出 版 说 明

为了满足广大中学生学习数学和中学数学教师教学参考的需要，我们邀请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了这套中学数学：《代数解题引导》、《几何解题引导》、《解析几何解题引导》、《三角解题引导》和《国际数学竞赛试题讲解》。

希望这套书和广大读者见面以后，能听到来自读者的热情的批评和建议，以便我们进一步修订，使其日臻完善。

一九八〇年四月

是 16 的四次算术根.

一般说来，在零和正实数的范围内，无论 n 是奇次还是偶次. 对于这范围内的 a 都只有一个 n 次方根. 常称此为算术根、并记作 $\sqrt[n]{a}$. 如 $\sqrt[4]{16}\neq -2$, $\sqrt[4]{16}\neq 2i$, $\sqrt[4]{16}\neq -2i$, $\sqrt[4]{16}=2$. 因为只有 2 才是 16 的算术根。

在实数范围内，正实数 a 的偶次方根有两个，它们是互为相反的数，分别记作 $\sqrt[n]{a}$、$-\sqrt[n]{a}$. 如实数范围内，16 的 4 次方根为 $\sqrt[4]{16}=2$ 和 $-\sqrt[4]{16}=-2$. 这里应注意 $\sqrt[4]{16}$ 始终表示算术根. 而负实数在实数范围内不存在算术根. 零的奇次或偶次方根都是零. 正实数 a 的奇次方根只一个 $\sqrt[n]{a}$. 负实数 $-a$ 的奇次方根也只有一个，即 $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$.

本节的例题，将牵涉绝对值，算术根，与常见的实数问题. 关于绝对值、算术根是初学者所应特别注意的.

例 1 设实数 $m\neq n$，试指出下式错在哪里.

$$m^2-2mn+n^2=n^2-2nm+m^2$$

$$(m-n)^2=(n-m)^2$$

$$\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2}$$

$$m-n=n-m$$

$$2m=2n$$

$$\therefore\quad m=n.$$

分析 主要错误，在于第三个等式到第四个等式这一步. 因为就 $m>n$ 时，由

$$\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2},$$

依算术根为

$$m-n=m-n.$$

另外，由第二个等式到第三个等式这一步，是不完全的.

因此，实数是可以比较大小的.

当 x 是实数时，x 的绝对值记作 $|x|$，且

$$|x|=\begin{cases} x, & 当\ x\geqslant 0; \\ -x, & 当\ x<0. \end{cases}$$

如 a 为正实数时，$|x|\leqslant a$ 是指：

当 $x\geqslant 0$ 时，$x\leqslant a$；

当 $x<0$ 时，$-x\leqslant a$，即 $x\geqslant -a$.

概括这两式，常记作

$$-a\leqslant x\leqslant a.$$

这即表示满足下列不等式组

$$\begin{cases} x\leqslant a \\ x\geqslant -a \end{cases}$$

的实数的全体.

此外，由于实数的平方不小于零，因此，若 x，y 都是实数时，常以

$$x^2+y^2=0$$

表示 $x=0$，$y=0$. 又以

$$x^2+y^2\neq 0$$

表示 x，y 不全为 0 .

如果一个数的 n 次幂等于 a，则这个数叫做 a 的 n 次方根. 如

$$x^4=16$$

即 $$x^4-2^4=(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)=0$$

在复数范围内，2，-2，$2i$，$-2i$ 都称为 16 的 4 次方根；在实数范围内，只有 2 和 -2 才是 16 的 4 次方根；而在零和正实数的范围内，则只有 2 才是 16 的 4 次方根. 并称 2

是 16 的四次算术根.

一般说来，在零和正实数的范围内，无论 n 是奇次还是偶次. 对于这范围内的 a 都只有一个 n 次方根. 常称此为算术根，并记作 $\sqrt[n]{a}$. 如 $\sqrt[4]{16}\neq-2$, $\sqrt[4]{16}\neq 2i$, $\sqrt[4]{16}\neq-2i$, $\sqrt[4]{16}=2$. 因为只有 2 才是 16 的算术根。

在实数范围内，正实数 a 的偶次方根有两个，它们是互为相反的数，分别记作 $\sqrt[n]{a}$、$-\sqrt[n]{a}$. 如实数范围内，16 的 4 次方根为 $\sqrt[4]{16}=2$ 和 $-\sqrt[4]{16}=-2$. 这里应注意 $\sqrt[4]{16}$ 始终表示算术根. 而负实数在实数范围内不存在算术根. 零的奇次或偶次方根都是零. 正实数 a 的奇次方根只一个 $\sqrt[n]{a}$. 负实数 $-a$ 的奇次方根也只有一个，即 $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$.

本节的例题，将牵涉绝对值，算术根，与常见的实数问题. 关于绝对值、算术根是初学者所应特别注意的.

例 1 设实数 $m\neq n$，试指出下式错在哪里.

$$m^2-2mn+n^2=n^2-2nm+m^2$$

$$(m-n)^2=(n-m)^2$$

$$\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2}$$

$$m-n=n-m$$

$$2m=2n$$

$$\therefore \quad m=n.$$

分析 主要错误，在于第三个等式到第四个等式这一步. 因为就 $m>n$ 时，由

$$\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2},$$

依算术根为

$$m-n=m-n.$$

另外，由第二个等式到第三个等式这一步，是不完全的。

因此，实数是可以比较大小的.

当 x 是实数时，x 的绝对值记作 $|x|$，且

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{当 } x\geqslant 0; \\ -x, & \text{当 } x<0. \end{cases}$$

如 a 为正实数时，$|x|\leqslant a$ 是指：

当 $x\geqslant 0$ 时，$x\leqslant a$；

当 $x<0$ 时，$-x\leqslant a$，即 $x\geqslant -a$.

概括这两式，常记作

$$-a\leqslant x\leqslant a.$$

这即表示满足下列不等式组

$$\begin{cases} x\leqslant a \\ x\geqslant -a \end{cases}$$

的实数的全体.

此外，由于实数的平方不小于零，因此，若 x，y 都是实数时，常以

$$x^2+y^2=0$$

表示 $x=0$，$y=0$. 又以

$$x^2+y^2\neq 0$$

表示 x，y 不全为 0 .

如果一个数的 n 次幂等于 a，则这个数叫做 a 的 n 次方根. 如

$$x^4=16$$

即 $$x^4-2^4=(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)=0$$

在复数范围内，2，-2，$2i$，$-2i$ 都称为 16 的 4 次方根；在实数范围内，只有 2 和 -2 才是 16 的 4 次方根；而在零和正实数的范围内，则只有 2 才是 16 的 4 次方根. 并称 2

是 16 的四次算术根.

一般说来，在零和正实数的范围内，无论 n 是奇次还是偶次．对于这范圈内的 a 都只有一个 n 次方根．常称此为算术根．并记作 $\sqrt[n]{a}$．如 $\sqrt[4]{16}\neq-2$，$\sqrt[4]{16}\neq 2i$，$\sqrt[4]{16}\neq-2i$，$\sqrt[4]{16}=2$．因为只有 2 才是 16 的算术根。

在实数范圈内，正实数 a 的偶次方根有两个，它们是互为相反的数，分别记作 $\sqrt[n]{a}$、$-\sqrt[n]{a}$．如实数范围内，16 的 4 次方根为 $\sqrt[4]{16}=2$ 和 $-\sqrt[4]{16}=-2$．这里应注意 $\sqrt[4]{16}$ 始终表示算术根．而负实数在实数范圍内不存在算术根．零的奇次或偶次方根都是零．正实数 a 的奇次方根只一个 $\sqrt[n]{a}$．负实数 $-a$ 的奇次方根也只有一个，即 $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$．

本节的例题，将牵涉绝对值，算术根，与常见的实数问题．关于绝对值、算术根是初学者所应特别注意的．

例 1 设实数 $m\neq n$，试指出下式错在哪里．

$$m^2-2mn+n^2=n^2-2nm+m^2$$

$$(m-n)^2=(n-m)^2$$

$$\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2}$$

$$m-n=n-m$$

$$2m=2n$$

$$\therefore\quad m=n.$$

分析 主要错误，在于第三个等式到第四个等式这一步．因为就 $m>n$ 时，由

$$\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2},$$

依算术根为

$$m-n=m-n.$$

另外，由第二个等式到第三个等式这一步，是不完全的。

应该是：

$$\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2},$$

及 $$\sqrt{(m-n)^2}=-\sqrt{(n-m)^2}.$$

（其中包括 $-\sqrt{(m-n)^2}=-\sqrt{(n-m)^2}$ ，$-\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2}$.

例 2 若 x, y 都是实数，试述下列各式的变化范围：（其中 a 是正常数）

① $|x|\leqslant a$；$|y|\leqslant a$.

② $\begin{cases}|x|\leqslant a\\|y|\leqslant a.\end{cases}$

③ $|x+y|\leqslant a$.

④ $|x|+|y|\leqslant a$.

分析 绝对值不等式 $|x|\leqslant a$ 与

$$-a\leqslant x\leqslant a \text{ 或 } \begin{cases}x\leqslant a\\x\geqslant -a\end{cases}$$

等价．在数轴上表示为包括点 a 与点 $-a$ 及其间实数点的全体．在数平面上则表示为包括边界 $x=a$ 及 $x=-a$ 的带形区域．（想一想，为什么）

解答 ① 的变化范围，如图 1—1，1—2 阴影部分．

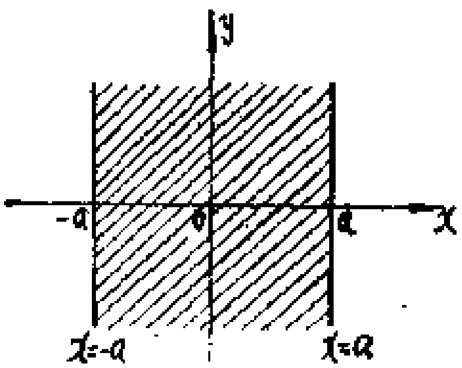


图 1—1

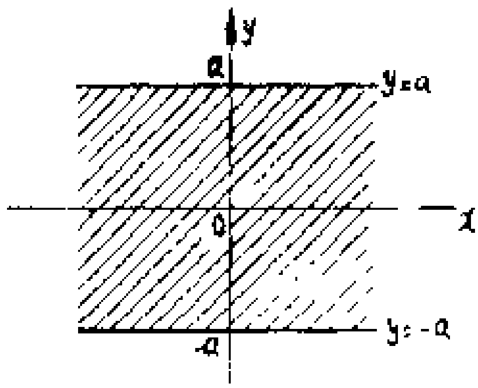


图 1—2

② 的变化范围，为$|x|\leqslant a$，$|y|\leqslant a$的公共部分(交)．如图 1—3.

③ 的变化范围，为

$$\begin{cases}x+y\leqslant a\\ x+y\geqslant -a\end{cases}$$

其中，$y\leqslant -x+a$表示包括边界$y=-x+a$的下半平面；$y\geqslant -x-a$表示包括边界$y=-x-a$的上半平面．而

$$\begin{cases}x+y\leqslant a\\ x+y\geqslant -a\end{cases}$$

则表示上述两个半平面的交（一斜带形区域）．如图 1—4.

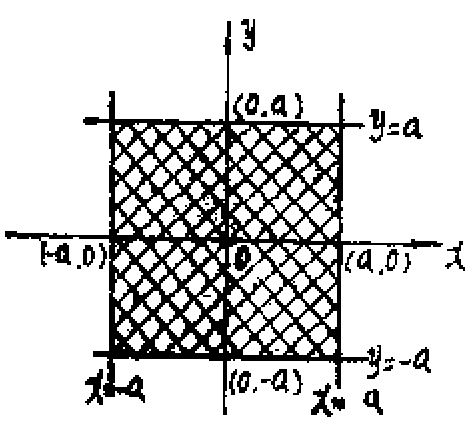


图 1—3

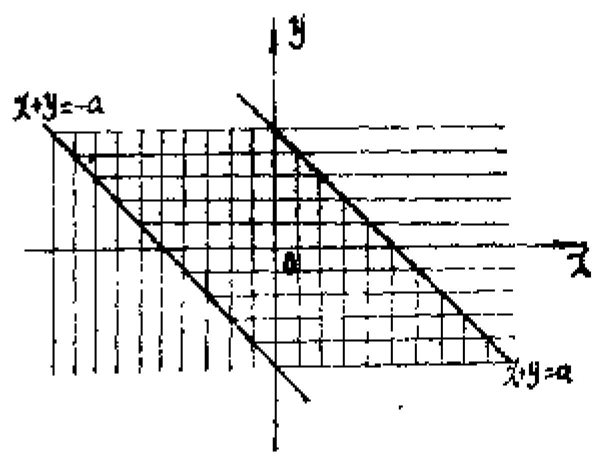


图 1—4

④ 的变化范围为满足不等式方程组

$$\begin{cases}x+y\leqslant a\\ x+y\geqslant -a\\ x-y\leqslant a\\ x-y\geqslant -a\end{cases}$$

(x,y)的全体．即如图1—5，四个半平面的交（且包括边界）．

例 3 试证 $\sqrt{3}$ 为无理数.

分析 要证 $\sqrt{3}$ 为无理数，即要证明 $\sqrt{3}$ 为数轴上非有理点所对应的一个数. 这就需先证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数.

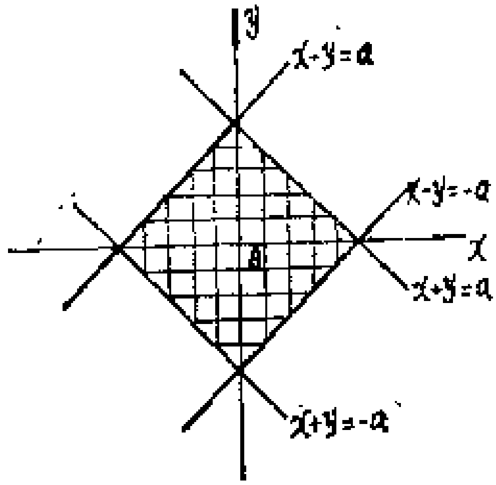


图 1—5

采用反证法，从既约分数入手，通过一系列恒等变换，若得一未约分数，则矛盾可证.

具体说来，若 m，n 为整数，设 $\sqrt{3}=\frac{n}{m}$ 为既约分数，则 $3m^2=n^2$，说明 n^2 是 3 的倍数，而 n 又能否被 3 整除呢？这就需要考虑一个性质：

若一整数平方为 3 所整除，则该数必为 3 所整除. 要证明这一性质，又牵涉到一个反命题：

若一整数不能被 3 整除，则它的平方也不被 3 整除. 事实上对 3 说来，把整数分为三类，即

$$3K;\ 3K+1;\ 3K+2,\ (K=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

其中 $3K+1$，$3K+2$ 为不能被 3 的整除类，且

$$(3K+1)^2=9K^2+6K+1=3(3K^2+2K)+1$$

$$(3K+2)^2=(3K+3-1)^2=3[3(K+1)^2-2(K+1)]+1$$

仍是不能为 3 所整除类. 于是该命题得证.

