的方程尽可能简单，因为圆是二次方程而直线是一次方程. 在例 1 中，我们的坐标系使 B、C、D 的坐标均是 O、1、-1，便于计算. 在例 2 中，我们利用了对角线互相垂直，使四边形的顶点均是坐标轴与圆的交点，易求坐标，边的中点坐标也容易求得. 在例 4 中，坐标系的选取不仅使四边形的顶点坐标简单而且使四边形的面积容易表出. 在例 5 中，我们利用了图形的对称中心，使计算简化. 在例 6 中我们利用了题设的直交线段 PA、PB 为坐标轴，使 Q 的坐标极易求出.

习 题 四

从 1—10 题可用解析法：

1. 已知 AC、BD 是半径为 R 的 $\odot O$ 的切线，$AC \parallel BD$，CD 是 $\odot O$ 的动切线且与 AC、BD 相交于 C、D，A、B、E 为切点；求证：$AC \cdot BD =$ 常量.

2. 已知 $\angle xoy = 60°$，M 是 $\angle xoy$ 内一点，它到两边的距离分别为 2 和 11；求证：OM 的长为 14.

3. 设 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，BC 为底边，D 为从 A 到 BC 的垂足，以 AD 为直径作圆，由 B、C 依次作圆的切线 BE 和 CF（不同于 BC），E、F 为切点；证明：EF 弦在 $\triangle ABC$ 内部一段的长等于它在外部两段长之和.

4. OA、OB 是已知$\odot O$的任意两条半径，从 B 引 $BE\perp OA$，垂足为 E，过 E 作 $EP\perp AB$，垂足为 P；求证：OP^2+EP^2 为一定值.

5. 矩形 $ABCD$ 的一个顶点 A 在半径为 R 的$\odot O$内，两顶点 B、D 在圆上；求证：$OA^2+OC^2=2R^2$.

6. 任何内接于矩形的三角形(顶点在矩形的边上)的面积，不超过矩形面积的一半.

7. 在 $rt\triangle ABC$ 中，$AB=BC$，$\angle B=90°$，D 是 BC 的中点，$BE\perp AD$，交 AD 于 E，延长交 AC 于 F，连 FD；则$\angle ADB=\angle FDC$.

8. 已知 PA、PB 是$\odot O$的切线，A、B 是切点，AC 是$\odot O$的直径，$BD\perp AC$，D 为垂足，PC 与 BD 相交于 E；求证：$BE=ED$.

9. 平面上两组平行线垂直相交，每组平行线的间隔均是一个长度单位，每两直线的交点称为平面格点；试证明不存在以格点为顶点的正三角形.

10. AD 是$\triangle ABC$的高，O 是 AD 上任意一点，连 BO，延长交 AC 于 E，连 CO 延长交 AB 于 F，连 DE、DF；则有$\angle EDO=\angle FDO$.

从 11—17 题可用三角法：

11. 已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=\frac{1}{3}BC$，E、F 是 BC 边的等分点；求证：$\angle ACB+\angle AFB+\angle AEB=90°$.

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=2$，AC、BD 的交角为 45°；试证：$\square ABCD$ 的面积为 6.

13. 在正方形 $ABCD$ 的 CD 边上任取一点 M，作$\angle ABM$的平分线交 AD 于 K；求证：$BM=CM+AK$.

14. 若一直线交$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB或其延长线于X、Y、Z；则$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1$.

15. 若一定点P与$\triangle ABC$三顶点的连线顺次交对边于X、Y、Z，则$\frac{XB}{CX}\cdot\frac{YC}{AY}\cdot\frac{ZA}{BZ}=1$.

16. 设AB和CD为$\odot O$的两条定直径，P是圆周上任一点，$PM\perp AB$，垂足为M，$PN\perp CD$，垂足为N；求证MN为定长.

17. 已知圆内二弦AB、CD交于M，过A、C分别作切线交于P，过B、D分别作切线交于Q；求证P、M、Q共线.

从18—22题可用三角法或解析法，但较繁：

18. 设四条直线m_1、m_2、m_3、m_4顺次相交于一点O，在m_1上任取一点A_1，过A_1作$A_1A_2\parallel m_4$，交m_2于A_2；过A_2作$A_2A_3\parallel m_1$，交m_3于A_3；过A_3作$A_3A_4\parallel m_4$，交m_4于A_4；过A_4作$A_4A_5\parallel m_3$，交m_1于A_5；试证：$OA_5<\frac{1}{2}OA_1$.

19. 证明：圆内接n边形中，当其为正n边形时面积最大.

20. 已知L是$\odot O$外的一直线，$OP\perp L$，P为垂足，C、D是$\odot O$上的任意两点，E、F是CP、DP与$\odot O$的交点，A、B是DE、CF与L的交点；求证：$AP=BP$.

21. 将四边形每边三等分，将对边分点对应联结，则中间的四边形的面积等于原四边形面积的九分之一.

22. 由圆外一点P向圆引两条切线PA、PB，A、B为切点，又引任意两条割线PCD、PEF，C、D、E、F分别是割线与圆的交点. 试证：AB、CF、DE三弦共点.

第三章　添辅助线

§1.　添辅助线要有的放矢

从第二章第四节例1可以看出，作辅助线恰当，可以使证法大大简化，有些问题不作适当的辅助线简直无法解．整个几何证题，不要添辅助线的是少数，大多数都要添辅助线．但添辅助线无一般方法可循，主要靠读者在学习的过程中，在证题的过程中摸索、积累，形成经验．不过，添辅助线要有一定的目的，也就是说，在证题过程中，为了达到证明题目结论的目的，需要某一个条件，但是原图形不能提供，只有添辅助线作出辅助图形，创造出这个需要的条件，从而达到我们要证的目的．简单地说，添辅助线要有的放矢．如第二章第四节例1中(图2.21)“过E作$EF\perp BD$，垂足为F”，这条辅助线EF不是盲目作的，它是根据思考过程，分析到只要证$\angle DBE=30°$，问题就迎刃而解了．因此，根据定理“直角三角形一锐角所对直角边是斜边的一半，则这个锐角为30°”，我们就作EF，使$\angle DBE$成为rt$\triangle EBF$的一个锐角，再只要证明$EF=\frac{1}{2}BE$就行了．可见，作EF就是为了构造rt$\triangle EBF$．如果毫无目的地乱添辅助线，其结果不但找不到证题途径，而且会使图形显得复杂化，以致遮掩我们的视线，妨碍证题途径的探索．

一般说来，添辅助线的目的主要有以下几个：

(1) 把已知条件和待证的结论聚集在一起，使它们发生联系，促进未知向已知转化.

例 1 AM 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中线，任作一直线交 AB、AC、AM 于 P、Q、N，求证：

$$\frac{PB}{PA}+\frac{QC}{QA}=2\cdot\frac{NM}{NA}.$$

分析：求证的等式中的线段分布在三条直线上，比较散，不易找出相互关系，我们可以将它们聚集在一条直线上，使彼此关系密切，便于论证. 为此，作 $BB'\parallel PQ$，$MM'\parallel PQ$，分别交 AC 于 B'、M'.

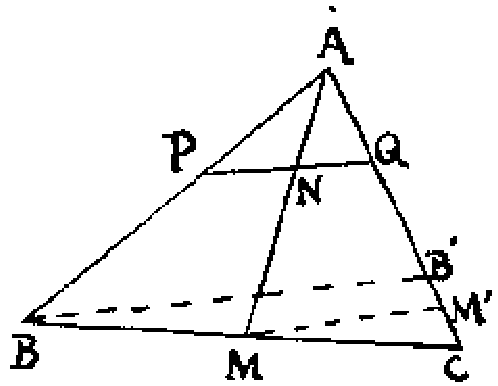


图 3.1

由于 $\frac{PB}{PA}=\frac{QB'}{QA}$，$\frac{NM}{NA}=\frac{QM'}{QA}$，所以，只须证 $\frac{QB'}{QA}+\frac{QC}{QA}=2\cdot\frac{QM'}{QA}$，即 $QB'+QC=2\cdot QM'$，也就是 $QB'+(QB'+B'C)=2(QB'+B'M')$，$B'C=2B'M'$. 这说明 M' 应是 $B'C$ 的中点. 由于 M 是 BC 的中点且 $MM'\parallel BB'$，$\therefore$ M' 是 $B'C$ 的中点. 故本题可证.

证明：分别过 B、M 作 $BB'\parallel PQ$、$MM'\parallel PQ$，交 AC 于 B'、M'. 于是 $\frac{PB}{PA}=\frac{QB'}{QA}$，$\frac{NM}{NA}=\frac{QM'}{QA}$. 又 M 是 BC 的中点，$\therefore M'$ 也是 $B'C$ 的中点，即 $2B'M'=B'C$. 因此，$QB'+(QB'+B'C)=2(QB'+B'M')$，$QB'+QC=2\cdot QM'$，

$$\frac{QB'}{QA}+\frac{QC}{QA}=2\cdot\frac{QM'}{QA}，故\frac{PB}{PA}+\frac{QC}{QA}$$

$$=2\cdot\frac{NM}{NA}.$$

(2) 造第三线或第三角作媒介，使欲证的二线或二角发生联系.

例 2 在 $\triangle ABC$ 的 BC 边的延长线上取一点 D，在 AC 上取一点 E，使 $\frac{BD}{CD}=\frac{AE}{EC}$. 求证：$DE$ 的延长线二等分 AB.

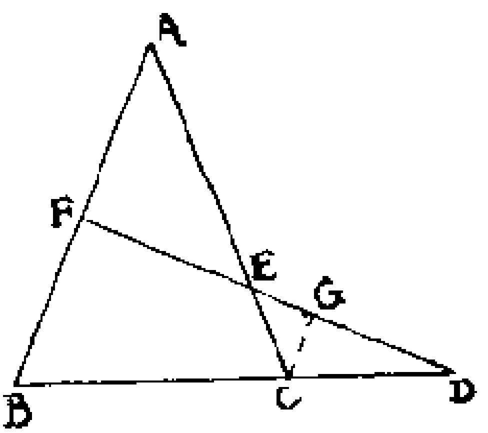


图 3.2

分析：已知条件的比例式中的线段，BD、CD 与 AE、CE 之间的关系不明显，但它们分别与待证相等的线段 BF、AF 有点联系，BF 与 BD 位于 $\triangle DBF$ 中，AF 与 AE 位于 $\triangle EAF$ 中，只要沟通了 $\frac{BD}{CD}$、$\frac{AE}{EC}$ 与 BF、AF 之间的关系，问题就解决了. 这就需要造媒介线 $CG\parallel AB$，交 DE 于 G，于是 $\frac{BF}{CG}=\frac{BD}{CD}$，$\frac{AF}{CG}=\frac{AE}{EC}$.

证明：设 DE 的延长线交 AB 于 F. 过 C 作 $CG\parallel AB$，则 $\triangle CEG\backsim\triangle AEF$，因此 $\frac{AE}{EC}=\frac{AF}{CG}$. 又 $\triangle DBF\backsim\triangle DCG$，因此 $\frac{BF}{CG}=\frac{BD}{CD}$. 但是 $\frac{AE}{EC}=\frac{BD}{CD}$，所以 $\frac{AF}{CG}=\frac{BF}{CG}$，故 $AF=BF$，即 DE 的延长线二等分 AB.

(3) 施割补术，造线段、角、或面积的和差倍分，使结论单一，便于寻找证题路经.

例 3　在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，BD、CE 为高线，求证：$AB+CE>AC+BD$.

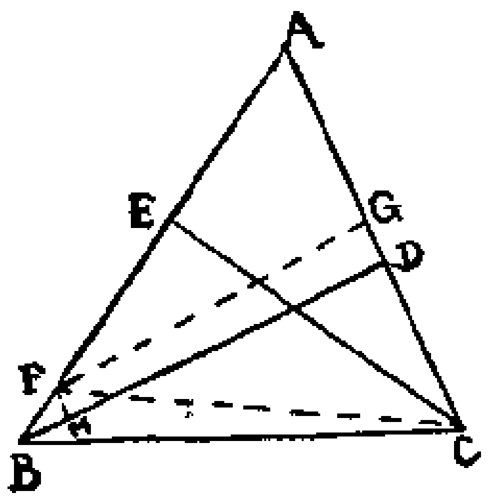


图 3.3

分析：欲证 $AB+CE>AC+BD$，即证 $AB-AC>BD-CE$. 于是在 AB 上取 $AF=AC$，则 $BF=AB-AC$，$\triangle AFC$ 为等腰三角形. 作 $FG\perp AC$，G 为垂足，则 $FG=CE$，再作 $FH\perp BD$，H 为垂足，则 $BH=BD-FG=BD-CE$. 只须证 $BF>BH$. 然而这是极显然的，此处的辅助线构造了两对线段的差，即施割术，将一个复杂的问题转化成一个极简单的题目.

证明：在 AB 上截取 $AF=AC$，则 $BF=AB-AC$，$\triangle AFC$ 为等腰三角形. 作 $FG\perp AC$，G 为垂足，则 $FG=CE$. 再作 $FH\perp BD$，H 为垂足，则 $BH=BD-FG=BD-CE$. 在 $\mathrm{rt}\triangle FBH$ 中，$BF>BH$，即 $AB-AC>BD-CE$，亦即 $AB+CE>AC+BD$.

例 4　在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，M 为其外接圆 $\overset{\frown}{BAC}$ 的中点；求证：$MB^2-MA^2=AB\cdot AC$.

分析：欲证 $MB^2-MA^2=AB\cdot AC$，只须证 $(MB+MA)(MB-MA)=AB\cdot AC$. 因此，须作出线段 MB、MA 的和与差，并使之与 AB、AC 共位于二相似三角形之中. 为此，施割补术. 延长 BM 至 E 使 $ME=MA$，连 EA，则和线段

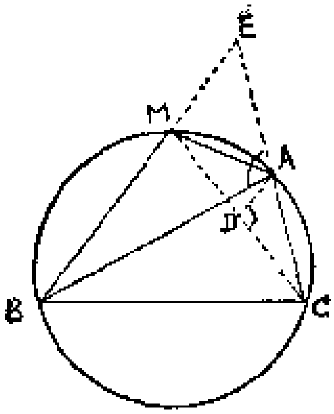


图 3.4

BE 与 AB 位于 $\triangle ABE$ 中．又连 MC，$\because$ M 是 $\overset{\frown}{BAC}$的中点，$\therefore$ $MC=MB$．在 MC 上截取$MD=MA$，则差线段CD与 AC 位于 $\triangle DCA$ 中．只须证明 $\triangle ABE\backsim\triangle DCA$，则命题获证．注意到 $\angle ABE=\angle ACM$，因此，只须证明 $\angle BAE=\angle CDA$ 即可．这可以通过代换得到．

证明：$\because$ $AB>AC$，$\therefore$ A 在劣弧 $\overset{\frown}{MC}$ 上，因此 $MB>MA$．延长 BM 至 E，使 $ME=MA$，则 $BE=MB+MA$，连 EA．连 MC，$\because$ M 是 $\overset{\frown}{BAC}$ 的中点，$\therefore$ $MC=MB$．在 MC 上截取 $MD=MA$，则 $CD=MB-MA$，连 AD．在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle DCA$ 中，$\angle ABE=\angle ACM$，又 $\angle BAE=\angle BAM+\angle MAE=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BM}+\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AME)=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BM}+90^\circ-\frac{1}{2}\angle AME=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BM}+90^\circ-\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BM}+90^\circ-\frac{1}{4}(\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{MA})=90^\circ+\frac{1}{2}\overset{\frown}{BM}-\frac{1}{4}(2\overset{\frown}{BM}-\overset{\frown}{AC})=90^\circ+\frac{1}{4}\overset{\frown}{AC}$；

$\angle CDA=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AMD)=90^\circ+\frac{1}{4}AC$．

$\therefore$ $\angle BAE=\angle CDA$．故 $\triangle ABE\backsim\triangle DCA$．

于是 $\frac{BA}{BE}=\frac{CD}{CA}$，即 $BE\cdot CD=AB\cdot AC$，亦即 $(BM+MA)(MB-MA)=AB\cdot AC$，亦即 $MB^2-MA^2=AB\cdot AC$．

例 5 已知 O、H 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和垂心，$OE\perp$

BC，垂足为 E；求证：$AH=2\cdot OE$.

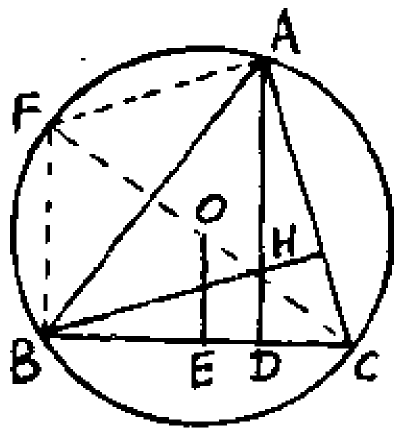


图 3.5

分析：只须作一线段使之等于二倍 OE，再证此线段等于 AH 即可．为此，连 CO 延长与外接圆相交于 F，连 BF，因为 CF 是直径，所以 $\angle CBF=90°$，于是 $OE\parallel FB$．又 O 是 CF 的中点，所以 OE 是 $\triangle CFB$ 的中位线，即 $BF=2\cdot OE$．只要证明 $BF=AH$ 即可．事实上，$AFBH$ 是平行四边形．

证明：连 OC 延长交外接圆于 F，连 BF，因为 CF 是直径，所以 $BF\perp BC$，又 $OE\perp BC$，因此 BF 平行于 OE．但 O 是 CF 的中点，所以 OE 是 $\triangle CFB$ 的中位线，因此 $BF=2\cdot OE$．另外，因为 H 为垂心，延长 AH 交 BC 于 D，则 $AD\perp BC$，因此 $BF\parallel AH$．再连 AF，$\angle CAF$ 也是直径 CF 上的圆周角，所以 AF 垂直于 AC，BH 也垂直于 AC，因此 $BH\parallel AF$．于是，$AFBH$ 为平行四边形．故 $AH=BF$，即 $AH=2\cdot OE$.

例 6 在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=\frac{1}{2}DA$；求证：$2\cos(A+D)=4(\cos A+\cos D)-5$.

分析：欲证题中的等式，须置 $\angle A$、$\angle D$ 于同一三角形之中，注意到题设 AD 是 AB、BC、CD 的二倍，取线段 AD 的中点 E，将 AD 二等分，则 $AE=ED=AB=BC=CD$，连

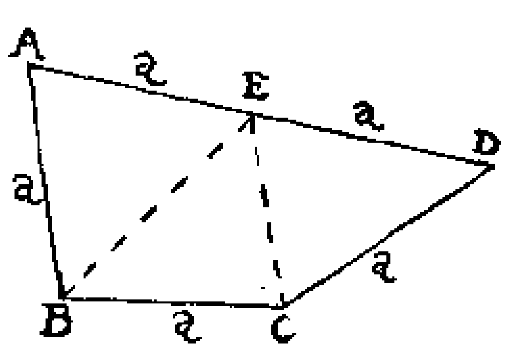


图 3.6

BE、CE. 则 $\angle BEC$ 可用 $\angle A$、$\angle D$ 表出，BE、CE 也可用 $\angle A$、$\angle D$ 表出. 于是 $\angle A$、$\angle D$ 的关系可由 $\triangle BCE$ 解出. 此处辅助线 BE、CE 就是取 AD 的中点 E，分别与 B、C 连结而成，它们将 AD 割成二等分.

证明：取 AD 的中点 E，连 BE、CE，设 $AB=a$，$\angle A=\alpha$，$\angle D=\beta$，则 $\triangle ABE$ 为等腰三角形，$BE=2a\sin\frac{\alpha}{2}$，$\angle AEB=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$；同样，$CE=2a\sin\frac{\beta}{2}$，$\angle CED=90^\circ-\frac{\beta}{2}$. 于是，在 $\triangle BCE$ 中，$\angle BEC=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)-\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\alpha+\beta}{2}$，且 $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{BE^2+CE^2-BC^2}{2\cdot BE\cdot CE}$

$$=\frac{4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+4a^2\sin^2\frac{\beta}{2}-a^2}{2\cdot 4a^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

$$=\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}+4\sin^2\frac{\beta}{2}-1}{2\cdot 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}},$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$$

$$=\frac{3-2(\cos\alpha+\cos\beta)}{2},$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta-(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)$$

$$=\frac{3-2(\cos\alpha+\cos\beta)}{2},$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta-1-\cos\alpha\cos\beta+(\cos\alpha+\cos\beta)$$

$$= \frac{3-2(\cos\alpha+\cos\beta)}{2},$$

$$-2\cos(\alpha+\beta)-2+2(\cos\alpha+\cos\beta)$$

$$=3-2(\cos\alpha+\cos\beta),$$

$$2\cos(\alpha+\beta)=4(\cos\alpha+\cos\beta)-5,\text{ 即}$$

$$2\cos(A+D)=4(\cos A+\cos D)-5.$$

以上列举了割补线段，为和差倍分的例子，关于角的割补可类似进行，下面再举一个割补面积的例子.

例 7 如图，M 是 $\square ABCD$ 的对角线 BD 的中点，EF 过 M 且平行于 AC；求证：$\triangle BCE$ 的面积等于 $\square ABCD$ 的面积的一半.

分析：作一个图形，使其面积是 $\square ABCD$ 的面积的一半，再证它与 $\triangle BCE$ 等积. 注意到 M 是 BD 的中点，而三角形的中线将三角形分成两个等积形. 因此，连辅助线 AM、CM，则 $\triangle ABM$ 的面积 $=\frac{1}{2}\triangle ABD$ 的面积，$\triangle BCM$ 的面积 $=\frac{1}{2}\triangle BCD$ 的面积，

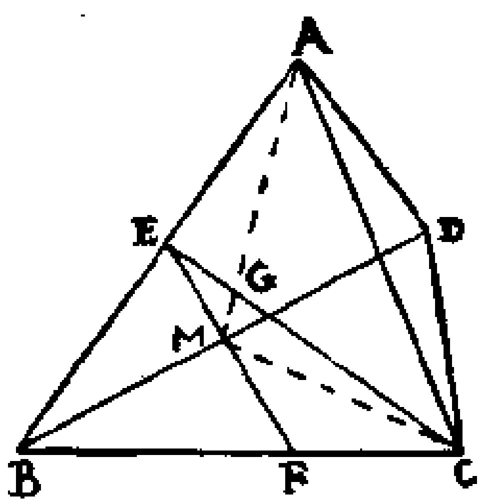


图 3.7

从而 $\triangle ABM$ 的面积 $+\triangle BCM$ 的面积 $=\frac{1}{2}\square ABCD$ 的面积.

只要证 $\triangle BCE$ 的面积 $=\triangle ABM$ 的面积 $+\triangle BCM$ 的面积. 由于 $EF \parallel AC$，显然 $\triangle AEG$ 的面积 $=\triangle CMG$ 的面积. 故得证. 此处辅助线 AM、CM 将 $\square ABCD$ 分成了两个等积形.

证明：连 AM 交 CE 于 G，因为 M 是 BD 的中点，所以

$\triangle ABM$ 的面积 $=\frac{1}{2}\triangle ABD$ 的面积，同样，连 CM，则$\triangle BCM$ 的面积 $=\frac{1}{2}\triangle BCD$ 的面积，因此 $\triangle ABM$ 的面积 $+\triangle BCM$ 的面积 $=\frac{1}{2}(\triangle ABD$ 的面积 $+\triangle BCD$ 的面积$)=\frac{1}{2}\square ABCD$ 的面积．因为 $EF\parallel AC$，所以 $\triangle AEM$ 的面积 $=\triangle CEM$ 的面积；两边同减去 $\triangle GEM$ 的面积，因此 $\triangle AEG$ 的面积 $=\triangle CMG$ 的面积．故 $\triangle BCE$ 的面积 $=\triangle BCE$ 的面积 $-\triangle CMG$ 的面积 $+\triangle AEG$ 的面积 $=\triangle ABM$ 的面积 $+\triangle BCM$ 的面积 $=\frac{1}{2}\square ABCD$ 的面积．

（4）造新的等量，辅助题设的等量，借以达到证明的目的．

例 8 设 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，BC 为底边，D 为从 A 到 BC 的垂足，以 AD 为直径作圆，由 B、C 依次作圆的切线 BE 和 CF，E、F 为切点；证明：EF 弦在 $\triangle ABC$ 内部的一段的长等于它在外部两段长的和．

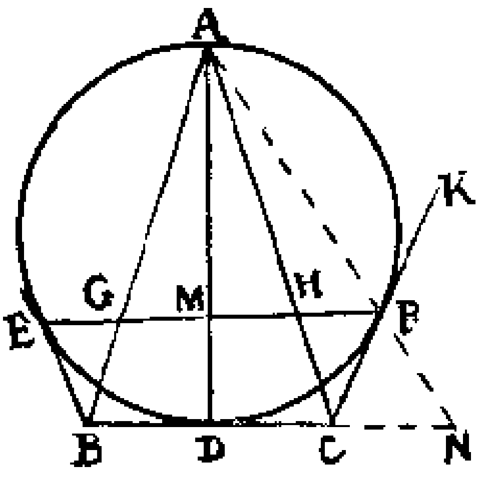


图 3.8

分析： 设 EF 与 AB、AD、AC 分别交于 G、M、H，由于此图关于 AD 成轴对称，因此只须证明 $MH=HF$．由题设知 $CD=CF$，怎样由 $CD=CF$ 到达 $MH=HF$ 呢？直接联系是没有的，但可作新的等量来辅助题设等量．注意到 $BC\parallel EF$，连 AF 并延长，与 DC 的延长线交于 N，

若能证明$CD=CN$．则$MH=HF$,这只须要证明$CN=CF$．但这是很容易办到的．

证明：连AF，延长并交DC的延长线于N、延长CF至K． 因为$\angle CFN=\angle AFK=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AF}$(弦切角定理)，$\angle CNF=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AED}-\overset{\frown}{DF})=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AF}$，所以$\angle CFN=\angle CNF$，因此$CN=CF$，但$CD$、$CF$为切线，所以$CF=CD$．于是$CD=CN$．又$AMD$为直径，$M$是弦$EF$的中点，所以$EF\perp AD$，另外$DN\perp AD$，因此$DN\parallel MF$，故$MH=HF$，从而由对称性知$GH=EG+HF$．

(5) 造成新的图形，使能应用某一特殊定理．第二章第四节例1属于这种类型，现再举数例．

例 9 在$\square ABCD$中，$AC=BD$，E、F分别是AD、BC的中点，EF分别交AC、BD于Q、R，AC、BD相交于P；求证：$\triangle PQR$为等腰三角形．

分析：因为E、F分别是AD、BC的中点，$\triangle ABD$与$\triangle ABC$的两边BD、AC相等．由三角形的中位线定理，可知两三角形有一对中位线相等．为此取AB的中点G，连EG、FG，则EG、FG分别是两三角形的中位线，由$AC=BD$知，$EG=FG$，从而$\angle 1=\angle 2$，又$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，故$\angle 3=\angle 4$，即PQR为等腰三角

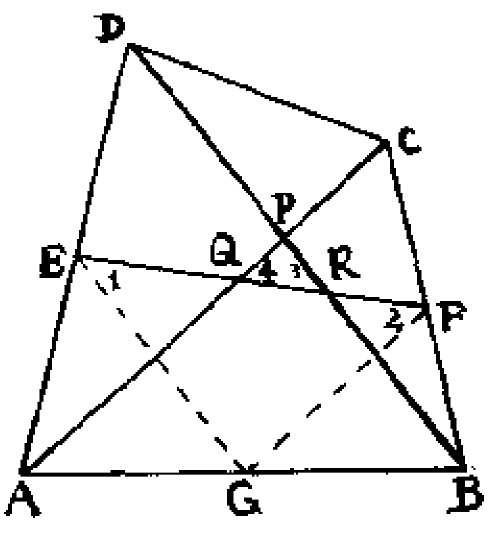


图 3.9

形.

证明：取 AB 的中点 G，连 EG、则 $EG=\frac{1}{2}BD$ 且 $EG \parallel BD$. 连 FG，则 $FG=\frac{1}{2}AC$ 且 $FG \parallel AC$. 但 $AC=BD$，$\therefore$ $EG=FG$. 因此 $\angle 1=\angle 2$，但 $\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，所以 $\angle 3=\angle 4$. 故 $\triangle PQR$ 为等腰三角形.

例 10　从 $\triangle ABC$ 的三顶点 A、B、C 向形外一直线 l 引垂线，垂足分别为 G、H、K；又三条中线分别为 AD、BE、CF，其交点为 O，由 O 向 L 引垂线，垂足为 L. 试证：

$$AG+BH+CK=3\cdot OL.$$

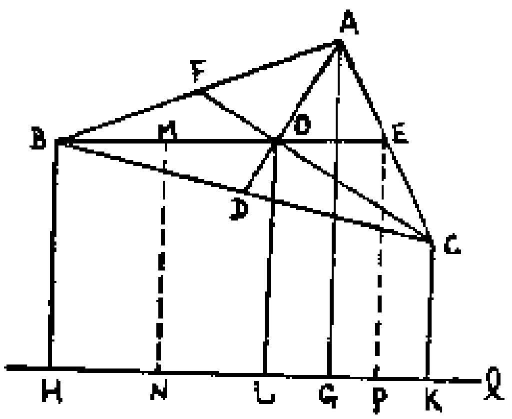


图 3.10

分析：欲证上式，注意到垂直于同一直线的几条直线彼此平行，以及三角形的重心定理，我们可以构造梯形，利用梯形的中位线定理，达到证明的目的. 事实上，作 $EP\perp l$，取 OB 的中点 M，并作 $MN\perp L$，则 OL 是梯形 $MNPE$ 的中位线，于是 $OL=\frac{1}{2}(MN+EP)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(BH+OL)+\frac{1}{2}(AG+CK)\right]=\frac{1}{4}(BH+OL+AG+CK)$. 故 $3\cdot OL=AG+BH+CK$.

证明：取 OB 的中点 M，作 $MN\perp L$，$EP\perp L$，垂足为 N、P. 则 $MN\parallel EP$，因此 $MNPE$ 为梯形. 又根据重心定理，O 是 ME 的中点，于是 OL 是梯形 $MNPE$ 的中位线，从而 $OL=\frac{1}{2}(MN+EP)$，同理，$MN=\frac{1}{2}(BH+OL)$，$EP=$

$\frac{1}{2}(AG+CK)$，故 $OL=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(BH+OL)+\frac{1}{2}(AG+CK)\right]=$

$\frac{1}{4}(BH+OL+AG+CK)$，因之，$3\cdot OL=AG+BH+CK$.

例 11　BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的中线，$AB>AC$；求证：$BE>CF$.

分析：设 BE、CF 相交于 O，则 O 是三角形的重心，欲证 $BE>CF$，只须证 $BO>CO$. 在 $\triangle OBC$ 中，只须证 $\angle BCO>\angle CBO$，但此处不易证. 在一个三角形中证不出，我们构造两个三角形，使两对应边等，而比较 BO、CO 所对的角的大小. 为此取 BC 的中点 D，连 OD，在 $\triangle BDO$ 与 $\triangle CDO$ 中，$BD=CD$，$OD=OD$，只要证明 $\angle 1>\angle 2$ 即可. 为此连 AO，在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 中，$BD=CD$，$AD=AD$，由 $AB>AC$ 可知 $\angle 1>\angle 2$，故可证. 此处的辅助线 AD 为我们构造了两组两对边对应相等的三角形，从而达到比较第三边或其对角大小的目的.

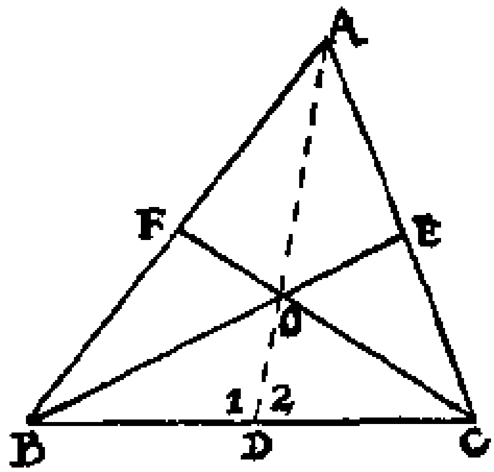


图 3.11

证明：作 BC 边上的中线 AD，设三中线的交点为 O. 在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 中，$BD=CD$，$AD=AD$，$AB>AC$，所以 $\angle 1>\angle 2$. 又在 $\triangle OBD$ 与 $\triangle OCD$ 中，$BD=CD$，$OD=OD$，$\angle 1>\angle 2$，所以 $OB>OC$，即 $\frac{2}{3}BE>\frac{2}{3}CF$，故 $BE>CF$.

(6) 造全等三角形或相似三角形，以达到证线段相等、角

相等、线段成比例的目的.

例 12 如图，两圆 O_1、O_2 相交于 A、B. 圆 O_1 的弦 BC 交圆 O_2 于 E，圆 O_2 的弦 BD 交圆 O_1 于 F，证明：

(1) 若 $\angle DBA=\angle CBA$，则 $DF=CE$；

(2) 若 $DF=CE$，则 $\angle DBA=\angle CBA$.

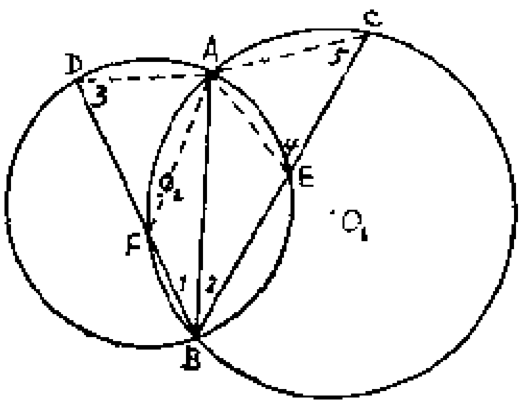


图 3.12

分析：只对 (1) 进行. 假设 $\angle 1=\angle 2$，欲证 $DF=CE$. 若能将 DF、CE 置于一对全等三角形中，则命题获证. 连 AC、AD、AE、AF，则构造成两个全等的 $\triangle ACE$ 与 $\triangle ADF$. 事实上，$\angle 4=\angle 3$，$\angle AFD=\angle 5$，又由 $\angle 1=\angle 2$ 知 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AE}$，∴ $AD=AE$. 故 $\triangle ACE\cong\triangle ADF$.

证明：(只对 (1) 进行) 连 AC、AD、AE、AF，在 $\triangle ACE$ 与 $\triangle AFD$ 中，$\angle 4$ 是圆内接四边形 $ADBE$ 的外角，∴ $\angle 3=\angle 4$. 同理，$\angle 5=\angle AFD$，另外，由 $\angle 1=\angle 2$，得 $AE=AD$，因此 $\triangle ACE\cong\triangle AFD$. 故 $CE=DF$.

注：关于构造相似三角形证线段成比例，见本章第二节.

(7) 造平行四边形，达到证两线段相等、两角相等或诸线共点的目的.

例 13 已知 $\square ABCD$，E 是 AB、CD 延长线的交点，F 是 BC、AD 延长线的交点，$BD\parallel EF$，AC 的延长线与 EF 相交于 G；求证：$EG=GF$.

分析：欲证 $EG=GF$，若延长 CG 至 H，使 $GH=CG$，则四边形 $EHFC$ 为平行四边形. 因此，若能作辅助线

使 $EHFC$ 构成平行四边形则本题获证．但这是容易办到的，只须过 E 作 $EH \parallel BF$，并与 AG 的延线交于 H．连 HF，容易证明 $HF \parallel ED$，事实上，$\frac{AC}{AH}=\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AF}$．因此 $EHFC$ 为平行四边形．

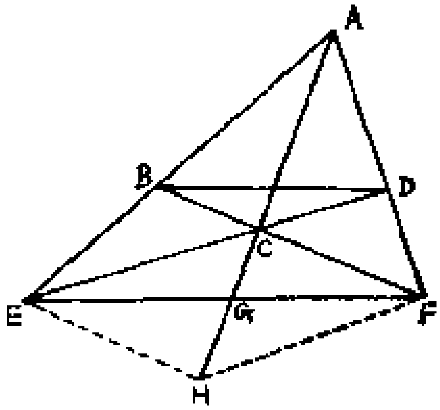


图 3.13

证明：过 E 作 $EH \parallel BF$，H 是它和 AG 延线的交点，所以 $\frac{AC}{AH}=\frac{AB}{AE}$．又 $BD \parallel EF$，所以 $\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AF}$．因此 $\frac{AC}{AH}=\frac{AD}{AE}$．连 HF，则 $ED \parallel HF$．于是 $EHFC$ 是平行四边形，故 $EG=GF$．

例 14　如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=\frac{AB}{CD}$；求证：$\angle 1=\angle 2$．

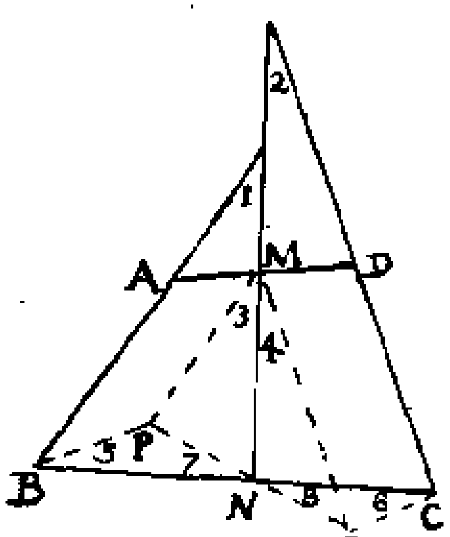


图 3.14

分析：构造平行四边形 $ABPM$、$DCQM$．因为 $\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，所以只要证明 $\angle 3=\angle 4$ 即可．这只须证明 P、N、Q 共直线且 MN 为 $\triangle MPQ$ 的顶角 M 的平分线即可．事实上，由于 $BP \perp\!\!\!\!\!\!= AM$，$CQ \perp\!\!\!\!\!\!= DM$，所以 $BP \parallel CQ$ 且 $\frac{BP}{CQ}=\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$，又 $\angle 5=\angle 6$，因此 $\triangle BPN \backsim$

$\triangle CQN$，从而$\angle 7=\angle 8$. 由于B、N、C在一直线上，于是P、N、Q也在一直线上. 再由$\dfrac{PN}{NQ}=\dfrac{BN}{NC}=\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{MP}{MQ}$，所以$MN$是顶角$M$的平分线，故$\angle 3=\angle 4$.

证明：作$\square ABPM$和$\square DCQM$，连PN、NQ. 因为$\dfrac{BP}{CQ}=\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{BN}{NC}$，又$BP\parallel AD\parallel CQ$，$\angle 5=\angle 6$，所以，$\triangle BPN\backsim\triangle CQN$，因此$\angle 7=\angle 8$. 由于$B$、$N$、$C$在一直线上，于是$P$、$N$、$Q$也在一直线上. 在三角形$MPQ$中，$\dfrac{PN}{NQ}=\dfrac{BN}{NC}=\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{MP}{MQ}$，所以$MN$是$\angle PMQ$的平分线，因此$\angle 3=\angle 4$. 但$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，故$\angle 1=\angle 2$.

注：本题也可以为使用平行截割定理而添辅助线，连AC，作$NE\parallel AB$交AC于E，则$\dfrac{BN}{NC}=\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AM}{MD}$. 因此$ME\parallel CD$，因此$\angle 3=\angle 1$，$\angle 4=\angle 2$. 由$\dfrac{NE}{AB}=\dfrac{CE}{AC}$得$NE\cdot AC=AB\cdot CE$，由$\dfrac{ME}{CD}=\dfrac{AE}{AC}$得$ME\cdot AC=CD\cdot AE$. 而$\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{AE}{CE}$，即$AB\cdot CE=CD\cdot AE$，故$NE\cdot AC=ME\cdot AC$，即$NE=ME$. 如图3.15.

例 15 $\square ABCD$各边的中点顺次是E、F、G、H，两对角线的中点是K、L；求证：EG、FH、KL共点.

分析：利用平行四边形的对角线互相平分，顺次连接E、F、G、H，以及F、L、H、K，得两个平行四边形，其对角线互相平分，所以线段EG、FH、KL相交于中点.

证明：顺次连E、F、G、H，因为E、F分别是AB、

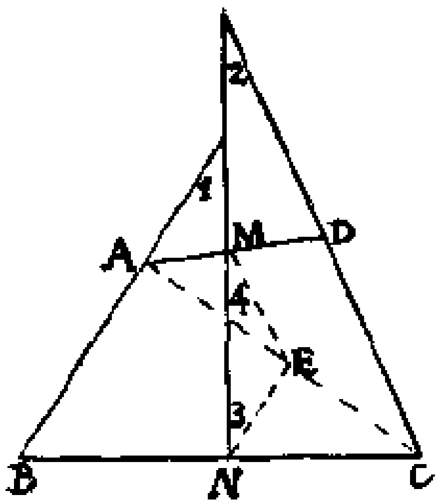


图 3.15

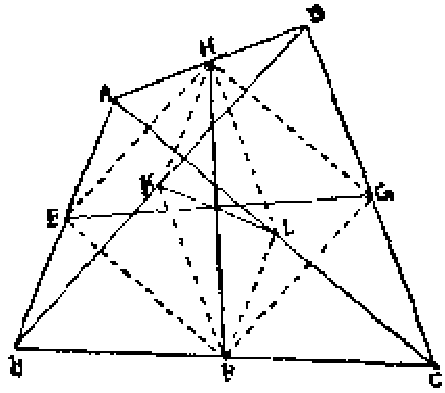


图 3.16

AC 的中点，∴ $EF=\frac{1}{2}AC$ 且 $EF \parallel AC$，同样，$GH=\frac{1}{2}AC$ 且 $GH \parallel AC$，因此 $EF=GH$ 且 $EF \parallel GH$，$EFGH$ 为平行四边形．于是线段 EG、FH 相交于中点．同理，$FLHK$ 为平行四边形，线段 FH 与 KL 相交于中点．故 EG、FH、KL 相交于中点．

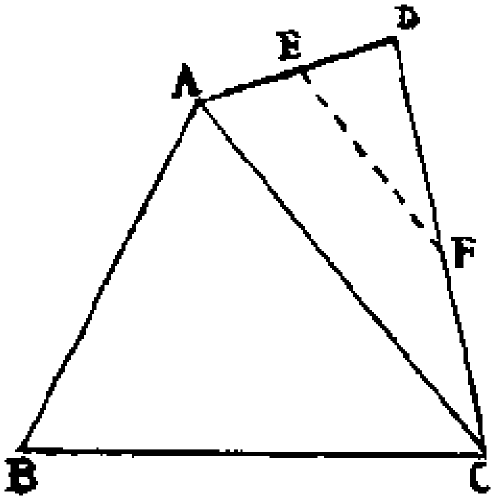


图 3.17

最后必须指出，添辅助线除了要有一定的目的性之外，还有一个可能性的问题．作辅助线必须依照基本作图法，否则不能作．如：在四边形 $ABCD$ 中，过 AD 的中点 E 作对角线 AC 的平行线，交 CD 于中点 F，这样作 EF 是不行的．根据平行公理，过 E 可作且只可作一直线平行于 AC，但此平行线过不过 CD 的中点

还未可知，要说明平行线通过 CD 的中点 F 必须进行证明.

习 题 一

1. 二线段平行且相等，那么它们在第三直线上的射影必相等.

2. 延长圆 O 的两弦 AB、CD 交于圆外一点 E，过 E 作 DA 的平行线交 CB 的延线于 F，自 F 作圆的切线 FG；求证：$FG=FE$.

3. 在正方形 $ABCD$ 的 CD 边上任取一点 M，作 $\angle ABM$ 的平分线交 AD 于 K；求证：$BM=AK+CM$.

4. 在正方形 $ABCD$ 的 CD 边上取一点 E，使 $BC+CE=AE$，M 是 CD 的中点；求证：$\angle BAE=2\angle DAM$.

5. 设 M 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 的中点，过 M 作直线交 AB 于 E，过 B 作直线平行于 ME，交 AC 于 F；求证：

$\triangle AEF$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的一半.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，D 是 AB 上的一点，且 $DA=DB$；求证：$DC=DA$.

7. $\triangle ABC$ 的三条中线为 AD、BE、CF，其交点为 G；证明：以 AD、BE、CF 为边的三角形的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积的 3/4.

8. 在 $\triangle ABC$ 的 AB、AC 上各取 D、E，使 $AD=\frac{1}{3}AB$，$AE=\frac{1}{3}AC$，连 BE、CD 交于 F；求证：$\triangle FBC$ 的面积为 $\triangle ABC$ 的面积的一半.

9. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，以 BC 边为直径作圆，并从 A 点作此圆的切线 AD 与圆切于 D，又在 AB 边上取 AE 等于 AD，并过 E 作 AB 的垂线与 AC 边的延线交于 F；求证：

$\triangle ABC$ 与 $\triangle AEF$ 等积.

10. 设 O 为 $\triangle ABC$ 内一点， 线段 AO 的延线交 BC 于 A_1 点，BO 延线交 CA 于 B_1 点， CO 的延线交 AB 于 C_1 点；求证：① $\dfrac{\triangle OBC\text{ 的面积}}{\triangle ABC\text{ 的面积}}=\dfrac{OA_1}{AA_1}$；② $\dfrac{OA_1}{AA_1}+\dfrac{OB_1}{BB_1}+\dfrac{OC_1}{CC_1}=1$.

11. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，在 AB 上取一点 D， 延长 AC 至 E， 使 $CE=BD$， 连 DE 交 BC 于 F； 求证：$DF=EF$.

12. 在 $\triangle ABC$ 的 AB、 AC 两边上向形外各作正方形 $ABEF$、$ACGH$，又作 $AD\perp BC$，DA 的延长线交 FH 于 M；求证：$FM=MH$.

13. 用纯几何方法证明：若圆内接四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$ 且相交于 H，则 $OG=EH$. 其中 O 是外接圆心， G、E 分别是 BC、AD 的中点.

14. 试证：若三角形两边上中线不等， 中线较长的边较小.

§2. 添辅助线证线段成比例问题

为了有目的地添辅助线，必须有意识地总结、掌握证各类型问题的方法，根据这些方法得出相应的添辅助线的规律，这样，在应用时才得心应手. 现在，以证线段成比例型问题为例，说明这一点.

一般说来，证线段成比例型问题有如下四种方法：

第一，如果待证明的是一个简单的比例式，常将构成比例式的四条（或三条）线段分别置于两个三角形中，使为对应线段，证明两个三角形相似；

第二，对于简单的比例式（或乘积式）除利用三角形相似外，有时可直接利用某些特殊的定理，这些定理是平行截割定理，三角形内(外)角平分线定理，直角三角形中的射影定理，勾股定理及推广，相交弦定理，割线定理，圆幂定理，等等；

第三，有时比例式中的线段分得比较散或直接找不出它们彼此的关系，需要找若干中间比来作媒介，使由旧式变为新式，易于证明；

第四，当待证明的式子构造比较复杂时，在可能的情况下将式子进行变形，使式中出现已知线段的和差倍分，再施割补术，作出线段的和差倍分来，使原来的复杂式子变成简单式子，从而易证.

相应于这四种办法，添辅助线证线段成比例型问题有如下四个目的性.

第一，添辅助线构造相似三角形证线段成比例.

例 1 试证：在圆 O 上任取一点 A，以 A 为圆心，作一个圆 A 与圆 O 相交于 B 和 C，由 A 作直线交 BC 于 D，交圆 O 于 E，则 $AB^2=AD\cdot AE$.

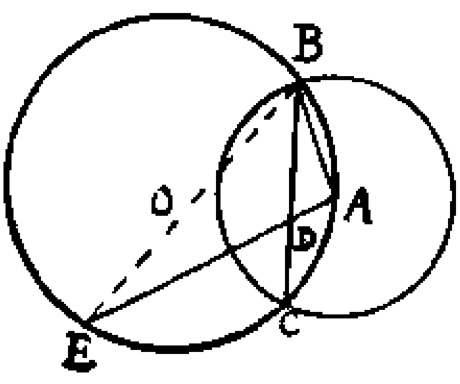


图 3.18

分析：欲证 $AB^2=AD\cdot AE$，只须证 $\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AE}$，注意到比例式的左边和右边，比的前项、后项中的两条线段，分别都有一个公共端点，而且两线段的三个端点不在一直线上，均可构成三角形，比例式中的线段正是这两个三角形的对应边，若能证明这两个三角形相似，则比例式成

立. 可是，在图中，仅有比例式左边的三点 A、B、D 为顶点的三角形，而比例式右边的三点 A、B、E 尚不是一个三角形的三顶点，为了利用三角形相似证比例线段，添辅助线 BE，构造 $\triangle ABE$，使命题获证. 现在剩下的问题是证明 $\triangle ABD \backsim \triangle AEB$，这是显然的，因为 $\angle A$ 公用，$\angle ABC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=\angle AEB$.

注：这里给出了一个构造相似三角形的方法，即使比例式的两边的前项和后项的两条线段只有三个不在一条直线上的三个端点.

例 2 试证：在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$AC\cdot BD=AD\cdot BC+AB\cdot CD$.

分析：为了证明上述等式，企图对该式进行变形，但行不通. 但可将左边 $AC\cdot BD$ 分成两部分，使每部分分别与右边的两项相等. 令 E 是 AC 上一点，则 $AC\cdot BD=(AE+EC)\cdot BD=AE\cdot BD+EC\cdot BD$，若能证明 $AE\cdot BD=AD\cdot BC$，$EC\cdot BD=AB\cdot CD$，则命题获证. 首先考察

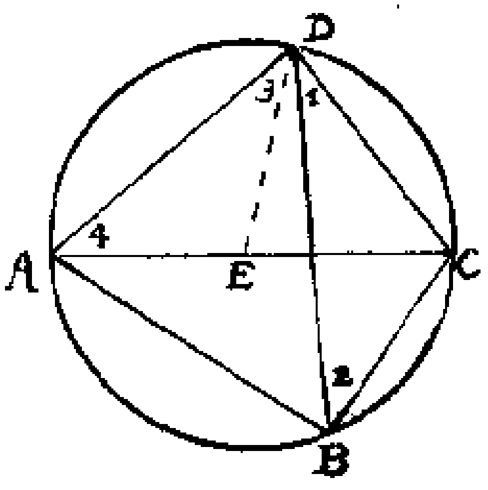


图3.19

第一等式，只需证 $\frac{AE}{AD}=\frac{BC}{BD}$，由例 1 的注可知，可构造两个相似 $\triangle ADE$ 与 $\triangle BDC$，注意到 A、D、B、C 均为固定点，而 E 点尚未固定. 由于 E 点是我们人为选用的，选取 E 点应使它来为我们证题服务！因此，选取 E 点务须使得 $\triangle ADE\backsim$

$\triangle BDC$！若 AC 上没有这样的 E 点使 $\triangle ADE \backsim \triangle BDC$，则我们的这个证法行不通；若 AC 上的某个 E 点不使 $\triangle ADE \backsim \triangle BDC$，则这个 E 点不为我们所需．为此，必须分析 $\triangle ADE \backsim \triangle BDC$ 的条件．注意到 $\angle 4=\angle 2$，只须 $\angle 3=\angle 1$ 即可．这是办得到的，只须取这样的 E 点，使 $\angle ADE=\angle 1$．故作辅助线 DE，使 $\angle ADE=\angle 1$，交 AC 于 E．至于第二个等式就容易证了，只须利用 $\triangle CDE \backsim \triangle BDA$．

注：本例中辅助线 DE 的添作不仅象例 1 简单地构成三角形，而且为构造出与已知三角形相似的三角形创造了条件．

第二，添辅助线构造新的图形，使能应用证线段成比例型问题的特殊定理．

例 3 在 $\triangle ABC$ 的 AB、AC 边上各取 E、F，使 $AE=AF$，连 EF 与三角形的中线 AD 交于 G；则有 $\dfrac{EG}{GF}=\dfrac{AC}{AB}$．

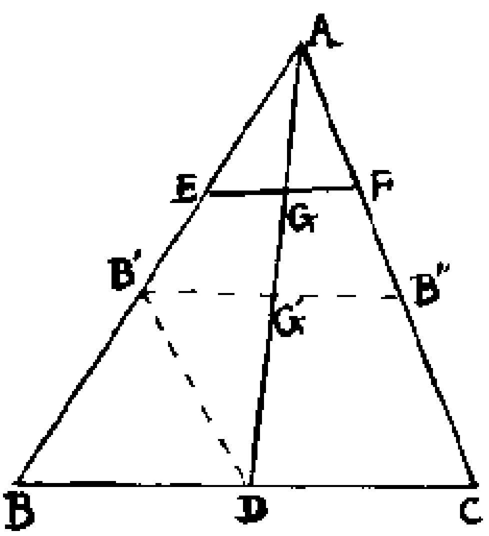


图 3.20

分析：欲证比例式中左右两边前后项的次序位置不顺，不便于论证，为此，利用中位线定理将 $\dfrac{AC}{AB}$ 转化为 $\dfrac{B'D}{B'A}$，这里取了 AB 的中点 B'，连 $B'D$ 为辅助线，因为 $B'D$ 为中位线，所以 $B'D \parallel AC$ 且 $B'D=\dfrac{1}{2}AC$，只须证 $\dfrac{EG}{GF}=\dfrac{B'D}{B'A}$．若能将 $\dfrac{B'D}{B'A}$ 转移到与 EF 相交的直线 AD 上，证明就容易多了，要将 $\dfrac{B'D}{B'A}$ 换成 AD 上线段的比，显然可利用三角形的内分角线定理，为了

创造条件利用这个定理，特作$\angle AB'D$的平分线为辅助线，交AD于G'，交AC于B''，由于$\frac{B'D}{B'A}=\frac{DG'}{G'A}$，只须证$\frac{EG}{GF}=\frac{DG'}{G'A}$. 容易从图中发现，在$\triangle B'DA$与$\triangle AEF$中，$\angle B'AD=\angle EAG$，$\angle B'DA=\angle FAG$，$\angle DB'A=\angle AEF+\angle AFE$. 而$\angle DB'G'=\angle G'B'A$，$\angle AEF=\angle AFE$，所以$\angle AB'G'=\angle AEF$. 因此$B'B''\parallel EF$，$\frac{EG}{GF}=\frac{B'G'}{G'B''}$，故只须证$\frac{B'G'}{G'B''}=\frac{DG'}{G'A}$，这是很显然的，因为$B'D\parallel AC$.

注：此处辅助线$B'B''$同时创造了利用三角形内分角线定理和平行截割定理的条件. 读者也可换种说法，以利用平行截割定理为主，即作$B'B''\parallel EF$，然后再证明$B'B''$平分$\angle AB'D$，效果是一致的.

例 4 OA、OB是$\odot O$的两条半径，$BE\perp OA$，E为垂足，$ED\perp AB$，D为垂足；试证：$OD^2+ED^2=R^2$，其中R是$\odot O$的半径.

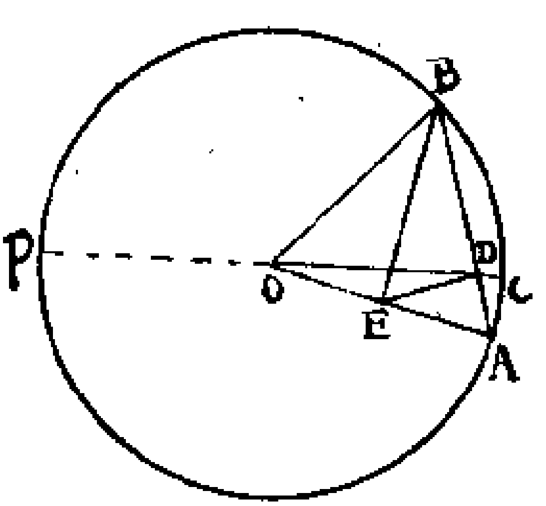


图 3.21

分析：因为$ED\perp AB$，$BE\perp OA$，所以在 rt$\triangle ABE$中，$ED^2=AD\cdot DB$. 因此，只须证$OD^2+AD\cdot DB=R^2$. 注意到AD、DB、OD在$\odot O$内相交于D点，而AD、DB是弦AB被D分成的两部分，有利用相交弦定理的可能性，可惜的是OD不是$\odot O$的弦. 为利用相交弦定理，将OD两

边延长交$\odot O$于C、P，构成弦CP，于是有$AD \cdot DB = CD \cdot DP$，即$AD \cdot DB = (R - OD)(R + OD) = R^2 - OD^2$，故$OD^2 + AD \cdot DB = R^2$。

注：本例的辅助线CD是为利用相交弦定理而作.

例 5 在锐角$\triangle ABC$中，高BE、CF交于H点；求证：$BA \cdot BF + CA \cdot CE = BC^2$.

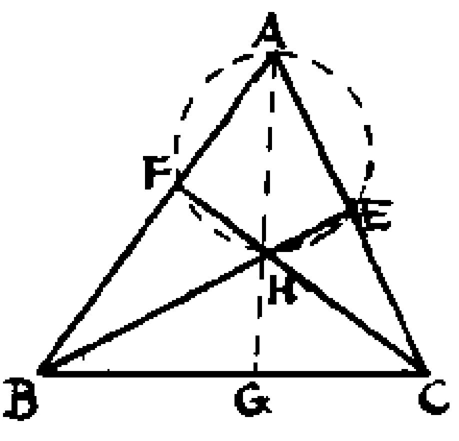


图 3.22

分析：注意到欲证式中的"$BA \cdot BF$"项与"$CA \cdot CE$"项，与圆的割线定理的形式很相似，考虑用割线定理，但图中没有圆，没有使用割线定理的条件，为此，添辅助圆，使割线定理能够使用. 由于$\angle AEB = \angle AFC = 90^\circ$，所以$A$、$F$、$H$、$E$共圆，因此辅助圆可作出，由割线定理知，$BA \cdot BF = BE \cdot BH$，$CA \cdot CE = CF \cdot CH$，所以只须证$BE \cdot BH + CF \cdot CH = BC^2$. 作出第三条高$AG$，再作辅助圆$CEHG$得$BE \cdot BH = BC \cdot BG$，同理，$CF \cdot CH = CB \cdot CG$，两式两边分别相加：$BE \cdot BH + CF \cdot CH = BC \cdot BG + CB \cdot CG = BC(BG + GC) = BC^2$. 故原命题获证.

注：作辅助圆为利用圆的定理创造条件，这是一种很重要的证题手法. 不过，作辅助圆不一定要用四点共圆，过不在一直线上三点也可以. 这样的情况在后面布置的习题里会出现.

例 6 如图示，C是以AB为直径的半圆周上任意一点，$CD \perp AB$，垂足为D，$\odot O$与CD、$\widehat{BC}$、AB相切于E、F、G；求证：$AG^2 = AD \cdot AB$.

分析：因为 AG 是$\odot O$ 的切线且呈平方状，考虑用圆幂定理，但图中缺少由 A 向$\odot O$ 引的割线，需添辅助线使之是由 A 向 $\odot O$ 引的割线，从而与$\odot O$ 的切线 AG 一起，用圆幂定理．很自然，连 AF，是由 A 向 $\odot O$ 引的割线，而且我们看到，AF 经过 E 点，若

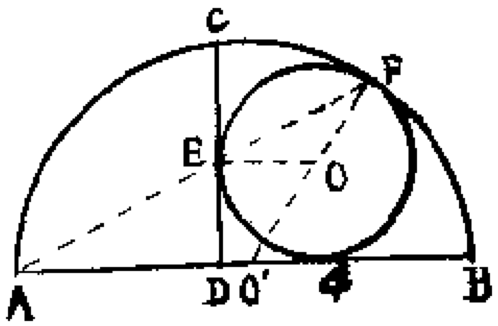


图 3.23

能证明 E 在 AF 上，则 $AG^2=AE\cdot AF$，只须证 $AD\cdot AB=AE\cdot AF$，只须证$\frac{AD}{AE}=\frac{AF}{AB}$，只须证 $\triangle AED\backsim\triangle ABF$，但这是显然的．现在来证明 E 在 AF 上：设大半圆的圆心为 O'，连 $O'F$，则经过 O，$\angle O'AF=\angle O'FA$，且 $\angle FO'B=2\angle AFO'$．又连 OE、EF，$\angle OEF=\angle EFO$，且 $\angle EOO'=2\angle EFO$．但 $OE\perp CD$，$AB\perp CD$，所以 $OE\parallel AB$，因此 $\angle EOO'=\angle OO'B$，于是 $\angle EFO=\angle AFO$，故 E 在 AF 上．

注：此处添辅助线 AF 并证明 E 在 AF 上，是为了创造使用圆幂定理的条件．此题证法甚多，也可考虑恢复$\odot O'$，用相交弦定理证；也可以不作 AF，用代换的办法证；就是证 E 在 AF 上，也可用同一法，设 AF 交 $\odot O$ 于 E'，证 E'与 E重合．

第三，添辅助线构造媒介比（或媒介积）代替欲证式中的比（或积），使新式中的线段聚积在一起，易于发现它们之间的关系．

例 7　两圆相切于 A，过 A 的直径为 ABQ，其中 B 在内

侧圆上，Q 在外侧圆上，由外侧圆上任一点 P 引内侧圆的切线 PT，T 为切点；试证：$\frac{PA^2}{PT^2}=\frac{QA}{QB}$.

分析：欲证式中的线段分布在三条直线上，关系不明显，寻找媒介比代替 $\frac{QA}{QB}$，将 $\frac{QA}{QB}$ 转移到 PA 上，聚集，易发现它们的关系．利用直径的性质，这个转移是容易办到的，设 PA 与内侧圆交于 C，连 PQ，CB，则 $\angle APQ=\angle ACB=90°$，所以 $PQ\parallel CB$，因此 $\frac{QA}{QB}=\frac{PA}{PC}$，于是只须

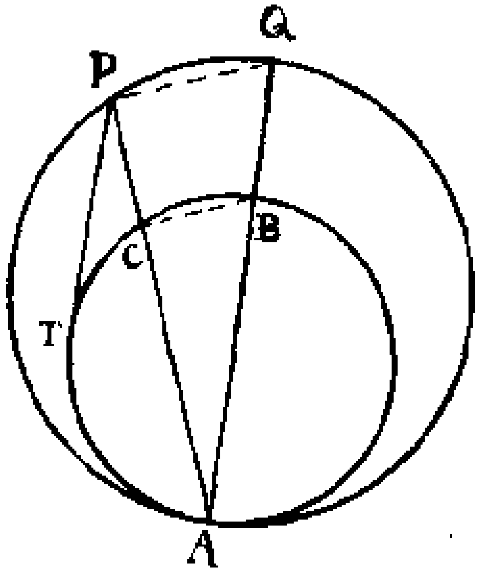


图 3.24

证明 $\frac{PA^2}{PT^2}=\frac{PA}{PC}$，即 $PT^2=PA\cdot PC$，这是显然的．

注：这里 $\frac{PA}{PC}$ 就是媒介比，利用平行线截一束直线成比例线段是制造媒介比的重要手段．

例 8 在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，M 是 $\triangle ABC$ 外接圆的弧 $\overparen{BAC}$ 的中点；求证：$BM^2-MA^2=AB\cdot AC$.

分析：直接从图中发现不了BM、MA与AB、AC的关系，但若M在$\widehat{BAC}$所对的弧$\widehat{BC}$上，则关系明显．事实上，过M作直径交$\widehat{BC}$于N，则N是$\widehat{BC}$的中点，NA与AB、AC的关系是我们熟知的，因为设AN交BC于P，则AP是$\angle BAC$的平分线，因此$AN\cdot AP=AB\cdot AC$

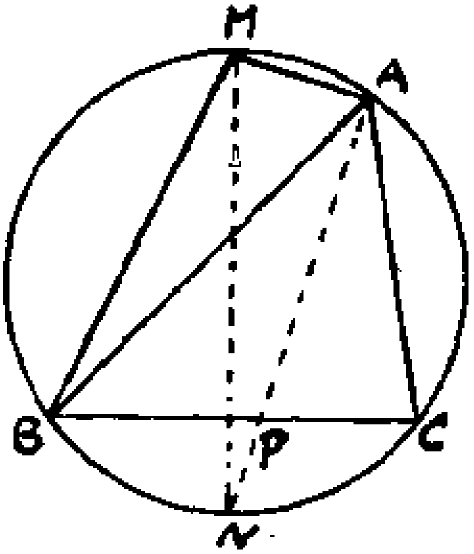


图 3.25

$\cdots\cdots(1)$ 于是设法以NA、NB取代MA、MB．由勾股定理，$BM^2=MN^2-BN^2$，$AM^2=MN^2-AN^2$，两式两边分别相减得$BM^2-AM^2=AN^2-BN^2$．只需证$AN^2-BN^2=AB\cdot AC$．式中AN^2，BN^2我们称之为媒介积，AN与$AB\cdot AC$的关系已有，现探索BN与它们的关系，找共BN的$\triangle BNP$和$\triangle ANB$，显然相似，所以$\dfrac{BN}{NP}=\dfrac{AN}{BN}$，$BN^2=AN\cdot NP$ $\cdots\cdots(2)$．(1)+(2)：$BN^2+AB\cdot AC=AN\cdot AP+AN\cdot NP$ $=AN(AP+PN)=AN^2$，故命题获证．

注：这个题的证法的寻求，除了利用媒介积外，还有一点就是利用熟知的题启发我们的思路，这是一个重要的证题思考方法．

第四，施割补术，添辅助线构造线段和差倍分，使结构复杂的式子变简单，便于寻求找证题的途径．

例 9 已知$\triangle ABC$是圆内接正三角形，P是$\widehat{BC}$上一点；求证：$PB\cdot PC=PA^2-BC^2$．

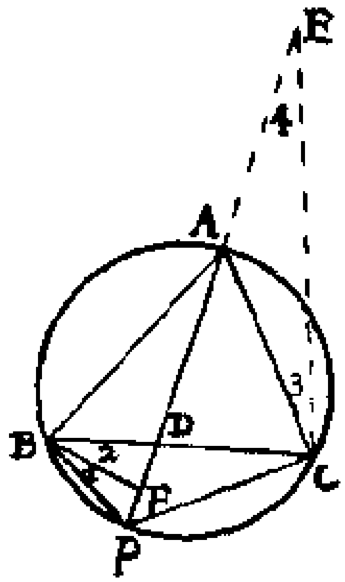


图 3.26

分析：要证的式子结构比较复杂，可变形为 $PB\cdot PC=(PA+BC)(PA-BC)$。只须用割补术作出线段 PA、BC 的和线段与差线段 PE 与 PF，则只须证 $PB\cdot PC=PE\cdot PF$，即 $\frac{PE}{PC}=\frac{PB}{PF}$，只须证 $\triangle PCE\backsim\triangle PFB$。由于 $\angle CPE=\angle FPB$，所以只须证 $\angle 4=\angle 1$。因为 $AC=AE$，所以 $\angle 4=\angle 3=\frac{1}{2}\angle PAC$。另外，因为 $AB=AF$，所以 $\angle AFB=\angle ABF$，而 $\angle AFB=60^\circ+\angle 1$，$\angle ABF=60^\circ+\angle 2$，所以 $\angle 1=\angle 2$，因此，$\angle 1=\frac{1}{2}\angle PBC=\frac{1}{2}\angle PAC=\angle 4$。故 $\triangle PCE\backsim\triangle PFB$，原命题可证。

注：此题证法很多，这里只是为讲添辅助线选其一种。

几何证题除证线段成比例这一类型外，还有其他类型，其证法在第四章分述，本节只举了其中一种，其余各种请读者自行总结归纳出添辅助线的规律。

习 题 二

1．在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，D 是垂足，以 AD 为直径作圆交 AB 于 E，交 AC 于 F，又 AD 交 EF 于 G，AD 的延长线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 H；求证：$AD^2=AG\cdot AH$。

2．$ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形，从这圆上任意一点 P 分别作一组对边 AB、CD 以及对角线 AC、BD 的垂线 PE、PF、PG、PH，垂足分别为 E、F、G、H；求证：$PE\cdot PF=PG\cdot PH$。

3. AB 是半圆 O 的定直径，过 A、B 分别作半圆之弦 AC、BD，使交于 P；求证：$AP\cdot AC+BP\cdot BD=AB^2$.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=2\angle B$；求证：$BC^2=AB\cdot AC+AC^2$.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，AD、AE 分别是 BC 上的高线和中线，AF 为顶角 A 的平分线；求证：$(AB-AC)^2=4\cdot EF\cdot ED$.

6. AM 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线，过 A 作一个圆与 BC 相切于 M，分别交 AB、AC 于 D、E；求证：

$$\frac{DB}{BM}=\frac{EC}{CM}.$$

7. AM 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线，求证：$AM^2=AB\cdot AC-BM\cdot MC$.

8. 过 $\square ABCD$ 之顶点 A 作一圆交 AB、AC、AD（或延长线）于 P、Q、R；求证：$AB\cdot AP+AD\cdot AR=AC\cdot AQ$.

§3. 常见的几类辅助线

为了帮助初学者能较快地作出合理的辅助线，现将常添的辅助线也归结为几类，分列于下.

（一）关于三角形，有中线常延长一倍，有中点，常连中位线.

例 1 设 D 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中点；求证：

$$AD^2=\frac{1}{4}(2AB^2+2AC^2-BC^2).$$

分析：延长 AD 至 E，使 $DE=AD$. 连 CE，则可在 $\triangle AEC$ 中运用余弦定理，命题可获证.

关于连中位线的例子见§1的例9和例15.

（二）关于梯形，常平移腰、对角线、高线.

例 2 已知 $ABCD$ 为等腰梯形；求证：$AC=BD$.

分析：将腰 DC 平移至 AE，对角线 DB 平移至 AF，

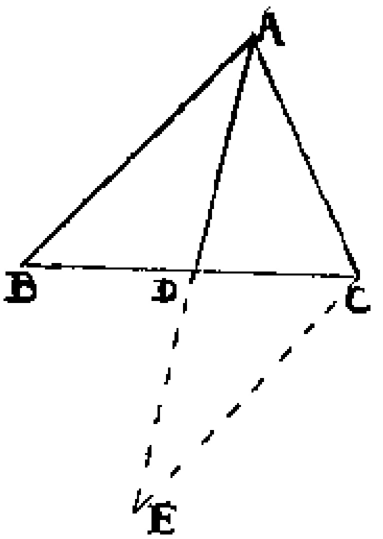


图 3.27

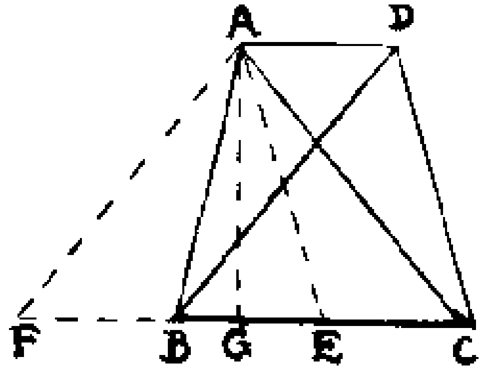


图 3.28

并作高线 AG，则 $AFBD$ 与 $AECD$ 均构成平行四边形，只须证明 $AF=AC$. 因为 $AG\perp BC$，所以只要证 $FG=GC$，而 $FB=AD=EC$，因此只要证 $BG=GE$. 为此，只要证 $AB=AE$. 但 $AE=CD$ 而 $CD=AB$，故本题可证.

（三）关于多边形，常剖成三角形来处理. 第二章第二节例 3 就是一例，现再举一例.

例 3 在四边形 $ABCD$ 中，E、F 和 G、H 分别将 AB、CD 三等分；试证：$\square EFGH$ 的面积 $=\frac{1}{3}\square ABCD$ 的面积.

分析：连 FD、FH、BH、BD，则 $\square EFGH$ 被 FH 割成两个三角形，$\square FBHD$ 被 BD 割成两个三角形. 显然 $\triangle EFH$ 与 $\triangle FBH$ 等积，$\triangle HFG$ 与 $\triangle DFH$ 等积，$\triangle FBD$ 与 $\triangle DBH$ 分别是 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 的面积的 $\frac{1}{3}$，即 $\square FBHD$

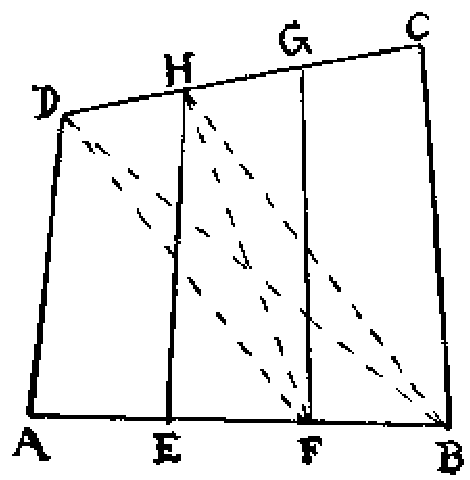


图 3.29

的面积是$\square ABCD$ 的面积的 $\frac{1}{3}$.

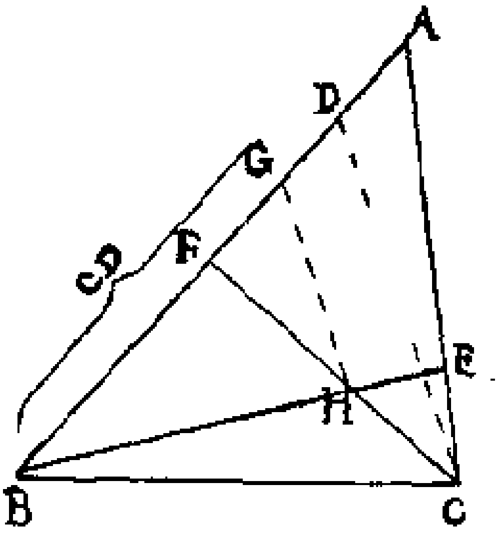


图 3.30

（四）作一角等于已知角，造全等三角形或相似三角形. 本章第二节例 2 是作一角造相似三角形的例子，现举例造全等三角形.

例 4 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABE<\angle ACF$，$\angle CBE<\angle BCF$；求证：$BE>CF$.

分析：欲证$BE>CF$，只须证明在BE上可取一部分（设为BH）与CF相等即可. 为此构造全等三角形，使CF和BE的一部分（BH）为其对应边. 在$\angle ACF$内部作$\angle FCD=\angle ABE$（因为$\angle ABE<\angle ACF$），交AB于D. 注意到$\angle BCD>\angle CBA$，所以$BD>CD$，因此只要在BA上取$BG=CD$，过G作$GH\parallel CD$交BE于H. 那么$\triangle BHG\cong\triangle CFD$，从而$BH=CF$. 而$BE>BH$，故$BE>CF$.

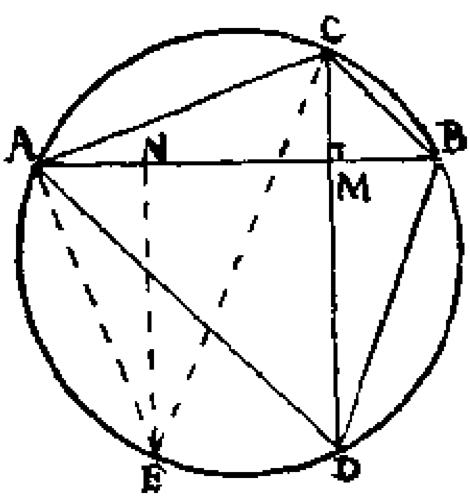


图 3.31

（五）关于圆周上的点，常作直径（半径），或向弦（弧）两端张圆周角，或作弦切角.

例 5 $\odot O$中弦AB和弦CD互相垂直于M；求证：$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2=$定值.

分析：第一个等号显然成立，因为$AC^2+BD^2=AM^2+CM^2+BM^2+DM^2=AD^2+$

BC^2. 关键是后一个等号，定值是什么？因为AB、CD弦的任意性，故可取其特殊位置而求出定值. 假设AB、CD皆过圆心，是直径，立即可以发现定值为$(2R)^2$. 可见定值与直径相关，故作直径CE为辅助线，如图. $ABDE$为等腰梯形，$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2=AM^2+CM^2+BM^2+DM^2=CM^2+DM^2+2\cdot CM\cdot DM-2\cdot AM\cdot MB+AM^2+BM^2=CD^2+(AM-BM)^2=CD^2+MN^2=CD^2+DE^2=(2R)^2$.

（六）作对角互补或外角等于内对角的四边形，证四点共圆；在线段同侧向线段两端张等角，证四点共圆.

例 6 在锐角$\triangle ABC$中，AD是BC上的高，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，E、F为垂足；试证：E、B、C、F四点共圆.

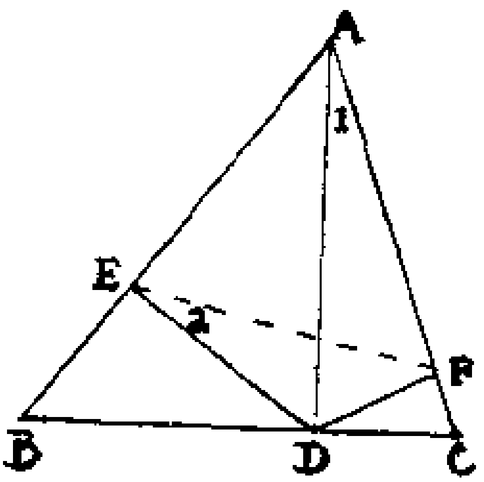


图 3.32

分析：连EF，只要证四边形$EBCF$的对角互补，则E、B、C、F四点共圆. 因为$\angle AED=\angle AFD=90°$，所以$A$、$E$、$D$、$F$四点共圆，因此 $\angle 1=\angle 2$，于是$\angle 2+\angle C=\angle 1+\angle C=90°$，从而$\angle BEF+\angle C=180°$，故$E$、$B$、$C$、$F$四点共圆. 此处辅助线$EF$，使$EBCF$构成对角互补的四边形.

例 7 在等边三角形ABC外取一点P，如果$PA=PB+PC$；则P、A、B、C四点共圆.

分析：延长PC至D，只要证明$\angle ACD=\angle ABP$，则P、A、B、C共圆. 或者先作$\angle ACD=\angle ABP$，再证$\angle ACD$

是四边形 $PCAB$ 的外角也行。为此构造全等三角形，作 $\angle CAD=\angle BAP$，取 $AD=AP$，连 CD，又因为 $AB=AC$，所以 $\triangle ACD\cong\triangle ABP$. 因此，$\angle ACD=\angle ABP$，$CD=PB$. 由 $\angle PAD=\angle PAC+\angle CAD=\angle PAC+\angle BAP=60°$ 可知，APD 为正三角形.

从而 $PD=PA=PB+PC=PC+CD$，可见 C 在 PD 上，即 $\angle ACD$ 是$\square ABPC$ 的外角，故 A、B、P、C 共圆.

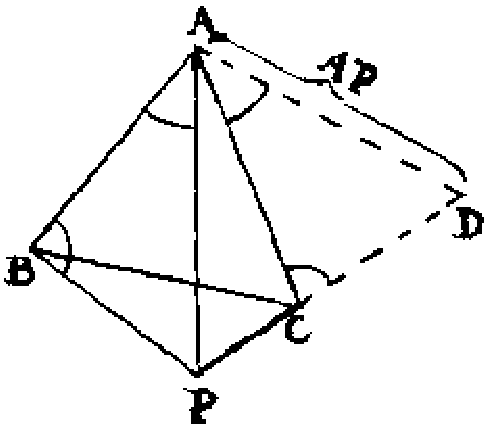


图 3.33

例 8 等腰直角 $\triangle ABC$ 中，斜边 BC 的中点为 P，D 是 BC 上的任一点，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$；E、F 为垂足；求证：$PF\perp PE$.

分析：因为 $AEDF$ 为矩形，所以内接于圆. 若能证明 P 在此圆上，则 $\angle EPF$ 是直径 EF 上的圆周角，为直角，命题获证. 为此，须证 A、E、P、D 四点共圆. 连 AD、AP，则 $\angle AED=\angle APD=90°$. 故 A、E、P、D 四点共圆，又 $\angle EPF$ 是直径上的圆周角，为直角，故 $PF\perp PE$.

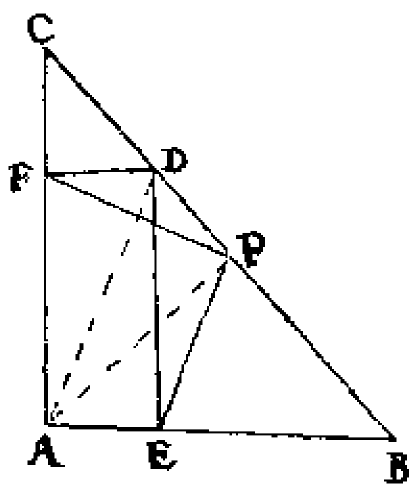


图 3.34

（七）关于直线与圆相切，常作过切点的直径或半径.

例 9 设 $CEDF$ 是一个已知圆的内接矩形，过 D 作该圆的切线与 CE 的延长线相交于点 A，与 CF 的延长线相

交于点B；求证：$\frac{BF}{AE}=\frac{BC^3}{AC^3}$.

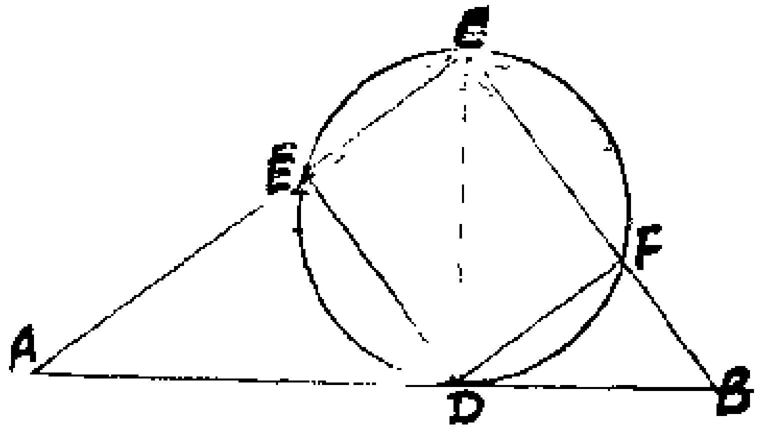


图 3.35

分析：因为 $CEDF$ 是圆的内接矩形，所以连对角线CD，则 CD 是过切点的直径，因此 $CD\perp AB$. 于是在 rt$\triangle ABC$中，$AC^2=AD\cdot AB$，$BC^2=BD\cdot BA$. 相比得 $\frac{AD}{DB}=\frac{AC^2}{BC^2}$.

另外，由 $DE\parallel BC$ 得 $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$，同理 $\frac{BF}{BC}=\frac{BD}{BA}$，从而 $\frac{AE}{BF}\cdot\frac{BC}{AC}=\frac{AD}{DB}$. 故 $\frac{AE}{BF}\cdot\frac{BC}{AC}=\frac{AC^2}{BC^2}$，即 $\frac{BF}{AE}=\frac{BC^3}{AC^3}$.

（八）两圆相切，常连圆心线，或过切点作公切线.

现举一作公切线为辅助线的例子.

例 10 两圆内切于P，外圆的弦 AD 交内圆于 B、C；则 $\angle APB=\angle CPD$.

分析：过 P 作公切线 PE，如图. $\angle 1=\angle BPE-\angle APE$，但是，$\angle BPE=\angle 3$，$\angle APE=\angle 4$. 所以，$\angle 1=\angle 3-\angle 4$.

又 $\angle 2=\angle 3-\angle 4$，故 $\angle 1=\angle 2$.

（九）关于两圆相交，常连公共弦及连心线.

例 11　在$\triangle ABC$的边 BC、CA、AB 上分别取 P、Q、R 点；求证：$\triangle AQR$、$\triangle BRP$、$\triangle CPQ$ 的外接圆交于一点.

分析：设 $\triangle AQR$、$\triangle BRP$ 的外接圆相交于 R、M. 只要证明 M、P、C、Q 四点共圆即可. 连公共弦 RM、QM、PM，则$\angle CQM=\angle ARM=\angle BPM$. 因此，□$MPCQ$ 的一个外角等于内对角，故 M、P、C、Q 共圆.

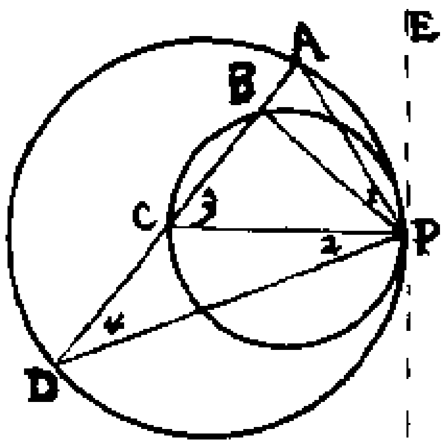


图 3.36

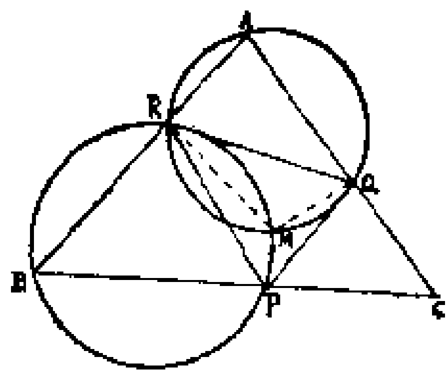


图 3.37

（十）过不在一直线上的三点作辅助圆，以利用圆的某些定理.

如第二章§1的例3和第三章习题二第三、八题。

习　题　三

1. 试证：三角形三条中线的和小于三条边的和.

2. 梯形的两对角线互相垂直；求证：梯形对角线的平方和等于两底和的平方.

3. 四边形 $DEFG$ 的对角线 DF、EG 相交于 A，延长

EG 至 B，使 $GB=EA$．延长 DF 至 C，使 $FC=DA$．试证：$\triangle ABC$ 的面积 $=\square DEFG$ 的面积．

4．三角形中的不相等的两边的对角的平分线，必不相等．

5．P、Q、R 依次为 $\triangle ABC$ 三边中点；求证：圆 ABC 在 A 点的切线与圆 PQR 在 P 点的切线平行．

6．PA、PB、PC 为过圆周上 P 点的三弦，PT 为圆的切线，设有一线与 PT 平行，交 PA、PB、PC 于 A'、B'、C' 三点；试证：$PA\cdot PA'=PB\cdot PB'=PC\cdot PC'$．

7．两圆相外切，求证用连心线段为直径所作的圆必与前两圆的外公切线相切．

8．已知 $\overset{\frown}{AB}$ 是$\odot O$上含 $120°$ 的弧，过 A、B 引切线交于 C 点．又 $\odot M$ 与给出的 $\overset{\frown}{AB}$、AC、BC 都相切；试证：$\odot M$ 的周长等于$\odot O$ 周长的$\frac{1}{3}$．

9．两圆相交于点 A 和 B，经过点 A 的割线和两圆各相交于另一点 P 和 R，经过点 B 的割线和两圆各相交于另一点 Q 和 S；求证：$PQ\parallel RS$．

第四章　证题分法

前面介绍的几何证题通法，对于一切几何证题都具有指导意义．但是，只研究这些一般性的原则和方法是不够的，更重要的是"对具体情况作具体分析"．若在证题的过程中按照论题的结论进行分类，从中总结规律，积累经验，这样就能增强我们分析问题和解决问题的能力，所以研究证题分法对我们的学习几何是有帮助的．

§1．求证两条线段相等和两角相等

在几何学中，求证两线段相等和两角相等的题很多，证明这类题所应用的公理和定理也是很多的．现将证明方法归纳如下．

(1) 应用普通公理

1) 证等于同一个量(线段或角)；

2) 证等于同一个量(线段或角)的同倍量或同分量；

(2) 应用全等三角形的对应边(或角)相等；

(3) 应用等腰三角形的性质；

(4) 应用相似三角形的对应角，以及同角(或等角)的余角(或补角)相等；

(5) 应用直角三角形斜边中点与三顶点距离相等；

(6) 应用平行四边形、矩形、菱形、正方形和等腰梯形的性质；

(7) 应用线段的垂直平分线和角的平分线的性质以及角的平分线性质的逆定理；

(8) 应用平行线和平行截割定理；

(9) 应用和圆有关的角(圆心角、圆周角和弦切角)以及圆内接四边形的外角和内对角相等；

(10) 应用和圆有关的线段(弦、弦心距)以及圆外一点所引圆的两条切线长相等；

(11) 应用成比例线段：

1) 若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，而$a=b$(或$b=d$)，则$c=d$(或$a=c$)；

2) 若$\frac{a}{b}=\frac{d}{d}$，则$a=b$.

例 1 如图，已知$\odot O$和$\odot O'$相交于两点A和B，过点A引割线CAD，与$\odot O$和$\odot O'$分别相交于两点C、D，而点N和M分别为CD和$\odot O'$的中点.

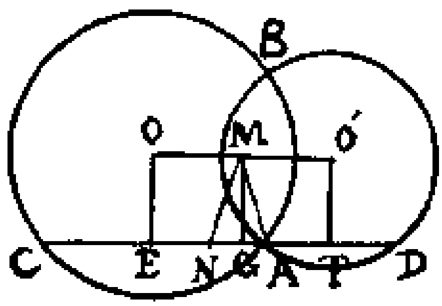


图 4.1

求证：$MN=MA$.

分析：欲证$MN=MA$，作$MG\perp CD$(为何要作此垂线？因OE和OT都垂直于CD，而M为OO'的中点，从而可求得ET的中点G，这样将证$MN=MA$变为证两个直角三角形全等)．只须证$Rt\triangle MGN\cong Rt\triangle MGA$，只须证$NG=GA$即可，由$G$为$ET$的中点，只须证$NT=EA$，由$N$是$CD$的中点，而$ET=\frac{1}{2}CD=CN$，各减去$EN$，便可推出$NT=CE=EA$.

