2014年全国初中数学联赛（初三年级组）试题参考答案

第一试

一、选择题：（本题满分42分，每小题7分）

1． 已知x,y为整数，且满足$(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2})=-\frac{2}{3}(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4})$，则$x+y$的可能的值有（　　）

A. 1个　　　B. 2个　　　C. 3个　　　D. 4个

【答】 C.

由已知等式得$\frac{x+y}{xy}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4-y^4}{x^4y^4}$，显然$x,y$均不为0，所以$x+y=0$或$3xy=2(x-y)$.

若$3xy=2(x-y)$，则$(3x+2)(3y-2)=-4$.又x,y为整数，可求得$\begin{cases}x=-1,\\y=2,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-2,\\y=1.\end{cases}$所以$x+y=1$或$x+y=-1$.

因此，$x+y$的可能的值有3个.

2． 已知非负实数x,y,z满足$x+y+z=1$，则$t=2xy+yz+2zx$的最大值为（　　）

A. $\frac{4}{7}$　　　B. $\frac{5}{9}$　　　C. $\frac{9}{16}$　　　D. $\frac{12}{25}$

【答】 A.

$t=2xy+yz+2zx=2x(y+z)+yz\le 2x(y+z)+\frac{1}{4}(y+z)^2$

$=2x(1-x)+\frac{1}{4}(1-x)^2=-\frac{7}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}=-\frac{7}{4}(x-\frac{3}{7})^2+\frac{4}{7}$，

易知：当$x=\frac{3}{7}$，$y=z=\frac{2}{7}$时，$t=2xy+yz+2zx$取得最大值$\frac{4}{7}$.

3. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D为BC的中点，$BE\perp AC$于E，交AD于P，已知$BP=3$，$PE=1$，则$AE=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　　B. $\sqrt{2}$　　　C. $\sqrt{3}$　　　D. $\sqrt{6}$

【答】 B.

因为$AD\perp BC$，$BE\perp AC$，所以P,D,C,E四点共圆，所以$BD\cdot BC=BP\cdot BE=12$，又$BC=2BD$，所以$BD=\sqrt{6}$，所以$DP=\sqrt{3}$.

又易知$\triangle AEP\backsim\triangle BDP$，所以$\frac{AE}{BD}=\frac{PE}{DP}$，从而可得$AE=\frac{PE}{DP}\cdot BD=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{2}$.

4．6 张不同的卡片上分别写有数字 2，2，4，4，6，6，从中取出 3 张，则这 3 张卡片上所写的数字可以作为三角形的三边长的概率是 （　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

【答】 B.

若取出的 3 张卡片上的数字互不相同，有 2×2×2＝8 种取法；若取出的 3 张卡片上的数字有相同的，有 3×4＝12 种取法. 所以，从 6 张不同的卡片中取出 3 张，共有 8＋12＝20 种取法.

要使得三个数字可以构成三角形的三边长，只可能是：（2，4，4），（4，4，6），（2，6，6），（4，6，6），由于不同的卡片上所写数字有重复，所以，取出的 3 张卡片上所写的数字可以作为三角形的三边长的情况共有 4×2＝8 种.

因此，所求概率为$\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

5．设$[t]$表示不超过实数t的最大整数，令$\{t\}=t-[t]$. 已知实数x满足$x^3+\frac{1}{x^3}=18$，则$\{x\}+\{\frac{1}{x}\}=$ （　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$3-\sqrt{5}$　　C．$\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$　　D．1

【答】 D.

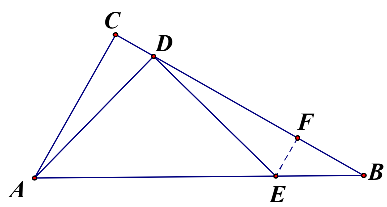
设 $x+\frac{1}{x}=a$，则 $x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})(x^2+\frac{1}{x^2}-1)=(x+\frac{1}{x})[(x+\frac{1}{x})^2-3]=a(a^2-3)$，所以 $a(a^2-3)=18$，因式分解得$(a-3)(a^2+3a+6)=0$，所以$a=3$.

由$x+\frac{1}{x}=3$解得$x=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$，显然$0<\{x\}<1,0<\{\frac{1}{x}\}<1$，所以$\{x\}+\{\frac{1}{x}\}=1$.

6．在△ABC中，$\angle C=90°$，$\angle A=60°$，$AC=1$，D在BC上，E在AB上，使得△ADE为等腰直角三角形，$\angle ADE=90°$，则BE的长为 （　　）

A．$4-2\sqrt{3}$　　B．$2-\sqrt{3}$　　C．$\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$　　D．$\sqrt{3}-1$

【答】 A.