另一方面，关于上一性质，已知一整数平方为 3 所整除，则由后一命题得知，该数的平方，也不能为 3 所整除. 于是

发生矛盾，该性质得证.

证明 设既约分数平方等于3，即

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2=3,\ n^2=3m^2 \tag{*}$$

可见，依分析中的前一性质，n 必被3整除，即 $n=3p$，以此代入(*)式得

$$(3p)^2=3m^2,$$

即 $$m^2=3p^2.$$

可见，m 又被3所整除. 于是 n 与 m 有公约数3，这与所设既约分数矛盾. 由此 $\sqrt{3}\neq\frac{n}{m}$，即$\sqrt{3}$是非有理数.

而 $\sqrt{3}$ 在数轴上有确定的位置，故 $\sqrt{3}$ 为非有理点所对应的数，即无理数.

注 上述论证，虽较冗长，但，是严格的.

通常论证 $\sqrt{2}$ 为无理数，皆取同一手法. 读者不妨就此试证 $\sqrt{5}$ 为无理数.

例 4 在 $S=\frac{ax+b}{cx+d}$中，a、b、c、d 是有理数，且 $c\neq0$，x 是无理数，试证：

① 若 $bc=ad$，则 S 为有理数；

② 若 $bc\neq ad$，则 S 为无理数.

证明 ① 因 $c\neq0$ 及 $bc=ad$，故有

$$S=\frac{c(ax+b)}{c(cx+d)}=\frac{a(cx+d)}{c(cx+d)}=\frac{a}{c}$$

由于 a、c 是有理数，故 $S=\frac{a}{c}$是有理数.

② 因 $c\neq0$ 及 $bc\neq ad$ 即 $bc-ad\neq0$.

$$S=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$$

其中$\frac{a}{c}$是有理数，但$\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$是无理数，而有理数与无理数之和是无理数.

例 5 设 x、y 为有理数，且 $(x-y\sqrt{2})^2=9-4\sqrt{2}$，求 x、y 的值.

解一 由$(x-y\sqrt{2})^2=9-4\sqrt{2}$得

$$x^2+2y^2-2xy\sqrt{2}=9-4\sqrt{2},$$

而 x、y 是有理数，比较等式两边得

$$\begin{cases}x^2+2y^2=9 & (1)\\ 2xy=4 & (2)\end{cases}$$

解这个方程组得

$$\begin{cases}x_1=1\\ y_1=2\end{cases} \quad 或\begin{cases}x_2=-1\\ y_2=-2.\end{cases}$$

解二 由$(x-y\sqrt{2})^2=9-4\sqrt{2}$得

$$(x-y\sqrt{2})=\pm\sqrt{9-4\sqrt{2}}$$

即 $$x-y\sqrt{2}=\pm(2\sqrt{2}-1)$$

而 x、y 为有理数，比较等式两边，得

$$\begin{cases}x_1=1\\ y_1=2\end{cases} \quad 或\begin{cases}x_2=-1\\ y_2=-2.\end{cases}$$

例 6 设 a 是任意实数，化简：

$$\sqrt{a^2}+\sqrt{(1-a)^2}.$$

解 由于

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & （当 a\geqslant 0 时）\\ -a & （当 a<0 时），\end{cases}$$

$$\sqrt{(1-a)^2}=|1-a|=\begin{cases}1-a & (当\ a\leqslant 1\ 时)\\ a-1 & (当\ a>1\ 时).\end{cases}$$

故

$$\sqrt{a^2}+\sqrt{(1-a)^2}=|a|+|1-a|$$
$$=\begin{cases}2a-1 & (当\ a\geqslant 1)\\ 1 & (当\ 0\leqslant a<1)\\ 1+2a & (当\ a<0).\end{cases}$$

注 如果认为 $\sqrt{(a-b)^2}=a-b$ 则是错误的，请读者特别注意.

§2. 复　　数

当 a，b，c 都是实数，解 $az^2+bz+c=0$ 形式的二次方程时，则它的根将是 $x+y\sqrt{-1}$ 形式的数，其中 x 与 y 都是实数，这样的数称为复数．当 $y=0$ 时复数退化为实数，因此实数是复数的特例．当 $x=0$，$y\neq 0$ 时它就成为纯虚数．通常称 x 为实部，y 为虚部．记 $\sqrt{-1}=i$，则 $x+yi$ 称为复数的代数表示．此外也有用坐标形式 (x, y) 表示复数的．后者如同实数和数轴的关系一样，这里发展成复数与数平面相对应．

当且仅当 $x=y=0$ 时，称此复数为零，并记作 0 或 $(0, 0)$．关于这一点，初学者应认真识别．正如数轴上的原点与数平面的原点是有区别的．

若 $x_m+y_mi=x_n+y_ni$ 或 $(x_m, y_m)=(x_n, y_n)$，则它们的实部与虚部分别相等．即

$$x_m=x_n,\quad y_m=y_n.$$

复数相等与复数为零的概念，在计算与解题时是经常要遇到的.

关于复数在各种表示形式之下的加、减、乘、除、乘方、开方、棣莫佛公式及互换关系有如下表．并且不难验明复数的加法与乘法运算，有如实数一样遵循算术的五个法则．即符合加法交换律、结合律，乘法交换律、结合律，及乘法对加法的分配律．（见下表）

除除数不能为零复数外，复数之间进行有限次四则的结果仍是复数．因此复数四则的结果是自封的．

尽管实数可比较大小，但复数一般是不可比较大小的．

本节将仅就复数的基本运算举例．这里复数为零与相等的概念是经常发挥作用的．

例 1 当 x、y 为什么实数值时，下列等式成立？

$$\frac{x+1+(y-3)i}{5+3i}=1+i.$$

解 消去分母．我们得到

$$x+1+(y-3)i=2+8i.$$

依两个复数相等的定义有：

$$\begin{cases} x+1=2, \\ y-3=8. \end{cases}$$

$\therefore\quad x=1,\ y=11.$

例 2 从下列关系求 x，y 的实数值．

$$(x+y)^2 i-\frac{6}{i}-x=-y+5i(x+y)-1.$$

解 两边乘以 $-i$，我们得到

$$[(x+y)^2+6]+xi=5(x+y)+(y+1)i,$$

根据复数相等的定义，得

$$\begin{cases} (x+y)^2+6=5(x+y), \\ x=y+1. \end{cases}$$

复数及其运算表

	直角坐标：坐标表示	直角坐标：代数式	极坐标：三角式	极坐标：指数式
复数 z_1	(x_1, y_1)	x_1+y_1i	$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$	$r_1e^{i\theta_1}$
复数 z_2	(x_2, y_2)	x_2+y_2i	$r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$	$r_2e^{i\theta_2}$
和：z_1+z_2	$(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$	$x_1+x_2+i(y_1+y_2)$		
差：z_1-z_2	$(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$	$x_1-x_2+i(y_1-y_2)$		
积：$z_1\cdot z_2$	$(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$	$x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)$	$r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$	$r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
商：$\frac{z_1}{z_2}$	$\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\ \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$	$\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$	$\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$	$\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
乘方：z_1^n			$r_1^n(\cos n\theta_1+i\sin n\theta_1)$	$r_2^ne^{in\theta_1}$
开方：$\sqrt[n]{z_1}$			$\sqrt[n]{r_1}\left(\cos\frac{\theta_1+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta_1+2k\pi}{n}\right)$ $K=0,1,2,\cdots,(n-1)$.	$\sqrt[n]{r_1}e^{i\frac{\theta_1+2k\pi}{n}}$ $K=0,1,2,\cdots,n-1$.
互换关系	$x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$	$r=\sqrt{x^2+y^2}$ $\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$	$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$	$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.
棣莫佛公式	当 $r=1$ 时，依乘方运算得		$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$	

即
$$\begin{cases}(x+y)^2-5(x+y)+6=0,\\ x-y=1.\end{cases}$$

把第一个方程看为$(x+y)$的二次方程，我们得到

$$x+y=\frac{5\pm1}{2}=3 \text{ 或 } 2.$$

解方程组：

$$\begin{cases}x-y=1,\\ x+y=3,\end{cases}\qquad \begin{cases}x-y=1,\\ x+y=2\end{cases}$$

得
$$x_1=2,\ y_1=1;\quad x_2=\frac{3}{2},\ y_2=\frac{1}{2}.$$

例 3 求下列方程组的实数解：

$$\begin{cases}x-i=yi,\\ x-i^2=2a-y.\end{cases}$$

这里 a 是复数参数.

解 原方程组可以变形为

$$\begin{cases}x-yi=i\\ x+y=2a-1.\end{cases}$$

解 x、y 后得出：

$$x=\frac{2ai}{1+i}=a(1+i),$$

$$y=\frac{(2a-1)-i}{1+i}=a(1-i)-1.$$

设 $a=m+ni$，则

$$x=(m+ni)(1+i)=(m-n)+i(m+n),$$

$$y=m+ni-1-(m+ni)i=(m+n-1)+i(n-m).$$

为使 x 和 y 为实数，必须使它们的虚数部分为零，即

$$m+n=0 \text{ 和 } n-m=0.$$

$\therefore\quad m=n=0,$

亦即 $\quad a=m+ni=0.$

$\therefore\quad x=0,\ y=-1.$

例 4 求复数的模：

① $Z_1=\dfrac{(1+i)^{200}(6+2i)-(1-i)^{198}(3+i)}{(1+i)^{196}(23-7i)+(1-i)^{194}(10+2i)}$;

② $Z_2=\dfrac{x^2-y^2+2xyi}{xy\sqrt{2}+\sqrt{x^4+y^4}i}$.

解 由于$(1+i)^2=2i$, $(1-i)^2=-2i$,

所以

$$(1+i)^{200}=(2i)^{100}=2^{100}.$$

$$(1-i)^{198}=(-2i)^{99}=2^{99}i,$$

$$(1+i)^{196}=(2i)^{98}=-2^{98},$$

$$(1-i)^{194}=(-2i)^{97}=-2^{97}i.$$

从而 $\quad Z_1=\dfrac{11+i}{-11+i}.$

又由于 $|11+i|=|-11+i|$,

所以 $\quad |Z_1|=1.$

② 分子的模等于

$$\sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy)^2}=\sqrt{(x^2+y^2)^2}=x^2+y^2,$$

分母的模等于

$$\sqrt{(xy\sqrt{2})^2+(\sqrt{x^4+y^4})^2}=\sqrt{(x^2+y^2)^2}=x^2+y^2,$$

因为商的模等于模的商，则

$$|Z_2|=\left|\frac{x^2-y^2+2xyi}{xy\sqrt{2}+\sqrt{x^4+y^4}i}\right|=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1.$$

例 5 设$f(Z)=\dfrac{Z^2-Z+1}{Z^2+Z+1}$，证明$f(1+2i)$和$f(1-2i)$是互为共轭的.

证明

$$Z_1^2=(1+2i)^2=-3+4i,$$

$$Z_2^2=(1-2i)^2=-3-4i,$$

故 $$f(1+2i)=\frac{(1+2i)^2-(1+2i)+1}{(1+2i)^2+(1+2i)+1}$$

$$=\frac{-3+2i}{-1+6i}=\frac{15}{37}+\frac{16}{37}i.$$

$$f(1-2i)=\frac{(1-2i)^2-(1-2i)+1}{(1-2i)^2+(1-2i)+1}$$

$$=\frac{-3-2i}{-1-6i}=\frac{15}{37}-\frac{16}{37}i.$$

∴ $f(1+2i)$ 与 $f(1-2i)$ 互为共轭复数.

例 6 证明：如果 $\sqrt{a+bi}+\sqrt{c+di}=\sqrt{x+yi}$，则

$$(x-a-c)^2+(y-b-d)^2=4\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}.$$

证明 由 $\sqrt{a+bi}+\sqrt{c+di}=\sqrt{x+yi}$ 两边平方，得

$$a+bi+c+di+2\sqrt{a+bi}\sqrt{c+di}=x+yi,$$

整理得 $$(x-a-c)+(y-b-d)i=2\sqrt{a+bi}\sqrt{c+di}.$$

等式两边各表示一个复数，故它们的模也相等. 而 $|\sqrt{a+bi}|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|\sqrt{c+di}|=\sqrt{c^2+d^2}$，

故 $$(x-a-c)^2+(y-b-d)^2=4\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}.$$

证毕.

例 7 把下列复数化成复数三角函数式：

$$Z=1+\cos\theta+i\sin\theta.\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

分析 从表面看，似乎这已是复数的三角表示式，实际上并不是，因为复数的模 r 是多少这里并不知道. 另外式中的 θ 是否就是该复数三角式的幅角也得计算. 转化时一般仍

将 $a+bi$ 化成 $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

解一 由于 $a=1+\cos\theta$，$b=\sin\theta$，

$$\therefore\quad r=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}$$

$$=\sqrt{2+2\cos\theta}=\sqrt{\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}$$

这里已知 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，是以保证 $r\geqslant 0$.

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

$$\therefore\quad \varphi=\frac{\theta}{2}.\quad (\text{因 } \sin\varphi>0,\ \cos\varphi>0)$$

$$\therefore\quad Z=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

解二 应用半角公式，得

$$1+\cos\theta+i\sin\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

例 8 设 $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$，求证：

$$x^m+\frac{1}{x^m}=2\cos m\theta.$$

证明 由 $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$ 得

$$x^2-2x\cos\theta+1=0,$$

$$\therefore\quad x=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta\pm i\sin\theta.$$

而 $$\frac{1}{x}=\cos\theta\mp i\sin\theta,$$

$$\therefore \quad x^m+\frac{1}{x^m}=(\cos\theta\pm i\sin\theta)^m+(\cos\theta\mp i\sin\theta)^m$$

$$=(\cos m\theta\pm i\sin m\theta)+(\cos m\theta\mp i\sin m\theta)$$

$$=2\cos m\theta.$$

例 9 如果在第一象限内，一个正三角形的两个顶点是 $Z_1=1$，$Z_2=2+i$，求表示第三个顶点的复数.

解 如图 $Z_1B=BZ_2=1$，

$\angle B=90°$，$\angle BZ_1Z_2=45°$，

于是 $Z_1Z_2=\sqrt{2}$，

且 $\angle OZ_1Z_3=75°$，

$$\therefore \quad OC=OZ_1-CZ_1$$

$$=1-\sqrt{2}\cos 75°$$

$$=1-\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$$=\frac{1}{2}(3-\sqrt{3}).$$

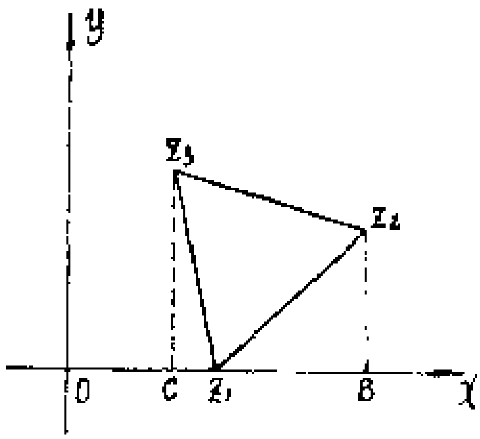


图 1—6

且 $$CZ_3=\sqrt{2}\sin 75°=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1).$$

$$\therefore \quad Z_3=\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})i.$$

例 10 解方程 $x^4+1=0$，并且证明，平面内表示此方程的根的四个点是一个正方形的顶点.