例 2 如图，已知 $ABDE$ 及 $ACFG$ 分别是以直角三角形 ABC 的两直角边 AB、AC 为边，向外作的正方形，又 CD、FB 分别交 AB、AC 于 P、Q；

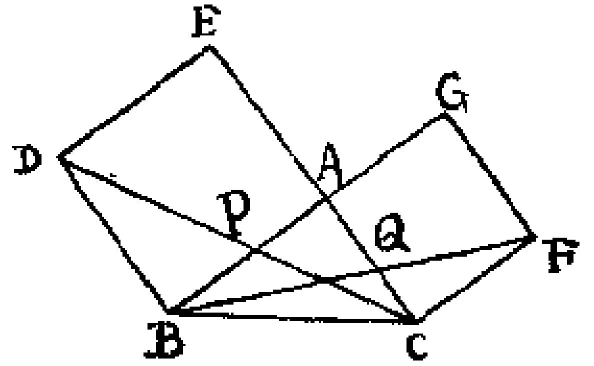


图 4.2

求证：$AP=AQ$.

分析：根据本题的特点，因为所求证的线段 AP 和 AQ 分别与 ED 和 GF 平行，而 $ABDE$ 和 $ACFG$ 分别为正方形，故本题可采用比例式来证明. 要使所求证的线段构成比例式，必须借助其它等量来完成. 已知 $DE=AB$，要证 $AP=AQ$，只须证 $AP:DE=AQ:AB$. 因为 $AP\parallel ED$，所以 $AP:DE=AC:CE$，现在必须证明 $AQ:AB$ 等于 $AC:CE$，又因 $AQ\parallel GF$，所以 $AQ:AB=GF:BG$，由假设知 $AC=GF$，$CE=BG$，故此题可证.

例 3 由圆的直径 AB 的 B 端作切线，又由 A 引二直线，与圆相交于 P、Q，而与切线相交于 X、Y.

求证：$\angle XPY=\angle XQY$.

分析：因为 $\triangle XPY$ 与 $\triangle XQY$ 有公共边 XY，要证

$$\angle XPY=\angle XQY,$$

只须证 X、P、Q、Y 四点共圆即可. 连结 PQ，如图，只须证 $\angle 1=\angle 4$ 则可，但 $\angle 1$ 和 $\angle 4$ 相等不能直接证明，必须找出它们的等量. 连结 BQ，即得 $\angle 1$ 的等量

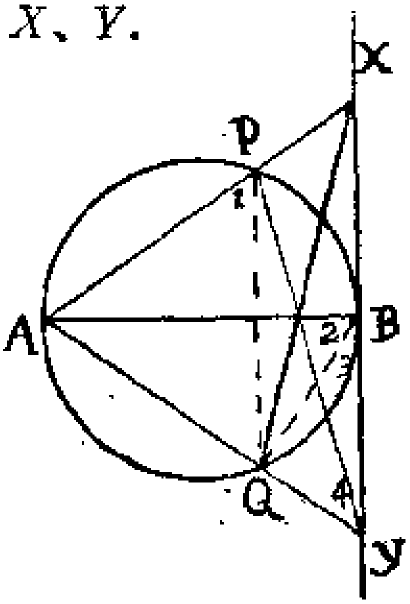


图 4.3

$\angle 2$. 由于 $\angle 2+\angle 3=90^\circ$, $\angle 3+\angle 4=90^\circ$, 所以 $\angle 2=\angle 4$, 即 $\angle 1=\angle 4$. 由此可证 X、P、Q、Y 四点共圆, 再利用同弧上的圆周角相等可证 $\angle XPY=\angle XQY$.

例 4 设 $\triangle ABC$ 各角的平分线 AD、BE、CF 相交于 O, 过 O 作 $OG\perp BC$;

求证: $\angle BOD=\angle COG$.

分析: 含有 $\angle BOD$ 和 $\angle COG$ 的两个三角形 BOD 和 COG 既不相似, 又不全等, 要证明此两角相等, 只有借助其它的等量进行代换.

因 $\angle BOD=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$, 而 $\angle COG=90^\circ-\angle 1$, 即 $\angle COG=90^\circ-\frac{1}{2}\angle C$. 但 $\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)=90^\circ$, 所以 $\angle COG=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$, 于是本题得证.

例 5 已知正方形 $ABCD$, 作 $DE\parallel AC$, 在 DE 上取 F,

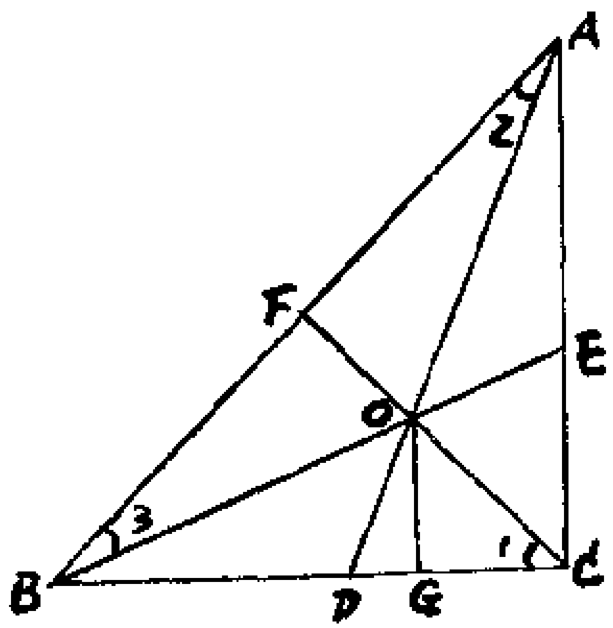


图 4.4

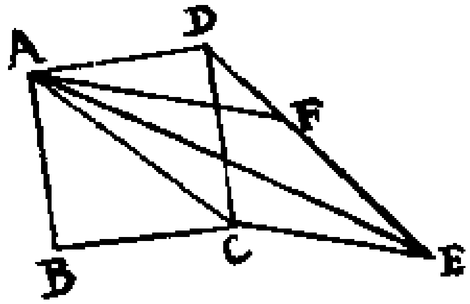


图 4.5

使 $AF=AC$，作 $CE \parallel AF$，与 DE 交于 E，连 AE；

求证：$\angle DAF=\angle FAE$
$=\angle EAC$.

分析：由题设易证四边形 $ACEF$ 为菱形，然而菱形的对角线平分对角，则$\angle EAF=\angle EAC$，又因为 AC 为正方形的对角线，所以 $\angle BAC=45°$. 若能证$\angle DAF=15°$，则本题得证. 参看第三章 §4 的例 1.

习 题 一

1. 以 AB 为直径，作半圆，半径 OC 与 AB 垂直，再以 OC 为直径作 FCG 圆，与半圆内任意半径 OD、OE 相交于 F、G，又由 D 点作 OE 垂线 DH；

则 $DH=FG$.

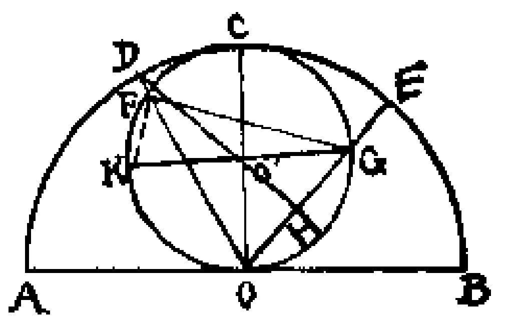


图 4.6

2. 内接于圆的四边形 $ABCD$，其两边 CB、DA 的交点为 M，而 MCD 圆与直线 AB 的交点为 E、F；则 $ME=MF$.

3. 从圆 o 的中心到圆外的直线 XY 作垂线 oA，再从 A 作割线，截圆于 B、C，过 B、C 的二切线交 XY 于 D、E；求证：$DA=AE$.

4. AB 弦向两方延长，其延长线的部分 AD、BC 如果是相等的，再由 C、D 二点作切线 CE、DF，并在 AB 的两侧；

则由切点联成的直线 EF，必恰截 AB 为二等分.

5．正方形 $ABCD$，以顶点 A 为中心，AB 为半径，向形内作扇形弧与对角线 AC 相交于 E；则 CE 必等于扇形内接圆的半径.

6．已知点 C 是线段 BD 上任意一点，以 BC、CD 为一边向同侧作等边$\triangle BCA$ 和等边 $\triangle CDE$，又 AC 与 BE 相交于 P，AD 与 CE 相交于 Q；求证：$CP=CQ$.

7．$\triangle ABC$ 的两个高 AD、BE 交于 H，外接圆的直径是 AF，若 HF 交 BC 于 G；则 $HG=GF$.

8．以 AB 为直径的半圆上任取 C 点，由 C 作 AB 的垂线，在半圆内作圆 O' 与 CD、AD 和 AC 弧相切，其切点分别为 F、E、G；则 $BE=BC$.

9．AB、CD 为相交于圆外的两弦，其交点为 E，再由 E 作 AD 的平行线交 CB 的延长线于 F，从 F 作圆的切线 FG；则 $FG=FE$.

10．梯形 $ABCD$ 的对角线交点为 O，过 O 作底边 BC 的平行线，交 AB、CD 于 E、F；求证：$OE=OF$.

11．由三角形 ABC 的 A、B 向对边作垂线 AD、BE，又由 B 作 ED 的垂线 BF；则 $\angle ABE=\angle CBF$.

12．在直线 AB 上，取 C、D 二点，假设 $AB:AD=AD:AC$，又从 A 引直线 AE，使它等于 AD；则 ED 为 $\angle BEC$ 的平分线.

13．圆的半径 OA、OB 互相垂直，DE 是过 $\odot O$ 的任意的弦，延长 AO 与 BD 的延长线交于 F，延长 AO 与 BE 交于 G；则 $\angle E=\angle F$.

14．在圆 O 中，AB 弦二端的切线交于 P，过 AB 中点 M 任作他弦 CD，连结 PC、PD、PO；则 PO 二等分 $\angle CPD$.

15. 已知二圆外切于 P，一圆的弦 AB 延长，若切另一圆于 C，又延长 AP 到 D；求证：$\angle BPC=\angle CPD$.

16. 已知 CD 交 $\odot o$ 于 A、B 两点，且 $AC=BD$，CE、DF 分别切 $\odot o$ 于 E、F；求证：$\angle OCE=\angle ODF$.

17. 如图，在 $\square ABCD$ 内取一点 P，使 $\angle 1=\angle 2$；求证：$\angle 3=\angle 4$.

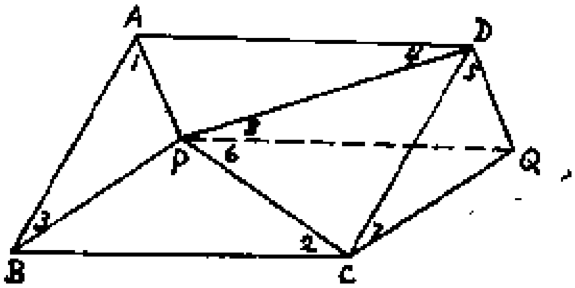


图 4.7

18. AB 为半圆的直径，C 为圆周上任意一点，且 $CD\perp AB$，过 C、A 分别作半圆的切线交于 E，BE 与 CD 交于 F；求证：$CF=DF$.

19. 两圆相交于 A、B，过 A 作 $CAD\perp AB$ 弦，连结 CB、DB 延长分别与圆交于 F、E 两点；则 AB 必平分 $\angle EAF$.

20. 以四分之一圆 AOC 的半径 OA 为直径向形内画半圆，OE 为圆 O 的半径，交小圆于 B，从 E 作 ED 垂直过 A 点的切线；求证：$BE=DE$.

21. 已知 M 为 $\odot o$ 内任意弦 AB 的中点，过 M 点任作两弦 CD、EF，连结 CF、ED 分别交 AB 于 N、G；求证：$MN=MG$.

§2. 求证两直线平行或垂直

在几何学中，求证两条直线平行和垂直的题目也是很多的，现将其证明方法归纳如下：

(1) 应用平行线的判定定理和推论；

(2) 应用三角形和梯形中位线的性质；

(3) 利用平行截割定理的逆定理；

(4) 应用同底等积的两三角形顶点(在底同侧)的连线平行于底边；

(5) 应用等腰三角形顶角的平分线或底边上的中线垂直于底边；

(6) 应用邻补角相等或邻补角的平分线互相垂直；

(7) 应用菱形、正方形的对角线互相垂直；

(8) 应用半圆上的圆周角是直角；

(9) 应用直径平分弦的逆定理；

(10) 应用切线的性质；

(11) 应用勾股定理的逆定理；

(12) 应用两圆的连心线与公共弦互相垂直.

例 1 设四边形 $ABCD$ 的对角线交于 O，四个三角形 AOB、BOC、COD、DOA 的外接圆中心分别为 E、F、G、H，且依次相连；则 $HG \parallel EF$，$HE \parallel FG$.

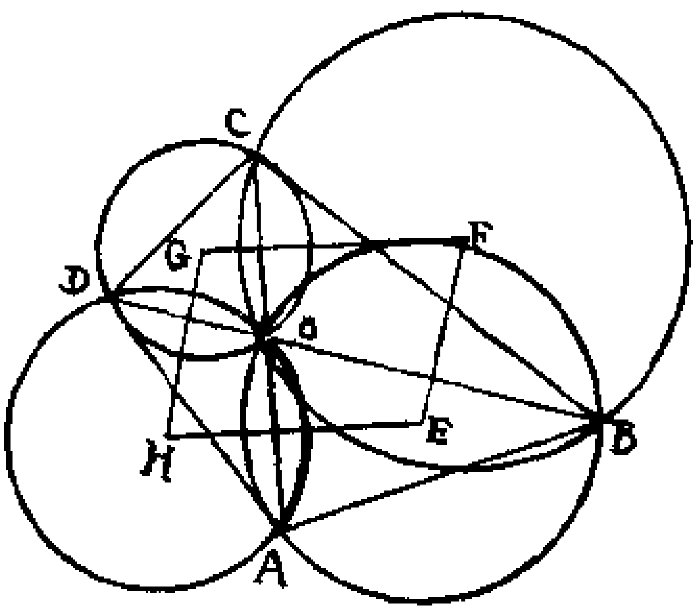


图 4.8

分析：如何证明$HG\parallel EF$、$HE\parallel FG$？由题设知E、F、G、H为圆心，而HG、EF、HE和FG均为四个圆两两相交的连心线，根据连心线必垂直于公共弦，可证$HG\perp BD$、$EF\perp BD$、$HE\perp AC$、$FG\perp AC$，由此可推出$HG\parallel EF$，$HE\parallel FG$.

例 2 以$\triangle ABC$的两边AB、AC为边向外作正方形$ABDE$、$ACFG$，取EB、BC、CG的中点H、K、L；

求证：$HK\perp LK$.

分析：本题的特点是H、K、L各为线段EB、BC、CG的中点，若连结EC、BG交于N，并分别交LK于Q、交HK于P，而HK、KL分别是$\triangle BCE$和$\triangle BCG$的中位线，因此要证$HK\perp LK$，只须证$NPKQ$是矩形．由于$NPKQ$是平行四边形，如图，只须证$\angle 7=90^\circ$即可．要证$\angle 7=90^\circ$，只

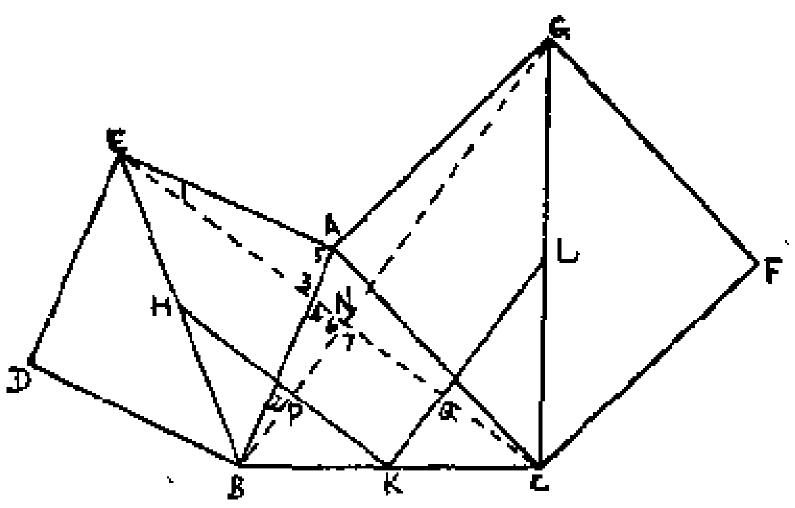


图 4.9

须证 $\angle 6=90°$. 因 $\angle 3=\angle 4$, 要证 $\angle 6=90°$, 只须证 $\angle 1=\angle 2$, 由此推出, 只须证 $\triangle AEC$ 与 $\triangle ABG$ 全等, 这容易办到.

例 3 已知 $ABCD$ 是圆的内接四边形, 延长 AD、BC 交于 E, 延长 AB、DC 交于 F, 作 EK、FH 平分 $\angle AEB$、$\angle AFD$ 交于 G, 分别与 AB、AD 交于 K、H;

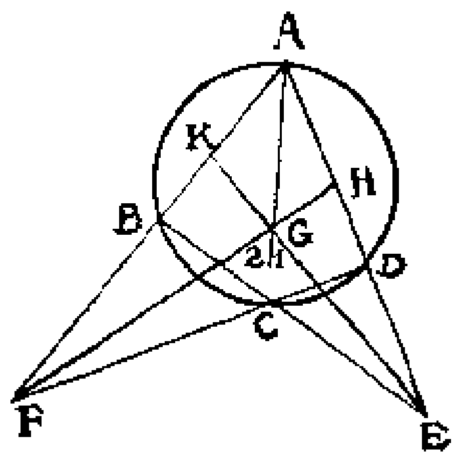


图 4.10

求证: $EG\perp GF$.

分析: 因为 $ABCD$ 是圆内接四边形, 要证

$$\angle EGF=90°,$$

只须证

$$\angle EGF=\frac{1}{2}(\angle BCD+\angle A),$$

即
$$\angle EGF=\frac{1}{2}(\angle ECF+\angle A) \quad (1),$$

从图形观察若利用三角形外角定理, 易证

$\angle EGF=\angle A+\angle AFH+\angle AEK$ 和 $\angle ECF=2\angle AFH+2\angle AEK+\angle A$,

由此可推(1)式成立.

注: 若利用圆内接四边形外角性质和三角形外角定理证明 $\triangle HEM$(或者 $\triangle KFN$) 为等腰三角形, 然后再利用等腰三角形顶角平分的性质亦可证 $EG\perp GF$.

例 4 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, AD、BE 为高, 并且相交于 H, $EF\perp BC$, 垂足为 F, $EK\perp AD$, 垂足为 K, 延长 AD 至 G, 使 $DG=EF$, L 为 AH 的中点;

求证：$BG \perp BL$.

分析：(几何证法)要证 $\angle GBL=90°$，只须证 $LD\times DG=BD^2$，由于 DE 是直角三角形 BEC 斜边 BC 上的中线，所以

$BD=DE$，而

$DG=EF=DK$，

因此只须证 $DE^2=DK\times LD$. 若能证 $\angle LED=90°$，则本题得证. 如何证 $\angle LED=90°$ 呢？因 $\angle AEB=90°$，故只须证 $\angle AEL=\angle BED$. 因为 EL、DE 是直角三角形 AEH 和 BEC 的斜边 AH、BC 上中线，易证 $\angle EAL=\angle AEL$，$\angle EBD=\angle BED$，所以只须证 $\angle EAL=\angle EBD$，由 $Rt\triangle AEH$ 和 $\triangle RtBDH$ 相似可证 $\angle EAL=\angle EBD$，于是本题可证明.

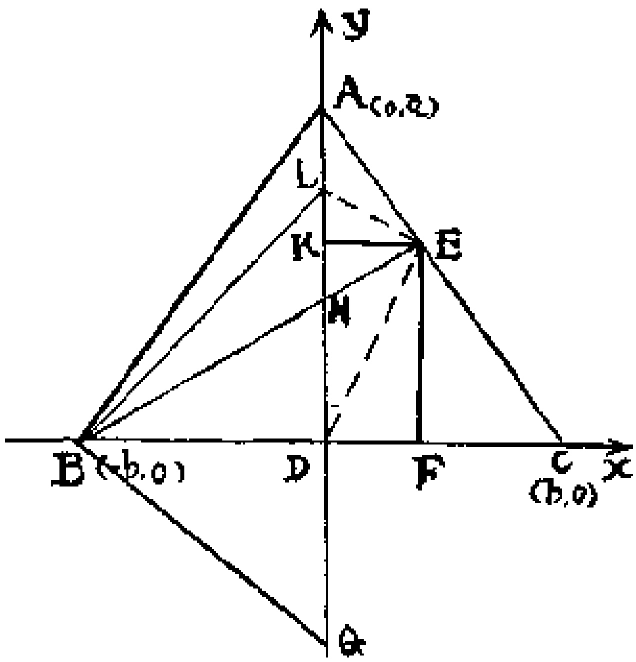


图 4.11

(三角证法)利用上图，要证 $\angle GBL=90°$，只须分别计算出 BD^2 和 DG、LD，看其是否相等？因为 $AB=AC$，所以 $\angle B=\angle C$，而 $AD\perp BC$，因此 $\sin\dfrac{A}{2}=\cos C$，$\cos\dfrac{A}{2}=\sin C$.

首先计算 DG 的长度，因

$$DG=EF=BE\cos\angle BEF=BE\cos C$$
$$=BC\sin C\cdot\cos C=2R\sin A\sin C\cos C$$

(其中 R 是 $\triangle ABC$ 外接圆半径) $=2R\sin A$.

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}=R\sin^2 A.$$

再计算 LD 的长度，

$$LD=AD-AL=AB\cos\frac{A}{2}-\frac{1}{2}(AE\cos A)$$

$$=AB\cos\frac{A}{2}-\frac{1}{2}(2R\cos A)$$

$$=2R\sin C\cos\frac{A}{2}-R\cos A$$

$$=R(1+\cos A)-R\cos A=R.$$

最后计算 BD 的长度，

$$BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(2R\sin A)=R\sin A,$$

由上述三个长度可以推证 $BD^2=DG\times LD$. 因此 $BG\perp BL$，即 $\angle GBL=90^\circ$，于是本题获证.

（解析证法）利用上图，因为等腰三角形具有对称性，可建立如图所示的坐标系，设 A、B、C 三点坐标分别为 $(a,0)$、$(-b,0)$、$(b,0)$，要证 $BG\perp BL$，只须证 $K_{BG}\cdot K_{BL}=-1$. 先求 K_{BG}，若能求出 G 点的坐标，则 K_{BG} 可求，由题设知 $|BG|=|EF|$，而且 $EF\perp BC$，故只须求出 E 点的纵坐标即可. 然而 E 点的坐标为直线 AC 和 BE 方程的交点，故问题转为求 AC 和 BE 的直线方程，由两点式易求 AC 的直线方程为

$y=-\frac{a}{b}(x-b)$，因为 $BE\perp AC$，所以 BE 的直线方程由点斜

式可推知为 $y=\frac{b}{a}(x+b)$，而其交点 E 的纵坐标为

$$Ey=\frac{2ab^2}{a^2+b^2},$$

因此 G 点的坐标为 $\left(0,-\frac{2ab^2}{a^2+b^2}\right)$，

故 $$K_{BG}=-\frac{2ab^2}{a^2+b^2}.$$

再求 K_{BL}，若能求出 L 点的坐标，则 K_{BL} 可求. 由题设知 L 为 AH 的中点，探求 H 点的坐标是解决本题的关键. 从图中观察知点 H 是直线 BE 和 y 轴的交点，其坐标为 $(0, \frac{b^2}{a})$，再由中点公式(点 L 为线段 AK 的中点)可求 L 点的坐标为 $\left(0, \frac{a^2+b^2}{2a}\right)$，故 $K_{BL}=\frac{2ab^2}{a^2+b^2}$. 因 $K_{BG} \cdot K_{BL}=-1$，于是命题得证.

习 题 二

1. 由三角形 ABC 的二顶点 B、C 至对边作垂线 BD、CE，又由 D、E 作 AB、AC 的垂线 DF、EG；则 FG 必与 BC 平行.

2. 以四边形各边为直径各作一圆，则每相邻两边上两圆的公共弦必两两平行.

3. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，$AD \perp BD$，$AE \perp CE$，其中 BD、CE 分别平分 $\angle B$、$\angle C$；求证：$ED \parallel BC$.

4. $\odot o_1$ 和 $\odot o_2$ 相交于 A、B，在 $\odot o_1$ 上取一点 P，连 PA、PB 交 $\odot o_2$ 于 C、D 两点；求证：CD 与过 P 点的切线平行.

5. $\triangle ABC$ 的中线 AM 上的任意一点为 P，延长 BP、CP 与对边的交点各为 E、D；则 $DE \parallel BC$.

6. 已知 $ABCD$ 为平行四边形，$EF \parallel AD$，BE 与 CF 的延长线交于 G，AE 与 DF 的延长线交于 H；求证：$GH \parallel AB$.

7. M 是圆外一点，MQ 切圆于 Q，过 M 作线段 $MP=MQ$，过 P 任作这圆的割线交圆于 A 和 C，再作直线 MA 交圆于 B，连结 PB，并延长使圆相交于 D，连结 CD；求证：$CD \parallel MP$.

8. 已知在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足为D，$\angle A$的平分线AF分别与CD、CB相交于E、F，G为BC上的一点，且$BG=CF$；求证：$EG\parallel BD$.

9. $\triangle ABC$内接于圆，$\angle A$的内角和外角的平分线分别与圆相交于点M和M'，连结MM'；则$MM'\perp BC$.

10. 在$\triangle ABC$中，BC边上的高是AD，自D点作AB、AC的垂线，垂足为E、F，若O点是$\triangle ABC$的外接圆的圆心；则$OA\perp EF$.

11. 圆内接四边形$ABCD$的对角线垂直相交于P点，若E为AB的中点；则$EP\perp CD$.

12. 三角形的各顶点与外心连结成的线段必垂直于垂足三角形的各边.

已知：O为$\triangle ABC$的外心，DEF为垂足三角形；求证：OA、OB、OC垂直于EF、ED、FD.

§3. 求证一线段(或一角)等于某些线段(或某些角)的和、差、倍、分

证明一线段(或一角)等于某些线段(或某些角)的和差倍分的方法归纳如下：

(1) 应用加倍法；

(2) 应用折半法；

(3) 应用分段证明相等，然后再利用等量公理的方法；

(4) 应用辅助线段(或辅助角)，如：

1) 三角形(或梯形)的中位线；

2) 直角三角形斜边上的中线以及锐角为30°时，30°的角所对的边；

3) 利用外角关系及三角形的内角和等于180°；

4) 利用同圆中相等弧的圆心角与圆周角、弦切角的关系.

例 1　等腰三角形腰上的高与底边所夹的角等于顶角的一半.

已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$CD\perp AB$.

求证：$\angle DCB=\frac{1}{2}\angle A$.

分析一：如图4.12，欲证$\angle 1=\frac{1}{2}\angle A$，作$\angle A$的平分线$AE$交$BC$于$E$，只须证$\angle 1=\angle 3$即可. 在$\triangle BCD$和$\triangle ABE$中，$\angle AEB=\angle 4$，$\angle B$公用，由此可推得$\angle 1=\angle 3$，即

$\angle 1=\frac{1}{2}\angle A$. 此处用的是折半法.

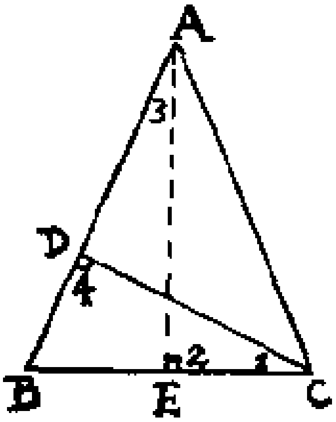


图 4.12

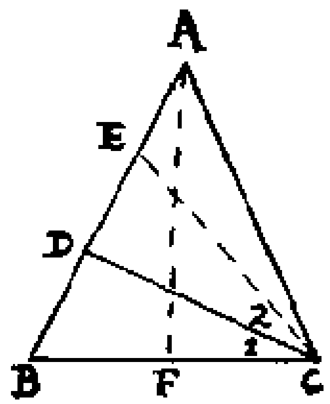


图 4.13

分析二：如图4.13，欲证$\angle 1=\frac{1}{2}\angle A$，过点$C$作直线$CE$，使$\angle DCE=\angle 1$与$AB$相交于$E$，故只须证$\angle 1+\angle 2=\angle A$即可. 若能证$\angle B=\angle ACB=\angle BEC$，则$\angle 1+\angle 2=\angle A$，但从等腰三角形$ABC$和$BCE$中很易证$\angle B=\angle ACB=\angle BEC$，由此可得$\angle BCE=\angle A$，即$\angle 1+\angle 2=\angle A$，而$\angle 1$

$=\frac{1}{2}\angle BCE$，故 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle A$，即 $\angle DCB=\frac{1}{2}\angle A$. 此处用的是加倍法.

例 2 已知：正五边形 $ABCDE$，延长各边分别相交于点 F、G、H、K、L；

求证：

$\angle F+\angle G+\angle H+\angle K+\angle L=180°$.

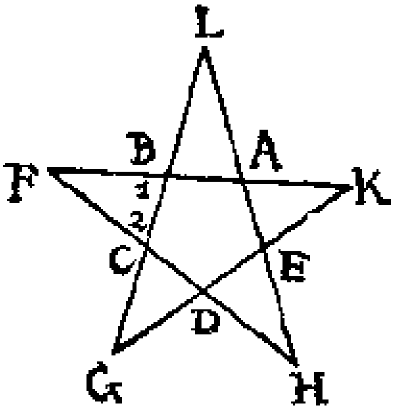


图 4.14

分析：如图，根据三角形的外角定理易知 $\angle 1=\angle G+\angle K$，

$\angle 2=\angle H+\angle L$，

而 $\angle F+\angle 1+\angle 2=180°$，

即 $\angle F+\angle G+\angle H+\angle K+\angle L=180°$.

注：非正五边形此结论亦成立.

例 3 设 E 是正方形 $ABCD$ 的 CD 边的中点，F 是线段 CE 的中点；

求证：

$\angle DAE=\frac{1}{2}\angle BAF$.

分析：欲证 $\angle DAE=\frac{1}{2}\angle BAF$，只须证

$2\angle DAE=\angle BAF$，由于两边均为锐角，也只须证

$\text{tg}(2\angle DAE)=\text{tg}\angle BAF$，

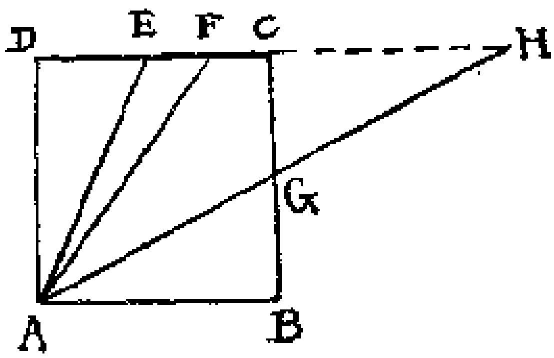


图 4.15

现在分别求出 $\text{tg}(2\angle BAE)$ 和 $\text{tg}\angle BAF$ 的函数值. 设正方形

一边长为a，因E为正方形一边的中点，所以$DE=EC=\frac{1}{2}a$，而F又为EC的中点，故$EF=FC=\frac{1}{4}a$. 在$Rt\triangle ADE$中，$\operatorname{tg}\angle DAE=\dfrac{\frac{1}{2}a}{a}=\frac{1}{2}$. 然而

$$\operatorname{tg}(2\angle DAE)=\frac{2\operatorname{tg}\angle DAE}{1-\operatorname{tg}^2\angle DAE},$$

即
$$\operatorname{tg}(2\angle DAE)=\frac{4}{3}.$$

再求$\operatorname{tg}\angle FAB$的值，

$$\operatorname{tg}\angle FAB=\operatorname{ctg}\angle FAD=\frac{a}{\frac{3}{4}a}=\frac{4}{3}.$$

例 4　等腰$\triangle ABC$的底边是BC，延长一腰AB到D，使BD等于其腰，又取AB的中点E；

求证：$CD=2CE$.

分析一：如图 4.16，取CD的中点F，连结BF，要证$CD=2CE$，只须证$CF=CE$即可，只须证$\triangle CFB\cong\triangle CEB$，由假设知$BF\parallel AC$，且$BF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AB=BE$，而$\angle FBC$

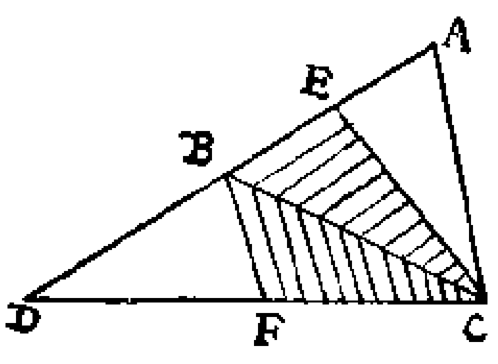


图 4.16

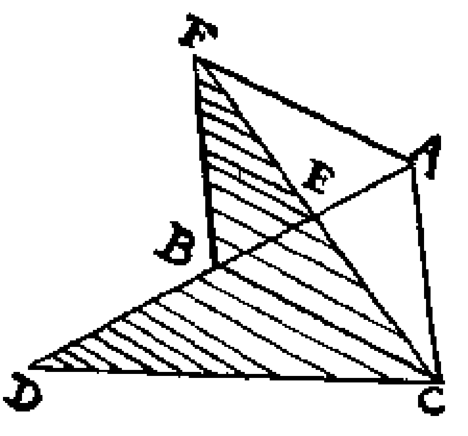


图 4.17

$=\angle ACB=\angle ABC$，又 BC 公用，故两三角形全等．

分析二： 延长 CE 到 F，使 $EF=CE$，连结 AF、BF，要证 $CD=2CE$，因 $CF=2CE$，所以只须证 $CD=CF$ 即可．要证 $CD=CF$，只须证 $\triangle CBD\cong\triangle CBF$，由 $AFBC$ 是平行四边形，知 $AC /\!/ FB$ 且 $AC=FB$，$\angle FBC+\angle ACB=180°$，又由假设知 $AB=BD=AC$，$\angle ABC+\angle CBD=180°$，而 $\angle ACB=\angle ABC$，所以 $\angle FBC=\angle CBD$，又 BC 公用，于是 $\triangle CBD\cong\triangle CBF$，因此 $CD=CF$，故本题的结论得证．

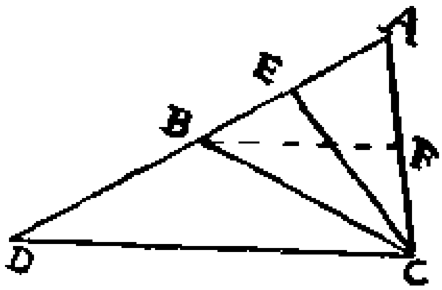


图 4.18

注： 本题用的两种思考方法仍然是加倍法和折半法．本题证法较多，画出图4.18、4.19、4.20，并添上辅助线，请读者自己完成证明．

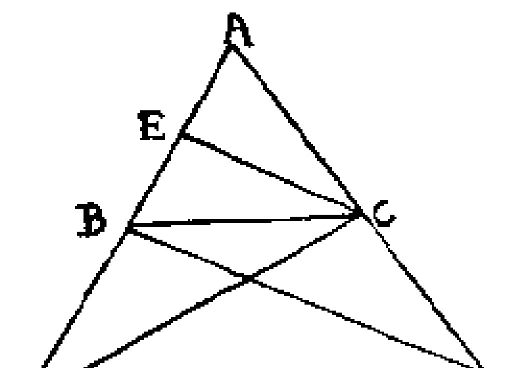


图 4.19

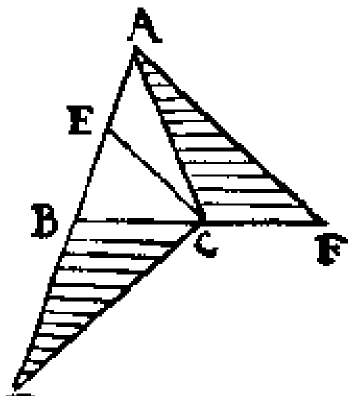


图 4.20

习　题　三

1．三角形的垂心 O、外心 Q 及重心 G；求证：此三点同

在一直线上，且垂心和重心的距离，刚好等于重心与外心距离的2倍.

2. 从▱$ABCD$的顶点A、B、C、D向形外任意直线引垂线AA'、BB'、CC'、DD'，垂足为A'、B'、C'、D；则$AA'+CC'=BB'+DD'$.

3. 过三角形的重心O作任意一条直线，则在同侧的两顶点与这直线距离的和等于另一顶点与这直线的距离.

4. 已知四边形$ABCD$内接于$\odot o$，$AC\perp BD$，$OE\perp AB$于E；求证：$OE=\frac{1}{2}CD$.

5. 在$\triangle ABC$中，$\angle B$和$\angle C$的平分线交于O，求证：$\angle BOC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$.

6. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=90^\circ$，$AX\perp BC$，$\odot O$内切$\triangle ABC$于D、E、F，半径是R，$\odot P$内切$\triangle ACX$于G、H、K，半径是r，$\odot Q$内切$\triangle ABX$于L、M、N，半径r'；则$R+r+r'=AX$.

7. $\triangle ABC$和$\triangle ADE$的$\angle A$为对顶角，$\angle C$和$\angle E$的分角线相交于F；试证：$\angle F=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$.

8. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，在AB的延长线上取一点D，作$DL\parallel CA$，又以A为圆心，$\frac{1}{2}BD$为半径作弧与DL交于E，连结AE；试证：$\angle EAC=3\angle BAC$.

9. 以圆周上C点为中心，任取半径作圆周，其APB弧在圆内. 任在弧上取P点，作APD、BPE二弦；则$\angle ECD=\angle ACE+\angle BCD$.

10. $ABCD$是平行四边形，直线MN与AD、BC相截，

AE、BF、CG、DH 都是 MN 的垂线，E、F、G、H 分别为垂足；则 $BF-AE=DH-CG$.

§4. 求证线段或角的不等关系

证明两条线段或两个角不相等，主要有以下几种方法：

(1) 采用同一个三角形或两个三角形的边角关系的定理以及三角形的外角定理和不等量公理来证；

(2) 翻折法 例如题设中有角的平分线，可将此角的平分线为对称轴，作轴对称图形；

(3) 旋转法，即以某点为中心，将图形绕此点旋转某一角度，然后找出它们之间的相依关系；

(4) 在求证若干线段的和小于另几条线段的和时，往往利用三角形的任意一边小于其它两边的和，以及直角三角形斜边大于直角边等定理，然后利用不等量公理进行变形，直到最后推出结论为止.

例 1 已知△ABC 中 $AB>AC$，$\angle A$ 的平分线交 BC 于 D；

求证：$BD>CD$.

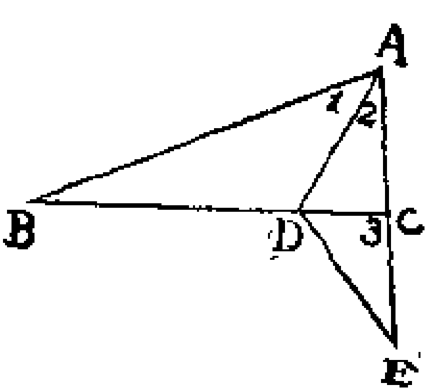


图 4.21

分析：因 CD 和 BD 在一条直线上，而它们所对的两个角又相等，故不能利用两个三角形中的边角的定理进行论证，必须将它们转化到一个三角形中，然后再利用三角形边角关系的定理证明. 于是以角的平分线为对称轴进行翻折(这是几何学证题中常用的一种方法). 延长小边

AC 到 E，使 AE 等于大边 AB，这就是以 AD 为对称轴，将左边图形翻折到右边，就得 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADE$ 全等，所以 $BD=DE$，若能证 $DE>CD$，则本题得证．但 DE 和 CD 是 $\triangle CDE$ 的两边，要证 $DE>CD$，只须证 $\angle 3>\angle E$，而 $\angle E=\angle B$，所以只须证 $\angle 3>\angle B$，由于 $\angle 3$ 是三角形 ABC 的外角，故 $\angle 3>\angle B$．

注：此题还可以以 AD 为对称轴，从右边往左边翻折．

例 2　在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 是三角形内的一点，$\angle ADB>\angle ADC$；

求证：$DC>DB$．

分析：线段 BD 和 CD 虽同在 $\triangle BDC$ 中，或者分别在 $\triangle BDA$ 和 $\triangle CDA$ 中，但均无法直接利用一个或两个三角形中的边角不等关系的定理进行证明．如图示，以 A 点为中心，将 $\triangle ABD$ 按逆时针方向旋转到 $\triangle ACE$ 的位置，使 AB 与 AC 相重合，就得 $\triangle ACE$ 和 $\triangle ABD$ 全等，$\angle ADB=\angle AEC$，从而推得 $\angle AEC>\angle ADC$．又 $AD=AE$，所以 $\angle ADE=\angle AED$，因此 $\angle DEC>\angle EDC$．在 $\triangle CDE$ 中易证 $DC>EC$，即 $DC>DB$．于是命题获证．

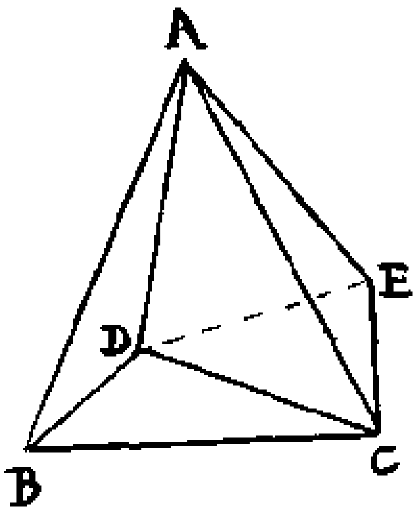


图 4.22

注：本题我们曾用反证法处理过．

例 3　已知：在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 为外接圆 $\overset{\frown}{AC}$ 上任一点；

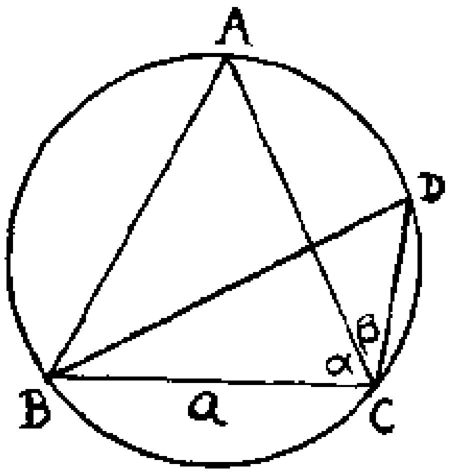


图 4.23

求证：

$AB+AC>DB+DC$.

分析：欲证

$AB+AC>DB+DC$,

只须证

$(AB+AC)-(DB+DC)>0$ (1),

而 AB、AC 与 DB、DC 分别是具有公共底边 BC 的两个三角形 ABC 和 DBC 的边，根据正弦定理，设 $BC=a$，$\angle ACB=\alpha$，$\angle ACD=\beta$ $(0<a, 0^\circ<\alpha、\beta<90^\circ)$，则 $\angle D=\angle A=180^\circ-2\alpha$，$\angle DBC=\alpha-\beta$，

在$\triangle ABC$中，因为$\dfrac{AB}{\sin\alpha}=\dfrac{a}{\sin(180^\circ-2\alpha)}$，

$$\text{所以}AB=\frac{a}{2\cos\alpha} \tag{2}$$

又在$\triangle DBC$中，因为 $\dfrac{DB}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{a}{\sin(180^\circ-2\alpha)}$，

$$\text{所以}\quad DB=\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\cos\alpha} \tag{3}$$

$$\frac{DC}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{a}{\sin(180^\circ-2\alpha)}, \text{ 即}$$

$$DC=\frac{a\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\alpha\cos\alpha} \tag{4}$$

将(2)、(3)和(4)式代入(1)式得：

$$(AB+AC)-(DB+DC)=\frac{a}{\cos\alpha}-\frac{a\cos\beta}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{a(1-\cos\beta)}{\cos\alpha}.$$

因 $0^\circ<\alpha<90^\circ$，$0^\circ<\beta<90^\circ$，所以 $0<\cos\alpha<1$，$0<\cos\beta<1$，

因此 $1-\cos\beta>0$，而 $a>0$，故 $\frac{a(1-\cos\beta)}{\cos\alpha}>0$，

即 $(AB+AC)-(DB+DC)>0$.

习 题 四

1. 设在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，D是BC边的中点；求证：$\angle ADB>\angle ADC$，$\angle BAD<\angle CAD$.

2. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D是AC延长线上一点；求证：$\angle ABC=\frac{1}{2}(\angle CBD+\angle D)$.

3. 从三角形ABC的A、B两顶点，向对边BC、AC引高线AD、BE，若AC大于BC；则$AC+BE>BC+AD$.

4. 在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，BE、CF都是中线；求证：$BE>CF$.

5. 在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，D为BC的中点，在AB、AC上分别取E、F，使$BE=CF$，则$\angle DEF>\angle DFE$.

§5. 求证共点、共线、共圆

(一) 关于共点的问题可分以下两种情况：

(1) 证几条直线共点，先证二线交于一点，再证交点在其余几条直线上（或者过交点作直线，证所作的直线与其余直线重合）；

(2) 证几个圆相交于一点的主要方法是证两圆的交点在其它各圆上.

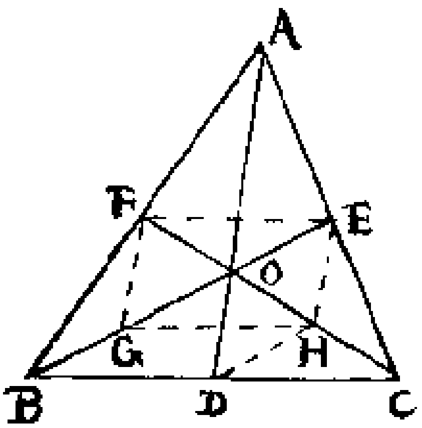


图 4.24

例 1 已知 AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的 BC、CA 和 AB 边上的中线；

求证：AD、BE 和 CF 相交于一点 O.

分析一：很易证 BE 和 CF 相交于一点 O，连结 AO 以及 OD. 解决本题的关键是证 AOD 为一条直线，只须证 $\angle AOD$ 为一个平角或 AO 与 OD 同时平行于某一直线. 根据本题的特点，我们采用后一种方法，取 BO、CO 的中点 G、H，然后连结 EF、EH、HG、GF 和 DH，由三角形中位线和平行四边形的知识便可证 AO 和 DO 都平行 EH.

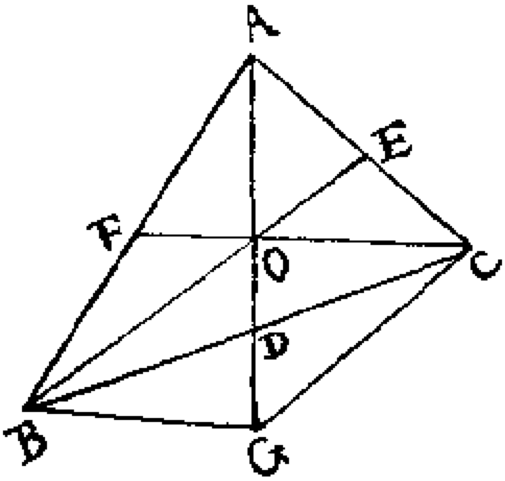


图 4.25

分析二：很易证 BE、CF 相交于一点 O，连结 AO，并延长到 G，使 $OG=AO$，而与 BC 相交于点 D，若能证点 D 为 BC 的中点，则三中线交于一点 O. 连结 BG 和 CG，只须证四边形 $OBGC$ 为平行四边形，根据平行四边形对角线互相平分的性质即可判定点 D 为 BC 的中点. 要证四边形 $OBGC$ 为平行四边形，由三角形中位线性质易证 $OE \parallel GC$（即 $BO \parallel GC$），$OF \parallel BG$（即 $CO \parallel BG$），于是命题得证.

（二）证明三点共线常用的方法有以下几种：

（1）利用“平角的两边互为反向延长线”；

(2) 利用平行线公理；

(3) 利用"两个共一边的等角，若均落在公共边的同侧，则另一边也重合".

例 2 自三角形外接圆上的一点，作各边的垂线，则各上的边三交点必在一直线上.

已知：D 是$\triangle ABC$外接圆上任意一点，且$DR\perp AB$，$DS\perp BC$，$DT\perp CA$，其中 R、S、T 分别为垂足；

求证：R、S、T 三点在一直线上.

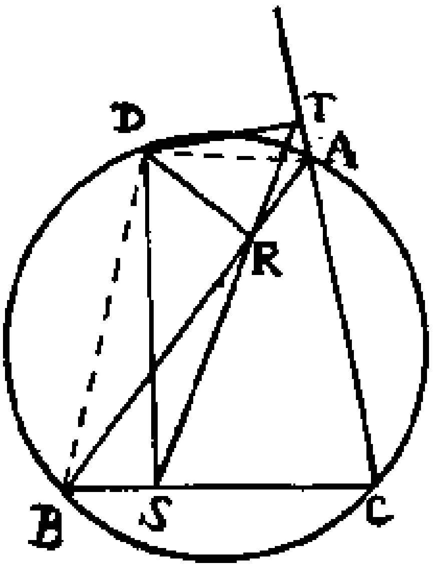


图 4.26

分析： 欲证 R、S、T 共线，如图，只须证 $\angle DRT+\angle DRS=180°$，因 B、D、R、S 四点共圆，所以$\angle DBC+\angle DRS=180°$，故只须证$\angle DRT=\angle DBC$，又因 A、D、R、T 四点共圆，所以$\angle DRT=\angle DAT$. 由圆内接四边形外角的性质可证$\angle DBC=\angle DAT$，故命题获证.

例 3 已知：圆 O 和圆 O' 外切于点 P，平行线段 AB、CD 各为一圆的直径；

求证：AD 与 BC 相交于点 P.

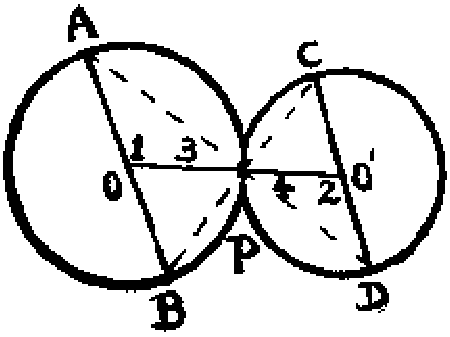


图 4.27

分析： 只须证 A、P、D 三点共直线，同理可证 B、P、C 三点共直线. 因连心线 OO' 必过切点 P，于是本题可以采用从直线 OO' 上一点 P 向两侧各引一条射线

PA、PD，证不相邻的两角 $\angle APO$、$\angle DPO$ 相等，则此二直线必重合为一的方法来进行证明．若能证 $\angle APO = \angle DPO'$，则本题获证．因 $\angle APO$ 和 $\angle DPO'$，分别是等腰三角形 AOP 和 $DO'P$ 的底角，而它们的顶角由 $AB \parallel CD$ 可证它们相等，因此 $\angle APO$ 和 $\angle DPO'$，分别等于 $180°$ 减顶角的一半，故命题获证．

注：本题还可改为两圆内切，请读者自己完成．

（三）证明点共圆的方法有以下几种：

（1）利用到一定点的距离相等的各点在一个圆上；

（2）利用同斜边的几个直角三角形的各直角的顶点在一个圆上；

（3）如图，只要具备以下条件之一者，A、B、C、D四点共圆：

1）$\angle BAC = \angle BDC$，

2）$\angle BAD + \angle BCD = 180°$，

3）$\angle FAD = \angle BCD$，

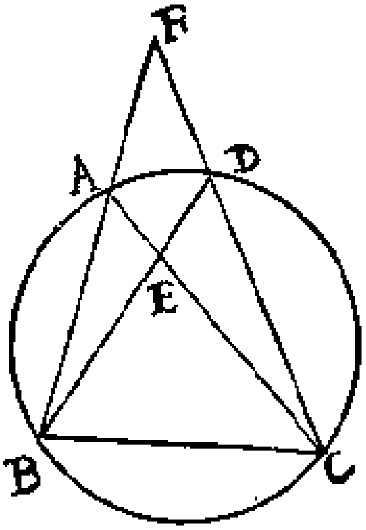


图 4.28

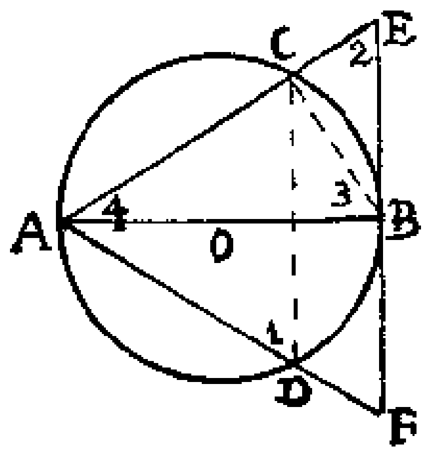


图 4.29

4) $AE\cdot CE=BE\cdot DE$,

5) $AF\cdot BF=CF\cdot DF$.

例 4 已知：AB 是圆 O 的直径，EF 是圆 O 在 B 点处的切线，射线 AE 和 AF 分别交圆 O 于 C、D 两点；

求证：C、D、E、F 四点共圆.

分析：如图4.29，连结 CD，欲证 C、D、E、F 四点共圆，只须利用四边形的一个外角等于它的内对角，则四顶点共圆. 只须证$\angle 1=\angle 2$. 若连结CB，则$\angle 1=\angle 3$. 今只须证$\angle 3=\angle 2$，结合题设可从 $Rt\triangle ACB$ 和 $Rt\triangle ABE$ 发现$\angle 3$ 和 $\angle 2$ 都是 $\angle 4$ 的余角，由此可确定 $\angle 3=\angle 2$，即 $\angle 1=\angle 2$.

习 题 五

1. 已知线段 $AB\parallel CD$，且 $AB\neq CD$，依相等的比例内分或外分于 E、F，则 EF 与 AC 和 BD 相交于同一点.

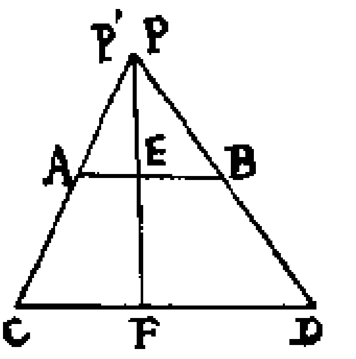


图 4.30

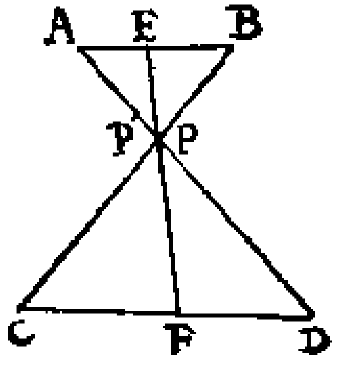


图 4.31

2. 在$\triangle ABC$ 的三边上，各向形内作正三角形 BCA'、CAB'、ABC'，其 AA'、BB'、CC' 三直线必相交于同一点.

3. 在三角形的两边上向形外各作一正方形，又以第三边为对角线作一正方形，则三个正方形的外接圆共点.

4. 由三角形 ABC 的截线 DEF 所成的 ABC、DFC、

ADE、BEF 四个三角形，其外接圆必相交于同一点.

5. 于三角形 ABC 的边 BC、CA、AB 上任取 D、E、F 各点，其 AEF、BFD、CDE 各三角形的外接圆必相交于同一点.

6. 如果线段 AB、CD 延长线相交于 M，且 $AM\cdot BM=CM\cdot DM$；那末 A、B、C、D 四点共圆.

7. 二圆相切于 P，一圆的弦 AB 延长交内公切线于 E，过 A、B 任作一圆交另一圆于 C、D；则 C、D、E 共线.

8. 假设两线段 AB、CD 相交于 E，$AE\cdot BE=CE\cdot DE$；求证：A、B、C、D 四点共圆.

9. 过三角形的各顶点及其对边上内切圆的切点的直线，相交于同一点.

10. 过三角形的各顶点及其对边上旁切圆的切点的直线，相交于同一点.

11. 二直线 AB、CD 相交于 P，若 AP 与 BP 的积等于 CP 和 DP 的积；则 A、B、C、D 四点共圆.

12. 从直线外一点 A，引三直线与此直线交于 B、C、D 三点，又延长 AB 至 E，延长 AC 至 F，延长 AD 至 G，设 $AB\cdot AE=AC\cdot AF=AD\cdot AG$；则 E、F、G、A 在同一个圆上.

13. 已知：P 为正方形 $ABCD$ 对角线上任意一点，$EF\parallel BC$，$GH\parallel AB$；求证：E、F、G、H 在同一圆周上.

14. 任作凸四边形，其内角(或外角)的平分线相交所成的四边形可内接于圆.

15. 由 BC 弧的中点 A，作 AD、AE 二弦与 BC 弦相交于 F、G；则 D、E、F、G 四点共圆.

§6. 求证线段成比例

证明线段成比例常用的方法有：

(1) 利用相似三角形对应边成比例；

(2) 利用三角形的内角(或外角)平分线的性质；

(3) 利用平行截割定理；

(4) 利用直角三角形中成比例线段定理；

(5) 利用圆中成比例线段定理；

(6) 利用勾股定理和勾股定理的推广；

(7) 利用面积里有关比例方面的定理；

(8) 利用中线定理.

上述方法也可用来论证线段平方(或乘积)相等以及线段的平方(或乘积)的和、差等关系.

例 1 在 $\triangle ABC$ 的边 AC 上取一点 A'，于 CB 的延长线上取 $BB'=AA'$；则 AB 截 $A'B'$ 所成二部分的比等于 $BC:CA$（即 $A'E:EB'=BC:CA$）.

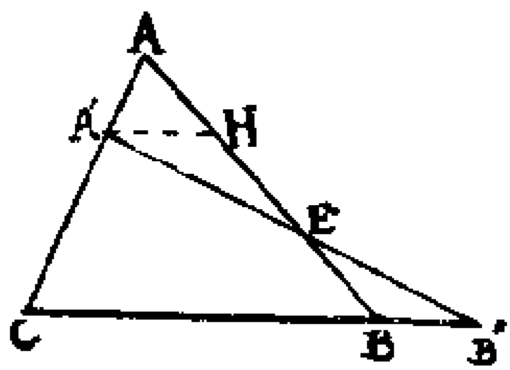


图 4.32

分析：根据本题给定的条件，线段 BC 和 CA 是 $\triangle ABC$ 的边，而线段 $A'E$ 和 EB' 在一条直线上，不能直接采用上述八种方法进行证明。必须增添辅助线构造“媒介比”，使上述方法可以应用. 只要过点 A' 作 CB 的平行线 $A'H$ 与 AB 相交于 H，就能满足上述的要求. 此时，易证 $\triangle ABC \backsim \triangle AA'H$ 和 $\triangle A'EH \backsim \triangle B'EB$，故 $BC:CA=A'H:A'A$ 和 $A'H:B'B=A'E:EB'$. 但 $AA'=$

BB'，从而可得 $A'E:EB'=BC:CA$. 于是命题获证. 这里，$\frac{A'H}{AA'}$叫媒介比.

注：本题另一种添辅助线的方法是过 B' 点作 $B'F$ 与 AC 平行，交 AB 的延长线于 F.

例 2　从直角三角形 BAC 的直角顶点 A 至斜边 BC 上引高线 AD，又引$\angle B$ 的平分线与 AD、AC 相交于 O、E；则 $DO:OA=AE:EC$.

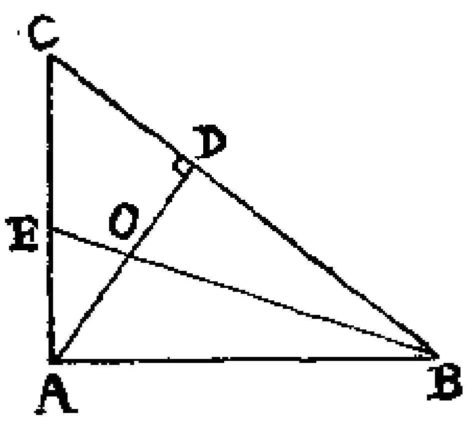


图 4.33

分析：根据本题给定的条件，$DO:OA$ 和 $AE:EC$ 都与内角平分线的性质有关，因为由三角形内角平分线的性质易知：$DO:OA=BD:BA$ 和 $AE:EC=AB:BC$. 因此只要能证 $BD:AB=AB:BC$ 即可，为此只要证$\triangle ABD\backsim\triangle CBA$.

例 3　由圆外一点 P 引切线 PA、PB，再引一割线 PCD；

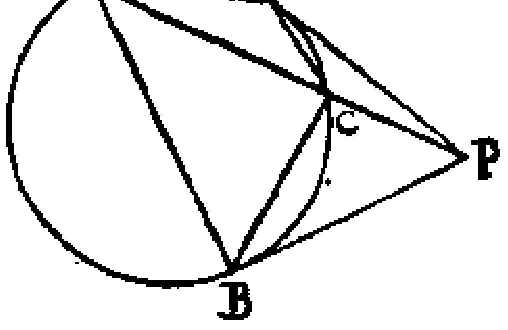


图 4.34

求证：

$AD\cdot BC=AC\cdot DB$.

分析：欲证

$AD\cdot BC=AC\cdot DB$,

只须证　$\frac{AD}{AC}=\frac{DB}{BC}$,

利用已知条件 PA 和 PB 都是圆的切线，可使$\frac{AD}{AC}$与切

线 PA 发生关系，使$\frac{DB}{BC}$与切线 PB 发生关系，然后进行代换，即可达目的.

例 4　已知：$\triangle ABC$ 的$\angle A$ 的平分线交底边于 D，交外接圆于 P；

求证：

$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$.

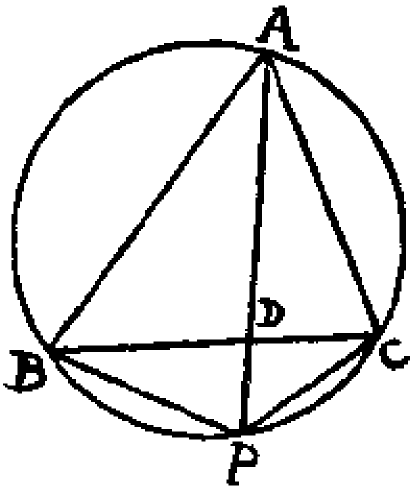


图 4.35

分析：欲证

$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$,

只须证 $AD^2 + BD \times DC = AB \times AC$，由相交弦定理知 $BD \times DC = AD \times DP$，代入上式得 $AD^2 + AD \times DP = AB \times AC$，化简得 $AD(AD+PD) = AB \times AC$，而 $AD+DP=AP$，所以 $AD \cdot AP = AB \cdot AC$，即 $AD:AC = AB:AP$. 由此易证 $\triangle ABD \backsim \triangle APC$，因此

$$AB:AD = AP:AC,$$

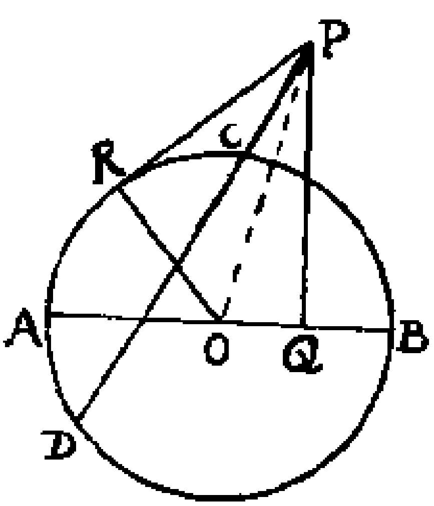


图 4.36

故 $AB \cdot AC = AP \cdot AD = AD(AD+DP) = AD^2 + AD \cdot DP$,

即 $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$.

注：若本题中的 $AB \cdot AC$ 用等量 $AD \cdot AP$ 代换，只须将 AD^2 和 $BD \times DC$ 的位置交换，仍然可以转化成

比例式进行证明．

例 5 设 AB 是 $\odot o$ 的直径，P 是 $\odot o$ 外一点，作 $PQ \perp AB$，再由 P 任作 $\odot o$ 的割线 PCD，且与 $\odot o$ 相交于 C、D 两点；

求证：

$$PQ^2 = PC \cdot PD + AQ \cdot BQ.$$

分析：上述等式中欲证的线段彼此之间关系不明显，我们先研究右边的两个乘积．因 $PC \cdot PD = PR^2$，PR 为过 P 的圆 O 的切线．$AQ \cdot BQ = (AO + OQ)(AO - OQ) = AO^2 - OQ^2$，代入欲证的等式中去，得 $PQ^2 = PR^2 + AO^2 - OQ^2$，即 $PQ^2 + OQ^2 = PR^2 + AO^2$．但 $PQ^2 + OQ^2 = OP^2 = PR^2 + OR^2$，而 $OR = OA$，故命题得证．

注：若 Q 点在 AB 的延长线上，则此命题结论为 $PQ^2 = PC \cdot PD - AQ \cdot BQ$，读者可仿上自己完成．

习 题 六

1．$\triangle ABC$ 的 AB 边小于 AC 边，延长 AB 至 D，使 $BD = AB$，在 AC 上取 E 点，使 $CE = BD$，连结 DE 与 BC 交于 F，则 $AB:AC = EF:FD$．

2．三角形 ABC 的底边 BC 延长至 D，从 D 引一直线，与它二边 AC、AB 相交于 E、F，若 $\angle AEF = \angle AFE$；则 $BD:CD = BF:CE$．

3．A 为圆周上任意的一点，D 为直径 BC 上任意的一点，作过 D 点的垂线，与 BA 延长线交于 E，又与 AC 及圆周交于 F、G；则 DG 为 DE、DF 的比例中项．

4．有直角三角形 ABC，从其斜边 BC 的中点 O 作此边的垂线交它二边于 E、F，连结 AO；则 $AO^2 = OE \cdot OF$．

5. 已知 AM 是$\triangle ABC$ 的$\angle BAC$的平分线，过 A 作一圆与 BC 相切于 M. 又与 AB、AC 分别相交于 D、E； 则 $AB:AC=BD:CE$.

6. $\triangle ABC$ 的$\angle A$ 的外角平分线与 BC 的延长线交于 D，与外接圆交于 E. 求证：$AB\cdot AC=AD\cdot AE$.

7. 已知割线 PAB 过$\odot o$ 的圆心，PC 切$\odot o$ 于 C，$CD\perp AB$ 于 D； 求证：$PA:AD=PB:DB$.

8. 通过相交二圆的公共弦上 C 点，引一直线，与圆的交点为 A、D，与又一圆的交点为 B、E； 则 $AB:BC=ED:CD$.

9. 已知$\triangle ABC$ 的三条垂线分别为 AD、BE、CF，H 为垂心； 求证：(1) $AH\cdot HD=BH\cdot HE=CH\cdot HF$， (2) $BH\cdot BE-CH\cdot CF=BC^2$.

10. AB 为圆 O 的直径，CD 为其平行弦，AB 上的任意一点为 P； 则 $PC^2+PD^2=PA^2+PB^2$.

11. 半圆 ACB 内任意一点为 P，AP、BP 的延长线各与半圆周的交点为 C、D； 则 $AC\cdot AP+BD\cdot BP=AB^2$.

12. $\odot o$ 是$\triangle ABC$ 的外接圆，$\angle A$ 的外角平分线交 BC 的延长线于 D； 求证：$AB\cdot AC=BD\cdot CD-AD^2$.

13. 由半圆的直径 AB，任取二弦 AE、BD，其交点为 C； 则 $AC\cdot AE+BC\cdot BD=AB^2$. 若 AD、BE 的交点为 C'； 则 $AC'\cdot AD+BC'\cdot BE=AB^2$.

14. 由直角三角形 ABC 的斜边 BC 上任意的点 P，作斜边的垂线，使与 AB、AC 相交于 Q、P； 则

$PQ^2=BP\cdot CP-BQ\cdot AQ$，$PR^2=BP\cdot CP+AR\cdot CR$.

15. AB 为圆的直径，P 为 AB 上的一点，Q 为圆周任意之点，由 Q 作切线，而 PR 为此切线的垂线； 则

$AB\cdot PR=PQ^2+AP\cdot BP$.

§7. 求证面积相等

证明面积相等或面积与线段之间的比例关系的方法可以归纳如下几种：

(1) 利用等底等高的两个三角形等积；

(2) 利用任意两个三角形面积的比等于底与高的乘积的比；

(3) 利用等底(或高)三角形面积的比等于高(或底)的比；

(4) 利用一角相等(互补)的两个三角形面积比等于夹这个角两边乘积的比；

(5) 利用相似三角形面积的比等于相似比的平方；

(6) 利用两同底三角形面积的比等于第三顶点连线(或延长线)被公共底(或延长线)所截得的两线段之比.

例 1 从 $\triangle ABC$ 的各顶点作三平行线 AD、BE、CF 各与对边或其延长线交于 D、E、F；

求证：

$\triangle DEF$ 的面积 $=2\triangle ABC$ 的面积.

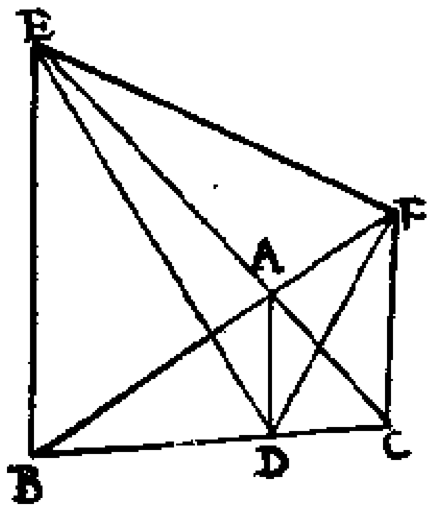


图 4.37

分析：因为三条平行线把所求的三角形分割成几个三角形，而它们的顶点均在三条平行线上，故本题可采用同底等高的方法进行证明. 从图中观察知，$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle ADE}+S_{\triangle ADF}+S_{\triangle AEF}$，且易证 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ADB}$ (1)． $S_{\triangle ADF}=S_{\triangle ADC}$ (2)，由(1)式加(2)式得 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADE}+S_{\triangle ADF}$. 现在剩下的只要证 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AEF}$

就行了，而这两个三角形除有公共顶点外，其余顶点均在两平行线上，由此利用同底等高的两个三角形等积，得

$$S_{\triangle ECF}=S_{\triangle BCF}.$$

然后两边减去 $S_{\triangle ACF}$，得 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AEF}$.

例 2　已知两圆相交于 X、Y，P 为 XY 延长线上任一点，过 P 引两圆的割线 PCD 和 PAB；

求证：

$$\frac{AD\cdot BD}{AC\cdot BC}=\frac{PD}{PC}.$$

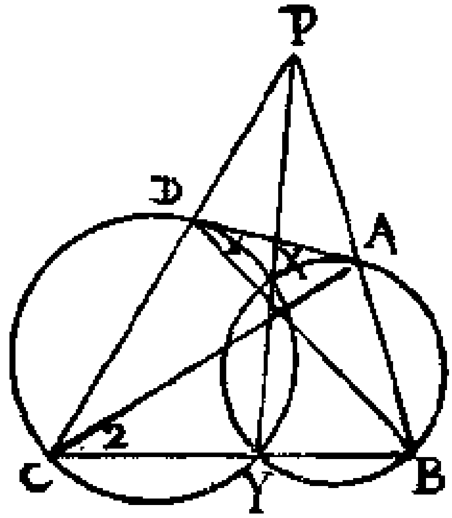


图 4.38

分析：根据本题特点，等式左边的分子 $AD\cdot BD$ 是 $\triangle ADB$ 两边的乘积，分母 $AC\cdot BC$ 是 $\triangle ACB$ 两边的乘积. 若能证得两边的夹角相等(即 $\angle 1=\angle 2$)，则可利用 $S_{\triangle ADB}:S_{\triangle ACB}=AD\cdot BD:AC\cdot BC$ (1). 然而这两三角形 ADB 和 ACB 既不全等又不相似，又如何证明 $\angle 1=\angle 2$呢？但我们从图中发现此两三角形中有一公共边 AB，它在两三角形中所对的角分别是$\angle 1$ 和 $\angle 2$，假若能证 A、B、C、D 四点共圆，再利用同弧上圆周角相等，则 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 就相等了. 要达到此目的，只须证 $PD\cdot PC=PA\cdot PB$ 即可，我们利用公共割线 PXY 易证 $PD\cdot PC=PX\cdot PY=PA\cdot PB$，由此可证 A、B、C、D 四点共圆.

再看等式的右边的分子 PD 和分母 PC 分别是具有公共底边 AB 的两个$\triangle ADB$ 和 $\triangle ACB$ 第三顶点与公共底边 AB 延长线所截得的线段，由本节中第 6 条知，

$$S_{\triangle ADB}:S_{\triangle ACB}=PD:PC \qquad (2),$$

再由(1)式和(2)式代换，于是命题得证.

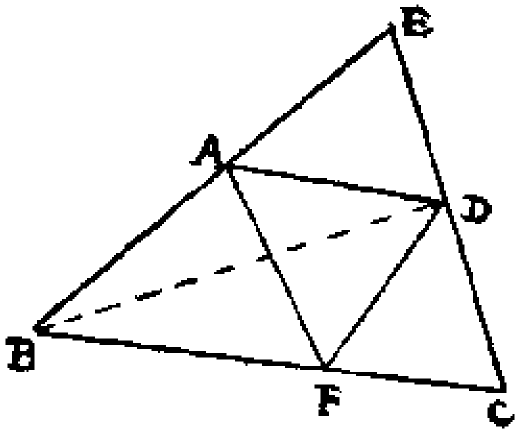


图 4.39

例 3 梯形 $ABCD$ 两腰 BA、CD 延长后交于 E，在 BC 上任取一点 F；

求证：四边形 $EAFD$ 面积为$\triangle EAD$ 和$\triangle EBC$面积的比例中项.

分析：在本节前面归纳的方法中，都是关于两个三角形面积的比的性质，要解决此问题，必须将四边形 $EAFD$ 的面积转化成与它等积的三角形才行. 因 $AD \parallel BC$，连结 BD，则 $S_{\triangle ADB}=S_{\triangle ADF}$，两边各加上 $S_{\triangle ADE}$，即得 $S_{\square EAFD}=S_{\triangle BED}$，于是本题就转化为证

$$\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle EAD}}=\frac{S_{\triangle EBC}}{S_{\triangle BED}}.$$

但等式左右两边的三角形都属于等高的三角形，故

$$\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle EAD}}=\frac{EA}{EB}, \qquad \frac{S_{\triangle EBC}}{S_{\triangle BED}}=\frac{ED}{EC},$$

只须证 $\dfrac{EA}{EB}=\dfrac{ED}{EC}$ 就行了. 因 $AD \parallel BC$，故

$\dfrac{EA}{EB}=\dfrac{ED}{EC}$， 命题得证.

习 题 七

1. 延长四边形 $ABCD$ 的对边 AB、DC 使相交于 E，M、N 分别为对角线 AC、BD 的中点；求证：$\triangle MEN$ 的面积等于四边形 $ABCD$ 面积的四分之一.

2. 从四边形 $ABCD$ 的角顶 C、D 及对角线的交点 E，分别向 AB 边作垂线 CF、DG 及 EH；求证：四边形的面积 $=\frac{AB}{2}\cdot\frac{CF\cdot DG}{EH}$.

3. 有 $\angle A=90°$ 的直角三角形 ABC，内切圆切斜边 BC 于 P；则 $S_{\triangle ABC}=BP\cdot PC$.

4. 在 $\triangle ABC$ 的三边上，取 AX、BY、CZ 各等于本边三分之二；则 $\triangle XYZ$ 的面积等于原三角形面积的三分之一.

5. 过四边形 $ABCD$ 各对角线的中点，作它对角线的平行线，使交于 O，连 O 与各边中点必四等分四边形 $ABCD$.

6. 已知 AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的中线；求证：由三中点组成的三角形的面积是原三角形面积的四分之一.

§8. 求证定值与最值

（一）关于求证定值的方法，必须注意以下两点：

(1) 理解定值的含意. 如果图形中的一部分元素固定，而另一部分元素可以变动，其中变动元素的和、差、积、商等等，往往不变，这样一类问题，就是定值的问题.

(2) 求证定值的方法，关键是利用变动元素的特殊位置，找出定值是什么，将定值问题变为普通的几何证题.

例 1 通过相交二定圆的一交点 P，引二割线 AB、CD，而 AC、BD 延长线相交于 S；则 $\angle ASD$ 为一定值.

分析：割线 APB 和 CPD 是过定点 P 而可以变动的直线，$\angle ASD$ 是动点 A、C 和 D、B 连线的延长线的交角. 我们首先通过动割线 AB、CD 的特殊位置确定定值是什么？然后证明任意位置的 $\angle ASD$ 与之相等. 让 B 点与 P 点重合而 AB 对

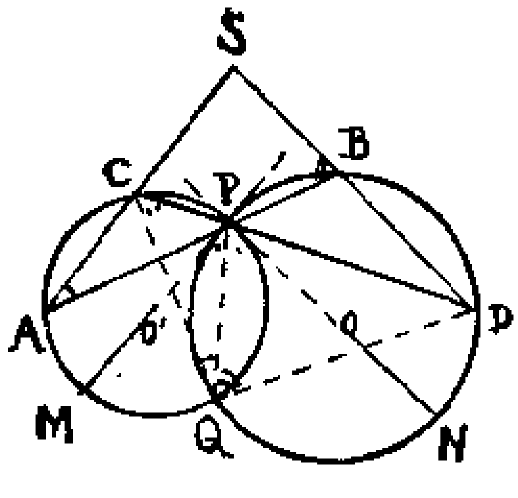


图 4.40

$\odot o'$ 成为过 P 的切线 MP，M 为 MP 与 $\odot o$ 的另一交点，即 A 点成 M 点．同理，让 C 与 P 重合而 CD 对 $\odot o$ 成为过 P 的切线 NP．这时，P 就是 S，$\angle MPN$ 就是 $\angle ASB$．而 MP、NP 是定直线，因此 $\angle MPN$ 是定值．再证明任意位置的 $\angle ASB=\angle MPN$．事实上，

$$\angle ASB=180^\circ-(\angle SAB+\angle SBA)=180^\circ-(\angle CQP+\angle DQP)$$
$$=\angle PCQ+\angle PDQ=\angle MPQ+\angle NPQ=\angle MPN.$$

（二）关于求证最大和最小的方法：

求证线段最大或最小，通常使用下列公理和定理：

(1) 两点之间的连线以直线段为最短；

(2) 从一点到一直线上的诸点的连线中，以垂线为最短；

(3) 过圆周上的一点的诸弦中，以过这点的直径为最大．

例 2 已知：A 和 B 为两定点，P 为定圆周 O 上任意一点，圆心 O 在 AB 的中垂线 OD 上，D 为 AB 的中点，令 $S=PA^2+PB^2$；

求证：当 P 在点 C 时 S 取最大值，当 P 在点 C' 时 S 取最小值，其中 C 是 DO 与 $\odot o$ 的交点，C' 是 DO 的延长线与 $\odot o$ 的交点．

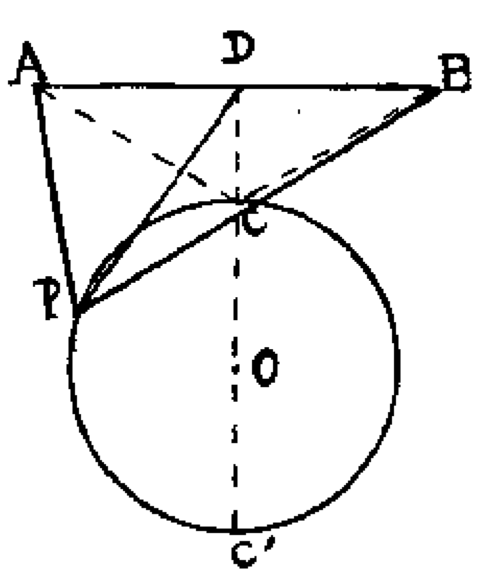


图 4.41

分析：线段 AB 是两定点的连线，此线段为定长．点 P 是定圆上的一动点，今考察动点 P 在定圆上运动到什么位置时，它们到两定点的平方和为最大与最小．要解决这个问题，必须找出与 AP^2+BP^2 有关的等量，在 $\triangle ABP$ 中，由中线定理可知 $AP^2+BP^2=2AD^2+2PD^2$（D 为 AB 的中点），$2AD^2$ 为定值，显然，$DC\leqslant PD\leqslant DC'$，因此，$PD$ 最大为 CD'，最小为CD．故 AP^2+BP^2 的值，当 P 在 C 时取最小值，当 P 在 C' 时取最大值．

习 题 八

1．求证底边和面积为一定的三角形中，周长最小的为等腰三角形．

2．内接于圆的等腰三角形 ABC，由顶点 A 作直径 AQ 与 BC 相交于 P；则 $AP\cdot AQ$ 为一定值．

3．圆 O 的直径 PQ 与一弦 MN 互相垂直，垂足是 A，若 D 是 MN 上的任一点，BC 是过 D 的任一弦；试证：$AD^2+BD\cdot CD$ 是一个定值．

4．半圆直径为 2，A 为直径延长线上一点，并且 $OA=2$，B 为半圆周上任意一点，以 AB 为边作等边 $\triangle ABC$，问 B 在什么位置时，四边形 $OACB$ 的面积最大，求出面积的最大值．

第五章　轨迹·作图·计算

§1. 轨　　迹

一、定　义

具有某种性质的点的集合，叫做具有这种性质的点的轨迹。

可见轨迹是一个图形，平面几何里的轨迹是平面图形；立体几何里的轨迹是空间图形；平面解析几何里的任何曲线都可以看成是具有某种性质的点的轨迹。

轨迹这种图形具有两方面的性质：

第一　纯粹性　在图形上的点都适合某种条件，简称在者必合（或不合则不在）；

第二　完备性　合乎某种条件的点都在图形上，简称合者必在（或不在则不合）。

因此，证明轨迹题需证两个方面，反映成下面这四种形式：

$\begin{cases}\text{在者必合，}\\\text{合者必在；}\end{cases}$　　$\begin{cases}\text{在者必在，}\\\text{不在则不合；}\end{cases}$

$\begin{cases}\text{不合则不在，}\\\text{合者必在；}\end{cases}$　　$\begin{cases}\text{不合则不在，}\\\text{不在则不合。}\end{cases}$

二、基本轨迹

中学平面几何规定下面六种轨迹为基本轨迹.

轨迹 1 和一个已知点的距离等于已知长的点的轨迹，是以已知点为圆心，已知长为半径的圆.

轨迹 2 和已知线段的两端点的距离相等的点的轨迹，是这线段的垂直平分线.

轨迹 3 和已知角的两边的距离相等的点的轨迹，是这个角的平分线.

轨迹 4 到已知直线的距离等于已知距离的点的轨迹，是平行于这条直线并且和这条直线的距离等于已知距离的两条直线.

轨迹 5 和两条平行线距离相等的点的轨迹，是和这两条平行线距离相等的一条平行线.

轨迹 6 和已知线段的两个端点的连线的夹角等于已知角的点的轨迹，是以已知线段为弦，所含的圆周角等于已知角的两段弧(端点除外).

三、轨迹证明题

如果利用基本轨迹定理证明轨迹题，不需要两面证；在一般情况下，需证两方面.

例 1 求证：定圆内等弦中点的轨迹仍然是圆.

已知：定圆 O 的半径为 R，AB 是圆 O 的动弦，且 $|AB|=2L(O<L<R)$；

求证：AB 的中点 C 的轨迹是一个圆.

证明：连 OA、OC，则三角形 AOC 是直角三角形，且 $|OA|=R$，$|AC|=L$，于是 $|OC|=\sqrt{R^2-L^2}$. 这说明 C 的轨迹

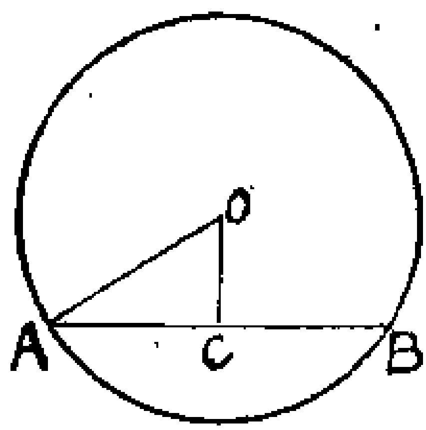


图 5.1

是以 O 为圆心，$\sqrt{R^2-L^2}$ 为半径的圆.

注：此题是利用基本轨迹 1 证明的.

例 2 已知：圆 O 和圆 O' 是半径分别为 r 和 r' 的两个定圆，$|OO'|=d$，A 是 OO' 上一点，且 $|OA|=\dfrac{d^2+r^2-r'^2}{2d}$；

求证：到圆 O 和圆 O' 的切线长相等的点的轨迹是过 A 而垂直于 OO' 的直线 L.

证明：(1) 纯粹性(在者必合)：设 P 是 L 上的任一点，过 P 作圆 O 与圆 O' 的切线 PB、PB'. 连 OB、OP、$O'B'$、$O'P$. $PB^2=OP^2-OB^2=OA^2+AP^2-OB^2$；$PB'^2=O'A^2+AP^2-O'B'^2$. 但 $OA^2-OB^2=$

$$(OA+OB)\cdot(OA-OB)$$

$$=\left(\frac{d^2+r^2-r'^2}{2d}+r\right)\cdot\left(\frac{d^2+r^2-r'^2}{2d}-r\right)$$

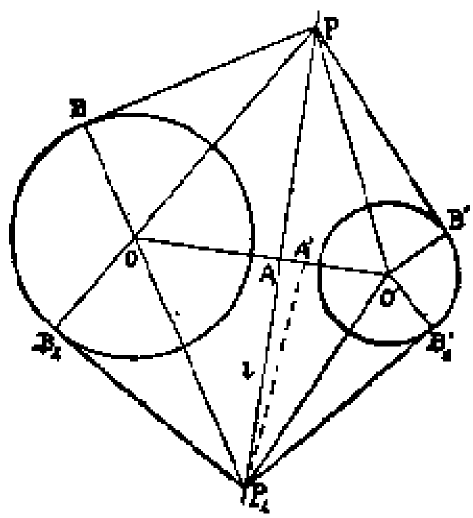


图 5.2

$$=\frac{(d+r)^2-r'^2}{2d}\cdot\frac{(d-r)^2-r'^2}{2d}=\frac{1}{4d^2}(d+r+r')$$

$$(d+r-r')(d-r+r')(d-r-r').$$

$$O'A^2-O'B'^2=(O'A+O'B')\cdot(O'A-O'B')$$

$$=\left(d-\frac{d^2+r^2-r'^2}{2d}+r'\right)\cdot\left(d-\frac{d^2+r^2-r'^2}{2d}-r'\right)$$

$$= \frac{(d+r')^2-r^2}{2d} \cdot \frac{(d-r')^2-r^2}{2d} = \frac{1}{4d^2}(d+r+r')$$

$(d-r+r')(d+r-r')(d-r-r')$. 因此，$PB^2 = PB'^2$，故 $PB = PB'$.

(2) 完备性(合者必在)：设 P_1 点合乎条件，即由 P_1 向圆 O、圆 O' 引的切线 P_1B_1 与 P_1B_1' 相等，要证 P_1 在直线 l 上. 过 P_1 作 $P_1A' \perp OO'$，垂足为 A'，设 $OA' = x$，则 $P_1B_1 = P_1B_1'$，$P_1B_1^2 = P_1B_1'^2$，于是 $OP_1^2 - r^2 = O'P_1^2 - r'^2$，即 $x^2 + PA'^2 - r^2 = (d-x)^2 + PA'^2 - r'^2$，所以 $x = \frac{d^2+r^2-r'^2}{2d}$.

因此，A' 与 A 重合，P_1A' 与 L 重合，故 P_1 在 L 上.

四、轨迹探求题

轨迹证明题的题目指明了轨迹是什么图形，只需进行证明. 这样的题目，一般说来相当于做两个普通的几何证明题. 另一种类型的轨迹题，是不指明轨迹是什么图形，需要读者求出轨迹是什么图形，并予证明. 我们称这类轨迹题为轨迹探求题. 这种题目困难的地方是探求轨迹，一旦找出轨迹是什么图形，问题就转化成普通的轨迹证明题了. 不过，平面几何所涉及的轨迹仅仅是直线(或其一部分)和圆(或其一部分). 解轨迹探求题，首先是依轨迹条件描若干点，探求轨迹形状；其次是研究变动图形的几个特殊位置，确定轨迹上的几个主要点，从而确定轨迹的位置；最后进行证明. 从书写格式来说，在中学阶段不要求写出探求轨迹的过程，只须在"解"中指明轨迹是什么，然后进行证明.

例 3　两个已知圆 O_1 和 O_2 相交于 A、B 两点，过点 A 作直线分别与圆 O_1 和 O_2 相交于点 M 和 N；求直线 O_1M 和

O_2N 的交点的轨迹.