过E作$EF\perp BC$于F，易知△$ACD\cong$△DFE，△$EFB\backsim$△ACB.

设$EF=x$，则$BE=2x$，$AE=2-2x$，$DE=\sqrt{2}(1-x)$，$DF=AC=1$，

故$1^2+x^2=[\sqrt{2}(1-x)]^2$，即$x^2-4x+1=0$. 又$0<x<1$，故可得$x=2-\sqrt{3}$.

故$BE=2x=4-2\sqrt{3}$.

二、填空题：（本题满分 28 分，每小题 7 分）

1．已知实数a,b,c满足$a+b+c=1$，$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}=1$，则$abc=$____.

【答】 0.

由题意知$\frac{1}{1-2c}+\frac{1}{1-2a}+\frac{1}{1-2b}=1$，所以

$$(1-2a)(1-2b)+(1-2b)(1-2c)+(1-2a)(1-2c)=(1-2a)(1-2b)(1-2c)$$

整理得$2-2(a+b+c)=8abc$，所以$abc=0$.

2．使得不等式$\dfrac{9}{17}<\dfrac{n}{n+k}<\dfrac{8}{15}$对唯一的整数$k$成立的最大正整数$n$为_______.

【答】144.

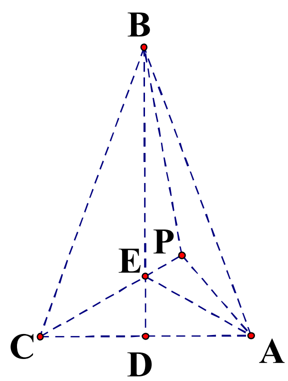
由条件得$\dfrac{7}{8}<\dfrac{k}{n}<\dfrac{8}{9}$，由$k$的唯一性，得$\dfrac{k-1}{n}\le\dfrac{7}{8}$且$\dfrac{k+1}{n}\ge\dfrac{8}{9}$，所以$\dfrac{2}{n}=\dfrac{k+1}{n}-\dfrac{k-1}{n}\ge\dfrac{8}{9}-\dfrac{7}{8}=\dfrac{1}{72}$，所以$n\le 144$.

当$n=144$时，由$\dfrac{7}{8}<\dfrac{k}{n}<\dfrac{8}{9}$可得$126<k<128$，$k$可取唯一整数值127.

故满足条件的正整数n的最大值为144.

3．已知P为等腰△ABC内一点，$AB=BC$，$\angle BPC=108°$，D为AC的中点，BD与PC交于点E，如果点P为△ABE的内心，则$\angle PAC=$_______.

【答】48°.



由题意可得$\angle PEA=\angle PEB=\angle CED=\angle AED$，

而$\angle PEA+\angle PEB+\angle AED=180°$，

所以$\angle PEA=\angle PEB=\angle CED=\angle AED=60°$，

从而可得$\angle PCA=30°$.

又$\angle BPC=108°$，所以$\angle PBE=12°$，从而$\angle ABD=24°$.

所以$\angle BAD=90°-24°=66°$，

$\angle PAE=\dfrac{1}{2}(\angle BAD-\angle CAE)=\dfrac{1}{2}(66°-30°)=18°$，

所以$\angle PAC=\angle PAE+\angle CAE=18°+30°=48°$.

4．已知正整数a,b,c满足:$1<a<b<c$，$a+b+c=111$，$b^2=ac$，则$b=$_______.

【答】36.

设a,c的最大公约数为$(a,c)=d$，$a=a_1d$，$c=c_1d$，a_1,c_1均为正整数且$(a_1,c_1)=1$，$a_1<c_1$，则$b^2=ac=d^2a_1c_1$，所以$d^2\mid b^2$，从而$d\mid b$，设$b=b_1d$（b_1为正整数），则有$b_1^2=a_1c_1$，而$(a_1,c_1)=1$，所以a_1,c_1均为完全平方数，设$a_1=m^2,c_1=n^2$，则$b_1=mn$，m,n均为正整数，且$(m,n)=1$，$m<n$.

又$a+b+c=111$，故$d(a_1+b_1+c_1)=111$，即$d(m^2+n^2+mn)=111$.

注意到$m^2+n^2+mn\ge 1^2+2^2+1\times 2=7$，所以$d=1$或$d=3$.