解 由方程 $x^4+1=0$，得

$$x^4=-1=\cos\pi+i\sin\pi$$

$$\therefore \; x=\cos\frac{2k\pi+\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi+\pi}{4}.$$

$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

即有 $$x_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$x_2=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$x_3=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),$$

$$x_4=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

因上述四个根所表示的四个复数，x_4 是 x_1 的共轭复数，且在复平面上表示的两个点是以 x 轴为对称的，而 x_3 是 x_1 的相反复数，它们是关于原点为对称的．同理，x_3 是 x_2 的共轭复数，而 x_4 是 x_2 的相反复数，它们分别关于 x 轴和原点为对称．即以 x_1，x_2，x_3，x_4 所表示的四个点 A、B、C、D 为顶点所组成的四边形是正方形．如图 1—7.

例 11 证明等式 $|Z_1+Z_2|^2+|Z_1-Z_2|^2=2(|Z_1|^2+|Z_2|^2)$，并说明它的几何意义.

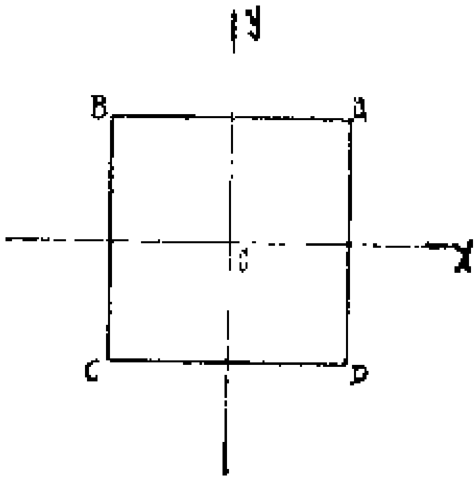


图 1—7

证一 设 $Z_1=a+bi$，

$Z_2=c+di$.

$$\because\ |Z_1+Z_2|^2+|Z_1-Z_2|^2$$
$$=|(a+c)+(b+d)i|^2+|(a-c)+(b-d)i|^2$$
$$=(a+c)^2+(b+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2$$
$$=2(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

又　$2(|Z_1|^2+|Z_2|^2)$

$$=2(|a+bi|^2+|c+di|^2)$$

$$=2(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

$\therefore\quad |Z_1+Z_2|^2+|Z_1-Z_2|^2=2(|Z_1|^2+|Z_2|^2).$

证二　设复数 Z 的共轭复数为 $\overline{Z}$，我们不难证明如下公式成立：$Z\cdot\overline{Z}=|Z|^2$.

利用这一公式可得

$$|Z_1+Z_2|^2=(Z_1+Z_2)(\overline{Z_1}+\overline{Z_2})$$

$$=Z_1\overline{Z_1}+Z_2\overline{Z_2}+Z_1\overline{Z_2}+Z_2\overline{Z_1}$$

$$=|Z_1|^2+|Z_2|^2+(Z_1\overline{Z_2}+Z_2\overline{Z_1}),$$

$$|Z_1-Z_2|^2=(Z_1-Z_2)(\overline{Z_1}-\overline{Z_2})$$

$$=|Z_1|^2+|Z_2|^2-(Z_1\overline{Z_2}+Z_2\overline{Z_1}),$$

将上述两式相加就得到

$$|Z_1+Z_2|^2+|Z_1-Z_2|^2=2(|Z_1|^2+|Z_2|^2).$$

如下图所示，等式几何意义说明如下定理：平行四边形两条对角线的平方和等于四条边的平方和.

例 12　设 $\sqrt{17}=|Z-2|$，$4=|Z-3|$，求复数 Z.

解　使 $Z=a+bi$，则

$$\sqrt{17}=|(a-2)+bi|,$$

$$4=|(a-3)+bi|.$$

于是得

$$\begin{cases}a^2-4a+4+b^2=17,\\ a^2-6a+9+b^2=16.\end{cases}$$

解方程组，得

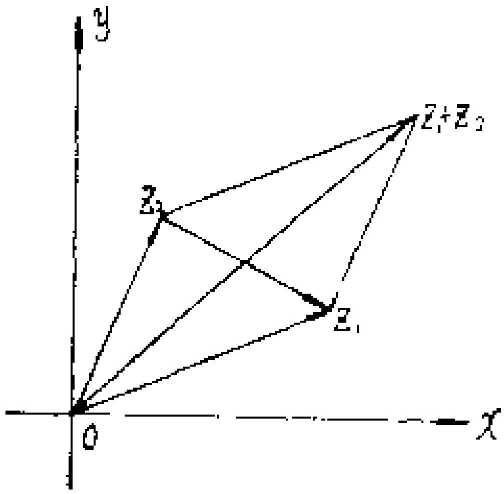


图 1—8

$$\begin{cases}a_1=3,\\ b_1=4.\end{cases}\qquad \begin{cases}a_2=3,\\ b_2=-4.\end{cases}$$

$\therefore\quad Z=3+4i$ 或 $3-4i$.

例 13　设 n 是自然数，求证：

① $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$，当 n 是偶数时等于 ±2 或 0，当 n 是奇数时等于 $\pm\sqrt{2}$.

② $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n$，当 n 是 3 的倍数时等于 2，当 n 不是 3 的倍数时等于 -1.

证明

① 当 n 是偶数时，可表为 $n=2k$，

令　$f(k)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2k}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2k}=i^k+(-i)^k$,

若　$k=4p+1$，则 $f(k)=i-i=0$；

$k=4p+2$，则 $f(k)=-1-1=-2$；

$k=4p+3$，则 $f(k)=-i+i=0$；

$k=4p$，　则 $f(k)=1+1=2$.

当 n 是奇数时，可表为 $n=2k+1$，

令　$\varphi(k)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2k+1}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2k+1}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}i^k[(1+i)+(-1)^k(1-i)],$$

若　$k=4p+1$，则 $\varphi(k)=-\sqrt{2}$；

$k=4p+2$，则 $\varphi(k)=-\sqrt{2}$；

$k=4p+3$，则 $\varphi(k)=\sqrt{2}$；

$k=4p$，　则 $\varphi(k)=\sqrt{2}$.

② 当 $n=3k$ 时， 令 $\omega_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，

$\omega_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，

原式 $=\omega_1^{3k}+\omega_2^{3k}=(\omega_1^3)^k+(\omega_2^3)^k=2$.

当 n 不是 3 的倍数时，用穷举法.

若 $n=3k+1$,

原式 $=\omega_1^{3k+1}+\omega_2^{3k+1}=\omega_1+\omega_2=-1$.

若 $n=3k+2$,

原式 $=\omega_1^{3k+2}+\omega_2^{3k+2}=\omega_1^2+\omega_2^2=-1$. 证毕.

例 14 证明恒等式：

$$1+2i+3i^2+\cdots\cdots+(4n+1)i^{4n}=(2n+1)-2ni.$$

证明 用 S 表示左边的部分，即

$$S=1+2i+3i^2+\cdots\cdots+4ni^{4n-1}+(4n+1)i^{4n},$$

再把两边乘以 i：

$$S\cdot i=i+2i^2+3i^3+\cdots\cdots+4ni^{4n}+(4n+1)i^{4n+1}.$$

上面两式两边分别相减：

$$S-S\cdot i=1+i+i^2+\cdots\cdots+i^{4n}-(4n+1)i^{4n+1}.$$

因为 $i+i^2+\cdots\cdots+i^{4n}=0$,

且 $i^{4n+1}=i$,

$\therefore$ $S-S\cdot i=1-(4n+1)i$,

即 $(1-i)S=1-(4n+1)i$,

由此得 $S=\dfrac{1-(4n+1)i}{1-i}=(2n+1)-2ni.$

习 题 一

1. 两个无理数的商能不能成为整数？

2．任意正整数能不能表示成为两个无理数的乘积？指出乘积等于一个给定整数的这样的两无理数的方法．

3．任意负数能不能表示成为两个无理数的乘积？指出求这样的二无理数的方法．

4．$2\div\sqrt{3}$是否属于实数集合的数？$2\sqrt{3}$是否为偶数？

5．要使得两个共轭实数 $a\pm b\sqrt{K}$ 彼此互成倒数，其中，a，b，k 三数之间应该有怎样的关系？

6．在实数范围内化简：$\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{(1-3a)^2}$．

7．在实数范围内，下列各式中 a 是什么数值时才有意义？

① $\sqrt{1-a}+\sqrt{3a-1}$；

② $\sqrt{2a+1}+\sqrt[3]{1-2a}$；

③ $\sqrt{\dfrac{4a-1}{2-3a}}$．

8．比较$\sqrt{2-a}$和 $\sqrt[3]{a-4}$的大小．

9．证明等式：

① $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}=\sqrt{9+4\sqrt{5}}$；

② $\sqrt{\dfrac{10^{2n}-1}{9}-2\left(\dfrac{10^n-1}{9}\right)}=\dfrac{10^n-1}{3}$．

10．求证下列诸数都是无理数：

① $\log_2 3$；② $\lg\frac{6}{7}$；③ $\sqrt{2}+1$．

11．试证明：如果 $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ 中的 a，b，c 是有理数，那么 $a=b=c=0$．

12．求$\sqrt{\sqrt{\sqrt{-1}}}$的值．

13．由方程$(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$，求出 x、y 来．已知它们都是实数值．

14．设 x，y 为实数，解方程：

$$\frac{6x-iy}{5+2i}=\frac{15}{8x+3iy}.$$

15．x、y、Z、t 都是实数，解方程组

$$\begin{cases}(1+i)x+(1+2i)y+(1+3i)Z+(1+4i)t=1+5i,\\(3-i)x+(4-2i)y+(1+i)Z+4it=2-i.\end{cases}$$

16．证明

$$\left(yi+\frac{1}{xi}\right)^2-\left(xi+\frac{1}{yi}\right)^2=(x^2-y^2)\left(\frac{1}{xy}-1\right)^2.$$

17．计算：

① $A=\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-6}}$；

② $A=\dfrac{(1-i)^{2n}}{(1+i)^{2m}}$．

其中 m 和 n 是正整数．

18．解方程组 $\begin{cases}(2+3i)x+(3-2i)y=1+8i\\(3-2i)x-(3i+6)y=8-5i.\end{cases}$

19．解方程组 $\begin{cases}(3+i)x+(3-i)y=16\\(3+2i)x+(3-2i)y=14.\end{cases}$

20．求出适合于等式 $Z^2=\overline{Z}$ 的复数．

21．求复数 $\dfrac{n+i\sqrt{an}}{\sqrt{an}-ai}$ 的模．

把下列复数化成三角形式：

22．$1-\cos\alpha+i\sin\alpha$，$\left(0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$．

23．$1+i\operatorname{tg}\alpha$，$0\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}$．

24．$\dfrac{1-i\operatorname{tg}\alpha}{1+i\operatorname{tg}\alpha}$，$0\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}$．

25. 计算：

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\varepsilon+\varepsilon^2\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\varepsilon-\varepsilon^2\right).$$

其中，$\varepsilon=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$.

26. 计算 $\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}$，其中 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$，而 n 不能被 3 整除.

27. 写出点 $Z=x+iy$ 在半径等于 R、圆心为点 $m=a+bi$ 的圆内的条件.

28. 求出端点为 $Z_1=1$，$Z_2=i$ 的线段的中点.

29. 两个相似三角形分别位于虚轴的两旁，它们的一个公共顶点是坐标原点. 其中一个三角形的另外二顶点为 $Z_2=3+4i$ 和 $Z_3=8-6i$. 假使另一三角形的第二个顶点为 $Z_2'=-5-12i$，求它的第三个顶点.

30. 求出适合于方程 $Z=\frac{1+it}{1-it}$ 的点的轨迹，其中 t 是实数.

31. 证明：

$$(1-i\sqrt{3})(1-i)(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}+\varphi\right)\right]+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}+\varphi\right)\Big].$$

32. 证明：

$$(1+i)^n=2^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right].$$

其中 n 是整数.

33. 证明：

$$(i\sqrt{3}+1)^n=2^n\left(\cos\frac{11n\pi}{6}+i\sin\frac{11n\pi}{6}\right).$$

其中 n 是整数.

34. 计算 $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$. 提示: 化成半角来做.

35. 根据牛顿二项式公式展开 $\left(1+\frac{i\sqrt{3}}{3}\right)^n$, 来计算 $c_n^1-\frac{1}{3}c_n^3+\frac{1}{9}c_n^5-\frac{1}{27}c_n^7+\cdots$ 之和.

36. 计算下面的和:

① $\sin\varphi+a\sin(\varphi+h)+a^2\sin(\varphi+2h)+\cdots+a^k\sin(\varphi+kh)$.

② $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$.

37. 证明:

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

38. 把复数开平方: $3n-ni\sqrt{7}$.

39. 把复数开平方: $(2x-1)+2x(x-1)i$.

40. 证明:

$$[(2a-b-c)+i(b-c)\sqrt{3}]^3=[(2b-c-a)+i(c-a)\sqrt{3}]^3.$$

41. 证明

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{(1-x^2+xi\sqrt{3})(1-x^2-xi\sqrt{3})}{1-x^6}.$$

42. 计算 $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\cdots+\varepsilon^{n-1}$ 之和, 其中 $\varepsilon^n=1$.

43. 计算 $1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+4\varepsilon^3+\cdots+n\varepsilon^{n-1}$, 其中 $\varepsilon^n=1$.

44. 证明 1 的 a 次方根乘以 1 的 b 次方根的乘积等于 1 的 ab 次方根.

45．若$(1-i)^n=(1+i)^n$，求n.

46．如果$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，求证：

① $(1-\alpha+\alpha^2)(1+\alpha-\alpha^2)=4$.