分析：首先，过 A 作若干条直线与圆 O_1 和圆 O_2 分别相交于 M_i、N_i，连 O_1M_i 和 O_2N_i，相交于 P_i，发现 P_i 分布在一个圆周上. 其次，决定轨迹的位置，取 MN 的几个特殊位置进行考察. 让直线 MN 与公共弦 AB 重合，这时 M、N 与 B 点重合. 那么 O_1M 与 O_2N 相交于 B点，即 B 点在轨迹圆上. 再设 O_1O_2 向两边的延长线分别交圆 O_1 与 O_2 于 M_0、N_0. 过 M_0A 作直线交圆 O_2 于 N_0'，则 O_1M_0 与 O_2N_0' 相交于 O_2，即 O_2 在轨迹圆上. 同理，O_1 也在轨迹圆上. 又 O_1、B、O_2 不在一直线上，因此，轨迹圆的位置被确定下来，就是过 O_1、B、O_2 三点的圆周. 最后，进行证明.

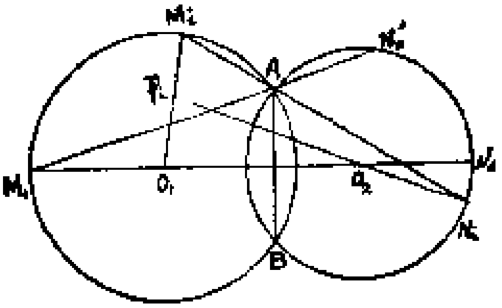


图 5.3

解：所求轨迹是圆 O_1BO_2. 事实上，

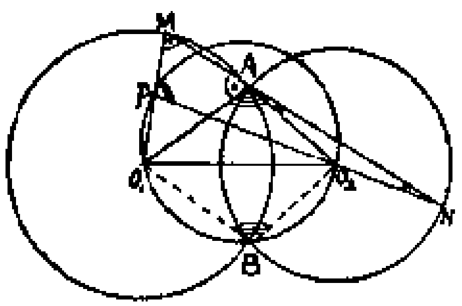


图 5.4

(1) 完备性(合者必在)：设 MN 是过 A 的任一直线，M、N分别是直线与圆 O_1 与圆 O_2 的交点，而 P 是直线 MO_1 与 NO_2 的交点，现在要证点 P 在圆 O_1BO_2 上. 假设 P 与 A 在直线 O_1O_2 的同侧，如图. 只须证$\angle MPN=\angle O_1BO_2$，只须证$\angle M+\angle N+\angle O_1BO_2=180°$. 但是，$\angle M=\angle MAO_1$，$\angle N=\angle NAO_2$，$\angle O_1BO_2=\angle O_1AO_2$，而$\angle MAO_1+\angle O_1AO_2+\angle O_2AN=180°$. 故 P 点在圆 O_1BO_2 上.

注：若 P 与 A 在直线 OO_1 异侧，则须证$\angle O_1PO_2=\angle O_1BO_2$，证法与上面相仿，读者自己完成.

(2) 纯粹性(在者必合)：仍用上图．设 P 是圆 O_1BO_2 上的任意一点，不妨设 P 与 A 在直线 O_1O_2 同侧，要证 P 点是过 A 的某一直线 MN 分别与圆 O_1、圆 O_2 的交点 M、N 与圆心 O_1、O_2 的连线的交点．设 O_1P 与 $\odot O_1$ 交于 M，O_2P 与 $\odot O_2$ 交于 N，连 MA、NA，只须证 MA、NA 共直线，只须证 $\angle MAO_1+\angle O_1AO_2+\angle O_2AN=180°$．但是，$\angle O_1AO_2=\angle O_1BO_2$，$\angle MAO_1=\angle M$，$\angle NAO_2=\angle N$，而 $\angle M+\angle O_1BO_2+\angle N=\angle M+\angle MPN+\angle N=180°$，故 P 点合乎条件．

注：轨迹的证明与探求，在很多情况下，用解析几何的方法是很方便的．我们曾在第二章 § 4 给出过一例，现再对本节例 2 用解析法证明，供读者比较．

证明：取坐标系如图．圆 O 的方程为

$$x^2+y^2=r^2.$$

圆 O' 的方程为

$$(x-d)^2+y^2=r'^2.$$

l 的方程为

$$x=\frac{d^2+r^2-r'^2}{2d}.$$

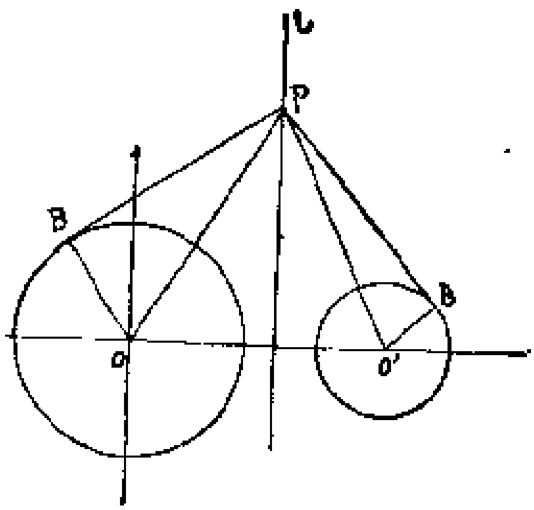


图 5.5

现要证直线 l 是所求的轨迹，即证明轨迹的方程为

$x=\dfrac{d^2+r^2-r'^2}{2d}$．设 $P(x,y)$ 是轨迹上的任一点，则 $|PB|=|PB'|$，即 $(x-0)^2+(y-0)^2-r^2=(x-d)^2+y^2-r'^2$，亦即 $x=\dfrac{d^2+r^2-r'^2}{2d}$．就是 l 的方程，故所求的轨迹是直线 l．

习 题 一

1．求证：与两定直线等距离的点的轨迹是直线．

2．过圆周上一定点引弦，求各弦的中点的轨迹．

3．定圆中有一内接梯形，它的一底是定圆的定直径，那么它的对角线交点的轨迹是定圆中垂直于定底的一条直径．

4．由一定点向定圆引动割线，求割线在圆内部分的中点的轨迹．

§2．作　图

一、基本概念

1．作图公法

证题有公理，作图有公法．中学平面几何作图有以下三条公法：

第一　定直线的公法　通过两点可以引一直线；

第二　延长线的公法　一线段可以向两边任意延长；

第三　作圆周的公法　以定点为圆心，定长为半径，可以作一个圆或画一段弧．

这三条公法和公理一样，是不加证明就公认成立的，它们是几何作图的基础．

2．作图工具

几何作图的工具规定只有两件：无刻度的直尺和圆规．因为公法规定的三个作图，前二者可用无刻度的直尺（以后简称直尺）完成，后者可用圆规完成，并且要完成这三个作图，非要这两件工具不可．我们将作图工具限制到最少的程度，就是这两件．因此，要完成一个几何作图，需借助于形式逻辑推理，

可培养学生的逻辑思维能力. 同时，用任何一种作图工具都有误差，将工具限制为最低程度，也是为使作出的图形尽可能的精确.

3. 作图问题

以作图公法和已知的定义、公理、定理为基础，有限次地运用作图工具(直尺和圆规)，将具备有某些条件的几何图形作出来，这种问题叫作图问题.

4. 作图的不可能问题

以作图公法和已知的定义、公理、定理为基础，运用直尺和圆规，经过有限次的作图，不能将满足一定条件的图形作出来，这种问题叫做作图的不可能问题. 例如，将任意角三等分，是经过证明了的几何作图的不可能问题. 当然，若取消对工具的限制，或增添作图公法，任意角的三等分是可能的，但这不属于我们讨论的范畴了.

5. 解作图题的步骤

已知——将题设条件具体化，结合图形用字母表出；

求作——具体叙述所作图形应满足的条件；

思考——假设图形已被作出，绘出草图，研究已知条件和未知条件的关系，判明所求图形应如何作出(这一步骤对中学生可略去不写)；

作法——依次叙述作图的过程(不要在其中夹杂证明)；

证明——论证按“作法”作出的图形符合题设条件；

讨论——说明问题在什么情况下有解，有几解，或无解(这一步对中学生也不作要求)。

二、基本作图

几何证题不能每题都从公理出发，必须借助于已有定理，

以简化证题过程．几何作图也是这样，不能每题都从公法出发．对于一些常用图形的作法我们应该熟悉，并把能作出这些图形当作定理用，以简化作图的过程．这些常用图形的作法，叫做基本作图．

现将中学课本给出的基本作图归纳如下：

(1) 作一线段等于定长；

(2) 作已知线段的和、差、倍、半；

(3) 作一角等于已知角；

(4) 作已知角的和、差、倍、半；

(5) 作角的平分线；

(6) 过已知点作已知直线的垂线；

(7) 作已知线段的中垂线；

(8) 求线段的中点；

(9) 将线段若干等分；

(10) 过已知直线外一点作已知直线的平行直线；

(11) 已知“边边边”、“角边角”、“边角边”、“角角边”，作三角形；

(12) 作关于已知直线成轴对称的点；

(13) 作关于已知点成中心对称的点；

(14) 已知线段 a、b、c，求作线段 x，使 $x=\sqrt{a^2+b^2}$，$x=\sqrt{a^2-b^2}$（设 $a>b$），$x^2=ab$，$a:b=c:x$；

(15) 已知一边作正三角形、正方形；

(16) 已知二邻边作矩形；

(17) 已知二对角线作菱形；

(18) 已知二邻边及夹角（或一对角线）作平行四边形；

(19) 作 30°、45°、60° 的角；

(20) 过不在一直线上的三点作圆；

(21) 作三角形的内切圆；

(22) 平分已知弧；

(23) 过圆上或圆外的已知点作圆的切线；

(24) 作含圆周角等于定角的弓形弧；

(25) 作已知圆的外切圆和内切圆；

(26) 作两圆的内外公切线；

(27) 将圆周三、四、五、六、八、十、十二等分；

(28) 作一三角形与已知四边形等面积.

三、常用作图方法

1. 三角形奠基法 为了作出所求的图形，先作一个与所求图形相关的三角形，以此为基础，再作出所求图形的其余部分，这种作图方法叫做三角形奠基法. 它的用途相当广泛.

例 1 已知：三条线段 m_a、m_b、m_c；

求作：$\triangle ABC$，使三条中线 AD、BE、CF 分别等于 m_a、m_b、m_c.

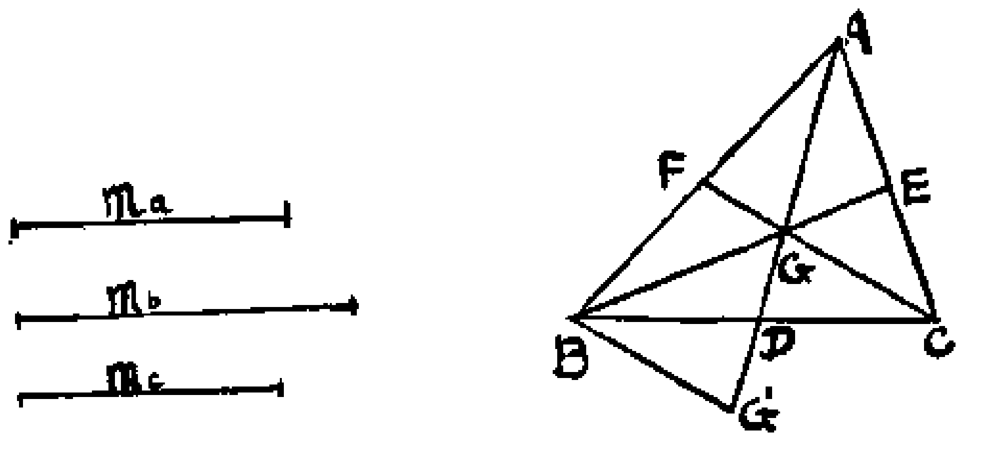


图 5.6

分析：设$\triangle ABC$已作出，它的三条中线 $AD=m_a$，$BE=m_b$，$CF=m_c$，交点为 G. 延长GD至 G'，使 $DG'=GD$. 连 BG'，

则$\triangle BGG'$的三边分别为三中线的$\frac{2}{3}$，故可先作出，以此为奠基三角形．延长$\triangle BGG'$的中线BD至C，使$DC=BD$，则C点可定．延长DG至A，使$GA=2DG$，则A点可定．故三角形ABC被作出．

作法：1）作$\triangle BGG'$，使$GG'=\frac{2}{3}m_a$, $BG=\frac{2}{3}m_b$，$BG'=\frac{2}{3}m_c$；

2）取GG'的中点D，连BD并延长至C，使$DC=BD$；

3）延长DG至A，使$GA=2\cdot DG$；

4）连AB、AC，则$\triangle ABC$为所求．

证明：因为$BD=DC$，所以D是BC的中点，AD是中线，且$AD=3\cdot DG=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}m_a=m_a$．又因$DG:GA=1:2$，所以$G$是$\triangle ABC$的重心，延长$BG$交$AC$于$E$，则$BE$为$AC$上的中线，且$BE:BG=3:2$，即$BE=\frac{3}{2}BG=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}m_b=m_b$．延长$CG$交$AB$于$F$，则$CF$是$AB$上的中线且$CF=\frac{3}{2}\cdot CG=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}m_c=m_c$．故$\triangle ABC$的三中线分别为$m_a$、$m_b$、$m_c$，为所求．

2．轨迹交接法　作图应先定主要点，要作的点一般应满足两个条件，舍去一个，则该点在满足另一个条件的轨迹上；舍去另一个，则该点又在满足这一条件的轨迹上，于是在两个轨迹的交点上．用两轨迹相交定点的作图方法，叫做轨迹交接法．

例 2　已知：$\triangle ABC$；求作：$\triangle ABC$的三个旁切圆．

分析：设BC边上的旁切圆O已作出，那么圆心O既是到

$\angle BAC$ 两边等距离的点，又是到 $\angle CBD$ 两边等距离的点．因此，O 既在 $\angle BAC$ 的平分线上，又在 $\angle CBD$ 的平分线上，于是在这两个轨迹的交点上．可用轨迹交接法．

作法：1) 作 $\angle BAC$ 的平分线 AO；

2) 延长 AB 至 D，作 $\angle CBD$ 的平分线交 AO 于 O 点；

3) 以 O 为心，O 到 BC 的距离为半径画圆，分别与 AB、AC 的延长线切于 D、E，则圆 O 为所求的 BC 边上的旁切圆．

4) 同理可作 AB、AC 边上的旁切圆．

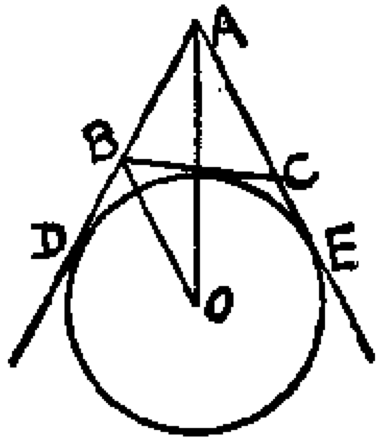


图 5.7

证明：因为 AO 是 $\angle BAC$ 的平分线，所以 O 到 AB、AC 等距离．又因 BO 是 $\angle CBD$ 的平分线，所以 O 到 BC、BD 等距离．因此，O 到 BC、BD、CE 等距离．另外，圆 O 的半径是 O 到 BC 的距离，所以圆 O 分别与 BD、CE 相切．即圆 O 是 BC 边上的旁切圆．

3．平行移动法　将已知的线段平行移动到一个恰当位置，使与其他已知部分一起构成可作图形，以此为基础再作出所求图形，这种方法叫平行移动法．

例 3　已知梯形的上底、下底及两条对角线的长度；求作梯形．

已知：四条线段 a、b、c、d；求作：梯形 $ABCD$，使 $AD = a$，$BC = b$，$BD = c$，$AC = d$．

分析：设梯形 $ABCD$ 已作出，下底两端点 B、C 可定，但上底两端点无法同时确定．为此，先设法定一个点，再定另一

点. 过 A 作 $AB' \parallel DB$ 交 CB 的延长线于 B'，则 $AB'BD$ 是平行四边形，$AB'=DB$，$BB'=AD$，就是将线段 DB 平行移动到 AB' 的位置. 于是$\triangle AB'C$ 的三边分别为 c、d、$a+b$，可以作出.

作法与证明省略.

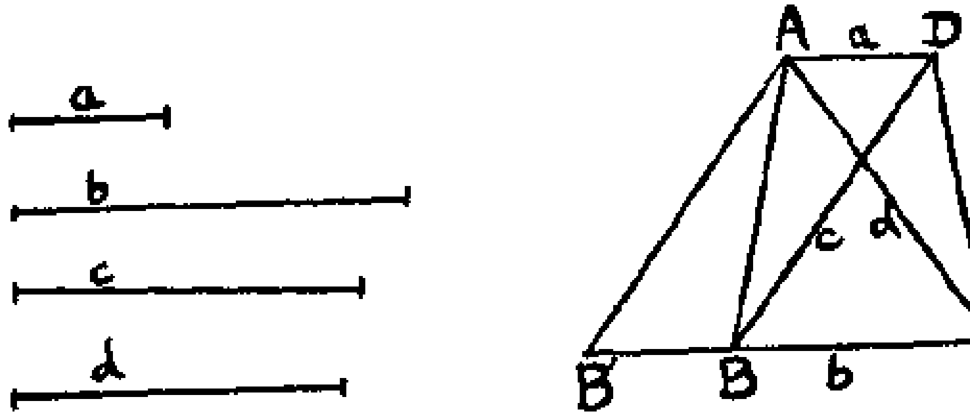


图 5.8

4. **代数作图法** 根据题意，列出未知线段 x 用已知线段 a、b、c 等表达的代数式，再通过基本作图第 1 、2 、14 等作出线段 x. 这种作图的方法，叫代数作图法. 它应用的广泛性，不亚于三角形奠基法.

例 4 已知线段 $AB=a$；求作：线段 AB 上一点 C，使 $AB:AC=AC:CB$.

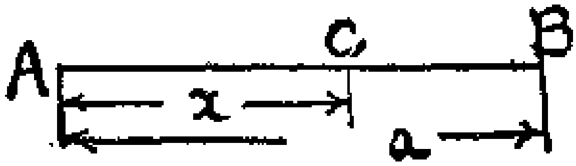


图 5.9

分析：设 C 点已作出，并设 $AC=x$，则 $a:x=x:(a-x)$，
$x^2=a^2-ax$，$x^2+ax-a^2=0$，$x=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4a^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

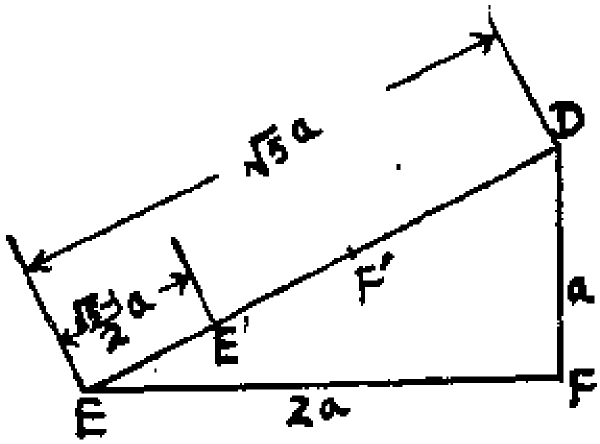


图 5.10

$\cdot a$. 由于$\sqrt{5}a$可用勾股定理作出，故线段x可以作出.

作法：1）以线段 $2a$ 和 a 为直角边作直角三角形 DEF；

2）在斜边 DE 上截取 $DF'=a$；

3）取 EF' 的中点 E'；

4）在 AB 上截取 $AC=EE'$，则点 C 为所求.

证明：在直角三角形 DEF 中，因 $EF=2a$，$DF=a$，则 $DE=\sqrt{4a^2+a^2}=\sqrt{5}a$. 又 $EF'=\sqrt{5}a-a$，E' 是 EF' 的中点，所以 $EE'=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$. 因此，$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$. 于是 $AB:AC=a:\frac{\sqrt{5}-1}{2}a=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 另外，$AC:CB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a:\left(a-\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 故$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}$.

5．对称作图法　利用轴对称的原理作图的方法叫做对称作图法．此法多用于几何里求最大最小的问题.

例 5　已知：P 为锐角$\angle BAC$ 内一点；求作：$\triangle PQR$，使 Q、R 两点分别在 AB、AC 上，且周长为最小.

分析：设$\triangle PQR$ 已作出．作 P 关于直线 AB、AC 的对称点 P'、P''，则 $\triangle PQR$ 的周长为 $P'Q+QR+RP''$．要使

它最小，P'、Q、R、P'' 应在一直线上. 故 Q、R 应是 P'、P'' 的连线与 AB、AC 的交点.

作法(略).

证明：在 AB、AC 上分别任取 M、N，得三角形 PMN. 连 MP' 与 NP''，则 $\triangle PMN$ 的周长 $=P'M+MN+NP''\geqslant P'P''=PQ+QR+RP=\triangle PQR$ 的周长. 故三角形 PQR 为所求.

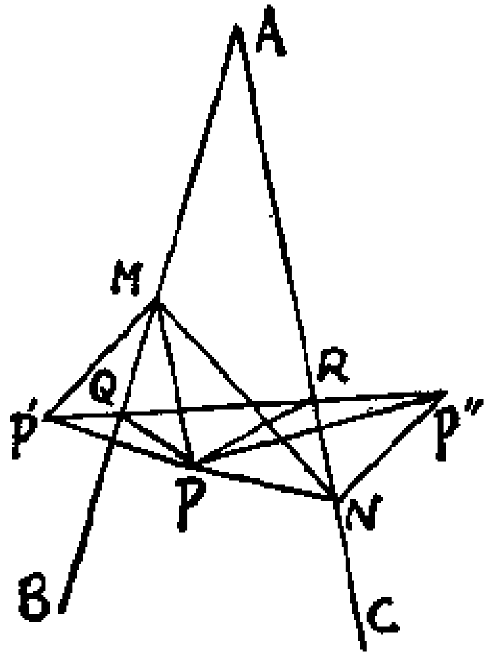


图 5.11

6. **旋转作图法** 将图形的一部分，绕一定点旋转到某一位置，使所求部分与已知部分发生联系的作图方法，叫做旋转作图法.

例 6 已知：三条平行直线 l_1、l_2、l_3，求作：正三角形 ABC，使 A、B、C 分别在 l_1、l_2、l_3 上.

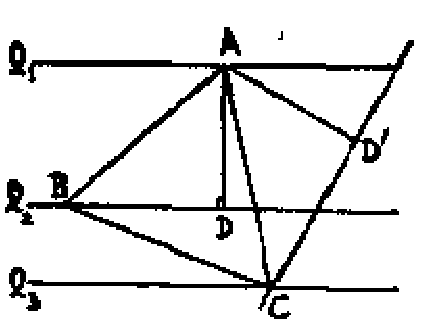


图 5.12

分析：设 $\triangle ABC$ 已作出. 因为 A 在直线 l_1 上可以任意取，只须确定 B、C 的位置. 二者只要确定一个，另一个可由作正三角形得到. 利用三平行线间的距离一定，过 A 作 $AD\perp l_2$，垂足为 D. 将直角三角形沿逆时针方向绕 A 旋转 60°，则 AB 与 AC 重合，AD 落在 AD' 的位置. 可见顶点 C 既在直线 l_3 上，

又在过 D' 而与 AD' 垂直的直线上．由于 AD' 与 AD 成 $60°$ 且等长，所以位置确定，因此 C 点可确定，从而 B 点也可确定．

作法、证明(略)．

7．面积割补法　作一新图形使与一已知图形等积，除可利用代数作图法外，也可用割补面积的方法，即使图形的一部分不动，将图形的某一部分"割"下来，等积地"补"到另一个位置上，形成新图形．

例 7　已知：四边形 $ABCD$；求作：过顶点 A 的直线 AM，将四边形分成两个等积形．

分析：注意到三角形的中线将三角形分成两个等积形，而四边形可割补成等积的三角形．故直线 AM 可作出．

作法：1）连 AC；

2）过 B 作 $BE \parallel AC$，交 DC 的延长线于 E；

3）连 AE，取 ED 的中点 M，则直线 AM 为所求．

证明：(略)．

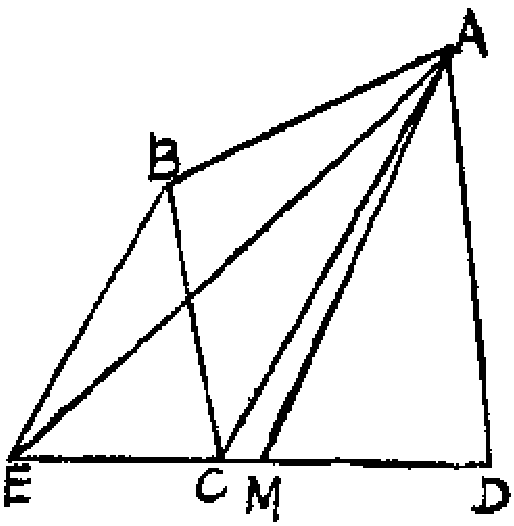


图 5.13

8．位似作图法　见于初中平面几何课本，此处省略．

四、较困难的作图题

例 8　M 是任意四边形外一点，过 M 作一直线将四边形 $ABCD$ 分成两个等积形．

分析：不失一般性，设 $AB \nparallel CD$ 且 BA 与 CD 的延长线相交于 Q．可作 BP 二等分四边形 $ABCD$．只须过 M 作

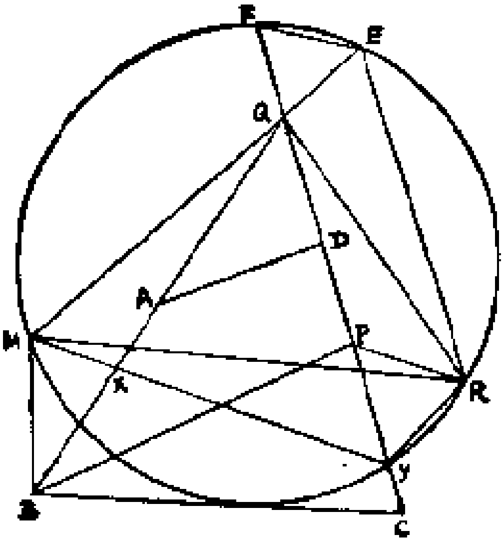


图 5.14

直线交 AB、CD 分别于 X、Y，使得 $S_{\triangle QXY}=S_{\triangle QBP}$. 即 $QX\cdot QY=QB\cdot QP$，$QX:QB=QP:QY$. 利用相似三角形，作比例代换可达目的.

作法：1）连 MQ、MB；

2）设 BP 二等分四边形 $ABCD$，作 $\triangle QPR\backsim\triangle QMB$；

3）连 MR，以 MR 为弦作弓形弧，使含圆周角等于 $\angle MQP$，其共轭弧交 QC 于 Y；

4）连 MY 交 QB 于 X，则直线 MXY 将四边形 $ABCD$ 二等分.

证明：延长 MQ 与圆交于 E，连 ER，因 $\angle MQP=\angle QER$，所以 $ER\parallel QP$. 延长 CQ 交圆于 F，连 FE，因 $\angle QMX=\angle EFY=\angle FYR$，$\angle MQX=\angle YQR$，所以 $\triangle QMX\backsim\triangle QYR$. 由作图，$\triangle QMB\backsim\triangle QPR$. 因此，$QX:QM=QR:QY$，$QM:QB=QP:QR$，所以 $QX:QB=QP:QY$. 故 $QX\cdot QY=QB\cdot QP$，即 $S_{\triangle QXY}=S_{\triangle QBP}$. 从而 $S_{\square AXYD}=S_{\square ABPD}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$.

习　题　二

1. 已知顶角、周长，作等腰三角形.
2. 已知底边长、底边上的高，以及顶角，求作三角形.
3. 已知四边求作梯形.
4. 作二次方程 $x^2-px+q^2=0$ 的两根，其中 p、q 是两条

已知线段的长度.

5. 在$\triangle ABC$的边AB、AC上各求作一点P、Q，使$BQ+QP+PC$为最小，其中$\angle BAC<60°$.

6. 求在三同心圆上各取一点，使成一正三角形的三顶点.

7. 在$\triangle ABC$内作一条与BC平行的直线，将三角形分成等积的两部分.

8. 过$\triangle ABC$外的一点M作一直线把$\triangle ABC$分成两个等积形.

§3. 计　算

几何计算指的是根据公理、定义、定理求出几何图形中的某些几何量的大小；或者，已知图形中的某些几何量的大小，根据公理、定义、定理求另一些几何量的大小.

按照要计算的对象分，几何计算题有以下几类：求弧或角的度数，求线段或弧的长度，求面积的大小.

解几何计算题要注意以下几点：

第一，未知量与已知量之间的关系，需要根据公理、定义、定理推出，不能依据直观. 因此，做计算题常伴随着论证，它是解题的主要部分，叙述要严谨，不能草率，更不能省略. 其实，有些计算题就是证明题的一种变态.

第二，计算题常常与实际问题相联系，因此，解计算题要善于将实际问题抽象成数学问题.

第三，在做计算题时要有意识地利用三角和代数中的有关的知识，如解直角三角形、解斜三角形、解方程等.

第四，在做含字母已知数的题目时，尽量让字母已知数参与运算，化简到最后再代入数值. 这一方面可以使结果尽可能

精确，另一方面可以从中发现图中元素间的一般规律.

第五，做计算题时应画图，而且要尽量画得准确，正确的图形可以使我们容易发现图中已知元和未知元之间的关系，启发我们寻找解题途径.

例 1　已知：$\triangle ABC$ 三条边上的中线长分别为 m_a、m_b、m_c；求：$\triangle ABC$ 的三边 a、b、c.

解：设$\triangle ABC$ 的三条中线为 AD、BE、CF，重心为 G. 延长 GD 至 H，使 $DH=GD$. 连 BH、CH，则 $BHCG$ 为平行四边形．

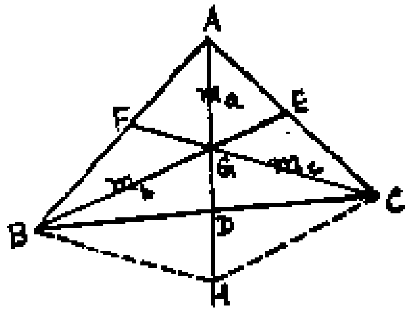


图 5.15

于是，$a^2+\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2=\left[\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2+\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2\right]\times 2$，故 $a=\frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2+2m_c^2-m_a^2}$. 同理可求 b、c.

例 2　在锐角$\triangle ABC$ 中，从顶点 A 和 C 向 BC 和 AB 边作高 AP 和 CQ，已知$\triangle ABC$ 的面积等于 18，$\triangle BPQ$ 的面积等于 2，线段 PQ 的长等于 $2\sqrt{2}$；求$\triangle ABC$ 外接圆的半径.

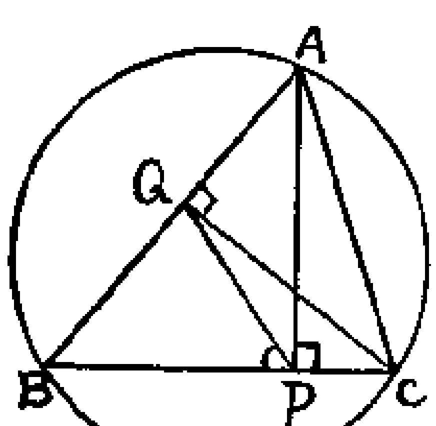


图 5.16

解：设外接圆的半径为 R，则 $\frac{AC}{\sin B}=2R$，即 $2R=\frac{AC}{\sin B}$. 分别求 AC、$\sin B$. 因为 A、Q、P、C 共圆，所以 $\angle BPQ=\angle BAC$，又 $\angle B$ 公用，因此 $\triangle BPQ\backsim\triangle BAC$. 于是

$$\frac{PQ^2}{AC^2}=\frac{\triangle BPQ\text{ 的面积}}{\triangle BAC\text{ 的面积}},$$

即 $\dfrac{(2\sqrt{2})^2}{AC^2}=\dfrac{2}{18}$，所以

$AC=6\sqrt{2}$.

另外，$\cos B=\dfrac{BP}{AB}=\sqrt{\dfrac{2}{18}}=\dfrac{1}{3}$，而 $0°<B<90°$，所以

$\sin B=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

故 $R=\dfrac{AC}{2\sin B}=\dfrac{6\sqrt{2}}{2\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{9}{2}$.

例 3 在半径为 a 的圆的直径 AB 上取 M 点使 $AM:MB=7:1$，过 M 作弦 PQ；求 $\triangle APQ$ 的面积的最大值.

解：因为 PQ 是 $\triangle APQ$ 和 $\triangle OPQ$ 的共同底边，所以，

$\dfrac{S_{\triangle OPQ}}{S_{\triangle APQ}}=\dfrac{OM}{AM}$. 而

$\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{7}{1}$，$\dfrac{AB}{MB}=\dfrac{8}{1}$，

$\dfrac{OB}{MB}=\dfrac{4}{1}$，$\dfrac{OB}{OM}=\dfrac{4}{3}$，

$\dfrac{AM}{OM}=\dfrac{7}{3}$. 因此，$S_{\triangle APQ}=\dfrac{7}{3}$

$S_{\triangle OPQ}=\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{1}{2}a^2\sin\angle POQ$. 所以当 $\angle POQ=90°$ 时，$S_{\triangle APQ}=\dfrac{7}{6}a^2$. 最大.

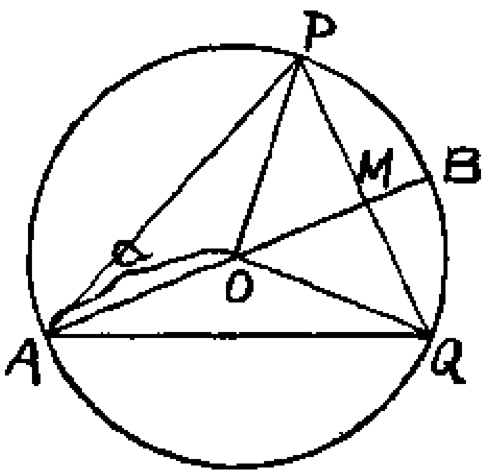


图 5.17

例 4 从动轮与主动轮以皮带相连，已知两轮中心相距14尺，半径分别为 9 尺、2 尺；求皮带的长.

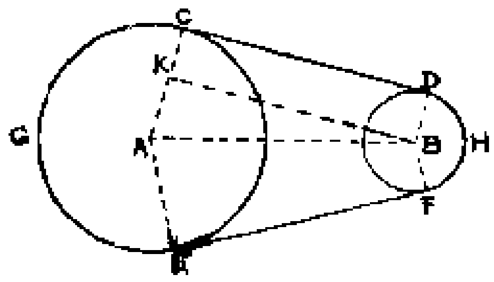


图 5.18

已知：A、B是两轮的中心，$CDHFEGC$是皮带，$AB=14$尺，$AC=AE=9$尺，$BD=BF=2$尺；

求：$CDHFEGC$的长.

分析：皮带由两条外公切线和两条圆弧$\overset{\frown}{CGE}$和$\overset{\frown}{DHF}$构成．在梯形$ABCD$中，AB、AC、BD已知，CD易求．关键是求两条弧长，为此要计算所对中心角的弧度数.

解：作$BK \parallel CD$，交AC于K，则$\angle AKB=\angle ACD=\frac{\pi}{2}$，$AK=AC-KC=AC-BD=9-2=7$．于是$CD=KB=\sqrt{14^2-7^2}=7\sqrt{3}$．同样，$EF=7\sqrt{3}$．又$AB=2AK$，所以$\angle KAB=\frac{\pi}{3}$，$\angle DBF=\frac{2\pi}{3}$，因此$\overset{\frown}{DHF}=2\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$，$\overset{\frown}{CGE}=9\cdot\frac{4\pi}{3}=12\pi$．故皮带$CDHFEGC$的长$=2\times7\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi+12\pi=14\sqrt{3}+\frac{40}{3}\pi\approx66.1$(尺).

习　题　三

1．已知$\angle ABC$及$\angle CBD$是补邻角，$EB\perp AD$，BF是$\angle ABC$的平分线，$\angle CBD=\frac{3}{8}d$(其中$d=90^\circ$)；求$\angle FBE$.

2．在边长为1的正五边形内引对角线，生成一个小的正五边形；求这个小的正五边形的边长.

3. 在面积为1的任意四边形$ABCD$的AB、BC、CD、DA上依次取E、F、G、H，使$AE:EB=BF:FC=CG:GD=DH:HA=2:1$；求四边形$EFGH$的面积.

4. 如图，要在直径$d=110$毫米的圆钢上铣出宽$l=60$毫米的一块平面；求铣刀的吃刀深度h.

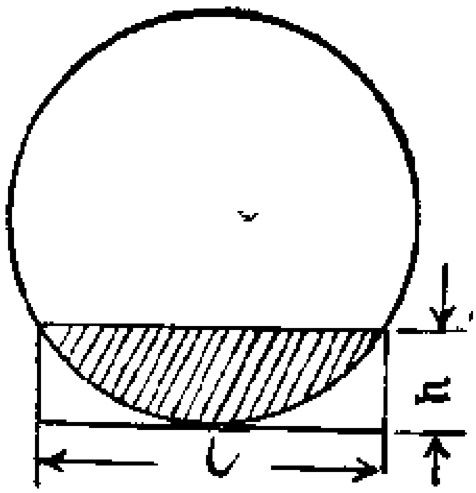


图 5.19

第六章　直线和平面

§1. 平　　面

一、平面的概念

平面是不定义的基本概念，它是我们经常看到的桌面、墙面、天花板面、黑板面等的抽象．立体几何中研究的平面没有厚薄，可向四方无限伸展．

点、直线、平面都是立体几何研究的基本对象，以后除特别声明外，用大写拉丁字母 A，B，C，……表示点；用小写拉丁字母 a, b, c，……表示直线；用希腊字母 α, β，γ，……表示平面．

二、平面的基本性质

在生产和生活中，人们通过长期的实践，总结出平面有下面一些基本性质，我们把它们当作公理，用来作为推理论证的基础．

公理 1　如果一条直线上的两个点在一个平面上，那么这条直线上的所有点都在这个平面上．

公理 2　如果两个平面相交于一点，那么它们交于通过这个点的一条直线．

公理 3　通过不在同一直线上的三点，确定一个平面．

推论 1　通过一条直线和不在它上面的一点，确定一个平面；

推论 2　通过两条相交直线确定一个平面；

推论 3　通过两条平行直线确定一个平面．

注：（1）这里“确定”的含义是“有且只有”．

（2）公理 3 及其三条推论的作用是确定平面．这是确定平面常用的四种条件．

（3）公理 2 的作用是确定直线，公理 1 的作用是判定直线在不在平面上．

三、关于空间作图问题

现行中学数学教学大纲规定的立体几何内容没有空间作图问题．在教材中或在本书中所谓“作”什么图形，指的是存在（或有）这个图形，“作”是习惯用法，沿用平面几何的术语．不要空间作图，整个立体几何的体系不受影响．欲了解空间作图问题，请参看上海科技出版社出版的数理化自学丛书《立体几何》．

例 1　过正方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 的三顶点 B、D、A' 作一平面，此平面与对角线 AC' 交于 P 点，求 AP 与 PC' 之比．

分析：立体几何问题一般利用确定平面的条件，把与题目结论相关的图形（例如：本题要求的是两线段 AP 与 PC' 之比）放在一个适当的平面上，再利用平面几何知识解决问题．本题就要考虑把 AP 与 PC' 放到哪个平面上去比较好．

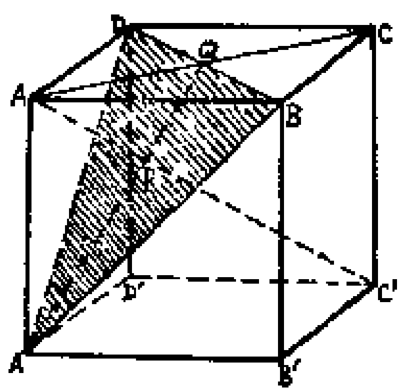


图 6.1

因为 P 点是在平面 $AA'C'C$ 上的直线 AC' 上，所以它在平面 AA'

$C'C$ 上，又在平面 $A'BD$ 上，故在两平面的交线 $A'Q$ 上，而要求的比的两线段 AP 与 PC' 也在平面 $AA'C'C$ 上．所以本题在平面 $AA'C'C$ 上解决．

$\because$ $AC \parallel A'C'$，$\therefore$ $\triangle AQP \backsim \triangle C'A'P$，而要求的比 $AP:PC'$ 恰好是这两个相似三角形的对应边之比，故得如下解法．

解：设平面 $AA'C'C$ 与平面 $A'BD$ 的交线为 $A'Q$，因为 P 点在 AC' 上，所以 P 点在平面 $AA'C'C$ 上，同时 P 点又在平面 $A'BD$ 上，故 P 点必在 $A'Q$ 上．

因为平面 $ABCD \parallel$ 平面 $A'B'C'D'$．而平面 $AA'C'C$ 与平面 $ABCD$，$A'B'C'D'$ 分别相交于 AC，$A'C'$，故 $AC \parallel A'C'$．

在平面 $AA'C'C$ 上，$\because$ $AC \parallel A'C'$，$\therefore$ $\triangle AQP \backsim \triangle C'A'P$，$\therefore$ $AP:PC' = AQ:C'A'$，但 $AQ = \frac{1}{2}AC$，$AC = A'C'$．

$\therefore$ $AP:PC' = AQ:C'A' = \frac{1}{2}AC:AC = 1:2$．即 $AP:PC' = 1:2$．

例 2 在空间四边形 $ABCD$ 中，对边 AB、CD 之中点为 M、N，过 M、N 之任意平面 P 与另一对边 BC、AD 交于 L、K．求证：$BL:LC = AK:KD$．

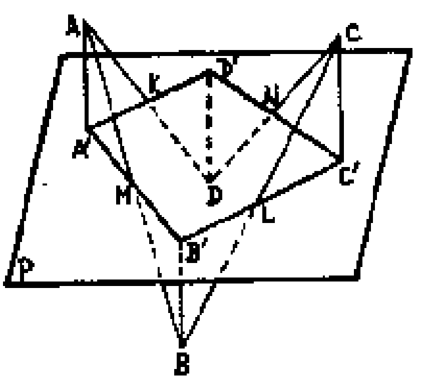


图 6.2

分析：题目要证明的是四条线段成比例，而这四条线段又不在同一个平面上，同时它们与平面 P 的具体位置从图上也看不清楚．因此我们要想办法作一些辅助线，一方面使这四条线段与平面 P 的位置关系能看清楚，另一方面使这四条线段互相联系起来．为此，我们自 A、

B、C、D 分别作平面 P 的垂线 AA'、BB'、CC'、DD'，A'、B'、C'、D' 是垂足. 连 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'A'$. 则 M、N、L、K 分别在 $A'B'$、$C'D'$、$B'C'$、$D'A'$ 上. 这样一来就得到许多对相似三角形，要证明四线段成比例就容易了.

证明：辅助线的作法如"分析"中所述，这里不重复. 在 $\triangle AA'K$ 和 $\triangle DD'K$ 中，$\angle AKA'=\angle DKD'$，$\angle AA'K=\angle DD'K=90^\circ$，$\therefore$ $\triangle AA'K\backsim\triangle DD'K$. $\therefore$ $AK:KD=AA':DD'$. 同理可证：$BL:LC=BB':CC'$，$AM:MB=AA':BB'$，$CN:ND=CC':DD'$. 但 $AM=MB$，$CN=ND$，$\therefore$ $AM:MB=CN:ND=1:1$，$AA':BB'=CC':DD'=1:1$，即 $AA'=BB'$，$CC'=DD'$. $\therefore$ $AK:KD=AA':DD'=BB':CC'=BL:LC$，即 $AK:KD=BL:LC$.

注：上面两个例题说明了立体几何中一个重要的解题思路，这就是想办法利用确定平面的四种条件(即公理 3 及其三条推论)之一，把立体几何问题转化某一个平面上的平面几何问题.

比较简单的立体几何问题，可以利用确定平面的四种条件之一，把立体几何问题直接转化为所确定的平面上的平面几何问题(例如，上述例 1，就是利用 $AA'\parallel CC'$ 确定一个平面 $AA'C'C$，把原题直接转化为平面 $AA'C'C$ 上的平面几何问题)，再利用平面几何知识(例 1 中是利用相似三角形对应边成比例)来解决问题.

立体几何中比较复杂的问题，不过只是多次应用确定平面的四种条件之一，先确定与问题有关的好几个平面，在这些平面上利用平面几何知识得到一些必要的解题条件，然后利用这些条件再来解决题目要解决的问题. 例如，前面讲的例 2，就是先在所作的四个辅助平面 $AA'B'B$，$BB'C'C$，$CC'D'D$，DD'

$A'A$上，利用平面几何知识得到一些比例式子：$AK:KD=AA':DD'$，$BL:LC=BB':CC'$，$AM:MB=AA':BB'$，$CN:ND=CC':DD'$．再利用这些比例式得到：$AA'=BB'$，$CC'=DD'$，从而使问题得到解决．

例 3　根据下面条件可确定几个平面？(1) 三点；(2) 四点．

解：因题目没有明确指出这三点或四点的具体位置关系，故必须对各种可能情形，分别加以详细讨论，才能得出完整的结论．

(1) 先讨论三点可确定几个平面．可分二种不同情况：(a) 若三点在一直线上，则经过这三点的平面有无数个，不确定任何一个平面；

(b) 若三点不在一条直线上，则由公理 3 知，可确定一个平面．

(2) 再讨论四点可确定几个平面．这时应分三种情况：(a) 设四点 A、B、C、D 正好在一直线，则经过这四点的平面有无数个，不确定任何一个平面；

(b) 四点不在一直线上，但在一平面上，这时经过这四点可确定一个平面；

(c) 四点不在一个平面上，这时其中每三个点可确定一个平面，故可确定 $C_4^3=4$ 个平面．

注：此例题说明一种重要的解题思路，如果题目给的条件不能明确地回答题目的问题，我们可以根据各种不同情况，把题目的各种可能答案一一列举出来，然后具体说明在哪种情况下是哪种答案．这种方法就叫“讨论”，我们在做数学题时要养成“讨论”的习惯．“讨论”时要注意对各种情况进行科学的分类，既不要漏掉某种情况，也不要重复．

习 题 一

1. 过一直线和这直线外不在同一直线上的三点，可以确定几个平面？

2. 试证与两条相交直线 a，b 之一相交，且与另一条平行的直线 c 必与 a，b 在同一平面上.

3. 已知一直线与互相平行的 n 条直线相交. 试证这 $n+1$ 条直线在同一个平面上.

4. 空间四点 A，B，C，D 其中任何三点都不在一直线上，它们一共可确定几个平面？

5. 空间是否有这样的四点 S、A、B、C 存在？使 $SA=BC=8\text{cm}$，$SB=AC=10\text{cm}$，$SC=AB=13\text{cm}$. 为什么？

6. 求证：空间 n 条两两相交的直线，或者都通过一点，或者都在一个平面上.

7. 已知一个平面四边形的顶点分别在一空间四边形（顶点不共面）的各边上，且对边延长线相交，试证这两个交点在空间四边形的对角线上.

8. 求证：两两相交而不通过同一点的四条直线必在同一平面上.

§ 2. 直线与直线的位置关系

一、空间两直线间的相关位置

1. 平行直线　相交直线

在同一平面上的两条直线，可分为：

1) 没有公共点的两条直线，叫做平行直线；

2) 只有一个公共点的两条直线，叫做相交直线.

2. 异面直线 不在同一个平面上的两条直线，叫做异面直线.

二、空间两直线平行的判定与性质

定理 1 如果两个相交平面通过两条平行直线，那么它们的交线平行于这两条直线.

定理 2 如果两条直线都平行于第三条直线，那么这两条直线平行.

定理 3 如果两个角的两边平行且同向(或反向)，那么这两个角相等；如果两个角的两边平行且一边同向，另一边反向，那么这两个角互补.

三、异面直线所成的角

经过空间任一点分别作两条异面直线的平行直线，这两条直线的夹角叫做异面直线所成的角.

如果两条异面直线所成的角是直角，那么称这两条异面直线互相垂直.

四、异面直线间的距离

1. 异面直线的公垂线 与两条异面直线都垂直相交的直线，叫做异面直线的公垂线.

2. 异面直线间的距离 两条异面直线的公垂线夹在两异面直线间的线段的长，叫做异面直线间的距离.

例 1 已知立方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 的棱长是 a，求：

(1) AB 与 CC' 间的距离和它们所成的角的度数；

(2) AA' 与 $B'C$ 间的距离和它们所成的角的度数；

(3) $C'B$ 与 $D'B'$ 间的距离和它们所成的角的度数；

(4) AD' 与 $B'C$ 间的距离和它们所成的角的度数.

解: (1) $\because$ $BC\perp AB$, $BC\perp CC'$, $\therefore$ AB 与 CC' 间的距离为 $BC=a$. 又 $\because$ $BB'\parallel CC'$, $\therefore$ AB 与 CC' 所成的角为 $\angle ABB'=90°$.

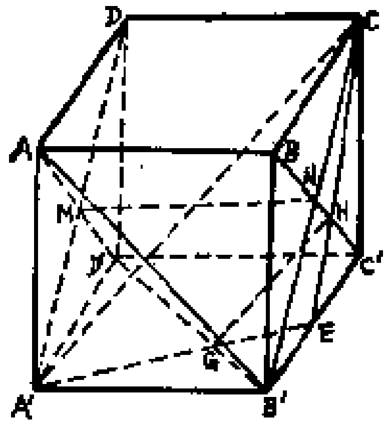


图 6.3

(2) $\because A'B'\perp$ 平面 $BB'C'C$, $\therefore$ $A'B'\perp B'C$, 又 $A'B'\perp AA'$, 故 AA' 与 $B'C$ 间的距离为 $A'B'=a$. 又 $\because$ $BB'\parallel AA'$, $\therefore$ AA' 与 $B'C$ 所成的角为 $\angle BB'C=45°$.

(3) 取 $B'C'$ 的中点 E, 连 $A'E$ 交 $B'D'$ 于 G, 连 CE 交 BC' 于 H, 连 HG. $\because$ $HE=\frac{1}{3}EC$, $GE=\frac{1}{3}AE$, $\therefore$ $GH\parallel A'C$, 但 $A'C\perp B'D'$, $A'C\perp BC'$(见下节的三垂线定理). 故 $C'B$ 与 $D'B'$ 间的距离为 $GH=\frac{1}{3}A'C=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

连 $D'A$, $B'A$, $\because$ $D'A=B'A=B'D'$, $BC'\parallel AD'$, 故 $C'B$ 与 $B'D'$ 所成的角为 $\angle B'D'A=60°$.

(4) 连 $B'C$ 交 BC' 于 N, 连 $A'D$ 与 AD' 交于 M, 连 MN, $\because$ $DC\perp$ 平面 $BCC'B'$, $MN\parallel DC$, $\therefore$ $MN\perp$ 平面 BCC'. 故 $MN\perp B'C$, 同理可证: $MN\perp AD'$. 因此, $B'C$ 与 AD' 间的距离为 $MN=DC=a$.

$\because$ $BC'\parallel AD'$, $\therefore$ AD' 与 $B'C$ 所成的角为 $\angle B'NB=90°$.

注: (1) 求异面直线间的距离通常有三种办法: 第一, 直

接作出公垂线段求其长；第二，过其中一直线作平行于另一直线的平面，求这平行直线与平面间的距离；第三，过两异面直线中的一条作平行另一条直线的平面，求这平行平面间的距离.

本例属第一种方法，也可采用后两种方法解，读者试自行完成.

(2) 求异面直线所成的角，通常是在其中一条直线上找一点，过这点作一条直线与另一条异面直线平行．此时这两条直线的夹角就是要求的角，本例就是这样做的.

例 2　$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$在两个不同的平面上，且其对应边AB与$A'B'$，BC与$B'C'$，CA与$C'A'$的延长线相交．求证：三直线AA'、BB'、CC'或者互相平行，或者相交于一点.

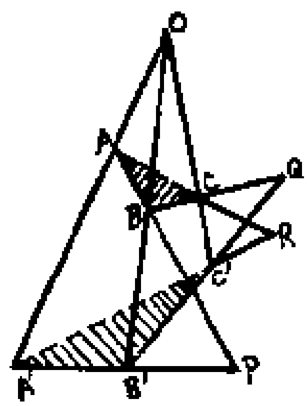


图 6.4

分析：因为AB和$A'B'$、BC和$B'C'$、AC和$A'C'$是相交直线，所以AA'、BB'、CC'三直线中每二条直线在同一平面内.

因已知AA'、BB'在同一平面上，故它们的位置关系只有两种可能：

(1) $AA' /\!/ BB'$，这时容易证明CC'也平行于AA'．故三直线平行；

(2) AA'与BB'相交，设其交点为O，这时容易证明CC'也通过O点，故三直线交于一点O.

证明：因为AB和$A'B'$是相交直线，故AB和$A'B'$确定一个平面，所以AA'和BB'两直线在所确定的平面$ABB'A'$上．同理可证：AA'和CC'在同一平面上，BB'和CC'在同一平面上.

因为AA'和BB'在同一平面上，所以只有两种情况：

(1) $AA' \parallel BB'$，这时，$BB' \parallel$ 平面 $AA'C'C$，而 CC' 是平面 $AA'C'C$ 与平面 $BB'C'C$ 的交线，$\therefore$ $CC' \parallel BB'$. 故三直线 AA'、BB'、CC' 互相平行；

(2) AA' 与 BB' 相交，设其交点为 O. 这时，因为 O 是平面 $AA'C'C$ 与平面 $BB'C'C$ 的公共点，所以 O 点在此两平面的交线 CC' 上. 故三直线 AA'、BB'、CC' 相交于一点 O.

综合(1)(2)得：三直线 AA'、BB'、CC' 或者互相平行，或者相交于一点.

注：此例说明要证明三条直线平行，只要分别证明其中一条直线都平行于另两条直线就行了；要证明三直线交于一点，一般采用证明其中两条直线的交点也在第三条直线上.

例 3 A、B、C 是平面 α 内共线的三点，P、Q 是平面 α 外同侧的两点，$PB=QB$，$PA=QA$. 求证：$PC=QC$.

分析：要证 $PC=QC$，只要证 $\triangle PAC \cong \triangle QAC$ 就行了. 根据已知条件，这两个三角形有两对边相等.（AC 公共，$PA=QA$）故只要证其夹角相等. 为此，利用已知条件容易证 $\triangle PAB \cong \triangle QAB$. 从面推得：$\angle PAC=\angle QAC$.

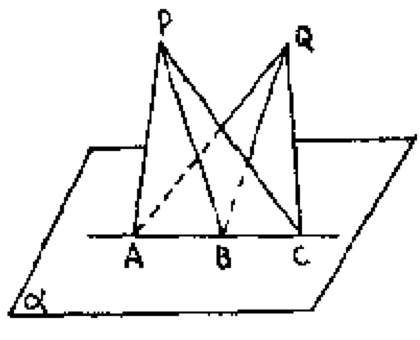


图 6.5

证明：在 $\triangle PAB$ 和 $\triangle QAB$ 中，$PB=QB$，$PA=QA$，$AB=AB$. $\therefore \triangle ABP \cong \triangle ABQ$，故 $\angle PAC=\angle QAC$.

在 $\triangle PAC$ 和 $\triangle QAC$ 中，$PA=QA$，$AC=AC$，$\angle PAC=\angle QAC$，$\therefore$ $\triangle PAC \cong \triangle QAC$，故 $PC=QC$.

注：立体几何中要证两线段相等或两角相等，常用的方法是证它们所在的两个三角形全等. 有时直接利用题设条件还不能证明它们全等，这时就直接利用题设条件先证其他三角形全

等，以补足证它们全等所差的条件．本题就是这样做的．

例 4　已知底为 $ABCD$ 和侧棱为 AA'，BB'，CC'，DD' 的立方体，点 N 是 AB 中点，点 M 是 BB' 中点，O 是面 $BCC'B'$ 对角线的交点，过点 O 作直线，此直线分别与直线 AM 和 CN 交于 P 和 Q，如果已知立方体的棱长为 1，求线段 PQ 的长．

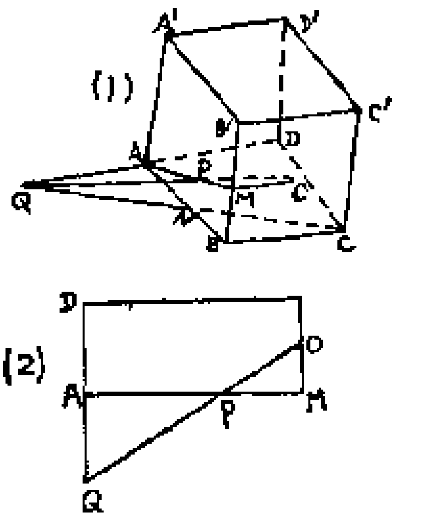


图 6.6

分析：直线 PQ 在 $\triangle OAM$ 平面内，因此这个平面和直线 CN 的交点是 Q 点，此外，点 Q 在平面 OAM 和平面 ABC 的交线上，即在直线 AD 上．在单独把被平面 OAM 截出的立方体的截面图形上（如图 6.6(2) 所示），利用平面几何知识，容易计算出线段 PQ 的长．

解：辅助图形在"分析"中已经作出，这里不重复了．如图 6.6(1)，在平面 QCD' 上，$\triangle AQN \cong \triangle CBN$（$AN=NB$，$\angle QAN=\angle CBN=90^\circ$，$\angle ANQ=\angle CNB$），$\therefore$ $AQ=BC=1$．在平面 ABM 上，因 $\angle ABM=90^\circ$，

$$故\quad AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

在图 6.6(2) 所示平面上，$\triangle AQP \backsim \triangle PMO$（$\because$ $AQ \parallel OM$）故 $\dfrac{AQ}{OM}=\dfrac{PA}{PM} \Rightarrow \dfrac{PA}{PA+PM}=\dfrac{AQ}{AQ+OM}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}=$

$$\frac{2}{3} \Rightarrow PA=\frac{2}{3}AM=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\Rightarrow PQ=\sqrt{AQ^2+AP^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{14}}{3}.$$

注： 立体几何中，如果某一个平面上的各种几何量（如线段或角）之间的关系从原立体图中看不清楚，因而思考起来不甚方便，为了便于看清楚图形上几何元素间的位置关系和数量关系。常常把原立体图中某一截面图形单独另画一个平面图形．再在这个平面图形上，利用平面几何知识，解决题目所要求解决的问题．

例 5 立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，点 P 为棱 CC_1 的中点，点 Q 是 AA_1B_1B 的中心，两端分别在直线 AD 和 A_1B_1 上的线段 MN 与直线 PQ 垂直相交，求线段 MN 的长．

解法一： 我们利用此题向读者介绍立体几何中的向量解法．

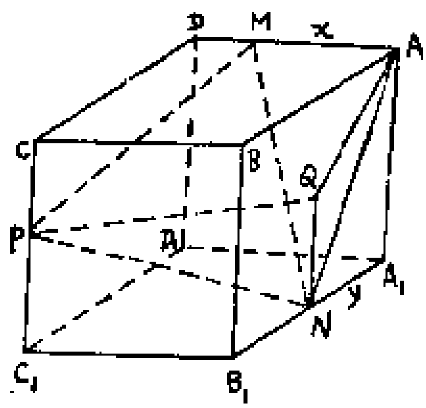


图 6.7

设 $\overrightarrow{AD}=\vec{i}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{j}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{k}$．

由于向量 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\vec{i}$ 共线，可设 $\overrightarrow{AM}=x\vec{i}$，同理可设 $\overrightarrow{A_1N}=y\vec{j}$．

这时，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1N}=-x\vec{i}+y\vec{j}+\vec{k}$，

$$\overrightarrow{QP}=\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j},\quad \overrightarrow{QM}=x\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}-\frac{1}{2}\vec{k}.$$

由条件 $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{QP}$ 得：$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{QP}=0$，$\Rightarrow y=2x$．

由条件 MN 和 PQ 相交，则 M、N、P、Q 共面，即向量 $\overrightarrow{MN}$ 与向量 $\overrightarrow{QP}$ 和 $\overrightarrow{QM}$ 共面．故 $\overrightarrow{MN}=\alpha\overrightarrow{QP}+\beta\overrightarrow{QM}\cdots\cdots(1)$ 其中 α，β 为实数．

由 (1) 得：$-x\vec{i}+y\vec{j}+\vec{k}=(\alpha+\beta x)\vec{i}+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\vec{j}-\dfrac{\beta}{2}\vec{k}$

$$\Rightarrow\begin{cases} -x=\alpha+\beta x \\ y=\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ 1=-\dfrac{\beta}{2} \end{cases}$$

从这些方程中消去 α 和 β，得出

$$x=2y-2$$

由于 $y=2x$，联合解得：

$$x=\frac{2}{3},\quad y=\frac{4}{3}.$$

即 $\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{4}{3}\vec{j}+\vec{k}$.

故 $|MN|=a\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{29}}{3}a.$

解法二：为了使不熟悉向量计算的读者能够理解本题的解法，我们用中学数学的常规解法来解此题.

如图 6.7，因 M、N 的位置能完全决定 MN 的长度，故可设 $MA=x$，$A_1N=y$.

下面我们要想办法利用题设条件来建立关于 x 和 y 的两个方程.

因 $PM^2=PD^2+DM^2=\frac{5}{4}a^2+(a-x)^2=\frac{9}{4}a^2-2ax+x^2$,

$$MQ^2=MA^2+AQ^2=x^2+\frac{1}{2}a^2,$$

$$PN^2=PB_1^2+B_1N^2=\frac{5}{4}a^2+(a-y)^2=\frac{9}{4}a^2-2ay+y^2,$$

$$NQ^2=NA_1^2+QA_1^2-2NA_1\cdot QA_1\cos 45^\circ=y^2+\frac{1}{2}a^2-ay,$$

故由 PQ 与 MN 垂直相交于 O 点得，

$PM^2+QN^2=MQ^2+PN^2=PO^2+NO^2+QO^2+MO^2$，即

$$\frac{9}{4}a^2-2ax+x^2+y^2+\frac{1}{2}a^2-ay=x^2+\frac{1}{2}a^2$$
$$+\frac{9}{4}a^2-2ay+y^2$$

经化简整理得：$y=2x\cdots\cdots(1)$

因 $\cos\angle MPQ=\dfrac{PQ^2+PM^2-MQ^2}{2PQ\cdot PM}=\dfrac{2a^2-2ax}{2PQ\cdot PM}$,

$$\cos\angle PMN=\frac{MN^2+PM^2-PN^2}{2MN\cdot PM}=\frac{2x^2+2ax+a^2}{2MN\cdot PM}$$

故两式平方后相加得：

$$\frac{1}{4PM^2}\left(\frac{(3a^2-2ax)^2}{PQ^2}+\frac{(2ax^2+2ax+a^2)^2}{MN}\right)=1,$$

即
$$(3a^2-2ax)^2(5x^2+a^2)+(2x^2+2ax+a^2)^2\cdot\frac{5}{4}a^2$$
$$=4(\frac{9}{4}a^2-2ax+x^2)(\frac{5}{4}a^2)(5x^2+a^2),$$

化简得 $(3x-2a)^2=0$.

解这个方程得：$x=\dfrac{2}{3}a$,

由(1)得：$y=\dfrac{4}{3}a$.

故 $MN=\sqrt{MA^2+NA^2}=\sqrt{MA^2+NA_1^2+AA_1^2}$
$$=\sqrt{x^2+y^2+a^2}=\sqrt{\frac{4}{9}a^2+\frac{16}{9}a^2+a^2}=\frac{\sqrt{29}}{3}a.$$

注：由计算结果 $y=\dfrac{4}{3}a$，即 $NA_1=\dfrac{4}{3}a$，故 N 不在 A_1B_1 内而在 A_1B_1 的延长线上．这一点说明我们开始的估计(或假设 N 在 A_1B_1 上)是不符合事实的．但在这种错误的假设之下，为什么得出了正确的结论呢？这是因为当 N 在 A_1B_1 的延长线上时，其计算的过程与上述计算过程还是一样的．读者在做其他几何题时也应注意这一点，在做完题以后，要检查一下：你的结论符不符合题意，符不符合实际．

习 题 二

1. AB、CD 是两平行线段，分别在两相交平面上，AE 和 CF 都垂直于这两平面的交线，E、F 为垂足. 已知 $AC=5\text{cm}$，$EF=4\text{cm}$，求 AB 和 CD 两直线间的距离.

2. 已知：正方体底面对角线与侧面对角线间的距离是 d. 求证：d 是正方体对角线长的三分之一.

3. 两条异面直线 AB、CD 与三平行的平面 M、N、P 分别相交于 A、E、B 及 C、F、D，又 AD、BC 与平面 N 的交点为 G、H. 求证：$EFGH$ 为平行四边形.

4. 正方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 的棱长等于 a. 求 AC' 与 $B'C$ 间的距离.

5. 求证：如果四面体中连结相对的棱之中点的三条线段相等，那么相对的棱分别互相垂直.

6. 求证：正四面体的一个顶点到对面的高之中点与其他三个顶点的连线，两两互相垂直.

7. 在四面体 $ABCD$ 中，E，F，G，H 为 $\triangle BCD$、$\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle ABD$ 的重心. 求证：AE，BG，CH，DF 交于一点，且这四条线段都被交点分成 $3:1$ 两部分.

8. 试证正方体的一棱与这棱不相交的对角线的距离等于一个面上对角线的一半.

§3. 直线与平面的位置关系

一、直线与平面的相关位置

空间一直线与一平面的相关位置可分为如下三类：

(1) 直线与平面没有公共点，叫做直线与平面平行；

(2) 直线与平面只有一个公共点，叫做直线与平面相交；

(3) 直线与平面至少有两个公共点，叫做直线在平面上或平面通过直线.

二、直线与平面平行的判定与性质

定理 4 如果直线平行于平面上的某一条直线，那么它平行于这个平面.

定理 5 如果直线平行于平面 α，那么它平行于过这条直线的平面与平面 α 的交线.

平行直线与平面间的距离：一条直线和一个平面平行，这条直线上任一点到这个平面的距离(都相等)，叫做平行直线与平面间的距离.

三、直线与平面相交

1. 直线与平面垂直的定义 如果直线垂直于平面上的任何一条直线，叫做这条直线与这个平面垂直. 平面的垂线与平面的交点叫做垂足.

从平面外一点向平面引垂线，这点和垂足之间的距离，叫做点到平面的距离.

2. 直线与平面垂直的判定与性质

定理 6 如果直线垂直于平面上的两条相交直线，那么它垂直于这个平面.

定理 7 如果两条平行直线之一与一个平面垂直，那么另一条也垂直于这个平面.

定理 8 如果两条直线垂直于同一平面，那么这两条直线平行.

3. 斜线 如果一条直线和一个平面相交，但不和这个平面垂直，这条直线叫做这个平面的斜线. 斜线与平面的交点叫做

斜足.

定理 9 平面外一点与平面上所有点的连线中，以垂线段最短.

4. **射影** 从一点向一个平面所引垂线的垂足，叫做这点在这个平面上的射影；由一条直线上的点在这个平面上的射影组成的集合，叫做这条直线在这个平面上的射影(它也是一条直线或是一点).

5. **三垂线定理及其逆定理**

定理 10 如果平面上的直线垂直于斜线的射影，那么它也垂直于斜线.

定理 11 如果平面上的直线垂直于斜线，那么也垂直于这斜线的射影.

6. **直线与平面所成的角** 如果一条直线与一平面斜交，这直线与它在这个平面上的射影之间的夹角，叫做直线和平面所成的角. 如果直线垂直于平面，它们所成的角是直角. 如果直线与平面平行或直线在平面上，它们所成的角是 $0°$ 的角.

定理 12 直线与平面所成的角，是直线与平面上任何直线所成的角中最小者.

例 1 在四面体 $ABCD$ 中，$\angle ABC$、$\angle ADC$ 是直角，且边 AB 等于边 AD. 设点 X 是边 BD 的中点. 试证：(1) 平面 $AXC\perp BD$；(2) $\angle AXC$ 是钝角.

(1) **分析**：要证明 $BD\perp$ 平面 AXC，就希望在平面 AXC 上找两条直线都垂直于 BD. 因题设 $AB=CD$，且 X 是 BD 的中点，故 $AX\perp BD$；现在还要在平面 AXC 上再找一条直线也垂直于 BD，我们希望证明 $CX\perp BD$，看能否办到. 在 $\triangle BCD$ 中，已知 CX 是 BD 边上的中线，因此只要证明 $BC=CD$ 就行了. 为此只要证明 $\triangle ABC\cong\triangle ACD$ 就行了，因而得到下面的

证明.

证明：在$\triangle ABD$中，$\because AB=AD$，X是BD中点，$\therefore AX\perp BD$；在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中，$AB=AD$，$AC=AC$，$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$，$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADC$，$\therefore BC=CD$，但$BX=XD$，$\therefore CX\perp BD$；$\therefore BD\perp$平面$AXC$.

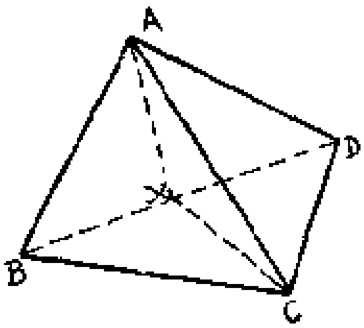


图 6.8

(2) **分析**：一般要证明某一个角是钝角，先把这个角放到一个三角形中去，再证它的余弦值是负的就行了．我们由此想到利用余弦定理来计算$\cos\angle AXC$的值.

$\cos\angle AXC=\dfrac{AX^2+CX^2-AC^2}{2AX\cdot CX}$，因分母是正的，故只要证明分子$AX^2+CX^2-AC^2<0$就行了．由(1)的证明中知道：$\triangle ABX$，$\triangle BCX$，$\triangle ABC$都是$Rt\triangle$，故

$AX^2=AB^2-BX^2$，$CX^2=BC^2-BX^2$，$AC^2=AB^2+BC^2$，代入上式化简得：$AX^2+CX^2-AC^2=-2BX^2<0$.

证明：在$\triangle AXC$中，由余弦定理得：

$$\cos\angle AXC=\frac{AX^2+CX^2-AC^2}{2AX\cdot CX}$$
$$=\frac{(BA^2-BX^2)+(BC^2-BX^2)-(AB^2+BC^2)}{2AX\cdot CX}$$
$$=-\frac{2BX^2}{2AX\cdot CX}<0.$$ 又$0<\angle AXC<\pi$，

故$\angle AXC$是钝角.

例 2 从平面Q内两点A、B引互相平行的两条斜线AA'和BB'，它们和平面Q所成的角都等于a，又直线MN和两

斜线AA'和BB'都垂直相交，且MN与平面Q所成的角为β. 求直线AB和斜线AA'的夹角.

分析：题目要求的是两直线的夹角，设为x，已知条件是已知角α，β及直线平行与垂直等位置关系. 为了计算角x，必须先在图上把这些已知角α、β和未知角x都画出来，且尽可能使它们在一个三角形或几个互相有联系的三角形中，以便利用三角形中的边角关系求出角x来. 为此，在AA'和BB'（$\because$ $AA' \parallel BB'$）确定的平面

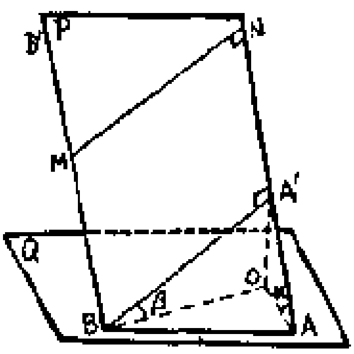


图 6.9

（设为P）上，自B作$BA' \perp AA'$于A'，则$MN \parallel A'B$（$\because$ $MN \perp AA'$），故$A'B$与平面Q所成的角也应等于β. 又自A'作$A'O \perp$平面Q，O为垂足，连OB和OA，则$\angle A'AO = \alpha$，$\angle A'BO = \beta$. 下面只要在$Rt\triangle AOA'$，$Rt\triangle A'OB$，$Rt\triangle AA'B$中利用边角关系列出一些等式，再消去辅助未知数（即上述$Rt\triangle$中的某些边）就可计算出角x来.

解：辅助线作法"分析"中已讲清楚，这里不重复了. 设$AO = h$，则由$Rt\triangle AOA'$得：$AA'\sin\alpha = h$，由$Rt\triangle A'OB$得：$A'B\sin\beta = h$，由$Rt\triangle ABA'$得：

$$\operatorname{tg} x = \frac{A'B}{A'A} = \frac{\dfrac{h}{\sin\beta}}{\dfrac{h}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

$$\therefore\quad x = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right).$$

例 3　设α为与$\triangle ABC$不相截的任一平面，由A、B、C及$\triangle ABC$的重心G分别作平面α的垂线AA'、BB'、CC'、

GG'，其中 A'、B'、C'、G'是垂足.

求证：$AA'+BB'+CC'=3GG'$.

分析：题目要求证明的是三线段之和等于某一线段之三倍. 而这四线段又都垂直于同一平面，因而它们是平行的，故组成许多梯形. 这使我们想到利用梯形的中位线定理. 要证的等式左边是三项之和，一般总是先研究其中两项之和. 我们先看 $AA'+BB'$等于什么，这两项之和恰好是梯形$AA'B'B$的两底之和，应等于它的中线之两倍. 因此，取 AB 中点 D，$A'B'$ 中点 D'，连 DD'. 则

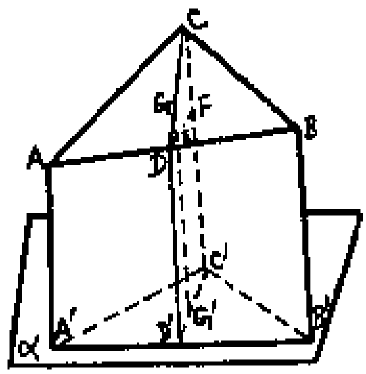


图 6.10

$$DD'=\frac{1}{2}(AA'+BB')\cdots\cdots(1).$$

∵ $DD' /\!/ AA'$，$CC' /\!/ AA'$，∴ $DD' /\!/ CC'$. 在 DD'与 CC' 所确定的平面 $CC'D'D$ 上，再来仔细研究 DD' 与 CC'之间的关系. 因 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，故 G 应在它的中线 CD上，同理 G' 应在 $C'D'$ 上. 为了弄清线段 DD'，GG'，CC' 长度之间的关系，在平面 $CC'D'D$ 上，自 D 作 $DF\perp CC'$ 于 F，交 GG' 于 E.

∵ $CC'\perp$平面 α，∴ $CC'\perp DD'$，∴ $DD'C'F$ 是矩形.（∵有三个内角是直角）∴ $DD'=C'F$.

又∵ $GE /\!/ CC'$，∴ $\triangle DGE \backsim \triangle DFC$，

∴ $GE:FC=DG:DC$，但 $DG=\frac{1}{3}DC$，

∴ $GE=\frac{1}{3}FC$. ∴ $GG'=GE+EG'=\frac{1}{3}FC+DD'$

$$=\frac{1}{3}(CC'-FC')+DD'=\frac{1}{3}(CC'-DD')+DD'.$$

把(1)代入上式得，$GG'=\frac{1}{3}CC'+\frac{2}{3}DD'=\frac{1}{3}CC'+\frac{2}{3}\times\frac{AA'+BB'}{2}$

即 $3GG'=AA'+BB'+CC'$.

证明：在"分析"中已经详细写出了证明过程，读者自己可以作为练习，详细写出完整的证明.

例 4 正四棱锥的底边为 a，高为 $2a$，一截面通过两条相邻底棱的中点及高的中点，求此截面面积.

分析：为计算截面面积，首先要搞清楚截面的形状及位置.

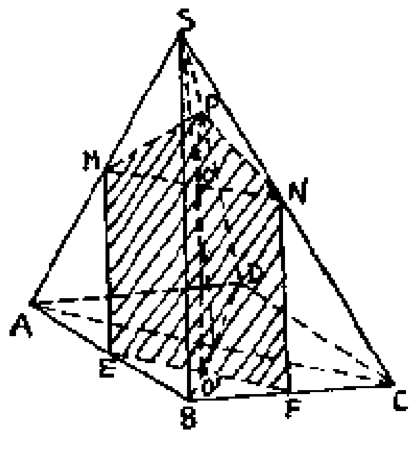


图 6.11

设正四棱锥 $S—ABCD$ 的相邻底棱 AB、BC 的中点分别为 E、F，侧棱 SA、SC 的中点分别为 M、N. 因 $MN\parallel AC, EF\parallel AC\Rightarrow MN\parallel EF$. 故 E、F、M、N 在同一平面上，又因 O 点在 MN 上，故 O 点（即高的中点）也在此平面上. 因此此平面就是题目中的截面. 设它与 SD 交于 P 点，故截面是一个五边形 $PMEFN$.

解：辅助图形如上所述.

因 $MN=EF=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，又 $EF\perp BD$，由三垂线定理知：$EF\perp OP$，即 $ME\perp EF$，故 $MNEF$ 是矩形.

面 $ME=\frac{1}{2}SB=\frac{1}{2}\sqrt{(2a)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{3}{4}\sqrt{2}a$.

因 $OP:PO'=1:3$，故 $OP=\frac{1}{2}OO'=\frac{3}{8}\sqrt{2}a$.

因此，$S_{PMEFN}=S_{MEFN}+S_{\triangle PMN}$

$$=\frac{3}{4}\sqrt{2}a\times\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{3}{8}\sqrt{2}a=\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{16}a^2$$

$$=\frac{15}{16}a^2.$$

例 5 一平面 α 截空间四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 于 N、M、S、P. 求证：

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CS}{SD}\cdot\frac{DP}{PA}=1.$$

证法一：因平面 α 与空间四线段相截，故我们要设法证明空间一线段被一平面截成两段以后，这两线段之比等于什么？(容易证明这两线段之比等于原线段两端点到截平面的距离之比. 这点请读者作为练习自己加以证明.)

自 A、B、C、D 分别引平面 α 的垂线 AA'，BB'，CC'，DD'，其中 A'、B'、C'、D' 是垂足，则

$$\frac{AN}{NB}=\frac{AA'}{BB'},\quad\frac{BM}{MC}=\frac{BB'}{CC'},\quad\frac{CS}{SD}=\frac{CC'}{DD'},\quad\frac{DP}{PA}=\frac{DD'}{AA'},$$

上述四式相乘得：

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CS}{SD}\cdot\frac{DP}{PA}=\frac{AA'}{BB'}\cdot\frac{BB'}{CC'}\cdot\frac{CC'}{DD'}\cdot\frac{DD'}{AA'}=1.$$

证法二：此命题可看成平面几何中的梅氏定理在立体几何中的推广. 因此我们想到利用梅氏定理来证此题. 为此，设 AC 与平面 α 交于 k(若 $AC\parallel$ 平面 α，此题容易证明其正确性，这点请读者自行补足.)在平面 ABC 上，由梅氏定理得：

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CK}{KA}=1.$$ (注意 K 点必是 PS 与 NM 交点)

同理可证：$\frac{DP}{PA}\cdot\frac{AK}{KC}\cdot\frac{CS}{SD}=1.$

上述两式相乘得：$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CK}{KA}\cdot\frac{DP}{PA}\cdot\frac{AK}{KC}\cdot\frac{CS}{SD}=1$

即 $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CS}{SD}\cdot\frac{DP}{PA}=1$.

注：(1) 证法一中采用的先证一个辅助命题(即预备定理)，再利用辅助命题直接证明题目的结论，这是数学中常用的证题方法.

(2) 证法二是把立体几何中与平面几何相类似的命题的证明归结为：在相应的平面上利用平面几何中的类似命题直接得出结论，再把这个结论转化为立体几何中的相应结论. 这种证题方法在立体几何中常常采用.

习　题　三

1. 已知：四边形 $ABCD$ 为正方形，线段 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA=a$，$AB=a$. 求：

(1) P 到正方形各顶点的距离；

(2) P 到正方形各边的距离；

(3) P 到正方形两条对角线的距离.

2. 设 A、B、C、D 是不在同一平面上的四点，且 $CD\perp AB$，$AC\perp BD$. 求证：$BC\perp AD$.

3. 异面直线 a，b 上各取一点 A，B. 求证：a，b 的公垂线的垂足 E，F 的垂直平分平面平分线段 AB.

4. 已知正四面体之棱长为 a，求它的一棱与其对面所成的角.

5. 在平面 P 引直线 l，与一斜线在平面 P 上的射影的夹角为 β(β 为锐角). 而斜线与平面 P 成 α 角. 试确定直线与斜线间的夹角 φ.

6. 设直线 PO 与平面 M 相交于 O，过 O 在平面 M 内引直线 OA、OB、OC. 若 PO 与 OA、OB、OC 成等角. 求证：$PO \perp$ 平面 M.

7. 已知 A、B、C、D 四个点在平面 α 和平面 β 之外，A、B、C、D 在平面 α 上的射影是 A'、B'、C'、D'，且这四点在一直线上，A、B、C、D 在平面 β 上的射影是 A''、B''、C''、D''，且 $A''B''C''D''$ 是一个平行四边形. 求证：$ABCD$ 也是一个平行四边形.

8. 自平面外一点 A 向平面引垂线 AO 和两条斜线 AB、AC，已知 AO、AC、AB 成等差数列，且 $OC=7$，$OB=10$，求 AO、AC、AB 的长.

9. $ABCD$ 是一个平行四边形的操场，$AB=a$ 米，$AD=b$ 米，$\angle BAD=120°$，在 A 处有旗杆高 c 米，如果要从杆顶 P 拉一条绳子到 BD 线上，这条绳子最少长几米？

10. 设 P 为平面外一点，斜线 PA 与 PB 在该平面上的射影 $AO=12\text{cm}$，$BO=2\text{cm}$，且 $\angle PBO-\angle PAO=\frac{\pi}{4}$，求 PO 之长.

11. 已知：空间两条直线的交角为 θ，这两条直线和一个平面所成的分别是 α 和 β. 求这两条直线在该平面上的射影间的夹角 φ.

12. 三角形各边的长是 10cm、17cm 和 21cm，过它的最大角的顶点引它所在平面的垂线，设垂线的长是 15cm，求这垂线的两端到这三角形的最大边的距离.

13. 梯形 $ABCD$ 的一底 AB 在平面 α 上，另一底 DC 在平面 α 外且与它相距 5cm. 已知：$AB:DC=7:3$，求这梯形的对角线交点 O 到平面 α 的距离.

14. 直角三角形 ABC 的直角顶点 B 在平面 α 上，斜边 AC 平行于平面 α 且和它相距 1 dm，两条直角边在平面 α 上的射影的长分别是 3dm 和 5dm. 求它的斜边在平面 α 上的射影的长.

15. 已知：由 A、B 到平面 P 所引之垂线分别为 AA'、BB'，到平面 Q 之垂线分别为 AA''、BB''，且 $AA''+AA'=BB''+BB'$. 由直线上任一点 C 引平面 P、Q 之垂线分别为 CC'、CC''. 求证：$CC'+CC''=AA'+AA''$.

16. 在四面体 $SABC$ 中，过两对棱 SA、BC 之中点 D、E 作平面，与 SB 交于 F，与 AC 交于 G，则直线 FG 为直线 DE 所平分.

17. 证明：若非平面四边形的对边相等，则连结对角线中点的线段垂直于两条对角线.

§4. 平面与平面的位置关系

一、空间两平面的相关位置

空间两平面的相关位置可分为如下两类：

(1) 没有公共点的两个平面，叫做平行平面；

(2) 有公共点(因而有一条公共直线)的两个平面，叫做相交平面.

二、两平面平行的判定与性质

定理 13 如果一个平面上的两条相交直线平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

定理 14 如果两个平面平行且都与第三个平面相交，那么两条交线平行.

定理 15 夹在两个平行平面间的平行线段相等.

两个平行平面间的距离：夹在两个平行平面间的垂直线段的长度（它们都相等），叫做两个平行平面间的距离.

三、相交平面

1．**半平面**　平面上的一条直线把平面分成两部分，每一部分叫做半平面.

2．**二面角**　具有公共直线的两个半平面组成的图形，叫做二面角．这两个半平面叫做二面角的面，这公共直线叫做二面角的棱.

3．**二面角的平面角**　在二面角的棱上取一点，分别在两个面上作棱的垂线，这两条垂直的夹角，叫做二面角的平面角.

4．**两个平面互相垂直**　平面角是直角的二面角，叫做直二面角．两个平面相交所成的二面角是直二面角，叫做这两个平面互相垂直.

四、两个平面互相垂直的判定和性质

定理 16　如果一个平面经过另一平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

定理 17　如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线，必垂直于另一个平面.

推论 1　如果平面 α 和平面 β 互相垂直，那么从平面 β 上一点引平面 α 的垂线必在平面 β 上.

推论 2　如果两个相交平面 α 和 β 都垂直于第三个平面 γ，那么平面 α 和平面 β 的交线必垂直于平面 γ.

例 1　设有一长方体 $A'B'C'D'-ABCD$，其三棱 $A'A=a$，$A'B'=b$，$A'D'=c$．M、N、P、Q 分别为 $A'B'$、$A'D'$、BC、CD 的中点．求 $\triangle AMN$ 与 $\triangle C'PQ$ 的重心间距离.

分析：首先要找这两个重心所在的平面．容易证明：MN 的中点 E 在 $A'C'$ 上，而 $\triangle AMN$ 的重心 O 在 AE 上，故 O 点在平面 $A'ACC'$ 上．同理：$\triangle C'PQ$ 的重心 O' 也在平面 $A'ACC'$ 上．所以本题变成了平面几何问题．

解：连 $A'C$ 和 $B'D'$．设 $A'C'$ 与 $B'D'$ 交于 L，与 MN 交于 E．由 $MN\parallel B'D'$ 得：

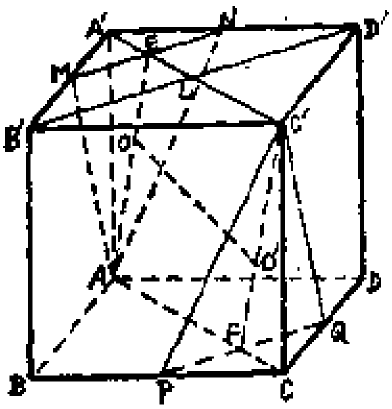


图 6.12

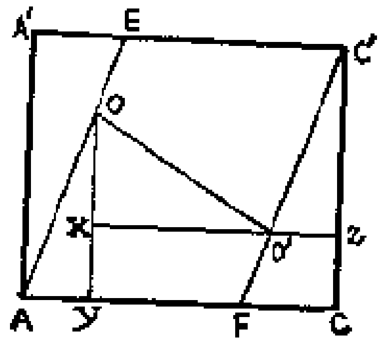


图 6.13

$ME:EN=B'L:LD'=1:1$．$\therefore\ ME=EN$．连 AE，则 AE 是 $\triangle AMN$ 的中线，取 $OE=\dfrac{1}{3}AE$，则 O 为 $\triangle AMN$ 的重心．同理：PQ 与 AC 交于 F，连 $C'F$，取 $O'F=\dfrac{1}{3}C'F$，则 O' 是 $\triangle C'PQ$ 的重心．在平面 $A'ACC'$ 上，$A'C'=\sqrt{b^2+c^2}$，$A'A=a$，$A'E=FC=\dfrac{1}{4}A'C'=\dfrac{1}{4}\sqrt{b^2+c^2}$．

为了清楚起见，把矩形 $A'ACC'$ 另外画一平面图形如图6.13所示．

为计算 OO' 的长，过 O 作 $OY\perp AC$ 交 AC 于 Y，过 O' 作 $OX\perp OY$，交 OY 于 X，且反向延长交 CC' 于 Z．则 $O'X=AC-AY-O'Z=AC-\dfrac{2}{3}A'E-\dfrac{2}{3}CF=AC-\dfrac{4}{3}A'E=AC-$

$\frac{4}{3}\times\frac{1}{4}A'C'=\frac{2}{3}A'C'$，$OX=OY-XY=\frac{1}{3}AA'$.

$$\therefore\quad OO'=\sqrt{\frac{4}{9}A'C'^2+\frac{1}{9}AA'^2}=\frac{1}{3}\sqrt{4(b^2+c^2)+a^2}.$$

即 $\triangle AMN$ 与 $\triangle C'PQ$ 两重心距离为$\frac{1}{3}\sqrt{a^2+4b^2+4c^2}$.

例 2 已知：两相交平面 α、β 与一直线 AB 的两交点 A、B 到两平面交线 CD 的距离相等.

求证：AB 与平面 α、β 成相等的角.

分析：要证明 AB 与平面 α、β 成相等的角，首先要在图上把 AB 与平面 α，β 所成的角画出来．为此，自 A 作 $AA'\perp$ 平面 β，A' 为垂足，自 B 作 $BB'\perp$ 平面 α，B' 为垂足.连 $A'B$ 和 AB'，则题目要证明的就是：$\angle BAB'=\angle ABA'$．从图上可以看出：这只要证明$\triangle BAB'\cong\triangle ABA'$ 就行了．但在这两个三角形中，只有 $AB=AB$，$\angle AA'B=\angle BB'A$，还差一个条件才能全等．因此我们想到要利用题设条件 A、B 到 CD的距离相等来补足这所差的一条件．为此，必须作出 A、B 到 CD 的距离．自 B 作 $BD\perp CD$，D 为垂足，连 $A'C$ 和 $B'D$．再证明 $\triangle AA'C\cong\triangle BB'D$就行了.