若$d=1$，则$m^2+n^2+mn=111$，验算可知只有$m=1,n=10$满足等式，此时$a=1$，不符合题意，故舍去.

若$d=3$，则$m^2+n^2+mn=37$，验算可知只有$m=3,n=4$满足等式，此时$a=27,b=36,c=48$，符合题意.

因此，所求的$b=36$.

第二试

一、（**本题满分 20 分**）设实数 a,b 满足 $a^2(b^2+1)+b(b+2a)=40$，$a(b+1)+b=8$，求 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 的值.

解 由已知条件可得 $a^2b^2+(a+b)^2=40$，$ab+(a+b)=8$.

设 $a+b=x$，$ab=y$，则有 $x^2+y^2=40$，$x+y=8$，

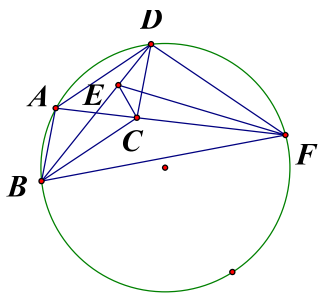
联立解得 $(x,y)=(2,6)$ 或 $(x,y)=(6,2)$.

若 $(x,y)=(2,6)$，即 $a+b=2$，$ab=6$，则 a,b 是一元二次方程 $t^2-2t+6=0$ 的两根，但这个方程的判别式 $\Delta=(-2)^2-24=-20<0$，没有实数根；

若 $(x,y)=(6,2)$，即 $a+b=6$，$ab=2$，则 a,b 是一元二次方程 $t^2-6t+2=0$ 的两根，这个方程的判别式 $\Delta=(-6)^2-8=28>0$，它有实数根. 所以

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{(a+b)^2-2ab}{a^2b^2}=\frac{6^2-2\times2}{2^2}=8.$$

二.（**本题满分 25 分**）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 为对角线 BD 上一点，且满足 $\angle ECD=\angle ACB$，AC 的延长线与△ ABD 的外接圆交于点 F. 证明：$\angle DFE=\angle AFB$.



证明 由 $ABCD$ 是平行四边形及已知条件知 $\angle ECD=\angle ACB=\angle DAF$.

又 A、B、F、D 四点共圆，所以 $\angle BDC=\angle ABD=\angle AFD$，所以△ ECD ∽△ DAF，

所以 $\frac{ED}{DF}=\frac{CD}{AF}=\frac{AB}{AF}$.

又 $\angle EDF=\angle BDF=\angle BAF$，所以△ EDF ∽△ BAF，故 $\angle DFE=\angle AFB$.

三.（**本题满分 25 分**）设 n 是整数，如果存在整数 x,y,z 满足 $n=x^3+y^3+z^3-3xyz$，则称 n 具有性质 P. 在 1，5，2013，2014 这四个数中，哪些数具有性质 P，哪些数不具有性质 P？并说明理由.

解 取 $x=1$，$y=z=0$，可得 $1=1^3+0^3+0^3-3\times1\times0\times0$，所以 1 具有性质 P.

取 $x=y=2$，$z=1$，可得 $5=2^3+2^3+1^3-3\times2\times2\times1$，所以 5 具有性质 P.

为了一般地判断哪些数具有性质 P，记 $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$，则

$$f(x,y,z)=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y)-3xyz$$

$$=(x+y+z)^3-3(x+y)z(x+y+z)-3xy(x+y+z)$$

$=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)$

$=\dfrac{1}{2}(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=\dfrac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$.

即 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$ ①

不妨设 $x\ge y\ge z$，

如果 $x-y=1, y-z=0, x-z=1$，即 $x=z+1, y=z$，则有 $f(x,y,z)=3z+1$；

如果 $x-y=0, y-z=1, x-z=1$，即 $x=y=z+1$，则有 $f(x,y,z)=3z+2$；

如果 $x-y=1, y-z=1, x-z=2$，即 $x=z+2, y=z+1$，则有 $f(x,y,z)=9(z+1)$；

由此可知，形如 $3k+1$ 或 $3k+2$ 或 $9k$（k 为整数）的数都具有性质 P.
因此，1，5 和 2014 都具有性质 P.

若 2013 具有性质 P，则存在整数 x,y,z 使得 $2013=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)$. 注意到 $3\mid 2013$，从而可得 $3\mid (x+y+z)^3$，故 $3\mid (x+y+z)$，于是有 $9\mid (x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)$，即 $9\mid 2013$，但 2013＝9×223＋6，矛盾，所以 2013 不具有性质 P.