② $(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5)=9$。

47．用复数开方，试解方程$x^6+1=0$。

第二章　代数式的恒等变换

§1. 整式运算与多项式恒等变换

使用文字代表数的结果，从“数”发展到“式”．常见的代数式有整式、一般分式、无理式等等．

两个代数式，将其中的字母换成允许值范围内的任意值时，若它们的值都相等，则此两代数式恒等．

把一个代数式换成另一个和它恒等的代数式，称为代数式的恒等变换(或恒等变形)．整式、分式、无理式的运算，因式分解等等都是恒等变换．

整式运算是基于：

1) 整式加减：主要是指去括号和合并同类项．减则变号相加．

2) 整式乘法：主要是依据同底数的幂相乘、幂的乘方、积的乘方法则．即

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

进而规定单项式乘单项式，它是将同底数的幂相乘，其中只在一个单项式里含有的字母，连同它的指数一起写在积里，并以它们的系数相乘作为积的系数．

3) 整式除法：主要是依据同底数的幂相除法则．即

$$a^m \div a^n = a^{m-n}, \quad (a \neq 0)$$

进而规定单项式除单项式，它是将同底数的幂相除，其中只在一个单项式里含有的字母，则视另一单项式也含有同字母的零次幂处理，并以它们的系数相除作为商的系数。

由于整式运算也符合算术的交换、结合、分配等五个法则，因此单项式乘多项式可看作在单项式乘单项式的基础上，遵循乘法对加法的分配律的结果．而多项式乘多项式则是反复遵循乘法对加法的分配律的结果．

运算时，除用横式外也常用竖式．特别是多项式除多项式，一般都用竖式．

熟练掌握整式的横式、竖式四则运算是学好代数最起码的要求，在此基础上本节着重阐明分离系数法与综合除法．

分离系数法体现了整式运算的关键所在，且又是综合除法的理论基础．用分离系数法从事整式运算，习惯上常按降幂排列，特别是多项式除多项式更需按降幂排列．此外应注意填补空项．

若两个多项式的所有的同类项的系数完全相等，则称此两多项式恒等．

数学上凡充分必要性都可作定义使用．反过来凡定义都具有充分必要性．因此上述又可说成：

两多项式恒等的充分必要条件是所有的同类项的系数完全相等．

本节将依此用待定系数法求多项式的恒等变换．

例 1　计算：$(x^3-6+4x^2)(5-x+3x^2)$．

解　一般竖式：

$$
\begin{array}{r}
x^3+4x^2+0x-6 \\
\times)\quad 3x^2-x\quad+5 \\
\hline
3x^5+12x^4+0x^3-18x^2 \qquad\qquad\qquad \\
-\quad x^4-4x^3-0x^2+6x \qquad \\
5x^3+20x^2+0x-30 \\
\hline
3x^5+11x^4+x^3+2x^2+6x-30
\end{array}
$$

分离系数法：

$$
\begin{array}{r}
1+4+0-6 \qquad\quad \\
\times)\ 3-1+5 \qquad\qquad \\
\hline
3+12+0-18 \qquad\qquad \\
-1-4-0+6 \qquad \\
5+20+0-30 \\
\hline
3+11+1+20+6-30
\end{array}
$$

由于积的最高项应当是 5 次，因此

$$(x^3-6+4x^2)(5-x+3x^2)=3x^5+11x^4+x^3$$
$$+20x^2+6x-30.$$

例 2 计算：$(2x^2+3xy+2y^2)(2x^2-3xy+2y^2)^2$.

二元齐次多项式同样可用分离系数法求解：

$$
\begin{array}{r}
2+3+2 \qquad\quad \\
\times)\ 2-3+2 \qquad\quad \\
\hline
4+6+4 \qquad\quad \\
-6-9-6 \qquad \\
4+6+4 \\
\hline
4+0-1+0+4
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
4+0-1+0+4 \qquad\quad \\
\times)\ 2-3+2 \qquad\qquad\qquad\quad \\
\hline
8+0-2+0+8 \qquad\quad \\
-12+0+3+0-12 \qquad \\
8+0-2+0+8 \\
\hline
8-12+6+3+6-12+8
\end{array}
$$

由于积的最高次数应是 $2+2+2=6$ 次，且对 x 降幂，对 y 升幂，因此

$$(2x^2+3xy+2y^2)(2x^2-3xy+2y^2)^2$$

$= 8x^6 - 12x^5y + 6x^4y^2 + 3x^3y^3 + 6x^2y^4 - 12xy^5 + 8y^6.$

注 若本题改为 $(2x^2+3x+2y^2)(2x^2-3x+2y^2)$ 想一想还能直接用分离系数法求吗？

例 3 计算：$(x^6-y^9)\div(x^2-y^3)$.

解 令 $x^2=X$，$y^3=Y$ 则本题转化为

$$(X^3-Y^3)\div(X-Y)$$

显然由公式法解可得

$$(x^6-y^9)\div(x^2-y^3)=x^4+x^2y^3+y^6. \qquad (*)$$

一般竖式法：

$$
\begin{array}{r|l}
 & X^2 + XY + Y^2 \\
\cline{2-2}
X-Y & X^3 + 0X^2Y + 0XY^2 - Y^3 \\
 & -X^3 + X^2Y \\
\cline{2-2}
 & \qquad X^2Y + 0XY^2 \\
 & \qquad -X^2Y + XY^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad XY^2 - Y^3 \\
 & \qquad\qquad -XY^2 + Y^3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

分离系数法：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 + 1 + 1 \\
\cline{2-2}
1-1 & 1 + 0 + 0 - 1 \\
 & -1 + 1 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 1 + 0 \\
 & \qquad -1 + 1 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 1 - 1 \\
 & \qquad\qquad -1 + 1 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

由于商应是二元二次齐次，故

$$(X^3-Y^3)\div(X-Y)=X^2+XY+Y^2,$$

还原即得(*)式.

综合除法：

$$\begin{array}{cccccccc|c} 1 & + & 0 & + & 0 & - & 1 & & 1 \\ & + & 1 & + & 1 & + & 1 & & \\ \hline 1 & + & 1 & + & 1 & + & 0 & & \end{array}$$

由于商应是二元二次齐次，故

$$(X^3-Y^3)\div(X-Y)=X^2+XY+Y^2$$

还原即得(*)式.

注 ① 整式运算中，分离系数法实质上只是一种不写出文字的竖式运算法. 在进行除法运算时，减法都转化为变号相加.

注 ② 综合除法实质上是分离系数法通过变形发展的结果. 这里的变形主要是暂弃必然部分同时保留关键所在.

综合除法的特征：除式必须是一次式或是可化一次式. 且除式的一次项的系数应为 1 .

综合除法的格式、步骤：

$$\begin{array}{rccccccc|l} \text{被除式}\rightarrow 1 & + & 0 & + & 0 & - & 1 & & 1 \leftarrow \text{除式的特征数} \\ & + & 1 & + & 1 & + & 1 & & \\ \hline 1 & + & 1 & + & 1 & + & 0 & & \\ & & & & & & \uparrow & & \end{array}$$

商(Q)　　余数(R)

除式的特征数——由除式的常数项变号而定出.

商——商的首项即被除式的首项. 然后以商的首项乘除式的特征数的积加于被除式的第二项，则得商的第二项. 再

以商的第二项乘除式的特征数的积加于被除式的第三项，则得商的第三项．如此类推直算出余数为止，则余数前相应为商式．

注 ③ 当除式的一次项的系数不是 1 时，将由下例阐述．

例 4 用综合除法求 $(4x^4+6x^3-8x^2+3x)\div(2x+5)$ 的商式 Q 和余式 R.

解

$$\begin{array}{r|l}
4+6-8+3+0 & -\dfrac{5}{2} \\
-10+10-5+5 & \\
\hline
2\,|\,4-4+2-2+5 & \\
\hline
2-2+1-1 &
\end{array}$$

$\therefore\quad Q=2x^3-2x^2+x-1,\qquad R=5.$

注 一般地，在多项式除法中，如果把除式缩小 K 倍，那么所得的商就扩大 K 倍，但是余式不变．因此，上例我们先用 $\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$ 去除被除式，得到的是商的 2 倍 $(2Q)$ 和余式 R，再用 2 去除 $2Q$ 得到商 Q.

例 5 用综合除法求 $(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)$ 的商式 Q 和余式 R.

解 把被除式和除式看作是 a 的多项式，把 b、c 看作是常数．

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)$$
$$=[a^3-3bc\cdot a+(b^3+c^3)]\div[a+(b+c)].$$

$$\begin{array}{llll|l}
1+ & 0 & -\;3bc & +(b^3-c^3) & -(b+c) \\
 & -(b+c)+ & (b+c)^2 & -(b^3+c^3) & \\
\hline
1- & (b+c)+ & (b^2-bc+c^2)+ & 0 &
\end{array}$$

$$\therefore\quad Q=a^2-(b+c)a+(b^2-bc+c^2)$$
$$=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc,$$
$$R=0.$$

例 6 计算 $(6a^4+5a^3b+a^2b^2+2ab^3+b^4)\div(3a+b)$ 的商式 Q 和余式 R.

解

$$\begin{array}{r|l}
6+5+1+2+1 & -\dfrac{1}{3} \\
-2-1+0-\dfrac{2}{3} & \\
\hline
3\,\big|\,6+3+0+2+\dfrac{1}{3} & \\
\hline
2+1+0+\dfrac{2}{3} &
\end{array}$$

$$\therefore\quad Q=2a^3+a^2b+\frac{2}{3}b^3,\qquad R=\frac{1}{3}b^4.$$

例 7 $(2x^4-7x^3+16x^2-15x+15)\div(x^2-2x+3)$.

解

$$\begin{array}{r|l}
2-7+16-15+15 & 1-2+3 \\
2-4+\ \ 6\qquad\qquad & 2-3+4 \\
\hline
-3+10-15\quad & \\
-3+\ \ 6-\ \ 9\quad & \\
\hline
4-\ 6+15 & \\
4-\ 8+12 & \\
\hline
2+\ \ 3 &
\end{array}$$

$$\therefore\quad Q=2x^2-3x+4,\qquad R=2x+3.$$

注 上例做综合除法，若改变除式的第二、第三项的符号，使减法都变成加法；中间结果，可以不写；为了节省竖式所占的地位，每次除得的商同除式后两项相乘所得的积，

可以不写在同一排，这样，竖式就可以简写成下面的样子：

$$
\begin{array}{r|l}
2-7+16-15+15 & 2-3 \\
4-\ 6+\ 9-12 & \\
-\ 6+\ 8 \quad & \\
\hline
2-3+\ 4+\ 2+\ 3 &
\end{array}
$$

$\therefore \quad Q=2x^2-3x+4,\ R=2x+3.$

例 8 $(x^6+x^5-12x^3-7x)\div(x^3+3x^2+5x-2)$

解

$$
\begin{array}{r|l}
1+1+0-12+0-\ 7+0 & -3-5+2. \\
-3-5+\ 2-4+\ 2-6 & \\
6+10-5+15 & \\
-\ 3+9 \quad & \\
\hline
1-2+1-\ 3+0+10-6 &
\end{array}
$$

$\therefore \quad Q=x^3-2x^2+x-3,\ R=10x-6.$

例 9 用综合除法求

$(6a^5+5a^4b-8a^3b^2-6a^2b^3-6ab^4+b^5)$

$\div(2a^3+3a^2b-b^3)$ 的商式 Q 和余式 R.

解

$$
\begin{array}{r|l}
6+5-8-6-6+1 & -\dfrac{3}{2}+0+\dfrac{1}{2} \\
-9+0+3-2-1 & \\
6+0+0 \quad & \\
3 \quad\quad & \\
\hline
2\,\big|\,6-4-2+0-8+0 & \\
3-2-1 \quad\quad\quad\quad &
\end{array}
$$

$\therefore \quad Q=3a^2-2ab-b^2,\ R=-8ab^4.$

多项式的开平方的方法和数的开平方的方法相同，根据

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \tag{1}$$

$$a^2+2ab+b^2=a^2+b(2a+b)=(a+b)^2 \tag{2}$$

从(1)的等号右边到左边可以知道，$a^2+2ab+b^2$ 的平方根是 $\pm(a+b)$；从(2)的左边到右边，a 可以由观察得到，b 可以用 $2a+b$ 除 $2ab+b^2$ 得到．因此，我们可以列出下面的竖式来求 $a+b$．

$$
\begin{array}{r|l}
 & a+b \\
 & \sqrt{a^2+2ab+b^2} \\
 & a^2 \\
\hline
2a+b & 2ab+b^2 \\
 & 2ab+b^2 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

即(1)通过自乘求首项 a，

(2)以二倍首项加上拟得的次项为除数求 b．

又如

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2 \\
&= a^2+b(2a+b)+c(2a+2b+c)
\end{aligned}
$$

我们可以看出，$a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$ 的平方根是 $\pm(a+b+c)$，a 可以由观察得到，b 可以用 $2a+b$ 除 $2ab+b^2$ 得到，c 可以用 $2(a+b)+c=2a+2b+c$ 除 $2ac+2bc+c^2$ 得到．即

$$
\begin{array}{r|l}
 & a+b+c \\
 & \sqrt{a^2+2ab+2ac+2bc+b^2+c^2} \\
 & a^2 \\
\hline
2a+b & 2ab \qquad\qquad\qquad +b^2 \\
 & 2ab \qquad\qquad\qquad +b^2 \\
\hline
2(a+b)+c & 2ac+2bc \qquad +c^2 \\
 & 2ac+2bc \qquad +c^2 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

例 10　用分离系数法求 $4x^4-12x^3+25x^2-24x+16$ 的平方根．

解

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2-\ \ 3+4 \\
 & \sqrt{4-12+25-24+16} \\
 & \quad 4 \\ \hline
4-3 & -12+25 \\
 & -12+\ \ 9 \\ \hline
4-6+4 & 16-24+16 \\
 & 16-24+16 \\ \hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

∴　所求的平方根是 $\pm(2x^2-3x+4)$.

注　求多项式的平方根，是按下列步骤进行的：

1．把所给的多项式按照字母的降幂排列，由观察得到平方根(不计"±"号，以下同)的第一项．从所给多项式里面，减去平方根的第一项的平方；

2．用平方根的第一项的2倍去除第一步中所得的差，得到平方根的第二项．从第一步所得的差里面，减去平方根的第一项的2倍与第二项的和乘以第二项所得的积；

3．用平方根的第一项的2倍去除第二步中所得的差，得到平方根的第三项．从第二步所得的差里面，减去平方根的第一项的2倍、第二项的2倍与第三项的和乘以第三项所得的积．

照这样继续下去，到最后所得的差是0（如果所给的多项式是完全平方）或者所得的差的次数小于已开得的结果的次数(如果所给的多项式不是完全平方)为止．

4．在开得的结果前面添上"±"号，就是所求的平方根．

例 11　求 $9a^6-12a^5b+10a^4b^2-16a^3b^3+9a^2b^4$
$-4ab^5+4b^6$ 的平方根．

解

$$\begin{array}{rl}
 & 3-\ 2+\ 1-\ 2 \\
 & \sqrt{9-12+10-16+9-4+4} \\
 & 9 \\ \hline
6-2 & \begin{array}{|l} -12+10 \\ -12+\ 4 \end{array} \\ \hline
6-4+1 & \begin{array}{|l} 6-16+9 \\ 6-\ 4+1 \end{array} \\ \hline
6-4+2-2 & \begin{array}{|l} -12+8-4+4 \\ -12+8-4+4 \end{array} \\ \hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

∴ 所求的平方根是 $\pm(3a^3-2a^2b+ab^2-2b^3)$.