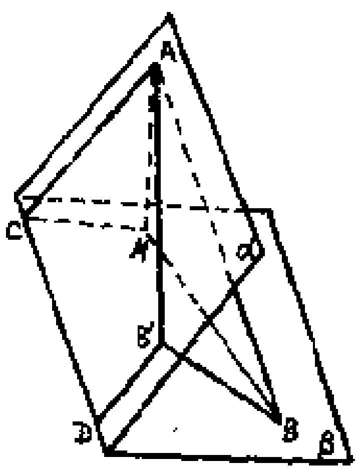


图 6.14

证明：自 A、B 分别作 $AA'\perp$平面 β，A' 为垂足，$BB'\perp$平面 β，B'为垂足．在平面 α 上自 A 作 $AC\perp CD$ 于 C，在平面 β 上自 B 作 $BD\perp CD$ 于 D．连 $A'C$ 和 $B'D$，$A'B$ 和 AB'，则$\angle ACA'$ 和 $\angle B'DB$ 都是二面角 $P-CD-Q$ 的平面角，$\therefore$ $\angle ACA'=\angle B'DB$．又已知 $DB=AC$，$\angle AA'C=\angle DB'B=$

$90°$，∴ $\triangle AA'C \cong \triangle BB'D$. ∴ $AA'=BB'$，在$\triangle ABA'$和$\triangle ABB'$中，$AA'=BB'$，$AB=AB$，$\angle AA'D=\angle BB'D$. ∴ $\triangle ABA' \cong \triangle ABB'$，∴ $\angle ABA'=\angle BAB'$，即AB与平面α，β成相等的角.

注：此命题的逆命题也是正确的，读者可以作为练习，自己再加证明.

例 3 判断下列命题是否正确，如果不正确，举出反例加以说明.

(1) 垂直于同一直线的两个平面必平行；

(2) 垂直于同一平面的两个平面必平行；

(3) 平行于同一条直线的两平面必平行；

(4) 平行于同一平面的两个平面必平行.

解：(1) 命题正确. 证明留给读者作为练习.

(2) 命题不正确. 如图 6.15 所示，平面α和β都垂直于平面γ，但平面α和β不平行，而是相交.

(3) 命题不正确. 如图 6.16 所示，平面α和β相交于直

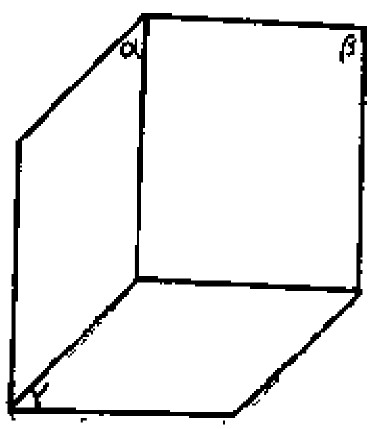


图 6.15

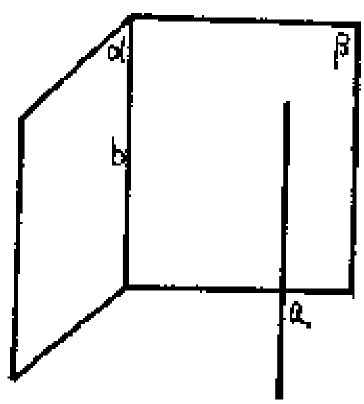


图 6.16

线 b，直线 a 平行于直线 b，此时由定理 4 知：平面 α 和 β 都平行于直线 a，但平面 α 和 β 却不平行，而是相交.

(4) 命题正确．证明留给读者作为练习.

注：有些平面几何定理在推广到空间图形的情况下也成立，例如："平行于同一直线的两条直线平行."这条定理，对同一平面上的直线是正确的，对空间的直线也是正确的．但有些平面几何定理在推广到空间图形的情况下就不成立了．例如："垂直于同一条直线的两直线平行."对同一平面上的直线，这条定理是成立的，但对空间的直线，这个命题就不成立了.

在立体几何中，有很多定理和平面几何中的某些定理是相类似的．例如：把某些平面几何定理中的点换成空间的直线，直线换成空间的平面，……等等，就可以得到相类似的立体几何定理．对平面几何的定理"一直线垂直于两平行直线中的一条，也垂直于另一条"．在作了上述代换后，就得到立体几何中与之相类似的定理"一平面垂直于两平行平面中的一个，也垂直于另一个"．而且这样得到的某些定理的证明方法也是相类似的，例如本章 § 3 中的例 3 的证明方法就是照搬平面几何中类似题目"一个三角形的三个顶点到这个三角形外一条直线的距离的算术平均值等于这个三角形的重心到这条直线的距离."的证明方法．因此有许多立体几何题，可以参考相类似的平面几何题的方法得到启发面得出相类似的立体几何题的证法或解法．但是要注意有许多平面几何题在作上述的代换后，得到的立体几何命题是不成立的．例如：把平面几何定理"两直线都垂直于同一直线，则这两条直线平行"在作上述代换后，得到的立体几何命题，就是本题中的命题(2)，它是不成立的.

由此可知，在平面图形和空间图形之间，有许多性质是相同的，有许多性质是相异的；有许多性质是相类似的，有许多

性质是不相类似的．我们必须仔细辨明，否则的话，一定会互相混淆，产生错误．初学立体几何的人，往往不自觉地把平面图形的性质加到空间图形上去，这种毛病是初学者最容易犯的，读者一定要注意：平面图形的性质在未加证明适合于空间图形之前，是不能随便引用的．

例 4　通过立方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 C_1，作一平面，此平面切割棱 BC 与 CD 并与 $ABCD$ 所成 α 角，并且在截面上得到一个等腰三角形，如果立方体棱长为 a，求截面面积（考察各种可能的情况）．

分析：此题的关键在于搞清如下两点：

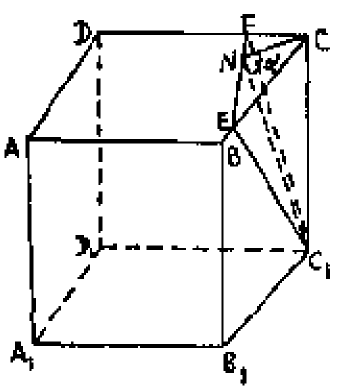


图 6.17

（1）截面 $\triangle C_1EF$（如图 6.17 所示）是等腰三角形，哪条边是底边题目没有明确说明，因而需要分两种情况讨论，一种是底边是 EF（在面 $ABCD$ 上），一种是 FC_1（或 EC_1）即底边在侧面上；

（2）在图上画出截平面与 $ABCD$ 面所成的角 α．为此，过 C 在平面 $ABCD$ 上，作 $CN\perp EF$ 于 N，连 NC_1，则 $NC_1\perp EF$（三垂线定理），故 $\angle CNC_1=\alpha$．

解：辅助图形如上述．下面分两种情况讨论：

（1）截面等腰三角形的底边在面 $ABCD$ 上，即 EF 是底边，则 $EC_1=FC_1\Rightarrow EC=FC\Rightarrow\triangle EFC$ 是等腰直角三角形．$\Rightarrow FN=NC=NE\Rightarrow EF=2NC$．

但在 $Rt\triangle CC_1N$ 中，$NC=CC_1\cdot\operatorname{ctg}\angle CNC_1=a\operatorname{ctg}\alpha$，

$NC_1=CC_1\csc\alpha=\dfrac{a}{\sin\alpha}$．

因此，$S_{\triangle C_1EF}=\frac{1}{2}NC_1\cdot EF=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sin\alpha}\cdot 2a\operatorname{ctg}\alpha$

$$=\frac{a^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

(2) 截面等腰三角形的底边在 CDD_1C_1（或 BCC_1B_1）面上．即 FC_1（或 EC_1）为底边，则 $EF=EC_1$．

但 $EF^2=EC^2+FC^2$，$EC_1^2=EC^2+CC_1^2$

$\Rightarrow EC^2+FC^2=EC^2+CC_1^2\Rightarrow FC=a$．

在 $Rt\triangle EFC$ 中，$EF\cdot NF=FC^2=a^2$

$\Rightarrow EF=\frac{a^2}{NF}$，但 $NF=\sqrt{FC^2-NC^2}=\sqrt{a^2-a^2\operatorname{ctg}^2\alpha}$

$=a\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{a}{\sin\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{a\sqrt{-\cos2\alpha}}{\sin\alpha}$.

故 $EF=a^2\times\frac{\sin\alpha}{a\sqrt{-\cos2\alpha}}=\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{-\cos2\alpha}}$

因此，$S_{\triangle C_1EF}=\frac{1}{2}EF\cdot NC_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{-\cos2\alpha}}\cdot a\operatorname{ctg}\alpha$

$$=\frac{a^2\cos\alpha}{2\sqrt{-\cos2\alpha}}.$$

例 5　已知立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，M 为棱 AD 的中点，求平面 BCB_1 与 BC_1M 之间夹角的大小．

分析：为求此二面角的大小，必须在图上作出此二面角的平面角．为此，从 M 点引 MP（在 $ABCD$ 面上）$\perp BC$ 于 P 点，则 $MP\perp$ 平面 BB_1C（因平面 $ABC\perp$ 平面 BB_1C 且 M 点在平面 ABC 上）．过 P 在平面 BB_1C 上作 $PN\perp BC_1$ 于 N，连 MN，则 $MN\perp BC_1$（三

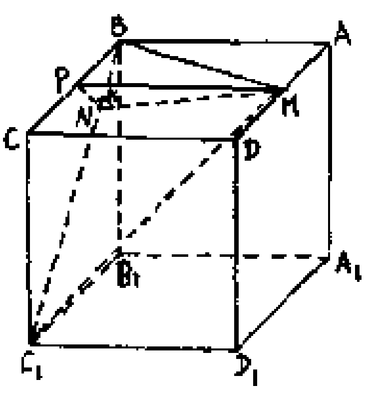


图 6.18

垂线定理）. 故 $\angle MNP$ 即此二面角的平面角.

解：辅助图形如上述，设 $\angle MNP=\alpha$，立方体的棱长为 1. 则 $PM=1$.

在 $Rt\triangle PNB$ 中，$\angle CBC_1=45°$，

故 $PN=PB\sin 45°=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

由 $Rt\triangle MNP$ 得：$\operatorname{tg}\alpha=\frac{PM}{PN}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}}=2\sqrt{2}$.

故 $\alpha=\operatorname{arc\,tg}(2\sqrt{2})$.

习 题 四

1. 在地平面上取三点 A、B、C，量得 $AB=BC=CA=10\text{m}$. 分别从 A、B、C 垂直向下钻孔，顺次到达煤层表面上 A'、B'、C'，并量得：$AA'=10m$，$BB'=CC'=15\text{m}$. 假设煤层表面是一个平面. 求煤层表面对地平面的倾斜角.

2. 斜坡平面和水平平面成 30° 的二面角，如果在斜坡平面上沿着一条与坡脚直线成 45° 角的直线前进，问前进 1 公里，升高多少米？

3. 有公共底边的两个等腰三角形，它们所在的平面成 60° 的二面角，公共底边长 16cm，一个三角形的腰长 17cm，另一个三角形的两腰互相垂直. 求这两个等腰三角形顶点间的距离.

4. 由两点 A、B 至一平面 α，引垂线 AX，AY. 作垂直于直线 AB 之平面 β，设其与平面 α 之交线为 LM. 求证：$LM\perp XY$.

5. 一平面上之二直线 AB、CD 若与另一平面成等角，则亦与此两平面之交线成等角.

6. 已知：平面 $M \perp$ 平面 N，交线为 l，A、B 分别在平面 M、平面 N 上，$AB=2a$ 且 AB 与平面 M 成 45° 角，与平面 N 成 30° 角．求 AB 在 l 上射影的长（即自 A、B 分别作 l 的垂直相交直线，其垂足间的距离）．

7. 三个平面将空间分成几部分？试就各种可能情况讨论之．

8. 平面 M 过菱形 $ABCD$ 的一条对角线 BD，且与菱形 $ABCD$ 所在平面成 30° 的二面角，已知菱形边长为 a，一个顶角为 60°，求菱形 $ABCD$ 其他两顶点 A、C 到平面 M 的距离和它的射影围成的四边形的周长和面积．

9. 直角 $\triangle ABC$ 的斜边在平面 M 上，两直角边分别与平面 M 成 α，β 的角，求这个 $\triangle ABC$ 所在平面与平面 M 的二面角 φ．

10. 正四面体的棱长为 a，求它的二面角的大小及相对两棱间的距离．

11. 在正方形纸片 $ABCD$ 的四边 AB、AD、CD、BC 上分别取一点 E、F、G、H 使 $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{CG}{GD}=\dfrac{CH}{HB}=\dfrac{1}{2}$．把这纸片沿对角线 BD 折起来．(1) 证明 $EFGH$ 是长方形；(2) 二面角 $A—BD—C$ 是多少度时，$EFGH$ 是正方形？

12. 自二面角内的一点到二面角两个面的距离分别是 $2\sqrt{2}$ 和 4，到二面角的棱的距离是 $4\sqrt{2}$．求这个二面角的度数．

§5. 多 面 角

一、多面角的定义

从一点 O 引出若干条不共面的射线 OA, OB, OC, …… OL 以及每两条射线间的角 $\angle AOB$, $\angle BOC$, ……, $\angle LOA$ 的内部所组成的图形，叫做多面角，记做 $O—ABC\cdots L$. O 点叫做多面角的顶点；各射线 OA, OB, OC, ……, OL 叫多面角的棱；每相邻两棱间的平面部分叫做多面角的面；每相邻两棱间的角叫做多面体的面角；每相邻两面所形成的二面角叫做多面角的二面角.

二、多面体的分类

多面体可分为凸多面体和凹多面体两种. 把多面体的任一面展成平面，这时整个多面体都在这个平面的同侧，这样的多面角叫凸多面角；非凸多面角叫凹多面角. 本书中只研究凸多面角.

多面角按照它有三个面，四个面，……等而分别叫做三面角，四面角，……等.

三、两个多面角之间的关系

1. **全等多面角** 把一个多面角放到另一个多面角上去，可以使它们对应的各部分全相重合，这两个多面角叫做全等多面角.

2. **对顶多面角** 两个多面角的顶点重合且一个多面角的各棱都是另一个多面角各棱的反向延长线，这样的两个多面角叫做对顶多面角.

3. **对称多面角** 如果两个多面角经过刚体运动以后可以

构成对顶多面角，这样两个多面角叫做对称多面角.

注： 两个对称多面角，一般不能经过刚体运动后，使它们对应的各部分全相重合，因而它们不一定是全等多面角.

四、多面角的性质

定理 18 多面角任一面角小于其他各面角之和.

定理 19 凸多面角的各面角之和小于 360°.

例 1 已知三面角的面角等于 α, β, γ. 试计算它的二面角.

分析： 用 A'、B'、C' 分别表示三面角 $O-ABC$ 中面角 α、β、γ 相对的二面角的大小. 为了计算 A'、B'、C' 的大小，必须在图上把它们表示出来，为此，我们在 OA 上取一点 L，为了计算的方便起见，不妨取 $OL=1$（这里要计算的是角的大小，它与边的绝对大小无关，只与边的比值有关，这时选取某一基本线段等于 1，是简化计算的重要方法之一）. 再分别在平面 AOB 和平面 AOC 上作 $LN\perp OA$ 交 OC 于 N，作 $LM\perp OA$ 交 OB 于 M，则 $\angle NLM=A'$. 这时，OL，α，β，γ 是已知数，A' 是未知数. 再由 $Rt\triangle ONL$，$Rt\triangle OMN$ 的边角关系得到一些等式，然后从这些等式中消去辅助未知数（即上述两个 $Rt\triangle$ 的边），就可以计算出 A 的值. 同样的方法可计算出 B、C.

解： 辅助线作法如上所述. 先假定 β 与 γ 都是锐角，这时

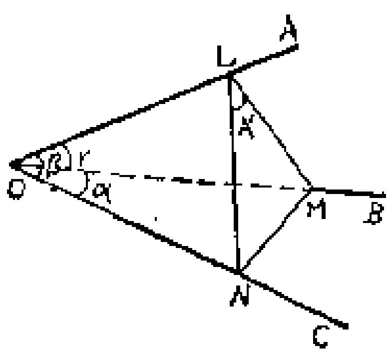


图 6.19

由 $\triangle LMN$ 得：

$$NM^2=LM^2+LN^2-2LN\cdot LM\cos A',$$

由 $\triangle OMN$ 得：

$$NM^2=ON^2+OM^2-2ON\cdot OM\cos\alpha,$$

由两式相减得：

$$(ON^2-LN^2)+(OM^2-LM^2)-2(ON\cdot OM\cos\alpha$$
$$-LN\cdot LM\cos A')=0,$$

化简后得：$\cos A'=\dfrac{ON}{LN}\cdot\dfrac{OM}{LM}\cos\alpha-\dfrac{1}{LN\cdot LM}$.

但 $NL=ON\sin\beta$，$ML=OM\sin\gamma$，$\dfrac{1}{LN}=\operatorname{ctg}\beta$，

$$\frac{1}{LM}=\operatorname{ctg}\gamma.$$

$$\therefore\quad \cos A'=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}-\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\ \sin\gamma} \tag{1}$$

$$\therefore\quad A'=\arccos\left(\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\right).$$

同理可得：$B=\arccos\left(\dfrac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\ \sin\gamma}\right)$,

$$C=\arccos\left(\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\right). \tag{2}$$

当 β 为钝角，γ 为钝角，则平面 LMN 与角 γ 的延长部分相交，这时，$\angle NLM=\pi-A'$，$\angle NOL=\pi-\beta$，$\angle NOM=\pi-\alpha$，公式(1)，(2)仍然正确.

当 β 及 γ 之中至少有一个是直角的情况，或有一个是钝角另一个是锐角时公式(1)(2)也仍然正确.

这后两种情况，读者可自己给出证明.

例 2　两点 P、Q 在正四面体 $ABCD$ 的内部.

求证：$\angle PAQ<60°$.

分析：首先要确定 $\angle PAQ$ 所在的平面，使问题变成平面几何问题．为此，只要过 A、P、Q 作一平面，此平面必与 $\triangle ABC$，$\triangle ACD$，$\triangle BAD$ 中的两个三角形相截，不妨设与 $\triangle ABC$ 截于 AE，与 $\triangle ACD$ 截于 AF，这时必与 $\triangle BCD$ 截

于 EF.

因 P、Q 两点在正四面体内部，故 P、Q 两点一定在 $\angle EAF$ 的内部. 所以 $\angle PAQ<\angle FAE$. 因此只要证明：

$\angle FAE\leqslant 60°$ 就行了.

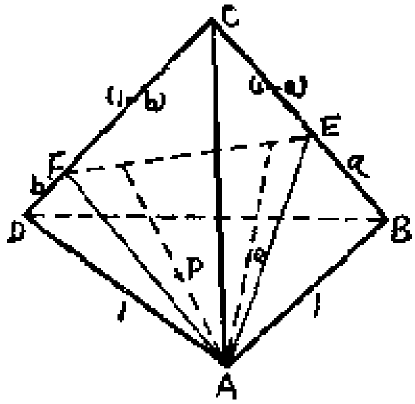


图 6.20

证明：辅助线的作法如上所述. 为了计算简单，不妨设正四面体的棱长为 1，$BE=a$，$DF=b$. 则由余弦定理得：$AE^2=1^2+a^2-2\cdot1\cdot a\cos 60°=1+a^2-a$；同理：

$$AF^2=1+b^2-b;\ EF^2=a^2+b^2+1-a-b-ab.$$

$\because$ $AE^2+AF^2-EF^2=1+ab\geqslant1$，$AE\cdot AF\leqslant AC^2=1$

($\because$ $\angle AEC\geqslant60°$，$\angle AFC\geqslant60°$)

$$\therefore\quad \cos\angle EAF=\frac{AE^2+AF^2-EF^2}{2AE\cdot AF}$$

$$=\frac{1+ab}{2AE\cdot AF}\geqslant\frac{1}{2}$$

即 $\cos EAF\geqslant\cos 60°$，且 $0°\leqslant EAF<180°$，

$\therefore$ $\angle EAF\leqslant60°$，但 $\angle PAQ<EAF$，$\therefore$ $\angle PAQ<60°$.

例 3 在三面角 $S—ABC$ 中，$\angle BSC=90°$，$\angle ASB=\angle ASC=60°$，$SA=SB=SC$. 求证：平面 $ABC\perp$ 平面 BSC.

分析：要证明平面 $ABC\perp$ 平面 BSC. 就是要在一个平面内找到一条直线垂直于另一个平面. 为此，取 BC 中点 D，连 AD 与 DS.

因为 $\triangle SAB$ 和 $\triangle SAC$ 是等边三角形，而 $\triangle ABC$ 是等腰

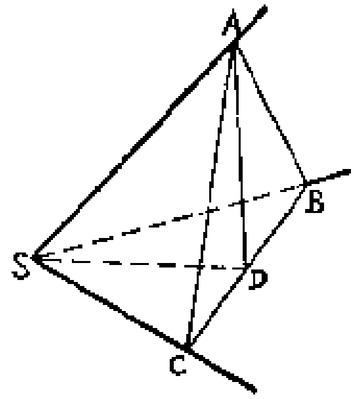


图 6.21

$\triangle$, $\therefore$ $AD \perp BC$, $SD \perp BC$.

故只要能证明 $\angle ADS = 90°$ 就行了.

为此，可设 $SA = SB = SC = a$，利用三角形的边角关系分别计算 SA, AD, SD（都用 a 表示），再直接验证等式：

$SA^2 = AD^2 + DS^2$ 就行了.

证明：$\because$ $\triangle SAB$ 和 $\triangle SAC$ 是等边 $\triangle$，$\therefore$ $AB = AC = a$，因 $\triangle BSC$ 是等腰直角三角形，$\therefore$ $BC = \sqrt{2}a$, $BD = DC = SD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$，$\therefore$ $AD^2 = a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$，故 $AD^2 + DS^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 = a^2 = SA^2$，$\therefore$ $\angle ADS = 90°$，又 $AD \perp BC$，$SD \perp BC$，故二面角 $A—BC—S$ 是直二面角，即平面 $ABC \perp$ 平面 SBC.

注：此例题说明在立体几何中一种重要的解题方法：设某一个量或几个量（本题中是设 $SA = SB = SC = a$）为参数（有时选某线段为参数，有时选某些角度为参数）然后利用平面几何或三角的知识把其他量用参数表示出来，再利用平面几何知识、三角或代数的知识配合立体几何知识来证明（或计算）题目需要的结论（或结果）.

例 4　如果两个三面角有下列条件之一，则它们全等，

(1) 两个面角和它们所夹的二面角对应相等；

(2) 两个二面角和它们所夹的面角对应相等；

(3) 三个面角对应相等；

(4) 三个二面角对应相等.

证：(1) 采用叠合法，设在两个三面角 $S—ABC$ 和 $S'—A'B'C'$中，面角 $\angle ASB=\angle A'S'B'$，$\angle BSC=\angle B'S'C'$，二面角 $A—SB—C$ 和 $A'—S'B'—C$ 相等.

首先，把三面角 $S'—A'B'C'$在空间移动，使 S' 与 S 重合，$S'A'$ 与 SA 重合，因 $\angle A'S'B'=\angle ASB$，则 $S'B'$ 与 SB 重合，又因二面角 $A'—S'B'—C'$ 和 $A—SB—C$ 相等，故可使平面 $S'B'C'$ 与 SBC 重合，但 $\angle B'S'C'=\angle BSC$，故 $S'C'$ 与 SC 重合，即这两个三面角完全重合，故它们全等.

(2) 可与(1) 一样，利用叠合法证明，请读者自己完成.

(3) 这时容易证明它们的二面角也相等，因而由 (1) 可知，这两个三面角全等. 具体详细的证明，读者自己去完成.

(4) 设两个三面角为 $S—ABC$ 和 $S'—A'B'C'$ 如图 6.22 所示. 在 $S—ABC$ 内找一点 S_1，过 S_1 分别作平面 $S_1B_1C_1$、$S_1A_1C_1$、$S_1A_1B_1$ 使 $SA\perp$ 平面 $S_1B_1C_1$、$SB\perp$ 平面 $S_1A_1C_1$、$SC\perp$ 平面 $S_1A_1B_1$，A、B、C 为垂足. 它们互相间的交线为 S_1A_1、S_1B_1、S_1C_1.

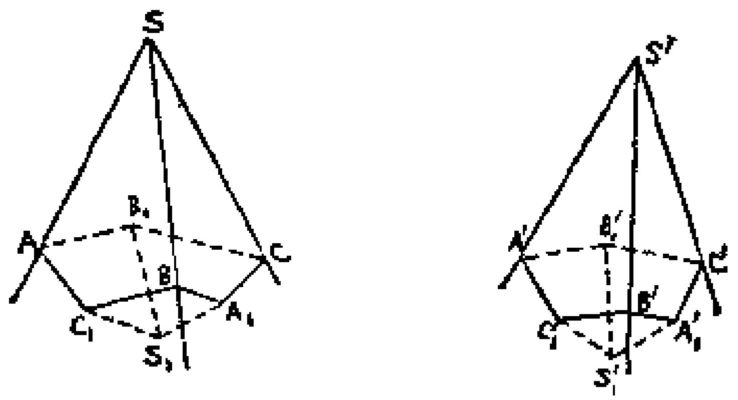


图 6.22

下面证明：$\angle BA_1C\neq\angle BSC=2d$，事实上，因$\angle SBA_1=\angle SCA_1=\alpha$，故 S、B、A、C 四点共圆. 故$\angle BA_1C+\angle BSC=2d$.

同理可证：$\angle AC_1B+\angle ASB=180^\circ$，$\angle AB_1C+\angle ASC=180^\circ$.

即三面角 $S—ABC$ 的每一个面角与三面角 $S_1—A_1B_1C_1$ 的相应的二面角互补．反过来，$S_1—A_1B_1C_1$ 的每一个面角与 $S—ABC$ 的相应的二面角互补.

用同样的方法，我们也可在 $S'—A'B'C'$ 内部取一点 S_1'，得到相应的三面角 $S_1'—A_1'B_1'C_1'$.

由 $S—ABC$ 与 $S'—A'B'C'$ 的三个二面角相等得：

$S_1—A_1B_1C_1$ 与 $S_1'—A_1'B_1'C_1'$ 的三个面角相等.

由(3) 知，这两个三面角全等，故 $S_1—A_1B_1C_1$ 和 $S_1'—A_1'B_1'C_1'$ 的三个二面角相等，因此 $S—ABC$ 与 $S'—A'B'C'$ 的三个面角相等，最后由(3) 知：三面角 $S—ABC$ 和 $S'—A'B'C'$ 全等.

例 5 三面角的三个面角分别是 α，β，γ，在 β，γ 所在面的公共棱上取与顶点距离为 1 的点 M，求 M 到 α 所在面的距离.

分析：设三面角为 $P—ABC$，$\angle APC=\gamma$，$\angle APB=\beta$，$\angle BPC=\alpha$，$PM=1$，DM 为所求之距离．为了计算 MD，我们引进两个参数：

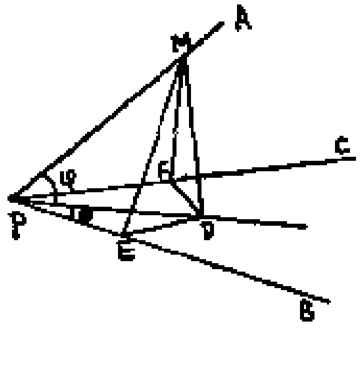


图 6.23

$\angle MPD=\varphi$，$\angle DPB=\theta$．这时 $MD=\sin\varphi$.

下面的任务，是建立含有 φ，θ 及已知数 α，β，γ 的两个等式．为此作 $DE\perp PB$ 于 E，$DF\perp PC$ 于 F．则 $ME\perp PE$，$MF\perp PF$，$\angle DPF=\alpha-\theta$，

故 $$\cos\beta=PE=PD\cos\theta=\cos\varphi\cos\theta \qquad (1)$$

$$\cos\gamma=PF=PD\cos(\alpha-\theta)=\cos\varphi\cos(\alpha-\theta) \qquad (2)$$

再从(1)(2)中消去θ，即可求出$\cos\varphi$.

解：辅助图形如上所述.

由(2)－(1)×$\cos\alpha$得：

$\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta=\cos\varphi\sin\alpha\sin\theta$,

因$\sin\alpha=0$，上式两边除$\sin\alpha$得：

$$\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha}=\cos\varphi\sin\theta \qquad (3)$$

由$(1)^2+(3)^2$得：

$$\cos^2\varphi=\frac{\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\alpha}$$

故 $MD=\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}$

$$=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\alpha}.$$

注：消去θ时，不对(1)、(3)两边除$\cos\varphi$，是为了使计算也适用于$\cos\varphi=0$的情况.

D可能落在$\angle BPC$以外，于是$\angle DPF=\alpha+\theta$或$\theta-\alpha$，但计算的结果还是和原答案一致.

习 题 五

1. 以任意平面截直三面角，连结截口三角形的垂心与三面角之顶点的直线垂直于截面.

2. 一个三面角各面角都是60°，在一条棱上自顶点截取3cm长的线段，求这线段的另一端向所对的面所作垂线的长.

3. 如果一个三面角的两个面角相等，则两个面角所对的二面角也相等.

4. 已知三面角S—ABC中，$\angle ASB=\angle ASC=45°$，$\angle BSC=60°$，试证$\angle BSC$所对的二面角是直二面角.

5. 三面角的三个二面角的平分面，相交于同一条直线.

6．在三面角 $V—ABC$ 中，$\angle AVB=90°$，$\angle AVC+\angle BVC=180°$，且 $VB=VA$．求证：

$$AB^2+BC^2+CA^2=2(VA^2+VB^2+VC^2).$$

7．在三面角 $V-ABC$ 中，过顶点 V 在三面角内引任意直线 VD，则 $\angle DVB+\angle DVC<\angle AVB+\angle AVC$.

8．在三面角 $S—ABC$ 中，$\angle ASB=\angle ASC$，求证：

(1) 棱 SA 在面 BSC 上的射影 SD 平分 $\angle BSC$；

(2) $\angle ASD<\angle ASB$.

9．求证：三面角的三个二面角的和大于 $180°$ 而小于 $540°$.

小　　结

1．这一章讲的是空间两直线，直线与平面，两平面的位置关系．其中两个元素（这里元素是指直线或平面）的位置关系是这一章的主要内容．而两个元素的公共点的个数，是区分两个元素位置关系为平行、相交等几个大的类别的本质特点．抓住公共点的个数，本章中的许多基础概念的定义就好理解了．

但是公共点的个数还不能定量地刻画两个元素间的具体位置关系．例如同是具有一个公共点的一条直线和一个平面之间的具体位置关系，还有直线对平面的不同倾斜程度的无数多种情形．因此为了定量地区分这无数多种倾斜的不同情况，就必须引进一个几何量——直线与平面所成的角——来定量地刻画直线与平面相交的具体位置关系．同样，同是直线与平面平行（都是没有公共点），还有无数多种相离远近的不同情况，因此为了定量地刻画直线和平面相离远近的程度，就必须进行另一个几何量——平行直线与平面间的距离——来定量地刻画平行直线与平面的具体位置关系．

总之，我们是用两个元素的公共点的个数来定性地把两个

元素的位置关系分成平行、相交等几个大的类别．再用两个元素间所成的角（当它们相交时）和两个元素间的距离（当它们平行时）来定量地刻画两个元素的具体位置关系．而异面直线间的位置关系则是两者兼而有之，一方面我们用异面直线所成的角来定量刻画这两条直线的互相交错的程度，另一方面用异面直线间的距离来定量地说明这两条直线相离的远近程度．这样一来，我们就比较容易理解本章中一些基础概念了．

2．立体几何中“作”辅助图形的目的：一方面是为了使题目中的已知元素与题目中要计算的未知元素（或者在证明题中是求证中的元素）之间的位置关系（或数量关系看得更清楚或者把两者联系起来，以便应用有关的立体几何或平面几何的定理来解决题目要求解决的问题．例如本章§1中的例2，题目要求证明的是四条线段成比例，而这四个线段又不在一个平面上，同时它们与已知平面 P 的位置关系也从图上看不清楚，故必须作辅助图形，使这四条线段互相联系起来，同时又使这四条线段与平面 P 的位置关系能看清楚．具体作法在§1例2中已经详细写出，这里就不重复了．另一方面，作辅助图形的目的是为了创造应用立体几何或平面几何的某些定理所差的条件．例如本章§5中的例1中的辅助线就是这样作出的．具体内容例题中都叙述得很清楚，这里就不重复了．

3．在立体几何中，培养空间想象能力是提高解题能力的重要一环，而空间想象能力的培养与空间图形的画法密切相关．本来是空间的立体图形，而我们在画图时又只能画在一个平面上，这就有矛盾，这就使我们在画图时必须“歪曲”某些图形（例如：有时把直角画成锐角，有时又画成钝角等）．这就给初学立体几何的人带来了困难，为了克服这个困难，读者可以先练习对照实物或模型来看立体图形，对照图上的每一线段或面

代表实物上的哪一条线段或面；哪些部分与实物是一致的，哪些部分是“歪曲”了的；多对照看几次，并且自己动手画一画，看与图上画的是否一致，找出错误的地方，这是第一阶段.

第二阶段，若题目有附图，可以练习自己先只看题目，不看题目给的附图，先独立把图画出来，再与题目给的附图加以比较，看看自己画的图与题目给的附图有什么不同的地方，自己错在那里或自己哪些地方没有题目给的附图画得好，体会作者为什么要这样画.

第三阶段可练习对同一个题目自己用各种不同的方式或从各种不同的角度来画图，然后把这些不同方式的图加以比较，看哪些图更直观一些(即立体感强些)；哪些图的画法使图中各元素的具体位置关系(或数量关系)更清楚些；哪些图的画法使题目的计算或证明更方便些等等.

例如：图 6.24 中的两个图：(a)中，两条异面直线都与平面 α 平行，从图中就看得不明显. 而(b)中，由于加了两个分别过直线 a，b 且平行于平面 α 的两个平面后，上述位置关系就看得很清楚了.

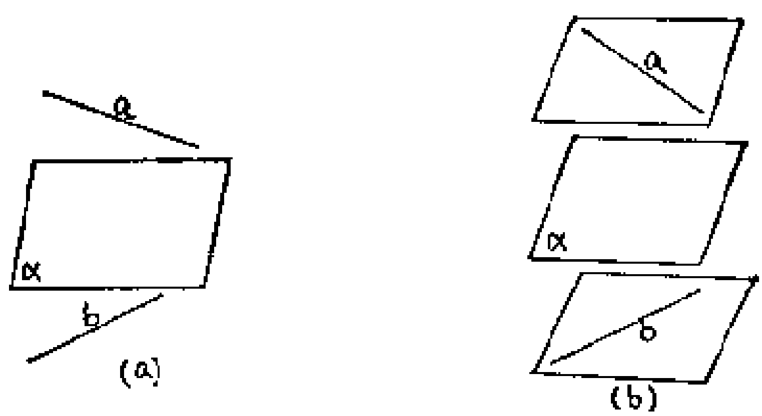


图 6.24

再例如图 6.25 中的两个图. 题目：已知四面体的五条棱等于1，问第六条棱多长时四面体的体积最大. 为此，必须把

四面体的体积 V 用第六条棱长 x 来表示．按图 6.25(a) 中那样画，把含有 x 的 $\triangle BCD$ 作三棱锥的底面，这时 O 是 $\triangle ABC$ 的

(a)　　　　(b)

图 6.25

外心，计算高 AO 就比较简单，按图 6.25(b) 中那样画，把不含 x 的 $\triangle BCD$ 作为三棱锥的底面，这时 O 就不是 $\triangle BCD$ 的外心了，要计算高 AO 就比较复杂了．

我们在看立体几何中所画的图形时，不要局限在图形的平面上，而要借助画在平面上的图形想象出图形所表示的立体的各种可能的实际形状，再根据题目给定的条件，确定是哪一种立体形状符合题意．例如图 6.26 中的两条平行线段 AB 和 CD，

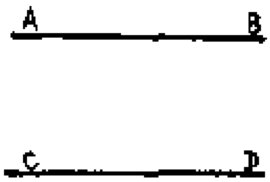


图 6.26

在立体几何中它们可以代表两个平行平面；也可以代表平行的一直线与一个平面；也可以代表两个平行的圆或任何平行的两个平面图形；……等等．它们到底代表什么实际图形，就不能全凭直觉把纸上所画的图形，老老实实地认作纸面上所画的平面图形．而应该参照题目的意思，借助纸上所画的平面图形来想象出它所代表的空间图形的实际情况，才不致发生误解．当然我们在画空间图形

时，总是尽可能避免发生误解的情况，用各种"衬托"的画法（例如：虚实衬托法，粗细衬托法、阴影衬托法，明暗衬托法等等），来增强图形的立体感，减少发生误解的可能性.

第七章　多　面　体

§1.　多　面　体

一、多面体的定义

由若干个平面多边形所围成的封闭的几何体叫做多面体．这些多边形叫做多面体的面；两相邻面的公共边叫做多面体的棱；相交于一点的各面所组成的多面角的顶点叫做多面体的顶点；不在同一个面上的两个顶点的连线叫做多面体的对角线；用一个平面截多面体所截得的平面图形叫做多面体的截面．

二、多面体的分类

多面体可分为凸多面体和凹多面体两种．如果多面体都在任一面所在平面的同侧，则这个多面体叫做凸多面体；非凸多面体叫做凹多面体．、本书中只研究凸多面体．

三、欧拉定理

对任何凸多面体的顶点数 V，棱数 E，面数 F 有下面的关系式：$V+F=2+E$．（证明见本章§1中的例1．）

四、正多面体

1．**正多面体的定义**　各面为全等的正多边形，且各多面角

都全等的多面体叫做正多面体.

2. 正多面体的分类 正多面体只有下述五种(证明见本章§1中的例2)：

1) 正四面体：每个面都是正三角形；

2) 正六面体：每个面都是正方形，即正方体；

3) 正八面体：每个面都是正三角形；

4) 正十二面体：每个面都是正五边形；

5) 正二十面体：每个面都是正三角形.

例 1 证明凸多面体的欧拉定理.

证：我们可以把多面体看成如下这样形成的：开始时以一个多边形为它的一个面，然后把其他的面(也是多边形)附加于此面之上，附加时保持公共棱完全重合，最后一个面附加上去以后就形成一个封闭的多面体.

下面我们就来具体研究一个一个地附加面到前面的面上时，总的棱数，面数，顶点数间关系将如何变化.

最初仅有一个面时，因为多边形的边数和顶点数相同，故有 $E=V$；将第二个面附加在第一个面上去时，这时由于两个面有一公共棱、两公共顶点，故棱数之和比顶点数之和要多增加一个，所以有二面时 $E=V+1$；其次，将第三个面附加上去时，有两种情况：或者与前两面有二公共棱及三公共顶点，或者与前两面有一公共棱及二公共顶点，不论哪一种情况，棱的增加数比顶点的增加数多一个. 所以，当有三面时 $E=V+2$；……，这样继续将面一个一个地附加上去，每次附加一面，棱数的增加数比顶点的增加数总是多一个（因为每附加一面时，公共棱比公共顶点要少增加一个，而一个多边形的顶点数和边数是相等的）. 因而，当附加到倒数第二个面时，$E=V+(F-1)$. 最后，将第 F 个面附加上去形成一个封闭的多面体，

此时，棱数及顶点数都没有增加（因与原有的前 $F-1$ 个面的棱与顶点重合），而面数却增加了一个，故对一个多面体来说：$E=V+F-2$，即 $E+2=V+F$.

例 2 证明正多面体只有五种.

证：先证明正多面体的面的边数 n 和多面角的面角数 m 之间必须满足不等式：$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}>\frac{1}{2}$.

正 n 边形每一个内角等于 $\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180°$，由第六章定理 19 得：$m\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180°<360°$，即 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}$

$$\tag{1}$$

但正多面角的面数 m 及正多边形的边数至少等于 3，从而由不等式(1)知：它们不可能都大于 3．因为若 $m\geqslant 4$，$n\geqslant 4$ 则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{2}$！因此 m 和 n 至少有一个等于 3．

设 $m=3$，不等式(1)变成 $\frac{1}{3}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}$，从而 $n<6$. 因此，$m=3$ 时，$n=3$、4、5.

由于在(1)式中，m 和 n 的地位可互换，故当 $n=3$ 时，$m=3$、4、5.

因此，正多边面体，只能有下列五种：

1）$m=3$，$n=3$，此时是正四面体；

2）$m=3$，$n=4$，此时是正六面体即立方体；

3）$m=4$，$n=3$，此时是正八面体；

4）$m=3$，$n=5$，此时是正十二面体；

5）$m=5$，$n=3$，此时是正二十面体.

例 3 证明不能有这样的多面体存在，它有奇数个面，而它的每一面都有奇数条边.

证：设有一多面体，它的面数 F 为奇数，各面的边数 e_1、e_2、…、e_F 都是奇数．将各面的边数加在一起，就得到棱数的 2 倍，即

$e_1+e_2+\cdots\cdots+e_F=2E$，这是由于每一条棱曾作为两个相邻面的边，计算过两次．

但此式的左边是奇数个奇数的和，因而是奇数；而右边是偶数．这个矛盾说明具有题设条件的多面体是不可能存在的．

例 4　一棱长为 $3a$ 的正八面体 $ABCDEF$．设 P 为 AB 的 $1:2$ 的内分点，Q 为 AC 的 $2:1$ 的内分点，R 为 AE 的 $2:1$ 的内分点．

(1) 证明 AD 平行于平面 PQR；

(2) 此平面截正八面体的截面是几边形？求其各边之边长．

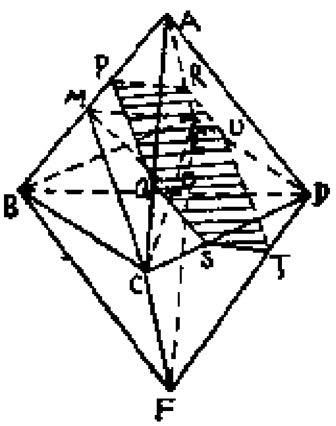


图 7.1

分析：因 R、Q 都是线段的 $2:1$ 的内分点，我们想使 P 点也成为 $2:1$ 的内分点，从而好应用平行截割定理得到一些平行线．为此取 AB 的中点 M，则 P 是 AM 的 $2:1$ 内分点．故 $PR\parallel ME$，$PQ\parallel MC\Rightarrow$平面 $PQR\parallel$平面 MCE．这时只要证 $AD\parallel$平面 MCE 就行了．这点是容易办到的．

为确定截面的形状，要想法利用 $AD\parallel$截面．设截面与棱 CD、DE、DF、分别交于 S、U、T．则 $QS\parallel AD$，$RU\parallel AD$，$PT\parallel AD$．$\Rightarrow$ S、U、T 分别是 CD、ED、DF 的 $2:1$ 的内分点．故截面是一个六边形 $PQSTUR$．

(1) 证明：辅助图形如上述，

因　$AP:PM=AQ:QC=AR:RE=2:1$.

故　$PQ \parallel MC$，$PR \parallel ME$.

　　$\Rightarrow$平面 $PQR \parallel$ 平面 MEC.

设　O 是 BD 与 CE 的交点，

则　$AM=MB$，$BO=OD$

　　$\Rightarrow MO \parallel AD$，而 MO 在平面 MCE 上.

因此，$AD \parallel$ 平面 MCE，$\Rightarrow AD \parallel$ 平面 PQR.

(2) 截面是一个六边形 $PQSTUR$. 下面分别计算它的各边长.

$$QS=RU=\frac{1}{3}AD=\frac{3a}{3}=a;$$

$$PQ=PR=ST=UT=\sqrt{PA^2+AQ^2-2PA\cdot PQ\cos 60^\circ}$$

$$=\sqrt{a^2+(2a)^2-2\cdot a\cdot 2a\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{3}a.$$

例 5　一正四面体的棱长为 a，通过底面两棱的中点作一平面，此平面平行于与此两棱有公共顶点的侧棱，求截面面积.

解：首先，要确定截面的形状. 如图 7.2 所示，截面 $DEFG$ 平行于 BS，故 $DG \parallel SB$，$EF \parallel SB$. 因此，G 是 SA 中点，F 是 SC 中点. 且 $EF=DG=\frac{1}{2}SB$，又 $DG \parallel EF$. 故 $DEFG$ 是平行四边形.

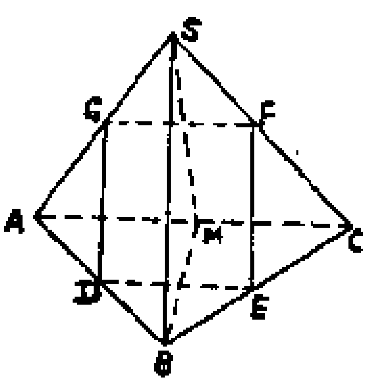


图 7.2

我们再来研究 $\angle GDE$ 的大小. 为此，取 AC 中点 M，连 SM，BM. 则 $SM \perp AC$，$BM \perp AC$

　　$\Rightarrow AC \perp$ 平面 SMB，又 $DE \parallel AC$，

$\Rightarrow DE \perp$ 平面 SMB.

$\Rightarrow DE \perp SB$，但 $SB /\!/ DG$.

$\Rightarrow DE \perp DG$ 即 $\angle GDE = 90°$.

故截面 $DEFG$ 是一个矩形．而 $DG = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2}$，$DE = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$．故截面 $DEFG$ 是一个正方形，其面积为：$\frac{a^2}{4}$.

注：例 4 、例 5 两题说明了解决多面体有关截面问题的方法，其关键问题是先利用第六章中空间两元素的相关位置的有关定理(特别是有关平行与垂直关系的定理)确定截面的形状与位置，再在各相应平面上利用平面几何知识来计算一些线段的长或角的大小．最后解决题目所要解决的问题（例 4 是计算各边的长；例 5 是计算面积)．

习 题 一

1．在立方体有公共顶点的棱上分别取 A、B、C，则 $\triangle ABC$ 是锐角三角形．

2．设 $VABC$ 为对棱互相垂直之四面体，求证：

(1) $VA^2 + BC^2 = VC^2 + AB^2$；

(2) $VB^2 + AC^2 = VA^2 + BC^2$.

3．$ABCD$ 为任意四面体，棱 AB，BC，CD，AD，CA，BD 之中点分别为 E，F，G，H，K，L．求证：

$$4(EG^2 + KL^2 + HF^2) = AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 + BD^2.$$

4．试证：正四面体的二面角等于边成 $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ 的三角形中最小锐角的两倍.

5．连结一个空间图形上两点的直线，如果把这个空间图形绕这条直线旋转一个大于 0°而小于 360° 的角，使这个空间图

形自身重合，这样的直线叫做空间图形的轴。

一个立方体有十三条不同的轴，它们分为三类，说明这些轴的位置，求出每一类轴的旋转角．假定立方体的棱长为1，计算这十三条轴的长之算术平均值．

6．求证：任意多面体所有面角之和等于 $(V-2)\cdot 360°$，其中 V 代表这个多面体的顶点数．

7．设有一直线 PQR 与立方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的三棱 AA'，$B'C'$，DC 交于 P，Q，R．求证：如果 Q 为 $B'C'$ 的中点，则 PR 之长为所有与此三棱都相交的线段中最小者．

8．试证：没有一个多面体的棱数等于7．

9．过立方体一顶点的平面，与立方体相交所得的截面不能是正五边形．试证之．

10．正六面体（即立方体）的棱长为 a，以它的各面中心为顶点作一正八面体，求它们的表面积之比．

§2. 棱　　柱

一、棱柱的定义

一个多面体有两个面平行，且不在这两个面上的棱互相平行，这个多面体叫做棱柱．其中，平行的两个面叫做棱柱的底面；其他各面叫做棱柱的侧面；不在底面上的各棱叫做棱柱的侧棱；两个底面间的距离叫做棱柱的高；过不相邻侧棱的截面叫做棱柱的对角面；垂直于侧棱的截面叫做棱柱的直截面；具有 n 条侧棱的棱柱叫做 n 棱柱．

二、棱柱的性质

1．斜棱柱　侧棱不垂直于底面的棱柱叫做斜棱柱．它具

有下列性质，这些性质也是所有棱柱都有的性质.

1）侧面为平行四边形；

2）平行于底面的截面为与底面全等的多边形；

3）侧面积($S_{侧}$)等于直截面周长($C_{直}$)和一条侧棱之长(l)的乘积．即 $S_{侧}=C_{直}\cdot l$；

4）体积等于底面积和高的乘积，即 $V_{棱柱}=S_{底}\cdot H$；或直截面面积和一条侧棱之长的乘积，即 $V_{棱柱}=S_{直}\cdot l$.

2．**直棱柱**　侧棱垂直于底面的棱柱叫做直棱柱.

3．**正棱柱**　底面为正多边形的直棱柱叫做正棱柱．它具有下列特殊的性质：

1）上下底面中心的连线垂直于两底面；

2）侧面是全等的矩形；

3）具有外接球(即所有顶点在同一球面上).

4．**平行六面体**　底面是平行四边形的棱柱叫做平行六面体.

5．**长方体**　底面为矩形的直棱柱叫做长方体．它具有下列特殊的性质：

1）对角线的平方等于长、宽、高的平方和；

2）体积等于长、宽、高的乘积.

6．**正方体**　长、宽、高都相等的长方体叫做正方体，又叫立方体.

例 1　已知一个正六棱柱的高等于它的底面内切圆的直径，它的体积等于一个正八面体的体积．求这两个多面体的表面积之比．注意到这两个多面体有相同的面数，且其中一个是正多面体，另一个是正棱柱，对此，你有何评论?

分析：题目要求的是两个多面体的表面积之比．这类问题，一般选定一些参数，分别用参数表示出两个多面体的表面积，

再利用题设条件找出这些参数间的关系，最后消去参数计算出它们的比值. 具体计算如下：

解：设正棱柱底面边长为 a，则底面内切圆的直径为$\sqrt{3}a$，依题意它的高为$\sqrt{3}a$，则

$$V_{六棱柱}=\left(6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)\cdot\sqrt{3}a=\frac{9}{2}a^3,$$

$$S_{六棱柱}=2\left(6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)+6(a\cdot\sqrt{3}a)=9\sqrt{3}a^2.$$

设正八面体的棱长为 b，则

$$V_{正八面体}=2\cdot\frac{1}{3}b^2\sqrt{b^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}b^3,$$

$$S_{正八面体}=8\times\frac{\sqrt{3}}{4}b^2=2\sqrt{3}b^2.$$

依题意得：$\frac{9}{2}a^3=\frac{\sqrt{2}}{3}b^3$，

$\therefore\quad \frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

故它们的表面积之比为$\frac{9\sqrt{3}a^2}{2\sqrt{3}b^2}=\frac{9}{2}\times\frac{2}{9}=1$，即它们的表面积相等.

注：正多面体只有五种，与正四面体面数相同的正棱柱没有；与正方体面数相同的正棱柱，如果高等于底面内切圆的直径则仍为正方体，故它们的表面积相等；而本题又证明了正八而体也有类似性质；因此，我们可以“猜想”：“正十二面体与正十棱柱的体积相等，如果正十棱柱的高等于底面内切圆的直径，则它们的表面积相等”；“正二十面体与正十八棱柱的体积相等，如果棱柱的高等于底面内切圆的直径，则它们的表面积相等”.（这两个“猜想”都是正确的，不过计算比较复杂，这里就不给出证明了.）

例 2 如图，棱长为 8 的立方体被平面 ABC 所截，其中 $BB'=6$，$CC'=6$．试求：

(1) $\angle BAC$ 的余弦值；

(2) $\triangle ABC$ 的面积；

(3) 求立方体被平面 ABC 所截得的截口多边形的周长．

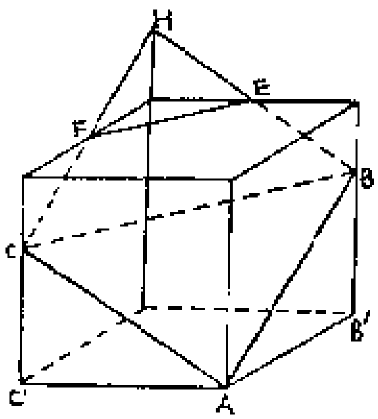


图 7.3

分析：这是一个多面体的截面的定位、定性、定量的问题，其关键在于确定截面的位置和形状．由于对称性，截面 ABC 与 A 点所在侧棱相对的侧棱的交点 H 到上底面的距离应等于 $6-2=4$．故先在此侧棱延长线上取一点 H，使 H 到上底面的距离等于 4，连 HB 交上底面于 E，连 HC 交上底面于 F，连 EF，则五边形 $ABEFC$ 为所求截面．

解：(1) $\cos\angle BAC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\,AB\cdot AC}$，但 $AB=AC=\sqrt{8^2+6^2}=10$，$BC=8\sqrt{2}$．

$$\therefore\quad \cos\angle BAC=\frac{10^2+10^2-64\times 2}{2\times 10\times 10}=0.36.$$

(2) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}\times 10\times 10\times\sqrt{1-0.36^2}=8\sqrt{34}$．

(3) 设平面 ABC 与立方体上底面截于 EF，延长 BE 与 CF 交于 H，则 H 必在立方体的棱的延长线上．

$\because$ $EF\parallel BC$，$\therefore$ $\triangle FHE\backsim\triangle HBC$．

又 $\because$ $AB \parallel CH$，$AC \parallel BH$，$\therefore$ $ABHC$ 是平行四边形. 由 $\triangle ABC \cong \triangle HBC$ 得：$FE : BC = HE : HB$，
又由 $\triangle HGE \backsim \triangle MBE$，$\therefore$ $HE : BE = GE : ME = GH : MB$. 但 $MB = 8 - 6 = 2$，$GH = 6 - 2 = 4$，

$$\therefore \quad EF = \frac{2}{3}BC = \frac{16}{3}\sqrt{2}.$$

$$BE = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}AB = \frac{10}{3},$$

$$\therefore \quad \text{截口 } ABEFC \text{ 的周长} = 2\times 10 + 2\times\frac{10}{3} + \frac{16}{3}\sqrt{2}$$

$$= \frac{16}{3}(5+\sqrt{2}).$$

例 3 已知长方体的一个顶点到它的对角线的距离为 a，

(1) 试问此长方体的长、宽、高为何关系时，它的对角线的长最小？

(2) 当此长方体对角线的长取最小值时，试问长、宽、高分别为何值时，它的体积最大？最大值是多少？

解：(1) 如图 7.4 所示，设长方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 的长，宽，高为 x，y，z. 顶点 B 到对角线的距离为 $BM = a$. 这时

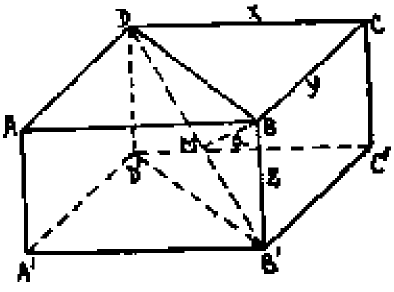


图 7.4

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = L^2 \\ a \cdot L = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot z \end{cases}$$

(这里 L 表示它的对角线长.)

从上述两式中消去 x，y 得：

$$x^2 + y^2 = L^2 - z^2 = \frac{a^2 \cdot L^2}{z^2} \text{即}$$

$$t^2 - L^2 t + L^2 a^2 = 0 \quad (\text{这里 } t = z^2). \tag{1}$$

因 t、L、a 均为实数，故实系数一元二次方程(1)有实根.

故 $\triangle = L^4 - 4L^2a^2 \geqslant 0$

即 $L^2 \geqslant 4a^2$，但 $L>0$，$a>0$.

故 $L \geqslant 2a$. 等号在 $\triangle = 0$ 时成立，此时，

$$t = -\frac{-L^2}{2} \text{ 即 } z^2 = \frac{4a^2}{2}$$

故 $z = \sqrt{2}a$，$x^2 + y^2 = L^2 - z^2 = 2a^2$.

因此，当长，宽，高满足关系式：$x^2 + y^2 = z^2 = 2a^2$ 时，长方体的对角线 L 达到最小值 $2a$.

(2) 设长方体的体积为 V，则当 $x^2 + y^2 = z^2 = 2a^2$ 时，

$$V = xyz = \sqrt{2}axy \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}a(x^2 + y^2) = \sqrt{2}a^3.$$

即 $V \leqslant \sqrt{2}a^3$，等号在 $x = y$ 时成立. 此时，$z = \sqrt{2}a$，$x = y = a$. 故当长方体对角线取最小值时，长、宽、高分别为：$\sqrt{2}a$、a、a 时，它的体积达到最大值 $\sqrt{2}a^3$.

注：此题所采用的求极值的方法，是立体几何中常用的求极值方法，其实质是：先将要求极值的量（本题中是长方体对角线的长 L 和它的体积 V），用适当选取的参数（本题中是长方体的长，宽，高，即 x，y，z）表示出来. 再利用题设条件列出参数之间及参数与要求极值的量之间的方程（本题中是 $x^2 + y^2 + z^2 = L^2$，$a \cdot L = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot z$，$V = \sqrt{2}axy$ 等等）. 从这些方程中消去一部分参数，把要求极值的量用另一些参数的函数式表示或方程表示（本题中是 $V = \sqrt{2}axy$ 及方程(1)）. 最后利用代数或三角的方法求这些函数的极值（本题中(1)是利用 $\triangle \geqslant 0$ 求极值；(2)是利用几何平均值小于等于算术平均值求极值）.

例 4　三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 的所有棱均为 a，在顶点 A 上的面角都为 α，求 BC_1 及 AC 之间的角的大小和棱柱的全面

积.

解：(1) 如图 7.5 所示，要求两异面直线 BC_1 及 AC 所成的角，即 $\angle BC_1A_1$（因 $AC \parallel A_1C_1$）. 可在 $\triangle A_1C_1B$ 中应用余弦定理来计算.

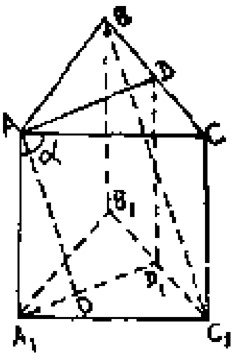


图 7.5

$$A_1C_1 = a,$$

$$A_1B = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2\cos\alpha}$$

$$= 2a\sin\frac{\alpha}{2}.$$

为计算 BC_1，我们来研究 $\angle BCC_1$ 的大小. 取 BC 中点 D，取 B_1C_1 中点 D_1，连 AD 与 A_1D_1，则 $AD \perp BC$，$A_1D_1 \perp B_1C_1$，$DD_1 \parallel CC_1$. 自 A 作 AO 垂直于平面 $A_1B_1C_1$，O 为垂足. 因 $\angle AA_1B_1 = \angle AA_1C_1 = 180° - \alpha$，故 O 点在 $\angle B_1A_1C_1$ 的平分线 A_1D_1 上. 由 $B_1C_1 \perp A_1O$ 得：$AA_1 \perp B_1C_1$（三垂线定理）. 而 $AA_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$，故 $CC_1 \perp B_1C_1$，即 $\angle B_1C_1C = 90°$. 因此：$BC_1 = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$.

$$\cos\angle BC_1A_1 = \frac{a^2 + (\sqrt{2}a)^2 - \left(2a\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2 \cdot a \cdot \sqrt{2}a}$$

$$= \frac{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\cos\alpha + 1}{2\sqrt{2}}$$

故 BC_1 与 AC 所成的角为

$$\arccos\left[\frac{\sqrt{2}}{4}(2\cos\alpha + 1)\right].$$

(2) 为求棱柱的全面积，只要将各面面积相加即可.

$$S_{棱柱全} = 2S_{\triangle ABC} + 2S_{AA_1CC_1} + S_{BCC_1B_1}$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 2a^2\sin\alpha + a^2$$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1+2\sin\alpha\right)a^2.$

例 5 直平行六面体的底面为一具有锐角 2β 的菱形，其高为 h，平行六面体的一条对角线与一个侧面所成的角为 φ. 求它的体积.

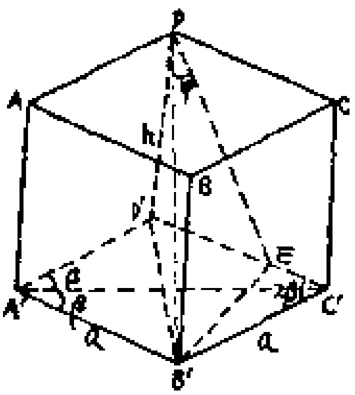


图 7.6

分析：因棱柱的体积等于底面积乘高， 即 $V=(a^2\sin 2\beta)\cdot h$（其中 a 表示底面菱形的边长），故只要计算 a^2 就行了. 为此，我们来利用题目条件，建立关于 a,β,φ,h 的关系式. 自平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 对角线 $B'D$ 的一端点 B' 作 $B'E\perp C'D'$ 于 E. 因平面 $CC'D'D\perp$ 平面 $A'B'C'D'$，故 $B'E\perp$ 平面 $CC'D'D$. 所以 $B'E\perp DE$. 但 $B'E=a\sin 2\beta$,

$DB'=\sqrt{h^2+(2a\sin\beta)^2}$.

由 $Rt\triangle DB'E$ 得：
$$\frac{a\sin 2\beta}{\sqrt{h^2+4a^2\sin^2\beta}}=\sin\varphi \qquad (1)$$

从(1)中容易计算出 a^2.

解：辅助图形如上述.

由(1)式得：

$$a^2\sin^2 2\beta=\sin^2\varphi(h^2+4a^2\sin^2\beta)$$
$$4a^2\sin^2\beta\cos^2\beta=\sin^2\varphi\cdot h^2+4a^2\sin^2\varphi\sin^2\beta$$

$$\therefore\quad a^2=\frac{h^2\cdot\sin^2\varphi}{4\sin^2\beta(\cos^2\beta-\sin^2\varphi)}$$

故 $V=(a^2\sin 2\beta)\cdot h$

$$=\frac{h^2\sin^2\varphi\cdot h\sin 2\beta}{4\sin^2\beta(\cos^2\beta-\sin^2\varphi)}$$

$$=\frac{h^3\sin^2\varphi\cos\beta}{2\sin\beta\cos(\beta-\varphi)\cos(\beta+\varphi)}.$$

习 题 二

1. 将图中正方形依着虚线折成一个正四棱柱面，因此对角线 $ABCDE$ 将成为一条折线绕在这个柱面上. 试求这条折线相邻各线段间的夹角.

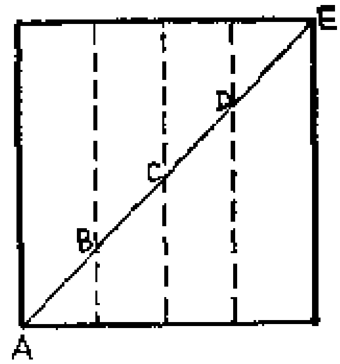


图 7.7

2. 设 OA, OB, OC 为平行六面体之三棱，OP 为它的一条对角线. 求证：$OP^2+OA^2+OB^2+OC^2=PA^2+PB^2+PC^2$.

3. 一块正四棱柱形的糕，它的顶面和四个侧面附有均匀的糖粉，它的高是它的底面边长的 $\frac{5}{16}$. 试把这块糕分成九块，使每块的重量和糖粉都一样，这九块中的一块是正四棱柱的形状且只有顶面有糖粉，计算其高与底面边长的比. 对所有九块用草图以明确说明.

4. 正方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 的棱长为 6 cm, P、Q、R 分别表示在 AB、BB'、BC 上，且 $BP=BQ=BR=2\ cm$, 过这三点作一平面截去锥体 $B—PQR$, 试求正方体剩部分的全面积.

5. 长方体的体积为 48 cm^3, 三棱成等差数列，且其和为 12 cm, 求两对角线的交角 α.

6. 直三棱柱的底面是一个周长为 $2p$ 的等腰三角形，底角为 α，过底面一边和相对之顶点作一截面，截面三角形底角为 β，试求此柱体的体积.

7. 已知直三棱柱的底面积为 t，三个侧面积分别为 m，n，p，求它的体积.

8. 平行六面体的各面都是彼此全等的菱形且有一顶点处的三个面角都是锐角，已知菱形边长为 a，锐角为 α，试求平行六面体的体积.

9. 在正三棱柱中，经过下底的一边和上底的相对顶点作与底面成 α 角的平面，求所作截面三角形之顶角.

10. 已知长方体三个对角面的面积分别为 m，n，p，求它的长，宽，高.

§3. 棱　　锥

一、棱锥的定义

一个面是多边形，其他面是具有公共顶点的三角形的多面体叫做棱锥．其中，多边形的面叫做棱锥的底面；其他的面叫做棱锥的侧面；不在底面上的棱叫做棱锥的侧棱；侧棱的公共点叫做棱锥的顶点；顶点到底面的距离叫做棱锥的高；具有 n 条侧棱的棱锥叫做 n 棱锥.

二、棱锥的性质

(1) 平行于底面的截面和底面是相似多边形，其相似比等于顶点到它们的距离之比；

(2) 棱锥的体积等于底面积和高的乘积的三分之一，即

$$V_{锥}=\frac{1}{3}S_{底}\cdot H.$$

三、正棱锥

底面为正多边形，且高通过底面中心的棱锥叫做正棱锥。它具有下列特殊的性质：

(1) 各侧面为全等的等腰三角形；

(2) 侧棱、高、底面外接圆半径组成以侧棱为斜边的直角三角形；

(3) 侧棱、斜高、底面边长一半组成以侧棱为斜边的直角三角形；

(4) 斜高、高、底面边心距（或内切圆半径）组成以斜高为斜边的直角三角形；

(5) 侧面积等于底面周长($C_{底}$)和斜高 ($H_{斜}$) 的乘积的一半．即 $S_{侧}=\frac{1}{2}\cdot C_{底}\cdot H_{斜}$.

例 1 四面体中有一个三面角$V—ABC$是直三面角，求证：$S_V^2=S_A^2+S_B^2+S_C^2$，其中S_V、S_A、S_B、S_C分别表示顶点V、A、B、C所对的面之面积.

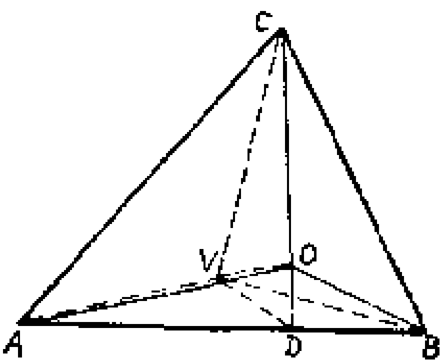


图 7.8

证法一：为了计算方便，设 $VA=a$，$VB=b$，$VC=c$. 自C作$CD\perp AB$于D，连VD.

$\because$ $CV\perp$平面VAB，$\therefore$ $VD\perp AB$.

$$S_C=\frac{1}{2}VD\cdot AB=\frac{1}{2}ab,\quad \therefore\quad VD=\frac{ab}{AB}.$$

$$S_V^2=\left(\frac{1}{2}AB\cdot CD\right)^2=\frac{1}{4}\cdot AB^2\cdot CD^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$$

$$\cdot(VC^2+VD^2)=\frac{1}{4}(a^2+b^2)\left(c^2+\frac{a^2b^2}{AB^2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\cdot(a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2)=\left(\frac{1}{2}ac\right)^2+\left(\frac{1}{2}bc\right)^2+\left(\frac{1}{2}ab\right)^2$$

$$=S_A^2+S_B^2+S_C^2.$$

证法二：自 V 作 $VO\perp CD$ 于 O，则 $VO\perp$ 平面 ABC 且 O 是 $\triangle ABC$ 之垂心.

$$\therefore\quad S_C^2=\left(\frac{1}{2}AB\cdot VD\right)^2=\frac{1}{4}AB^2\cdot(DO\cdot DC)$$

$$=\left(\frac{1}{2}AB\cdot DO\right)\left(\frac{1}{2}AB\cdot DC\right)$$

即 $S_C^2=S_{\triangle AOB}\cdot S_V$，同理可证：$S_B^2=S_{\triangle AOC}\cdot S_V$，

$S_A^2=S_{\triangle BOC}\cdot S_V$，这三式相加得：

$$S_C^2+S_B^2+S_A^2=S_V(S_{\triangle AOB}+S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC})=S_V^2.$$

证法三：$S_V^2=\left(\frac{1}{2}BA\cdot CD\right)^2=\frac{1}{4}AB^2(VD^2+VC^2)$

$$=\frac{1}{4}AB^2\cdot VD^2+\frac{1}{4}(VA^2+VB^2)\cdot VC^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}AB\cdot VD\right)^2+\left(\frac{1}{2}VA\cdot VC\right)^2$$

$$+\left(\frac{1}{2}VB\cdot VC\right)^2=S_C^2+S_B^2+S_A^2.$$

证法四：再设 $AB=x$，$BC=y$，$AC=z$. 则

$$x^2=a^2+b^2,\quad y^2=b^2+c^2,\quad z^2=a^2+c^2.$$

$$S_V^2=\frac{1}{4}x^2\cdot y^2\sin^2\angle ABC=\frac{1}{4}x^2y^2(1-\cos^2\angle ABC)$$

$$=\frac{1}{4}x^2y^2\left[1-\left(\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}x^2y^2-\frac{1}{16}(x^2+y^2-z^2)^2$$

$$=\frac{1}{4}(a^2+b^2)(b^2+c^2)-\frac{1}{16}$$

$$(a^2+b^2+b^2+c^2-a^2-c^2)^2$$

$$=\frac{1}{4}(a^2+b^2)(b^2+c^2)-\frac{1}{16}(2b^2)^2$$

$$=\frac{1}{4}(a^2b^2+b^4+b^2c^2+a^2c^2)-\frac{1}{4}b^4$$

$$=\frac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$$

$$=S_A^2+S_B^2+S_C^2.$$

证法五：$S_V^2=\left[\frac{1}{2}(x+y+z)\right]\left[\frac{1}{2}(x+y+z)-x\right]$

$$\left[\frac{1}{2}(x+y+z)-y\right]\left[\frac{1}{2}(x+y+z)-z\right]$$

$$=\frac{1}{16}[(x+y+z)(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z)]$$

$$=\frac{1}{16}[(x+y)^2-z^2][z^2-(x-y)^2]$$

$$=\frac{1}{16}(x^2+y^2+2xy-z^2)(z^2-x^2-y^2+2xy)$$

$$=\frac{1}{16}(a^2+b^2+b^2+c^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}$$

$$-a^2-c^2)(a^2+c^2-a^2-b^2-b^2-c^2+$$

$$2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)})$$

$$=\frac{1}{16}[2b^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}]$$

$$[2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}-2b^2]$$

$$=\frac{1}{4}[(a^2+b^2)(b^2+c^2)-b^4]$$

$$=\frac{1}{4}(b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2)$$

$$=S_A^2+S_B^2+S_C^2.$$

此题类似于平面几何中的勾股定理，而其中的证法二是平面几何一般教科书中证明勾股定理所用方法的直接推广．常常有许多立体几何题的解题方法是从平面几何方法推广而得出来的．

上述几种证法都是通过计算，应用代数式或三角式的恒等变形而得所需要的结果．有许多几何题（包括立体几何题和平面几何题），应用代数或三角方法来解比较方便些，有时应用解析几何方法解比较易于思考些．下面用解析几何方法来证明此题：

证法六：取 V 为原点，VA 为 X 轴，VB 为 Y 轴，VC 为 Z 轴．则平面 ABC 的方程为：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$．此时，$VO$ 是原点 (O,O,O) 到此平面的距离．故

$$VO^2=\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}}\right)^2$$

$$=\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},$$

但 $V_{VABC}=\frac{1}{6}abc=\frac{1}{3}S_V\cdot VO.$

故 $S_V^2=\frac{a^2b^2c^2}{4VO^2}=\frac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$$=S_A^2+S_B^2+S_C^2.$$

例 2 有一个三棱锥 $V-ABC$，G 为底面 $\triangle ABC$ 的重心．求证：

$$3(VA^2+VB^2+VC^2)-(AB^2+BC^2+CA^2)=9VG^2,$$

分析：我们可以把三棱锥的六条棱VA、VB、VC、AB、BC、CA看成已知数，把VG看成未知数，我们想办法把VG用六条棱来表示．这时本题就变成如何计算出VG了．这当然要把VG放在某一个三角形中去，因此想到连AG延长交BC于D，连VD．在$\triangle VAG$中应用余弦定理得：

$$VG^2=VA^2+AG^2-2VA\cdot AG\cos\angle VAG$$

$$=VA^2+AG^2-2VA\cdot AG\frac{VA^2+AD^2-VD^2}{2VA\cdot AD}$$

但　$AG=\frac{2}{3}AD$代入上式得：

$$VG^2=VA^2+\frac{4}{9}AD^2-\frac{2}{3}(VA^2+AD^2-VD^2)$$

$=\frac{2}{3}VD^2+\frac{1}{3}VA^2-\frac{2}{9}AD^2$．因此，只要把$VD$和$AD$用六条棱来表示就够了．但$VD$是$\triangle VBC$的中线，$AD$是$\triangle ABC$的中线，这一点很容易由三角形中线长公式来实现．

证明：延长AG交BC于D，连VD则$BD=DC$．在$\triangle VAG$中应用余弦定理得：

$$VG^2=VA^2+AG^2-2VA\cdot AG\cos\angle VAG$$

$$=VA^2+AG^2-2VA\cdot AG\frac{VA^2+AD^2-VD^2}{2VA\cdot AD}$$

但　$AG=\frac{2}{3}AD$，代入上式得：

$$VG^2=VA^2+\frac{4}{9}AD^2-\frac{2}{3}(VA^2+AD^2-VD^2)$$

$$=\frac{2}{3}VD^2+\frac{1}{3}VA^2-\frac{2}{9}AD^2.$$

∵　VD是$\triangle VBC$中BC边上的中线，AD是$\triangle ABC$中BC边上中线，由三角形中线长公式得：

$$VD^2=\frac{1}{4}(2VB^2+2VC^2-BC^2);$$

$$AD^2=\frac{1}{4}(2AB^2+2AC^2-BC^2).$$

代入上式得：

$$VG^2=\frac{1}{6}(2VB^2+2VC^2-BC^2)+\frac{1}{3}VA^2$$

$$-\frac{1}{18}(2AB^2+2AC^2-BC^2)$$

$$=\frac{1}{3}(VA^2+VB^2+VC^2)-\frac{1}{9}(AB^2+BC^2+CA^2)$$

即 $\quad 9VG^2=3(VA^2+VB^2+VC^2)-(AB^2+BC^2+CA^2)$.

例 3 在空间四边形 $ABCD$ 中，求证：

$$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2>AC^2+BD^2.$$

分析： 因为题目要求证明的是线段之间的不等量关系，而这些线段又组成许多三角形，这使我们想到利用"三角形中任意两边之和大于第三边"这个平面几何定理．如何具体运用这个定理呢？考虑到要求证明的是线段的平方之间的不等量关系．这又使我们联想到三角形中线长公式也是线段的平方之间的关系，因此作辅助线：取 BD 中点 E，连 AE 和 EC．由 $AC<AE+EC$ 两边平方得：

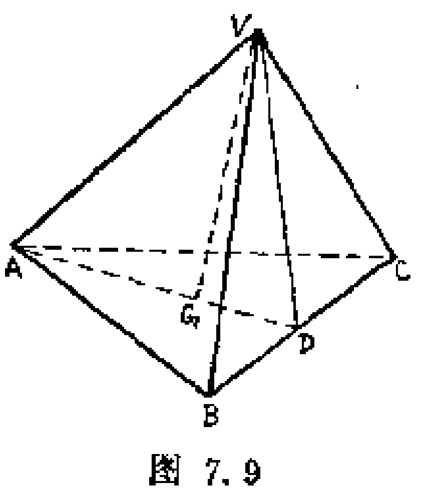


图 7.9

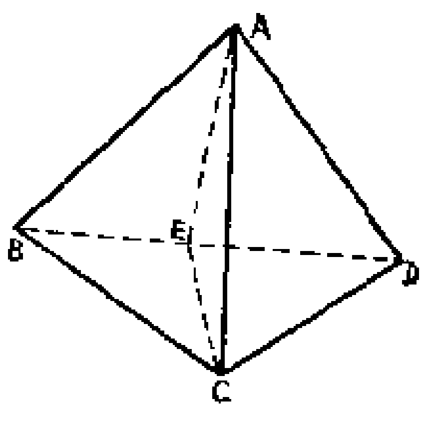


图 7.10

$AC^2<AE^2+EC^2+2\ AE\cdot EC\leqslant 2(AE^2+EC^2)$ 再利用三角形中线长公式就可以达到目的.

证明：取 BD 中点 E，连 AE、EC. 则

$AC<AE+EC$ 两边平方后得：

$AC^2<AE^2+EC^2+2\ AE\cdot EC$

但 $2\ AE\cdot EC\leqslant AE^2+EC^2$

$\therefore\quad AC^2<2(AE^2+EC^2)$.

$\because\quad AE$、EC 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 中 BD 边上中线.

$\therefore\quad AE^2=\frac{1}{4}(2\ AB^2+2\ AD^2-BD^2)$；

$EC^2=\frac{1}{4}(2\ BC^2+2\ CD^2-BD^2)$. 代入上式得：

$AC^2<\frac{1}{2}(2\ AB^2+2\ AD^2-BD^2+2\ BC^2$

$+2\ CD^2-BD^2)$ 即

$AC^2+BD^2<AB^2+BC^2+AD^2+CD^2$.

例 4 四面体 $ABCD$ 的体积等于 5，通过棱 AD 和 BC 的中点作平面，交棱 CD 于 M 点，这时线段 DM 的长与线段 MC 的长之比等于 $\frac{2}{3}$，设从顶点 A 到所给平面的距离等于 1，求所给平面截四面体所得的截面面积.

分析：我们先来研究截面的形状与位置. 因 $\frac{DK}{KA}\neq\frac{DM}{MC}$ 故直线 KM 与 AC 必相交，设其交点为 O. 连 ON，设交 BA 于 L. 这时容易证明：

$LA:LB=2:3$.

再利用体积 5 列一个关于截面

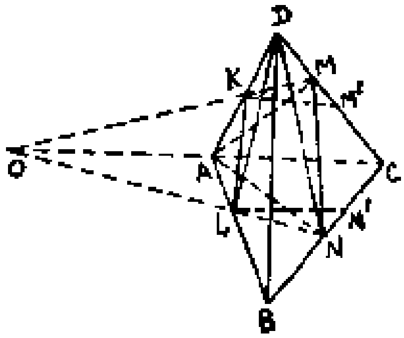


图 7.11

面积 x 的方程，问题就解决了．

解法一：先证 $LA:LB=2:3$．为此，过 K 作 $KM'\parallel AC$ 交 DC 于 M'，过 L 作 $LN'\parallel AC$ 交 BC 于 N'．则由 $\triangle MKM'\backsim\triangle MOC$ 得，$KM':OC=MM':MC=(\frac{3}{5}DC-\frac{DC}{2}):\frac{3}{5}CD=1:6$，

故 $AC=2KM'=2\times\frac{1}{6}OC=\frac{1}{3}OC$．

由 $\triangle NLN'\backsim\triangle NOC$ 得：$LN':OC=NN':NC$．

$$(1)$$

设 $AL:LB=K$，则 $LN':AC=BN':BC=BL:AB=1:(1+K)$ 但 $LN'=\frac{AC}{1+K}$，$OC=3AC$，$BN'=\frac{BC}{1+K}$，

$$NN'=\frac{1}{2}BC-\frac{BC}{1+K}=\frac{1-K}{2(1+K)}BC$$

代入(1)得：$\frac{AC}{1+K}:3AC=\frac{1-K}{2(1+K)}BC:\frac{1}{2}BC$

即 $\frac{1}{3(1+K)}=\frac{1-K}{1+K}$，解这个方程得：

$K=\frac{2}{3}$ 即 $AL:LB=2:3$．

用 h_A、h_B、h_C、h_D 表示从点 A、B、C、D 到截面 KNM 的距离．则 $h_A=h_D$，$h_B=h_C$（这里利用了一个命题“如果线段 AB 和平面 α 交于 H，则 $\frac{|AH|}{|BH|}=\frac{h_A}{h_B}$”．请读者自己证明）$\frac{h_D}{h_C}=\frac{2}{3}$．但 $\frac{|AL|}{|LB|}=\frac{h_A}{h_B}=\frac{h_D}{h_C}=\frac{2}{3}$．

又因 $|AL|=\frac{2}{5}|AB|$，且从 N 到 AB 的距离等于从 C

到 AB 的距离的一半， 所以 $S_{\triangle ANL}=\frac{1}{5}S_{\triangle ABC}$.

因从 K 到平面 ABC 的距离等于从 D 到平面 ABC 距离的一半， 所以 $V_{KANL}=\frac{1}{10}V_{DABC}=\frac{1}{2}$.

另一方面，$V_{KANL}=V_{AKLN}=\frac{1}{3}h_A\cdot S_{\triangle KLN}=\frac{1}{3}S_{\triangle KLN}$.

所以 $S_{\triangle KLN}=\frac{3}{2}$，$S_{KLNM}=3$.

解法二：也引用一个辅助命题："两四面体有一个三面角全等，则它们的体积之比等于这个三面角所在的三条棱的乘积之比"(证明见第七章习题三第 6 题解答).

应用这个命题得：设 $S_{KLNM}=x$，则

$$V_{BLDN}=5\cdot\frac{BN\cdot BD\cdot BL}{BC\cdot BD\cdot BA}=5\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{2}.$$

$$V_{CNAM}=5\cdot\frac{CN\cdot CA\cdot CM}{CB\cdot CA\cdot CD}$$

$$=5\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{2}.$$

$$V_{DKLNM}=\frac{1}{3}\cdot1\cdot x=\frac{x}{3}$$

$$V_{AKLNM}=\frac{1}{3}\cdot1\cdot x=\frac{x}{3}$$

故 $5=\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$.

解这个方程得：$S_{KLNM}=x=3$.

例 5 正四棱锥的侧面之间的二面角等于 α，而底面边长为 a，求它的体积.

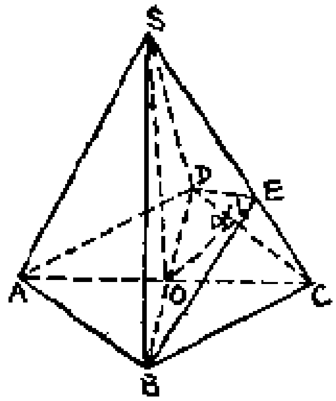


图 7.12

分析：设 S—$ABCD$ 是已知棱锥，为在图上表示出侧面间的夹角 α，过 B 作 $BE\perp SC$，连 DE 则 $DE\perp SC$，

故　$\angle BED=\alpha$.

再从 S 作 $SO\perp$ 平面 $ABCD$，O 为垂足，则 O 是正方形 $ABCD$ 的中心.

要求棱锥的体积，关键是求出它的高 SO. 为此，引进参数 $\varphi=\angle OSC$，下面的任务就在于找出 φ 与 α 之间的关系. 这一点容易从 $\triangle OEC$ 的边角关系求得.

解：辅助图形如上所述.

因　$\angle OSC=\angle EOC=\varphi$.

由 $Rt\triangle EOC$ 得：

$$\cos\varphi=\frac{|OE|}{|OC|}=\frac{|OE|}{|OB|}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

但　$|OE|<|OC|=|OB|$，故 $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}<1$，由此可知：

$$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right).$$

故　$$V_{SABCD}=\frac{1}{3}|OS|\cdot a^2=\frac{a^2}{3}|OC|\operatorname{ctg}\varphi$$

$$=\frac{a^2}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}a\times\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\cos\alpha}}.$$

注：本题这种运用参数解题的方法在立体几何中用得很多．这种方法的实质是：当已知量和要求的量之间的关系不明显时，我们常常选用其他的未知数（或叫参数），通过题设条件和图形上的位置关系，建立已知量、参数和要求量之间的一些关系式，再从这些关系式中消去参数，从而得到已知量和要求量之间的关系式，再从这个关系式求出要求的量；或把要求的量用参数表示，再把参数用已知量表示，最后用代入法解决问题．

习 题 三

1．设 O 为四面体 $ABCD$ 内之点，连 AO，BO，CO，DO，分别延长交对面于 A'，B'，C'，D'．求证：

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=1.$$

2．在三棱锥 $S—ABC$ 之底面 ABC 上任取一点 O，过 O 作平行于 SA，SB，SC 之平行直线 OA'，OB'，OC' 与面 SBC，SCA，SAB 分别交于 A'，B'，C'．

求证：$\dfrac{OA'}{SA}+\dfrac{OB'}{SB}+\dfrac{OC'}{SC}=1$．

3．如果一个三直角的四面体（即 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90°$）的六条棱的长度之和为 S，试确定并证明该四面体的最大体积．

4．在四面体 $ABCD$ 中，在顶点 A 之三个面角都是直角，设 A 到底面所引垂线为 $AP=p$，$AB=a$，$AC=b$，$AD=c$，求证：$\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$．

5．在四面体 $V—ABC$ 中，有一组对棱 VA 和 BC 都等于 a 且互相垂直，它们都垂直于过它们中点的直线，已知这连

线为b，求四面体的体积.

6. 任一平面截三棱锥$V—ABC$的截面是$A'B'C'$. 求证：三棱锥$V—A'B'C'$和$V—ABC$的体积之比等于$VA'\cdot VB'\cdot VC'$与$VA\cdot VB\cdot VC$之比.

7. 四面体的五条棱长为1，当第六条棱长为多少时，它的体积最大且求最大体积.

8. 正三棱锥底面边长为a，经过某一边向对面作一垂直平面，这平面把侧棱分成$m:n$两段，求锥体的全面积.

9. 正三棱锥被其底面一顶点和两侧棱中点所确定的平面所截，已知截面和锥体的一侧面垂直，求锥体的侧面积和底面积之比.

10. 三棱锥$S—ABC$的底面是等腰三角形，其中$AB=AC=a$，$\angle CAB=\alpha$，一个侧面$SBC\perp$底面ABC，另两个侧面与底面所成的角为φ，求这棱锥的侧面积.

11. 正三棱锥底面边长为a，两相邻侧面所成的角为α，求它的体积和侧面积.

12. 不在同一平面上的二直线X及Y，在X上取一定线段AB，在Y上也取一定线段CD. 求证：不论线段AB，CD在X，Y上怎样移动，四面体$ABCD$之体积保持不变.

13. 有不在一平面上的三条平行线X, Y, Z. 在直线X上取一定长线段AB，在Y上取一点C，在Z上取一点D. 求证：不论C、D在Y，Z上如何移动，四面体$ABCD$的体积保持不变.

14. 在四面体中，一二面角的二等分平面将其分为两部分. 求证：这两部分体积之比等于组成此二面角之两侧面面积之比.

15. 正六棱锥的底面积是它的全面积S的四分之一. 已

知这棱锥的高为 H，试用 H 表示它的全面积 S.

16. 在正四棱锥中，底面与侧面所成的角为 α，过底的一边作一截面与底成 β 角，已知底面边长为 a，求截面面积.

17. 过四面体 $ABCD$ 相对两棱 AB、CD 的中点 E 和 F 作平面 $EHFG$，H、G 是此截面与棱 BD、AC 之交点. 求证：平面 $EHGF$ 把 $ABCD$ 分成等积的两部分.

18. 在正三棱锥 $V—ABC$ 中，$\angle AVB=\angle BVC=\angle CVA=90^\circ$，$VH$ 是它的高，求证：$VC^2=3VH^2$.

§4. 棱　　台

一、棱台的定义

用平行于底面的平面截棱锥，夹在截面和底面间的部分叫做棱台. 其中，截面和棱锥的底面分别叫做棱台的上底面和下底面；其他各面叫做棱台的侧面；不在底面上的棱叫棱台的侧棱；两底面间的距离叫做棱台的高；过不相邻侧棱的截面叫做棱台的对角面；具有 n 条侧棱的棱台叫做 n 棱台.

二、棱台的性质

(1) 侧棱所在直线共点；

(2) 平行于底面的截面和底面是相似多边形；

(3) 体积等于上底面积、下底面积和上下底面面积的比例中项之和与高的乘积的三分之一.

即 $V_{台}=\dfrac{H}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}\cdot S_{下}})$.

三、正棱台

从正棱锥中截出的棱台叫做正棱台. 它具有下列特殊的性

质：

(1) 各侧面是全等的等腰梯形；

(2) 两底面中心的连线垂直于两底；

(3) 侧棱、高、上下底面外接圆半径组成一个直角梯形；

(4) 斜高、高、上下底面边心距(或内切圆半径)组成一个直角梯形；

(5) 侧棱、斜高、上下底面边长的一半组成一个直角梯形.

例 1 正四棱台两底边长分别为 a 和 b，如果过它的上底的一边和下底与这边相对的一边作一截面. 试证：截面分四棱台所成两部分体积之比为一常数.

分析：本题要证明的是棱台两部分体积之比为常数，面已知的常量是 a 和 b. 只要我们想办法计算出这两部分的体积之比，而其表达式中只含有 a 和 b(即与高 H 无关)就行了.

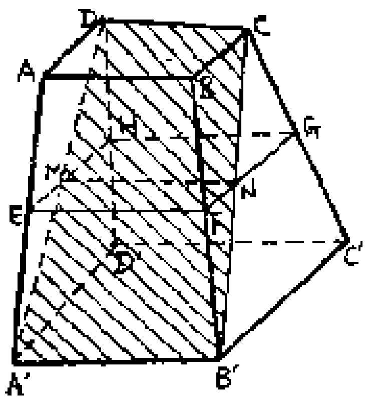


图 7.13

为了计算这两部分体积之比，它们不是柱、锥、台、球，这使我们想到利用"多面体和旋转体的统一体积公式"(见附录) 来计算其体积.

证：设棱台的高为 H，作正四棱台 $ABCD—A'B'C'D'$ 的中截面 $EFGH$ 与截面交于 MN. 则前一部分的体积

$$V_1=\frac{H}{6}\left(0+a^2+4\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\right)$$

$$=\frac{Ha(2a+b)}{6};$$

后一部分的体积

$$V_2=\frac{H}{6}\left(O+b^2+4\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\right)$$

$$=\frac{Hb(2b+a)}{6}.$$

故两部分体积之比 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{a(2a+b)}{b(2b+a)}$，它与 H 无关，因此是一个常数.

例 2 正四棱台 $ABCD—A'B'C'D'$ 中，下底面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形，上底面 $A'B'C'D'$ 是边长为 1 的正方形，侧棱的长为 3，点 M 是棱 $C'D'$ 的中点，过点 M 引直线，与直线 AA' 和 BC 在点 P 和 Q 相交，求线段 PQ 的长.

分析：我们先研究 PQ 的位置，连 PD' 延长交平面 $ABCD$ 于 S，连 PM 延长交平面 $ABCD$ 于 Q（因 Q 应在 PM 上，同时 Q 点又在 BC 上故在平面 $ABCD$ 上，故 Q 是 PM 与平面 $ABCD$ 的交点）. 同理 A 点应是 PA' 与平面 $ABCD$ 的交点. 这时，因 $QS \parallel C'D'$，故 $\triangle PD'M \backsim \triangle PSQ$，且其相似比为

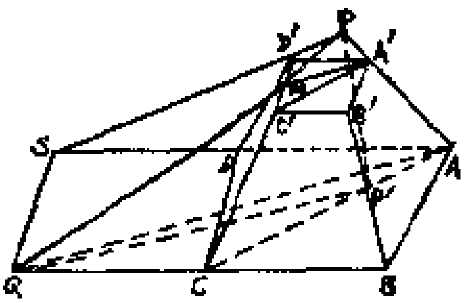


图 7.14

$$\frac{|D'M|}{|QS|}=\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{6}.$$ 因此 $|AQ|=6|A'M|=3\sqrt{5}$（因 $\triangle PMA' \backsim \triangle PQA$，其相似比也是 $\frac{1}{6}$）. 然后在 $\triangle PQA$ 中应用平面几何知识可以算出线段 PQ 的长.

解：辅助图形如上述.

由 $\triangle AQB$ 得：$|QB|=\sqrt{AQ^2-AB^2}=\sqrt{45-9}=6$,

$\therefore \quad |QC| = |QB| - |BC| = 6 - 3 = 3.$

为计算 PQ 的长，自 P 作 $PP' \perp CA$ 于 P'.

在 $\triangle AQC$ 中由余弦定理得：

$$\cos \angle QAP' = \frac{(3\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{2})^2 - 3^2}{2(3\sqrt{5})(3\sqrt{2})}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{10}},$$

由 $\triangle PAP'$ 得：

$$|P'A| = \sqrt{PA^2 - PP'^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{5}AA'\right)^2 - \left[\frac{6}{5}\sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2}\right]^2}$$

$$= \frac{6\sqrt{2}}{5},$$

在 $\triangle QAP'$ 中由余弦定理得：

$$|QP'| = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 + \left(\frac{6}{5}\sqrt{2}\right)^2 2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{6}{5}\sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}}$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt{73}.$$

最后，由 $\triangle QPP'$ 得：

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\sqrt{73}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3}{5}\sqrt{101}.$$

例 3 在三棱台 $ABC—A'B'C'$ 中，P、M、N、分别是底棱 AB、BC、CA 的中点，求证：$A'M$、$B'N$、$C'P$ 三线共点.

分析：连 PM，因 P、M 分别是 AB、BC 中点，故 PM

$/\!/ AC$，但 $AC /\!/ A'C'$，所以$PM /\!/ A'C'$，P、M、A'、C' 在同一平面内，故 $A'M$ 和$C'P$ 是梯形 $PMC'A'$ 的两条对角线故相交，设其交点为 O.

同理可以证明：$A'M$ 与 $B'N$ 也相交，设其交点为 O'. 因此只要证明 O 和 O' 重合就行了. 这一点可以利用同一线的定比分点是唯一的来证明.

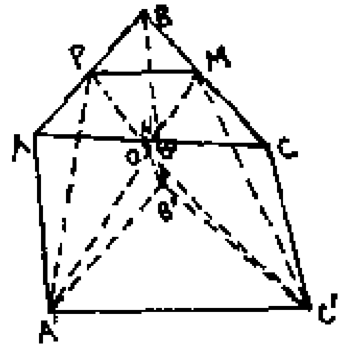


图 7.15

证：辅助图形如上述.

$$PM /\!/ A'C' \Rightarrow \triangle POM \backsim \triangle A'OC'.$$

$$\Rightarrow PO : OC' = MO : OA' = PM : A'C'$$

$$= \frac{1}{2}AC : A'C' = AC : 2A'C'$$

即 $MO : OA' = \frac{1}{2}K$ （这里$K = \frac{AC}{A'C'}$ 是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比）

同理：由 $\triangle MO'N \backsim \triangle A'O'B'$ 得：

$$MO' : O'A' = \frac{1}{2}K.$$

故 $MO = \frac{K}{K+2}MA'$，$MO' = \frac{K}{K+2}MA'$.

因此，$MO = MO'$，且 O、O' 都是 MA' 的内分点，所以 O 与 O' 重合. 即三线 $A'M$、$B'N$、$C'P$ 相交于同一点 O.

例 4 已知正四棱台的高为 h，侧棱与底面的夹角为 α，棱台的对角线与底面夹角为 β，求棱台的侧面积.

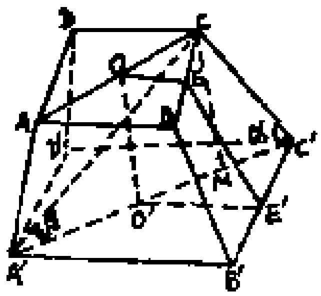


图 7.16

分析：因两个已知角 α 和 β 都在对角面上，故先在正四棱台 $ABCD—A'B'C'D'$ 的对角面 $ACC'A'$ 上研究已知量与未知量间的关系．为此，设它的上下底面边长分别为 x 和 y，再利用梯形中有关线段与角之间的关系建立关于 x 和 y 的两个方程，求出 x 和 y 以后，棱台的侧面积就好计算了．

解：过 C 作 $CM\perp A'C'$ 于 M，连 CA'，则

$\angle CC'M=\alpha$，$\angle CA'M=\beta$ （因平面 $ACC'A'\perp$平面 $A'B'C'D'$，故 $CM\perp$平面 $A'B'C'D'$）

在 $Rt\triangle CMC'$ 中，$MC=h$，$MC'=O'C'-OC$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x),$$

故 $$\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)\operatorname{tg}\alpha=h \qquad (1)$$

在 $Rt\triangle CMA'$ 中，

$$MC=h,\quad A'M=A'O'+OC=\frac{\sqrt{2}}{2}(y+x),$$

故 $$\frac{\sqrt{2}}{2}(y+x)\operatorname{tg}\alpha=h \qquad (2)$$

联立解方程(1)、(2)得：

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}h(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha);$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}h(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta).$$

而 $$EE'=\sqrt{OO'^2+(O'E'-OE)^2}=\sqrt{h^2+\left(\frac{y-x}{2}\right)^2}$$

$$= h\sqrt{1+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2\alpha},$$

故 $S_{棱台侧面积} = 4\,S_{BB'C'C} = 4\cdot\frac{1}{2}(BC+B'C')\cdot EE'$

$$= 2(x+y)\cdot h\sqrt{1+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2\alpha}$$

$$= 2\sqrt{2}\,h^2\mathrm{ctg}\,\beta\sqrt{1+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2\alpha}$$

$$= 2\,h^2\,\mathrm{ctg}\,\beta\sqrt{2+\mathrm{ctg}^2\alpha}.$$

例 5 在正四棱台内有一个内接棱锥，它以棱台的上底面为底面，棱台的下底面中心为顶点．已知棱台上下两个底面的边长分别为 b、$a(a>b)$，并且这棱台的侧面积与这一内接棱锥的侧面积相等，求这棱台的高．

分析： 设已知棱台为 $ABCD—A'B'C'D'$，它的内接正四棱锥为 $O—A'B'C'D'$．为求棱台的高，我们作一辅助面——梯形 $OO'E'E$（其中两底 OE 与 $O'E'$ 是正四棱台的上下底面的边心距，一腰是它的高 OO'，另一腰是它的斜高．）

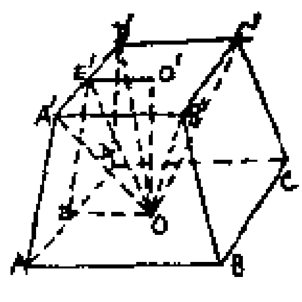


图 7.17

设棱台的高为 x，利用题设条件："这棱台的侧面积与这一内接棱锥的侧面积相等"列一个关于 x 的方程．然后，解这个方程求出 x．

解： 辅助图形如上述．

因棱锥斜高 $OE'=\sqrt{x^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$，

棱台的斜高 $E'E=\sqrt{x^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$．则依题意得：

$$4\cdot\frac{1}{2}b\cdot\sqrt{x^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}=4\cdot\frac{1}{2}(a+b)\sqrt{x^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

即：$b^2(4x^2+b^2)=(a+b)^2\cdot 4x^2+(a^2-b^2)^2$.

解这个方程得：

$$x=\frac{\sqrt{(2b^2-a^2)(a+2b)a}}{2(a+2b)}.$$

（当 $b<a<\sqrt{2}b$ 时，本题有解.）

注：例 4 、例 5 说明立体几何中的一种常用的解题方法——列方程、解方程的方法. 这个方法的实质是：设题目要求的量或与题目要求的量有关的一些量，一般来说，这些量是一些线段或角（例 4 中设的未知量是与题目要求的量棱台的侧面积有关的一些量棱台的上、下底面边长为 x、y； 例 5 是设题目要求的量棱台的高为 x），为 x，y，……等等.

再利用题设条件或图上各线段与角之间的位置关系（例 5 是前者，例 4 是后者）列一个或几个方程组成的方程组.

最后解这个得到的这个方程或方程组，从而求出题目要求计算的量.

习　题　四

1. 正三棱台侧面和下底面所成的二面角为 60°，棱台下底面的边长为 a，全面积为 S，求上底面的边长.

2. 在三棱台 $A'B'C'-ABC$ 中， 过 A'、B、C 和过 A、B、C' 分别作截面. 求证：三棱锥 $A'-BB'C$ 和三棱锥 $A-BB'C'$ 体积相等.

3. 设有一四棱台，如果一个矩形的两边长分别等于它的上、下底面边长 a、b. 就称这个矩形为它的中介矩形，用 $S_{中介}$ 表示其面积.

现有四个人一致认为这棱台的体积等于高H乘以某一个面的面积，但他们对所乘的面积有下面四种主张：(1) 中截面；(2) 上、下底面的面积的平均值；(3) 上、下底面积和中截面积的平均值；(4) 上、下底面积和中介矩形面积的平均值. 试用数学式表示上述四种主张，确定哪一种算法是对的. 哪一种算法是错的，并给以证明.

4. 正四棱台底面边长为a和b，且上、下底面积之和等于四个侧面面积之和，求这棱台的高.

5. 正三棱台两底面的边长分别是5厘米和8厘米，高是3厘米，经过下底面的一边和这边所对的上底面的顶点作一截面，求：(1) 截面的面积；(2) 截面和下底面所成的二面角.

6. 正四棱台上、下两底面的边长为b和$a(a<b)$，侧棱和底面成45°的角. 求：(1) 侧棱的长；(2) 斜高；(3) 对角面面积.

7. 求证：截三棱柱(即用不平行的两平面截三棱柱所得的多面体) 的体积等于它的直截面面积与三侧棱的算术平均值的乘积.

8. 两个四面体有一条公共棱且沿这条棱的二面角也公共，求证它们的体积之比等于夹这二面角的两面的面积乘积之比.

9. 一个正六棱台的侧棱和两底面边长分别为l和a、b $(a>b)$，求它的体积.

10. 在两个底面边长的比是1∶2的三棱台中，过上底面一边作一个平面平行于这边的对棱，求这个平面截三棱台所成两部分的体积之比.

11. 棱台两底面边长的比等于5∶2，求它的中截面分它的体积成怎样的比?

12. 在正四棱台中，其侧棱等于较大底面的边长a，且和

底面所成的角为 α，较大底面的中心是另一个棱锥的顶点，这个棱锥的底面是正棱台的较小底面．求这个棱台的体积 V_1 与这个棱锥的体积 V_2 之差．

第八章　旋　转　体

§1. 圆　　柱

一、旋转体的定义

平面曲线(包括直线)绕曲线所在平面上一条直线旋转一周所形成的空间曲面叫做旋转面，这个封闭的旋转面所围成的几何体叫做旋转体．绕着旋转的这条直线叫做旋转体的轴．

二、圆柱的定义

矩形以其一边为轴旋转一周所形成的几何体叫做圆柱．其中，旋转轴为圆柱的轴；矩形中和轴垂直的边旋转而成的圆面叫做圆柱的底面；矩形中和轴平行的边旋转而成的曲面叫做圆柱的侧面；侧面上和轴平行的线段叫做圆柱的母线；过轴的截面叫做圆柱的轴截面；两底面之间的距离叫做圆柱的高．

三、圆柱的性质

(1) 平行于底面的截面和底面是半径相等的圆面；

(2) 轴截面是以底面圆的直径和母线为边的矩形；

(3) 侧面积等于底面周长和母线的乘积．即 $S_{侧}=2\pi R\cdot l$ (这里 l 表示母线长)；

(4) 体积等于底面积和高的乘积，即 $V=\pi R^2\cdot H$；

(5) 侧面展开图为长等于底面周长，高等于母线的矩形.

例 1 某自来水厂设计一座圆柱形自来水塔，它的全面积为 150π 平方米，要使这座水塔有最大的容量，试问应怎样定出水塔的高和底面圆的半径，并计算出最大容量.

分析：设水塔的高为 y 米，底面半径为 x 米，依题意得：$2\pi x(y+x)=150\pi$，$V=\pi x^2 y$，因 π 是常量，故要求 V 的最大值就是要求 x^2y 的最大值，因而我们想把 x^2y 变成几个正数的乘积的形式，而满足这几个正数的和为常数这个条件. 因条件$xy+x^2=75$，而 $xy\cdot x^2$ 不是题目要求其极值的量，而把条件看成 $xy+xy+2x^2=150$ 则这三个正数的乘积与 V 的平方只相差一个常数因子，故得如下解法.

解：由分析知：$xy+xy+2x^2=150$. 对三个正数 xy，xy，$2x^2$ 应用"算术平均值不小于几何平均值"得：

$$50=\frac{xy+xy+2x^2}{3}\geqslant\sqrt[3]{(xy)(xy)(2x^2)}=\sqrt[3]{\frac{2}{\pi^2}\cdot(\pi x^2y)^2}$$

$=\sqrt[3]{\frac{2}{\pi^2}V^2}$. 由此得：$V\leqslant\sqrt{50^3\cdot\frac{\pi^2}{2}}=250\pi$，等号在 $xy=2x^2$ 即 $y=2x$ 时成立. 把 $y=2x$ 代入 $2xy+2x^2=150$ 得：$6x^2=150$ $\therefore$ $x=5$，$y=10$. 故当 $x=5$，$y=10$ 时 V 达到最大值 250π. 即水塔的高为 10 米，底面半径为 5 米时，水塔的容量最大，其最大容量为 250π 米^3.

注：立体几何中求极值的问题通常采用选定几个量（有时是线段，有时是角）作为参数(本题中是选定水塔的高 y 和底面半径 x 为参数)，然后利用题设条件得出一个(或几个)等式（本题中是利用面积 150π 列出等式 $2\pi xy+2\pi x^2=150\pi$），把题目要求极值的量（本题中是水塔的体积 V）表示成参数的代数式(或函数式)，然后利用代数方法或三角方法求此代数式（或函

数式）的极值（本例中是利用“算术平均值大于几何平均值”的方法求极值）.

例 2 如果一个等边圆柱的底面半径是 R，上底圆周上一点和下底圆周上一点的连线和底面的夹角为 α，求这条直线和圆柱轴间的距离.

分析： 题目要求的是两条直线 AC 和 OO' 间的距离（如图 8.1 所示）. 故必须先在图上找出这两条直线的公垂线. 为此，过 A、C 两点所在的母线 AB 与 CD 作一平面（因 $AB \parallel CD$），再从上、下底面圆心 O、O' 分别作 $OM \perp AD$ 于 M，$O'N \perp BC$ 于 N，连 MN 与 AC 交于 E 点，取 OO' 中点 F，则容易证明 EF 即 AC 与 OO' 的公垂线.

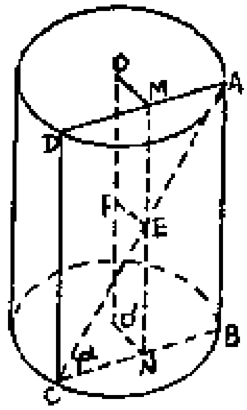


图 8.1

解： 辅助图形如上述.

先证 EF 是 AC 与 OO' 的公垂线，因 $DM=MA=CN=BN$，故 E 是 AC 的中点（因$\triangle MAE \cong \triangle ECN$），故 E 也是 MN 的中点. 因此 $EF \parallel OM$，而 $OM \perp$ 平面 $ABCD$，故 $EF \perp$ 平面 $ABCD$，所以 $EF \perp AC$，$EF \perp MN$，而 $OO' \parallel MN$ 所以 $EF \perp OO'$，故 EF 是 AC 和 OO' 的公垂线.

在 $Rt\triangle ECN$ 中，$CN = NE \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{AB}{2}\operatorname{ctg}\alpha = R\operatorname{ctg}\alpha$.

由 $Rt\triangle O'NB$ 得：

$$O'N = \sqrt{O'B^2 - BN^2} = \sqrt{O'B^2 - CN^2} = \sqrt{R^2 - R^2\operatorname{ctg}\alpha}$$
$$= R\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

故 $EF = O'N = R\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

例 3 有一张矩形的纸，矩形的对角线与它的一边所组成的角为 α. 把矩形卷成圆柱体的筒子，第一次是以角 α 所在的

边长为母线卷，第二次是以角 α 的对边为母线卷．求这两次所卷成的圆柱体的体积之比．

分析：题目要求的是两个圆柱体体积之比，我们可以选用一些参数(本题可选矩形的两边为参数)．把这两个圆柱的体积用参数的代数式表示．然后根据图上参数与已知数 a 的位置关系列出一些等式，最后利用这些等式消去两个圆柱体体积之比中含有的参数就行了．

解：设矩形中 α 角的对边是 a，另一边是 b． 则依题意：

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a}{b}$；第一次卷成的圆柱体的体积为：$\pi\left(\dfrac{a}{2\pi}\right)^2\cdot b=\dfrac{a^2b}{4\pi}$；

第二次卷成的圆柱体的体积为：$\pi\left(\dfrac{b}{2\pi}\right)^2\cdot a=\dfrac{b^2a}{4\pi}$．

故这两个圆柱体的体积之比为：

$$\frac{\dfrac{a^2b}{4\pi}}{\dfrac{b^2a}{4\pi}}=\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha.$$

例 4 直线 l 切圆柱于 A，且与圆柱底面成 α 角．已知圆柱下底圆心 O 与 A 的距离为 a，底面半径为 b，求 O 到直线 l 的距离．

分析：如图 8.2，作圆柱的母线 AB，则 AB 垂直于底面．设 l 与下底面交于 C，连 BC，则 BC 为底面圆的切线，且 $\angle ACB=\alpha$．过 O 作 $OD\perp l$ 于 D，连 BD．因 $OB\perp AB$，$OB\perp BC$，故 $OB\perp$ 平面 ABC，由三垂线定理之逆定理得：$BD\perp l$．于是容易从 $Rt\triangle OAB$、$Rt\triangle BDA$ 和 $Rt\triangle OBD$ 中，计算出 O 到 l 的距离 OD．

解： 辅助图形如上述.

在 $Rt\triangle OAB$ 中，$OA=a$，$OB=b$，故 $AB=\sqrt{OA^2-OB^2}=\sqrt{a^2-b^2}$；

在$Rt\triangle BDA$中，$AB=\sqrt{a^2-b^2}$，$\angle DAB=90^\circ-\alpha$，故 $BD=AB\sin(90^\circ-\alpha)=\sqrt{a^2-b^2}\cos\alpha$.

在 $Rt\triangle OBD$ 中，$OB=b$，$BD=\sqrt{a^2-b^2}\cos\alpha$，

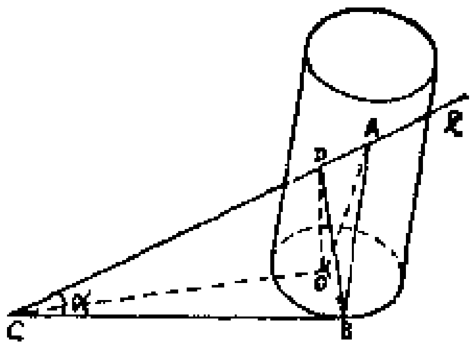


图 8.2

故 $OD=\sqrt{BD^2+OB^2}$

$=\sqrt{(a^2-b^2)\cos^2\alpha+b^2}$

$=\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}$.

即 O 到直线 l 的距离为$\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}$.

例 5 一圆柱被一平面所截．截面与底面所成的二面角为 α，最短母线长为 a，最长母线长为 b，求此截圆柱的体积.

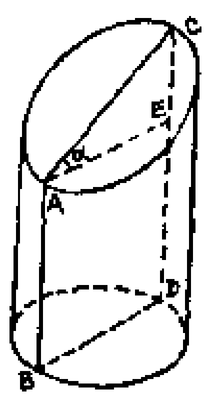


图 8.3

分析： 如图 8.3，设 AB 为最短母线，CD 为最长母线．因 $AB\parallel CD$，故可确定平面 $ABCD$，在此平面内作 $AE\perp CD$ 于 E，则$\angle CAE=\alpha$．此时 BD 应是底面圆的直径．为求底面圆的半径，只要在 $Rt\triangle AEC$ 中进行计算就可以办到.

为计算此截圆柱的体积，只要再将一个同样形状和大小的截圆柱倒置在它上面，组成一个新圆柱就行了.

解： 在 $Rt\triangle AEC$ 中，$\angle CAE=\alpha$，$CE=CD-AB=b-a$．故 $AE=CE\operatorname{ctg}\alpha=(b-a)\operatorname{ctg}\alpha$，即底面直径 $BD=(b-a)\operatorname{ctg}\alpha$.

下面计算两个全等的截圆柱倒置组合而成的圆柱体的体积．因它的高为：

$AB+CD=a+b.$

所以它的体积为：

$$\pi\cdot\left[\frac{(b-a)\operatorname{ctg}\alpha}{2}\right]^2(a+b)=\frac{\pi(b^2-a^2)\operatorname{ctg}^2\alpha}{4}.$$

故此截圆柱的体积为：

$$\frac{\pi(b^2-a^2)\operatorname{ctg}^2\alpha}{8}.$$

习　题　一

1．等边圆柱的轴截面的面积为Q，求：(1) 它的一个底面的面积；(2) 它的侧面积和体积．

2．有一油桶高92厘米，从桶盖的小孔插入一根1米长的米尺，尺的一端和小孔口放齐，另一端触到底面，抽出米尺时，看到米尺被油沾湿的部分的长是42厘米，求桶内油的高度（精确到0.1厘米）．

3．圆柱的全面积为a，侧面积为b，求它的体积．

4．作一个圆柱的内接正三棱柱，又作这个三棱柱的内切圆柱．求这两个圆柱的侧面积之比和体积之比．

5．有一个水平放置的圆柱形的油罐，长为6米，直径为2米，油的最深处是0.5米，求油的体积．

6．圆柱的内接长方体的一条对角线和底面所成的角是α，这条对角线和底边长为b的长方体的侧面所成的角为β．求证：

$$S_{圆柱侧}=\frac{\pi b^2\sin 2\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

7．一个等边圆柱的轴截面面积是36cm^2，求它的内接正

六棱柱的体积.

8. 一个圆柱的高是 H，它的侧面展开图中，母线与对角线的夹角为 60°，求它的体积.

9. 已知正六棱柱的每条棱长都等于 K，求它的内切圆柱的体积.

10. 已知圆柱的侧面展开图是边长为 a 的正方形，求这个圆柱的体积.

§2. 圆　　锥

一、圆锥的定义

直角三角形以一直角边为轴旋转一周而形成的几何体叫做圆锥. 其中，三角形的另一直角边旋转而成的圆面叫做圆锥的底面；三角形中斜边与轴的交点叫圆锥的顶点；三角形中斜边旋转而形成的曲面叫做圆锥的侧面；侧面上顶点到底面圆周上任一点的连线段叫做圆锥的母线；顶点到底面的距离叫做圆锥的高；过轴的截面叫做圆锥的轴截面.

二、圆锥的性质

(1) 垂直于轴的截面是圆，其半径与底面圆半径之比等于顶点到它们的距离之比；

(2) 轴截面是以底面直径为底，母线为腰的等腰三角形；

(3) 侧面积等于底面周长和母线乘积的一半，即 $S_{侧}=\pi R l$；

(4) 体积等于底面积和高的乘积的三分之一，即 $V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H$；

(5) 侧面展开图为弧长等于底面周长，半径等于母线，圆心角等于$\frac{R}{l}\times 360°$的扇形.

例 1 圆锥体内切于一个三棱锥，切线把圆锥的侧面积分成 5:6:7 三部分，求这些切线把三棱锥侧面分成的三部分面积之比？

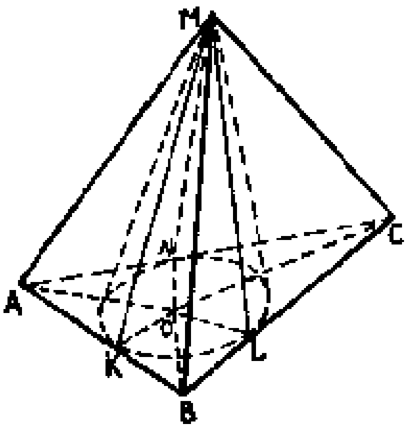


图 8.4

分析：已知的是圆锥侧面积被三切线所分成的三部分面积之比，与要求的棱锥侧面被三切线分成的三部分面积之比. 这两者之间的关系不是很明显的. 因此，我们要想办法把面积之比变成边、角的比例关系，再利用三角形的边角关系和圆心角与所对的弧长之间的关系来解决问题.

解：如图 8.4 所示，用 r 表示底面圆半径，l 表示母线长. 则圆锥侧面被三切线 MK，ML，MN 分成的三部分面积之比为$\frac{5\pi rl}{18}:\frac{6\pi rl}{18}:\frac{7\pi rl}{18}$.

由此可得：$\widehat{KL}:\widehat{LN}:\widehat{NK}=5:6:7$，因而 $\angle KOL=100°$，$\angle LON=120°$，$\angle NOK=140°$，用 S_1，S_2，S_3 分别表示棱锥侧面被三切线分成的三部分面积. 则

$S_1=2\cdot S_{\triangle MCL}=CL\cdot l=OL\,\mathrm{tg}\angle LOC\cdot l=rl\,\mathrm{tg}50°$，同理可得：$S_2=rl\,\mathrm{tg}60°$，$S_3=rl\,\mathrm{tg}70°$. 故

$S_1:S_2:S_3=\mathrm{tg}50°:\mathrm{tg}60°:\mathrm{tg}70°$.

例 2 两个圆锥有一公共高，它们的顶点是公共高的两端点，第一个圆锥母线长为 l，其锥顶角为 2α，第二个圆锥的锥

顶角为 2β，求两圆锥公共部分的体积.

分析：如图 8.5 所示，画的是两圆锥的轴截面. 两圆锥的公共部分是另外两个小圆锥组成的. 因此问题变成了求这两个小圆锥的体积之和. 为此，要求出公共底面的半径和 AB 和其中一个小圆锥的高. 因为两个小圆锥的高之和等于原圆锥的公共高 CD，它容易由 $Rt\triangle DCF$ 中求出. 而小圆锥的底半径和高的关系有 $AB=BC\cdot\operatorname{tg}\beta$，故只要想办法求出 AB 问题就解决了. 为此，只要利用关系式 $DC=DB+BC$ 列一个关于 AB 的方程就行了.

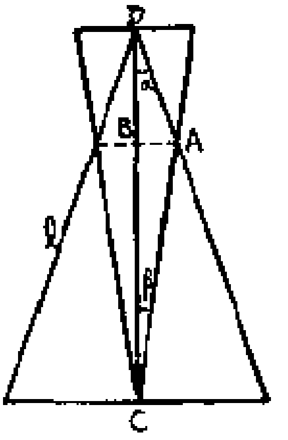


图 8.5

解：在 $Rt\triangle DCF$ 中，$DC=l\cos\alpha$. 但 $DC=DB+BC$，而 $DB=AB\operatorname{ctg}\alpha$，$BC=AB\operatorname{ctg}\beta$. 代入上式得：$l\cos\alpha=AB\operatorname{ctg}\alpha+AB\operatorname{ctg}\beta$ 故

$$AB=\frac{l\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\frac{l\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

因此，公共部分的体积可计算如下：

$$\begin{aligned}V_{\text{公共}}&=\frac{1}{3}\pi AB^2\cdot DB+\frac{1}{3}\pi AB^2\cdot BC\\&=\frac{1}{3}\pi AB^2(DB+BC)=\frac{1}{3}\pi AB^2\cdot DC\\&=\frac{\pi}{3}\left(\frac{l\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right)^2\cdot l\cos\alpha\\&=\frac{\pi l^3\cos^3\alpha\sin^2\alpha\sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

例 3 证明圆锥截线是二次曲线.

证：为了便于计算，只讨论平面与圆锥的一侧相截的情形. 这不影响一般性. 设圆锥的顶点为 S，轴是 SQ，顶角是 2θ，设截平面为 π，它与轴的夹角为 α. 因而只需讨论 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$

情形.

在截平面上，把过 SQ 垂直于 π 的平面与截平面的交线作为 x 轴，而把它与锥面的交点作坐标原点 O. 今在截线上任取一点 $M(x, y)$. 作如下的辅助线，(如图 8.6 所示). $MA\perp OA$, $OC\perp SQ$, $AD\perp SQ$, $AB\perp OC$，这里 A 在 x轴上; C、D 在 SQ 上; B 在 OC上，点 A、O、C、D 同在 π 的垂直平面上. 因此，$OA=x$, $MA=y$, $MA\perp AD$ 且 $MD\perp SD$, 故$\triangle MDS$ 是直角三角形. 由勾股定理得：(设 $SO=l$)

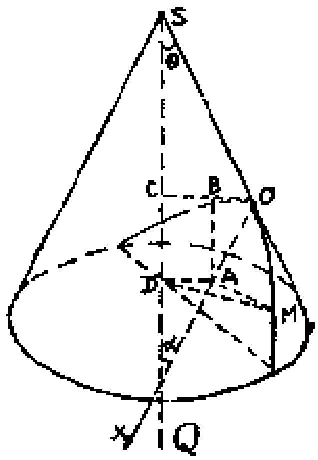


图 8.6

$$DM=\sqrt{AD^2+MA^2}$$
$$=\sqrt{(OC-OB)^2+y^2}$$
$$=\sqrt{(l\sin\theta-x\sin\alpha)^2+y^2},$$

$\because$ $\angle MSD=\theta$, 由 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{DM}{SD}$ 得：

$$\frac{\sqrt{(l\sin\theta-x\sin\alpha)^2+y^2}}{l\cos\theta+x\cos\alpha}=\operatorname{tg}\theta,$$

化简得：$x^2(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\theta)+y^2-2l\sin\theta(\sin\alpha+\operatorname{tg}\theta\cos\alpha)\cdot x=0$. 这就是圆锥截线的方程. 它显然是二次曲线. 具体讨论如下：

(1) 当 $\alpha=90°$时，$SQ\perp\pi$, $\sin\alpha=1$, $\cos\alpha=0$, 则截线方程为：$x^2+y^2-2l\sin\theta\cdot x=0$, 故截线为圆. 当 $l=0$ 时退化为点圆.

(2) 当 $\alpha=\theta$ 时，由于 $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\operatorname{tg}^2\theta=0$，则截线方程为：$y^2-4l\sin^2\theta\cdot x=0$, 故截线为抛物线，当 $l=0$ 时退化为直线.

(3) 当 $\alpha>\theta$ 时，由于 $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\operatorname{tg}^2\theta=\cos^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\theta)>0$ 则截线方程中 x^2 与 y^2 项同号，故截线为椭圆. 当 $l=$

0 时退化为一点.

(4) 当 $O\leqslant\alpha<\theta$ 时，由于 $\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{tg}\theta$，有 $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\operatorname{tg}^2\theta=\cos^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\theta)<O$，则截线方程中 x^2 与 y^2 项异号，故截线为双曲线. 当 $l=o$ 时，方程变为：

$y=\pm\sqrt{\cos^2\alpha\operatorname{tg}^2\theta-\sin^2\alpha}\cdot x$，是两条相交直线.

例 4 正三棱柱 $ABC-A'B'C'$，顶点 A 与圆锥顶点重合，棱柱顶点 B 和 C 在这个圆锥的侧面上，而顶点 B' 和 C' 在它的底面圆周上，设 $|AB'|:|AB|=5$，求圆锥体积与棱柱体积之比.

分析：设 E 和 F 是平面 ABC 与圆锥底面圆周的交点，如图 8.7 所示，因 $BC\parallel B'C'$，故 $BC\parallel$ 平面 AEF,所以 $B'C'\parallel EF$，$\triangle AEF\backsim\triangle ABC\Rightarrow\triangle AEF$ 是正三角形，$\Rightarrow|AE|:|AB|=5$.

设 M,N 和 P 分别是线段 BC，EF 和 $B'C'$ 的中点，O 是圆锥底面中心.

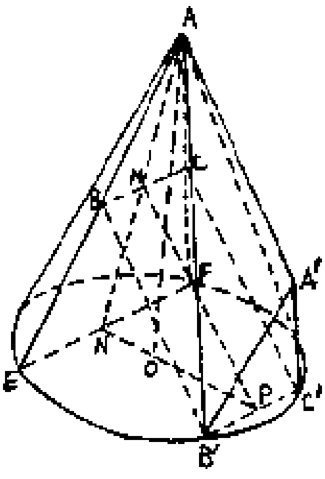


图 8.7

因 $ON\perp EF$，而 $EF\parallel B'C'$，故 ON 通过 $B'C'$ 中点 P，线段 AN 通过 M 且垂直于 EF.

同时 $MP\perp AN$，$MP\parallel BB'$，故 $BB'\perp$ 平面 ABC，$BB'\perp AN$.

为计算棱柱和圆锥的体积之比，可设 $|AB|=a$，把其他有关量用 a 表示，最后把两者的体积都用 a 表示，最后在计算它们体积之比时消去 a 即可解决问题.

解：辅助图形如上述.

因 $|AM|=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$|AE|=5a$，$|AN|=\frac{5\sqrt{3}}{2}a$，$|MN|=2\sqrt{3}a$，

在 $Rt\triangle AB'B$ 中求出 $|BB'|=\sqrt{24}a$.

在 $Rt\triangle PMN$ 中，因 $|PM|=|BB'|$，故 $|PN|=6a$.

由 $S_{\triangle ANP}=\frac{1}{2}|AO|\cdot|NP|=\frac{1}{2}|AN|\cdot|MP|$ 得：

$$AO=\frac{5}{\sqrt{2}}a.$$

故 $R=|OB'|=\sqrt{AB'^2-AO^2}=\frac{5}{\sqrt{2}}a.$

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot|AO|=\frac{125\pi}{6\sqrt{2}}a^3.$$

$$V_{棱柱}=\frac{3}{\sqrt{2}}a^3.$$

因此，$V_{圆锥}:V_{棱柱}=\frac{125}{18}\pi.$

例 5 一个圆锥的全面积为 $m\pi$ 米^2，它的侧面展开图是圆心角为 60° 的扇形，求圆锥的体积.

分析：如图 8.8，为求圆锥的体积，只要想法计算出它的

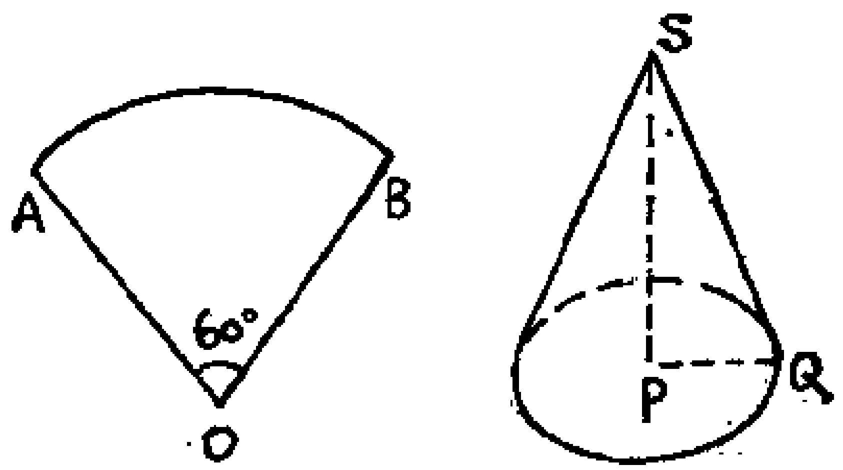


图 8.8

底面半径 R 和高 h 就行了．为此，我们想法利用题设条件和图形上几何元素(线段、圆弧、角度)的位置关系列出关于 R 和 h 的两个方程就成了．

解：因 $S_{圆锥侧}=\pi R\cdot|SQ|=\pi R\sqrt{R^2+h^2}$，依题意得：

$S_{圆锥全}=\pi R\sqrt{R^2+h^2}+\pi R^2=m\pi$，即 $R^2h^2+2mR^2=m^2$

$$(1)$$

由 $\overset{\frown}{AB}=2\pi R$ 得：$\frac{\pi}{3}|OA|=2\pi R$，但 $|OA|=SQ=\sqrt{R^2+h^2}$，

故 $\frac{\pi}{3}\sqrt{R^2+h^2}=2\pi R$，即 $h^2=35R^2$ (2)

联立解(1)、(2)组成的方程组得：

$$R^2=\frac{m}{7},\ h^2=5m.$$

因此，$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{m}{7}\right)\cdot\sqrt{5m}=\frac{\pi m}{21}\sqrt{5m}$(米^3)．

习 题 二

1．在轴截面顶角为直角的圆锥内作一内接圆柱，已知这圆柱的全面积等于圆锥的侧面积．求证：这圆锥顶点到圆柱上底面的距离等于圆锥母线的一半．

2．从一个半径为 R 的圆形铁片中剪去一个扇形卷成一个圆锥，问这个扇形的圆心角为多大时，卷成的圆锥容积最大？

3．连结△ABC 之两边 AB、BC 中点 E、F，此线段 EF 把△ABC 分成两部分．以第三边为轴旋转一周，求证：△ABC 这两部分旋转体的体积相等．

4．圆锥的高为 20，底面半径为 25，过它的顶点作一个截面，这截面到圆锥底面圆心的距离为 12，求截面面积．

5. 圆锥的轴截面是顶角为 α 的等腰三角形，这个三角形的外接圆半径为 R，求这圆锥的体积.

6. 已知圆锥的底面积为 A，侧面积为 S，求它的体积.

7. 圆锥的母线长为 l，和底面的夹角为 α，求它的内接正方体的棱长.

8. 圆锥的母线和高的夹角是 β，底面圆内一条长为 a 的弦所对的圆心角为 α，求这个圆锥的体积.

9. 矩形 $ABCD$ 的一边 AD 被 M 点内分为中外比 ($MD<MA$). 求证：$\triangle ABC$、$\triangle ACM$、$\triangle MCD$ 以边 AB 为轴旋转一周所得的旋转体的体积相等.

10. 一个三角形，已知其一边为 a，此边上的角为 β 与 r，求围绕该边旋转三角形所得的旋转体的体积.

11. 半径为 a 的一张圆形滤纸，剪去扇形 AOB，而使留下的一部分构成圆锥体的侧面. 如果要使圆锥体体积有最大值，问它的底面半径和高应是多少？

12. 平面上放一圆锥，底半径 1 米，高 2 米，距底圆圆心 2 米处立一垂直杆，高 4 米，顶上放一光源，求圆锥影子的面积.(原来的底面积不计)

§3. 圆　　台

一、圆台的定义

直角梯形以和底边垂直的腰为轴旋转一周而形成的几何体叫做圆台. 其中，梯形底边旋转而成的圆面叫做圆台的底面；梯形和底不垂直的腰旋转而成的曲面叫做圆台的侧面；侧面上梯形的另一腰在任何位置时的线段叫做圆台的母线；两底面间的距离叫做圆台的高；过轴的截面叫做圆台的轴截面.

二、圆台的性质

（1）平行于底面的截面是圆；

（2）轴截面是以两底面圆的直径为底，母线为腰的等腰梯形；

（3）侧面积等于两底面圆的周长之和与母线的乘积的一半，即 $S_{侧}=\pi(R+r)l$；

（4）体积等于上、下底面积与它们的比例中项之和与高的乘积的三分之一，即 $V=\dfrac{\pi H}{3}(R^2+r^2+Rr)$；

（5）侧面展开图为圆环的一部分，其两圆弧的半径之差等于母线，两圆弧为两底面圆周长，两圆弧的度数都等于$\dfrac{R-r}{l}\times 360°$.

例 1 直角梯形 $ABCD$ 面积为 S，高 AB 为 h，梯形锐角 $\angle ADC=\alpha$，E 是腰 CD 的中点，求绕直线 AB 旋转四边形 $ABED$ 所得的旋转体的体积.

分析：如图 8.9，过 E 作 $EF\perp AB$ 于 F，则 $EF\parallel AD$，故四边形 $ABED$ 绕直线旋转所得的旋转体分成两个旋转体，一个是 Rt$\triangle BFE$ 旋转所得的旋转体——圆锥；另一个是直角梯形 $FEDA$ 旋转所得的旋转体——圆台. 只要分别按体积公式计算出这个圆锥和圆台的体积就行了.

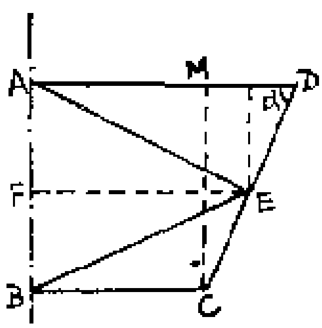


图 8.9

解：辅助图形如上述.

因 EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线，故 $EF=\dfrac{1}{2}(BC+AD)$.

过 C 作 $CM \perp AD$ 于 M，则

$CM = AB = h$，$MD = MC\operatorname{ctg}\alpha = h\operatorname{ctg}\alpha$.

由 $S = \frac{1}{2}(BC + AD)\cdot h = \frac{1}{2}(BC + BC + MD)h$ 得：

$BC = \frac{S}{h} - \frac{1}{2}MD = \frac{S}{h} - \frac{h}{2}\operatorname{ctg}\alpha$，故

$EF = \frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{S}{h}$，

$AD = BC + MD = \frac{S}{h} + \frac{h}{2}\operatorname{ctg}\alpha$.

$$V_{圆锥} = \frac{1}{3}\pi\cdot EF^2\cdot h = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{S^2}{h^2}h = \frac{\pi S^2}{3h},$$

$$\begin{aligned} V_{圆台} &= \frac{\pi h}{3}(EF^2 + AD^2 + EF\cdot AD) \\ &= \frac{\pi h}{3}\left(\frac{3S^2}{h^2} + \frac{3S}{2}\operatorname{ctg}\alpha + \frac{h^2}{4}\operatorname{ctg}^2\alpha\right) \\ &= \frac{\pi h}{12}\left(\frac{12S^2}{h^2} + 6S\operatorname{ctg}\alpha + h^2\operatorname{ctg}^2\alpha\right). \end{aligned}$$

因此，所求旋转体的体积为 $V_{圆锥} + V_{圆台}$

$$= \frac{\pi}{12h}(16S^2 + h^4\operatorname{ctg}^2\alpha + 6sh^2\operatorname{ctg}\alpha).$$

例 2 已知一个圆台，它的侧面积等于以这圆台的母线为半径的圆的面积．求证：这个圆台的上底面直径、母线、下底面直径成等差数列．

分析：设 r、R 分别表圆台的上、下底面半径，l 表示它的母线，则题目要求证明的就是：$l = \frac{2R + 2r}{2} = R + r$．而这一点容易从题设条件“它的侧面积等于以母线为半径的圆面积”得到的等式中得出．

证明：圆台的侧面积 $= \pi(r + R)l$，

以母线为半径的圆面积 $=\pi l^2$.

依题意得：$\pi(R+r)l=\pi l^2$,

因此，$R+r=l$，即 $l=\dfrac{2R+2r}{2}$.

故这个圆台的上底直径、母线、下底直径成等差数列.

例 3 一个扇形的半径是 10 厘米，用一个半径是 5 厘米的同心圆弧在这扇形上截去一个小扇形，若用剩下的一块作圆台的侧面，已知它的下底面的面积是 36π 厘米^2，求它的体积.

分析：为求圆台的体积，必须先计算出它的上、下底面圆的半径 r 和 R 以及它的高 h，为此，就需要知道大小扇形的弧长（因大扇形的弧长是 $2\pi R$，小扇形的弧长是 $2\pi r$.）

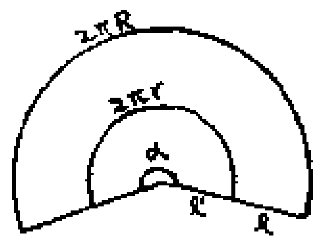


图 8.10

因大、小扇形的半径分别是 10 厘米和 5 厘米，故只要知道扇形的圆心角 α 就行了.

解：因 $\pi R^2=36\pi$，故 $R=6$(厘米).

因 $\dfrac{l'}{l'+l}=\dfrac{r}{R}\Rightarrow\dfrac{l'+l}{l}=\dfrac{R}{R-r}$

故 $\alpha=\dfrac{R-r}{l}\cdot 2\pi=\dfrac{R}{l'+l}\cdot 2\pi=\dfrac{6}{10}\cdot 2\pi=\dfrac{6}{5}\pi$.

$r=\dfrac{1}{2}R=3$(厘米)，$h=\sqrt{l^2-(R-r)^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

因此，$V=\dfrac{\pi h}{3}(r^2+R^2+Rr)$

$$=\frac{\pi\cdot 4}{3}(3^2+6^2+6\cdot 3)$$

$$=84\pi(\text{厘米}^3).$$

例 4 已知圆台的轴截面中的对角线互相垂直，母线 l 与

较大的底面所成的角等于 α，求这圆台的体积.

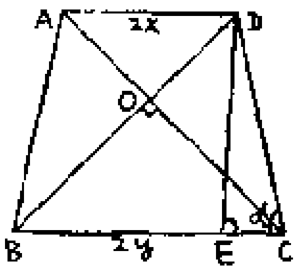


图 8.11

分析：为求圆台的体积，必须先计算出它的高和上、下底面圆半径. 因它的高 $h=l\sin\alpha$（由 $Rt\triangle DEC$ 中算出），故可设它的上、下底面半径为 x 和 y，再从图上一些直角三角形中的边角关系，列出有关 x 和 y 的两个方程，就可以解决问题了.

解：如图 8.11 是圆台的轴截面，且 $DE\perp BC$.

由 $Rt\triangle DEC$ 得：$h=l\sin\alpha$，

$$EC=y-x=l\cos\alpha \tag{1}$$

由 $Rt\triangle DBE$ 得：因$\angle BDE=\angle DBE=45°$，故

$$BE=y+x=DE=l\sin\alpha \tag{2}$$

由(1)、(2)得：

$$x=\frac{l}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha), \qquad y=\frac{l}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha).$$

因此，圆台的体积为：

$$\begin{aligned}V&=\frac{\pi}{3}h(x^2+y^2+xy)\\&=\frac{\pi}{3}l\sin\alpha\left[\frac{l^2}{4}(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+\frac{l^2}{4}(\sin\alpha+\cos\alpha)^2\right.\\&\qquad\left.+\frac{l^2}{4}(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\right]\\&=\frac{\pi l^3}{12}(1+2\sin^2\alpha)\end{aligned}$$

例 5 圆台的侧面积是 S，两底面积分别是 p 和 q，求它的轴截面面积.

分析：为求圆台的轴截面面积，必须要计算出它的两底面半径和高. 面两底面半径根据题设条件容易求出，而它的高则

可以由它的侧面积是 S 这个条件求得.

解：设圆台的上、下底面半径为 r 和 R，依题意得：
$p=\pi r^2$，$q=\pi R^2$.

$$\Longrightarrow r=\sqrt{\frac{p}{\pi}},\quad R=\sqrt{\frac{q}{\pi}}.$$

由侧面积为 S 得：

$S=\pi(r+R)l$，但 $l=\sqrt{h^2+(R-r)^2}$.（这里 l 表示母线的长，h 表示高）

$$\Longrightarrow S^2=\pi^2(r+R)^2[h^2+(R-r)^2]$$

$$\Longrightarrow h^2=\frac{S^2}{\pi^2(r+R)^2}-(R-r)^2$$

$$\Longrightarrow h=\frac{\sqrt{S^2-(q-p)^2}}{\pi\left(\sqrt{\frac{p}{\pi}}+\sqrt{\frac{q}{\pi}}\right)}$$

故圆台轴截面面积为：

$$(R+r)h=\left(\sqrt{\frac{p}{\pi}}+\sqrt{\frac{q}{\pi}}\right)\cdot\frac{\sqrt{S^2-(q-p)^2}}{\pi\left(\sqrt{\frac{p}{\pi}}+\sqrt{\frac{q}{\pi}}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{S^2-(q-p)^2}}{\pi}.$$

习　题　三

1. 圆台的母线长为 l，它和下底面所成的角为 α，且轴截面对角线互相垂直，求这圆台的体积.

2. 已知圆台两底半径为 R，r. 作平行于底面的截面，(1) 若此截面把圆台的侧面积二等分；(2) 此截面把圆台的体积二等分，分别求出截口圆的半径.

3. 已给一个圆台和一个圆柱，它们有相同的高，圆柱的底

面等于圆台的中截面，哪一个的体积较大，证明你的结论.

4. 圆台下底面的周长是上底面的周长的 3 倍，轴截面面积是 392 厘米^2，母线和底面所成的锐角 $\alpha=45^\circ$，求这圆台的高、两底的半径和母线的长.

5. 体积为 52 厘米^3 的圆台，一个底面积是另一个底面积的 9 倍，求截得这个圆台的圆锥的体积.

6. 圆台上、下底面面积的比为 1:4，母线长为 l，母线与底面的夹角为 φ，求它的体积.

7. 一个圆锥的侧面展开图是中心角为 216° 的扇形，此圆锥的高是 28 厘米，在距底面 24 厘米处作一个与底面平行的截面，求截得的圆台的全面积和体积.

8. 圆台的母线长为 6 厘米，它和下底面的夹角 $\alpha=60^\circ$，又轴截面的对角线互相垂直，求这圆台的体积.

9. 正六边形边长为 a，以它的一边为轴旋转一周，求所得旋转体的体积.

10. 直角梯形 $ABCD$ 的面积为 S，高为 h，梯形锐角 $\angle ADC=\alpha$，在腰 CD 上取中点 E，求围绕直线 AB 旋转 $ABED$ 所得的旋转体的体积.

11. 一个梯形上底长为 a，下底长为 $2a$，一腰长为 b，并且这腰和下底的夹角为 α（α 为锐角），如果以这个腰为轴把梯形旋转一周，求所成的旋转体的体积.

12. 一个圆台的两底面半径为 r 和 R，侧面展开图为圆环的一部分，已知这个圆环的整个的面积和这个圆台的全面积相等，求圆台的母线长.

§4. 球

一、球的定义

半圆以直径为轴旋转一周所形成的几何体叫做球. 其中，半圆旋转而成的曲面叫做球面；半圆的圆心叫做球心；球心和球面上任一点的连线叫做球半径；球面上的两点之连线叫做球的弦；通过球心的弦叫做球的直径.

二、球和点的位置关系

1. **点在球内**　球心和点的距离小于球半径；

2. **点在球面上**　球心和点的距离等于球半径；

3. **点在球外**　球心和点的距离大于球半径.

三、球和直线的位置关系

1. **相离**　球和直线没有公共点，这时球心到直线的距离大于球半径；

2. **相切**　球和直线只有一个公共点，这时球心到直线的距离等于球半径；

3. **相交**　球面和直线有两个公共点，这时球心到直线的距离小于球半径.

四、球和平面的位置关系

1. **相离**　球和平面没有公共点，这时球心到平面的距离大于球半径；

2. **相切**　球和平面只有一个公共点，这时：1）球心到平面的距离等于球半径；

2）垂直于球的半径且垂足在球面上的平面和球相切；

3) 球的切平面垂直于过切点的球半径；

4) 球的切平面上过切点的一切直线都是球的切线.

3. **相交** 球和平面有多于一个的公共点，则它们的公共点组成一个圆面，这圆面叫球的截面.

1) 过球心的截面叫球的大圆，它以球心为圆心，球半径为半径. 且大圆平分球，两大圆互相平分；

2) 不过球心的截面叫球的小圆，距离球心的距离相等的小圆，其半径也相等，距离球心的距离大的小圆，其半径较小. 小圆圆心与球心的连线垂直于小圆.

五、球和其他旋转体的关系

(1) 底面圆周和顶点都在球面上的圆锥(圆柱、圆台)叫做球的内接圆锥(圆柱、圆台)，这球叫做圆锥(圆柱、圆台)的外接球；

(2) 底面和母线都与球相切的圆锥(圆柱、圆台)叫做球的外切圆锥(圆柱、圆台)，这球叫做圆锥(圆柱、圆台)的内切球，且内切球与其圆锥(圆柱、圆台)相切的切点组成一个与圆锥(圆柱、圆台)底面平行的一个圆.

六、球和多面体的关系

(1) 各顶点都在球面上的多面体叫做球的内接多面体，这球叫做多面体的外接球；

(2) 各面都和球相切的多面体叫做球的外切多面体，这球叫做多面体的内切球.

七、球和球面的一部分

1. **球冠** 球面被一截面分成两部分，每一部分叫做球冠；

2. **球带** 球面夹在两个平行截面间的部分叫做球带；

3. **球扇形** 半圆中的一扇形以半圆的直径为轴旋转一周形成的几何体叫做球扇形；

4. **球缺** 球被一截面分成两部分，每一部分叫做球缺；

5. **球台** 球夹在两平行截面间的部分叫做球台.

八、球和它的部分的面积和体积公式

1. **球面积** $S_{球}=4\pi R^2$；（R 表示球半径）

2. **球冠或球带的面积**

$S=2\pi RH$（H 表示球冠或球带的高）；

3. **球体积** $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$；

4. **球扇形的体积** $V_{球扇形}=\frac{1}{3}S\cdot R$（$S$ 表示球扇形的球面部分的面积）；

5. **球缺的体积** $V_{球缺}=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)$或$\frac{\pi H^2}{6}(3r^2+H^2)$（$r$ 表示球缺底面圆的半径）.

例 1 棱锥的底面是菱形，其边长为 a，锐角为 α，底面与侧面的夹角都是 φ，求这个棱锥内切球的体积.

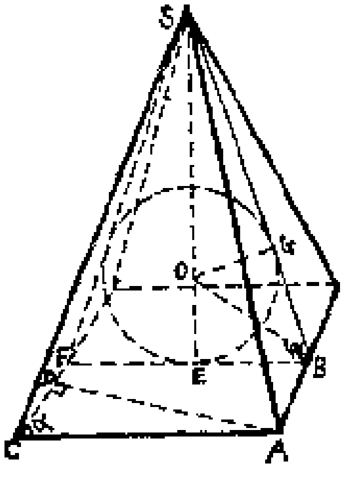


图 8.12

分析：要计算球的体积，只要知道它的半径就行了．因而必须找出球心及球与棱锥各面的切点的位置．为此，通过球心 O 及球与棱锥底面、侧面的切点 E 和 G 作一平面与底面交于 BE，与侧面交于 BG.

因 $OG\perp$ 平面 SAB，$\therefore$ AB

$\perp OG$，$AB \perp BE$，则$\angle GBE = \varphi$. 延长BE与CF交于F，则BF是底面菱形的高． ∴ $BF = AD = AC\sin\alpha = a\sin\alpha$. 且$BE = EF$，再由$Rt\triangle BOE$就容易求球的半径$OE$.

解：辅助线作法如上所述，在$Rt\triangle BOE$中， ∵ $BE = \frac{1}{2}BF = \frac{a}{2}\sin\alpha$，$\angle OBE = \frac{\varphi}{2}$，∴ 内切球半径$R = OE = BE\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}a\sin\varphi\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$.

故$V_{球} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi a^3}{6}\sin^3\alpha\,\mathrm{tg}^3\frac{\varphi}{2}$.

例 2 设密闭容器上部为半球形，下部为圆柱形，已知容积为定值V. 试求球的半径和圆柱的高为多少时，用料最省？

分析：要用料最省就是要容器的表面积为最小。求几何极值一般地采用设辅助未知数，把要求极值的量(本题是容器表面积)表示成未知数的函数，再用代数方法或三角方法求其极值.

解：设圆柱底面圆半径为R，高为H，则球半径也为R. 故$V = \pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3$， ∴ $H = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{2}{3}R$， 因此， $S_{全} = \pi R^2 + 2\pi RH + 2\pi R^2 = 3\pi R^2 + 2\pi R\left(\frac{V}{\pi R^2} - \frac{2}{3}R\right) = \frac{5}{3}\pi R^2 + \frac{V}{R} + \frac{V}{R}$. 因为 $\frac{\frac{5}{3}\pi R^2 + \frac{V}{R} + \frac{V}{R}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{5\pi}{3}R^2 \cdot \frac{V}{R} \cdot \frac{V}{R}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}\pi V^2}$ ∴ $S_{全} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{5}{3}\pi V^2}$，等号在$\frac{5}{3}\pi R^2 = \frac{V}{R}$，即 $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$时，$S_{全}$达到最小值，此时 $H = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R - \frac{2}{3}R = R$. 因此，当$R = H = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$时，容器用料最省.

例 3 为了及早用反导弹击中敌人入侵之导弹，雷达站必

须及早发现敌方导弹，为反导弹部队提供予警时间. 已知洲际导弹的飞行高度约为 30 公里，飞行速度约为 7 公里/秒，雷达离地面 1500 米. 求最多能提供多少予警时间.

分析：设 A 点代表雷达所在位置，则 AD 是雷达离地面高度，BC 是敌方导弹离地面高度.

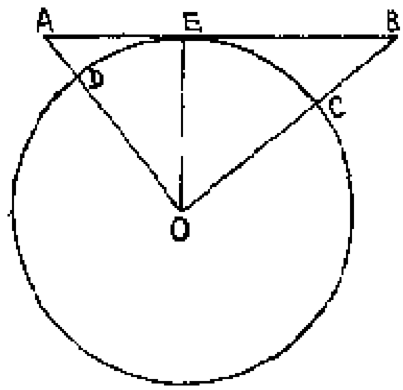


图 8.13

为了便于计算，必须确定一个适当的平面，以便在该平面上按平面几何方法进行计算. 为此，过 A、B 和球心 O 作一平面 AOB. 此时，我们的问题变成一个平面几何问题了. AB 表示雷达站发现敌导弹时的视线. 当敌导弹处在离雷达站很远的地方时，敌导弹在视线下无法发现. 只有当敌导弹处在视线之上时才能被发现，故当 AB 为圆 O 的（地球与平面 AOB 相交的大圆）切线时 AB 最长，因而提供的予警时间最长（图上 E 为切点）.

解：予警时间的最大值 $=\dfrac{AB}{7}=\dfrac{1}{7}(AE+BE)$，

但 $AE=\sqrt{AO^2-OE^2}=\sqrt{(AD+DO)^2-OE^2}$

$=\sqrt{AD^2+2AD\cdot DO}$

$=\sqrt{AD(2OD+AD)}=\sqrt{1.5(2\times 6400+1.5)}$

$=139$（公里）

同理可得：$BE=\sqrt{BC(BC+2OC)}=\sqrt{30(30+2\times 6400)}$

$=612$（公里）故可提供的最长予警时间为 $\dfrac{139+612}{7}$

$=107$（秒）

答：最多能提供 1 分 47 秒予警时间.

例 4 正四棱锥相邻侧面之间的夹角等于 α，底面边长为 a，求与棱锥各侧面相切又与棱锥的外接球相切的球的半径.

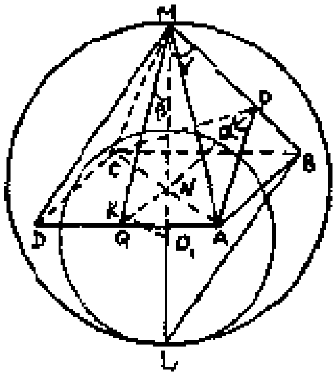


图 8.14

分析：如图 8.14，设 $M-ABCD$ 是已知棱锥，作 $CP\perp MB$，此时 $AP\perp MB$，故 $\angle CPA=\alpha$，作 $MN\perp$ 平面 ABC，$MQ\perp AD$，设 $\angle NMB=\gamma$，$\angle QMN=\beta$，O_1 是未知球心，K 是它与平面 MDA 的切点，L 是两球相切的切点，它在 MN 的延长线上，则 $O_1K=O_1L$ 是所求的半径.

解：辅助图形如上述.

因 $\angle NMB=\angle PNB$，由 $Rt\triangle PNB$ 得：

$$\cos\gamma=\frac{NP}{NB}=\frac{NP}{NA}=\text{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

由此可知：$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$.

由 $Rt\triangle MQN$ 得：

$$\text{tg}\,\beta=\frac{QN}{MN}=\frac{\frac{a}{2}}{NB\cdot\text{ctg}\gamma}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}a\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\sqrt{1-\text{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}{2\text{ctg}\frac{\alpha}{2}}.$$

由 $Rt\triangle LMB$ 得：

$$ML=\frac{MB}{\cos\gamma}=\frac{\sqrt{2}a}{2\text{Sin}\gamma\cos\gamma}=\frac{\sqrt{2}a}{2\text{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{1-\text{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

由 $Rt\triangle MO_1K$ 得：

$O_1K = MO_1\sin\beta = (ML - LO_1)\sin\beta = (ML - O_1K)\sin\beta$,

故 $O_1K = \dfrac{ML\cdot\sin\beta}{1+\sin\beta}$

$$= \frac{\sqrt{2}\,a\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+\sqrt{-\cos\alpha}\right)}.$$

例 5 正三棱锥有一外接球，此三棱锥顶点上的面角为 α，求此球体积与棱锥体积之比.

分析：如图 8.15，$S-ABC$ 表示已知正三棱锥，球 O 为它的外接球，自 S 作 $SO'\perp ABC$ 平面于 O'，则 O' 是正三角形 ABC 的中心，球心 O 应在 SO' 上.

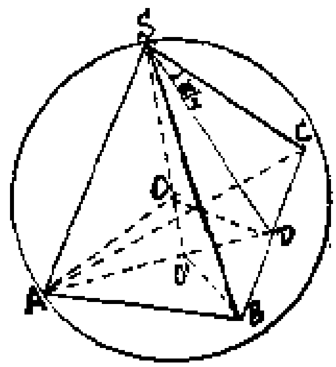


图 8.15

为计算此球与棱锥的体积之比，我们引进两个参数，一个是棱锥的侧棱 a，另一个是 $\angle ASO' = \beta$. 此时，球的半径为 $R = \dfrac{a}{2\cos\beta}$（由解 $\triangle AOS$ 得出），棱锥底面边长 $BC = 2DC = 2a\sin\dfrac{\alpha}{2}$（由解 $Rt\triangle SDC$ 得出）.

将要求的球与棱锥的体积之比表示成含已知数 α 和参数 a，β 的表达式，再利用参数与已知数的关系消去参数，就可以很快计算出两者的比值.

解：辅助图形如上述.

因球的半径为 $R = \dfrac{a}{2\cos\beta}$，故

球的体积为$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{a^3}{8\cos^3\beta}=\frac{\pi a^3}{\cos^3\beta}$.

棱锥的底面积$=\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2=\sqrt{3}a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

棱锥的高 $SO'=SA\cos\beta=a\cos\beta$.

故棱锥的体积为：

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)(a\cos\beta)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}a^3\cos\beta\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

因此球的体积与棱锥的体积之比为：

$$\frac{\pi a^3}{6\cos^3\beta}:\frac{\sqrt{3}}{3}a^3\cos\beta\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}\cos^4\beta\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

但 $AO'=a\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}BC=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2a\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

故 $\sin\beta=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\alpha}{2}$，代入上式得：

上述比值为：$\frac{\pi}{2\sqrt{3}\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

$$=\frac{\pi}{\frac{2\sqrt{3}}{9}\sin^2\frac{\alpha}{2}(2\cos\alpha+1)^2}=\frac{3\sqrt{3}\pi}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}(2\cos\alpha+1)^2}.$$

例 6 棱锥 $S—ABCD$ 的底面是一个矩形，且 $AB=3$，$BC=4$，所有侧棱与底面成等角，设棱锥外接球的半径为 6.5，求直线 BS 与 CS 之间夹角的大小.

分析：因棱锥 $S—ABCD$ 的侧棱与底面成等角，则顶点 S 在底面上的射影 O_1 是矩形 $ABCD$ 外接圆的圆心，外接球心 O 应在 SO_1 上.

因$\angle SAC=\angle SCA$，故$\triangle ASC$是等腰三角形，且它的底边AC是矩形$ABCD$的对角线，因此

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5 \qquad (1)$$

因棱锥外接球心在平面ASC上，故$\triangle ASC$的外接圆半径为$R=6.5$.

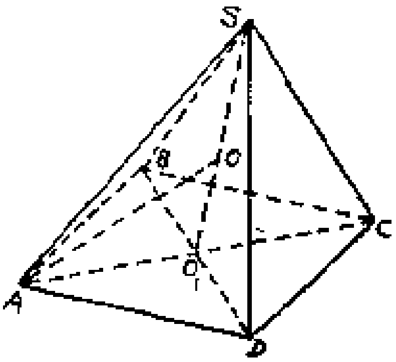


图 8.16

由$Rt\triangle AOO_1$得：

$$(SO_1-R)^2=R^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

$$故\ SO_1=R\pm\sqrt{R^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2}=6.5\pm6 \qquad (3)$$

由(3)式知要分两种情况：球心在棱锥之中和球心在棱锥之外进行讨论，分别求出$\angle BSC$.

解：辅助图形如8.16.

(a) 外接球心在棱锥之中，在这种情况下，在(3)式中应当选取加号. 此时，

$$AS=\sqrt{SO_1^2+R^2}=\sqrt{212.5}.$$

由余弦定理得：(在$\triangle BSC$中)

$$\cos\angle BSC=\frac{BS^2+CS^2-BC^2}{2BS\cdot CS}=\frac{309}{325},$$

$$故\angle BSC=\arccos\frac{309}{325}.$$

(b) 外接球心在棱锥之外，在这种情况下，在(3)式中应当选取减号. 此时，

$$AS=\sqrt{SO_1^2+R^2}=\sqrt{212.5}.$$

由余弦定理得：(在$\triangle BSC$中)

$$\cos\angle BSC=\frac{BS^2+CS^2-BC^2}{2BS\cdot CS}=\frac{3}{13}$$

故$\angle BSC = arc\cos\dfrac{3}{13}$.

答：BS与SC的夹角为$arc\cos\dfrac{309}{325}$或$arc\cos\dfrac{3}{13}$.

例 7 棱锥底面为一菱形，此菱形的边长为a，锐角为α，底面的任一二面角均为φ，求此棱锥内切球的体积.

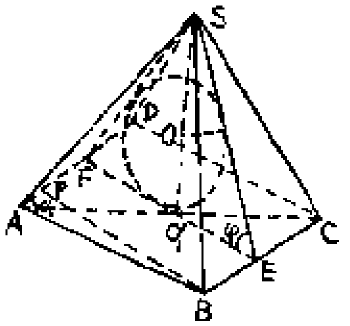


图 8.17

分析：为求棱锥内切球的体积，只要计算出它的半径就行了.

首先我们来研究球心在什么位置，因此棱锥的任一在底面的二面角都等于φ，四个侧面三角形底棱上的高都相等，故内切球心O应是$\triangle SEF$的内心，（其中SE，SF是侧面$\triangle SBC$与$\triangle SAD$在底棱BC与AD上的高）应在SO_1上（SO_1是从顶点S作底面$ABCD$的垂线.）

自B作$BP\perp AD$于P点，则由$Rt\triangle ABP$得：
$EF = BP = AB\sin\alpha = a\sin\alpha$.

再从$Rt\triangle OO_1E$中容易求得内切圆半径，即内切球半径.

解：辅助图形如8.17.

因$EF = a\sin\alpha$,

在$Rt\triangle OO_1E$中，$O_1E = \dfrac{1}{2}EF = \dfrac{1}{2}a\sin\alpha$,

$$\angle O_1EO = \frac{\varphi}{2}.$$

故 $OO_1 = O_1E\ \mathrm{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{1}{2}a\sin\alpha\,\mathrm{tg}\dfrac{\varphi}{2}$

因此棱锥的内切球的体积为：

$$\frac{4}{3}\pi\cdot OO_1^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}a\sin\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}a^3\sin^3\alpha\ \mathrm{tg}^3\frac{\varphi}{2}.$$

例 8 求外切于半径为 R 的球的最小体积的圆锥.

分析： 为确定圆锥的大小和形状，只要计算出圆锥的底面半径 x 和它的高 y 就行了.

首先我们把圆锥的体积 V 用 x，y 的函数表示，再研究 x，y 与已知量 R 的关系，从而消去一个未知量，使体积 V 变成一个变量的函数，最后求这个函数的极值就行了.

解： 因 $V=\frac{1}{3}\pi x^2 y$.

由圆锥的轴截面（底边是 $2x$，腰为 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的等腰三角形）的内切圆是此圆锥内切球的大圆得：

$$\text{轴截面面积}=\frac{1}{2}(2x)\cdot y=\frac{1}{2}(2x+2\sqrt{x^2+y^2})\cdot R,$$

即 $\quad x^2=\dfrac{R^2 y}{y-2R}$.

$$\text{故}\quad V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R^2 y}{y-2R}\right)\cdot y=\frac{\pi R^2}{3}\cdot\frac{y^2}{y-2R}.$$

要求 V 的最小值，只要求 $Z=\dfrac{R^2 y^2}{y-2R}$ 的最小值就行了（因 $\dfrac{\pi}{3}$ 是常数）.

因 $R^2y^2=zy-2Rz$，即 $R^2y^2-z\cdot y+2Rz=0$ (1)

因 R，y，z 均为实数，故方程(1)是实系数一元二次方程（y 为未知数）且有实根.

因此 $\triangle=Z^2-8R^3z\geqslant 0$，即

$Z\geqslant 8R^3$（因 $z>0$）.

故 Z 的最小值为 $8R^3$.

此时，$\triangle=Z^2-8R^3z=0$，$Z=8R^3$，$y=\dfrac{Z}{2R^2}=4R$，

由 $x^2=\dfrac{R^2y}{y-2R}=\dfrac{4R^3}{2R}=2R^2$ 得 $x=\sqrt{2}R$.（因 $x>0$）

因此，当 $x=\sqrt{2}R$，$y=4R$ 时 Z 达到最小值 $8R^3$．此时，V 也达到最小值$\dfrac{8\pi}{3}R^3$.

答：体积最小的圆锥为底面半径等于$\sqrt{2}R$，高为 $4R$ 的圆锥.

习 题 四

1．设球 O 的半径为 R，被一平面 ABC 分成两个球冠 $P-ABC$，$P'-ABC$，且：$S^2_{P'-ABC}=S_{P-ABC}\cdot S_{球}$．求球心 O 到平面 ABC 之距离 OD.

2．外切于一球 O 作一正四棱台 $ABCD-A'B'C'D'$．其两底面边长为 a 和 $b(a>b)$．试求这棱台的全面积和体积.

3．在球面上找一点引三个相等且彼此间夹角都是 2α 的弦，若球半径为 R，问弦长是多少？

4．人造卫星离地面之距离为 H，把地球看成球．求证：在卫星上所看到的地球表面积为：$\dfrac{2\pi R^2H}{R+H}$.

5．已知：直圆锥 ABC 外切于球 O，且其高 AD 为球 O 的直径的 2 倍．求证：圆锥 ABC 的全面积和体积分别是球的面积与体积之两倍.

6．汽罐两端是半径为 R 的半球，中间是圆柱，其高为 H，

底面圆半径为 R. 已知它的全面积为 $4\pi a^2$ 平方米，过轴的截面的周长为 $2b$ 米. 求此汽罐的高 h 和底面半球的半径 R.

7. 已知：在四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp CD$，$BC\perp AD$，$AC\perp BD$，E、F、G、H、K，L 分别是 AB、BC、CD、DA、AC、BD 的中点. 求证：E、F、G、H、K、L 在同一球面上.

8. 圆锥的母线为 l，母线与底面所成的角为 α. 在这圆锥内切一球，而球内有内接立方体. 求这立方体的表面积.

9. 已知：定球面 A，设 B 为经过球心 A 之任一球面. 求证：球面 B 被球面 A 所截下的球冠的面积为定值.（即与球 B 的大小无关）

10. 一个四面体的五条棱长都等于 a，第六条棱长为 b，(1)用 a，b 表示这四面体外接球的半径；(2)你怎样应用(1)的结果求球面透镜的半径？

11. 第一个球的半径为 r_1，一个正四面体外切于它；第二个球半径为 r_2，外接于这个正四面体；一立方体又外切于第二个球；第三个球半径为 r_3，外接于这个立方体. 试求：$r_1:r_2:r_3$.

12. 一个球台和一个圆台的上、下底面重合，它们的体积分别为 V_1 和 V_2，一个圆锥底面圆半径等于这圆台的母线，高等于圆台高的一半，体积为 V_3. 求证：$V_1=V_2+V_3$.

13. 球的外切正四棱台上、下底面边长之比为 $m:n$，求这棱台的体积和球的体积之比.

14. 经过已知点之平面截一已知球，求截面圆圆心之轨迹.

15. 半径为 1 的球，两个边界点用小于 2 的内弧连结起来，证明：这个弧必定位于给定球的某个半球之内.

16. 过已知直线之平面截已知球，求截面圆心之轨迹.

小　结

（第七章和第八章）

1. 这两章讲的内容主要是多面体和旋转体的性质和面积、体积的计算．其中多面体主要研究棱柱、棱锥、棱台和正多面体；旋转体主要研究圆柱、圆锥、圆台和球（包括球体的部分：球缺和球台以及球面的部分：球冠和球带．）

2. 这两章中的许多空间图形的性质可以通过和平面图形相类似部分的性质进行比较，在类比中容易理解和记住它们的性质．下面举两个具体例子加以说明：

(1) 平行四边形与平行六面体的对照：

平面的平行四边形	空间的平行六面体
1) 对边平行且相等；	1) 相对的面平行且全等；
2) 对角线互相平分；	2) 对角线交于一点且被交点平分；
3) 四边平方和等于两对角线平方和；	3) 各棱平方和等于各对角线的平方和；
4) 矩形对角线平方等于两边平方和．	4) 长方体对角线平方等于三度平方和．

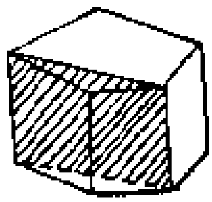
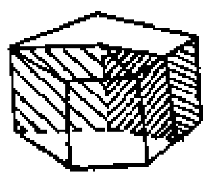
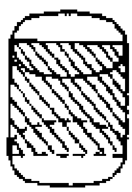
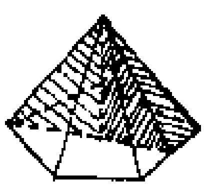
(2) 多边形面积与多面体侧面积的对照：

平面多边形面积公式	空间多面体侧面积公式
1) 矩形：$S=a\cdot H$；	1) 直棱柱：$S_{侧}=p\cdot H$；
2) 正多边形：$S=\frac{1}{2}pd$；	2) 正棱锥：$S_{侧}=\frac{1}{2}p\cdot l$；
3) 梯形：$S=\frac{1}{2}(a+b)H$；	3) 正棱台：$S_{侧}=\frac{1}{2}(p_{上}+p_{下})\cdot l$．

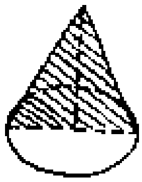
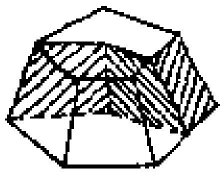
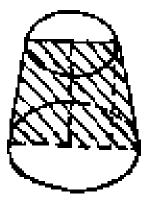
（这里 a 底边长，H 高，p 周长，l 母线）．

读者还可以把其他空间图形与相类似的平面图形，两者相类似的性质加以比较．不过，这里要特别注意，正如第六章已经指出的一样，平面图形具有的某些性质在相类似的空间图形中却没有这些类似的性质．例如，平行四边形的两对角相等，而平行六面体的两相对的三面角一般只对称而不全等．

3．在解决有关多面体和旋转体的问题时，常用的辅助图形如下表所示：

名称	辅助图形	说明
直棱柱		一般作对角面（以侧棱与底面对角线为边的矩形）．
正棱柱		三个矩形： (1) 以侧棱和底面外接圆半径为边的矩形； (2) 以高和底面边心距为边的矩形； (3) 以侧棱和底面边长一半为边的矩形．
圆柱		一般作轴截面（以母线和底面圆的直径为边的矩形；对于等边圆柱是正方形.）
正棱锥		三个直角三角形： (1) 以侧棱、高、底面外接圆半径为边的直角三角形； (2) 以斜高、高、底面边心距为边的直角三角形； (3) 以侧棱、斜高、底面边长一半为边的直角三角形．

续表

名称	辅助图形	说明
圆锥		一般作轴截面(以母线为腰、底面圆的直径为底的等腰三角形.)
正棱台		三个直角梯形和相应的三个直角三角形：(1) 以侧棱、高、上下底面半径为边的直角梯形及其相应的$Rt\triangle$；(2) 以斜高、高、上下底面边心距为边的直角梯形及其相应的$Rt\triangle$；(3) 以侧棱、斜高、上下底面边长一半为边的直角梯形及其相应的$Rt\triangle$.
圆台		一般作轴截面(以母线为腰，上下底面圆直径为底的等腰梯形及其相应的直角三角形).

4. 这一章要解决的主要问题是面积和体积计算，这就要求记住各种多面体和旋转体的面积和体积公式. 为了熟悉和便于记住这些公式，我们可以先记住下面两个统一的基本公式，即统一的侧面积公式：$S_{侧}=\frac{1}{2}(p_{上}+p_{下})l$；和统一的体积公式：$V=\frac{H}{6}(S_{上}+S_{下}+4S_{中})$. 然后利用这两个基本公式推导出其他的具体多面体和旋转体的面积和体积公式.

对于全面积公式，不必死记哪些具体公式了，因为全面积等于侧面积加上底面积. 故只要记住侧面积公式就行了.(因底

面是多边形或圆，它们的面积公式大家是记得很清楚的.）

下面举两个例子，说明如何用统一侧面积公式来推导具体多面体和旋转体的侧面积公式. 例如：正四棱台的侧面积公式可推导如下：已知正四棱台上、下底面边长为 a，b，斜高为 l，这时，$p_{上}=4a$，$p_{下}=4b$，$l=l$ 代入统一侧面积公式得：

$$S_{侧}=\frac{1}{2}(4a+4b)l=2(a+b)l.$$

又例如，圆锥的侧面积公式可推导如下：已知圆锥的底面半径为 R，母线为 l，则：$p_{上}=0$，$p_{下}=2\pi R$，$l=l$，代入统一侧面积公式得：$S_{侧}=\frac{1}{2}(0+2\pi R)l=\pi Rl$.

读者可以自己练习推导出本书中主要研究的多面体和旋转体的侧面积公式.

关于具体体积公式的推导，见附录《多面体和旋转体的统一体积公式》.

5. 关于棱台和圆台的问题，应多从截得它们的棱锥和圆锥中考虑问题，并注意利用棱锥和圆锥的性质 1.（本章 § 3）

例 已知圆台两底半径 R，r. 平行于底的截面将圆台分成等积两部分. 求截口圆的半径.

解：如图8.18所示，$ABCD$是圆台的轴截面. 延长 DA和CB交于 S，则 S 是原圆锥的顶点，设 EF 是所求截面与轴截面的交线. 用 x 表示所求截面圆的半径，分别用 $V_{上}$、V、$V_{下}$ 表示圆锥 SAB、SEF、SCD 的体积，则 $\frac{V_{上}}{V}=\frac{r^3}{x^3}$，

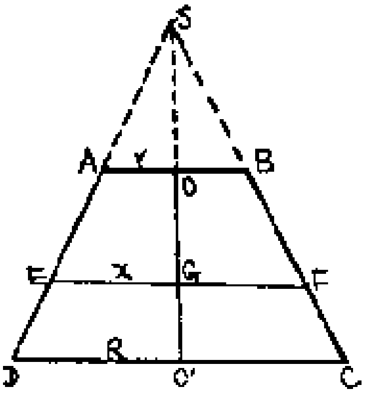


图 8.18

$$\therefore \quad \frac{V-V_{上}}{V}=\frac{x^3-r^3}{x^3},$$

同理可得：$\dfrac{V_{下}-V}{V}=\dfrac{R^3-x^3}{x^3}$，依题意得：$\dfrac{V-V_{上}}{V_{下}-V}=1$，由上两式相除得：$\dfrac{V-V_{上}}{V_{下}-V}=\dfrac{x^3-r^3}{R^3-x^3}$． $\therefore$ $\dfrac{x^3-r^3}{R^3-x^3}=1$

即 $x^3-r^3=R^3-x^3$ $\therefore$ $x=\sqrt[3]{\dfrac{R^3+r^3}{2}}$.

6．有关球的问题，应多从把球的问题转化为某一个或某几个圆的相应问题来考虑，且注意利用截面圆半径 r、球半径 R、截面到球心的距离 d 之间的关系 $d^2=R^2-r^2$ 和面积之比等于半径平方之比，体积之比等于半径立方之比等等．

例 一个球台的底面半径分别是 6cm 和 4cm，它的高为 2cm，求球台的体积．

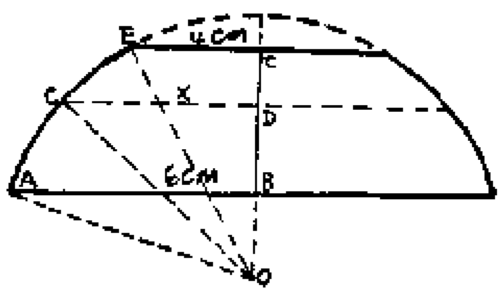


图 8.19

解：我们想直接利用统一体积公式来求球台的体积，这时，

$S_{上}=\pi\cdot4^2=16\pi$,

$S_{下}=\pi\cdot6^2=36\pi$,

$H=2$,

因此只要计算 $S_{中}$ 就行了．为此，先作球台的轴截面如图 8.19 所示．设 O 是球心，高 $BF=2$cm，$AB=6$cm，$EF=4$cm，设中截面半径 $CD=x$cm，$OB=y$cm，设球半径 R，则

$$R^2=6^2+y^2=x^2+(y+1)^2=4^2+(y+2)^2.$$

由上式中消去 y 得：$x^2=27(\text{cm}^2)$．即 $S_{中}=27\pi$．代入统一体积公式得 $V=\dfrac{2}{6}(16\pi+36\pi+4\times27\pi)=\dfrac{160}{3}\pi(\text{cm}^3)$.

7．在计算非规则多面体和旋转体的体积（或表面积）时，除可直接利用统一体积公式计算体积之外，常用的办法是采用

分割，填补，挖去成几个规则多面体和旋转体的办法求其体积．在具体割补时要注意选择便于计算的方案，同时要注意有无重叠或漏掉的部分．重叠部分要扣去，漏掉部分要加上．

例 如图 8.20 所示，正方体的边长为 a，将它的棱四等分，在四分之一处截去各棱得到一个多面体，求这个多面体的体积．

解：在图 8.20 上加上虚线以后可看出这个多面体可分割成前后、上下、左右共六个正四棱台和中间一个立方体，再去计算其体积就简单了．

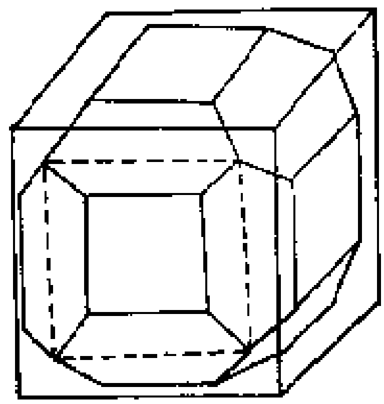


图 8.20

这时正四棱台上底边长为 $\frac{2}{4}a=\frac{1}{2}a$，下底边长为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a+a\right)=\frac{3}{4}a,$$

高为 $\frac{1}{2}\times\frac{a}{4}=\frac{a}{8}$，中间立方体的棱长为 $\frac{3}{4}a$，故这个多面体的体积为：

$$V=6\times\frac{\frac{a}{8}}{3}\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{9}{16}a^2+\frac{3}{8}a^2\right)+\frac{27}{64}a^3$$

$$=\frac{a}{4}\times\frac{19}{16}a^2+\frac{27}{64}a^3=\frac{23}{32}a^3.$$

8．在解决有关多面体和旋转体的表面积计算或求表面上两点间的最短路线（只允许沿多面体或旋转体的表面走）及求一点到表面上某一条直线（或曲线）的最短路线（亦只许沿多面体和旋转体的表面走．）等这些问题时，常常可以利用多面体和旋转体的侧面展开图解决问题．

要求侧面积只需要计算其侧面展开图的面积就行了．如果是要求两点间沿表面走的最短路线，则只需要计算其侧面展开图上相应两点之间的直线距离就行了．如果是要求表面上一点到表面上一条直线（或曲线）的沿表面走的最短路线，则只要求侧面展开图上相应的点到相应的直线的距离（或到相应曲线的切线的垂直距离）就行了．下面举例加以说明．

例　如图 8.21 所示，AB 是圆台的母线，它的上下底面圆半径分别为 2.5cm 和 5cm，$AB=10$cm．从 AB 中点 M 开始，把一条绳子沿着圆台的侧面来卷绕，最后到达 A 点．求绕一圈时，这条绳子最短长度是多少 cm？另外，在这个绳上的点与上底圆周上的点的距离当中，最短的距离是多少 cm？

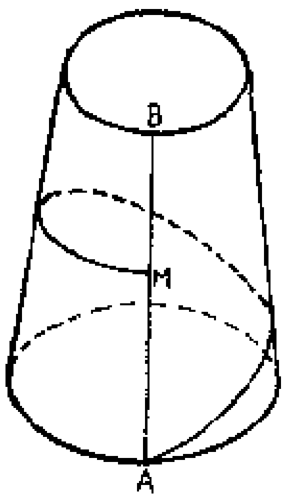


图 8.21

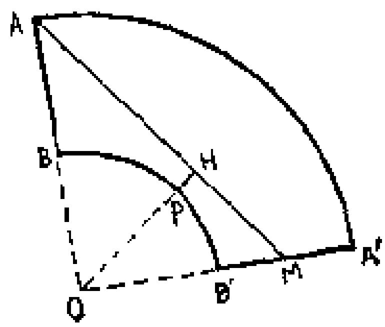


图 8.22

解：把题设的圆台的侧面展开得侧面展开图如图 8.22 所示．沿 AB 切开后再展开．侧面展开图上的 AB 与 $A'B'$ 分别代表切口的两条重合的母线．O 是圆弧 $\overparen{AA'}$ 和 $\overparen{BB'}$ 的圆心．连结 AM（M 是 $A'B'$ 的中点），自 O 作 $OH\perp AM$ 于 H 交 $\overparen{BB'}$ 于 P．则线段 AM 的长就是所求的最短绳长，PH 就是所求的绳上的点与上底圆周上的点之间的最短距离．具体计算如下：

因 $\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{2\pi\times 2.5}{2\pi\times 5}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore\quad OB=AB=10\text{cm},\ OA=20\text{cm},$

$$\angle AOA'=\frac{2\pi\times 5}{20}=\frac{\pi}{2}.$$

$\therefore\quad AM=\sqrt{OA^2+OM^2}=25(\text{cm}).$

在 $Rt\triangle OHM$ 中，$OH=\dfrac{OA\cdot OM}{AM}=\dfrac{20\times 15}{25}=12\ (\text{cm})$,

$\therefore\quad PH=OH-OP=12-10=2(\text{cm}).$

9. 在解决有关多面体的面积和体积的问题中常常遇到角度的计算问题，要利用三角形中的边角关系，要利用一些三角公式，例如和、差、倍、半角的三角函数公式或和差化积及积化和差公式等等进行计算或化简. 在解决这类问题时，要把立体几何知识、平面几何知识与三角学的知识有机地结合起来.

例 过正四柱的下底面对角线和上底面一顶点作一截面，已知由此截得的三棱锥的全面积为 S、且截口三角形的顶角为 α，求这棱柱的全面积.