例 12 确定多项式 $\varphi(x)$ 中参数 A、B、C、D、E 的数值，要使得多项式 $\varphi(x)$ 恒等于多项式 $f(x)$：

$$f(x)=3x^4+x^3+4x^2+1,$$

$$\varphi(x)=A(x^2+1)^2+(Bx+c)x+(Dx+E)\cdot x(x^2+1).$$

解
$$\begin{aligned}\varphi(x)&=Ax^4+2Ax^2+A+Bx^2+Cx+Dx^4\\&\quad+Dx^2+Ex^3+Ex\\&=(A+D)x^4+Ex^3+(2A+B+D)x^2\\&\quad+(C+E)x+A.\end{aligned}$$

∵ $\varphi(x)\equiv f(x)$,

使同次项系数相等，我们得到方程组：

$$A+D=3,\quad E=1,$$

$$2A+B+D=4,\quad C+E=0,\quad A=1.$$

∴ $A=1$, $B=0$, $C=-1$,

$D=2$, $E=1$.

即 $$\varphi(x)=1\cdot(x^2+1)^2+(0\cdot x-1)x+(2x+1)x(x^2+1).$$

例 13 当多项式 $f(x)=x^4+Ax^3+Bx^2-8x+4$ 为多项式 $\varphi(x)=x^2+Cx+D$ 的完全平方时，求系数 A、B、C 和 D.

解 $$\varphi^2(x)=(x^2+Cx+D)^2$$
$$=x^4+2Cx^3+C^2x^2+2Dx^2+2CDx+D^2.$$

使同次项系数相等，我们得到方程组：

$$\begin{cases}A=2C\\ C^2+2D=B\\ 2CD=-8\\ D^2=4\end{cases}$$

解这个方程组，我们求出：

$$D_1=2,\ C_1=-2,\ B_1=8,\ A_1=-4;$$
$$D_2=-2,\ C_2=2,\ B_2=0,\ A_2=4.$$

所以 $$f_1(x)=x^4-4x^3+8x^2-8x+4,$$
$$\varphi_1(x)=(x^2-2x+2)^2;$$

或者 $$f_2(x)=x^4+4x^3-8x+4,$$
$$\varphi_2(x)=(x^2+2x-2)^2.$$

例 14 求在什么条件下，多项式

$$f(x)=4x^4-4Px^3+4qx^2+2P(m+1)x+(m+1)^2$$

为三项式 $\varphi(x)=2x^2+ax+b$ 的完全平方.

解 $$\varphi^2(x)=(2x^2+ax+b)^2$$
$$=4x^4+4ax^3+a^2x^2+4bx^2+2abx+b^2$$

使变数的同次项系数相等，我们得到方程组：

$$\begin{cases} -4P = 4a & (1)\\ 4q = a^2 + 4b & (2)\\ 2P(m+1) = 2ab & (3)\\ (m+1)^2 = b^2 & (4)\end{cases}$$

由(4)我们求得 $b=\pm(m+1)$，由(3)我们又得到 $a=\pm P$. 但是为了满足(1)，就需取 $a=-P$，因此，$b=-(m+1)$，把 a、b 的值代入(3)，我们得到所求的条件：

$$4q = P^2 - 4(m+1).$$

例 15 依照 $(x-4)$ 的幂展开多项式

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 3.$$

解 设
$$\begin{aligned} f(x) &= (x-4)^3 + B(x-4)^2 + C(x-4) + D \\ &= x^3 - 12x^2 + 48x - 64 + Bx^2 - 8Bx \\ &\quad + 16B + Cx - 4C + D \\ &= x^3 + (B-12)x^2 + (48 - 8B + C)x \\ &\quad + D + 16B - 4C \end{aligned}$$

那么有
$$\begin{cases} B - 12 = 5 & (1)\\ 48 - 8B + C = -7 & (2)\\ D + 16B - 4C = -3 & (3)\end{cases}$$

解之 $B=17$，$C=81$，$D=113$.

$\therefore$ $f(x) = (x-4)^3 + 17(x-4)^2 + 81(x-4) + 113.$

§2. 多项式的因式分解

设 $\phi(x)$、$\psi(x)$、$P(x)$ 各表一整式，且具有

$$\phi(x)\cdot\psi(x) = P(x),$$

则已知 $\phi(x)$ 与 $\psi(x)$ 求 $P(x)$ 属整式相乘；已知 $\phi(x)$ 与 $P(x)$ 求 $\psi(x)$（或已知 $\psi(x)$ 与 $P(x)$ 求 $\phi(x)$）属整式相除；已知 $P(x)$

要求 $\phi(x)$ 与 $\psi(x)$ 属因式分解.

一个整式 $f(x)$，除常数 C 和 $Cf(x)$ 以外，不能被其他整式所整除，则这个整式叫质因式.

若 $f(x)$ 能够被 $\phi(x)$ 整除，则 $\phi(x)$ 叫 $f(x)$ 的因式.

将一个多项式分解成质因式的乘积叫因式分解，因式分解和所讨论的数的集合有关. 例如 x^4-4 分解因式：

在有理数集内则为 $x^4-4=(x^2-2)(x^2+2)$；

在实数集内则为 $x^4-4=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+2)$；

在复数集内则为 $x^4-4=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$$(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i).$$

通常未特别声明时，分解因式都在有理数集进行.

因式分解的基本方法有：

① 提取公因式法：

$$ab+ac=a(b+c),$$

它是乘法对加法的分配律的逆变换.

② 利用公式法：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2;$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2;$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3;$$

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3.$$

它是乘法公式的逆变换.

③ 分组分解法：

它是以上述两种方法为基础，使分成的组能进一步提取

公因式或用公式法分解．分组的目的是为了达到完全分解．

④ 十字相乘法：

它是两个一次式的竖式相乘经简化了的逆运算：

$$\begin{array}{ccc} p_1 & & q_1 \\ & \times & \\ p_2 & & q_2 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{p_1q_2+p_2q_1} \end{array}$$

结合到横式

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= p_1p_2x^2+(p_1q_2+p_2q_1)x+q_1q_2 \\ &= (p_1x+q_1)(p_2x+q_2), \end{aligned}$$

显然是取当 $p_1p_2=a$，$q_1q_2=c$ 且 $p_1q_2+p_2q_1=b$ 时，则

$$ax^2+bx+c=(p_1x+q_1)(p_2x+q_2).$$

⑤ 因式定理分解法：

对于整式 $f(x)$，若 $f(a)=0$，则它必被 $(x-a)$ 所整除，因此 $(x-a)$ 是 $f(x)$ 的一个因式，于是通过除法则可获得另一因式．通常根据因式定理配合综合除法，进行分解，此法颇巧．

⑥ 待定系数法：

根据两多项式恒等的充分必要条件，同类项的系数都相等，从而寻求待定因式的系数．

此外，在例题中我们还将涉及分解过程的一些变换技巧．

例 1 分解因式 x^3+3x^2+3x-7

解一 添置辅助项以后，用提取公因式法．

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (x^3-1)+(3x^2-3)+(3x-3) \\ &= (x-1)[(x^2+x+1)+3(x+1)+3] \\ &= (x-1)(x^2+4x+7). \end{aligned}$$

解二 用公式法．

原式 $=(x^3+3x^2+3x+1)-8$

$$=(x+1)^3-2^3$$

$$=[(x+1)-2][(x+1)^2+2(x+1)+4]$$

$$=(x-1)(x^2+4x+7).$$

解三 用综合除法

令 $f(x)=x^3+3x^2+3x-7$，通过观察，各项系数总和为 0，由 $f(1)=0$，故 $x-1$ 必能整除 $f(x)$。因此可配合综合除法如下：

$$\begin{array}{r|l} 1+3+3-7 & 1 \\ 1+4+7 & \\ \hline 1+4+7 & \end{array}$$

$\therefore$ 原式 $=(x-1)(x^2+4x+7)$

$$=(x-1)(x+2-\sqrt{3}i)(x+2+\sqrt{3}i).$$

注 最后一步是在复数集合里分解的，一般至前一式为止。

例 2 分解因式：

$4(x^2+3x+1)^2-(x^2+x-4)^2-(x^2+5x+6)^2$.

解 应用公式法，再提公因式：

原式 $=[(2x^2+6x+2)-(x^2+x-4)]$

$$\cdot[(2x^2+6x+2)+(x^2+x-4)]$$

$$-(x^2+5x+6)^2$$

$$=(x^2+5x+6)(3x^2+7x-2)-(x^2+5x+6)^2$$

$$=(x^2+5x+6)(2x^2+2x-8)$$

$$=2(x+2)(x+3)(x^2+x-4).$$

例 3 在有理数集中分解

$9x^4-3x^3+7x^2-3x-2$.

解 用综合除法，注意这样一个事实，即凡整系数多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$ 能被 $bx-c$(b、c 是整数)整除的必要条件是 b 是 a_0 的约数，c 是 a_n 的约数（注意：这不是充分条件）．在此多项式中，

c 可能是 ±1、±2，而 b 可能 是 ±1、±3、±9，所以 $\frac{c}{b}$ 可能是 $\pm\frac{1}{9}$、$\pm\frac{2}{9}$、$\pm\frac{1}{3}$、$\pm\frac{2}{3}$、±1、±2.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
9 & -3 & +7 & -3 & -2 & \frac{1}{9} \\
 & +1 & & & & \\
\hline
9 & -2 & & & &
\end{array}$$

做到这一步，就不必再做下去，因为 -2 不是 9 的倍数，若继续做下去，余数绝对不会是零，即 $9x-1$ 决不是原式的因式，依次地用 $\frac{c}{b}$ 试除，得

$$\begin{array}{r|rrrr|l}
 & 9 & -3 & +7 & -3 & -2 \;\big|\; -\frac{1}{3} \\
 & & -3 & +2 & -3 & +2 \\
\hline
3 & 9 & -6 & +9 & -6 & 0 \\
\hline
 & 3 & -2 & +3 & -2 & \frac{2}{3} \\
 & & +2 & +0 & +2 & \\
\hline
3 & 3 & +0 & +3 & 0 & \\
\hline
 & 1 & +0 & +1 & &
\end{array}$$

最后 x^2+1 在有理数集中不能再分解，因此得

$$\begin{aligned}
&9x^4-3x^3+7x^2-3x-2\\
=&(3x+1)(3x-2)(x^2+1).
\end{aligned}$$

例 4 分解因式：x^5+x+1.

解 由综合除法的试除判定法知此式没有有理系数的一次因式，故只可能分解成一个有理系数的二次因式和三次因

式之积(若能够分解的话). 用补项的办法分解如下:

$$x^5+x+1=x^5-x^2+x^2+x+1$$
$$=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)$$
$$=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$$
$$=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$$

例 5 分解因式 $x^4-2x^3-27x^2-44x+7$.

解 应用待定系数法:

$$x^4-2x^3-27x^2-44x+7=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$
$$=x^4+(a+c)x^3+(d+ac+b)x^2+(ad+bc)x+bd,$$

要使同次项的系数相等, 我们得到方程组:

$$\begin{cases} a+c=-2 \\ d+ac+b=-27 \\ ad+bc=-44 \\ bd=7 \end{cases}.$$

可能有两种情形:

① $b_1=1$, $d_1=7$;

② $b_2=-1$, $d_2=-7$.

我们来考察情况①:

$$ac=-35,\quad 7a+c=-44,\quad a+c=-2,$$

由此得到: $a=-7$, $c=5$.

即是 $$x^4-2x^3-27x^2-44x+7=(x^2+5x+7)(x^2-7x+1).$$

根据分解的唯一性, 第二种情况可以不必考虑.

例 6 分解因式

$$4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3.$$

解一 利用十字相乘法:

$$\text{原式} = 4x^2 - 4(y+1)x - (3y^2 - 10y + 3)$$

$$= 4x^2 - 4(y+1)x - (3y-1)(y-3)$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & & -(3y-1) \\ & \times & \\ 2 & & (y-3) \end{array}$$

$\therefore$ 原式 $= (2x - 3y + 1)(2x + y - 3)$.

解二 利用求根公式法，把多项式按 x 的降幂排列变成二次三项式的形式.

$$\text{原式} = 4x^2 - 4(y+1)x - (3y^2 - 10y + 3),$$

我们可以求二次三项式的根

$$x = \frac{4(y+1) \pm \sqrt{16(y+1)^2 + 4 \cdot 4(3y^2 - 10y + 3)}}{8}$$

$$= \frac{4(y+1) \pm 8(y-1)}{8}.$$

$$\therefore \quad x = \frac{3y-1}{2} \text{ 或 } \frac{-y+3}{2}$$

$$\text{原式} = 4\left(x - \frac{3y-1}{2}\right)\left(x - \frac{-y+3}{2}\right)$$

$$= (2x - 3y + 1)(2x + y - 3).$$

解三 用待定系数法：

观察这个多项式是个 x、y 的二次齐次多项式，如果在实数集里能够分解的话，因子必然是两个含 x、y 的非齐次一次因子，又其所有的二次项的组，刚好能分解成 $(2x - 3y) \cdot (2x + y)$，给定式中的一次项，当然是这两个因子乘以常数的代数和，故可用待定系数法来确定分解式中的常数.

$$4x^2 - 4xy - 3y^2 = (2x - 3y)(2x + y).$$

令 原式 $= (2x - 3y + l)(2x + y + m)$

$$= (2x-3y)(2x+y)+(2x+y)l$$
$$+(2x-3y)m+lm$$
$$=4x^2-4xy-3y^2+2(l+m)x$$
$$+(l-3m)y+lm.$$

由于恒等式的对应项的系数相等，得

$$\begin{cases}2l+2m=-4\\ l-3m=10.\end{cases}$$

$\therefore\quad l=1,\ m=-3,$

原式 $=(2x-3y+1)(2x+y-3)$.

例 7　设 $f(x,\ y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$，求 $f(x,\ y)$ 可分为两个一次因式之条件.

解 若 $a\neq 0$，令 $f(x,\ y)=0$，并写为下述形式：

$$ax^2+2x(hy+g)+by^2+2fy+c=0$$

则
$$x=\frac{-(hy+g)\pm\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}$$
$$=\frac{-(hy+g)\pm\sqrt{y^2(h^2-ab)+2y(hg-af)+(g^2-ac)}}{a}$$

若欲使 $f(x,\ y)$ 为两个一次因式之积，则根号下之量必为完全平方，由此

$$(hg-af)^2=(h^2-ab)(g^2-ac),$$

移项且以 a 除之，得

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0,$$

即
$$\triangle=\begin{vmatrix}a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{vmatrix}=0$$

此即为所求之条件.

若 $a=0$，仍可得上述条件.

例 8　试证 $(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 可分解为二个一次因式.

解 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=a^2-ab+b^2-ca-cb+c^2$，

其判别式：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0,$$

$\therefore$　$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ 可以分解为二个一次因式.

今令　$\omega=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

则　$\omega^3=1$；$1+\omega+\omega^2=0$；$\omega+\omega^2=-1$；$\omega^4+\omega^2=-1$.