解：如图 7.11 所示，用 x 表示底面边长，y 表示侧棱长. 则

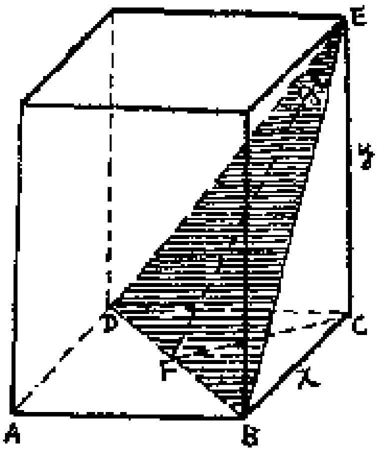


图 8.23

$$S=\frac{1}{2}x^2+2\left(\frac{1}{2}xy\right)$$
$$+\frac{1}{2}DB\cdot EF$$
$$=\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}(\sqrt{2}x)$$
$$\cdot FB\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$$
$$=\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{\sqrt{2}}{2}x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

但 $y=\sqrt{EF^2-FC^2}=\sqrt{\left(BF\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}x\cdot\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}x^2+x\cdot\frac{\sqrt{2}x\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

$$=\frac{x^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\therefore\quad x=\sqrt{\frac{S\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}+\cos\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\therefore\quad S_{棱柱全}=2x^2+4xy=\frac{2x^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}\right)$$

$$=\frac{2\cdot 2S\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}+\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{4S\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}+\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

10. 在解决多面体和旋转体的面积和体积的计算和证明题中，常常会遇到未知数太多，而未知数与已知数的关系不直接或不明显，这时利用列方程或方程组来解决问题是很有效的方法．下面举例具体说明．

例 圆锥被一垂直于其轴且通过其内切球的球心的平面分为相等的两部分，求圆锥母线和底面的夹角．

分析： 已知的是圆锥两部分的体积相等，要求的是母线与

底面的夹角，这两者之间的关系不明显．我们想利用一些参数把两部分体积都表示成要求的角 x 的表达式，再消去参数，利用体积相等得到关于 x 的方程，再解这个方程求 x 就行了．

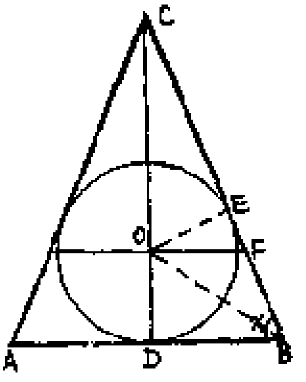


图 8.24

解：作此圆锥的轴截面 ABC 如图 8.24 所示，连 OB（O 是球心）和 OE（E 是圆锥侧面与球面的切点）则 $\angle COE=\angle DBC$（∵ 角的两边互相垂直）且 $\angle OFE=\angle DBC$（同位角，这里 F 是截面与 BC 的交点）即 $\angle COE=\angle OFE=x$．设 r 表示内切球的半径，则

$$V_{圆锥COF}=\frac{1}{3}\pi\cdot OF^2\cdot CO=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{r}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{r}{\cos x}$$

$$=\frac{\pi r^3}{3\sin^2 x\cos x},$$

$$V_{圆锥CAB}=\frac{1}{3}\pi\cdot DB^2\cdot CD=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}(DB\operatorname{tg}x)$$

$$=\frac{\pi r^3}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}\operatorname{tg}x.$$

依题意得：$\dfrac{\pi r^3}{3\sin^2 x\cos x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi r^3}{3}\operatorname{ctg}^3\dfrac{x}{2}\operatorname{tg}x.$

$$\sin^2 x\cos x\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}\operatorname{tg}x=2,$$

$$\sin^3 x\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}=2,$$

$$\sin x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\sqrt[3]{2},$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\sqrt[3]{2},$$

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2},$$

$$\therefore\quad \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}.\qquad 因此 x=2\arccos\frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

附录　多面体和旋转体的统一体积公式

$$V=\frac{H}{6}(S_{上}+S_{下}+4S_{中}).$$

为了进行关于多面体和旋转体的具体体积公式的推导，我们先证明多面体和旋转体的统一体积公式

$$V=\frac{H}{6}(S_{上}+S_{下}+4S_{中}),$$

再指出它的适用范围，最后举几个例子说明如何利用统一体积公式来推导各种具体多面体和旋转体的体积公式.

设有一个介于两个平行平面间的几何体如图 8.25 所示，它的上、下、中截面面积分别用 $S_{上}$、$S_{下}$、$S_{中}$ 表示，两平行平面间的距离即高为 H，且任一平面于两底面且与两底面之一的距离为 x 处的截面面积为 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$.（其中 a_0，a_1、a_2、a_3 是与 x 无关的常数），则这个几何体的体积为　$V=\frac{H}{6}(S_{上}+S_{下}+4S_{中})$.

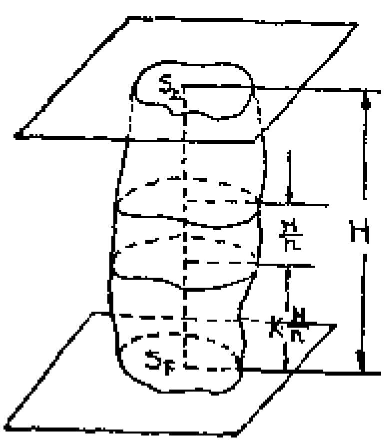


图 8.25

证： 将这个几何体的高 H 分成n等分（如图 8.25 所示．）通过每一等分点作平行于底面的截面，将这个几何体分成 n 个薄片，每个薄片可近似地看成一个以截面为底面的柱体．将这 n 个柱体体积加起来的和就近似地等于整个几何体的体积．当 $n\to\infty$ 时，这个和的极限就是这个几何体的体积.

根据题设，第 k 个截面的面积为

$$f\left(K\cdot\frac{H}{n}\right)=a_0\left(K\cdot\frac{H}{n}\right)^3+a_1\left(K\cdot\frac{H}{n}\right)^2+a_2\left(\frac{K}{n}\cdot H\right)+a_3$$

故 $$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[a_0\left(K\cdot\frac{H}{n}\right)^3+a_1\left(K\cdot\frac{H}{n}\right)^2\right.$$

$$\left.+a_2\left(K\cdot\frac{H}{n}\right)+a_3\right]\cdot\frac{H}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{H}{n}\left[a_0\cdot\frac{H^3}{n^3}(1^3+2^3+\cdots+n^3)\right.$$

$$+a_1\cdot\frac{H^2}{n^2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$

$$\left.+a_2\cdot\frac{H}{n}(1+2+\cdots+n)+na_3\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{H}{n}\left[a_0\cdot\frac{H^3}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right.$$

$$+a_1\cdot\frac{H^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\left.+a_2\cdot\frac{H}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+na_3\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}H\left[a_0H^3\cdot\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+a_1\cdot H^2\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+a_2\cdot H\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+a_3\right]$$

$$=\frac{1}{4}a_0H^4+\frac{1}{3}a_1H^3+\frac{1}{2}a_2H^2+a_3H$$

$$=\frac{H}{6}\left\{a_3+(a_0H^3+a_1H^2+a_2\cdot H+a_3)\right.$$

$$\left.+4\left[a_0\left(\frac{H}{2}\right)^3+a_1\left(\frac{H}{2}\right)^2+a_2\left(\frac{H}{2}\right)+a_3\right]\right\}$$

$$=\frac{H}{6}(S_{上}+S_{下}+4S_{中}).$$

下面举两个例子说明如何用统一体积公式来推导具体的多面体和旋转体的体积公式.

例如，四棱台的体积公式可推导如下：

已知正四棱台的上、下底面边长为 a 和 b，高为 H，则 $S_{上}=a^2$，$S_{下}=b^2$，$S_{中}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，代入统一体积公式得：

$$V=\frac{H}{6}\left(a^2+b^2+4\frac{a^2+b^2+2ab}{4}\right)=\frac{H}{3}(a^2+b^2+ab)$$

（请读者自己验算对于正四棱台符合上面证明的定理要满足的条件，即离一底面距离为 x 的截面面积 $f(x)$ 是 x 的二次函数.）

又例如，球缺体积公式的推导如下：

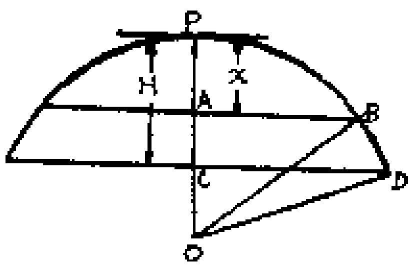


图 8.26

已知球半径为 R，球缺的高为 H. 设离上底面（一个点 P）的距离为 x 的截面面积为 $f(x)$，则如图 8.26 所示.

$$\begin{aligned}f(x)&=\pi\cdot AB^2\\&=\pi[R^2-(R-x)^2]\\&=\pi x^2+2\pi Rx\end{aligned}$$

是 x 的二次函数，故上述定理的条件满足，统一体积公式适用于球缺. 这时，$S_{上}=0$，$S_{下}=\pi H^2+2\pi RH$，

$$S_{中}=\frac{\pi H^2}{4}+\pi RH.$$

代入统一体积公式得：

$$\begin{aligned}V&=\frac{H}{6}\left[0+(\pi H^2+2\pi RH)+4\left(\frac{\pi H^2}{4}+\pi RH\right)\right]\\&=\frac{H}{6}(6\pi RH+2\pi H^2)\end{aligned}$$

即 $V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$

读者可以练习用统一体积公式求出所有其他多面体和旋转体的体积公(包括球台的体积公式)式. 这里要特别指出统一体积公式的适用范围. 用统一体积公式可以计算如下几何体的体积:

1) 中学课本中的所有规则几何体的体积包括棱柱、棱锥、棱台、圆柱、圆锥、圆台、球、球缺、球台. (证明留给读者作为练习)

2) 凡是一个几何体是由两个符合上述定理条件的几何体组合而成(或者一个挖去另一个而成), 则这个组合的几何体可以直接应用统一体积公式计算其体积. 现在证明如下:

设符合上述定理条件的两个几何体的上、下底面积和中截面积分别为 $S'_{上}$ 和 $S''_{上}$、$S'_{下}$ 和 $S''_{下}$、$S'_{中}$ 和 $S''_{中}$. 而组合几何体的上、下底面积及中截面积为 $S_{上}$、$S_{下}$ 和 $S_{中}$ 则依题意

$$S_{上}=S'_{上}\pm S''_{上},\quad S_{下}=S'_{下}\pm S''_{下},\quad S_{中}=S'_{中}\pm S''_{中}.$$

因为三者的高都相等, 设三者的体积分别为 V', V'' 和 V, 则

$$\begin{aligned}
V=V'\pm V''&=\frac{H}{6}(S'_{上}+S'_{下}+4S'_{中})\\
&\quad\pm\frac{H}{6}(S''_{上}+S''_{下}+4S''_{中})\\
&=\frac{H}{6}\left[(S'_{上}\pm S''_{上})+(S'_{下}\pm S''_{下})+4(S'_{中}\pm S''_{中})\right]\\
&=\frac{H}{6}(S_{上}+S_{下}+4S_{中}).
\end{aligned}$$

对于由许多符合上述定理条件几何体组合或挖去而成的几何体, 同样可以直接应用统一体积公式计算其体积 (不过要注意, 哪些符合上述定理条件的几何体的上、下底面和中截面应分别在同一个平面上, 且它们互相不重叠.)

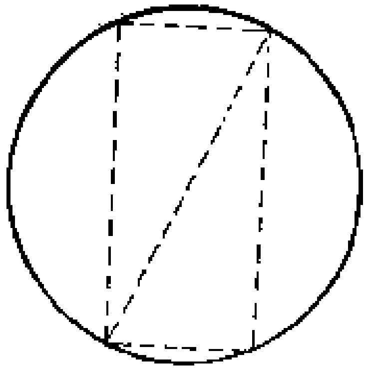


图 8.27

例如：一个半径为 5 的球中间钻了一个直径是 6 的圆柱形孔，如图 8.27 所示．求剩余部分的体积．

这时， $S_{上}=0$，

$$S_{中}=\pi(5^2-3^2)=16\pi,$$

$$S_{下}=0,\quad H=\sqrt{10^2-6^2}=8,$$

代入统一体积公式得：

$$V=\frac{8}{6}(0+0+4\times16\pi)$$

$$=\frac{256}{3}\pi.$$

此题一般书上是用一个球缺减去一个圆柱和另一个球缺去计算体积，但这比上述计算要复杂得多．

3）上述定理还可以用来计算二次曲线或半立方抛物线绕其对称轴旋转而成的旋转体的体积．具体证明如下：

已知二次曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$（或 $y^2=2px$），半立方抛物线的方程为 $y^2=x^3$ 则它们中的一段曲线组成的曲边梯形 $ABCD$（如图 8.28 所示）（其中 AB 在 X 轴上，AD 和 BC 垂直于 X 轴，$\overset{\frown}{CD}$ 是二次曲线或半立方抛物线上的一段曲线弧．）绕 X 轴旋转一周而形成的旋转体的体积可按统一体积公式计算其体积．

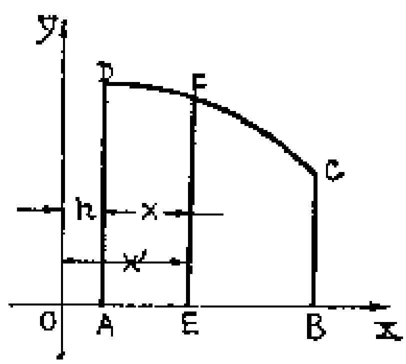


图 8.28

证：把 BC、AD 旋转而成的圆面看成下、上底面，设 $OA=h$，作平行于底面的截面其半径为 EF 且距离上底面（AD）为 x，则其面积 $f(x)=\pi\cdot EF^2=\pi\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}x'^2\right)$

或 $\pi\left(\frac{b^2}{a^2}x'^2-b^2\right)$ 或 $\pi\cdot 2px'$ 或 $\pi x'^3$ 都是 x 的三次以下函数：

$$f(x)=\pi\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}(x+h)^2\right] \text{或} \pi\left[\frac{b^2}{a^2}(x+h)^2-b^2\right]$$

或 $2p\pi(x+h)$ 或 $\pi(x+h)^3$. 因此符合上述定理的条件，故可以用统一体积公式计算其体积.

例如，设 a 为正的常数，在以 O 为原点的平面上有一点 $P(a,\ p)\ (p>0)$. (1) 以 X 轴为轴，试求过 O、P 的抛物线的方程；(2) 中心在 X 轴上，过 O、P 的圆的半径为 r，试用 a 和 p 表示 r；(3) 在 $y\geqslant 0$ 范围内，由 (1) 的抛物线弧 OP 和 (2) 的圆弧 OP 围成的部分设为 S，S 绕 X 轴旋转一周得一旋转体. 试证它的体积与 p 无关而为一定值.

解：(1) 因为抛物线在轴上的点只有顶点，所以原点是顶点，因而抛物线方程应是 $x=ky^2$，且过点 $P(a,\ p)$，$\therefore\ a=kp^2$，

$$\therefore\ k=\frac{a}{p^2}，\text{故}\quad y^2=\frac{p^2}{a}x.$$

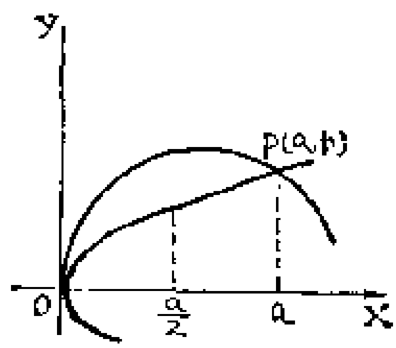


图 8.29

(2) 圆的方程为

$$(x-r)^2+y^2=r^2$$

即 $\quad x^2-2rx-y^2=0$,

因过点 P，$\therefore\ a^2-2ar+p^2=0$，$\quad\therefore\ r=\frac{a^2+p^2}{2a}$.

(3) 如图 8.29 所示，把 O 点看成上底面，由 P 作 $PQ\perp X$ 轴于 Q 点，把 PQ 旋转而成的圆面看成下底面，则

$$S_{上}=0,\ S_{下}=\pi p^2-\pi p^2=0,$$

$$S_{中}=\pi\left[2r\cdot\frac{a}{2}-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]-\pi\left(\frac{p^2}{a}\cdot\frac{a}{2}\right)=\frac{\pi a^2}{4},$$

代入统一体积公式得：

$$V=\frac{a}{6}\left(0+0+4\cdot\frac{\pi a^{2}}{4}\right)=\frac{\pi}{6}a^{3},$$

故体积是不含有 p 的一个定值.

习题答案与提示

第 一 章

习 题 一（略）

习 题 二

1. 连 DF，用中位线定理，比值为1。

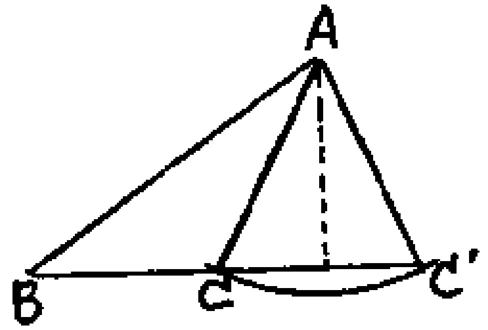
2. 先证 $BD+CD<AB+AC$，延长 BD 交 AC 于E，利用三角形两边之和大于第三边。

3. 设三中线 AD、BE、CF 交于 M 点，连 DF，则 $DF=\frac{1}{2}AC$，又 $AF=\frac{1}{2}AB$，在$\triangle AFD$中，$AF+FD>AD$. 对 BE、CF 亦作同样处理. 将三个不等式两边分别相加.

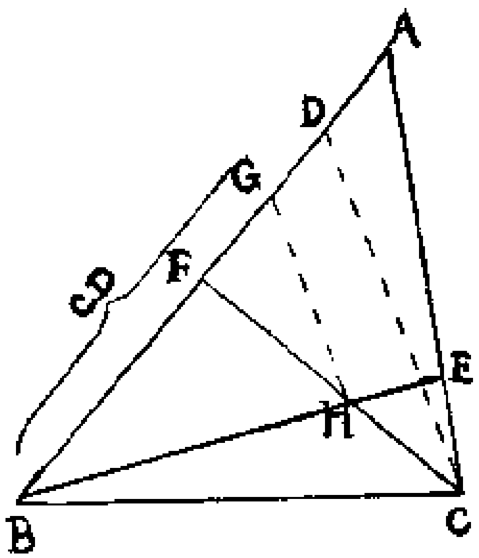
4. 以 l 为对称轴，作 B 的对称点 B'，连 AB' 交l 于 C，则 C 为所求之点. 再取 l 上任一异于 C 的点 C'，证明 $AC+CB<AC'+C'B$.

5. 不一定全等. 若是大边所对的角对应相等，则全等，可用叠合法证明；若是小边所对的角对应相等，则不一定全等。如图，$\triangle ABC$ 与$\triangle ABC'$，$\angle B=\angle B$，$AB=AB$，$AC=AC'$. 但两个三角形不全等.

8. 证明：$\because$在$\triangle ABC$ 中，$\angle B<\angle C$，而 BE、CF 分别是$\angle B$、$\angle C$ 的平分线，$\therefore\angle ABE<\angle ACF$，$\therefore$ 可在$\angle ACF$内部作$\angle FCD=\angle ABE$，另一边 CD 交 AB 于 D. 在$\triangle BCD$ 中，$\because\angle EBC<\angle BCF$，$\therefore$ $\angle EBC+\angle ABE<\angle BCF+\angle FCD$，即 $\angle CBD<\angle BCD$. 因此，$BD>CD$. 因之可在 BD 上取 $BG=CD$，过 G 作 $GH\parallel CD$，交 BE 于 H. 在$\triangle BHG$ 与$\triangle CFD$ 中，$BG=CD$，$\angle HBG=\angle DCF$，$\angle BGH=\angle CDF$，$\therefore$ $\triangle BHG\cong\triangle CFD$. 于是 $BH=CF$. 而 $BE>BH$（全量大于分量），故 $BE>CF$.



第 5 题



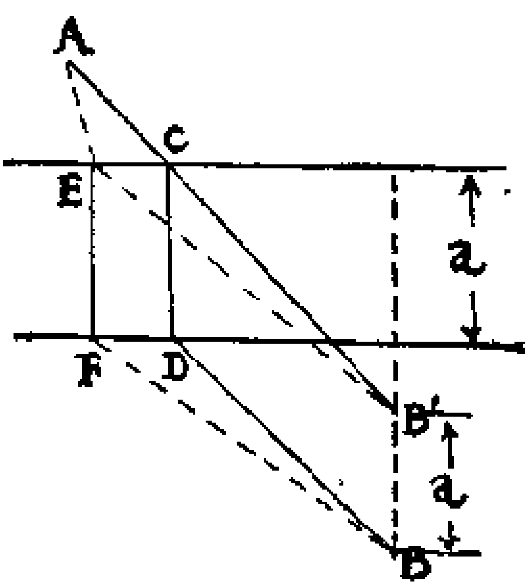
第 8 题

习 题 三

2. 若 $AECF$ 为菱形，则对角线互相垂直平分，于是原四边形对角线亦为互相垂直平分，故亦为菱形．这时，能在 BD 直线上取 E'、F' 使 $AE'CF'$ 为正方形，这只须 $E'F'=AC$ 即可．

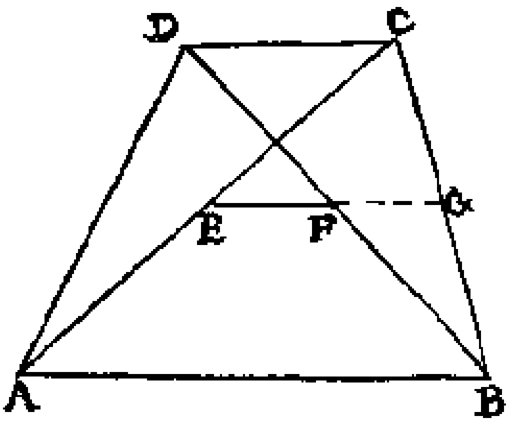
3. 先证 $EFGH$ 为矩形，再证邻边相等．

4. 如图，设河宽为 a，过 B 作 BB' 垂直于河岸，取 $BB'=a$，连 AB' 与河彼岸交于 C．在 C 处架桥 CD，则由 A 至 C 至 D 至 B 路程最短．事实上，设在异于 C 的 E 处再架一桥 EF．连接必要线段，$\because BB' \perp\!\!\!= CD \perp\!\!\!= EF$，$\therefore BB'CD$、$BB'EF$ 为平行四边形．因此，$BD=B'C$，$BF=B'E$．于是 $AE+EF+FB=AE+EB'+a>AB'+a=AC+CB'+a=AC+CD+DB$．

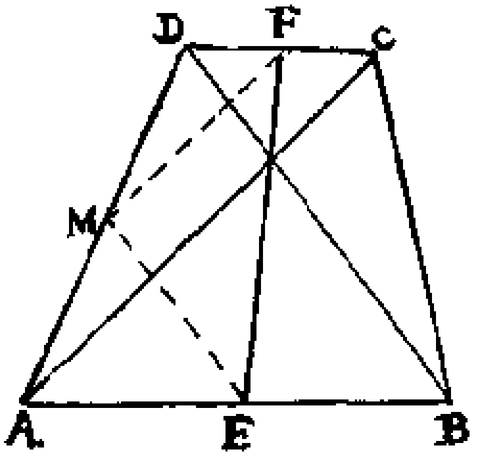


第 4 题

5．取 BC 的中点 G，连 EG、FG，则 $EG \underline{\parallel} \frac{1}{2}AB$，$FG \underline{\parallel} \frac{1}{2}CD \parallel AB$，∴ EG、FG 共线，故 $EF \parallel AB$，且 $EF = EG - FG = \frac{1}{2}(AB - CD)$．



第5题

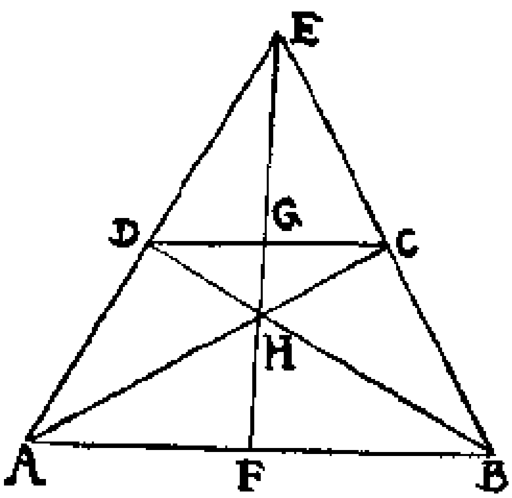


第6题

6．(2)如图，取 AD 的中点 M，连 ME、MF，则 ME、MF 分别是$\triangle ABD$与$\triangle ACD$的中位线，利用 $ME + MF > EF$.

习 题 四

1．设 AD、BC 相交于 E，AB 的中点为 F．连 EF 交 CD 于G，∵ $AB \parallel CD$，∴ $\frac{DG}{AF} = \frac{EG}{EF} = \frac{GC}{FB}$，而 $AF = FB$，∴ $DG = GC$，即 G 是 CD 的中点．再设 AC、BD 交于H，则 $\frac{AH}{HC} = \frac{BH}{HD} = \frac{AB}{CD} = \frac{AF}{CG}$，又$\angle FAH = \angle GCH$，∴ $\triangle AFH \backsim \triangle CGH$，∴ $\angle AHF = \angle CHG$．而 A、H、C 在一直线上，故 F、H、G 在一直线上，即 H 亦在 EF 上.

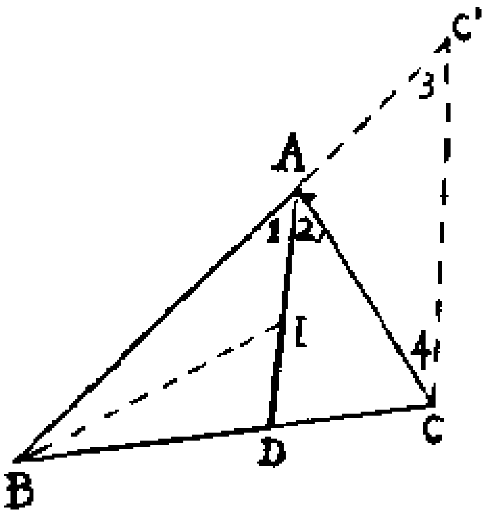


第1题

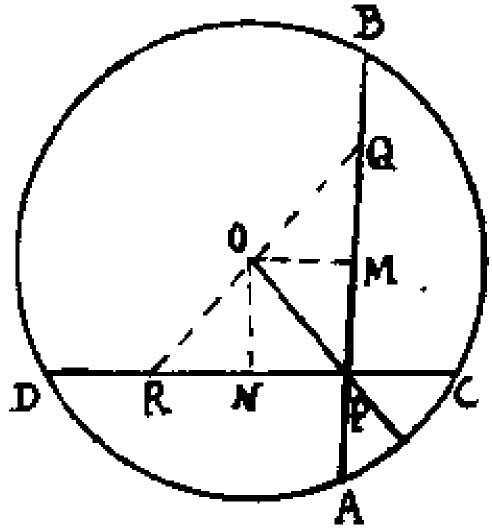
2(1)．$\frac{OE}{CD} = \frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD}$

$= \dfrac{OF}{CD}$.　　(2) $EF = \dfrac{72}{7}$.

4. ∵ $\triangle OGE \backsim \triangle ABC$, ∴ $\dfrac{GE}{BC} = \dfrac{OG}{AB} = \dfrac{HB}{AB}$. $\triangle FOK \backsim \triangle ABC$, ∴ $\dfrac{KF}{CA} = \dfrac{FO}{AB} = \dfrac{AD}{AB}$. 因此, $\dfrac{DH}{AB} + \dfrac{GE}{BC} + \dfrac{KF}{CA} = \dfrac{DH}{AB} + \dfrac{HB}{AB} + \dfrac{AD}{AB} = 1$.



第 5 题



第 1 题

5. 延长 BA 至 C' 使 $AC' = AC$, 连 CC', 则 $\angle 3 = \angle 4$. 又 $\angle BAC = \angle 3 + \angle 4 = 2\angle 3$, ∴ $\angle 1 = \angle 3$. 因此 $AD \parallel C'C$, 于是

$$\frac{AB + AC}{BC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{BA}{BD} = \frac{AI}{ID}.$$

习 题 五

1. 如图, 已知 $\angle OPB < \angle OPD$, 欲证 $AB > CD$, 只须证 $OM < ON$. 以 O 为心, OP 为半径画圆, 交 AB 于 Q, 交 CD 于 R. 在等腰三角形 OPQ 与 OPR 中, ∵ $\angle OPB < \angle OPD$, ∴ $\angle POQ > \angle POR$. 那么在小 $\odot O$ 中, 弦 $PQ >$ 弦 PR, 故 $OM < ON$. (注: 用锐角三角函数证更简单.)

2. 连 AC、AD, 利用弦切角定理、圆周角定理及垂径定理证明△

$ADC \cong \triangle ADE$.

3. 用四点共圆及同弧上圆周角等证明.

4. 用切线长定理即可证明.

5. 连 CD，过 P 作公切线交 BC 于 E，则 $\angle ECP = \angle CPE$，$\angle BAP = \angle BPE$. 因此 $\angle CPD = \angle ECP + \angle BAP = \angle CPE + \angle EPB = \angle BPC$. 另外，$\angle BCP = \angle CDP$，$\therefore \triangle BCP \sim \triangle CDP$，从而 $\frac{PB}{PC} = \frac{PC}{PD}$，即 $PC^2 = PB \cdot PD$.

习 题 六

2. 连 FD、FH、BH，

$\because$ $EF = FB$，

$\therefore$ $S_{\triangle EFH} = S_{\triangle FBH}$.

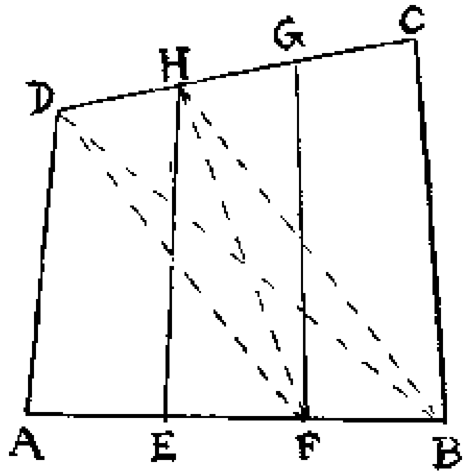
同理，$S_{\triangle DFH} = S_{\triangle HFG}$.

因此 $S_{\square FBHD} = S_{\square EFGH}$.

连 BD，$\because FB = \frac{1}{3}AB$，

$\therefore$ $S_{\triangle FBD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD}$. 同理，

$S_{\triangle DBH} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD}$.

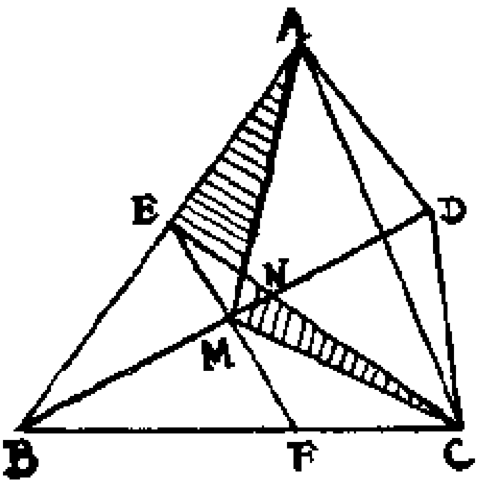


第 2 题

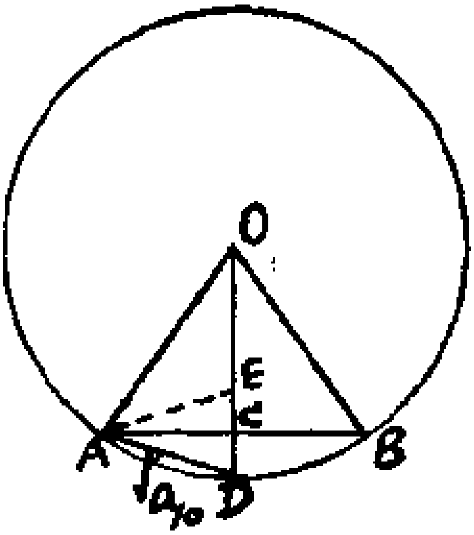
故 $S_{\square FBHD} = S_{\triangle FBD} + S_{\triangle DBH} = \frac{1}{3} \cdot (S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}) = \frac{1}{3} S_{\square ABCD} = \frac{1}{3}$. 即 $S_{\square EFGH} = \frac{1}{3}$.

3. 过另一腰的中点引这腰的平行线，可得一平行四边形，与梯形等积.

4. 连 MA 交 EC 于 N，连 MC，则 $S_{\triangle BCE} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BCM} - S_{\triangle AEN} + S_{\triangle MCN}$. 由 $EF \parallel AC$，可证 $S_{\triangle AEN} = S_{\triangle MCN}$. 由 M 是 BD 的中点知，$S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABD} + \frac{1}{2} S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$.



第 4 题



第 5 题

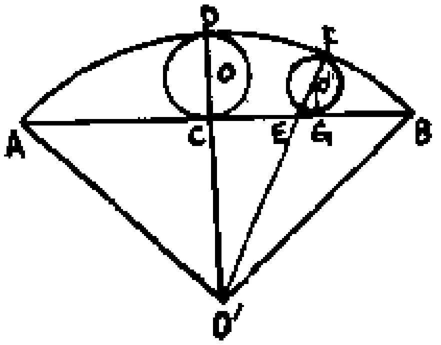
5. 设 AB 是正五边形的一边，由圆心 O 作半径 $OD \perp AB$，交于 C，则 AD 是正十边形的一边，设为 a_{10}，$\angle AOD = 36°$. 作 $\angle OAD$ 的平分线 OE 交 OD 于 E，则$\angle DAE = 36°$. 因此，$AD = AE = OE$，$\triangle ADE \backsim \triangle OAD$，于是$\frac{a_{10}}{R - a_{10}} = \frac{R}{a_{10}}$，解得 $a_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R$. 从而

$$AC^2 = a_{10}^2 - \left(\frac{R - a_{10}}{2}\right)^2 = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{1^2} R^2，故 AB$$

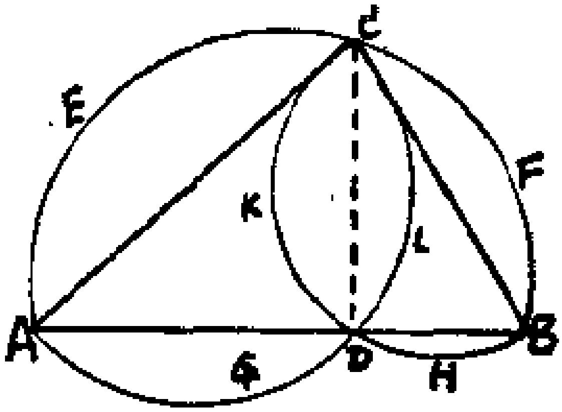
$$= \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

6. 设 CD 是弓形 ADB 的高，所在圆心为 O'，$\odot O$ 是以 CD 为直径的圆. 另作内切圆 O''，与 $\odot O'$ 切于 F，与 AB 切于 G、连 $O'O''$ 过切点 F 且交 AB 于 E. 连 $O''G$，则 $O''G \perp AB$. $\because$ $O'C < O'E$，$\therefore$ $CD > EF$，但 $O''E > O''G$，$\therefore$ $EF > O''F + O''G = 2O''F$. 因此 $CD > 2O''F$，$OD > O''F$，这说明内切圆 O 最大.

7(2). 欲证弓形 AEC + 弓形 BFC — 弓形 AGD — 弓形 BHD = 曲线形$CKDL$. 因为$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2$ = 弓形 AEC + 弓形BFC − 弓形 AGD − 弓形 DHB − 曲线形 $CKDL = 0$，故可证.



第 6 题

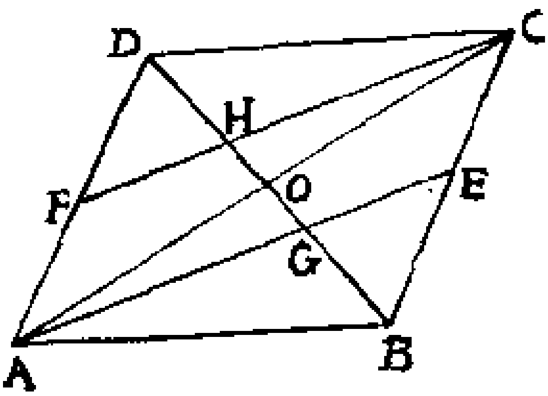


第 7 题(2)

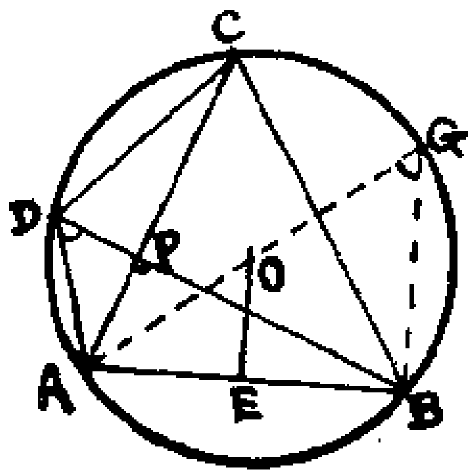
第 二 章

习 题 一

1. 在$\triangle ABC$中，G是重心，则$OG=\frac{1}{2}GB$.



第 1 题



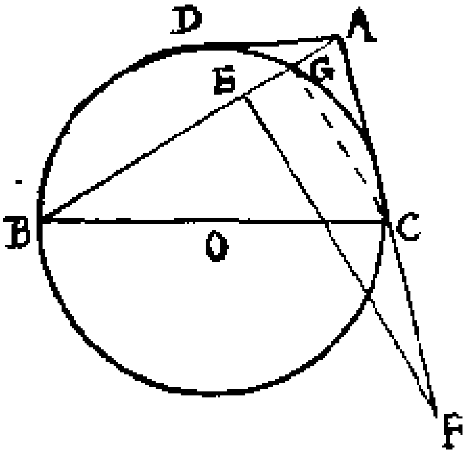
第 2 题

2. 作辅助线如图，$BG=2OE$. 由于$\angle AGB=\angle ADB$，所以$\angle BAG=\angle CAD$，因此$\overset{\frown}{BG}=\overset{\frown}{CD}$，故$BG=CD$.

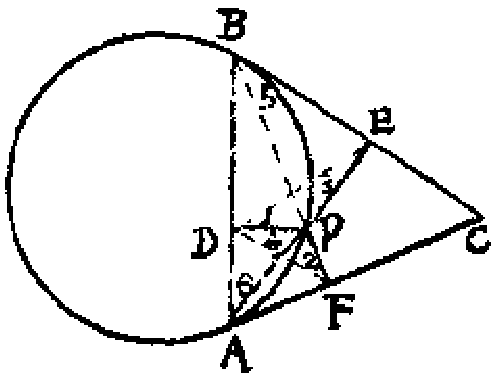
3. 欲证$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AEF}$，只须$AB\cdot CG=AE\cdot EF$，只须

$\frac{AB}{AE}=\frac{EF}{CG}$，只须$\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AG}$，只须$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{AG}$，只须

$AD^2=AB\cdot AG$.



第 3 题



第 4 题

4. 欲证$PD^2=PE\cdot PF$，只须$\frac{PD}{PE}=\frac{PF}{PD}$，只须$\triangle PDE\backsim\triangle PFD$，只须$\angle1=\angle2$，$\angle3=\angle4$，只须$\angle5=\angle6$，$\angle3=\angle4$.

习　题　二

1. 分外切与内切两种情况，且过A引两圆的公切线，连BD、CE即可得证.

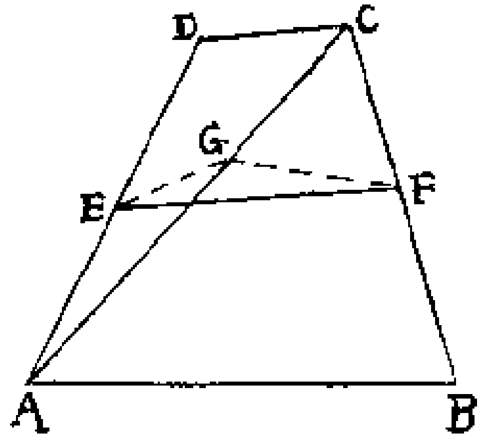
2. 分三种情况：1) $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$均为劣弧；2) $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$中一个为劣弧，另一个为优弧；3) 两者均为优弧.

4. n边形共有$\frac{1}{2}n(n-3)$条对角线.

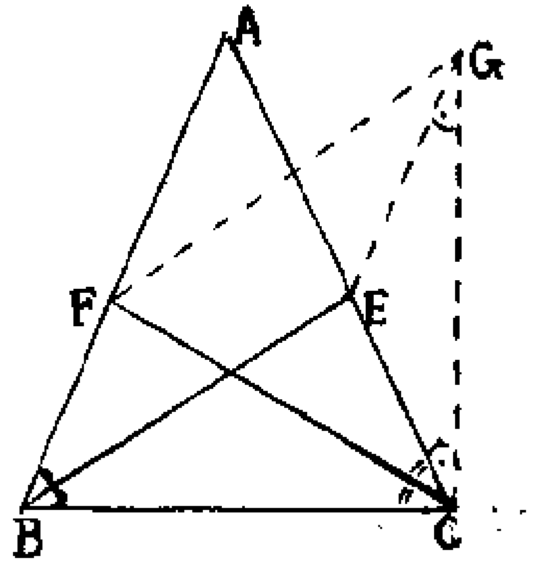
5. 把第$K+1$条直线上去，根据题目的条件，这条直线同已有的K条直线都相交，并且穿过$(K+1)$个平面部分.

习　题　三

3. 如图，设$AB\nparallel CD$，连AC，令中点为G，连EG、FG，那么，$GE\parallel CD$，$GF\parallel AB$，∴ E、G、F不在一直线上，∴ $EF<GF+GE=\frac{1}{2}(AB+CD)$，矛盾.



第 3 题



第 4 题

4. 设 $AB>AC \Longrightarrow \angle ACB>\angle ABC \Longrightarrow \angle BCF=\angle FCE>\angle CBE=\angle EBF \Longrightarrow BF>CE \Longrightarrow EG>CE \Longrightarrow \angle ECG>\angle CGE \Longrightarrow \angle FCG>\angle CGF \Longrightarrow FG>FC \Longrightarrow BE>FC$矛盾. 同理，设 $AB<AC$，亦矛盾.

7. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$；
求证：$DE \parallel BC$.

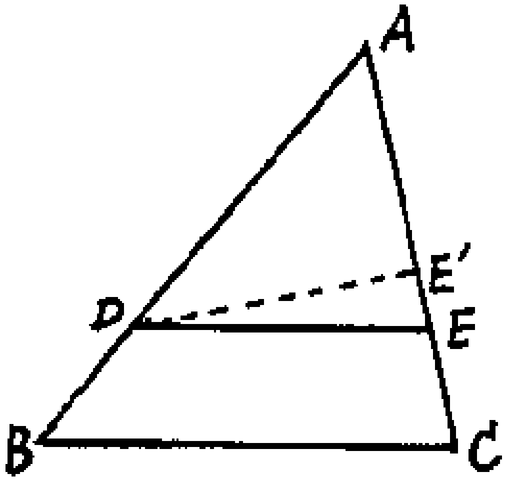
证明：过 D 作 $DE' \parallel BC$ 交 AC 于 E'，则$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE'}{AC}$，但是$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$，∴ $\dfrac{AE'}{AC}=\dfrac{AE}{AC}$，即 $AE'=AE$. 而 E'、E 均在 AC 上，故 E'、E 重合，故 $DE \parallel BC$.

8. 证明：作 DE' 交 AC 于 E'，使$\angle E'DC=30°$，再作$\angle DE'B'=80°$使 $E'B'$ 交 AB 或延长线于 B'，现在要证明 B' 与 B 重合.

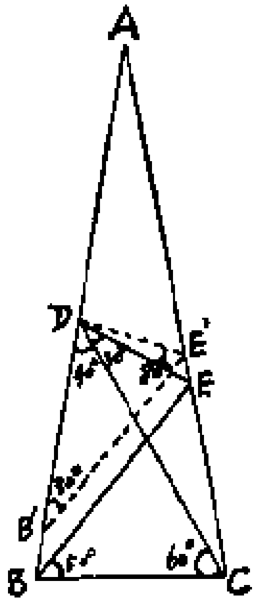
∵ $AB=AC$，∴$\angle ABC=\angle ACB=80°$，而$\angle EBC=50°$，
$\angle BCD=60°$，∴ $\angle DBE=30°$，$\angle DCE=20°$，
$\angle BDC=40°$，$AD=DC$.

在$\triangle BCD$ 中，

$$\frac{BD}{\sin 60°}=\frac{DC}{\sin 80°}，\quad BD=\frac{\sin 60°}{\sin 80°}DC=\frac{\sin 60°}{\sin 80°}AD.$$



第 7 题



第 8 题

另一方面，在$\triangle ADE'$中，

$$\frac{DE'}{\sin 20^\circ}=\frac{AD}{\sin 50^\circ},\quad DE'=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 50^\circ}AD.$$

在$\triangle DE'B'$中，$\dfrac{DB'}{\sin 80^\circ}=\dfrac{DE'}{\sin 30^\circ}$，$DB'=\dfrac{\sin 80^\circ}{\sin 30^\circ}DE'$

$$=\frac{2\sin 80^\circ \sin 20^\circ}{\sin 50^\circ}AD=\frac{\cos 60^\circ-\cos 100^\circ}{\cos 40^\circ}AD$$

$$=\frac{\cos 80^\circ+\frac{1}{2}}{\cos 40^\circ}AD=\frac{2\sin 40^\circ\cos 80^\circ+\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ}AD$$

$$=\frac{\sin 120^\circ+\sin(-40^\circ)+\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ}AD$$

$=\dfrac{\sin 60^\circ}{\sin 80^\circ}AD$，故 $DB'=DB$. 即 B' 与 B 重合. 于是 E' 与 E 重合. 故$\angle CDE=30^\circ$，$\angle BED=80^\circ$.

9. 用同一法可证.

习 题 四

1. 连 OA，则 $OA\perp AC$，连 OB，则 $OB\perp BD$. 因为 $AC\parallel BD$，则 A、O、B 共线，以之为 y 轴，O 为原点得坐标系. 可算出$|AC|\cdot|BD|$

$=R^2$.

2. 以 O 为原点，OX 边为横轴，得坐标系. 可设 M 的坐标为 $(a, 11)$，∵ $\angle xoy=60°$，∴ oy的方程为 $y=\sqrt{3}x$. 依点到直线的距离公式可求出 $a=5\sqrt{3}$.

3. 连 EF，分别与 AB、AD、AC 交于 G、I、H. 依对称性，只要证$|EG|=|GI|$即可. 以圆心 O 为原点，AD 为 y 轴，$|OA|$之长为长度单位得坐标系，A 的坐标为 $(0, 1)$，若设 B 的坐标为 $(-b, -1)$，则可算出$|GI|=\frac{b}{b^2+1}$，$|EG|=|EI|-|GI|=\frac{b}{b^2+1}$.

4. 以 O 为原点，OA 为 x 轴，$|OA|$为长度单位，得坐标系. 设 B 的坐标为 (x_1, y_1)，可算出 P点的坐标$\left(\frac{y_1^2+2x_1}{2}, \frac{y_1(1-x_1)}{2}\right)$，从而算出 $OP^2+EP^2=1$.

5. 以 AB、AD 为坐标轴，设圆的方程为：$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$，则 C 的坐标分别是 B、D 的横标与纵标.

6. 设$\triangle EFG$ 是矩形 $ABCD$ 的内接三角形，若三顶点在邻边上，显然其面积小于矩形面积的$\frac{1}{2}$；因此至少有两个点在对边上，不妨设 E 在 AB 上，F、G 在 BC、DA 上. 分别以 AB、AD 为坐标轴，$|AB|=a$，$|AD|=b$，则可设 E、F、G 的坐标为 (x_1, o)、(a, y_1)、(o, y_2)，其中 $o\leqslant x_1\leqslant a$，$o\leqslant y_1$，$y_2\leqslant b$. 于是，

$$S_{\triangle EFG}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & o & 1 \\ a & y_1 & 1 \\ o & y_2 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(x_1y_1+ay_2-x_1y_2)$$

$$=\frac{1}{2}(x_1y_1+(a-x_1)y_2)\leqslant\frac{1}{2}(x_1b+(a-x_1)b)$$

$$=\frac{1}{2}(x_1b+ab-x_1b)=\frac{1}{2}ab.$$

7. 以 BC 为 x 轴，BA 为 y 轴，$|BC|$为 1 个长度单位，利用斜率公式可以算出 $\operatorname{tg}\angle FDC=\operatorname{tg}\angle ADB=2$.

8. 以 AC 为横轴，O 为原点，半径为长度单位，令 B、P 的坐标

分别为(x_1, y_1)，$(-1, p)$. 可以算出E的纵标为$\frac{y_1}{2}$.

9. 设$\triangle ABC$为正三角形，三顶点在格点上，以A为原点，以过A的水平线和竖线为坐标轴，得坐标系，如图. 则(x_1, y_1)、(x_2, y_2)均为有序整数对.

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2}{x_2}}{1+\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}}$$

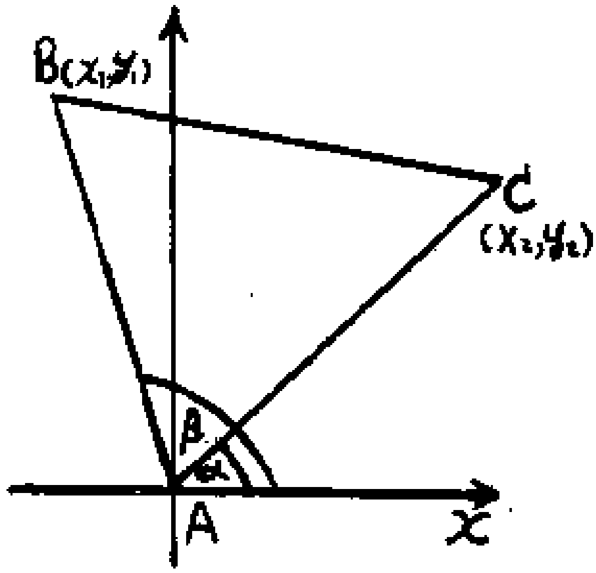
$$=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_1x_2+y_1y_2}$$

是有理数，而$\sqrt{3}$为无理数，

$\therefore \quad \operatorname{tg}(\beta-\alpha)\neq\sqrt{3}$，

$\therefore \quad \beta-\alpha\neq 60°$.

即$\triangle ABC$不是正三角形.



第9题

10. 只要证明$\angle CDE=\angle BDF$即可，以BC为x轴，AD为y轴，$|DO|$为长度单位，得坐标系. 设A、B、C的坐标为(o, a)、$(-b, 0)$、(c, o)，可算出：$\operatorname{tg}\angle CDE=\operatorname{tg}\angle BDF=\frac{a(b+c)}{bc(a-1)}$.

11. 只要证$\angle ACB+\angle AFB=45°$，只须证明$\operatorname{tg}(\angle ACB+\angle AFB)=1$即可. 而$\operatorname{tg}\angle ACB=\frac{1}{3}$，$\operatorname{tg}\angle AFB=\frac{1}{2}$.

12. 在底为2，顶角为45°的三角形中，应用余弦定理.

$$2^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2-2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}\cos 45°,$$

其中x、y为对角线之长，

$\therefore \quad 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}\cos 45°=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-4$，故

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}\cdot\sin 45°=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-4$$

$$=\frac{1}{2}(2^2+4^2)-4=6.$$

13．设 $AB=1$，$\angle CBM=\theta$，$AK=\text{tg}\angle ABK$

$$=\text{tg}\frac{90^\circ-\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos(90^\circ-\theta)}{1+\cos(90^\circ-\theta)}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}.$$

$$CM=\text{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

$\therefore\quad AK+CM=\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}$，$BM=\dfrac{1}{\cos\theta}$.

14．由正弦定理得：

$$\frac{YC}{XC}=\frac{\sin\angle CXY}{\sin\angle CYX} \quad (1)$$

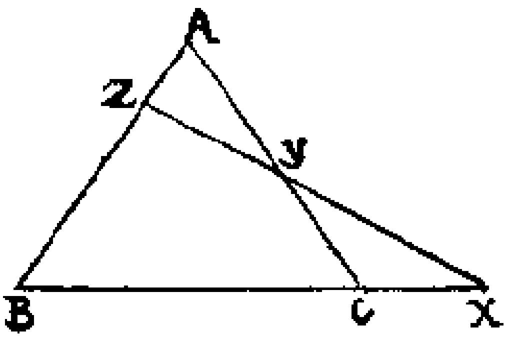
$$\frac{ZA}{YA}=\frac{\sin\angle AYZ}{\sin\angle AZY} \quad (2)$$

$$\frac{XB}{ZB}=\frac{\sin\angle BZX}{\sin\angle BXZ}. \quad (3)$$

注意到，$\sin\angle CXY=\sin\angle BXZ$，

$\sin\angle AYZ=\sin\angle CYX$，

$\sin\angle BZX=\sin\angle AZY$.



第 14 题

$(1)\times(2)\times(3)$ 得 $\dfrac{XB}{XC}\cdot\dfrac{YC}{YA}\cdot\dfrac{ZA}{ZB}=1$.

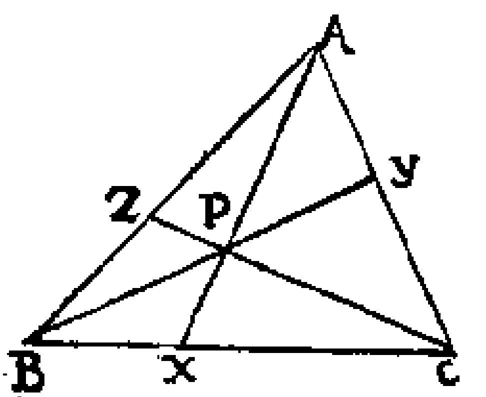
15．由正弦定理：

$$\frac{XB}{PB}=\frac{\sin\angle BPX}{\sin\angle BXP},$$

$$\frac{BZ}{PB}=\frac{\sin\angle BPZ}{\sin\angle BZP},$$

$$\therefore\quad \frac{XB}{BZ}=\frac{\sin\angle BPX}{\sin\angle BXP}\cdot\frac{\sin\angle BZP}{\sin\angle BPZ}.$$

同理，$\dfrac{YC}{CX}=\dfrac{\sin\angle CPY}{\sin\angle CYP}$



第 15 题

$$\cdot\frac{\sin\angle CXP}{\sin\angle CPX},$$

$$\frac{ZA}{AZ}=\frac{\sin\angle APZ}{\sin\angle AZP}\cdot\frac{\sin\angle AYP}{\sin\angle APY}.$$

将三式连乘，并注意：$\sin\angle BPX=\sin\angle APY$，

$\sin\angle CPY=\sin\angle BPZ$，

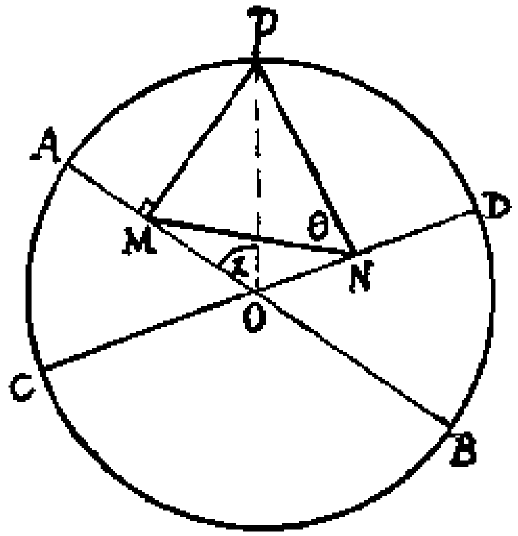
$\sin\angle APZ=\sin\angle CPX$，

$\sin\angle BXP=\sin\angle CXP$，

$\sin\angle CYP=\sin\angle AYP$，

$\sin\angle AZP=\sin\angle BZP$.

即得 $\frac{XB}{CX}\cdot\frac{YC}{AY}\cdot\frac{ZA}{BZ}=1$.



第 16 题

16. 由$\angle PMO=\angle PNO=90°$，

知 P、M、O、N 四点共圆.

由托勒米定理（证明见下章§2例 2）：

$$MN\cdot OP=OM\cdot NP+ON\cdot MP.$$

设圆之半径为 r，$\angle MON=\theta$，$\angle MOP=x$，则 r、θ 为定值，上式变为：

$MN\cdot r=r\cos x\cdot r\sin(\theta-x)+r\cos(\theta-x)\cdot r\sin x$，即

$MN=r[\cos x\sin(\theta-x)+\sin x\cos(\theta-x)]=r\sin\theta$.

17. 连结 PM、MQ.

设$\angle AMC=\alpha$，$\angle PMC=x$，$\angle QMD=y$. 则$\angle BMD=\alpha$，

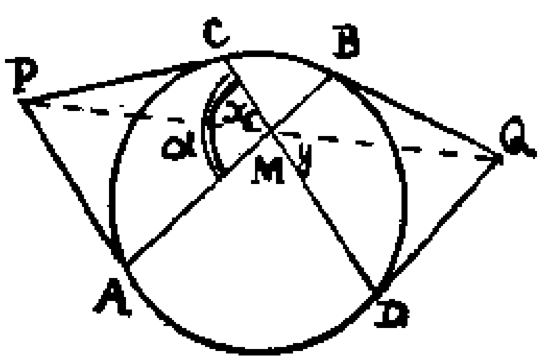
$\angle PMA=\alpha-x$，

$\angle QMB=\alpha-y$.

在$\triangle PMC$中，

$$\sin x=\frac{PC\cdot\sin C}{PM},$$

在$\triangle PMA$中，



第 17 题

$$\sin(a-x)=\frac{PA\sin A}{PM}.\quad \because\ PA=PC,$$

$\therefore\quad \dfrac{\sin x}{\sin(a-x)}=\dfrac{\sin C}{\sin A}$. 同理可得：

$\dfrac{\sin y}{\sin(a-y)}=\dfrac{\sin D}{\sin B}$，但$\angle C+\angle D=180°$，$\angle A+\angle B=180°$，

$\therefore\quad \dfrac{\sin C}{\sin A}=\dfrac{\sin D}{\sin B}$，则$\dfrac{\sin x}{\sin(a-x)}=\dfrac{\sin y}{\sin(a-y)}$. 即

$$\sin x\cdot\sin(a-y)=\sin y\cdot\sin(a-x).$$

$\therefore\quad \cos(a+x-y)=\cos(a-x+y)$.

$\because\quad 0°<a+x-y<2a<360°$，

$0°<a-x+y<2a<360°$，且 $(a+x-y)+(a-x+y)=2a<360°$，

$\therefore\quad a+x-y=a-x+y$，则 $x=y$，故 P、M、Q 共线.

18. 取坐标系如图，m_1 的方程为 $x=0$，A_1 的坐标为 $(0,1)$. 可设 m_2、m_3、m_4 的方程分别为：$y=k_2x$，$y=k_3x$，$y=k_4x$，其中 k_2、k_3、$k_4\neq 0$. 于是，A_1A_2 的方程为

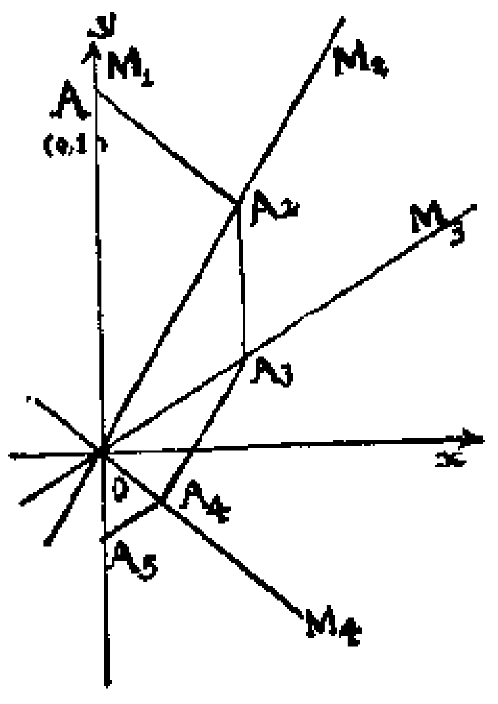
$$y=k_4x+1.$$

解方程组$\begin{cases}y=k_4x+1,\\ y=k_2x\end{cases}$ 得 A_2的坐标

为$\begin{cases}x_2=\dfrac{1}{k_2-k_4},\\ y_2=\dfrac{k_2}{k_2-k_4}.\end{cases}$

同理可得 A_3 的坐标为

$$\begin{cases}x_3=\dfrac{1}{k_2-k_4},\\ y_3=\dfrac{k_3}{k_2-k_4}.\end{cases}$$



第 18 题

A_4 的坐标为 $\begin{cases} x_4 = \dfrac{k_2 - k_3}{(k_2 - k_4)^2}, \\ y_4 = \dfrac{k_4(k_2 - k_3)}{(k_2 - k_4)^2}. \end{cases}$ A_5 的坐标为

$$\begin{cases} x_5 = 0, \\ y_5 = \dfrac{(k_2 - k_3)(k_4 - k_3)}{(k_2 - k_4)^2}. \end{cases}$$

由于 $|y_5| - \dfrac{1}{2} = \dfrac{(k_2 - k_3)(k_3 - k_4)}{(k_2 - k_4)^2} - \dfrac{1}{2}$

$$= \frac{2k_2k_3 - 2k_2k_4 - 2k_3^2 + 2k_3k_4 - k_2^2 + 2k_2k_4 - k_4^2}{2(k_2 - k_4)^2}$$

$$= \frac{-(k_2 - k_3)^2 - (k_3 - k_4)^2}{2(k_2 - k_4)^2} < 0,$$

$\therefore$ $|y_5| < \dfrac{1}{2}$，即 $|OA_5| < \dfrac{1}{2}|OA_1|$.

19. 证：先证一个引理，当 $0 < x_i < \pi$，$i = 1, 2, \cdots, n$ 时，

$\dfrac{\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots\cdots + \sin x_n}{n} \leqslant \sin \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$. 用数学归纳法证明.

首先证明当 $n = 2^k$ 时，不等式成立. 当 $n = 2$ 时，

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} = \sin\frac{x_1 + x_2}{2}\cos\frac{x_1 - x_2}{2}.$$

$\because$ $0 < x_1$，$x_2 < \pi$，$\therefore$ $0 < \cos\dfrac{x_1 - x_2}{2} \leqslant 1$.

因此 $\dfrac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} = \sin\dfrac{x_1 + x_2}{2}\cos\dfrac{x_1 - x_2}{2} \leqslant \sin\dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

假设 $n = 2^k$ 时不等式成立，即

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_{2^k}}{2^k} \leqslant \sin\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k}}{2^k}.$$

那么当 $n = 2^{k+1}$ 时，

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_{2^k} + \sin x_{2^k+1} + \sin x_{2^k+2} + \cdots + \sin x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} =$$

$$=\frac{\frac{\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_{2^k}}{2^k}+\frac{\sin x_{2^k+1}+\sin x_{2^k+2}+\cdots+\sin x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}$$

$$=\frac{\sin\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^k}}{2^k}+\sin\frac{x_{2^k+1}+x_{2^k+2}+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}.$$

注意到右边式中的两个算术平均值包在$(0,\pi)$内，因此上式

$$左边\leqslant\sin\frac{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^k}}{2^k}+\frac{x_{2^k+1}+x_{2^k+2}+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}.$$

这就是说，不等式对一切$n=2,4,8,\cdots,2^k,\cdots\cdots$正确.

其次证明不等式对某一n正确时，对$n-1$也正确．假设对于n不等式正确，即

$$\frac{\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n}{n}\leqslant\sin\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\text{恒成立.}$$

特别地，当$x_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$时，不等式也应正确，即

$$\frac{\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_{n-1}+\sin\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n}$$

$\leqslant\sin\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$．亦即 $\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_{n-1}\leqslant n\sin\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}-\sin\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$

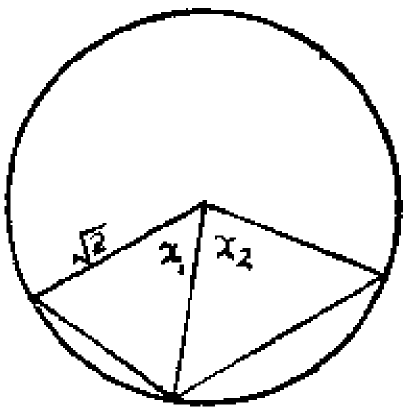
$=(n-1)\sin\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$．因此，

$$\frac{\sin x_1+\sin x_2+\cdots\sin x_{n-1}}{n-1}\leqslant\sin\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}.$$

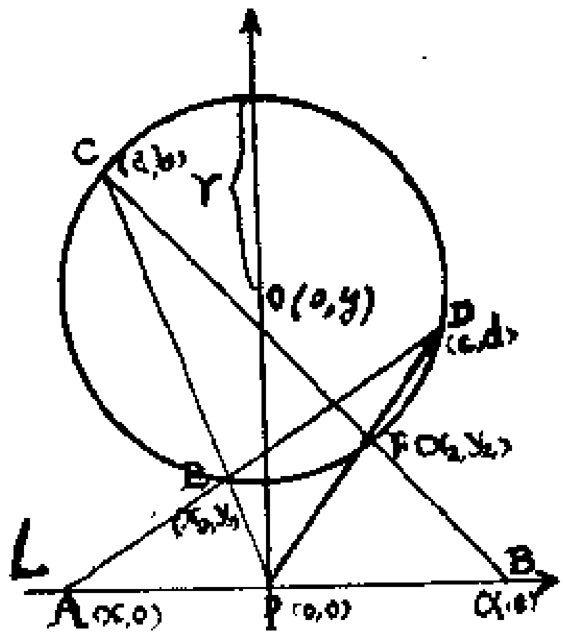
这就是说，不等式若对某一自然数n正确，那么对于$n-1$也正确.

注意到前面已证对于任意$n=2^k$(可以充分大的自然数)不等式已正确．故不等式对一切自然数正确.

若设圆之半径为$\sqrt{2}$，内接n边形之一边所对圆的角为x_i $(i=1,2,\cdots n)$，则



第19题



第20题

$$S_{\text{内接}n\text{边形}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin x_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin x_2 + \cdots + \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sin x_n = \sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n \leqslant n\sin\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

$$= n\sin\frac{2\pi}{n} = S_{\text{内接正}n\text{边形}}.$$

20．证明：取坐标系如图所示，有关点的坐标亦如图示.

$\odot O$ 的方程为：

$$x^2+(y-\eta)^2=r^2 \tag{1}$$

CP 的方程为：

$$y=\frac{b}{a}x \tag{2}$$

将(2)代入(1)并化简得：$(a^2+b^2)x^2-2ab\eta x+a^2(\eta^2-r^2)=0$.

依韦达定理：$x_1+a=\dfrac{2ab\eta}{a^2+b^2}$，

$$\therefore\quad x_1=\frac{a(2b\eta-a^2-b^2)}{a^2+b^2}=\frac{a(\eta^2-r^2)}{a^2+b^2}.$$

代入 (2) 得：$y_1=\frac{b(\eta^2-r^2)}{a^2+b^2}$. 那么 AD 的方程为：

$$\frac{x-c}{y-d}=\frac{c-\frac{a(\eta^2-r^2)}{a^2+b^2}}{d-\frac{b(\eta^2-r^2)}{a^2+b^2}}.$$ 令 $y=0$ 可得 A 点的横坐标：

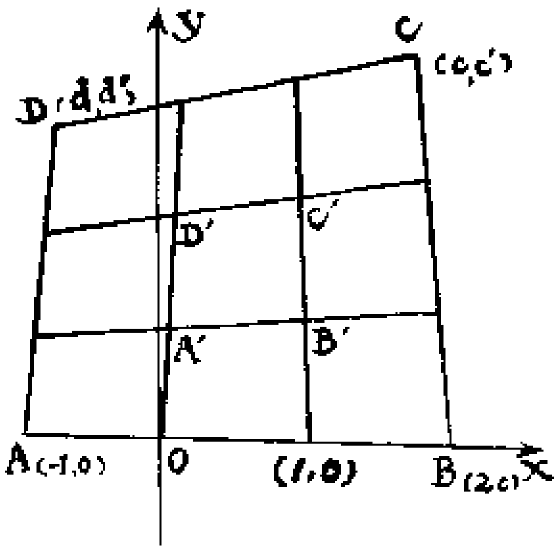
$$x=\frac{(ad-bc)(\eta^2-r^2)}{d(a^2+b^2)-b(\eta^2-r^2)}.$$ 同理可求出 B 点的横坐标：

$$x'=\frac{(cb-da)(\eta^2-r^2)}{b(c^2+d^2)-d(\eta^2-r^2)}.$$ 注意到，通过计算得：

$$[d(a^2+b^2)-b(\eta^2-r^2)]-[b(c^2+d^2)-d(\eta^2-r^2)]=0.$$

$\therefore$ x 与 x' 的分母相等，因此$|x|=|x'|$.

21. 证明：取坐标系并设各点的坐标如图示，可按线段的定比分点公式算出 A'、B'、C'、D' 的坐标，然后按三角形的面积公式分别算出两个四边形的面积.



第 21 题

事实上可算出：

$A'\left(\frac{2d+c}{9},\ \frac{2d'+c'}{9}\right)$、

$B'\left(\frac{6+d+2c}{9},\ \frac{d'+2c'}{9}\right)$、

$c'\left(\frac{3+2d+4c}{9},\ \frac{2d'+4c'}{9}\right)$、

$D'\left(\frac{4d+2c}{9},\ \frac{4d'+2c'}{9}\right)$. 于是$\triangle A'B'C'$ 的面积

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{2d+c}{9} & \frac{2d'+c'}{9} & 1\\ \frac{6+d+2c}{9} & \frac{d'+2c'}{9} & 1\\ \frac{3+2d+4c}{9} & \frac{2d'+4c'}{9} & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\cdot 9^2}(-3dc'+3cd'+3d'+15c').$$

$$\triangle C'D'A' \text{ 的面积}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{2d+c}{9} & \frac{2d'+c'}{9} & 1 \\ \frac{3+2d+4c}{9} & \frac{2d'+4c'}{9} & 1 \\ \frac{4d+2c}{9} & \frac{4d'+2c'}{9} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\cdot 9^2}(-6dc'+6cd+6d'+3c').$$

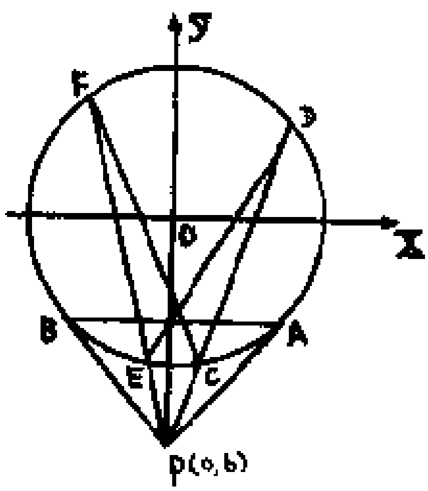
因此 $S_{\square A'B'C'D'}=\frac{1}{2\times 9^2}(-9dc'+9cd'+9d'+18c')$

$$=\frac{1}{2\times 9}(-d'c+cd'+d'+2c').$$

$$S_{\square ABCD}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ c & c' & 1 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ c & c' & 1 \\ d & d' & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}(-dc'+cd'+d'+2c').$$

22. 证明：取坐标系如图，设圆的方程为 $x^2+y^2=1$，圆外一点的坐标为 $p(0,b)$，过 p 的切线的方程为 $x_1x+y_1y=1$，其中 (x_1,y_1) 为切点.



第 22 题

$\because$ p 在切线上，

$\therefore$ 有 $o\cdot x_1+b\cdot y_1=1$,

即 $y_1=\frac{1}{b}$，是切点 A、B 的纵标.

由是 AB 的方程为 $y=\frac{1}{b}$. 设割线 PCD 的方程为 $y=k_1x+b$（k_1 为斜率），解方程组

$$\begin{cases} y=k_1x+b, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

得 $\begin{cases} x=\frac{-k_1b\pm\triangle_1}{1+k_1^2}, \\ y=\frac{b\pm k_1\triangle_1}{1+k_1^2}, \end{cases}$

（其中$\triangle_1=\sqrt{1+k_1^2-b^2}$）.

是C、D的坐标．同样，设割线PEF的斜率为k_2,则E、F的坐标为：

$$\begin{cases} x=\dfrac{-k_2b\pm\triangle_2}{1+k_2^2}, \\ y=\dfrac{b\pm k_2\triangle_2}{1+k_2^2}, \end{cases}$$ （其中$\triangle_2=\sqrt{1+k_2^2-b^2}$）.

于是DE的方程为：

$$\frac{y-\dfrac{b+k_1\triangle_1}{1+k_1^2}}{x-\dfrac{-k_1b+\triangle_1}{1+k_1^2}}=\frac{\dfrac{b+k_1\triangle_1}{1+k_1^2}-\dfrac{b+k_2\triangle_2}{1+k_2^2}}{\dfrac{-k_1b+\triangle_1}{1+k_1^2}-\dfrac{-k_2b+\triangle_2}{1+k_2^2}},$$

当$y=\dfrac{1}{b}$时，

$$x=\frac{(\triangle_1-k_1b)(\triangle_2-k_2b)(\triangle_2-\triangle_1)}{[(1+k_2^2)(b+k_1\triangle_1)-(1+k_1^2)(b+k_2\triangle_2)]b}. \tag{1}$$

另外，CF的方程为：

$$\frac{y-\dfrac{b-k_1\triangle_1}{1+k_1^2}}{x-\dfrac{-k_1b-\triangle_1}{1+k_1^2}}=\frac{\dfrac{b-k_1\triangle_1}{1+k_1^2}-\dfrac{b-k_2\triangle_2}{1+k_2^2}}{\dfrac{-k_1b-\triangle_1}{1+k_1^2}-\dfrac{-k_2b-\triangle_2}{1+k_2^2}},$$

当$y=\dfrac{1}{b}$时，

$$x=\frac{-(\triangle_1+k_1b)(\triangle_2+k_2b)(\triangle_2-\triangle_1)}{[(1+k_2^2)(b-k_1\triangle_1)-(1+k_1^2)(b-k_2\triangle_2)]b}. \tag{2}$$

现在来证明(1)、(2)是相等的。通过计算知：

$$\begin{aligned}&(\triangle_1-k_1b)(\triangle_2-k_2b)[(1+k_2^2)(b-k_1\triangle_1)-(1+k_1^2)(b-k_2\triangle_2)]\\&\quad+(\triangle_1+k_1b)(\triangle_2+k_2b)[(1+k_2^2)(b+k_1\triangle_1)\\&\quad-(1+k_1^2)(b+k_2\triangle_2)]=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad&(\triangle_1-k_1b)(\triangle_2-k_2b)[(1+k_2^2)(b-k_1\triangle_1)\\&\quad-(1+k_1^2)(b-k_2\triangle_2)]=-(\triangle_1+k_1b)(\triangle_2+k_2b)\\&\qquad[(1+k_2^2)(b+k_1\triangle_1)-(1+k_1^2)(b+k_2\triangle_2)].\end{aligned}$$

$$\therefore\quad\frac{(\triangle_1-k_1b)(\triangle_2-k_2b)}{(1+k_2^2)(b+k_1\triangle_1)-(1+k_1^2)(b+k_2\triangle_2)}$$

$$= \frac{-(\triangle_1 + k_1 b)(\triangle_2 + k_2 b)}{(1+k_2^2)(b-k_1\triangle_1)-(1+k_1^2)(b-k_2\triangle_2)}.$$

因此，(1)与(2)完全相等．这说明直线 AB 与 DE 的交点的坐标、直线 AB 与 CF 的交点的坐标完全一样，即 AB、DE、CF 交于一点．

第 三 章

习 题 一

1．将线段聚集到射影处．

2．只须证 $EF^2=FC\cdot FB$，只须证 $\triangle EFB\backsim\triangle CFE$，只须$\angle BEF=\angle ECF$．连 AD 得$\angle BAD$，以之为媒介．

3．延长 MC 至 C' 使 $CC'=AK$，连 BC'．

4．作$\angle BAE$ 的平分线 AF．　　5．连 BM．

6．取 AC 的中点 E，连 DE．

7．取 CG 的中点 H，连 DH，利用中位线定理．

8．连 DE，则 $DE\parallel BC$，$\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{3}=\frac{EF}{FB}$．因此 $S_{\triangle FBC}=\frac{3}{4}S_{\triangle EBC}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$．

9．只须将 AB 与圆的交点 G 同 C 连起来．由 $AE^2=AD^2=AG\cdot AB$ 知 $\frac{AE}{AG}=\frac{AB}{AE}$，又 $CG\parallel FE$，∴ $\frac{AE}{AG}=\frac{AF}{AC}$，∴ $\frac{AB}{AE}=\frac{AF}{AC}$ 因此

$$AB\cdot AC=AE\cdot AF.$$

10．作 $OO_1\perp BC$，$AA_2\perp BC$．

11．过 D 作 $DG\parallel CE$ 交 BC 于 G．

12．过 F、H 分别作 $FL\perp DM$、$HK\perp DM$，垂足为 L、K．

13．连 HG、OE，证明 $OEHG$ 为平行四边形．

14．引第三中线．

习 题 二

1．注意 $AD^2=AE\cdot AB$，只要证明 $AG\cdot AH=AE\cdot AB$，只要证 $\frac{AG}{AE}=\frac{AB}{AH}$，为此，连 BH，证 $\triangle AEG\backsim\triangle AHB$．

2. 连 EG、FH 构造相似三角形，利用四点共圆证对应角相等.

3. 过 B、C、P 作辅助圆交 AB 于 Q，注意 P、D、A、Q 四点共圆.

4. 欲证 $BC^2=AB\cdot AC+AC^2$，只须证 $BC^2=AC(AB+AC)$，或 $\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{AB+AC}$. 为此，需作线段等于 AB、AC 的和. 延长 CA 至 B'，使 $AB'=AB$，则 $CB'=AB+AC$. 只须证 $\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{B'C}$. 连 BB'，容易发现 $\triangle CAB\backsim\triangle CBB'$.

5. 先作出 AB 与 AC 的差线段 HB. 只须证 $HB^2=4\cdot EF\cdot ED$. 连 CH，则 $\triangle AHC$ 为等腰三角形，令 CH 与 AF 交于 G，则 G 是 CH 的中点. 连 EG，则 EG 是 $\triangle CBH$ 的中位线，$BH=2EG$，因此只须证 $EG^2=EF\cdot FD$，只须证 $\triangle EFG\backsim\triangle EGD$.

6. 欲证 $\frac{DB}{BM}=\frac{EC}{CM}$，只要证 $\frac{DB}{EC}=\frac{BM}{CM}$. 注意到 AM 是 $\angle A$ 的平分线，所以 $\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AC}$，因此只须证明 $\frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC}$. 这只要证明 $DE\parallel BC$，根据平行截割定理即可得证. 为此，连 DE.

7. 注意到欲证等式中含有 MA、MB、MC，可视为圆 ABC 内相交于 M 的相交弦被割成的部分线段. 因此可设法利用相交弦定理. 为此，过 A、B、C 作辅助圆，延长 AM 交辅助圆于 N. 于是 $AM\cdot MN=BM\cdot MC$. 又 $MN=AN-AM$，代入得，$AM\cdot(AN-AM)=BM\cdot MC$，即是 $AM\cdot AN-AM^2=BM\cdot MC$，或者 $AM^2=AM\cdot AN-BM\cdot MC$. 故只须证明 $AM\cdot AN=AB\cdot AC$. 这只须连 BN，证 $\triangle ABN\backsim\triangle AMC$.

8. 考查欲证式子中的各项，与圆的割线定理的结论相近，设法运用割线定理，为此作辅助圆 BPQ，与 AC、BC 交于 S、T. 于是，$AB\cdot AP=AQ\cdot AS$. 因此，只须证明 $AQ\cdot AS+AD\cdot AR=AC\cdot AQ$，即 $AD\cdot AR=AQ\cdot(AC-AS)$，即 $AD\cdot AR=AQ\cdot CS$，亦即 $\frac{AD}{CS}=\frac{AQ}{AR}$. 又 $AD=BC$，所以只须证 $\frac{BC}{CS}=\frac{AQ}{AR}$，为此，联 BS、RQ，只须证 $\triangle BCS\backsim\triangle QAR$.

习 题 三

1. 延长中线一倍.

2. 平移腰.

3. 连 CE、CG，利用三角形等底等高等积证.

4. 仿本节例 4 证.

5. 连 PQ、QR、RP，利用圆周角、弦切角的关系.

6. 连 AB，证 $AA'B'B$ 为圆内接四边形.

7. 连过切点的半径.

8. 作两圆的内公切线.

9. 连公共弦.

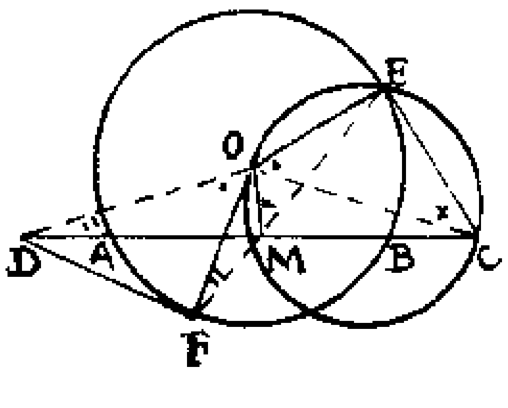
第 四 章

习 题 一

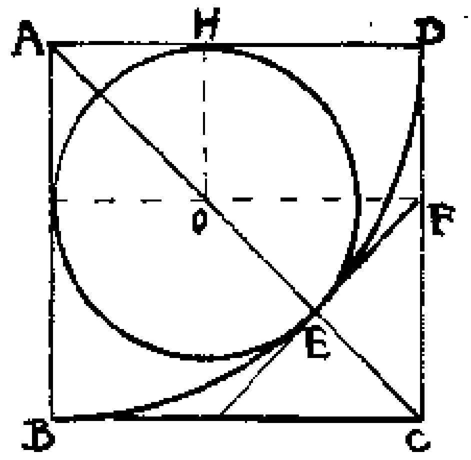
1. 作小圆的直径 GK，联结 FK，则 $\triangle DOH \cong \triangle GKF$.

2. 过 M 点作圆 MCD 的切线.

3. 由 O、B、A、D 和 O、C、E、A 四点共圆可证得 $\triangle BOD \cong \triangle COE$，再用等腰三角形的性质.



第 4 题



第 5 题

4. 证明：作 $OM \perp AB$，则 M 为 AB 的中点，连结 FM、ME 以及 OD、OC，很易证 $\triangle ODF \cong \triangle OCE$，得 $OD = OC$，$\angle ODF = \angle OCE$，

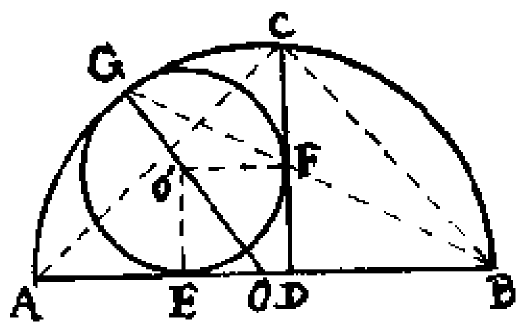
由 O、M、F、D 和 O、E、C、M 四点共圆，可证得 $\angle OMF+\angle ODF=180°$ 和 $\angle OME=\angle OCE$，再由等量代换得 $\angle OMF+\angle OME=180°$.

5. 由 E 作扇形的切线 EF，与 BC 相交于 F，由 F 作与 BA 平行的直线 FO 与 AC 相交于 O，与 AD 交于 H，则 O 就是内接圆的中心，得 $AH=HO=BF==FE=EC$.

6. 先证 $\triangle BCE\cong\triangle ACD$，得 $\angle DAC=\angle EBC$. 再证 $\triangle BPC\cong\triangle AQC$，即得 $CP=CQ$.

7. 延长 AD 交外接圆于 K，连结 CH 延长与 AB 相交于 M，证 $\triangle CHD\cong\triangle CKD$ 可得 $HD=DK$. 再利用直角三角形性质可证.

8. 联结如图所示的辅助线，利用 $\angle O'GF=\angle OGB$ 可证 GFB 是一条直线，然后由直角三角形射影定理和割线定理可证 $BE^2=BG\cdot BF=BD\cdot BA=BC^2$.



第 8 题

9. 首先利用圆幂定理证明 $FG^2=FB\cdot FC$，再证明 $\triangle EFB\backsim\triangle CFE$，即可得证.

10. 先证 $AO:AC=OD:BD$，又证 $OD:BD=OF:BC$，$EO:BC=AO:AC$，即可证得 $EO:BC=OF:BC$，由此可确定 $OE=OF$.

11. 由四点 A、E、D、B 共圆可证.

12. 证 $\triangle AEC\backsim\triangle ABE$（一角相等，夹此角的两边对应成比例），再由等腰三角形和三角形外角性质可知各角的关系.

13. 由 $\triangle BFG\backsim\triangle BED$ 可证.

14. 利用相交弦定理，可证 $CM:MD=AM:MB$，$AM:MB=OM:MP$，然后转证 P、C、O、D 四点共圆，可得 $\overset{\frown}{OC}=\overset{\frown}{OD}$，即可证 OP 二等分 $\angle CPD$.

15. 过点 P 作两圆公切线与 AC 相交于 E，再利用切线性质和圆有关的角可证.

17. 作 $PQ\parallel AD$, $DQ\parallel AP$，先证 $APQD$ 是平行四边形，又证 $PBCQ$ 是平行四边形，再证 $\angle 1=\angle 5$. 而 $\angle 2=\angle 6$，$\angle 5=\angle 6$，故 P、C、Q、

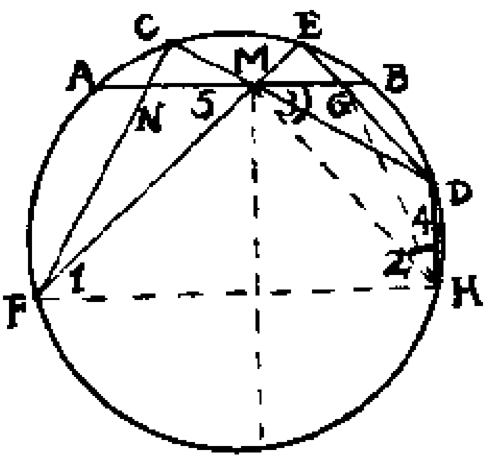
D 四点共圆，由此可推 $\angle 7=\angle 8$，又 $\angle 7=\angle 3$，$\angle 8=\angle 4$.

18. 延长 EC 交切线 BG 于 G，$\because$ $EC=EA$，$GC=GB$，

$\therefore$ $\dfrac{BE}{BF}=\dfrac{AE}{DF}$，$\dfrac{EG}{EC}=\dfrac{BG}{CF}$，即得 $\dfrac{EG}{EA}=\dfrac{GC}{CF}\Rightarrow\dfrac{EG}{GC}=\dfrac{EA}{CF}$. 但 $\dfrac{EB}{BF}=\dfrac{EG}{CG}$，$\therefore\dfrac{EA}{FD}=\dfrac{EA}{CF}$，$\therefore$ $CF=DF$.

19. $\because\angle CAB=\angle DAB=90°$，$\therefore$ BC、BD 为直径，故 $\angle BEC=\angle BFD=90°$. 又 $\angle CBE=\angle DBF$，$\therefore\angle BCE=\angle BDF$. 又 $\angle BCE=\angle BAE$，$\angle BDF=\angle BAF$，$\therefore\angle BAE=\angle BAF$.

20. $\angle DAE=\dfrac{1}{2}\angle AOE$，$\angle DAB=\angle AOB$，$\therefore$ $\angle DAE=\angle EAB$，$\therefore$ $\angle AED=\angle AEB$，$\therefore BE=ED$.



第 21 题

21. 作 $FH\parallel AB$，连结 HM，$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 5$，$MF=MH$. 再连结 HD，则 $EFHD$ 为圆内接四边形，$\angle 4+\angle 1=180°$，$\angle 4+\angle 3=180°$，$\therefore MHDG$ 共圆. $\angle GDM=\angle MHG=\angle MFN$，$\therefore$ $\triangle GMH\cong\triangle NMF$，$\therefore MN=MG$.

习 题 二

1. 利用 $BEDC$ 和 $EFGD$ 四点共圆和圆内接四边形外角性质可证.

2. 方法(一)圆的交点，都在对角线上.

方法(二)顺次连各圆的中心，必成一平行四边形.

3. 延长 AE、AD 分别交 BC 于 M、N，证 E、D 分别是 AM、AN 的中点.

4. 两圆相交，公共弦是最有效的补助线，连接之，然后利用和圆有关的角可证.

5. 过 C 点引 EB 的平行线与 AM 延长线相交于 H 点，易证 $BH\parallel DC$. 由作法知 $CH\parallel EB$，然后由平行线截得对应线段成比例定理和逆

定理可证 $DE /\!/ BC$.

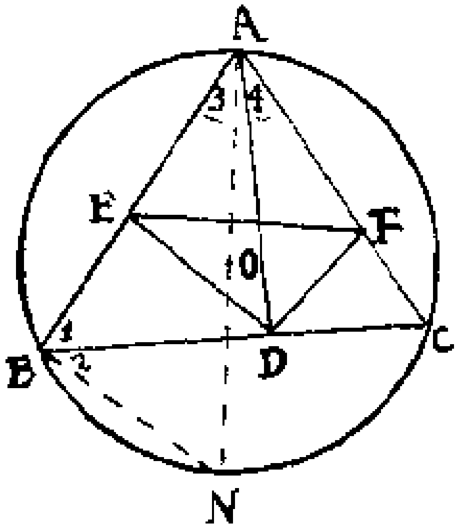
6. 由 $BC /\!/ EF$ 得 $BG:EG = BC:EF$，又由 $EF /\!/ AD$ 得 $BC:EF = AD:EF = AH:EH$，从而可以推得 $BG:EG = AH:EH$.

7. 先证 $MQ^2 = MP^2 = MA\cdot MB$，又证 $\triangle MPA \backsim \triangle MBP$，再证 $\angle MPC = \angle MBP = \angle ACD$ 即可.

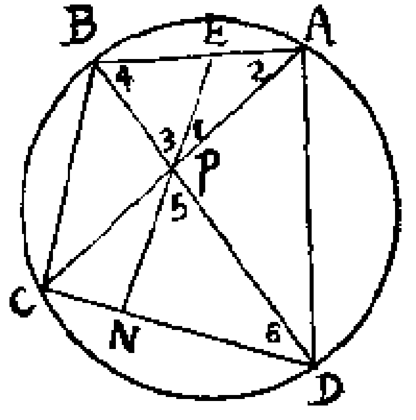
8. 由内角平分线性质定理得 $\frac{AC}{AB} = \frac{CF}{BF}$ (1)，$\frac{AC}{AD} = \frac{CE}{DE}$ (2)，又 $\because AC^2 = AD\cdot AB$，即 $\frac{AC^2}{AD\cdot AB} = 1$，由 ①×② 得 $\frac{AC^2}{AB\cdot AD} = \frac{CF}{BF} = \frac{CE}{DE} = 1$，即 $\frac{CF}{BF} = \frac{DE}{CE}$，由合比定理得 $\frac{BF+CF}{BF} = \frac{DE+CE}{CE} \Rightarrow \frac{BC}{BF} = \frac{CD}{CE}$，$\frac{BC}{CD} = \frac{BF}{CE}$，又 $\because BF = BG + GF = CF + FG = CG$，$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{CG}{CE}$，$\therefore EG /\!/ BD$.

9. M 是 BC 弧的中点，$\angle M'AM = 90°$，故 $M'M$ 为直径，而 BC 与它成垂直.

10. 利用余角相等可证 $\angle 2 = \angle BAD$，又利用圆周角可证 $\angle 2 = \angle NAC$，在 $\angle BAD$ 与 $\angle NAC$ 中同减去 $\angle NOD$ 可得 $\angle 3 = \angle 4$，再利用 A、E、D、F 四点共圆可证 $\angle FED = \angle 4$，即得 $\angle FED = \angle 4 = \angle 3$，最后用互余关系可证 $AO \perp EF$.



第10题

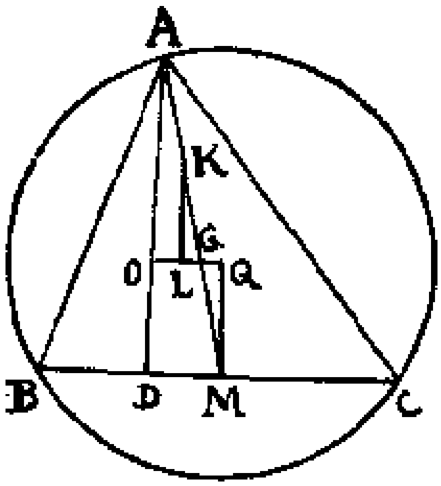


第11题

11. 利用直角三角形斜边上的中点到三顶点距离相等可证$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，又利用圆周角和对顶角可证 $\angle 6=\angle 2$，$\angle 3=\angle 5$，再由$\angle 1+\angle 3=90^\circ$可证$EPN\perp CD$.

12. 由A点作切线AT，由同弧上的圆周角和弦切角以及B、C、E、F四点共圆可证$\angle TAC=\angle AFE$. 利用半径垂直于过切点的切线可证$OA\perp EF$，同理可证$OB\perp DF$，$OC\perp DE$.

习　题　三



第1题

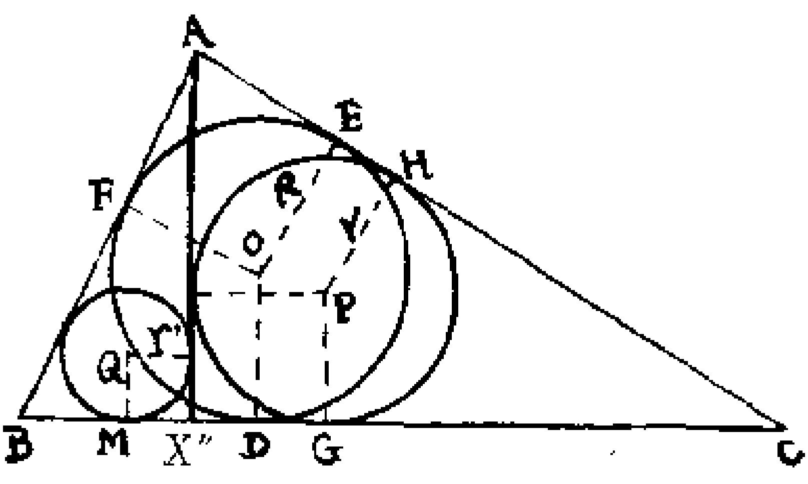
1. 连OQ、AM，其交点G必然就是重心，因为AG、OG的中点为K、L，而KL平行于AO且等于它的一半，QM也是这样，$\therefore$ $KL /\!/ QM$ 且 $KL=QM$，

$\therefore$ $AG=2KG=2GM$（故G为重心）.

2. 利用梯形两腰中点的连线等于上下底和的一半.

3. 从D和AO的中点F各作该直线的垂线MD和FK.

4. 作直径AG，证$\triangle AGB\backsim\triangle ADP$，再证$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BG}$.



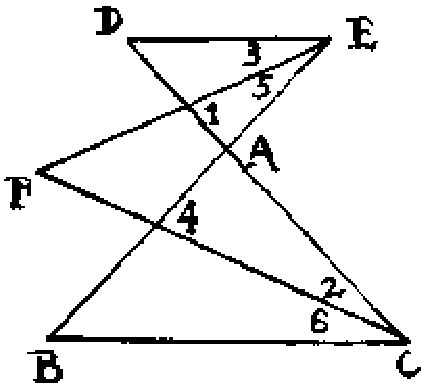
第6题

6. 由切线性质证 $2r'=Bx+Ax-AB$ (1)

$$2r=Cx+Ax-AC \qquad (2)$$

$$2R=AB+AC-BC \qquad (3)$$

①+②+③得 $r'+r+R=Ax$.



第 7 题

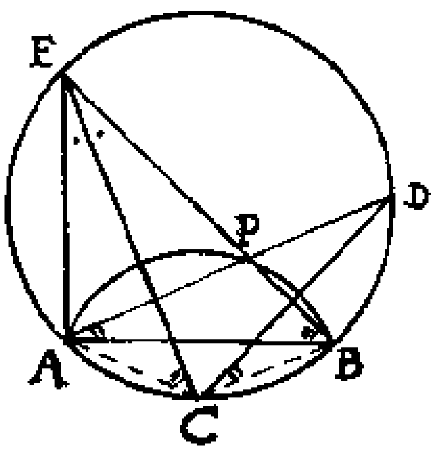
7. 证：$\angle F+\angle 2=\angle D+\angle 3$,

$\angle F+\angle 5=\angle B+\angle 6$.

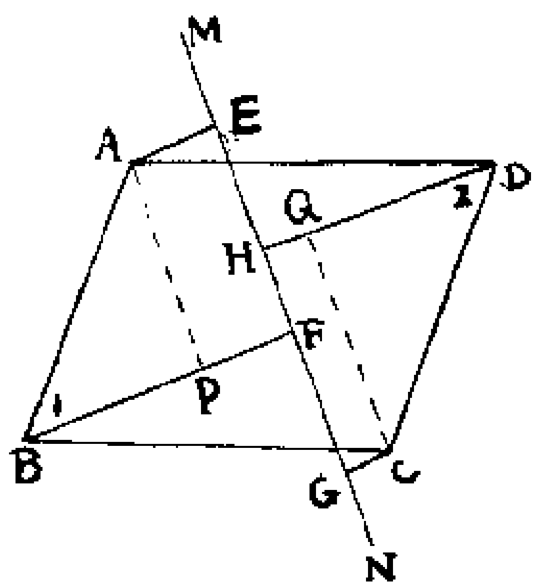
8. 连结 EF，利用直角三角形斜边上的中点性质可证.

9. 连结 CA 和 CB，可证 $\angle AEC=\angle BEC$，$EA=EP$，得 $\angle EAP=\angle EPA$，而 $\angle EPA=\angle PAB+\angle PBA=\angle ACE+\angle BCD=\angle ECD$.

10. 证：作 $CQ\perp DH$，$AP\perp BF$，又∵ $DH\perp MN$，$CG\perp MN$，∴ $CG\parallel HQ$，$CQ\parallel GH$，∴ 四边形



第 9 题



第 10 题

$GCQH$ 为平行四边形，即 $CG=HQ$. 同理可证 $PF=AE$，又在 Rt$\triangle ABP$ 和 Rt$\triangle CDQ$ 中，$AB\parallel CD$ 且 $AB=CD$，而 $DH\parallel BF$，$\angle 1=\angle 2$（夹此两角的二边互相平行且方向相反，则此两角相等）. Rt$\triangle ABP\cong$ Rt$\triangle CDQ$，∴ $BP=CQ$，即 $BF-PF=DH-HQ$，

∴ $BF-AE=DH-CQ$.

习 题 四

3. 因 $\triangle ACD\backsim\triangle BCE$，故 $AC:AD=BC:BE$、依分比定理：$(AC-AD):AD=(BC-BE):BE$，又依更比定理得：$(AC-AD):(BC-BE)=AD:BE$，若 $AC>BC$，则 $AD>BE$，∴ $AC-AD>BC-BE$.

4. 用平移法，过 F 点作 $FG\parallel EB$，作 $FD\parallel EC$，作 $FH\perp BC$，分别与 BC 相交于 G、D、H. 再利用若斜边长，则在底边的射影边长，反过来也成立.

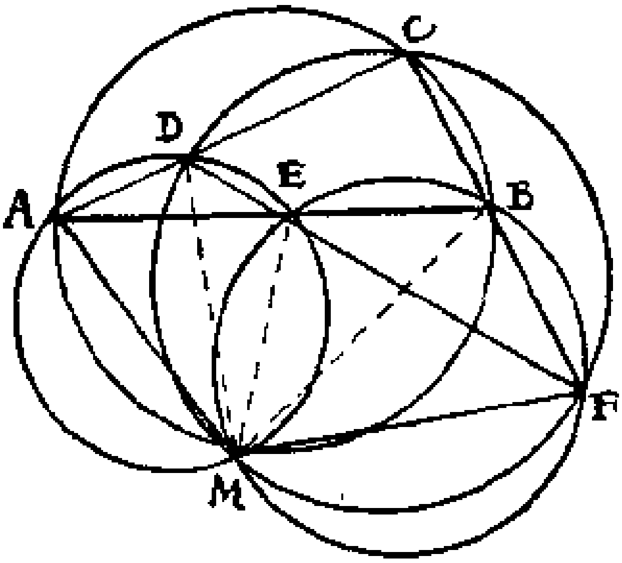
习 题 五

1. 假设 AC、EF 的交点为 P，EF、BD 的交点为 P'，然后利用若干平行线和两条直线相交的性质可证 P 点必须与 P' 点重合.

2. 设 ABC' 和 CAB' 两圆的交点为 O，则 $\angle AOC=\angle AB'C=60°$，$\angle AOC'=\angle ABC'=60°$，∴ $\angle AOC=\angle AOC'$，故 O、C、C' 三点在同一直线上，即 $C'C$ 通过 O 点.

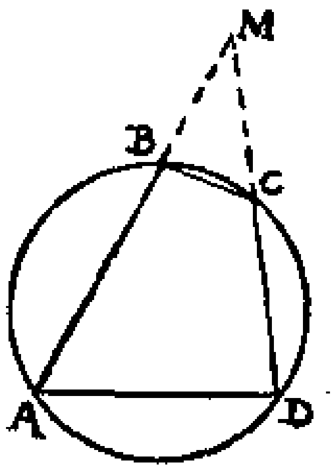
4. 任取二圆，例如 $\odot_{ADE}$、$\odot_{BEF}$，其交点为 M，得 $\angle C+\angle DMF=180°$，其余仿此可证.

5. 参看第三章 § 3 例11.

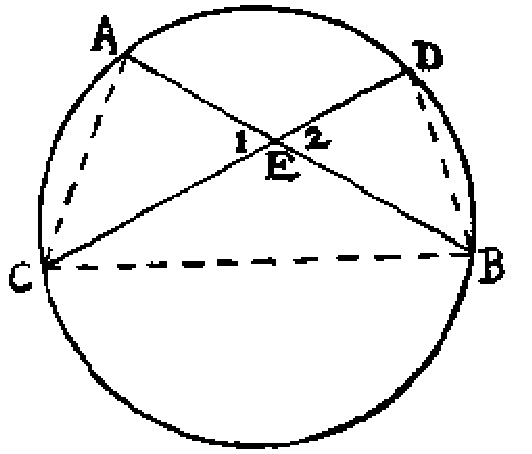


第 4 题

6. 过 A、B、D 三点画一圆，这圆和 DC 相交于 C'，根据割线定理知 $AM\cdot BM=C'M\cdot DM$. 把这式子和已知条件比较，应有 $CM=C'M$，即 C、C' 必须重合，所以 A、B、C、D 在同一圆上。



第 6 题



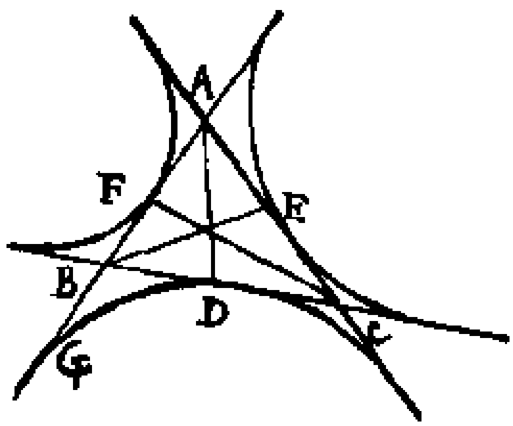
第 8 题

7. 连结 EC，交$\odot_O$ 于 D'，仿上题方法可证.

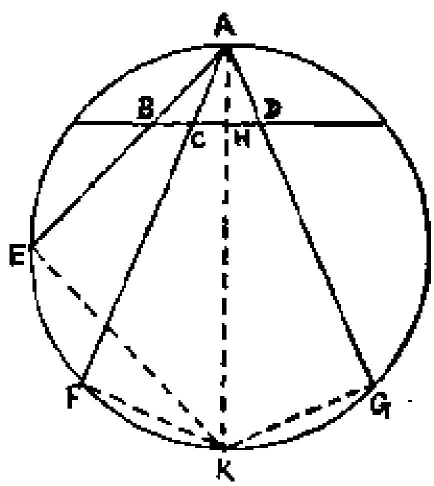
8. 将等积式转化成比例式，由 $\angle 1=\angle 2$ 很易证 $\triangle ACE\backsim\triangle DBE$，得 $\angle A=\angle D$，由此可证 A、B、C、D 四点共圆.

9. 仿第二章第四章习题四第 14 题的方法可证.

10. 设 G 为 AB 延长线与切于 BC 边的旁切圆的切点，因 AG 为三



第 10 题

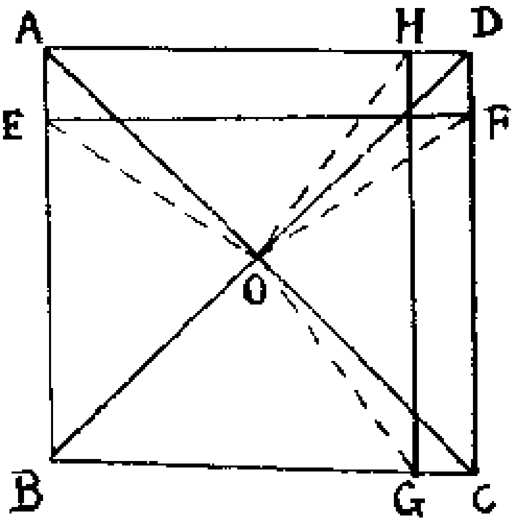


第 12 题

边 BC、CA、AB 的和之半，$\therefore BD=BG=S-C$（S 代三边和的一半，C 代 AB）. 用同法 $AE=S-c$ 及 CD、AF 同等于 $S-b$，CE、BF 同等于 $S-a$ 然后用上题方法可证.

12. 作 $AH\perp BC$ 延长至 K，使 $AH\cdot AK=AB\times AE$，得 $\triangle AHB\backsim\triangle AEK$，因 $\angle AHB=90^\circ$，从而推知 $\angle AEK=90^\circ$，即 E 在以 AK 为直径的圆周上，其余各点仿此证明.

13. 证 $\triangle AEO\cong\triangle DHO$，得 $OE=OH$，然后采用同法证 $OG=OF=OH$.



第 13 题

15. 利用 $\angle AFG=\angle DEG$ 证四点共圆.

习 题 六

1. 从 E 引 CB 平行的直线，与 AD 相交于 G，再由平行线截割定理可证

2. 从 C 引 BA 平行的直线，与 DF 相交于 G，证 $\triangle DBF$ 与 $\triangle DCG$ 相似. 由等腰三角形 AEF，证 $\triangle CGE$ 也为等腰三角形.

3. 利用圆上一点到直径的垂直距离是垂足把直径分成两部分的比例中项，然后再利用 $\triangle CDF$ 与 $\triangle EDB$ 相似.

4. 利用 $\triangle FBO\backsim\triangle EOC$ 和直角三角形斜边上中线的性质可证.

5. 应用圆幂定理和三角形内角平分线的性质.

6. 利用圆内接四边形外角的性质和相似形可证.

7. 利用三角形内外角平分线的性质可证.

8. 利用相交弦定理证 $AC:CD=BC:CE$，再利用分比定理可证.

9. (1) 证 A、E、B、D 四点和 A、F、D、C 四点共圆，然后用相交弦定理可证.

(2) 证 H、F、B、D 四点和 H、E、C、D 四点共圆，然后用割线定理可证.

11. 从 P 点向 AB 作垂线，垂足为 H. 证 B、H、P、C 和 A、H、P、D 四点共圆，再利用圆幂定理可证.

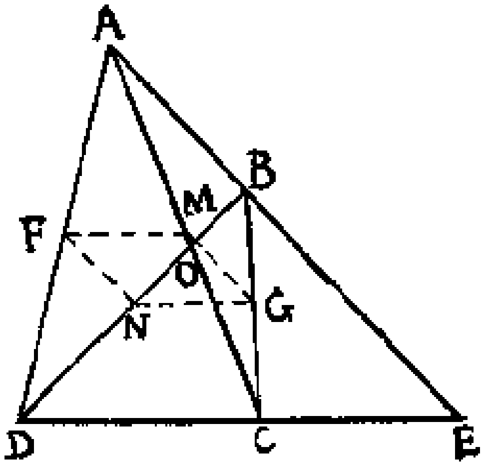
13. 作 $CF\perp AB$，再证 $\triangle AFC\cong\triangle AEB$ 和 $\triangle BFC\backsim\triangle BDA$.

14. 作 $\triangle ABC$ 的外接圆，与 RP 相交于 E、D, $BQ\cdot AQ=EQ\cdot DQ=PD^2-QP^2=BP\cdot CP-QP^2$，$\therefore PQ^2=BP\cdot CP-BQ\cdot AQ$.

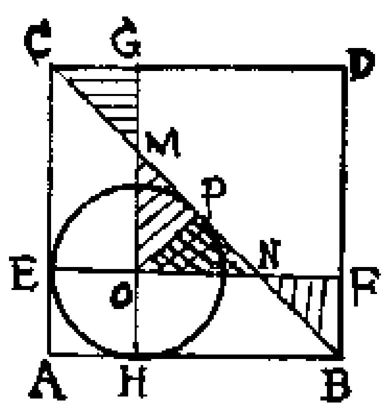
15. 作 QC 直径，$PE\perp QC$，延长 QP 与圆周交于 D，连结 CD，$AB\cdot PR=QC\cdot QE=QD\cdot QP=(QP+PD)QP=QP^2+PD\cdot PQ$.

习 题 七

1. 分别取 AD、BC 的中点 F、G，连结 MF、FN、NG、GM、GE，AG、DG，证明 $S_{\triangle ENG}=\frac{1}{4}S_{\triangle BCD}$，$S_{\triangle EMG}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle GMN}=S_{\triangle FMN}=\frac{1}{4}(S_{\triangle AOD}-\frac{1}{4}S_{\triangle BOC})$.



第1题



第3题

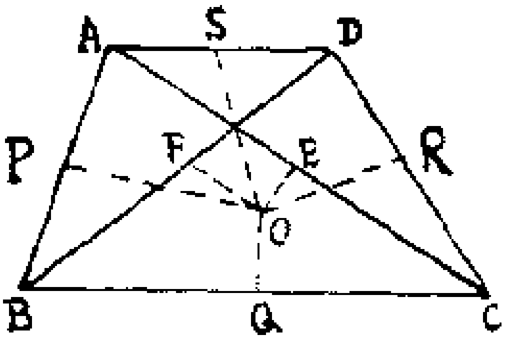
2. $\frac{S_{\triangle DCA}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{DE}{BE}$.

3. 先证$\triangle MPO\cong\triangle CMG$，得$PC=CE=OG$，再证$\triangle OPN\cong\triangle BFN$，得$PB=BH=OF$，再由$S_{\square OFDG}=OG\cdot OF=PB\cdot PC=S_{\triangle ABC}$.

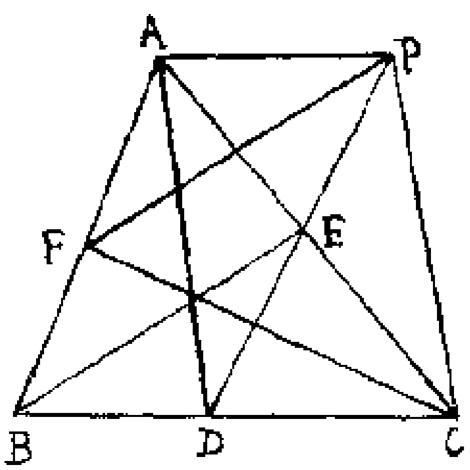
4. 连BZ和AY，则$S_{\triangle BXY}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABY}$，$\therefore S_{\triangle AXZ}=\frac{2}{3}\cdot S_{\triangle ABZ}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}$，同理可求$S_{\triangle BYX}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle CZY}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}$，

故$S_{\triangle XYZ}=S_{\triangle ABC}-(S_{\triangle AXZ}+S_{\triangle CZY}+S_{\triangle BYX})=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

5. 先证$S_{\triangle PBF}=\frac{1}{4}S_{\triangle BAD}$，$S_{\triangle BFQ}=\frac{1}{4}S_{\triangle BDC}$，然后根据$FO\parallel AC\parallel PQ$证明四边形$PBQF$的面积=四边形$PBQO$的面积.



第5题



第6题

6. 过F作BE的平行线交DE的延长线于P，连结PC和AP，那末$\triangle PFC$是三条中线所成的三角形，再利用四边形$ABCP$的面积等于含$\triangle PFC$在内的诸三角形面积的和可求其解.

习 题 八

1. 已知：$S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABC}$，而$AB=BC$，求证：

$AB+BC+CA<AD+DC+CA$.

证明：延长AB至E，使$BE=BA$，连结BD和DE，$\because S_{\triangle ADC}$.

$S_{\triangle ABC}$，且 AC 为公共底，∴ 它们的高相等，即 $BD \parallel AC$. 很易证 $\triangle BDC \cong \triangle BDE$，∴$DC = DE$，但 $AD + DE > AB + BE$，即 $AD + DC > AB + BC$. 各加 CA，∴ $AD + DC + CA > AB + BC + CA$.

2. 设 AQ 的中点为 O，联结 BQ 和 BO. 因为 $AP \cdot AQ = AP(AP + PQ) = AP^2 + AP \cdot PQ = AP^2 + AO^2 - OP^2 = AP^2 + BO^2 - OP^2 = AP^2 + BP^2 = AB^2$.

3. $AD^2 + BD \cdot DC = AD^2 + MD \cdot DN = AD^2 + MA^2 - AD^2 = MA^2 = \left(\frac{1}{2}MN\right)^2$.

4. 设等边△ABC 的边长为 a，$\angle AOB = \alpha$，则有

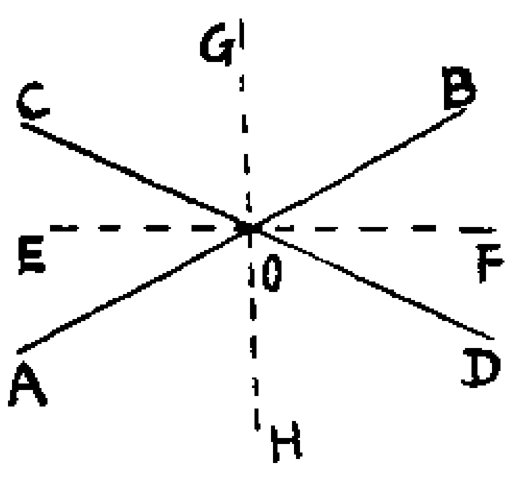
$$a^2 = 1^2 + 2^2 - 21 \cdot 2\cos\alpha = 5 - 4\cos\alpha.$$

四边形 $OACB$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\sin\alpha + \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin 60° = \sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}(5 - 4\cos\alpha) = \frac{5}{4}\sqrt{3} + \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha = \frac{5}{4}\sqrt{3} + 2\left(\frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right) = \frac{5}{4}\sqrt{3} + 2(\sin\alpha\cos 60° - \sin 60°\cos\alpha) = \frac{5}{4}\sqrt{3} + 2\sin(\alpha - 60°)$. 故当 $\alpha - 60° = 90°$ 时，即 $\alpha = 150°$ 时，S 有最大值为 $S = 2 + \frac{5}{4}\sqrt{3}$.

第 五 章

习 题 一

1. 若两定直线平行，则其轨迹是和这两条平行线距离相等的一条平行线。若两直线相交，如图所示。到两相交直线 AB、CD 等距离的点的轨迹是四个角 $\angle AOC$、$\angle BOD$、$\angle AOD$、$\angle BOC$ 的平分线 OE、OF、OH、OG. 但



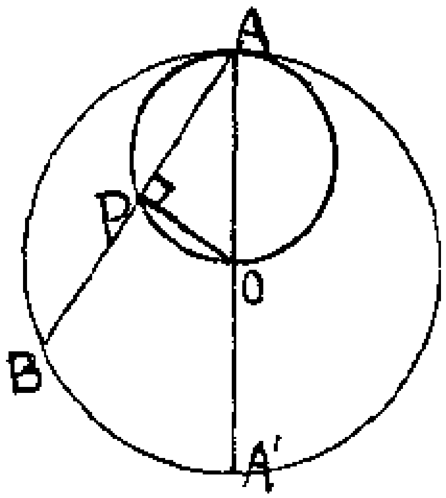
第 1 题

$$\angle AOE=\frac{1}{2}\angle AOC$$

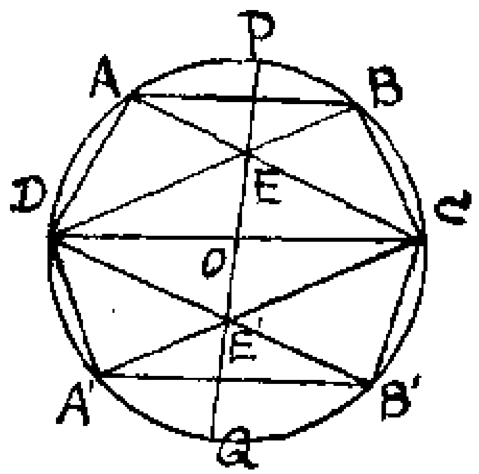
$$=\frac{1}{2}\angle BOD=\angle BOF,$$

∵ A、O、B 共直线，∴ E、O、F 共直线.同理，H、O、G 共直线. 即到相交直线等距离的轨迹是两条相交直线。总之，到两定直线等距离的轨迹是直线.

2. 由 A 引若干弦，发现其中点分布在一圆周上。取特殊弦——直径 AA'，其中点 O 是轨迹圆周之直径的另一端点，于是定位。利用直径上的圆周角是直角极易证明此题.



第 2 题



第 3 题

3. 已知：梯形 $ABCD$内接于⊙O，下底 CD 为⊙O 的定直径，直径 $PQ\perp CD$.

求证：AC、BD 的交点 E 的轨迹是 PQ.

证明：(1) 完备性(合者必在)：即证明 E 在 PQ 上.

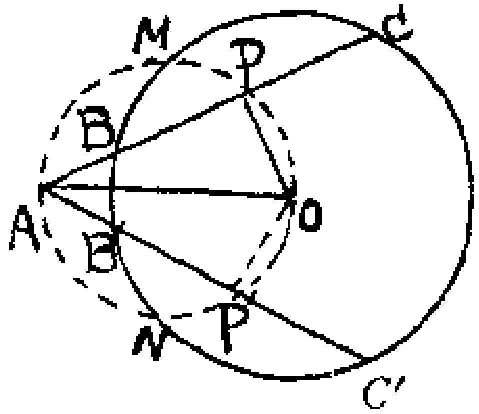
$AB\parallel CD\Longrightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}\Longrightarrow \angle ACD=\angle BDC\Longrightarrow DE=CE$

$\Longrightarrow OE\perp CD\Longrightarrow OE$ 与 PQ 共线$\Longrightarrow$E在PQ上.

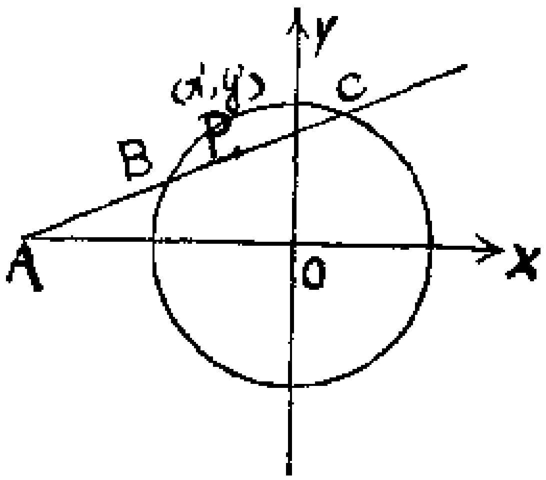
(2) 纯碎性(在者必合)：即证明 PQ 上的任一点 E′ 是一个以 CD 为底的内接梯形的对角线的交点。事实上，设 E′ 是 PQ 上的任一点. 连 CE′ 延长交⊙O 于 A'，连 DE' 延长与⊙O 交于 B'. 连 $A'B'$、$B'C$、$A'D$.

∵ PQ 垂直平分 CD，OE' 垂直平分 CD，∴ $\angle A'CD=\angle B'DC$，又 $\angle CDB'=\angle CA'B'$，∴ $\angle A'CD=\angle CA'B'$，因此 $A'B'\parallel CD$．故 $A'B'CD$ 为圆内接梯形，而 E' 是其对角线的交点．

4. 已知：点 A 是定圆 O 外的一点，ABC 是圆 O 的动割线（如图）．



第 4 题之一



第 4 题之二

求：BC 的中点 P 的轨迹．

解　P 的轨迹是以 AO 为直径的圆周夹在 $\odot O$ 内的部分 $\widehat{MON}$．事实上，连 OP，∵ P 是 BC 的中点，∴ $OP\perp BC$．即 $\angle APO$ 是直角，亦即 P 在以 OA 为直径的圆上．因为 BC 在圆内，∴ P 在 $\widehat{MON}$ 上。反过来，设 P' 在 $\widehat{MON}$ 上，连 AP' 交 $\odot O$ 于 B'，延长交 $\odot O$ 于 C'．则 $AB'C'$ 是 $\odot O$ 的割线，$B'C'$ 是圆内部分，即是 $\odot O$ 的弦．连 OP'，∵ $\angle AP'O$ 是直径 OA 上的圆周角，∴ $OP'\perp AP'$，P' 是 $B'C'$ 的中点．这说明轨迹上的点合乎条件．

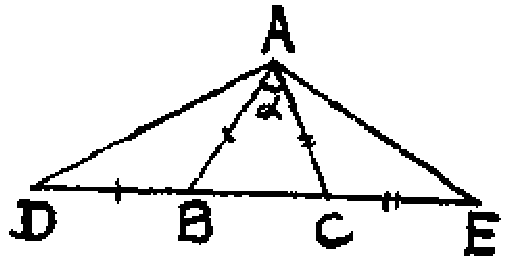
解法二（解析法）：以 O 为原点，AO 为 x 轴，得坐标系，如图．设 A 的坐标为 (a,o)，P 的坐标为 (x',y')，则由 $|AP|^2+|OP|^2=|OA|^2$ 知

$$(x'-a)^2+y'^2+x'^2+y'^2=a^2,$$

即 $\left(x'-\dfrac{a}{2}\right)^2+y'^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$．……

习　题　二

1. 设$\triangle ABC$已作出，顶角 A 为已知角 α，周长为定长 S. 把 BC 向两边延长使 $BD=BA$，$CE=CA$. 连 AD、AE，则



第 1 题

$$\angle D=\angle E=\frac{1}{2}\angle ABC$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)\right]$$

$$=\frac{1}{4}(180^\circ-\alpha).$$

又 $DE=S$，故$\triangle ADE$可作出，以此作奠基三角形.

2. 三角形的顶点是下述两个轨迹的交点：一个是与底边距离等于高的平行线；另一个是以底长为弦，含圆周角等于顶角的弓形弧.

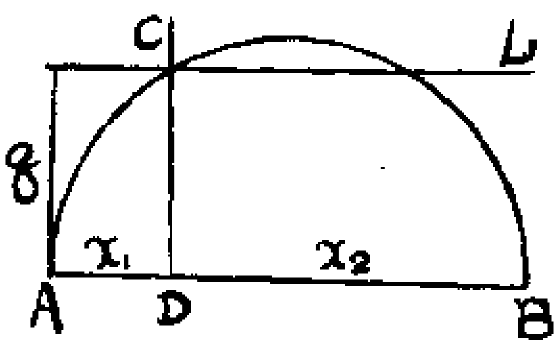
3. 将一腰平移到与另一腰构成三角形，作为奠基三角形.

4. 令方程的两根为 x_1 和 x_2，则 $x_1+x_2=p$，$x_1 \cdot x_2=q^2$. 于是 x_1、x_2 可作出.

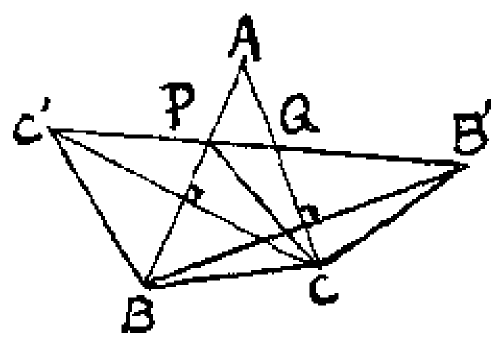
作法：1）作线段 $AB=p$，且以 AB 为直径作半圆；

2）作直线 $l \parallel AB$ 且与 l 相距 q 个单位；

3）令 l 与半圆的一个交点为 C，过 C 作 $CD \perp AB$，垂足为 D，则 AD、DB 是一元二次方程的两根.



第 4 题

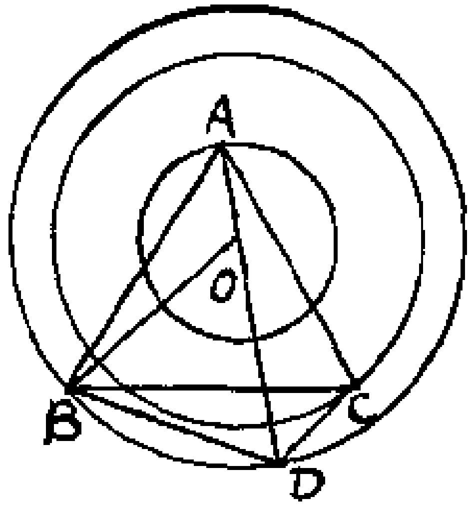


第 5 题

5. 如图，将 PC 翻转到 PC'，将 QB 翻转到 QB'，则 $PC'=PC$，$QB'=QB$，欲使 $BQ+QP+PC$ 最小，只须 $C'P+PQ+QB'$ 最小，只须使

C'、P、Q、B' 共直线即可．故 P、Q 应为 $B'C'$ 与 AB、AC 的交点．

6．假定$\triangle ABC$是所求的三角形，如图．把$\triangle ABO$绕B点沿顺时针方向旋转$60°$，则BA与BC重合，BO落于BD的位置．连OD，因 $\angle OBD=60°$，$BO=BD$，所以$\triangle OBD$为正三角形，所以$OD=OB$，因此．D在外圆周上．



第 6 题

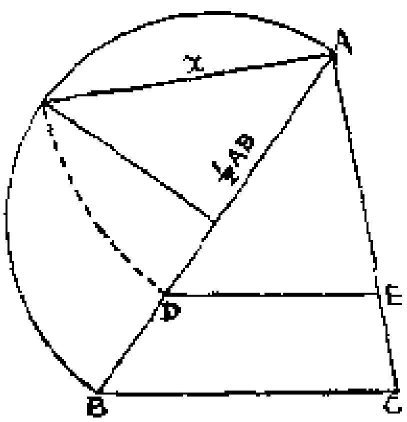
作法：1）任作外圆半径OB；

2）以B为心，OB为半径画弧交外圆周于D；

3）以D为心，以内圆半径为半径，画弧，交中圆于C（如图）；

4）连BC，以C为心，BC为半径画弧交内圆于A；

5）连AB、AC，则$\triangle ABC$为所求．



第 7 题

7．假设直线DE已作出，那么，$DE \parallel BC$，

且 $S_{\triangle ADE}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$．

令 $AD=x$，由于

$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，

所以，$\left(\dfrac{x}{AB}\right)^2=\dfrac{1}{2}$，

即 $x^2=\dfrac{1}{2}AB^2$，

亦即x是$\dfrac{1}{2}AB$和AB的比例中项，可作出．

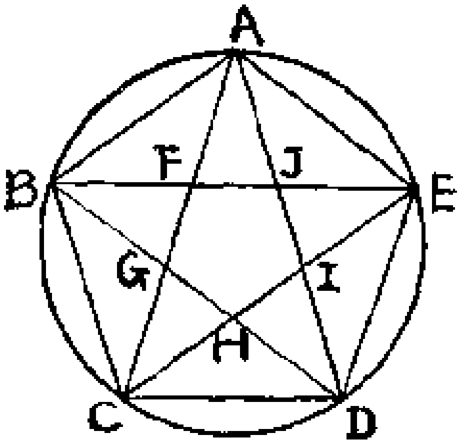
8．仿本节例8进行．

习　题　三

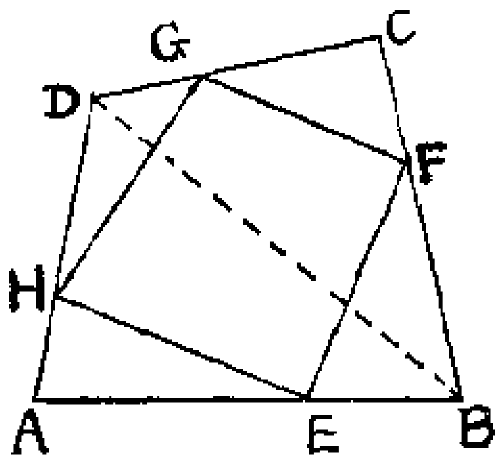
1．$\angle FBE=\dfrac{3}{16}d$．

2. 作正五边形的外接圆，利用$\triangle ABG \backsim \triangle BGF$，

$\frac{AB}{BG}=\frac{BG}{GF}$，可算出 $FG=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.



第 2 题



第 3 题

3. 连 BD，$\because \frac{S_{\triangle CFG}}{S_{\triangle CBD}}=\frac{CF\cdot CG}{CB\cdot CD}=\frac{CF}{CB}\cdot\frac{CG}{CD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$.

$\therefore \quad S_{\triangle CFG}=\frac{2}{9}S_{\triangle CBD}$，同理，$S_{\triangle AEH}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABD}$.

因此，$S_{\triangle CFG}+S_{\triangle AEH}=\frac{2}{9}S_{\square ABCD}=\frac{2}{9}$.

同理，$S_{\triangle BEF}+S_{\triangle DGH}=\frac{2}{9}$. 故 $S_{\square EFGH}=1-2\cdot\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$.

4. $h\approx 8.9$ 毫米.

第 六 章

习 题 一

1. 提示：分如下三种情况，(1) 三点中任何两点与直线不共面，可确定四个平面，(2) 其中两点与直线共面，可确定三个平面；(3) 三点与直线在同一平面内，可确定一个平面.

2. 不妨设直线 c 与 a 相交，而与 b 平行. 先由直线 c 与 b 确定一个平面 α，故直线 c 与 a 的交点 A 应在平面 α 上(因 A 在 c 上，而 c 在平面

α 上），同理可证：直线 a 与 b 的交点 B 也在平面 α 上．这时直线 a 上有两点 A、B 在平面 α 上，故直线 a 也在平面 α 上．即直线 c 与 a，b 在同一平面 α 上．

3. 设直线 b 与 n 条平行直线 a_1，a_2，…，a_n 都相交，设其交点为 A_1，A_2，…．A_n，首先由 a_1，a_2 确定一个平面 α，这时由于 A_1，A_2 在平面 α 上，故直线 b 也在平面 α 上，所以 A_3，A_4，…，A_n 也在平面 α 上，下面只要证明 a_3，a_4，…，a_n 也在平面 α 上就行，例如任选一条 a_k，∵ $a_k /\!/ a_1$ 故可确定一个平面 β，此时，a_1 和 A_k 都在平面 β 上，也在平面 α 上，由公理 3 的推论 1 知：直线 a_1 和 A_k 点只能确定一个平面，故平面 α 和 β 重合．故 a_k 也在平面 α 上．因此 b 和 a_1，a_2，…，a_n 这 $n+1$ 条直线都在平面 α 上．

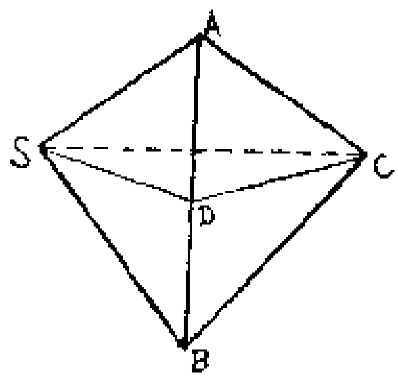
4. 可确定四个平面．

5. 这样的四点是不存在的．设有这样的四点存在如图所示．取 AB 中点 D，连 SD 和 CD．则 SD 为 $\triangle SAB$ 的中线．由中线长公式得：

$$SD=\sqrt{\frac{2(8^2+10^2)-13^2}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{159}{4}}<\sqrt{\frac{160}{4}}\approx 6.5$$

同理可得：$CD<6.5$，



第 5 题

∴ $SD+CD<13$

即 $SD+CD<SC$．而这与三角形的两边之和大于第三边矛盾，故是不可能的．因此这样的四点是不存在的．

6. 采用数学归纳法证明如下：

(1) 当 $n=2$ 时，只有两条直线，且它们相交，显然命题是正确的．

(2) 假设 $n=k$ 时命题是正确的．则当 $n=k+1$ 时，可分两种情况讨论，由归纳假设可知：这 $k+1$ 条两两相交的直线中的前 k 条或者在同一平面上或者都通过一点．因此，(a)若前 k 条直线 l_1，l_2，…，l_k 在同一平面 α 上，则第 $k+1$ 条直线 l_{k+1} 也应在平面 α 上，(∵ l_{k+1} 与 l_1、l_2 的两

个交点在平面 α 上). (b)若前 k 条直线 l_1, l_2, …, l_k 都通过一点 O, 且 l_1, l_2, …, l_k 不在同一平面上(否则回到(a)的情况), 又 ∵ l_{k+1} 与 l_1, l_2, …, l_k 都相交, 设其交点分别为 O_1, O_2, ……, O_k, 这 k 个点必然都与 O 点重合, 否则, 例如某一个 $O_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 与 O 不重合, 则 l_{k+1} 与 l_i 两直线有两个不同的公共点 O 和 O_i, 因而 l_{k+1} 与 l_i 重合, 这与假设不符, 故 O_i 与 O 必重合. 即 l_1, l_2, ……, l_k, l_{k+1}, 这 $k+1$ 条直线都通过一点 O.

综合(1)、(2)可知: 命题对于任何大于 2 的自然数, 都是正确的.

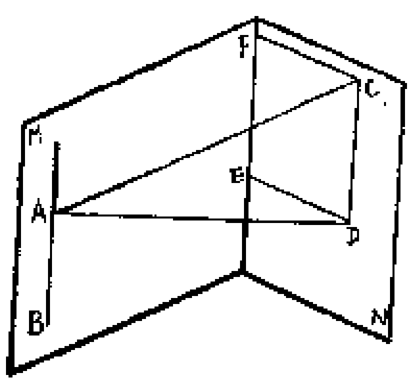
7. 提示: 平面四边形的对边延长线的交点应在相应的空间四边形两邻边所决定的两平面的交线上, 而这交线就是空间四边形的对角线.

8. 提示: 分两种情况讨论:

(1) 这四条直线没有三直线相交于一点. 这时可选任两条直线确定一个平面, 再证其他两条直线也在此平面上;

(2) 这四条直线中有三条交于一点. 这时可由这交点和另外一直线确定一个平面, 再证明这三条直线也在这个平面上.

习 题 二



第 1 题

1. 在平面 N 上, 过 E 作 $ED \parallel FC$ 交 CD 于 D.

则 $CD = EF = 4\text{cm}$.

∵ $AB \parallel CD$,

∴ $AB \parallel EF$.

故 $EF \perp AE$, $EF \perp AD$.

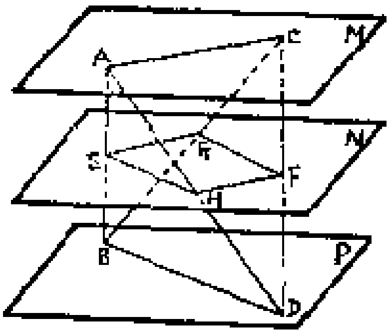
由 $AB \parallel CD \parallel EF$ 知 AD 是 AB 和 CD 间的距离. 由 $Rt\triangle ACD$ 得:

$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\,(\text{cm}).$$

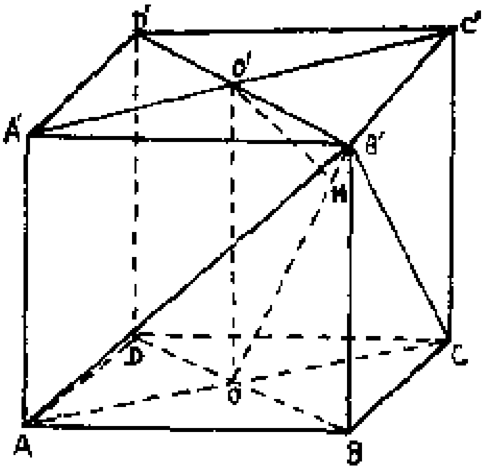
2. 提示: 见本章 § 2 中例 3 (2)的解答.

3. 因平面 $M \parallel$ 平面 N, 又平面 ABC 与平面 M 与 N 交于 AC、EG, 故 $AC \parallel EG$. 同理可证: $AC \parallel HF$, ∴ $EG \parallel HF$. 用证明 $EG \parallel HF$

同样的方法可以证明：$HE /\!/ GF$. 故 $EHFG$ 是平行四边形.



第 3 题



第 4 题

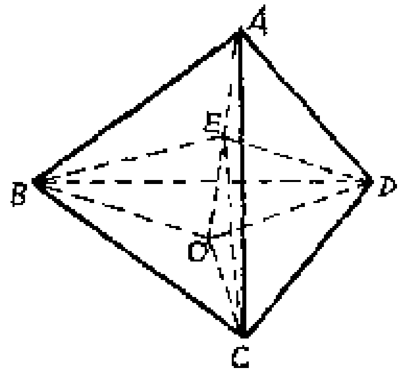
4. 连 $A'C'$ 与 $D'B'$ 交于 O'，连 AC 与 DB 交于 O，连 AB'，$B'C$.
$\because$ $A'C' /\!/ AC$，$\therefore$ $A'C' /\!/$ 平面 $AB'C$. 而 $B'C$ 在平面 $AB'C$ 上. 故 $A'C'$ 上任一点到平面 $AB'C$ 的距离等于 $A'C'$ 与 $B'C$ 间的距离. 又因为 $\angle O'B'C' = \angle O'B'A = 60°$，$\therefore$ O' 到平面 $AB'C$ 的垂线足在 $\angle AB'C$ 的平分线 $B'O$ 上. 自 O' 作 $O'H \perp$ 平面 $AB'C$，H 为垂足，则 H 在 $B'O$ 上.

在 $Rt\triangle OO'B'$ 中，$O'H \cdot OB' = OO' \cdot O'B' = 2S_{\triangle OO'B'}$，

$$\therefore \quad O'H = \frac{OO' \cdot O'B'}{OB'} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

即 $A'C'$ 与 $B'C$ 间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

5. 提示：先证 $EGFH$ 是平行四边形，再利用题设 $EF = HG$ 得：$EGFH$ 是矩形. 由此易证 $AC \perp BD$. 同理可证：$AD \perp BC$，$AB \perp CD$.



第 6 题

6. 自 A 作 $AO\perp$ 平面 BCD，O 为垂足，连 BO，则 O 必为 $\triangle BCD$ 的中心，设 AO 的中点为 E，正四面体棱长为 a.

则 $OB=OC=OD=\dfrac{a}{2\sin 60^\circ}$

$$=\frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$EO=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2-BO^2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}a,$$

$\therefore\quad BE^2=BO^2+OE^2=\dfrac{a^2}{2}$，同理可得：$EC^2=ED^2=\dfrac{a^2}{2}$.

$\therefore\quad BC^2=\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}=BE^2+EC^2$，$\therefore\quad \angle BEC$ 是直角.

$\therefore\quad BE\perp EC$，同理可证：$EC\perp ED$，$BE\perp DE$.

7. 取 BC 中点 M，连 AM、DM，则 E，F 分别在 MD 和 MA 上. 故 DF、AE 都在平面 AMD 上，

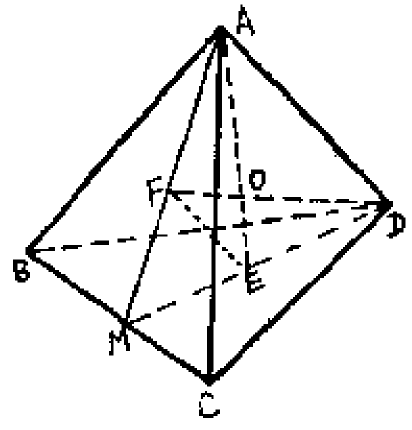
设其交点为 O，连 EF，则

$$EF\parallel AD \text{ 且 } EF=\frac{1}{3}AD.$$

由 $\triangle OEF\backsim\triangle OAD$

得：$AO:OE=OD:OF$

$=AD:EF=3:1$.



第 7 题

同理可证：CH 与 AE 也交于 O 点，且 $CO:OH=3:1$，BG 与 AE 也交于 O 点，且 $BO:OG=3:1$，故 AE，BG，CH，DF 交于一点 O，且

$$AO:OE=BO:OG=CO:OH=DO:OF=3:1$$

8. 先证明一棱中点与这棱不相交的对角线中点的连线与这棱和这对角线都垂直. 然后设正方体的棱长为 a，利用勾股定理分别计算上述连线

的长$\left(等于\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$和一个面上对角线的长(等于$\sqrt{2}a$). 故题目结论成立.

习 题 三

1. (1) P 到各顶点的距离为 PA, PB, PC, PD, 其中,

$$PC=\sqrt{3}a,\quad PA=a,\quad PB=PD=\sqrt{2}a.$$

(2) P 到 BC 与 P 到 CD 的距离都为 $PB=\sqrt{2}a$. P 到 AD 与 P 到 AB 的距离都为 $PA=a$.

(3) P 到 AC 的距离为 $PA=a$, P 到 BD 的距离为

$$PO=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

(O 为正方形两对角线交点.)

2. 自 A 作 $AO\perp$平面 BCD, O 为垂足, 连 BO, CO, DO.

$\because\quad AB\perp CD$,

$\therefore\quad CD\perp BO$

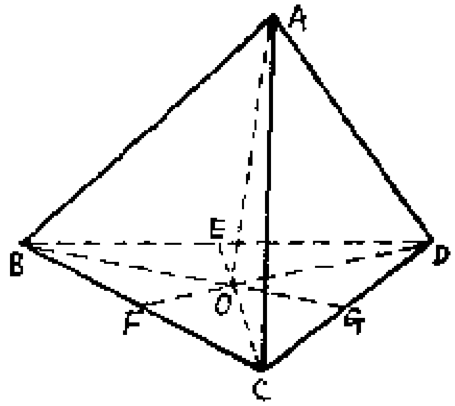
(三垂线定理的逆定理).

同理可证: $BD\perp CO$.

故 O 是 $\triangle BCD$ 的垂心.

因此 $\quad BC\perp DO$,

$\therefore\quad BC\perp AD$ (三垂线定理).



第 2 题

4. 正四面体的棱与其对面所成的角等于 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

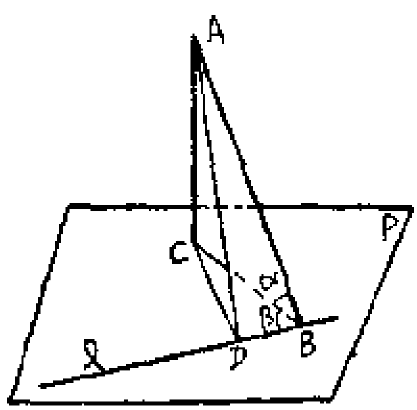
5. 设直线 l 通过斜线与平面 P 之交点 B(这并不失去一般性).

先讨论 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ 的情况,

自 A 作 $AC\perp$平面 P, C 为垂足, D 是 C 在 l 上的射影. 连 AD, CD, 则 $AD\perp l$,

$\therefore\quad \angle ABC=\alpha$,

$\angle CBD=\beta$, $\quad\angle ABD=\varphi$.



第 5 题

在 $Rt\triangle ABC$ 中，　　$BC = AB\cos\alpha$，

在 $Rt\triangle BCD$ 中，　　$BD = BC\cos\beta$，

在 $Rt\triangle ABD$ 中，$BD = AB\cos\varphi$.

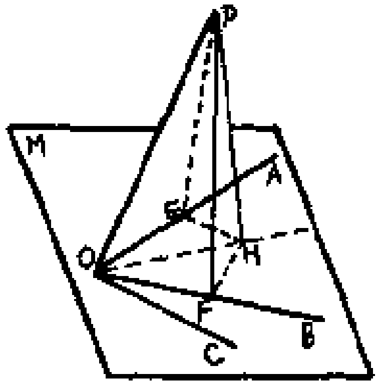
$\therefore\quad AB\cos\varphi = BC\cos\beta = AB\cos\alpha\cos\beta$，

$\therefore\quad \cos\varphi = \cos\alpha\cos\beta$.　　$\therefore\quad \varphi = \arccos(\cos\alpha\cos\beta)$.

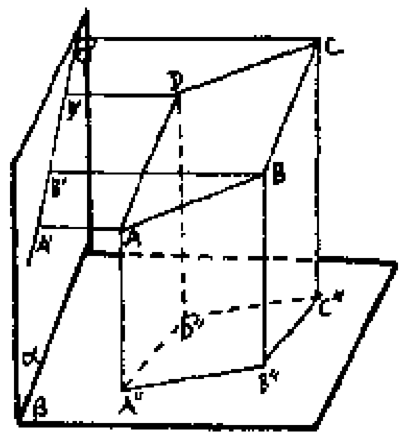
当　$\beta = 0$，或$\frac{\pi}{2}$时，此式仍然成立.

6. 自 P 作 $PH\perp$平面 M，H 为垂足，$\because\quad \angle POA = \angle POB$，

易证：OH 是$\angle AOB$的平分线，同理可证：OH 也是 $\angle AOC$的平分线，故 H 点应是$\angle AOB$ 和 $\angle AOC$ 的平分线的交点，即 H 点和 O 点重合. $\therefore\quad PO\perp$平面 M.



第 6 题



第 7 题

7. 设 $A'B'C'D'$ 所在直线为 l，过 l 与 AA' 作一平面 P.

$\because\quad AA'\perp$平面 α，$\therefore\quad$ 平面 $P\perp$平面 α，但 B' 在平面 P 上，且 $BB'\perp$平面 M，故 BB' 在平面 P 上. 同理：DD'、CC' 也在平面 P 上.

$\because\quad AA'' \parallel DD''$，$A''B'' \parallel D''C''$，

$\therefore\quad$ 平面 $A''ABB'' \parallel$ 平面 $DD''C''C$.

$\therefore\quad AB \parallel CD$. 同理可证：$BC \parallel AD$.

故　$ABCD$ 是平行四边形.

8. 设 $AC = x$，则 $AO = x - d$，$AB = x + d$，依题意得：

$$\begin{cases}(x+d)^2 - (x-d)^2 = 10^2 \\ x^2 - (x-d)^2 = 49.\end{cases}$$

解这个方程组得：$x = 25$，$d = 1$.

故　$AO=24$，$AC=25$，$AB=26$.

9. 自 A 作 $AE\perp BD$ 于 E，则 $PE\perp BD$. 即 PE 为所求之绳子的最小长度.

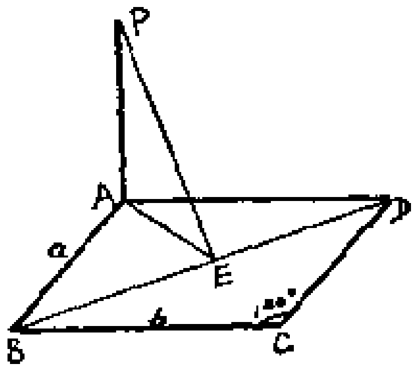
由余弦定理得：

$$BD^2=a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ$$
$$=a^2+b^2+ab.$$

又由三角形面积公式得：

$$\frac{1}{2}ab\sin120^\circ=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot BD.$$

$$\therefore\quad AE=\frac{\sqrt{3}ab}{2BD}$$
$$=\frac{\sqrt{3}ab}{2\sqrt{a^2+b^2+ab}}.$$



第 9 题

故　$PE=\sqrt{c^2+AE^2}=\sqrt{\dfrac{4c^2(a^2+b^2+ab)+3a^2b^2}{4(a^2+b^2+ab)}}$.

10. 设 $OP=x\,\text{cm}$，$\angle PBO=\alpha$，$\angle PAO=\beta$，则

$$\text{tg}\alpha=\frac{x}{2},\quad \text{tg}\beta=\frac{x}{12}.\quad \because\quad \alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\quad \frac{\text{tg}\alpha-\text{tg}\beta}{1+\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta}=1\quad 即\quad \frac{\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{12}}{1+\dfrac{x^2}{24}}=1$$

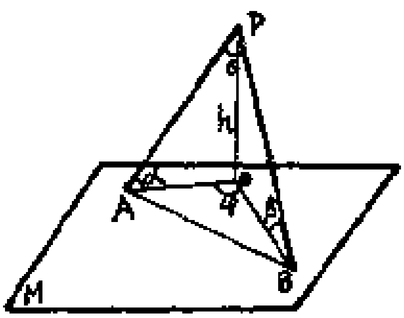
化简得：$x^2-10x+24=0$，$\therefore\quad x=4$ 或 6.

11. 设两直线为 PA 和 PB，自 P 作 $PO\perp$ 平面 M，O 为垂足. 设 $PO=h$，

依题意得：$PA=h\text{cosec}\,\alpha$，

$PB=h\text{cosec}\beta$，$OA=h\text{ctg}\alpha$，

$OB=h\,\text{ctg}\beta$.



第 11 题

由余弦定理得：

$$AB^2=PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cos\theta$$
$$=AO^2+BO^2-2AO\cdot BO\cos\varphi$$

即：$h^2(\operatorname{cosec}^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\beta-2\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta\cos\theta)$

$=h^2(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta-2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\cos\varphi)$.

故 $$\cos\varphi=\frac{2(\csc\alpha\cdot\csc\beta\cos\theta-1)}{2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}=\frac{\cos\theta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

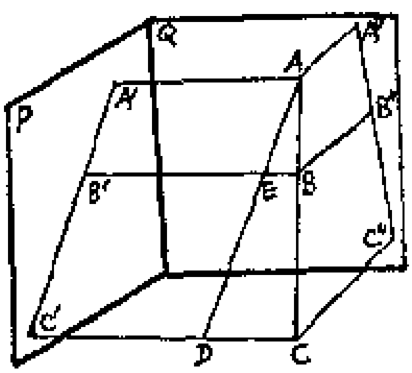
∴ $$\varphi=\arccos\left(\frac{\cos\theta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right).$$

12. 这垂线的两端到这三角形的最大边的距离分别为 8cm 和 17cm.

13. O 到平面 α 的距离为 3.5cm.

14. 它的斜边在平面 α 上的射影的长为 6dm.

15. A、B、C 在一直线上，$AA'\parallel BB'\parallel CC'$，故 A、B、C，A'、B'、C' 在同一平面上，且 A'、B'、C' 在一直线上，



第 15 题

设 $AB:BC=m:n$.

在平面 $AA'C'C$ 上，自 A 作 $AD\perp CC'$ 于 D，交 BB' 于 E. 则

$$\frac{BE}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{m}{m+n}$$

即 $$BE=\frac{m}{m+n}DC.$$

$$BB'=B'E+BE=AA'+BE=AA'+\frac{m}{m+n}DC$$

$$=AA'+\frac{m}{m+n}(CC'-AA'),$$

∴ $BB'(m+n)=nAA'+mCC'$.

同理可证：$BB''=nAA''+mCC''$.

故 $(m+n)(BB'+BB'')=n(AA'+AA'')+m(CC'+CC'')$

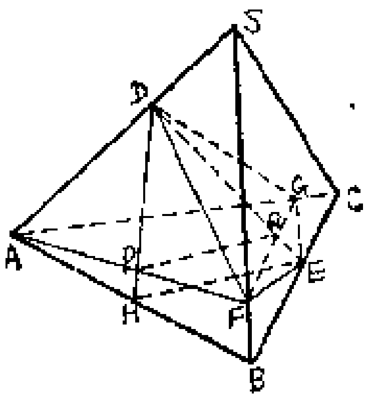
但 $AA'+AA''=BB'+BB''$.

∴ $(m+n)(AA'+AA'')=n(AA'+AA'')+m(CC'+CC'')$.

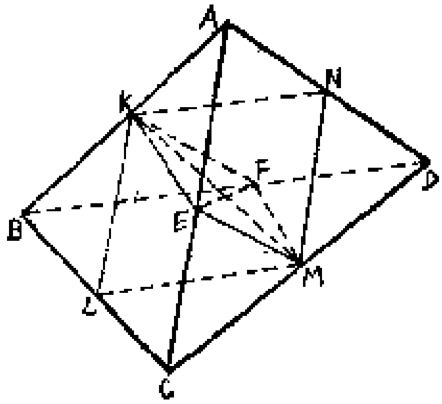
即 $m(AA'+AA'')=m(CC'+CC'')$.

故 $AA'+AA''=CC'+CC''$.

16. 取 AB 中点 H，连 DH，HE，则 $DH /\!/ SB$，$HE /\!/ AC$，故 $SB /\!/$ 平面 DEH，$AC /\!/$ 平面 DHE，连 AF 与 DH 交于 P. 由 $DP /\!/ SF$ 得：P 为 AF 的中点．设 DE 与 FG 交于 Q，连 PQ．由 $AC /\!/$ 平面 DHE 得：$PQ /\!/ AC$，$\therefore$ Q 为 FG 中点，即 DE 平分 FG.



第 16 题



第 17 题

17. 设 $AB=CD$，$BC=AD$，取 AC 中点 E，BD 中点 F，AB 中点 K，BC 中点 L，CD 中点 M，DA 中点 N.

由 $KL /\!/ AC$ 且 $KL=\frac{1}{2}AC$，$MN /\!/ AC$ 且 $MN=\frac{1}{2}AC$ 得：

$KL \underline{/\!/} MN$．故 $KLMN$ 是平行四边形．同理可得：

$KE /\!/ FM$，由 $BC=AD$ 得：$KE=KF$．$\therefore$ $KEMF$ 是菱形．

故 $EF \perp KM$. 同理可证：$EF \perp LN$．$\therefore$ $EF \perp$ 平面 $KLMN$.

$\therefore$ $EF \perp KL$，$EF \perp KN$，但 $KL /\!/ AC$，$KN /\!/ BD$.

$\therefore$ $EF \perp AC$，$EF \perp BD$.

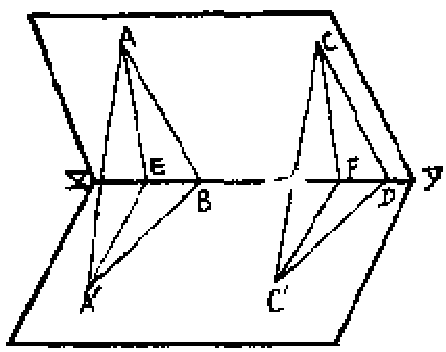
本命题的逆命题也是正确的，读者自己可以作为练习，加以证明．

习 题 四

1. 煤层平面对地平面的倾斜角为 30°.
2. 前进 1 公里时，升高 $250\sqrt{2} \doteq 353$(米).
3. 这两个等腰三角形顶点间的距离为：13 cm.
4. 提示：利用定理 17 推论 2 先证明：

$LM\perp$平面 $AXYB$. 再得到 $LM\perp XY$.

5. 设 AB、CD 与交线 XY 的交点为 B、D，且分别截取 $AB=CD$. A、C 在另一平面上的射影为 A'、C'. 依题意得:



第 5 题

$$\angle ABA'=\angle CDC',$$

$\therefore$ $Rt\triangle ABA'\cong Rt\triangle CDC'$,

$\therefore$ $AA'=CC'$.

再自 A 作 $AE\perp XY$ 于 E，自 C 作 $CF\perp XY$ 于 F，连 $A'E$ 和 $C'F$，则 $A'E\perp XY$，$C'F\perp XY$. 故

$$\angle AEA'=\angle CFC',$$

$\therefore$ $\triangle AEA'\cong\triangle CFC'$,

$\therefore$ $AE=CF$,

$\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle CDF$，故 $\angle ABE=\angle CDF$.

6. AB 在 l 上的射影的长为 a.

7. 设三平面为 P、Q、R，先拿两个平面 P、Q 来讨论可分为两大类:

(1) $P\parallel Q$ 时，再来看 R 与 P、Q 的关系，这时又可分成两类: (a) $R\parallel P$，这时三平面平行，把空间分成四部分；(b) R 与 P 相交，这时 R 必与 Q 相交，即两平行平面被第三平面相截，把空间分成六部分.

(2) P 与 Q 相交于直线 XY 时，再看 R 与 P，Q 的关系可分成三类: (a) $R\parallel XY$ 且与 P，Q 都相交，即三平面两两相交且三交线互相平行，这时把空间分成七部分；(b) R 与 XY 交于一点，即两相交平面被第三平面所截，这时把空间分成八部分；(c) R 通过 XY，即三平面相交于一条公共直线，这时把空间分成六部分.

8. 四边形的面积为 $\frac{3}{4}a^2$，周长为$\sqrt{13}\,a$.

9. 自 C 作 $CD\perp$平面 M，D 为垂足，在平面 ABC 上，自 C 作 $CE\perp AB$ 于 E，连 ED，则 $\angle CED=\varphi$. 连 DA、DB，则 $\angle CAD=\alpha$，$\angle CBD=\beta$. 设 $CD=h$，在 $Rt\triangle ACD$ 中，$AC=\dfrac{h}{\sin\alpha}$.

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$CE\cdot AB=AC\cdot BC$，

$\therefore\quad CE=\dfrac{AB\cdot AC}{\sqrt{AC^2+BC^2}}$，在 $Rt\triangle CED$ 中，$\sin\varphi$

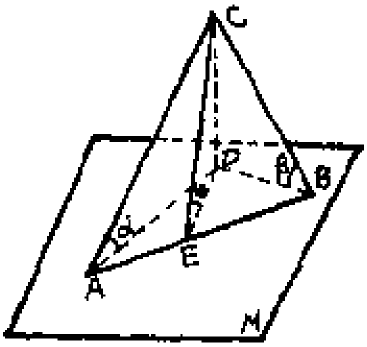
$$=\frac{CD}{CE}=\frac{CD\sqrt{AC^2+BC^2}}{AB\cdot AC}$$

$=\beta\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$，且 φ 是锐角.

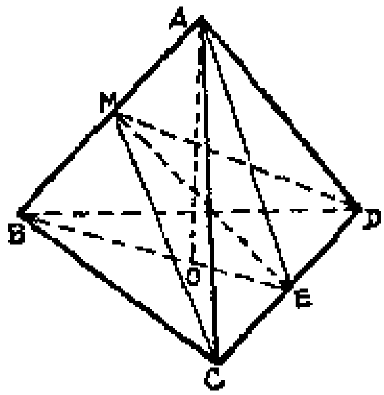
$\therefore\quad \varphi=\arcsin(\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta})$.

10. 自 A 作 $AO\perp$ 平面 BCD，O 为垂足，$\because\quad AB=AC=AD$，

$\therefore\quad OB=OC=OD$. 即 O 是 $\triangle BCD$ 的中心. 连 BO 延长交 CD 于 E，连 AE. $\because\quad BE\perp CD$，$AE\perp CD$，



第 9 题



第 10 题

$\therefore\quad \angle AEB$ 是二面角 $A-CD-B$ 的平面角，在 $Rt\triangle AOE$ 中，

$AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$OE=\dfrac{1}{3}BE=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$，

$\therefore\quad \cos\angle AEB=\dfrac{OE}{AE}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\quad \angle AEB=\arccos\dfrac{1}{3}$.

取 AB 中点 M，连 MC，MD，ME，$\because\quad MC=MD$，又 CD 中点为 E，$\therefore\quad ME\perp CD$，同理：$AB\perp ME$，故 ME 是 AB 和 CD 间的距离. 在 $Rt\triangle AME$ 中，$ME=\sqrt{AE^2-AM^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

11. (1) 取 AB 中点 M，连 AM、MC.

$\because$ $AB=AD$，$\therefore$ $AM\perp BD$，同理可得：$CM\perp BD$，

$\therefore$ $BD\perp$平面 AMC，$\therefore$ $AC\perp BD$.

又 $\because$ $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ $EF\parallel BD$ 且 $EF=\dfrac{1}{3}BD$. 同理可证：$HG\parallel AC$. 且

$HG=\dfrac{1}{3}BD$. $\therefore$ $EF\underline{\parallel}HG$，故 $EFGH$ 是平行四边形.

又由 $\dfrac{DF}{FA}=\dfrac{DG}{GC}=\dfrac{2}{1}$得：$FG\parallel AC$. 而 $AC\perp BD$，$EF\parallel BD$.

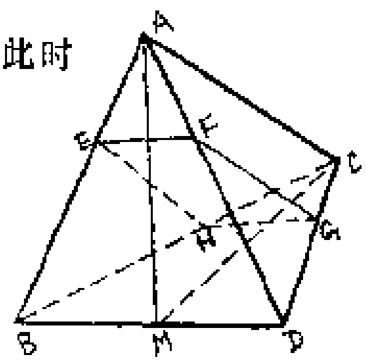
$\therefore$ $EF\perp FG$. $\therefore$ $EFGH$ 是矩形.

(2) 设原正方形的边长为 a，则 $EF=\dfrac{1}{3}DB=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$，

而 $FG=\dfrac{2}{3}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$，$\therefore$ $AC=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$，此时

$$\cos\angle AMC=\frac{AM^2+MC^2-AC^2}{2\cdot AM\cdot MC}$$

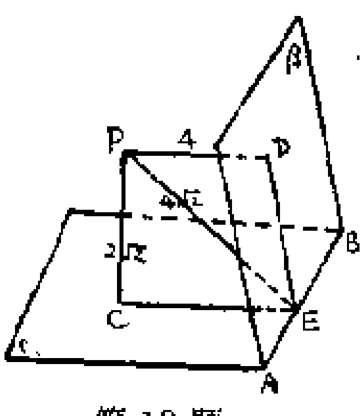
$$=\frac{\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^2}{2}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{1}{2}，且$$



第 11 题

$0<\angle AMC<180°$，$\therefore$ $\angle AMC=60°$.

12. 如图，P 是二面角 $\alpha—AB—\beta$ 内的一点，且 PC、PD、PE 分别是它到平面 α、β 与棱 AB 的距离.



第 12 题

依题意得：$PC=2\sqrt{2}$，$PE=4\sqrt{2}$，$PD=4$.

由　$Rt\triangle PCE$ 得：$\angle PEC=30°$，

由　$Rt\triangle PDE$ 得：$\angle PEC=45°$.

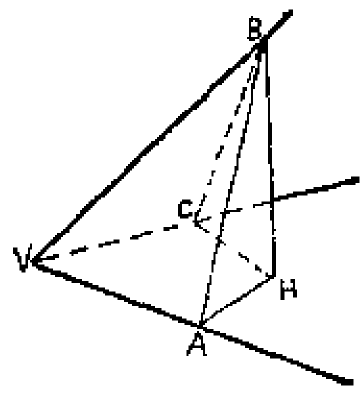
故二面角的度数 $=\angle DEC=\angle PEC+\angle PED=75°$.

习　题　五

1. 提示：先利用题设条件证明 $AB\perp$ 平面 VGC，从而得：平面 $ABC\perp$ 平面 VCG. 同理可证：平面 $ABC\perp$ 平面 VAG. 故 $VG\perp$ 平面 ABC.（这里 G 是截口 $\triangle ABC$ 的垂心）

2. 提示：设三面角为 $S—ABC$，在一棱上取 $SA=3\,cm$，自 A 作 $AO\perp$ 平面 SBC，O 为垂足，过 O 作 $OD\perp SC$ 于 D，连 AD. 先求出 SD、SO，再计算 AO. 答案：$\sqrt{6}\,cm$.

3. 设在三角面 $V—ABC$ 中，$\angle AVB=\angle CVB$. 在棱 VB 上任取一点 B，过 B 作 $BH\perp$ 平面 VAC，H 为垂足，在平面 VAC 上，过 H 作 $HC\perp VC$ 于 C，作 $HA\perp VA$ 于 A，连 AB 和 CB，由三垂线定理得：$AB\perp VA$，$BC\perp VC$，故 $\angle HAB$ 及 $\angle HCB$ 分别是二面角 VA 及二面角 VC 的平面角. 在 $Rt\triangle VAB$ 和 $Rt\triangle VCB$ 中，$\angle AVB=\angle CVB$，$VB=VB$，$\angle VAB=\angle VCB=90°$，



第 3 题

$\therefore$　$\triangle VAB\cong\triangle VCB$，

$\therefore$　$AB=BC$.

在　$Rt\triangle BAH$ 和 $Rt\triangle BCH$ 中，

　　$AB=CB$，$BH=BH$，

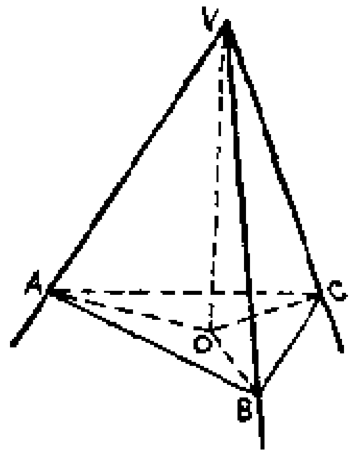
故　$\triangle BAH\cong\triangle BCH$，

$\therefore$　$\angle BAH=\angle BCH$，即二面角 $VA=$ 二面角 VC.

4. 提示：在棱 SA 上取一点 A，分别在平面 SAC 和 SAB 上作 $AB\perp SA$ 于 A，作 $AC\perp SC$ 于 C，连 BC，设 $SA=a$，则可计算出：$BC^2=2a^2$，$AC^2=a^2$，$AB^2=a^2$，故 $BC^2=AC^2+AB^2$，因此

$\angle CAB=90°$.

5. 设三面角$V-ABC$的两个二面角VA、VB的平分面交于一直线VO. 因为VO在二面角VA的平分面上，所以VO上的点到平面VAB和VAC的距离相等.（请读者自己证明这点），同理可得：VO上的点到平面VAC和VBC的距离相等. 故VO上的点到平面VAC和VBC的距离相等. 因此VO也在平面VAC、VBC组成的二面角VC的平分面上（请读者自己证明这点）， 所以三面角的三个二面角的平分面交于同一直线VO.

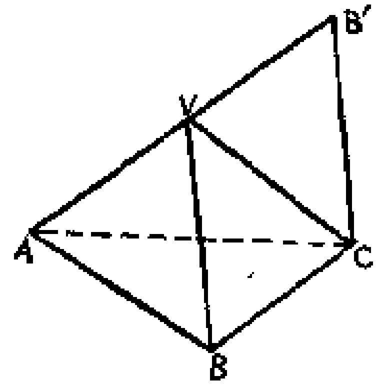


第 5 题

6. $\because$ $\angle AVB=90°$, $\therefore$ $AB^2=VA^2+VB^2=2VA^2$, 延长AV至B'，使$VB'=VB$，连$C'B$，则由$\angle AVC+\angle BVC=180°$得：

$\angle B'VC=\angle BVC$. 故$\triangle B'VC\cong\triangle BVC$, $\therefore$ $BC=B'C$. 从而得到：$AV=VB=VB'$. 即V是AB'中点. 因此，$AC^2+B'C^2=2(VA^2+VC^2)$，故

$$AB^2+BC^2-CA^2$$
$$=2(VA^2+VA^2+VC^2)$$
$$=2(VA^2+VB^2+VC^2).$$



第 6 题

7. 提示：在VD上任取一点D， 过D作一平面ABC与VA、VB、VC分别交于A、B、C. 设平面VBD与平面ABC交于BE，与平面VAC交于VE.

再在三面角$V-BEA$和$V-DEC$中应用定理18， 即可证明结论.

8. (1) 在SA上取一点A，过A作$AD\perp$平面BSC， D为垂足. 过D在平面BSC上作$DB\perp SB$于B， $DC\perp SC$于C. 连AB，AC. 再证$\triangle ADC\cong\triangle ABD$和$\triangle SBD\cong\triangle SCD$即可证得结论.

(2) 因 $AD=SA\sin\angle ASD$，$AB=SA\sin\angle ASB$.

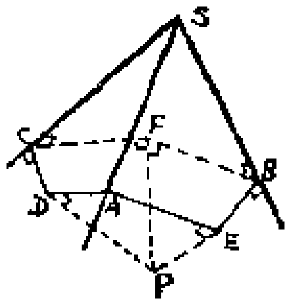
但　$AB>AD \Longrightarrow SA\sin\angle ASD<SA\sin\angle ASB$

$\Longrightarrow \sin\angle ASD<\sin\angle ASB$,

又　$\angle ASD$ 是锐角，$\angle ASB$ 也是锐角.

故　$\angle ASD<\angle ASB$.

9. 如图，在三面角 $S-ABC$ 内总存在一点 P，可向面 ASB、BSC、



第 9 题

CSA 引垂线 PE、PF、PD，则平面 DPE、EPF、 FPC 分别与三条棱垂直于 A、B、C.

故 $\angle EBF$ 是二面角 $E-SB-F$ 的平面角，因 P、E、B、F 共圆，故　$\angle EPF+\angle EBF=180^\circ$.

同理可证：$\angle FPD+\angle FCD=180^\circ$,

$\angle DPE+\angle DAE=180^\circ$.

但三面角　$P-DEF$ 中，

$\angle EPF+\angle FPD+\angle DPE<360^\circ$,

故　$180^\circ<\angle EBF+\angle FCD+\angle DAE<540^\circ$.

即三面角的三个二面角的和大于 180° 而小于 540°.

第　七　章

习　题　一

1. 在　$Rt\triangle PAB$，$Rt\triangle PBC$ 和 $Rt\triangle PCA$ 中，

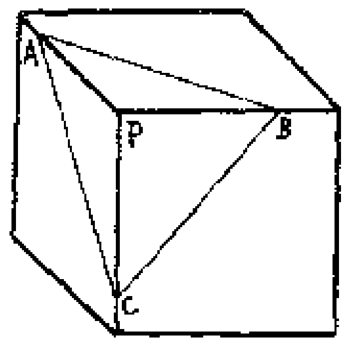
$AB^2=PA^2+PB^2$，$BC^2=PB^2+PC^2$，$AC^2=PA^2+PC^2$.

$\therefore\quad AB^2=PA^2+PB^2<(PA^2+PC^2)+(PB^2+PC^2)$

即 $AB^2<BC^2+AC^2$.

故 $\cos\angle ACB=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2\,AC\cdot BC}>0$,

$\therefore\quad \angle ACB$ 是锐角. 同理可证, $\angle ABC$ 和 $\angle BAC$ 是锐角. 因此 $\triangle ABC$ 是锐角三角形.



第 1 题

2. 由顶点 V 作 $VP\perp$ 平面 ABC, P 为垂足.

因题设 $VA\perp BC$, $\therefore\quad AP\perp BC$,

同理可证: $BP\perp AC$.

故 P 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

$\therefore\quad CP\perp AB$, 故如左图所示:

$$AB^2-BC^2=(BF^2+AF^2)-(BF^2+FC^2)$$
$$=AF^2-FC^2.$$

同理可证: $AP^2-PC^2=AF^2-FC^2$,

故 $AB^2-BC^2=AP^2-PC^2$.

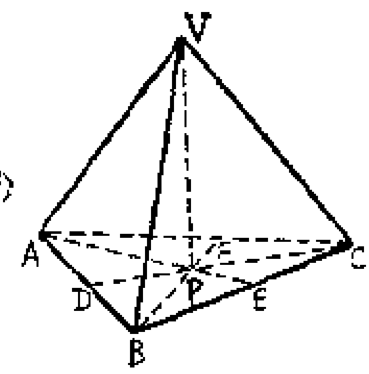
即 $AB^2+PC^2=BC^2+AP^2\cdots\cdots(1)$.

又 $\because\quad VA^2=VP^2+AP^2$, $VC^2=VP^2+PC^2$,

$\therefore\quad VA^2+BC^2=VP^2+AP^2+BC^2$.

由 (1) 代入得: $VA^2+BC^2=VP^2+PC^2+AB^2=VC^2+AB^2$.

同理可证: $VB^2+AC^2=VA^2+BC^2$.



第 2 题

3. $\because\quad E$, H 分别是 AB, AD 之中点, $\therefore\quad EH\parallel BD$

且 $EH = \frac{1}{2}BD$，同理可得：$EH \parallel FG$

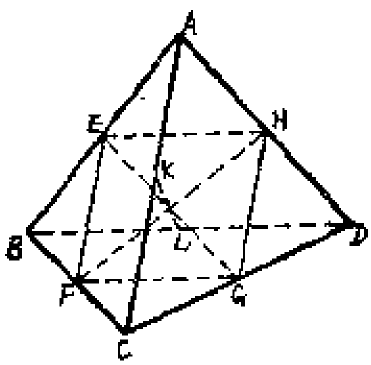
且 $EH = FG$，故 $EH \parallel FG$ 且 $EH = FG$.

因此 $EFGH$ 是平行四边形.

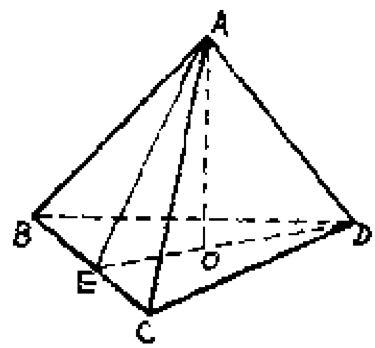
$\therefore$ $EG^2 + FH^2 = 2(EH^2 + EF^2) = \frac{1}{2}(BD^2 + AC^2)$，同理可证：

$$EG^2 + KL^2 = \frac{1}{2}(BC^2 + AD^2),$$

$$HF^2 + KL^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + CD^2).$$



第 3 题



第 4 题

三式相加得：

$$2(EG^2 + KL^2 + HF^2) = \frac{1}{2}(AB + AC^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 + BD^2)$$

即 $4(EG^2 + KL^2 + HF^2)$

$= AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 + BD^2.$

4. 自 A 作 $AO \perp$ 平面 BCD，O 为垂足，则 O 是 $\triangle BCD$ 的中心. 连 DO 延长交 BC 于 E，则 E 是 BC 中点，连 AE. 为计算简便，不妨设正四面体的棱长为 2（这不失一般性，因为正四面体的二面角的大小与棱长无关）则 $AE = DE = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$，

$EO = \frac{1}{3}DE = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 设正四面体的二面角为 α，则

$\alpha = \angle AEO$，在 $Rt\triangle AEO$ 中，

$$\cos\alpha=\frac{EO}{AE}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}.$$

∴ α 为锐角.

又设边之比为 $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ 的三角形的最小锐角为 β. 由余弦定理得：$\cos\beta=\dfrac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2-1^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$，

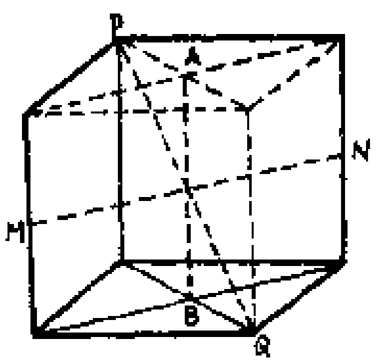
∴ $\cos 2\beta=2\cos^2\beta-1=2\times\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^2-1=\dfrac{1}{3}$，

∴ 2β 也为锐角， 故 $\cos\alpha=\cos 2\beta=\dfrac{1}{3}$，

且 α，2β 都为锐角.

∴ $\alpha=2\beta$.

5. 第一类轴，过相对两条棱的中点之连线， 例如图中 MN 所示，这样的轴共有六根，其旋转角为 180°；



第5题

第二类轴， 过相对两个面的中心的连线，例如左图中的 AB 所示， 这样的轴有三根，其旋转角为 90°；

第三类轴，立方体的对角线， 例如左图中的 PQ 所示， 这样的轴共有四根，其旋转角为 360°.

三类轴合计共有十三根， 设立方体的棱长为 1，则 $AB=1$，$MN=\sqrt{2}$，$PQ=\sqrt{3}$，∴ 这十三条轴的长之算术平均值为 $\dfrac{1}{13}(3+6\sqrt{2}+4\sqrt{3})$.

6. 设这个多面体的棱数为 E，面数为 F 这个多面体各个面分别为 N_1 边形，N_2 边形，N_3 边形， ……，N_F 边形. 则各面之多边形的内角和分别为：$(N_1-2)\cdot180°$，$(N_2-2)\cdot180°$，$(N_3-2)\cdot180°$，……，$(N_F-2)\cdot180°$. 又设这个多面体所有面角之和为 S， 则 S 应为上述各

面角和的总和，即

$$S=180°\cdot[(N_1-2)+(N_2-2)+(N_3-2)+\cdots\cdots+(N_F-2)]$$
$$=180°\cdot(N_1+N_2+N_3+\cdots\cdots+N_F)-180°\cdot 2F$$
$$=180°\cdot(N_1+N_2+N_3+\cdots\cdots+N_F)-360°\cdot F.$$

但 $N_1+N_2+N_3+\cdots\cdots+N_F$ 是多面体各面之多边形所有边数之和，它应等于 $2E$.（因为每条棱是相邻两面多边形的公共边，因此在计算总边数时都算了两次.）

故 $S=180°\cdot 2E-360°\cdot F=(E-F)\cdot 360°$.

但由多面体的欧拉定理得：

$E+2=F+V$,

$\therefore$ $E-F=V-2$，因此，

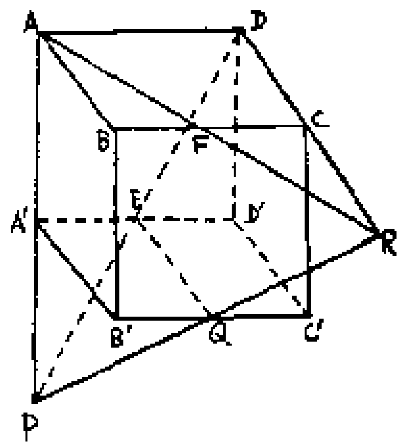
$S=(V-2)\cdot 360°$.

7. 设平面 QAA' 与平面 $BB'C'$ 之交线为 FQ,

$\because$ $AA'\parallel$ 平面 $BB'C$,

$\therefore$ $AA'\parallel QF$.

同理，设平面 QDC 与平面 $A'B'C'$ 之交线为 QE,



第 7 题

则 $QE\parallel DC$.

因直线 PQR 同时在两平面 $AA'Q$ 与 QDC 上，故是此两平面的交线。又 $\because$ P 点在两平面 $AA'D'$ 与 QDC 上，故 P 点在 DE 上. 同理可证：AF 之延长线经过 R 点.