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\ &=a^2+\omega^3b^2+\omega^3c^2+(\omega+\omega^2)ab+(\omega^4+\omega^2)bc\\ &\quad+(\omega+\omega^2)ca\\ &=a(a+\omega b+\omega^2c)+\omega^2b(a+\omega b+\omega^2c)\\ &\quad+\omega c(a+\omega b+\omega^2c)\\ &=(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c).\end{aligned}$$

例 9　证明

$$(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3$$

$$-3(y^2-zx)(z^2-xy)(x^2-yz)$$

为一完全平方式.

证 令 $P=x^2-yz$, $Q=y^2-zx$, $R=z^2-xy$,

则 $$\begin{aligned}\text{原式}&=P^3+Q^3+R^3-3PQR\\&=(P+Q+R)(P^2+Q^2+R^2-PQ-QR-RP)\\&=(P+Q+R)(P+\omega Q+\omega^2 R)(P+\omega^2 Q+\omega R)\end{aligned}\tag{1}$$

而 $P+Q+R=x^2-yz+y^2-zx+z^2-xy$

$=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$=(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$ (2)

$P+\omega Q+\omega^2 R=(x^2-yz)+\omega(y^2-zx)+\omega^2(z^2-xy)$

$=x^2+(\omega^2 y)^2+(\omega z)^2-x(\omega^2 y)-(\omega^2 y)(\omega z)-(\omega z)x$

$=[x+\omega(\omega^2 y)+\omega^2(\omega z)][x+\omega^2(\omega^2 y)+\omega(\omega z)]$

$=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)$, (3)

$P+\omega^2 Q+\omega R=x^2-yz+\omega^2(y^2-zx)+\omega(z^2-xy)$

$=[x^2+(\omega y)^2+(\omega^2 z)^2-x(\omega y)-(\omega y)(\omega^2 z)-(\omega^2 z)x$

$=x+\omega(\omega y)+\omega^2(\omega^2 z)][x+\omega^2(\omega y)+\omega(\omega^2 z)]$

$=(x+\omega^2 y+\omega z)(x+y+z)$, (4)

(2)、(3)、(4)代入(1),

$$\begin{aligned}\text{原式}&=[(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)]^2\\&=(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2(x+y+z)^2\\&=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2.\end{aligned}$$

例 10 因式分解

$$2a^2b+4ab^2-a^2c+ac^2-4b^2c+2bc^2-4abc.$$

解 $$\begin{aligned}\text{原式}=&\,2a^2b+4ab^2-a^2c-2abc+ac^2+2bc^2\\&-4b^2c-2abc\end{aligned}$$

$$= 2ab(a+2b) - ac(a+2b) + c^2(a+2b) - 2bc(a+2b)$$

$$= (a+2b)(2ab - ac + c^2 - 2bc)$$

$$= (a+2b)[a(2b-c) - c(2b-c)]$$

$$= (a+2b)(2b-c)(a-c).$$

注 此题分组巧妙，析因子之快，读者可深入体会.

例 11 分解因式

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b).$$

解一

$$\text{原式} = a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b$$

$$= b(a^2 - c^2) + b^2(c-a) + ac(c-a)$$

$$= (c-a)[-bc - ba + b^2 + ac]$$

$$= (c-a)[c(a-b) - b(a-b)]$$

$$= (a-b)(c-b)(c-a)$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-a).$$

解二 用代入法，使 $a=b$，

$$\text{原式} = a^2(a-c) + a^2(c-a) + c^2(a-a) = 0,$$

所以 $a-b$ 是原式的一个因式；同理，$b-c$，$c-a$ 都是原式的因式.

$$\therefore\quad a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = K(a-b)(b-c)(c-a),$$

这里 K 是一个数字．因为这个式子是恒等式，将任何 a、b、c 值(只要使 $a-b$，$b-c$，$c-a$ 的值都不等于零) 代入都可以求出 K 的值.

使 $a=0$，$b=1$，$c=2$，那么

$$0 + 2 - 4 = K\cdot(-1)(-1)\cdot 2$$

于是 $K=-1$.

$\therefore$ 原式 $=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

例 12 在实数集中分解因式:

$$x^4+y^4+(x+y)^4.$$

解 注意到 x^4+y^4 可变为 $x+y$ 的幂而与 $(x+y)^4$ 组合，再利用平方公式分解，故有

$$\begin{aligned}
&x^4+y^4+(x+y)^4\\
=&[(x^2+y^2)^2-2x^2y^2]+(x+y)^4\\
=&\{[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2\}+(x+y)^4\\
=&(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2+(x+y)^4\\
=&2[(x+y)^4-2xy(x+y)^2+x^2y^2]\\
=&2[(x+y)^2-xy]^2\\
=&2(x^2+xy+y^2)^2.
\end{aligned}$$

例 13 分解因式:

$$(a-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^3.$$

解 原式 $=(a-x)y^3+(y-a)x^3+(x-y)a^3$ 是一轮换对称式，以 $x=a$ 代入原式值为零，故 $x-a$ 是原式的一个因式.

同理，$(x-y)$，$(y-a)$，$(x+y-a)$ 都是原式的因式.

设原式 $=K(x-a)(x-y)(y-a)(x+y+a)$，

令 $x=1$，$y=2$，$a=3$，代入得 $K=1$.

$\therefore$ 原式 $=(x-a)(x-y)(y-a)(x+y+a)$.

注 以上两例多项式都具有轮换对称的性质，即将任意两字母对换不影响结果，故都可应用余数定理，采用代入法分解因式.

我们归纳一般步骤如下:

① 用余数定理找一次因式的代表式，可先观察选择代入验证求得.

② 由多项式的对称性确定出置换代表因式所得的其他因式.

③ 由多项式的次数和对称性配置其余的因式.

④ 用待定系数法求出配置的未知系数，如果多项式中的某一项容易观察，则可用比较系数法．如果项的系数不易观察，则可用命值法．命值时应注意命便于计算的数值．设有几个未知的系数，就应得出几个不同的含那些未知系数的方程，比较系数法和命值法有时也可结合使用.

例 14　分解因式$(x+y)^5-x^5-y^5$.

解一　根据观察法设 $x=0$，$y=0$，或 $x=-y$ 原式皆为零，故 $xy(x+y)$ 为原式之因式，而原式为五次因式，故

$$(x+y)^5-x^5-y^5=xy(x+y)(ax^2+bxy+cy^2)$$

即

$$5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4$$
$$=ax^4y+(a+b)x^3y^2+(b+c)x^2y^3+cxy^4,$$

比较等式两边得

$$a=5,\ a+b=10,\ b+c=10.$$

故

$$a=5,\ b=5,\ c=5.$$

$\therefore$　原式$=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$.

解二　很容易看出将前面的括弧展开，即可消去x^5，y^5，而首先提出 xy 的因子．故可得

$$(x+y)^5-x^5-y^5$$
$$=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5-x^5-y^5$$
$$=5xy(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3)$$
$$=5xy[(x^3+y^3)+(2x^2y+2xy^2)]$$

$$=5xy[(x+y)(x^2-xy+y^2)+2xy(x+y)]$$
$$=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

例 15　分解因式：

$$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2.$$

解

$$\begin{aligned}原式&=(x^4-2x^2y^2+y^4)-2z^2(x^2-y^2)+z^4-4y^2z^2\\&=(x^2-y^2)^2-2z^2(x^2-y^2)+z^4-4y^2z^2\\&=[(x^2-y^2)-z^2]^2-4y^2z^2\\&=(x^2-y^2-z^2-2yz)(x^2-y^2-z^2+2yz)\\&=[x^2-(y+z)^2][x^2-(y-z)^2]\\&=(x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z).\end{aligned}$$

例 16　因式分解

$$(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$$

解　$$\begin{aligned}原式&=[(x+a)(x+4a)][(x+2a)(x+3a)]+a^4\\&=(x^2+5ax+4a^2)^2+2a^2(x^2+5ax+4a^2)+a^4\\&=(x^2+5ax+5a^2)^2.\end{aligned}$$

例 17　因式分解：

$$(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2.$$

解 当 $y\neq 1$ 时，应用公式可求关于 x^2 的二次三项式的根：

$$x^2=\frac{(1+y^2)\pm\sqrt{(1+y^2)^2-(1-y)^2(1+y)^2}}{(1-y)^2}$$

$$=\frac{(1+y^2)\pm 2y}{(1-y)^2}=\begin{cases}\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)^2,\\ 1.\end{cases}$$

$$\therefore\quad x=1,\ -1,\ \frac{1+y}{1-y},\ -\frac{1+y}{1-y}.$$

故　　原式 $=(1-y)^2(x-1)(x+1)\left(x-\frac{1+y}{1-y}\right)\left(x+\frac{1+y}{1-y}\right)$

$$=(x-1)(x+1)(x-y-xy-1)(x+y-xy+1).$$

当 $y=1$ 时，容易验证，其分解仍为上述形式.

例 18　分别在有理数、实数和复数范围内分解因式：

$x^{12}-y^{12}$.

解　① 在有理数范围内：

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(x^6)^2-(y^6)^2\\&=(x^6-y^6)(x^6+y^6)\\&=(x^3-y^3)(x^3+y^3)(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)\\&=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)\\&\quad\cdot(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4);\end{aligned}$$

② 在实数范围内：

$$\begin{aligned}\because\quad &x^4-x^2y^2+y^4\\&=x^4+2x^2y^2+y^4-3x^2y^2\\&=(x^2+y^2)^2-(\sqrt{3}xy)^2\\&=(x^2+\sqrt{3}xy+y^2)(x^2-\sqrt{3}xy+y^2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \text{原式}=&(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)\\&\cdot(x^2+y^2)(x^2+\sqrt{3}xy+y^2)\\&\cdot(x^2-\sqrt{3}xy+y^2);\end{aligned}$$

③ 在复数范围内：

$\because\quad x^2+y^2=x^2-(yi)^2=(x+yi)(x-yi)$,

$$x^2\pm xy+y^2=\left(x\pm\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}yi\right)\left(x\pm\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}yi\right),$$

$$x^2\pm\sqrt{3}xy+y^2=\left(x\pm\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}yi\right),$$

$\cdot\left(x\pm\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}yi\right)$,

$\therefore$ 原式 $=(x-y)(x+y)\left(x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}yi\right)$

$$\cdot\left(x+\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}yi\right)$$

$$\cdot\left(x-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}yi\right)\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}yi\right)$$

$$\cdot\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}yi\right)$$

$$\cdot\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}yi\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}yi\right)$$

$$\cdot\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}yi\right)$$

$$\cdot(x+yi)(x-yi).$$

例 19 证明形如 a^4+4 的数(a 是任意整数，且 $a\neq\pm1$)是一个合数.

证 $a^4+4=a^4+4a^2+4-4a^2$

$$=(a^2+2)^2-(2a)^2$$

$$=(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$$

$$=[(a+1)^2+1][(a-1)^2+1].$$

因 $a\neq\pm1$ 且为任意整数，所以因式 $[(a+1)^2+1]$ 和 $[(a-1)^2+1]$ 都表示大于 1 的整数，故形如 a^4+4 的数是一个合数.

例 20 若 a 为自然数，证明：$a(a+1)+1$ 必不是平方数. 又证：$a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ 必为平方数.

证 $\because$ $a^2<a^2+a+1<a^2+2a+1$,

$\therefore$ $a^2<a(a+1)+1<(a+1)^2$.

故 $a(a+1)+1$ 必不是平方数.

但
$$\begin{aligned}
&a(a+1)(a+2)(a+3)+1\\
=&a(a^2+3a+2)(a+3)+1\\
=&a^2(a+3)^2+2a(a+3)+1\\
=&[a(a+3)+1]^2.
\end{aligned}$$

故 $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ 必为平方数.

例 21 证明不可能找到实数或复数 a、b、c、A、B、C，使得方程

$$x^2+y^2+z^2=(ax+by+cz)(Ax+By+Cz)$$

关于独立变数 x、y、z 成为恒等式.

证 若上面方程关于 x、y、z 成为恒等式，取 $x=1$，$y=z=0$，则有 $aA=1$.

故 $\qquad a\neq 0,\quad A=\dfrac{1}{a}$；

同理 $\qquad b\neq 0,\quad B=\dfrac{1}{b}$；

$\qquad c\neq 0,\quad C=\dfrac{1}{c}$.

由此 $\qquad x^2+y^2+z^2=(ax+by+cz)\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)$.

比较两边系数，可得

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=0,\quad a^2+b^2=0;$$

$$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}=0,\quad b^2+c^2=0;$$

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}=0,\quad c^2+a^2=0.$$

由此，又得到 $a=b=c=0$，与上面的结果矛盾，故使原方程

成为恒等式之实数或复数是不存在的.

§3. 分式和根式

整式、分式、根式都是代数式.

分式的约分、通分、四则运算与分数的约分、通分、四则运算完全相类似. 只是一个是式一个是数而已. 数可看作零次整式, 因此式比数要广.

分式的转化与运算的基本性质与法则如下:

设 a、b、c、d、m(且 $m\neq0$)都表整式.

① 基本性质:

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm};\quad \frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}.$$

② 符号法则:

$$\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}=-\frac{a}{-b}=-\frac{-a}{b}.$$

③ 加减法则:

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c};\quad \frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

分式通分时, 应注意取最低公倍式作为分母, 以减少不必要的约分.

④ 乘除法则:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};\quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

分式相乘, 应注意先约分.