设立方体的棱长为 a，$BF:FC=K$，则

$AB:CR=BF:FC=K$，$AP':DD'=A'E:ED'=K$,

$\therefore$ $CR=\dfrac{a}{K}$，$A'P=Ka$,

在 $Rt\triangle ADR$ 和 $Rt\triangle PAR$ 中，

$$AR^2=AD^2+DR^2=a^2+\left(a+\frac{a}{K}\right)^2,$$

$$PR^2=AP^2+AR^2=(a+aK)^2+AR^2$$

$$=3a^2+a^2\left[2\left(K+\frac{1}{K}\right)+\frac{1}{K^2}+K^2\right],$$

但 $K+\frac{1}{K}\geqslant 2$, $\frac{1}{K^2}+K^2\geqslant 2$ 且等号只在 $K=\frac{1}{K}$ 时成立.

$\therefore$ $PR^2\geqslant 3a^2+a^2(2\times 2+2)$ 即 $PR^2\geqslant 9a^2$ 且等号只在 $K=\frac{1}{K}$ 时成立. 故当 $K=1$ 时, PR^2 达到它的最小值 $9a^2$, 此时 PR 达到最小值 $3a$. 即如果 Q 为 $B'C'$ 的中点, 则 PR 之长为所有与此三棱都相交的线段中最小者.

8. 由多面体的欧拉定理得: $V+F=E+2$, 假设有一个多面体是 7 条棱, 则 $V+F=7+2=9$, 但, $V\geqslant 4$, $F\geqslant 4$, 故这只有两种可能: 或者 $V=4$, $F=5$; 或者 $V=5$, $F=4$. 下面分别证明两者都是不可能的:

(1) 当 $V=4$, $F=5$ 时, 多面体有 5 个面, 则它至少有 $\frac{5\times 3}{2}$ 条棱. 即它的棱条必多于 7 条, 这与题设矛盾, 故是不可能的;

(2) 当 $V=5$, $F=4$ 时, 我们先证明下述命题:

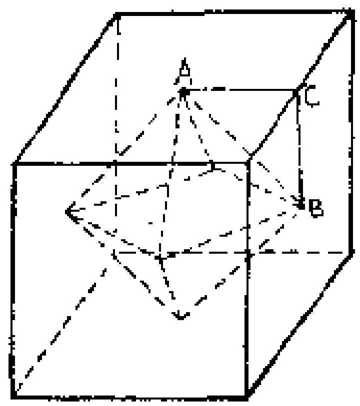
甲 V_3, V_4, V_5, ……分别表示以三面角, 四面角, 五面角, ……为多面角的顶点之顶点数, 则 $2E>3V$. 事实上,

$2E=3V_3+4V_4+5V_5+\cdots\cdots=3(V_3+V_4+V_5+\cdots\cdots)+V_4+2V_5+\cdots\cdots=3V+V_4+2V_5+\cdots\cdots$, 故 $2E>3V$.

但此时, $E=7$, $V=5$, $2E=14\not>3V(=15)$, 故这也是不可能的.

综合 (1)、(2) 知: 多面体的棱数不可能等于 7, 即没有一个多面体的棱数等于 7.

9. 因截面是五边形, 故截面必与立方体中六个面中的五个面相交, 而立方体的六个面中有三对面是互相平行的, 因而与截面相交的五个平面中至少有两个面是互相平行的. 这时这两面与截面的相交线也应该是平行的. 即截面五边形中至少有两边是平行的, 而正五边形中没有哪两边是平行的, 因此, 截面五边形不可能是正五边形.



第 10 题

10. 如图，因立方体的棱长为 a，故在 $\triangle ABC$ 中（其中 A、B 是立方体相邻两面的中心，C 是它们的公共棱的中点），$\angle ACB$ 是此相邻两面所组成的二面角的平面角，故 $\angle ACB=90°$，

AC 是立方体的面的边心距，

故 $AC=BC=\dfrac{a}{2}$.

因此，立方体的各面中心组成的正八面体的棱长 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

$$S_{\text{立方体}}=6\cdot a^2,$$

$$S_{\text{正八面体}}=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2=\sqrt{3}a^2,$$

故：$S_{\text{立方体}}:S_{\text{正八面体}}=6a^2:\sqrt{3}a^2=2\sqrt{3}:1$.

习 题 二

1. 设正方形每边的长为 $4a$，则折成柱面后底面边长为 a，显然折线两相邻线段间的夹角是相等的，设 $\angle ABC=\angle BCD=\angle CDE=\alpha$.

∵ $AB=BC=\dfrac{1}{4}(4\sqrt{2}a)=\sqrt{2}a$，连 AC，AF，则由 $Rt\triangle ACF$ 得：

$$AC^2=AF^2+FC^2=(\sqrt{2}a)^2+(2a)^2=6a^2.$$

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得：

$$\cos\alpha=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{2a^2+2a^2-6a^2}{4a^2}=-\frac{1}{2},$$

且 $0°<\alpha<180°$，∴ $\alpha=120°$.

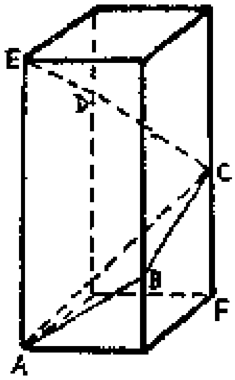
2. ∵ $PAOA'$ 是平行四边形，

∴ $2PA^2=OP^2+A'A^2-2OA^2$，

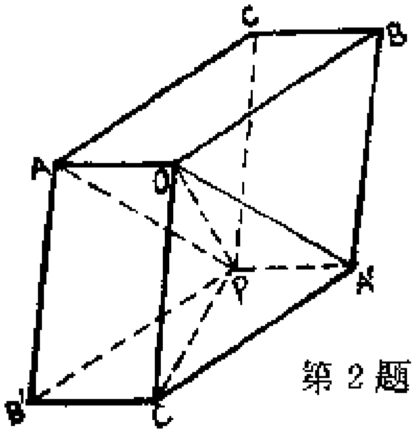
同理可得：$2PB^2=OP^2+B'B^2-2OB^2$，

$2PC^2=OP^2+C'C^2-2OC^2$.

三式相加得后再乘 2 得：



第1题



第2题

$$4(PA^2+PB^2+PC^2)=6\cdot OP^2+(A'A^2+CC'^2)$$
$$+(B'B^2+C'C^2)+(A'A^2+C'C^2)-4(OA^2+OB^2+OC^2)$$
$$=6\cdot OP^2+2(A'C'^2+OB^2)+2(A'B'^2+OC^2)$$
$$+2(B'C'^2+OA^2)-4(OA^2+OB^2+OC^2)$$
$$=6\cdot OP^2+2(A'C'^2+B'C'^2+A'B'^2)$$
$$-2(OA^2+OB^2+OC^2)\cdots\cdots(1).$$

因 $PB^2+A'C'^2=2(OA^2+OC^2)$，$PA^2+B'C'^2=2(OB^2+OC^2)$，$PC^2+A'B'^2=2(OA^2+OB^2)$，由三式相加后再乘2得：

$$2(PA^2+PB^2+PC^2)$$
$$=8(OA^2+OB^2+OC^2)-2(A'C'^2+B'C'^2+A'B'^2)\cdots\cdots(2).$$

由(1)+(2)得：$6(PA^2+PB^2+PC^2)$

$$=6\cdot OP^2+6(OA^2+OB^2+OC^2).\text{ 即}$$

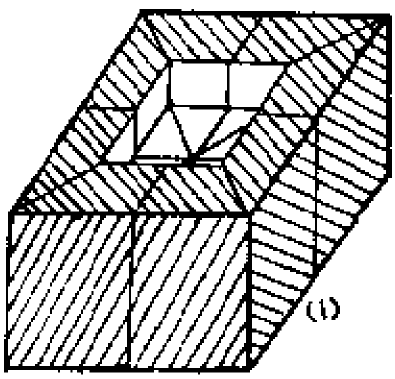
$$PA^2+PB^2+PC^2=OP^2+OA^2+OB^2+OC^2.$$

3. 设糕底面边长为1，则高为 $\frac{5}{16}$. 体积 $V=1^2\cdot\frac{5}{16}=\frac{5}{16}$（立方单位）.

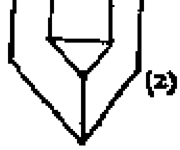
含糖粉面积

$$S=1^2+\left(\frac{5}{16}\times 1\right)\times 4$$

$=\frac{9}{4}$(平方单位). 又设中间一块柱体状糕的高为 h，底面边长



(1)



(2)

第3题

为x，则 $x^2=\frac{S}{9}=\frac{1}{9}\times\frac{9}{4}=\frac{1}{4}$.

∴ $x=\frac{1}{2}$即中间一块糕的底面边长是原边长的一半．其体积

$$=x^2h=\frac{V}{9}=\frac{1}{9}\times\frac{5}{16}，\text{即}\quad \frac{1}{4}h=\frac{5}{16}\times\frac{1}{9},$$

∴ $h=\frac{5}{36}$，∴$\frac{h}{x}=\frac{5}{18}$，即中间一块糕的高与底边之比为$\frac{5}{18}$.

其余八块糕的形状和大小都一样，如图(2)所示.

4．设剩下部分的全面积为 S 则(有七个面)

$$S=6\,S_{\square ABCD}-3\,S_{\triangle BPQ}+S_{\triangle PQR}$$
$$=6\times6^2-3\cdot\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sqrt{2})^2$$
$$=216-6+2\sqrt{3}=210+2\sqrt{3}\,(cm^2).$$

5．设三棱为 $a-d$，a，$a+d$，依题意得：

$$\begin{cases}a-d+a+a+d=12\\(a-d)a(a+d)=48.\end{cases}$$
解这个方程组得：$a=4$，$d=\pm2$．故三棱为 2，4，6 或 6，4，2 (一回事).

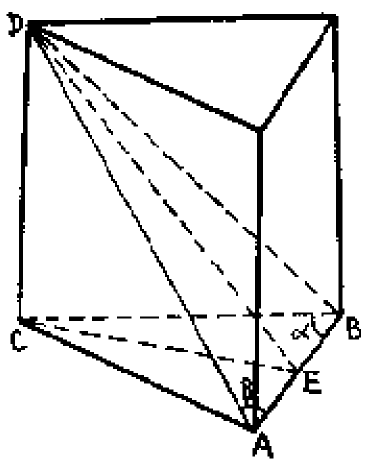
由三棱长可计算三个不同对角面的边长分别为： 6 和 $2\sqrt{5}$、4 和 $2\sqrt{10}$、 2 和 $2\sqrt{13}$．对角线的交角即为此三个对角面的对角线的夹角，设为 α_1，α_2，α_3． (都只取锐角)，由面积公式得：

$$4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3(2^2+4^2+6^2)\sin\alpha_1\right]=6\times2\sqrt{5},$$

$$\sin\alpha_1=\frac{3\sqrt{5}}{7}\quad\therefore\quad \alpha_1=arc\sin\frac{3\sqrt{5}}{7},$$ 同理可得：

$$\alpha_2=arc\sin\frac{2\sqrt{10}}{7},$$

$$\alpha_3=arc\sin\frac{\sqrt{13}}{7}.$$



第 6 题

6．用 x 表示底面边长，则

$$V=S_{\triangle ABC}\cdot CD=\frac{1}{2}AB\cdot EC\cdot CD$$

$$=\frac{1}{2}x\left(\frac{x}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)\cdot CD$$

$$=\frac{x^2}{4}\operatorname{tg}\alpha\cdot CD.$$

由 $Rt\triangle DCE$ 得:

$$CD=\sqrt{DE^2-EC^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x}{2}\operatorname{tg}\beta\right)^2-\left(\frac{x}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)^2}$$

$$=\frac{x\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}{2\cos\alpha\cos\beta}.$$

因 $2p=x+\frac{2\frac{x}{2}}{\cos\alpha}$, $\therefore\quad x=\frac{2p\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

故 $V=\frac{x^2}{4}\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{2p\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}{2\cos\alpha\cos\beta}$

$$=\frac{p^3\sin 2\alpha\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}{16\cos^6\frac{\alpha}{2}\cos\beta}.$$

7. 设高为 x，底面三角形的三边为 a、b、c，则 $m=ax$，$n=bx$，$p=cx$，$t=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$，这里

$$S=\frac{a+b+c}{2}=\frac{m+n+p}{2x},\quad S-a=\frac{n+p-m}{2x},$$

$$S-b=\frac{m+p-n}{2x},\quad S-c=\frac{m+n-p}{2x}.$$

$$\therefore\quad t=\sqrt{\frac{m+n+p}{2x}\cdot\frac{n+p-m}{2x}\cdot\frac{m+p-n}{2x}\cdot\frac{m+n-p}{2x}}$$

$$=\frac{1}{4x^2}\sqrt{(m+n+p)(n+p-m)(m+p-n)(m+n-p)}.$$

故 $V=t\cdot x$

$$=t\cdot\sqrt{\frac{1}{4t}\sqrt{(m+n+p)(m+p-n)(n+p-m)(m+n-p)}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt[4]{t^2(m+n+p)(n+p-m)(m+p-n)(m+n-p)}.$$

8. 设平行六面体为 $ABCD—A'B'C'D'$. A 为三个面角为锐角的顶点. 自 A' 作 $A'E\perp$平面 $ABCD$, E 为垂足，则 E 应在 AC 上. 用 φ

表示 AA' 与底面所成的角. 在 $Rt\triangle A'AE$ 中, $A'E=a\sin\varphi$, 自 A' 在平面 $A'ADD'$ 上作 $A'F\perp AD$ 于 F, 则 $EF\perp AD$.

在 $Rt\triangle AA'F$ 中, $AF=a\cos\alpha$,

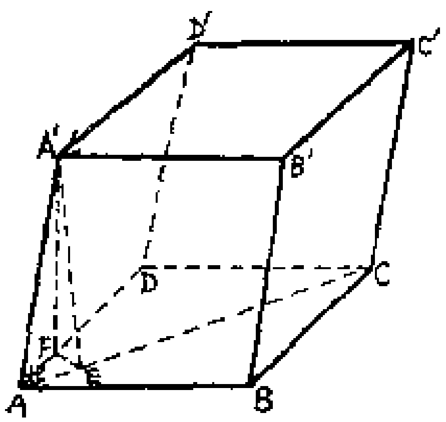
在 $Rt\triangle AEF$ 中, $AF=AE\cos\frac{\alpha}{2}=a\cos\varphi\cos\frac{\alpha}{2}$,

$$\therefore\quad \cos\varphi=\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

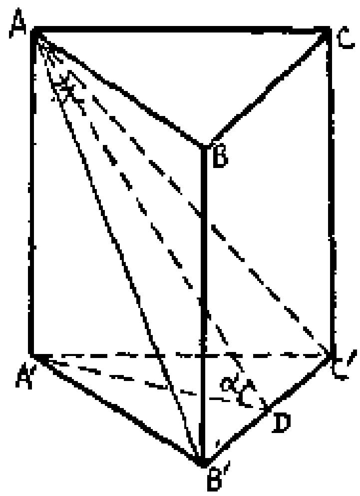
因此, $V=S_{ABCD}\cdot A'E=a^2\sin\alpha\cdot a\sin\varphi=a^3\sin\alpha\sqrt{1-\cos^2\varphi}$

$$=2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\alpha\sin\frac{3}{2}\alpha}.$$

9. 取 $B'C'$ 中点 D, 连 AD、$A'D$. 容易证明: $AD\perp B'C'$,



第 8 题



第 9 题

$A'D\perp B'C'$, $\therefore$ $\angle ADA'=\alpha$. 设截面 $\triangle AB'C'$ 的顶角为 x. 在 $Rt\triangle ADB'$ 中, $B'D=AD\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}$, 在 $Rt\triangle AA'D$ 中, $A'D=AD\cos\alpha$. 两式相除得.

$$\frac{B'D}{A'D}=\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\cos\alpha},$$

故 $\quad \mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{B'D}{A'D}\cos\alpha=\mathrm{ctg}\,60^\circ\cos\alpha$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha. \quad \therefore \quad x=2\,arc\ \mathrm{tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha\right).$$

10. 设长方体的长、宽、高为 x，y，z. 则它的三个对角面的面积分别为 $y\sqrt{x^2+2^2}$，$z\sqrt{x^2+y^2}$，$x\sqrt{y^2+2^2}$.

依题意得：

$$\begin{cases} x^2(y^2+z^2)=m^2\cdots\cdots(1) \\ y^2(x^2+z^2)=n^2\cdots\cdots(2) \\ 2^2(x^2+z^2)=p^2\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

由(1)+(2)+(3)得：(同时除 2)

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=\frac{1}{2}(m^2+n^2+p^2)\qquad\cdots\cdots(4)$$

由(4)分别减(1)、(2)、(3)后再两边开方得：

$$\begin{cases} yz=\sqrt{\frac{1}{2}(m^2+p^2-m^2)}\cdots\cdots(5) \\ zx=\sqrt{\frac{1}{2}(m^2+p^2-n^2)}\cdots\cdots(6) \\ xy=\sqrt{\frac{1}{2}(m^2+n^2-p^2)}\cdots\cdots(7) \end{cases}$$

由(6)×(7)÷(5)得：(两边开方)

$$x=\sqrt[4]{\frac{(m^2+p^2-n^2)(m^2+n^2-p^2)}{2(n^2+p^2-m^2)}}.$$

同理可得：

$$y=\sqrt{\frac{(n^2+p^2-m^2)(m^2+n^2-p^2)}{2(m^2+p^2-n^2)}},$$

$$z=\sqrt{\frac{(n^2+p^2-m^2)(m^2+p^2-n^2)}{2(m^2+n^2-p^2)}}.$$

习 题 三

1. 提示：连 OD、OC、OB. 在四面体 $ABCD$ 和 $OBCD$ 中，底面 $\triangle BCD$ 是相同的，故易证： $\frac{V_{OBCD}}{V_{ABCD}}=\frac{OA'}{AA'}$，

同理可证：

$$\frac{V_{OACD}}{V_{ABCD}}=\frac{OB'}{BB'},\quad \frac{V_{OABD}}{V_{ABCD}}=\frac{OC'}{CC'},\quad \frac{V_{OABC}}{V_{ABCD}}=\frac{OD'}{DD'}.$$

故 $\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=1$.

2. 可仿照第1题的证法进行证明.

3. 设 $PA=x$, $PB=y$, $PC=z$, 则 $AB=\sqrt{x^2+y^2}$,

$BC=\sqrt{y^2+z^2}$, $AC=\sqrt{x^2+z^2}$. 依题意得:

$S=x+y+z+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{x^2+z^2}$,

但 $x+y+z\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$, $x^2+y^2\geqslant 2xy$, $y^2+z^2\geqslant 2yz$,

$x^2+z^2\geqslant 2xz$.

$\therefore$ $S\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}+\sqrt{2xy}+\sqrt{2yz}+\sqrt{2xz}$.

但 $\sqrt{2xy}+\sqrt{2yz}+\sqrt{2xz}\geqslant 3\sqrt[3]{\sqrt{8x^2y^2z^2}}=3\sqrt[3]{2\sqrt{2}xyz}$,

$\therefore$ $S\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}(1+\sqrt{2})$, 等号只当 $x=y=z$ 时成立.

因 $V_{ABCD}=\frac{1}{6}xyz$, $\therefore$ $S\geqslant 3\sqrt[3]{6V_{ABCD}}(1+\sqrt{2})$

故 $V_{ABCD}\leqslant\frac{S^3}{162(1+\sqrt{2})^3}$

即当 $x=y=z$ 时, V_{ABCD} 达到最大值 $\frac{S^3}{162(1+\sqrt{2})^3}$.

4. 因 $V_{ABCD}=\frac{1}{3}p\cdot S_{\triangle BCD}=\frac{1}{3}AD\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{6}abc$,

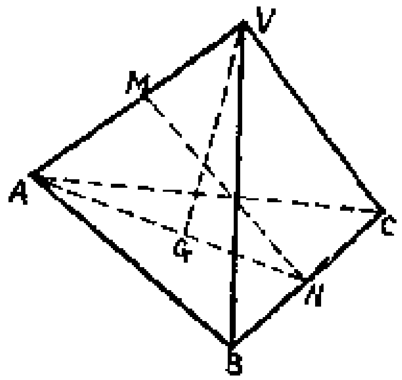
故 $pS_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}abc$, 即 $p^2\cdot S^2_{\triangle BCD}=\frac{1}{4}a^2b^2c^2\cdots\cdots(1)$, 又由本章§3中的例3知:

$$S^2_{\triangle BCD}=S^2_{\triangle ABC}+S^2_{\triangle ACD}+S^2_{\triangle ABD}=\frac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\cdots\cdots(2)$$

由(1)代入(2)得: $\frac{p^2}{4}(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)=\frac{1}{4}a^2b^2c^2$.

两边同除以 $\frac{1}{4}a^2b^2c^2$ 得: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$.

5. 设 M、N 为 VA、BC 之中点. 则 $MN\perp VA$, $MN\perp BC$, MN



第 5 题

$=b$. 又因 $BC\perp VA$，故 $BC\perp$ 平面 VAN. 作 $VG\perp AN$ 于 G. 因平面 $VAN\perp$ 平面 ABC，故 VG 是棱锥 $V-ABC$ 的高. 由 $\triangle VAG\backsim\triangle NAM$ 得：$\frac{VG}{MN}=\frac{VA}{AN}$，即 $VG\cdot AN=ab$. 因此，$V_{ABCD}=\frac{1}{3}VG\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{6}(VG\cdot AN)\cdot a=\frac{a^2b}{6}$.

6. 自 C、C'分别作 $CO\perp$ 平面 VAB，O 为垂足，$C'O'\perp$ 平面 VAB，O' 为垂足. 则 $O'C'\parallel OC$，故 $O'C'$ 与 OC 确定一个平面. 因 V 点在 CC' 上，故 V 点在平面 $O'C'CO$ 上. 由 $\triangle VO'C'\backsim\triangle VOC$ 得：$\frac{O'C'}{OC}=\frac{VC'}{VC}$. 由此得：

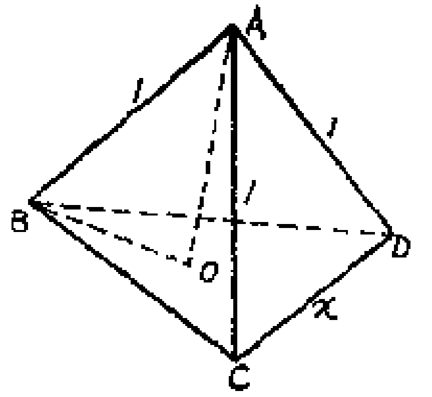
$$\frac{V_{VA'B'C'}}{V_{VABC}}=\frac{\frac{1}{3}S_{VA'B'}\cdot O'C'}{\frac{1}{3}S_{VAB}\cdot OC}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}VA'\cdot VB'\sin\angle AVB\cdot VC'}{\frac{1}{2}VA\cdot VB\sin\angle AVB\cdot VC'}$$

$$=\frac{VA'\cdot VB'\cdot VC'}{VA\cdot VB\cdot VC}.$$

7. 设第六条棱 CD 长为 x，因 $AB=AC=AD=1$，所以自 A 作 $AO\perp$ 平面 BCD，则垂足 O 是 $\triangle BCD$ 的外心. 故 $OB=\frac{1\cdot 1\cdot x}{4S_{\triangle BCD}}=\frac{x}{4\cdot\frac{1}{2}x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. 因此，四面体体积 $y=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)$.

$\sqrt{1-\frac{1}{4-x^2}}=\frac{x}{12}\sqrt{3-x^2}$.



第 7 题

所以 $y^2=\frac{x^2(3-x^2)}{144}$，$\because x^2+(3-x^2)=3$（常数）

故当 $x^2=3-x^2$ 时，y^2 达到最大值.

即当 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时，y 达到最大值 $\frac{1}{12}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{1}{8}$.

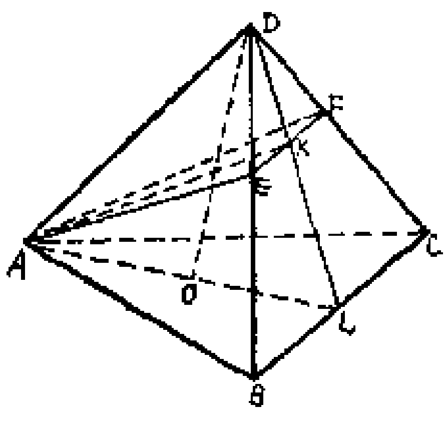
8. 设侧棱两部分为 mx 和 nx. $\triangle BCD$ 的高为 y.

由 $Rt\triangle DBE$ 和 $Rt\triangle BEC$ 得：$\begin{cases}(m+n)^2x^2=m^2x^2+y^2 & \cdots\cdots(1)\\ y^2+n^2x^2=a^2 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

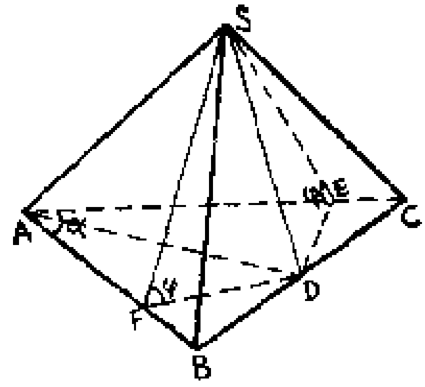
解这个方程组得：$x=\frac{a}{\sqrt{2n(m+n)}}$，$y=\sqrt{\frac{2m+n}{2(m+n)}}a$.

故 $S_{全}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+3\cdot\frac{1}{2}(m+n)x\cdot y=\frac{a^2}{4}\left[\sqrt{3}+\frac{3}{n}\sqrt{n(2m+n)}\right]$.

9. 自 D 作 $DO\perp$ 平面 ABC，则垂足 O 是 $\triangle ABC$ 的中心，连 AO 交 BC 于 L，则 L 是 BC 的中点，连 DL 交 EF 于 K，则 K 是 EF 中点. 连 AK，且设底面边长为 x. 则 $S_{底}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$，$S_{侧}=3\cdot\left(\frac{1}{2}BC\cdot DL\right)=\frac{3x}{2}\cdot DL$. 由 $\triangle DOL\backsim\triangle KAL$ 得：$\frac{DL}{AL}=\frac{OL}{KL}$.



第 9 题



第 10 题

但 $AL=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，$OL=\frac{1}{3}AL=\frac{\sqrt{3}}{6}x$，$KL=\frac{1}{2}DL$代入上式得：$DL=\frac{\sqrt{2}}{2}x$. 故 $S_{侧}=\frac{\sqrt{2}}{2}x\cdot\frac{3x}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}x^2$. $\frac{S_{侧}}{S_{底}}=\frac{3x^2\cdot4}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}x^2}=\sqrt{6}$.

10. 自 S 作 $SE\perp AC$ 于 E，$SF\perp AB$ 于 F. 连 DE，DF. 则 $DF\perp AB$，$DE\perp AC$. 故$\angle SED=\angle SFD=\varphi$. D 是 BC 中点，由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha=2S_{\triangle ABD}=a\cdot DF$ 得：$DF=\frac{1}{2}a\sin\alpha$.

在 $Rt\triangle SFD$ 中，$DF=SF\cdot\cos\varphi$，$SD=SF\sin\varphi$.

$$故\ S_{侧}=a\cdot SF+SD\cdot BD=\frac{a\cdot DF\left(1+\sin\varphi\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\varphi}$$

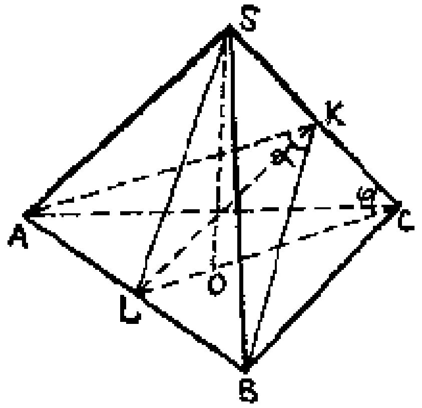
$$=\frac{a^2\sin\alpha\left(1+\sin\varphi\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\varphi}.$$

11. 过 AB 作截面 $ABK\perp SC$，交 SC 于 K，$\angle AKB=\alpha$. 设 KL 是$\triangle ABK$ 的高. 由 $Rt\triangle KLB$ 得：$KL=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$，自 S 作 $SO\perp$平面 ABC，O为垂足，连 CO 延长交 AB 于 L. 设$\angle SCO=\varphi$，$\angle SCB=\beta$，则 $\sin\varphi=\frac{LK}{LC}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

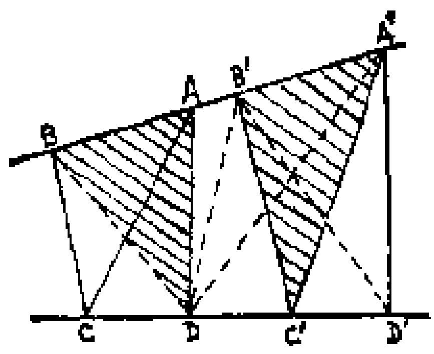
$BK=a\sin\beta=\frac{\frac{a}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$，$\therefore$ $\sin\beta=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$，故 $S_{侧}=3S_{\triangle ABS}=\frac{3}{2}\cdot a\cdot SL=\frac{3a^2}{4\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}-1}}$. $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot SO=\frac{a^3}{12}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$

$$=\frac{a^3\cos\frac{\alpha}{2}}{24\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+30^\circ\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-30^\circ\right)}}.$$

12. 设 AB 是 X 上一定长线段开始时的位置，$A'B'$ 是它在 X 上任意移动后的位置；CD 是 Y 上一定长线段开始时的位置，$C'D'$ 是任意移



第 11 题



第 12 题

动后的位置. 我们先假定 CD 不动，把 AB 移到 $A'B'$. 在两个四面体 $ABCD$ 和 $A'B'CD$ 中，它们的底面$\triangle ABD$ 和 $\triangle A'B'D$，等底同高故面积相等. 而这两个四面体的高都是 C 点到平面 $BA'D$ 的距离. 所以它们的体积相等. 其次，我们再固定 $A'B'$，把 CD 移到 $C'D'$，则同理可证：两四面体 $A'B'CD$ 和 $A'B'C'D'$ 体相等. 故四面体 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 体积相等.

13. 提示：用 S 表示$\triangle ABC$ 的面积，H 表示 D 到平面 ABC 的距离. 则 $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S\cdot H$. 再证明：当 C 在 Y 上移动时及 D 在 Z 上移动时，都不改变 S 和 H 的值. 故 V_{ABCD} 保持不变.

14. 提示：设四面体为 $ABCD$. 平面 AEB 是二面角 $C—AB—D$ 的二等分平面，E 为它与棱 CD 的交点. 先证 E 点到两平面 ABC 和 ABD 的距离相等，再把两部分看成是以$\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 分别为底面，E 为公共顶点的两个三棱锥，因为它们的高相等，故 $V_{ABCE}:V_{ABDE}=S_{\triangle ABC}:S_{\triangle BDE}$.

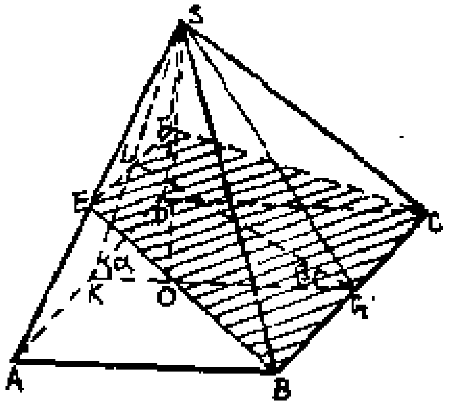
15. 设底面边长为 a，则 $S_{底}=6\left(\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. 从由斜高 (y)、高 (H)、底面边心距$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$组成的直角形得：$y=\sqrt{H^2+\frac{3}{4}a^2}$.

由题设知：$S_{底}=\frac{S_{全}}{4}$，故 $S_{侧}=3S_{底}$，但 $S_{侧}=6\left(\frac{1}{2}a\sqrt{H^2+\frac{3}{4}a^2}\right)$

即 $3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2=3a\sqrt{H^2+\frac{3}{4}a^2}$，故 $a^2=\frac{H^2}{6}$，因此，$S_{底}=6\times$

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{H^2}{6}=\frac{\sqrt{3}}{4}H^2$. 故 $S_{全}=\sqrt{3}H^2$.

16. 过棱锥的高 SO 作截面 $SGK\perp BC$ 交于 G，交 AD 于 K. 则它与截面 $EFCB$ 的交线 LG 应是 $EFCD$ 的高，且 $\angle LKG=\alpha$，$\angle LGK=\beta$，$\angle KLG=180°-\alpha-\beta$. 在 $\triangle KLG$ 中，



第 16 题

$LG=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. 由 $\triangle SAD\backsim\triangle SFE$ 得：

$$\frac{EF}{AD}=\frac{SL}{SK}.$$

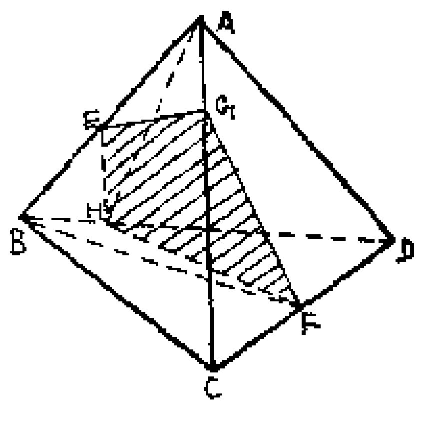
$$\therefore\quad EF=\frac{AD(SK-KL)}{SK},$$

但 $SK=\frac{a}{2\cos\alpha}$，$KL=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$，故

$$S_{EFCB}=\frac{1}{2}LG(BC+EF)=\frac{1}{2}\left[BC+\frac{AD(SK-KL)}{SK}\right]\cdot LG$$

$$=\frac{a^2\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

17. 在棱锥 $A—EHFG$ 和 $B—EHFG$ 中，它们的底面相同，又 E 是 AB 中点，故 A、B 到底面 $EFHG$ 的距离相等即它们的高也相等. 故 $V_{A\cdot EHFG}=V_{B\cdot EHFG}$ ……(1)



第 17 题

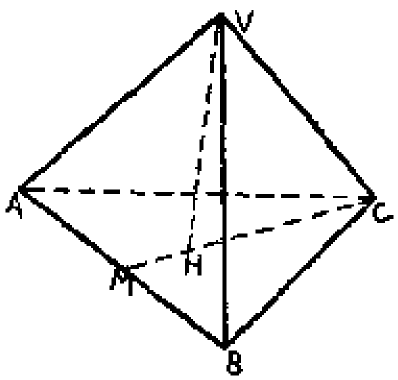
自 B、H 作 CD 之垂线，设其长为 H、H'，则 $S_{\triangle BCF}:S_{\triangle HFD}=H:H'=BD:HD$. 故

$$V_{GBCF}:V_{AHFD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCF}\cdot h:\frac{1}{3}S_{\triangle HFD}\cdot h'$$

$=BD\cdot CG:HD\cdot AC$（这里 h、h' 表示 G、A 到平面 BCD 的距离）. 但 $GC:AC=HD:BD$（见第六章 § 1 中例 2），即 $BD\cdot CG=HD\cdot AC$，故 $V_{GBCD}=V_{AHFD}$ ……(2)

由（1）+（2）得：$V_{HEBCFG}=V_{HAEGFD}$.

18. 因VH是正三棱锥$V—ABC$的高，故H是正三角形ABC的中心，连CH延长交AB于M. 则$CH=\frac{2}{3}MC=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{\sqrt{3}}{3}AC$. 在$Rt\triangle VCH$中，$VC^2=VH^2+CH^2$，∴ $VH^2=VC^2-CH^2=VC^2-\frac{1}{3}AC^2$，但$VC^2+VA^2=AC^2$，即$2VC^2=AC^2$. 因此，$VH^2=VC^2-\frac{1}{3}AC^2=VC^2-\frac{2}{3}VC^2=\frac{1}{3}VC^2$，即$VC^2=3VH^2$.



第18题

习　题　四

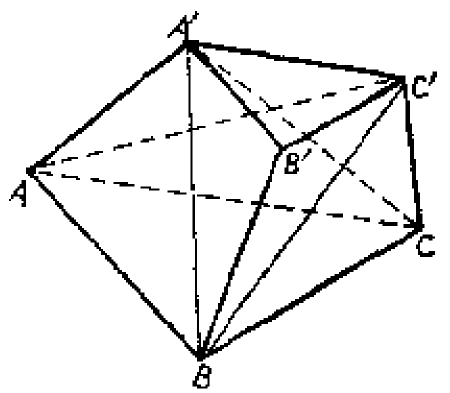
1. 提示：设上底面边长为x，则上底面边心距为$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{6}x$，故斜高为$2\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}(a-x)=\frac{\sqrt{3}}{3}(a-x)$.

依题意得：$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+x^2)+3\cdot\frac{1}{2}(a+x)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}(a-x)$，

故$x^2=3a^2-\frac{4S}{\sqrt{3}}$，因此，$x=\frac{1}{2}\sqrt{27a^2-12\sqrt{3}S}$.

2. 先计算三棱锥$A'—BB'C$和$A-BB'C$的高之比. 它们的高分别是A'、A到平面$BB'C'C$的距离. 又$A'B'\parallel AB$，故$A'B'$和AB与平面$BB'C'C$所成的角应相等，设其为α，用H'、H表示它们的高，则$\sin\alpha=\frac{H'}{A'B'}=\frac{H}{AB}$

……（1）



第2题

再计算它们的底面积之比. 因$\triangle BB'C$和

$\triangle BB'C'$ 有公共底边 BB'，故 $S_{\triangle BB'C}:S_{\triangle BB'C'}=BC:B'C'$.

由 $\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$ 得：$A'B':AB=B'C':BC$，故 $AB\cdot B'C'=A'B'\cdot BC$……（2）.由（1）、（2）得：

$$V_{A'BB'C}:V_{ABB'C}=\frac{1}{3}S_{\triangle BB'C}H':\frac{1}{3}S_{\triangle BB'C'}\cdot H=\frac{A'B'}{AB}\cdot\frac{BC}{B'C'}=1.$$

即 $V_{A'BB'C}=V_{ABB'C}$.

3. 要推翻一个命题，只要举出一个反例就够了. 下面用一个具体四棱台来检验四种算法哪种对，哪种错.例如：设 $a=4$，$b=9$，$H=6$. 则四棱台的体积应该是 $V=\frac{H}{3}(a^2+b^2+ab)=266$. 但此时，$S_上=4^2=16$，$S_下=9^2=81$，$S_中=\left(\frac{4+9}{2}\right)^2=\frac{169}{4}$，$S_{中介}=4\times9=36$. 则（1）$_1V=H\cdot S_中=6\times\frac{169}{4}=253.5$；(2) $V_2=H\cdot\frac{S_上+S_下}{2}=6\times\frac{16+81}{2}=291$；（3）$V_3=H\cdot\frac{S_上+S_下+S_中}{3}=278.5$；（4）$V_4=H\cdot\frac{S_上+S_下+S_{中介}}{3}=266$.由此可见第 1，2，3 种算法都是错误的.只有第四种算法是正确的. 证明如下：$V_4=H\cdot\frac{S_上+S_下+S_{中介}}{3}=\frac{H}{3}(a^2+b^2+ab)$，这恰好是正四棱台的体积公式.故是正确的.

4. 提示：设棱台的高为 x，依题意可得 x 的如下方程：$a^2+b^2=4\cdot\left[\frac{1}{2}(a+b)\sqrt{x^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}\right]$，解这方程得：$x=\frac{ab}{a+b}$.

5. 如图，$A'F=3$，$DO+OF=\frac{1}{3}AD+A'O'$

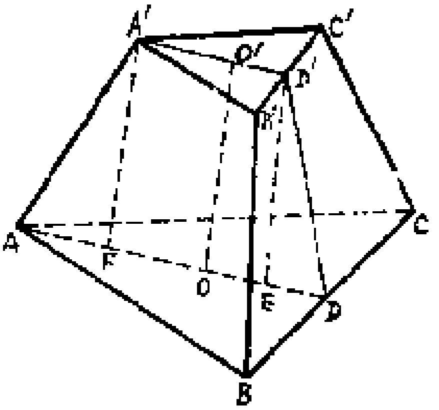
$$=\frac{4}{3}\sqrt{3}+\frac{5}{3}\sqrt{3}=3\sqrt{3}.$$

故 $A'D=6$.

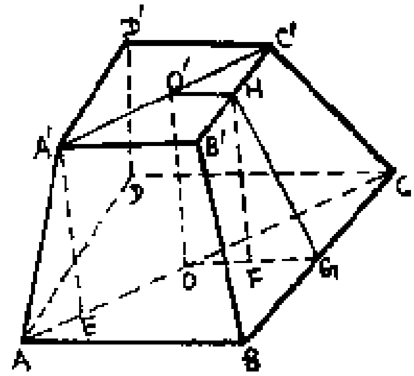
截面积为 24（厘米^2），二面角为 30°.

6. 如图，$A'C'=\sqrt{2}a$，$AC=\sqrt{2}b$，$A'E=\frac{\sqrt{2}}{2}(b-a)$.

（1）$A'A=\sqrt{2}AE=b-a$，



第 5 题



第 6 题

（2）$HG=\sqrt{HF^2+FG^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(b-a)$；

（3）$S_{对角面}=\dfrac{1}{2}(A'C'+AC)A'E$

$$=\frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

7．提示：任作截三棱柱的直截面，把它分成两个其侧棱垂直于底面（即直截面）的截三棱柱，而每一个三棱柱再分成一个三棱锥和一个四棱锥两部分．再用棱锥的体积公式计算，即可证明题目的结论．

8．提示：把公共两面角所在的面作为底面，把两个四面体看成三棱锥，它们的底面积之比等于夹这个二面角的一面的面积之比，再证它们的高之比等于夹这个二面角的另一面的面积之比就行了．

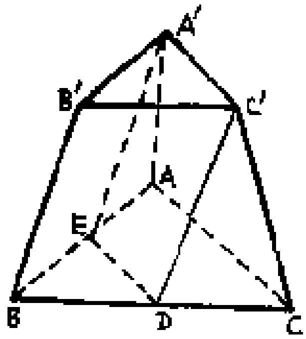
9．因正六棱台的高 $H=\sqrt{l^2-(b-a)^2}$；

上底面积 $S_上=6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}b^2$，

下底面积 $S_下=6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$．

故它的体积 $V=\dfrac{H}{3}(S_上+S_下+\sqrt{S_上S_下})$

$$=\frac{\sqrt{3[l^2-(b-a)^2]}}{2}(a^2+b^2+ab).$$



第 10 题

10. 设棱台 $ABC-A'B'C'$ 的上底面的面积是 P，下底面的面积为 Q，过 $A'C'$ 边且平行于 BB' 的平面是 $A'EDC'$.

因 $\frac{P}{Q}=\frac{1}{4}$ 故 $Q=4P$.

设这棱台的高是 h，它的体积是 V，则 $V=\frac{h}{3}(P+4P+\sqrt{4P^2})=\frac{7Ph}{3}$.

又设三棱柱 $A'B'C'-EBD$ 的体积是 V'. 则

$$\frac{V}{V'}=\frac{\frac{7}{3}Ph}{Ph}=\frac{7}{3},\quad \frac{V-V'}{V'}=\frac{7-3}{3}=\frac{4}{3}.$$

即这个平面截三棱台成两部分体积的比是 4:3.

11. 设棱台的两底面边长为：$2a$ 和 $5a$，它的高为 h，则它的中截面的边长为 $\frac{2a+5a}{2}=\frac{7}{2}a$.

又设棱台的中截面分它所成的两部分的体积为 V_1 和 V_2. 则

$$V_1=\frac{\frac{h}{2}}{3}\left[(2a)^2+\left(\frac{7}{2}a\right)^2+(2a)\cdot\left(\frac{7}{2}a\right)\right]=\frac{93}{24}a^2h,$$

$$V_2=\frac{\frac{h}{2}}{3}\left[\left(\frac{7}{2}a\right)^2+(5a)^2+\left(\frac{7}{2}a\right)(5a)\right]=\frac{219}{24}a^2h.$$

故这两部分的体积之比为：

$$V_1:V_2=\frac{93}{24}:\frac{219}{24}=93:219.$$

12. 如图，设 OO' 是正四棱台两底面中心的连线. 依题意得：

$AA' = AB = a$，$\angle A'AE = \alpha$.

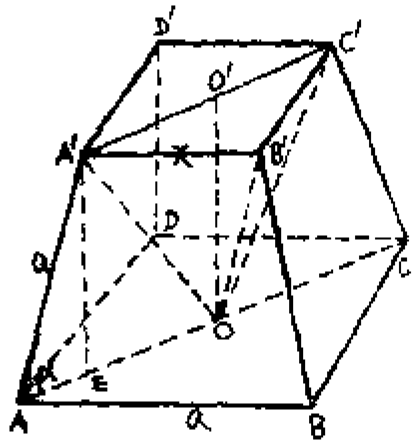
又设上底面边长为 x，则 $\frac{\sqrt{2}}{2}x =$

$EO = AO - AE = \frac{\sqrt{2}}{2}a - a\cos\alpha$，

$x = a(1-\sqrt{2}\cos\alpha)$.

棱台的高 $A'E = a\sin\alpha$.

故棱台的体积与棱锥的体积之差为：



第 12 题

$$V_1 - V_2 = \frac{h}{3}(a^2 + x^2 + ax) - \frac{h}{3}x^2$$

$$= \frac{h}{3}(a^2 + ax) = \frac{ah}{3}(a + x),$$

但 $h = a\sin\alpha$，$a + x = a + a - \sqrt{2}a\cos\alpha = a(2 - \sqrt{2}\cos\alpha)$.

故 $V_1 - V_2 = \frac{a \cdot a\sin\alpha}{3} \cdot a(2 - \sqrt{2}\cos\alpha)$

$$= \frac{\sqrt{2}a^3}{3}\sin\alpha(\sqrt{2} - \cos\alpha).$$

第 八 章

习 题 一

1. 因 $h = 2r$，$4r^2 = Q$，故 $r^2 = \frac{Q}{4}$.

(1) $\frac{\pi Q}{4}$，(2) $S_{侧} = \pi Q$，$V = \frac{\pi}{4}Q\sqrt{Q}$.

2. 自米尺的端点作桶底面的垂直线，由平行截割定理得：$\frac{100}{42} = \frac{92}{x}$，解这个方程得 $x = 38.6$（厘米）.

3．依题意得：

$$\begin{cases}2\pi rh+2\pi r^2=a,\\2\pi rh=b.\end{cases}$$

解这个方程组得：

$$r^2=\frac{a-b}{2\pi},\quad h=\frac{b}{\sqrt{2\pi(a-b)}}.$$

故 $V=\pi r^2h=\dfrac{b}{4\pi}\sqrt{2\pi(a-b)}$.

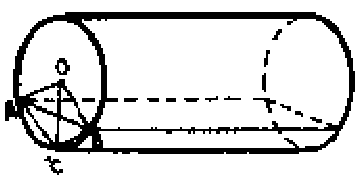
4．依题意得：

$R=2r$，故

(1) $\dfrac{S_{大}}{S_{小}}=\dfrac{2\pi Rh}{2\pi rh}=2$；

(2) $\dfrac{V_{大}}{V_{小}}=\dfrac{\pi R^2h}{\pi r^2h}=4$.

5．如图，油的形状是底面为弓形 ACB 的部分圆柱. 易证 $\triangle OAC$ 是正三角形，故 $\angle AOB=120^\circ$，因此



第 5 题

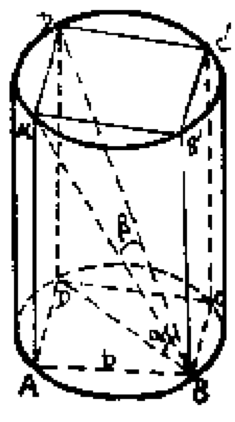
$$S_{弓形ACB}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4},$$

所以 $V_{油}=\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot 6\approx 3.685$（米^3）.

6．设 $D'B=l$，则 $A'A=D'D=l\sin\alpha$，$A'B=l\cos\beta$，

故 $b^2=(l\cos\beta)^2-(l\sin\alpha)^2$

$$\Longrightarrow l=\frac{b}{\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}}.$$



第 6 题

因此，$S_{圆柱侧}=\pi\cdot DB\cdot D'D$

$$=\pi(l\cos\alpha)(l\sin\alpha)$$

$$=\frac{\pi b^2\sin2\alpha}{2\left(\dfrac{1+\cos2\beta}{2}-\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}\right)}$$

$$=\frac{\pi b^2\sin2\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

7. 提示：等边圆柱的轴截面是一个正方形，其中一边是正六棱柱的高，另一边是它的底面外接圆的直径.

答案：体积为 $81\sqrt{3}cm^3$.

8. 圆柱的母线的长等于圆柱的高 H. 圆柱的侧面展开图是一个矩形，它的一边等于 H，另一边的长是圆柱的底面周长. 因母线与对角线的夹角是 $60°$，所以圆柱的底面周长等于 $H\,\mathrm{tg}60°=\sqrt{3}H$，故 $2\pi r=\sqrt{3}H$.

于是得：$r=\dfrac{\sqrt{3}H}{2\pi}$.

所以，圆柱的体积

$$V=\pi r^2H=\pi\left(\frac{\sqrt{3}H}{2\pi}\right)^2\cdot H=\frac{3H^3}{4\pi}.$$

9. 因正六棱柱的每条棱长都等于 K，故它的内切圆柱的高为 K，底面半径为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}K$.

因此，内切圆柱的体积为：

$$V=\pi\left(\frac{\sqrt{3}K}{2}\right)^2\cdot K=\frac{3\pi K^3}{4}.$$

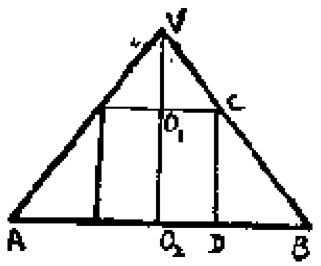
10. 因圆柱的侧面展开图是边长为 a 的正方形，故圆柱的高为 a，圆柱的底面半径为 $\dfrac{a}{2\pi}$.

因此，圆柱的体积为：

$$V=\pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2\cdot a=\frac{a^3}{4\pi}.$$

习 题 二

1. 设圆锥的底面半径为 R，圆柱的底面半径为 r，高为 H. 在轴截面 VAB 中，$\angle O_2BV=\angle O_2VB=45°$，$VO_2=O_2B=R$，又$O_1C\parallel O_2B$,



第1题

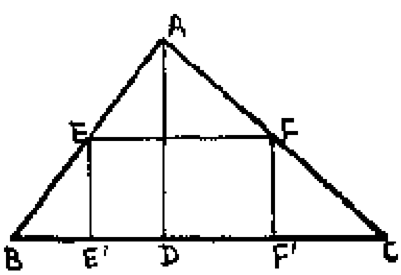
$\therefore\ \dfrac{VC}{VB}=\dfrac{O_1C}{O_2B}=\dfrac{r}{R}$，故 $S_{\text{圆柱全}}=2\pi Rr$，但 $VB=\sqrt{2}R$，　故 $S_{\text{圆锥侧}}=\sqrt{2}\pi R^2$. 依题意得：$2\pi Rr=\sqrt{2}\pi R^2$.

$\therefore\ r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$，因此，$VO_1=r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}R=\dfrac{1}{2}VB$.

2. 设扇形的圆心角为 θ，卷成圆锥后母线与底面所成的角为 α，则圆锥的高为 $R\sin\alpha$. 底面半径为 $R\cos\alpha$. 故 $V_{\text{圆锥}}=\dfrac{\pi}{3}R^3\cos^2\alpha\sin\alpha$.

$V^2_{\text{圆锥}}=\dfrac{\pi^2R^6}{18}(\cos^2\alpha)(\cos^2\alpha)(2\sin^2\alpha)$. $\because\ \cos^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha=2$（常数）$\therefore$ 当 $\cos^2\alpha=2\sin^2\alpha$ 时 $V^2_{\text{圆锥}}$达到最大值，此时 $V_{\text{圆锥}}$ 也达到最大值，即 $\alpha=\arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，此时 $\theta=360^\circ\times\dfrac{R\cos\alpha}{R}=(120\sqrt{6})^\circ$，$V_{\text{圆锥}}$达到最大值.

3. 自 A、E、F 作 $EE'\perp BC$ 于 E'，$AD\perp BC$ 于 D，$FF'\perp BC$ 于 F'. 则 $AD=2EE'=2FF'$，$EF=\dfrac{1}{2}BC$. 故 $V_{ABC}=V_{ABD}+V_{ADC}=\dfrac{1}{3}\pi AD^2\cdot BC$.



第3题

$V_{BEFC}=V_{BEE'}+V_{EE'F'F}+V_{FF'C}=\dfrac{1}{3}\pi\cdot E'E^2(BE'+3E'F'+F'C)=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{AD}{2}\right)^2(BC+2E'F')=\dfrac{\pi}{6}AD^2\cdot BC$.

故 $V_{AEF}=V_{ABC}-V_{EBCF}=\dfrac{1}{3}\pi AD^2\cdot BC-\dfrac{1}{6}\pi AD^2\cdot BC=\dfrac{\pi}{6}AD^2\cdot BC=V_{BEFC}$　因此，$V_{AEF}=V_{BEFC}$.

4. 如图，在$\triangle SCO$中，作 $OD\perp SC$ 于 D，可以证明 $OD\perp$平面

SAB，故

$$\begin{cases}OD^2=DS\cdot DC,\\SO^2=DS\cdot CS,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}12^2=CD\cdot DS,\\20^2=(CD+DS)DS,\end{cases}$$

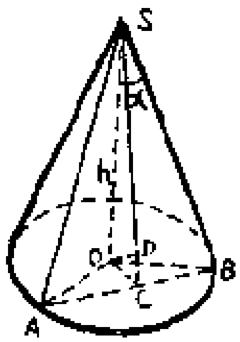
解这个方程得：$CD=9$，$DS=16$.

因此，$CO=15$，$AB=40$.

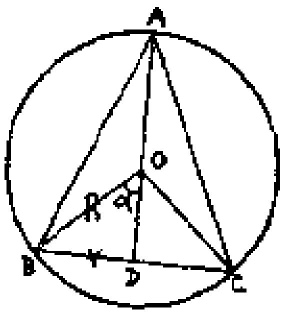
故 $S_{\triangle SAB}=\frac{1}{2}AB\cdot SC=\frac{1}{2}\times 40\times 25=500$(厘米^2).

5. 如图，$AD=R+R\cos\alpha$，$r=R\sin\alpha$.

故圆锥的体积为：



第 4 题



第 5 题

$$V=\frac{\pi}{3}R^3\sin^2\alpha(1+\cos\alpha)$$

$$=\frac{2}{3}\pi R^3\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

6. 依题意得：

$$\begin{cases}\pi r^2=A,\\\pi rl=S.\end{cases}$$

解这个方程得：

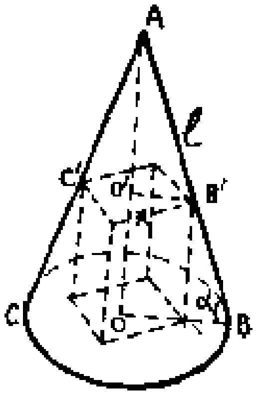
$$r=\sqrt{\frac{A}{\pi}},\quad l=\frac{S}{\sqrt{\pi A}}.$$

故圆锥的体积为：

$$V=\frac{1}{3\pi}\sqrt{\pi A(S^2-A^2)}.$$

7. 如图，设正方体的棱长为 x.

因$\triangle AO'B' \backsim \triangle AOB$，



第 7 题

$$故\frac{l\sin\alpha - x}{l\sin\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{l\cos\alpha}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{l\sin 2\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha + 2\cos\alpha}.$$

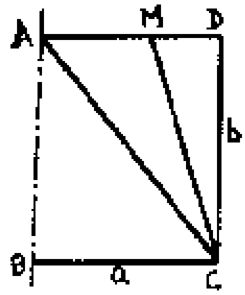
8. 因圆锥底面圆的半径 $r = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$，

它的高 $h = r\operatorname{ctg}\beta = \frac{a\operatorname{ctg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$，

故圆锥的体积为：

$$V = \frac{\pi a^3\operatorname{ctg}\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}.$$

9. 如图，设 $AD = a$，则



第 9 题

$V_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}\pi a^2 b$；

$V_{\triangle ACM} = V_{BCMA} - V_{\triangle ABC}$

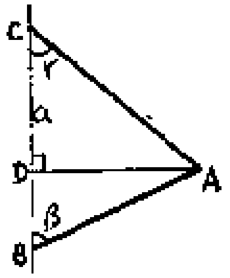
$$= \frac{1}{3}\pi b\left[a^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\right)^2 + a\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\right] - \frac{1}{3}\pi a^2 b$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^2 b;$$

$V_{\triangle MCD} = V_{ABCD} - V_{ABCM} = \pi a^2 b - \frac{2}{3}\pi a^2 b = \frac{1}{3}\pi a^2 b.$

10. 如图，设 $BC = a$，则 $AD = AC\sin r$，

$DC = AC\cos r$，$BD = AB\cos\beta$.



第 10 第

由正弦定理得：

$$AC = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta + r)},\quad AB = \frac{a\sin r}{\sin(\beta + r)}.$$

$$\Longrightarrow AD = \frac{a\sin\beta\sin r}{\sin(\beta + r)}$$

故 $V_{\triangle ABC} = V_{\triangle ACD} + V_{\triangle ABD}$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot AD^2\cdot CD+\frac{1}{3}\pi\cdot AD^2\cdot DB$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot AD^2\cdot BC=\frac{1}{3}\pi\frac{a^2\sin^2\beta\sin^2r}{\sin^3(\beta+r)}\cdot a$$

$$=\frac{\pi a^3\sin^2\beta\sin^2r}{3\sin^2(\beta+r)}.$$

11. 设圆锥的底面半径为 x，高为 y，则 $x^2-y^2=a^2$

圆锥的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2y=\frac{2\pi}{3}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\cdot y^2}\leqslant\frac{4\pi}{3}\sqrt{\left(\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+y^2}{3}\right)^3}$$

$$=\frac{4\pi}{3}\sqrt{\left(\frac{a^2}{3}\right)^3}=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}a^3=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi a^3$$

故 V 的最大值为$\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi a^3$，这时$\frac{x^2}{2}=y^2$，因而 $2y^2+y^2=a^2$ 即 $y=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$x=\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

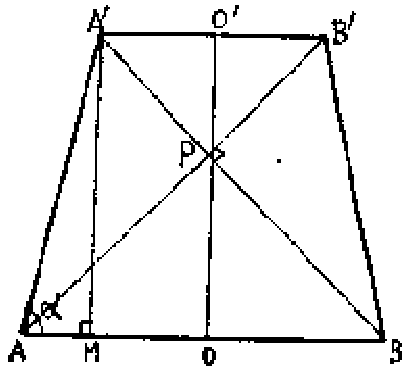
因此当圆锥底面半径为$\frac{\sqrt{6}}{3}a$，高为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$时，圆锥的体积为最大.

12. 所求圆锥影子的面积等于两个三角形的面积之和减去一个扇形的面积.而一个三角形的边长为$\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，且是正三角形，另一个三角形是底为$\sqrt{3}$，腰为 1 的等腰三角形，扇形的半径为 1，圆心角为 120°，因此，所求的面积为：

$$S_{影}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{3})^2+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\pi\cdot1^2$$

$$=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)(米^2).$$

习 题 三



第 1 题

1. 如图，设 $AA'=l$，$\angle A'AB=\alpha$.

因 $\angle PAB=\angle PBA=45°$.

由 $Rt\triangle APO$ 得：

$$AO=\frac{\sqrt{2}}{2}l\cos(\alpha-45°),$$

同理：$A'P=l\sin(\alpha-45°)$.

由 $Rt\triangle APO$ 得：

$$AO=\frac{\sqrt{2}}{2}l\cos(\alpha-45°),$$

同理：$A'O'=\frac{\sqrt{2}}{2}l\sin(\alpha-45°)$.

$$\text{故 } V=\frac{\pi}{3}l\sin\alpha\left[\frac{l^2}{2}\cos^2(\alpha-45°)+\frac{l^2}{2}\sin^2(\alpha-45°)\right.$$
$$\left.+\frac{l^2}{2}\sin(\alpha-45°)(\cos(\alpha-45°)\right]$$
$$=\frac{\pi}{12}l^3\sin\alpha(2-\cos 2\alpha).$$

2. 如图，设 EF 是截面与圆台轴截面 $ABCD$ 的交线，S 是截得此圆台的圆锥的顶点.

(1) 分别用 $S_上$、$S_下$、S 表示圆锥 SAB、SCD、SEF 的侧面积，则

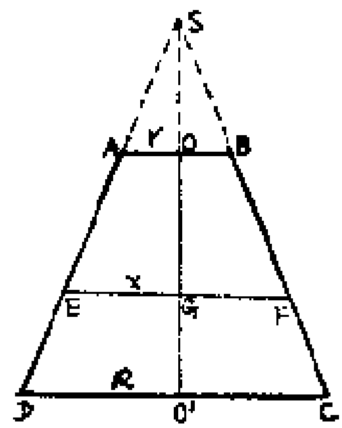
$$\frac{S_上}{S}=\frac{r^2}{x^2},\ \Longrightarrow\frac{S-S_上}{S}=\frac{x^2-r^2}{x^2},$$

同理：$\frac{S_下-S}{S}=\frac{R^2-x^2}{x^2}$.

依题意得：$\frac{S-S_上}{S_下-S}=1$,

$$\Longrightarrow x^2-r^2=R^2-x^2$$

$$\Longrightarrow x=\sqrt{\frac{R^2+r^2}{2}}.$$



第 2 题

(2) 分别用 $V_上$、V、$V_下$ 表示圆锥 SAB、SEF、SCD 的体积，

则 $\dfrac{V_{上}}{V}=\dfrac{r^3}{x^3}$, $\Longrightarrow \dfrac{V-V_{上}}{V}=\dfrac{x^3-r^3}{x^3}$,

同理：$\dfrac{V_{下}-V}{V}=\dfrac{R^3-x^3}{x^3}$.

依题意得：$\dfrac{V-V_{上}}{V_{下}-V}=1$.

$$\Longrightarrow x^3-r^3=R^3-x^3$$

$$\Longrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{R^3+r^3}{2}}.$$

3. 设圆台的上、下底面半径为 r 和 R，高为 h，体积为 V，依题意圆柱的高为 h，底面半径为 $\dfrac{R+r}{2}$，又设圆柱的体积为 V' 则

$$V-V'=\frac{\pi}{3}h(R^2+r^2+Rr)-\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2\cdot h$$

$$=\frac{\pi h}{12}(4R^2+4r^2+4Rr-3R^2-3r^2-6Rr)$$

$$=\frac{\pi h}{12}(R-r)^2>0.$$

故圆台的体积较大.

4. 由 $\alpha=45°$ 可知：$h=R-r$，又

$$S_{轴截面}=\frac{2r+2R}{2}\cdot h=392,$$

故 $R^2-r^2=392$.

但 $R=3r$，于是 $r=7$(厘米)，$R=21$(厘米)，$h=14$(厘米)，$l=14\sqrt{2}$(厘米).

5. 如图，设圆台的上、下底面面积为 Q_1、Q，

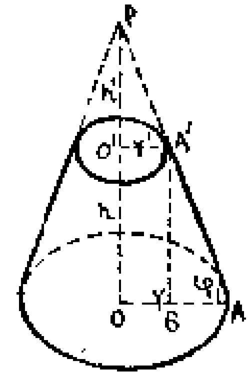
则 $Q_1=\dfrac{1}{9}Q$.

因 $\dfrac{Q}{Q_1}=\left(\dfrac{h+h'}{h}\right)^2\Longrightarrow h=2h'$.

故 $V_{圆台}=\dfrac{1}{3}(Q_1+Q+\sqrt{Q_1Q})h$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{Q}{9}+Q+\sqrt{\frac{Q}{9}\cdot Q}\right)\cdot 2h'=52$$

$$\Longrightarrow Qh'=54\text{(厘米}^3\text{)}.$$



第 5 题

因此，$V_{圆锥}=\frac{1}{3}Q\cdot 3h'=54$(厘米^3)．

6．如上题图，因 $\frac{Q_1}{Q}=\frac{1}{4}=\frac{r'^2}{r^2}$，

故 $r=2r'$．又 $r'=l\cos\varphi$，则 $r=2l\cos\varphi$．

因此，圆台的体积为：

$$V=\frac{7}{6}\pi l^3\sin 2\varphi\cos\varphi.$$

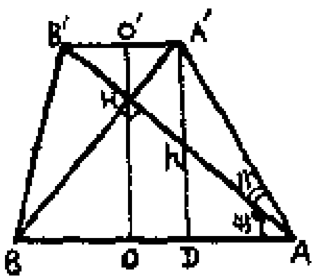
7．依题意得：$\begin{cases}\dfrac{\pi(l+l')\cdot 216^\circ}{180^\circ}=2\pi R,\\ (l+l')^2-R^2=28^2.\end{cases}$

解这个方程组得：$l+l'=35$，$R=21$．

因 $\frac{r}{R}=\frac{h'}{h'+h}=\frac{l'}{l'+l}$

$\Longrightarrow r=3$，$l'=5$．

故 $S_{圆台全}=1170\pi$(厘米^2)，$V_{圆台}=4104\pi$(厘米^3)．



第 8 题

8．如图，可证$\triangle AHB$是等腰直角三角形，则 $\angle HAO=45^\circ$，$AH=6\cos 15^\circ$，$A'H=6\sin 15^\circ$，但 $R=OA=AH\cos 45^\circ$ $=3\sqrt{2}\cos 15^\circ$，$r=O'A'=A'H\cos 45^\circ$ $=3\sqrt{2}\sin 15$．

又 $h=6\sin 60^\circ=3\sqrt{3}$．

故圆台的体积为：

$$V=\frac{45}{2}\sqrt{3}\pi\text{(厘米}^3\text{)}.$$

9．所求旋转体可看成两个圆台加一个圆柱再减去两个圆锥而组成的．其体积为$\frac{9}{2}\pi a^3$．

10. 如图，过 E 作 $EF\perp AB$ 于 F.

依题意得:

$$S=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot AB=EF\cdot h$$

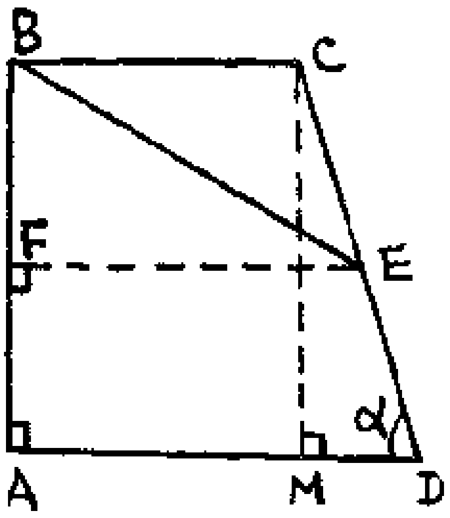
$$\Longrightarrow EF=\frac{S}{h}.$$

$$AD=EF+AF\operatorname{ctg}\alpha$$

$$=\frac{S}{h}+\frac{1}{2}h\operatorname{ctg}\alpha.$$

故 $V_{ABED}=V_{BEF}+V_{FEDA}$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{h}{2}\cdot EF^2+\frac{\pi}{3}\cdot\frac{h}{2}(EF^2+AD^2+EF\cdot AD)$$

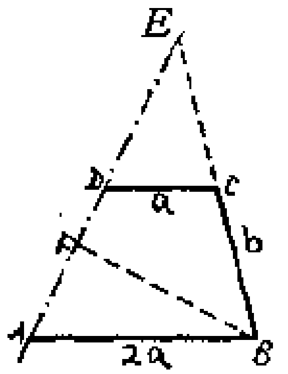


第 10 题

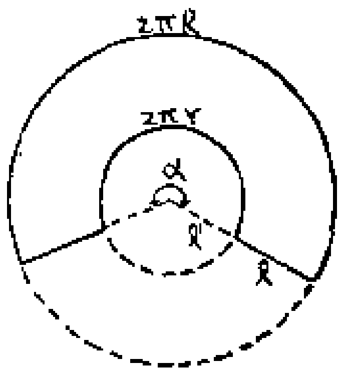
$$=\frac{\pi h}{6}\left(\frac{S}{h}\right)^2+\frac{\pi h}{6}\left[\left(\frac{S}{h}\right)^2+\left(\frac{S}{h}+\frac{1}{2}h\operatorname{ctg}\alpha\right)^2+\frac{h}{S}\left(\frac{h}{S}+\frac{1}{2}h\operatorname{ctg}\alpha\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{24h}(16S^2+h^4\operatorname{ctg}^2\alpha+6Sh^2\operatorname{ctg}\alpha).$$

11. 如图，这个旋转体的体积等于$\triangle ABE$ 旋转体的体积减去$\triangle DCE$ 旋转体的体积.



第 11 题



第 12 题

由相似三角形的性质得:

$$ED=DA=b,$$

因此,

$$V_{\triangle ABE}=\frac{1}{3}\pi\cdot FB^2\cdot EF+\frac{1}{3}\pi\cdot FB^2\cdot AF$$

$$=\frac{8}{3}\pi a^2 b\sin^2\alpha,$$

$$V_{\triangle DCE}=\frac{1}{8}V_{\triangle ABE}=\frac{1}{3}\pi a^2 b\sin^2\alpha.$$

故 $$V_{ABCD}=V_{\triangle ABE}-V_{\triangle CDE}$$

$$=\frac{7}{3}\pi a^2 b\sin^2\alpha.$$

12. 如图，设圆台的母线为 l，则它的全面积为：

$$S_{全}=\pi[r^2+R^2+(r+R)l].$$

圆台侧面展开图所在的圆环的整个的面积为 $\pi(l-l')^2-\pi l'^2$.

依题意得：

$$\pi[r^2+R^2+(r+R)l]=\pi(l+l')^2-\pi l'^2$$

即 $$r^2+R^2+(r+R)l=l^2+2ll'. \qquad (1)$$

但 $$\alpha=\frac{2\pi R}{l+l'}=\frac{2\pi r}{l'}$$

即 $$\frac{l'}{l+l'}=\frac{r}{R}\Longrightarrow\frac{l'}{l}=\frac{r}{R-r}$$

故 $$l'=\frac{r}{R-r}l.$$

代入(1) 得：

$$r^2+R^2+(r+R)l=l^2+2l\cdot\frac{r}{R-r}l$$

即 $$(R+r)l^2-(R^2-r^2)l-(R^2+r^2)(R-r)=0$$

解方程得：

$$l=\frac{R^2-r^2\pm\sqrt{(R^2-r^2)^2+4(R^2+r^2)(R^2-r^2)}}{2(R+r)}$$

$$=\frac{R^2-r^2\pm\sqrt{(R^2-r^2)(5R^2+3r^2)}}{2(R+r)}$$

因 $5R^2+3r^2>R^2-r^2$，故负号不合题意舍去．故圆台的母线长为

$$l=\frac{R^2-r^2+\sqrt{(R^2-r^2)(5R^2+3r^2)}}{2(R+r)}.$$

习 题 四

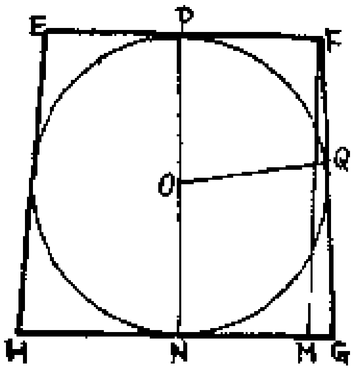
1. D应是截口圆的圆心，故$S_{P-ABC}=2\pi R\cdot PD, S_{P'-ABC}=2\pi R\cdot P'D$，$S_{球}=4\pi R^2$．依题意得：$4\pi^2R^2\cdot P'D^2=2\pi R\cdot PD(4\pi R^2)$．

$\therefore\ P'D^2=2R\cdot PD$，设 $OD=x$，则 $(R+x)^2=2R(R-x)$

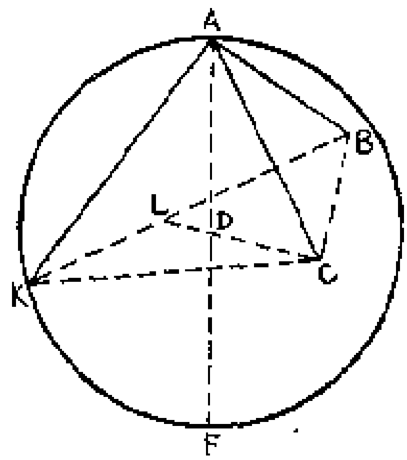
即 $x^2+4Rx-R^2=0$，$\therefore\ x=-2R\pm\sqrt{5}R$ 舍去负的，

故 $x=(\sqrt{5}-2)R$.

2. 过棱台上下底面相对两中心作轴截面 $EFGH$，则由于对称性、球与棱台的上、下底面及侧面的切点 P、N、Q 也应在轴截面上.



第 2 题



第 3 题

设球半径为 x，则 $FG=FQ+QG=PF+GN=\dfrac{a+b}{2}$，

在 $Rt\triangle MGF$ 中，$FM^2+MG^2=FG^2$ 即 $(2x)^2+\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，

$\therefore\quad x=\dfrac{\sqrt{ab}}{2}$. 故 $S_{棱台全}=a^2+b^2+4\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=2(a^2+b^2+ab)$，

$V_{棱台}=\dfrac{\sqrt{ab}}{3}(a^2+b^2+ab)$.

3. 连三弦的另一端点 B、C、K 可得一个正三棱锥 $A-BCK$ 内接于球．且侧面顶端的三个面角都是 $2a$．弦长变成 3 侧棱．通过底面中心 D 作球的直径 AF．（$\because$ $AK=AC=AB$，故底面三角形 BCK 的中心 D，一定在过 A 点的直径上.）连 FC 则得到 $Rt\triangle ACF$．令 $AC=x$，则

$$x^2=AF\cdot AD=2R\sqrt{AC^2-CD^2}=2R\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{3}LC\right)^2}$$

$$=2R\sqrt{x^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}BC\right)^2}=2R\sqrt{x^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}AC\sin\alpha\right)^2}$$

$$=\frac{4Rx}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3}{4}-\sin^2\alpha}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{4}{\sqrt{3}}R\sqrt{\frac{3}{4}-\sin^2\alpha}=\frac{4R}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin^2 60^\circ-\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}R}{3}\sqrt{\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)}.$$

4. 提示：通过人造卫星所在位置作轴截面，利用直角三角形中的射影定理把卫星上所看到的地面部分组成的球冠之底面到球冠顶点的距离用 R，H 表示出来即 $\frac{RH}{R+H}$. 故 $S_{球冠}=2\pi R\cdot\frac{RH}{R+H}=\frac{2\pi R^2\cdot H}{R+H}$.

5. 提示：作轴截面，利用相似三角形对应成比例计算出母线与底面圆的半径之比为 3:1. 再代入面积、体积公式进行计算即可证明题目的结论.

6. 依题意得：
$$\begin{cases}4\pi R^2+2\pi RH=4\pi a^2 & (1)\\ 2b=2\pi R+2H & (2)\end{cases}$$

由(2)得：$H=b-\pi R$ 代入(1)后化简得：

$$(\pi-2)R^2-bR+2a^2=0,$$

$$\therefore\quad R=\frac{b\pm\sqrt{b^2-8(\pi-2)a^2}}{2(\pi-2)}\ (b^2\geqslant 8(\pi-2)a^2).$$

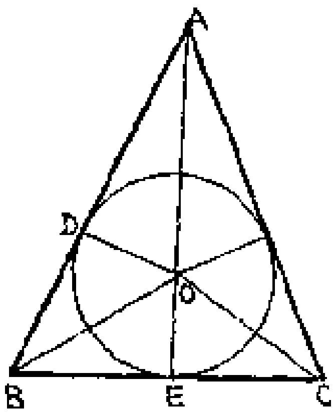
$$\therefore\quad h=2R+H=b-(\pi-2)R=\frac{1}{2}(b\mp\sqrt{b^2-8(\pi-2)a^2}).$$

因 $h<\frac{b}{2}$，故应舍去正号，故
$$\begin{cases}R=\dfrac{b-\sqrt{b^2-(8\pi-16)a^2}}{2\pi-4}\\ h=\dfrac{1}{2}(b-\sqrt{b^2-(8\pi-16)a^2})\end{cases}$$
$(b^2>(8\pi-16)a^2)$

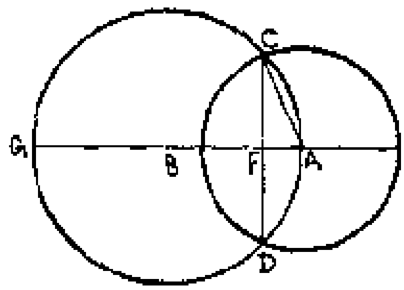
7. 连 EF、FG GH、HE. $\because$ $EF\parallel AC$，$EF=\frac{1}{2}AC$，

$GH \parallel AC$，$GH=\frac{1}{2}AC$. $\therefore$ $EF \mathrel{\underline{\parallel}} GH$，故 $EFGH$ 是平行四边形.

又 $EH\parallel BD$ 而 $BD\perp AC$，$\therefore$ $EH\perp EF$，故 $EFGH$ 是矩形. 设它的两对角线交于 O 点，则 $OF=OH=OE=OG$. 同理可证：$OK=OL=OE=OG$. 即 F、F、G、H、K、L 六点到同一点 O 的距离相等，因此它们在同一球面上.



第 8 题



第 9 题

8．作轴截面 ABC，D、E 分别是圆锥侧面和底面与球 O 的切点. 故 $OD\perp AB$，$OE\perp BC$，$\angle OBE=\frac{\alpha}{2}$.

在 $Rt\triangle ABE$ 中，$BE=l\cos\alpha$，在 $Rt\triangle OBE$ 中，

$OE=l\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. 故立方体对角线 $=2OE=2l\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. 它的棱长为

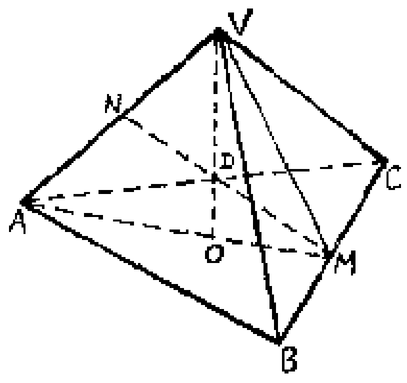
$\frac{2\sqrt{3}}{3}l\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$，故它的表面积为 $6\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}l\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2$

$=8l^2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\frac{2\alpha}{2}$.

9．过 A、B 作轴截面，CD 为公共弦. F 为 AB 与 CD 的交点. 设 A、B 两球之半径为 R、R'. 则 $S_{球冠A-CD}=2\pi R'\cdot AF$. 延长 AB 交球 B 于 G，连 GC、AC. $\because$ $CF\perp AG$，$\angle ACG=90°$，

$\therefore$ $AC^2=AF\cdot AG$ 即 $R^2=AF\cdot 2R'$，$\therefore$ $AF=\frac{R^2}{2R'}$，故 $S_{球冠A-CD}$

$=2\pi R'\cdot\frac{R^2}{2R'}=\pi R^2=$ 常数.（即与球 A 的大小无关.）



第 10 题

10.(1) 设 $BC=b$，则其他棱长都为 a，自 V 作 $VO\perp$平面 ABC，O 为垂足，则 O 为$\triangle ABC$ 的中心.

故 $AO=\dfrac{abc}{4S}$. 但 $S=\dfrac{1}{2}AM\cdot BC$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2-\dfrac{b^2}{4}}\cdot b=\dfrac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$（这里 M 是 BC 的中点.）

$\therefore\ AO=\dfrac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$. 由$\triangle VBC\cong\triangle ABC$ 得：$VM=AM=\sqrt{a^2-\dfrac{b^2}{4}}$，由 $\triangle VND\backsim\triangle AOV$ 得：

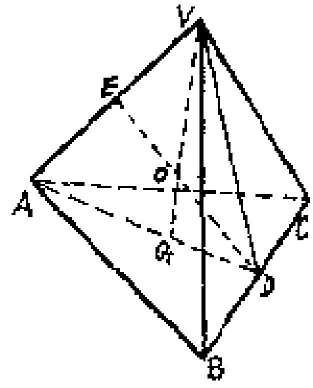
$$\frac{VD}{VN}=\frac{VA}{VO}\text{（}N\text{是}VA\text{中点，}MN\text{与}VO\text{交于}D\text{），}$$

即 $\dfrac{x}{\dfrac{a}{2}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-AO^2}}$，故

$$x=\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-\dfrac{a^4}{4a^2-b^2}}}=\frac{a^2}{2\sqrt{\dfrac{a^2(3a^2-b^2)}{4a^2-b^2}}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{4a^2-b^2}{3a^2-b^2}}.$$

（这里 x 表示球半径.）

(2) 先在球面透镜上找三点，构成边长为 a 的等边三角形，然后找第四个点，使这点与前三点中的两点的距离也等于 a. 再去量这点与另一点的距离为 b. 将量得的 a，b 之值代入(1)中公式，求出 x 的值即球面透镜的半径.



第 11 题

11. 设 $V—ABC$ 为正四面体，VG 是它的高，则它的外接球心应在 VG 上，设 E、D 表示 VA、BC 中点，连 DE 交 VG 于 O，则 O 是外接球心，即 $r_2=OV$. 但正四面体三对棱中点连线都过 O 点，故 O 点又是 $V—ABC$ 的内切球心. 即 $OG=r_1$，$\because$ DE 是$\angle ADV$ 的平分线，$\therefore$ $VO:OG=VD:DG$，即 $r_2:r_1=3:1$. 又球 r_2 的外切立方体的边长

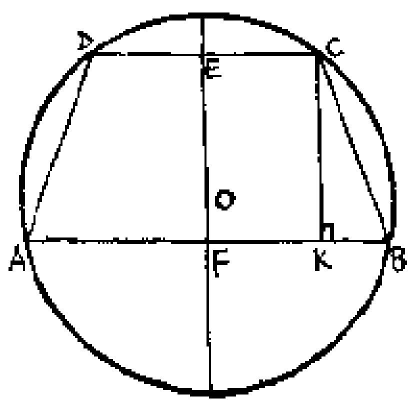
为 $2r_2$，而其对角线为 $2r_3$，故

$(2r_3)^2=3(2r_2)^2$，∴ $r_3=\sqrt{3}r_2$，即 $r_2:r_3=3:3\sqrt{3}$，故

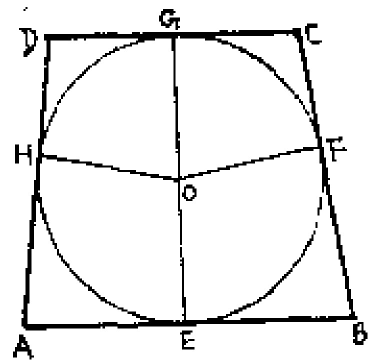
$$r_1:r_2:r_3=1:3:3\sqrt{3}.$$

注：依据开普勒的说法：这个比值恰好是火星、木星、土星与太阳平均距离之比．但事实上，实际的比值与这个比值相差不多．

12．圆台和球台的轴截面如左图所示．设球台（也是圆台）的两底面半径为 R，r，高为 H．则 $V_1=\frac{\pi H}{6}[3(r^2+R^2)+H^2]$，



第 12 题



第 13 题

$V_2=\frac{\pi H}{3}(r^2+R^2+Rr)$．自 C 作 $CK\perp AB$ 于 K，则

$BC^2=H^2+(R-r)^2$．故 $V_3=\frac{1}{3}\pi\cdot BC^2\cdot\frac{H}{2}=\frac{\pi H}{6}[H^2+(R-r)^2]$

$=\frac{\pi H}{6}(3R^2+3r^2+H^2-2R^2-2r^2-2Rr)=\frac{\pi H}{6}[3(R^2+r^2)+H^2]$

$-\frac{\pi H}{3}(R^2+r^2+Rr)=V_1-V_2$，即 $V_1=V_2+V_3$．

13．通过球心 O 和外切四棱台的一对底棱中点作轴截面如左图所示．设球半径为 R，因棱台两底边长之比为 $m:n$，故可设其为 mR、nR．则棱台的斜高

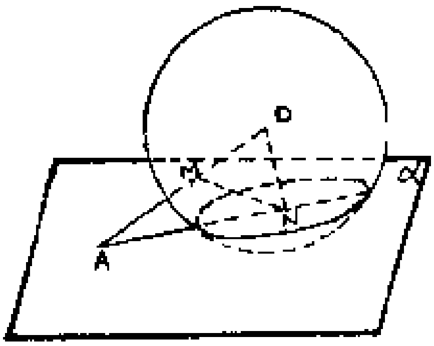
$$AD=AH+DH=DG+AE=\frac{m+n}{2}R.$$

故 $V_{棱台}=\frac{2R}{3}(m^2R^2+n^2R^2+mR\cdot nR)=\frac{2R^3}{3}(m^2+n^2+mn)$．

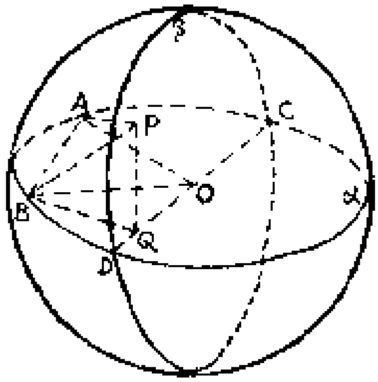
$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$.　因此

$$\frac{V_{球台}}{V_{球}}=\frac{\frac{2}{3}R^3(m^2+n^2+mn)}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{m^2+n^2+mn}{2\pi}.$$

14. 设平面 α 为经过已知点 A 与已知球 O 相截的任意平面，其截面圆之圆心为 N，连 ON，则 $ON\perp$平面 α，



第 14 题

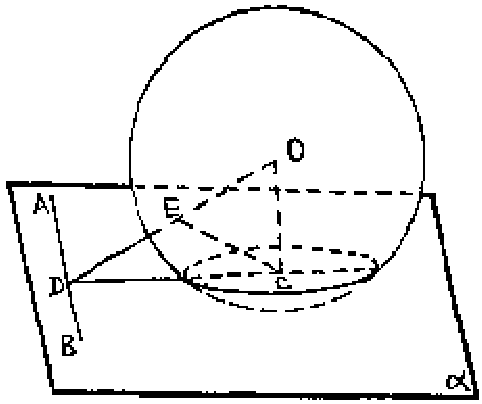


第 15 题

$\therefore$ $\angle ONA=90°$，取 OA 中点 M，则 $NM=\frac{AO}{2}$=常数，且M 点为定点. 因此，截面圆心 N 之轨迹为以 AO 为直径之球面在球 O 内的一部分，若 A 点在球 O 内，则点 N 之轨迹为以 AO 为直径之全球面.

15. 如左图所示，连结边界点 AB，过 A、B、作球的大圆面 α，又过 O 作垂直于 α 且平行于 AB 之大圆面 β，设 α 与 β 交于 CD. 则可以证明连结结 A、B 的长度小于 2 的内弧与大圆面 β 不会有任何交点. 假设此内弧与 β 有一交点 P，过 P 作 $PQ\perp CD$ 于 Q，连 AQ，BQ，则 $PA\geqslant QA$，$PB\geqslant QB$. $\therefore$ $PA+PB\geqslant QA+QB$. 但 $QA+QB\geqslant OA+OB$ (等底等高的三角形中，等腰三角形的周长最小) $\therefore$ $PA+PB\geqslant 2$ 故连结 A、B 的内弧的长$\geqslant PA+PB\geqslant 2$ 与题设矛盾. 所以任何连结 A、B 长度小于 2 的内弧与大圆面 β 没有交点，因此它必定位于与 AB 同侧的半球之内.

16. 设 AB 为已知直线，O 为已知球心，过 AB 作任一平面 α 与球 O 相截，设 C 为截面圆心．连 OC，则 $OC\perp$ 平面 α．自 O 作（在平面 OAB 上）$OD\perp AB$ 于 D．则 OD 为定长．连 DC，则 $DC\perp OC$，又取 OD 中点 E，连 EC，$\therefore EC=\frac{1}{2}OD$ 也为定长．且 E 为定点，故 C 点之轨迹为：以 OD 为直径之球面在球 O 内之一部分．若 AB 与球相交，则截面圆心之轨迹为以 OD 为直径之全球面．



第 16 题

后　记

本书扼要地概括了中学平面几何和立体几何的基本知识，重点叙述了几何证题的各种方法以及添辅助线的原则．编写本书的宗旨在于，使中学生在学好课本知识的基础上，扩大眼界，提高逻辑思维能力，提高运用几何知识解几何题的能力．同时，本书也可以作为中学数学教师的教学参考资料和师范院校数学系科低年级学生的自学参考书．本书第一章、第二章、第三章、第五章由江志同志编写，第四章由毛奇同志编写，第六章、第七章、第八章由龚延华同志编写．

全书由邓萃林副教授主审，武汉师范学院数学系几何教研室全体老师也参加了审稿工作．在整个编写过程中得到武汉市教育学院江仁俊副教授的指导和帮助．杨挥同志在组织和领导本书的编写过程中起了重要作用．在此一并表示感谢．由于编者水平有限，尽管得到上述诸位老师的指导、帮助和修改，缺点错误在所难免，希望听到各方面读者的批评．

编　者

[General Information]
书名=初等几何解题引导
作者=江志 龚延华 毛奇编
页数=382
SS号=11240749
出版日期=1982年04月第1版

前言
目录
目录