⑤ 乘方法则:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n};\quad \left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n\left(\frac{c}{d}\right)^n=\frac{a^nc^n}{b^nd^n}.$$

⑥ 繁分式化简：

繁分式化简与繁分数化简一模一样．所谓繁分式是指分子分母都是分式的分式，因此化简的目的在于使分子分母都化成整式．为达此目的通常利用性质$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$，同时消去分子分母的分母，或转化为分式的除法化简．

此外，分式的约分牵涉最高公因式($H.C.F$)，分式的通分牵涉最低公倍式($L.C.M$)．一般寻求$H.C.F$或$L.C.M$是通过因式分解从而定出．但也可采用辗转相除法而取得．

与分式加减法的运算结果相反，分式分项是将一个分式分成若干更简单的分式．这里所说的“更简单的分式”是指每一个分成后的分式的分母是原分母的因式．分式积分将用到它．

分式又称为有理式；根式又称为无理式．

形如$\sqrt[n]{a}$的代数式叫做n次根式，其中a代表一整式．由于这里仅就实数域而言，因此当n是偶数时，要求$a\geq0$．关于这一点，初学者必须特别注意．

勿论整式a与b相等与否，$\sqrt[n]{a}$与$\sqrt[n]{b}$因它们都是n次根式，故归为同次根式．

仅当$\sqrt[n]{b}=k\sqrt[n]{a}$，其中k为常数时，$\sqrt[n]{a}$与$\sqrt[n]{b}$才归为同类根式．

根式的转化和运算的基本性质与法则如下：

$(\sqrt[n]{a})^n=a$(n为正整数)；

$\sqrt[n]{a^n}=a$($a\geq0$，n为正整数)；

$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ ($a\geq0$)；

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ ($a\geq0$，$b\geq0$)；

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}(a\geqslant 0,\ b>0);$$

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}\ (a\geqslant 0);$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}\ (a\geqslant 0).$$

根式的加减法，在于把各个根式化成最简式，再合并同类根式．即同类根式才能合并．

根式的乘除法，在于把各个根式化成同次根式，再依上述基本性质做乘除运算．即同次根式才能直接相乘除．

根式的乘方、开方，按

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m};\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}\ (a\geqslant 0).$$

进行运算．

这些运算结果必须化为最简根式．所谓最简根式必须满足下列三条：

① 被开方式的指数和根指数互质．

② 被开方式的每一个因式的指数都小于根指数．

③ 被开方式不含分母．

由于最简根式的需要，要使被开方式不含分母，因此提出了分母的有理化．分母的有理化在于选择有理化因式同乘分子与分母．

$\sqrt[n]{a^m}$和$\sqrt[n]{a^{n-m}}$互为有理化因式$(n>m)$；

$a+\sqrt{b}$和$a-\sqrt{b}$互为有理化因式；

$a+k\cdot\sqrt{b}$和$a-k\cdot\sqrt{b}$互为有理化因式；

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$和$\sqrt{a}-\sqrt{b}$互为有理化因式；

$h\cdot\sqrt{a}+k\sqrt{b}$和$h\cdot\sqrt{a}-k\sqrt{b}$互为有理化因式；

$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$和$\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$互为有理化因式；

$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$和$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$互为有理化因式．

此外，$a\pm2\sqrt{b}$的算术平方根，可依

$$\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\ (x>y)$$

其中 $x+y=a$，$xy=b$，而 x 和 y 一般由观察定出．

例 1 求 x^2-3x+2 和 $x^4-3x^3+5x^2-8x+5$ 的 $H.C.F.$

解 结合综合除法求 $H.C.F$：

由 $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$ 以 $x=1$ 与 $x=2$（即 $x-1$ 和 $x-2$）分别用综合除法除另一式

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -3 & +5 & -8 & +5 & \underline{1} \\
 & +1 & -2 & +3 & -5 & \\
\hline
1 & -2 & +3 & -5 & +0 & \underline{2} \\
 & +2 & +0 & +6 & & \\
\hline
1 & +0 & +3 & +1 & &
\end{array}$$

因 $x-1$ 除另一式剩余为 0，$x-2$ 除另一式剩余为 1，可见 $H.C.F$ 为 $x-1$.

结合应用剩余定理求 $H.C.F$：

设 $f(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$\varphi(x)=x^4-3x^3+5x^2-8x+5$

将 $x=1$，$x=2$ 分别代入 $\varphi(x)$ 可得

$$\varphi(1)=1-3+5-8+5=0,$$

可见 $x-1$ 能整除 $\varphi(x)$；又

$$\varphi(2)=16-24+20-16+5=1$$

可见 $x-2$ 不能整除 $\varphi(x)$．故

$H.C.F$ 为 $x-1$.

应用辗转相除法求 $H.C.F$：

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & 1 & - & 3 & + & 5 & - & 8 & + & 5 & \underline{1-3+2} \\
- & 1 & + & 3 & - & 2 & & & & & \\
\hline
 & & & & & 3 & - & 8 & + & 5 & \\
 & & & & - & 3 & + & 9 & - & 6 & \\
\hline
 & & & & & & & 1 & - & 1 &
\end{array}
$$

为此，要求 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的 $H.C.F$，只要求

$\varphi(x)=x^2-3x+2$ 与余式 $\psi(x)=x-1$ 的 $H.C.F$：

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 1 & - & 3 & + & 2 & \underline{1-1} \\
- & 1 & + & 1 & & & \\
\hline
 & & - & 2 & + & 2 & \\
 & & & 2 & - & 2 & \\
\hline
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

由于 $x-1$ 能整除 $\varphi(x)=x^2-3x+2$，而 $\varphi(x)$ 又能整除 $f(x)-\psi(x)=(x^4-3x^3+5x^2-8x+5)-(x-1)$，故 $\psi(x)=x-1$ 也能整除 $f(x)-\psi(x)$ 及 $f(x)$．可见 $x-1$ 确是 $f(x)$，$\psi(x)$ 的 $H.C.F$.

为了叙述与计算的方便，常采用下面写法，即

$$
\begin{array}{r|rrrrrrrrrr|rrrrrr|r}
1 & & 1 & - & 3 & + & 5 & - & 8 & + & 5 & & 1 & - & 3 & + & 2 & 1 \\
 & - & 1 & + & 3 & - & 2 & & & & & - & 1 & + & 1 & & & \\
\cline{2-17}
3 & & & & & & 3 & - & 8 & + & 5 & & & - & 2 & + & 2 & -2 \\
 & & & & & - & 3 & + & 9 & - & 6 & & & & 2 & - & 2 & \\
\cline{2-17}
 & & & & & & & & 1 & - & 1 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

其中，最后一个除式 $x-1$ 就是 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的 $H.C.F$.

注① 若 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的 $H.C.F$ 是一个常数，则 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 互质.

注② 若本题改为求 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的 $L.C.M$，只需将 $H.C.F$ 除其中一式，然后再乘上另一式，即

$$\varphi(x)\div\psi(x)=(x^2-3x+2)\div(x-1)=x-2$$

再以 $x-2$ 乘 $f(x)$ 则得 $L.C.M$ 为：

$$\begin{aligned}(x-2)\cdot f(x)&=(x-2)\cdot(x^4-3x^3+5x^2-8x+5)\\&=x^5-5x^4+11x^3-18x^2+21x-10.\end{aligned}$$

例 2 求 $x^4+x^3-9x^2-3x+18$ 与 $x^5+6x^2-49x+42$ 的 $H.C.F$ 和 $L.C.M$.

解

1	$1+0+0+6-49+42$	$1+1-9-3+18$	1
	$-1-1+9+3-18$	$-1+0+7-6$	
-1	$-1+9+9-67+42$	$1-2-9+18$	1
	$1+1-9-3+18$	$-1+0+7-6$	
	$10+0-70+60$	$-2-2+12$	
(约)	$1+0-7+6$	$-1-1+6$	(约)
-1	$-1-1+6$		
	$-1-1+6$		
1	$1+1-6$		
	0		

由此可见，$H.C.F$ 为 x^2+x-6. 而 $L.C.M$ 为

$$\begin{aligned}&\frac{(x^4+x^3-9x^2-3x+18)(x^5+6x^2-49x+42)}{x^2+x-6}\\&=x^7-3x^5+6x^4-49x^3+24x^2+147x-126.\end{aligned}$$

注 用辗转相除求 $H.C.F$ 过程中，抽取常数因子并不影响 $H.C.F$.

例 3 求 $\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}+\dfrac{x-2}{x^4-3x^3+5x^2-8x+5}$

解 借助例 1 有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}+\frac{x-2}{(x-1)(x^3-2x^2+3x-5)}\\&=\frac{(x-3)(x^3-2x^2+3x-5)+(x-1)(x-2)^2}{(x-1)(x-2)(x^3-2x^2+3x-5)}\end{aligned}$$

$$=\frac{x^4-4x^3+x^2-6x+11}{(x-1)(x-2)(x^3-2x^2+3x-5)},$$

设 $p(x)=x^4-4x^3+x^2-6x+11$，由于

$$p(1)=1-4+1-6+11\neq 0$$

$$p(2)=16-32+4-12+11\neq 0$$

又用辗转相除法求 $p(x)$ 与 x^3-2x^2+3x-5 的 $H.\ C.\ F$ 为一常数，故分子分母互质．因此

$$\text{原式}=\frac{x^4-4x^3+x^2-6x+11}{x^5-5x^4+11x^3-18x^2+21x-10}.$$

例 4 求 $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}$

$$+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

解 由于第三、第四两项有公因式 $c-a$，故

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+(c-a)\\&\quad\cdot\frac{(a+b)(b+c)+(a-b)(b-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\&=\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{2bc-2ab}{(a+b)(b+c)}\\&=0.\end{aligned}$$

注 此题比较特殊，系 a，b，c 轮换分式．令 $a=b$ 则分式之和为零，可见 $a-b$，$b-c$，$c-a$ 皆为此式之因式．由于原式对 a，b，c 说来是一零次式，故此分式之和只能为零．

例 5 化简

$$\frac{a}{b+\dfrac{c}{d+\dfrac{e}{f}}}.$$

解 原式 $=\dfrac{a}{b+\dfrac{cf}{df+e}}=\dfrac{adf+ae}{bdf+be+cf}$.

例 6 分解分式 $\dfrac{x^4+2x^3+x+1}{x^3+3x^2+2x}$ 为最简的部分分式.

解 $\dfrac{x^4+2x^3+x+1}{x^3+3x^2+2x}=x-1+\dfrac{x^2+3x+1}{x^3+3x^2+2x}$

$$=x-1+\frac{x^2+3x+1}{x(x+1)(x+2)}$$

设 $\dfrac{x^2+3x+1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x+2}$，两边同乘 $x(x+1)(x+2)$ 得

$$x^2+3x+1=A(x+1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x+1)$$

令 $x=0$，则得

$$1=2A,\quad \therefore \quad A=\frac{1}{2};$$

令 $x=-1$，则得

$$-1=-B,\quad \therefore \quad B=1;$$

再令 $x=-2$，则得

$$-1=2C,\ \therefore \quad C=-\frac{1}{2}.$$

将此 A，B，C 的结果代入所设，则得

$$\text{原式}=x-1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2(x+2)}.$$

注① 化分式为最简部分分式应注意：当原式是假分式时，应先化假分式为真分式．化真分式为最简部分分式时，应将分母分解成一次或二次因式．然后再一一设为待定完全真分式.

注② 求待定系数时，除上述代入法求解外，通常可用比较法．即由

$$x^2+3x+1=A(x+1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x+1)$$

可得

$$x^2+3x+1=(A+B+C)x^2+(3A+2B+C)x+2A$$

比较等式两端同类项系数，有

$$\begin{cases}A+B+C=1\\3A+2B+C=3\\2A=1\end{cases}$$

解此方程组可得

$$A=\frac{1}{2};\quad B=1;\quad C=-\frac{1}{2}.$$

例 7 分解分式$\frac{2x^2+1}{x^3-1}$为最简部分分式．

解 设 $\frac{2x^2+1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$，两边同乘 x^3-1 可得

$$2x^2+1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$$

即 $2x^2+1=(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C$，比较等号两边同类项系数可得

$$\begin{cases}A+B=2\\A-B+C=0\\A-C=1\end{cases}$$

解此方程组可得

$$A=1;\quad B=1;\quad C=0.$$

故

$$\frac{2x^2+1}{x^3-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x^2+x+1}.$$

例 8 分解分式$\dfrac{x^2-2x+5}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}$为部分分式.

解 由于$x^4-4x^3+5x^2-4x+4=(x-2)^2(x^2+1)$，故设

$$原式=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.\ 去分母得$$

$$x^2-2x+5=A(x-2)(x^2+1)+B(x^2+1)$$
$$+(Cx+D)(x-2)^2$$

令 $x=2$，可得 $B=1$.

令 $x=i$，可得 $4-2i=3D+4C+(3C-4D)i$ 依复数相等有

$$\begin{cases}3D+4C=4\\-4D+3C=-2\end{cases}$$

解此方程组，则得

$$D=\frac{4}{5},\quad C=\frac{2}{5}.$$

再将 A，C，D 结果代入，可得

$$x^2-2x+5=A(x-2)(x^2+1)+(x^2+1)$$
$$+\left(\frac{2}{5}x+\frac{4}{5}\right)(x-2)^2,$$

令 $x=0$ 则得 $A=-\dfrac{2}{5}$. 于是

$$原式=-\frac{2}{5(x-2)}+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2x+4}{5(x^2+1)}.$$

例 9 求$\dfrac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}$的部分分式.

解 设 $原式=\dfrac{Ax+B}{x^2-x+1}+\dfrac{Cx+D}{(x^2-x+1)^2}+\dfrac{E}{x-3}$去分母可得

$$5x^2-4x+16=(Ax+B)(x^2-x+1)(x-3)+(Cx+D)$$

$\cdot (x-3)+E(x^2-x+1)^2$

令 $x=3$，可得 $E=1$．再代入化简可得

$-x-2-\dfrac{2x+3}{x^2-x+1}=Ax+B+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$ 比较系数，于是则得

$$A=-1,\ B=-2,\ C=-2,\ D=-3.$$

$$\therefore\quad \frac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}=\frac{-x-2}{x^2-x+1}$$

$$-\frac{2x+3}{(x^2-x+1)^2}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-3}$$

$$-\frac{x+2}{x^2-x+1}-\frac{2x+3}{(x^2-x+1)^2}.$$

例 10 化简 $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

解 根据二次根式开平方公式，得

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}$$

$$=\sqrt{x-1}+1$$

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=|\sqrt{x-1}-1|$$

$$\therefore\quad y=\begin{cases}2\sqrt{x-1} & (\text{当 } x\geqslant 2 \text{ 时})\\ 2. & (\text{当} 1\leqslant x<2 \text{时})\end{cases}$$

例 11 若 $4x^2-4x-15\leqslant 0$，试化简

$$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{4x^2-20x+25}.$$

解 由不等式 $4x^2-4x-15\leqslant 0$，

$\therefore\quad -\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{2}$，从而 $2x+3\geqslant 0$ 和 $2x-5\leqslant 0$.

$$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{4x^2-20x+25}$$

$$=\sqrt{(2x+3)^2}+\sqrt{(2x-5)^2}$$

$$=|2x+3|+|2x-5|$$

$=2x+3-(2x-5)=8$

例 12 若 $0<x<1$，化简

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x}+x-1}\right)$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1}{x}\right).$$

解 原式 $=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$

$$=\frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

$$=\frac{2x}{2-2\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}=-1.$$

例 13 如果 $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$，求

$\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ $(a>0,\ b>0)$ 的值.

解

$\because$ $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2+4\right)}$

$$=\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4ab}}=\frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}$$

$\therefore$ $\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=(2b\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})$

$$=2b(\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$=2b(x\sqrt{x^2-1}+x^2-1)$$

$$=2b\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}+\frac{(a-b)^2}{4ab}\right]$$

$$=\frac{1}{2a}(a-b)[\pm(a+b)+(a-b)]$$

$$=\begin{cases} a-b, & (\text{当 } a\geqslant b \text{ 时}) \\ \dfrac{b}{a}(b-a). & (\text{当 } a<b \text{ 时}) \end{cases}$$

注 由以上几例，应特别引起我们注意这样的事实：

$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a(\text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时}) \\ -a(\text{当 } a<0 \text{ 时}) \end{cases}$，在代数式的变换中经常用到.

例 14 当 $x=\sqrt[3]{-\dfrac{b}{2}+\sqrt{\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{a^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\dfrac{b}{2}-\sqrt{\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{a^3}{27}}}$ 时，计算 x^3+ax+b 的值.

解 把 x 的值代入 x^3+ax+b 中，并应用公式 $(m+n)^3=m^3+3mn(m+n)+n^3$，

$$\begin{aligned} & x^3+ax+b \\ = & -\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}+3\cdot\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}} \\ & \cdot\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}\cdot x-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}+ax+b \\ = & -b+3\cdot\sqrt[3]{\left(-\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\cdot x+ax+b \\ = & -3\sqrt[3]{\frac{a^3}{27}}\cdot x+ax \\ = & -ax+ax=0 \end{aligned}$$

例 15 当 $x=\dfrac{2mn}{n^2+1}$ $(m>0,\ n>1)$ 时，计算

$$\frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}}.$$

解 原式$=\dfrac{(\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x})^2}{(\sqrt{m+x})^2-(\sqrt{m-x})^2}$

$$=\frac{m+x+2\sqrt{m^2-x^2}+m-x}{m+x-m+x}$$

$$=\frac{m+\sqrt{m^2-x^2}}{x}$$

$$=\frac{m+\sqrt{m^2-\left(\dfrac{2mn}{n^2+1}\right)^2}}{\dfrac{2mn}{n^2+1}}$$

$$=\frac{m+m\sqrt{\dfrac{n^4+2n^2-4n^2+1}{(n^2+1)^2}}}{2mn}(n^2+1)$$

$$=\frac{m\left(1+\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)(n^2+1)}{2mn}$$

$$=\frac{n^2+1+n^2-1}{2n}=n.$$

注 在化简中，注意分母有理化.我们是用分母的共轭因式同乘以分子、分母.

例 16 当 $x=\dfrac{1}{m}\sqrt{\dfrac{2m}{n}-1}\quad(0<m<n<2m)$时，计算：

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}}-mx}{\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}}+mx}\div\sqrt{\frac{1-nx}{1+nx}}$$

解 首先我们注意，

$$\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}}=\sqrt[6]{(2+\sqrt{5})^3}$$
$$\cdot\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}}=\sqrt[6]{38+17\sqrt{5}}$$
$$\cdot\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}}=1.$$

因此，设原式$=A$，那么

$$A=\frac{1-mx}{1+mx}\cdot\sqrt{\frac{1+nx}{1-nx}}.$$

现在，我们个别变换每个因子：

$$\frac{1-mx}{1+mx}=\frac{1-\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{1+\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}=\frac{\left(1-\sqrt{\frac{2m}{n}-1}\right)^2}{1-\left(\frac{2m}{n}-1\right)}$$

$$=\frac{\frac{2m}{n}-2\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{2-\frac{2m}{n}}$$

$$=\frac{m-n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{n-m};$$

$$\sqrt{\frac{1+nx}{1-nx}}=\sqrt{\frac{1+\frac{n}{m}\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{1-\frac{n}{m}\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}}$$

$$=\frac{1+\frac{n}{m}\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{\sqrt{1-\frac{n^2}{m^2}\left(\frac{2m}{n}-1\right)}}$$

$$=\frac{1+\frac{n}{m}\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{\sqrt{\left(\frac{n}{m}-1\right)^2}}=\frac{1+\frac{n}{m}\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{\frac{n}{m}-1}$$

$$=\frac{m+n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{n-m}.$$

〔因为$n>m$，所以$\sqrt{\left(\frac{n}{m}-1\right)^2}$的算术值是$\frac{n}{m}-1$，而

不是 $1-\dfrac{n}{m}$.〕这样，

$$A=\frac{1-mx}{1+mx}\cdot\sqrt{\frac{1+nx}{1-nx}}$$

$$=\frac{m-n\sqrt{\dfrac{2m}{n}-1}}{n-m}\cdot\frac{m+n\sqrt{\dfrac{2m}{n}-1}}{n-m}$$

$$=\frac{m^2-n^2\left(\dfrac{2m}{n}-1\right)}{(n-m)^2}$$

$$=\frac{m-2mn+n^2}{(n-m)^2}=1.$$

例 17 设 x，y，z 适合以下关系式：

$$x+y+z=a,$$
$$x^2+y^2+z^2=b^2,$$
$$x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=c^{-1}.$$

求 $x^3+y^3+z^3$ 的值.

解 $xy+yz+zx=\dfrac{1}{2}\left[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right]$

$$=\frac{1}{2}(a^2-b^2).$$

又 $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{c}.$$

∴ $$xyz=c(xy+yz+zx)=\frac{c(a^2-b^2)}{2}.$$

再由 $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),$$

∴ $x^3+y^3+z^3$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)-3xyz$$

$$= a\left(b^2 - \frac{a^2 - b^2}{2}\right) + 3 \cdot \frac{c(a^2 - b^2)}{2}$$

$$= \frac{-a^3 + 3ab^2 + 3a^2c - 3b^2c}{2}.$$

§4. 代数恒等式的证明

代数恒等式的证明，主要在于加强恒等变换这一基本功的训练．它根基于等量公理，整式、分式、根式运算，因式分解等等．

证明恒等式的途径一般有三条：

① 从等式的一边证到另一边．是从左证到右还是从右证到左，常常有难易之分，因此动手之前应有所选择，切忌不加思索．

② 同时从两边推到同一的恒等式．走这条路常可减轻一些转化的困难．

③ 通过适当的变换，转证与它等价的恒等式．这种变换常显示出一定的技巧．

本节除一般恒等式的论证问题外，还着重牵涉条件等式的证明．条件恒等式的条件与未知数的个数常相伴随而出现，因此它既包含恒等式的论证，也包含有解方程组的内容．通常采用代入法消去一些未知数，化条件恒等式的论证为一般恒等式的论证．但不少条件恒等式的论证有问题的特殊性，应根据特殊性取其特殊方法，否则通用一般转化法将遇到不必要的困难．

在分析条件恒等式该怎么证明时，常用逆推法，即从恒等这一结果逆推出条件等式，然后抓住要领再证明回来．但这种办法也未必一定有效，因为有时却越推越麻烦．

总之代数恒等式的证明，既要注意基本功基本方法，也要注意特殊技巧特殊方法.

例 1　证明恒等式

$$(x^2+3x+1)^2-1=x(x+1)(x+2)(x+3).$$

证法一

$$\begin{aligned}\text{左边}&=[(x^2+3x+1)+1][(x^2+3x+1)-1]\\&=(x^2+3x+2)(x^2+3x)\\&=x(x+1)(x+2)(x+3).\end{aligned}$$

∵　左边＝右边，∴　原式成立.

证法二

$$\begin{aligned}\text{右边}&=x(x+1)(x+2)(x+3)\\&=[x(x+3)][(x+1)(x+2)]\\&=(x^2+3x)(x^2+3x+2)\\&=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1-1\\&=(x^2+3x+1)^2-1.\end{aligned}$$

∵　右边＝左边，∴　原式成立.

证法三

$$\begin{aligned}\text{左边}&=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1-1\\&=x^4+6x^3+9x^2+2x^2+6x\\&=x^4+6x^3+11x^2+6x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右边}&=(x^2+x)(x^2+5x+6)\\&=x^4+5x^3+6x^2+x^3+5x^2+6x\\&=x^4+6x^3+11x^2+6x.\end{aligned}$$

∵　左边＝右边

∴　原式成立.

例 2　求证：$x^4+y^4+(x+y)^4=2(x^2+xy+y^2)^2$.

证明 由 $(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$.

$$\text{左边}=x^4+y^4+x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$=2(x^4+y^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3).$$
$$\text{右边}=2[(x^2+y^2)+xy]^2$$
$$=2[(x^2+y^2)^2+2xy(x^2+y^2)+x^2y^2]$$
$$=2(x^4+y^4+2x^3y+3x^2y^2+3xy^3).$$

$\because$ 左边 = 右边，$\therefore$ 等式得证.

例 3 证明恒等式

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$$

证明

$$\text{左}=\left(\frac{1}{(a-b)}-\frac{1}{(a-c)}\right)+\left(\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{(c-a)}-\frac{1}{(c-b)}\right)$$
$$=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}$$
$$+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}$$
$$=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

$\because$ 左 = 右，$\therefore$ 原式成立.

例 4 设 $x+\dfrac{1}{y}=1$，$y+\dfrac{1}{z}=1$，求证

$$z+\frac{1}{x}=1.$$

分析 从所设条件容易知道 $y\neq 0$，$z\neq 0$，进一步还可

以知道 $x\neq0$，因若 $x=0$，从条件的第一式得 $y=1$，而从条件的第二式，z 将变为无穷大，这是不允许的，同样可以知道 x、y、z 均不等于 1．

其次，注意到所要证明的等式中不含 y（这就是本例特点），根据这个特点，我们就知道必须从所给的条件中消去 y．

从所设条件的第一式得

$$y-xy=1 \quad 或 \quad y=\frac{1}{1-x} \qquad (\because y\neq0,\ x\neq1)$$

代入所设条件的第二式，经整理后便得

$$xz+1=x \qquad (\because y\neq0,\ x\neq1)$$

再用 x 去除等式两边（$\because x\neq0$）便得

$$z+\frac{1}{x}=1,$$

至此，问题便解决了．

例 5 设 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$，求证

$$\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}=3$$

分析 首先从所设条件知 x、y、z 均不为 0；其次，所要证明的等式中含有 $\frac{z}{y}$，$\frac{x}{z}$ 和 $\frac{y}{x}$ 这样的项，我们必须从所设的条件中造出这样的项来．显然直接要从所设条件中造出这样的三项来有困难，因此我们不妨令 t 表示等式的值，即令

$$x+\frac{1}{y}=t,\quad y+\frac{1}{z}=t,\quad z+\frac{1}{x}=t \qquad (1)$$

由第一式可得

$$zx+\frac{z}{y}=tz,$$

同理由第二式和第三式分别可得

$$xy+\frac{x}{z}=tx, \qquad yz+\frac{y}{x}=ty,$$

由此三式可得

$$\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}=t(x+y+z)-(yz+zx+xy) \tag{2}$$

现在的问题就是要证明

$$t(x+y+z)-(yz+zx+xy)=3, \tag{3}$$

但由(1) 立刻知道

$$xy+1=ty, \qquad yz+1=tz,$$

$$zx+1=tx \quad (\because x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0)$$

相加，立即得到(3) 式.

由(2)，(3)便得

$$\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}=3.$$

例 6 设 $x+y+z=0$，求证 $x^3+y^3+z^3=3xyz$

分析 所要证明的等式中含有 $x^3+y^3+z^3$，因此应由所设条件造出 $x^3+y^3+z^3$ 来. 显然我们可从 $(x+y+z)^3$ 的展开式中得到，

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3y^2x$$
$$+3y^2z+3x^2z+3z^2x+3z^2y+6xyz,$$

利用条件，便得

$$x^3+y^3+z^3+[3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x$$
$$+3z^2y+6xyz]=0$$

即

$$x^3+y^3+z^3+[3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x$$
$$+3z^2y+9xyz]=3xyz. \tag{1}$$

这里我们就需要证明(1)中方括号内的值为0. 为书写方便，

可令方括号内的值为 P,

则 $$P=(3x^2y+3y^2x+3xyz)+(3x^2z+3z^2x+3xyz)$$
$$+(3y^2z+3z^2y+3xyz)$$
$$=3xy(x+y+z)+3xz(x+z+y)+3yz(y+z+x)$$
$$=3(x+y+z)(xy+xz+yz)=0.\text{（利用条件）}\quad(2)$$

由(1)及(2)应得

$$x^3+y^3+z^3=3xyz.$$

例 7 若 a、b、c、d 为正数,且 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$,求证: $a=b=c=d$.

分析 这里需要证明 a, b, c, d 四个数均等, 也就是需要证明两两之差等于 0，或证明两两的平方差等于 0（因 a、b、c、d 为正数），为此，我们需要从所设的条件中造出这些平方差来(平方差包含有两数之差)，这是可以从所设的条件中利用配方来完成的. 将所设条件作如下变形:

$$(a^4-2a^2b^2+b^4)+(c^4-2c^2d^2+d^4)+2a^2b^2$$
$$+2c^2d^2-4abcd=0,$$

便得 $$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0,\qquad(1)$$

由(1)得 $a^2-b^2=0$, $c^2-d^2=0$, $ab-cd=0$,

即可完成我们所需要的结论.

以下例证我们就直接写出证明过程.

例 8 若 $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$, 则 $a=b=c$.

证 由 $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$,

故 $$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=3ab+3bc+3ca$$

即 $$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0,$$
$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0,$$
$$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2=0,$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0.$$

因此　　$a-b=0$，$b-c=0$，$c-a=0$.

故有　　$a=b=c$.

例 9　若 x，a_1，a_2，……，a_n 均为实数，且

$$(n-1)x^2+2x(a_1-a_2)+2x(a_2-a_3)+\cdots\cdots+2x(a_{n-1}-a_n)+a_1^2+2a_2^2+\cdots\cdots+2a_{n-1}^2+a_n^2=2(a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}a_n).$$

求证：$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots\cdots=a_n-a_{n-1}=x$.

证　由题所示条件，有

$$[x^2+2x(a_1-a_2)+a_1^2-2a_1a_2+a_2^2]+[x^2+2x(a_2-a_3)+a_2^2-2a_2a_3+a_3^2]+\cdots\cdots+[x^2+2x(a_{n-1}-a_n)-2a_{n-1}a_n+a_n^2]=0,$$

(共有 $n-1$ 个方括号)

即　$$[x^2+2x(a_1-a_2)+(a_1-a_2)^2]+[x^2+2x(a_2-a_3)+(a_2-a_3)^2]+\cdots\cdots+[x^2+2x(a_{n-1}-a_n)+(a_{n-1}-a_n)^2]=0,$$

亦即　$$[x+(a_1-a_2)]^2+[x+(a_2-a_3)]^2+\cdots\cdots+[x+(a_{n-1}-a_n)]^2=0.$$

故有　$x+(a_1-a_2)=0$，$x+(a_2-a_3)=0$，……，$x+(a_{n-1}-a_n)=0$.

因此得　$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots\cdots=a_n-a_{n-1}=x$.

例 10　① 若 $(x+p)(x+2q)+(x+2p)(x+q)$ 为含 x 的完全平方表达式，则 $9p^2-14pq+9q^2=0$；

② 若 $(x+a)(x+b)+(x+a)(x+c)+(x+b)(x+c)$ 为含 x 的完全平方式，则 $a=b=c$.

证

① 因为$(x+p)(x+2q)+(x+2p)(x+q)=2x^2+3(p+q)x+4pq$为完全平方式，故其二次三项式的判别式

$$9(p+q)^2-4\cdot 2\cdot 4pq=0$$

即 $$9p^2-14pq+9q^2=0$$

② 因为$(x+a)(x+b)+(x+a)(x+c)+(x+b)(x+c)=3x^2+2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)$为完全平方式，则其二次三项式的判别式

$$4(a+b+c)^2-4\cdot 3\cdot(ab+bc+ca)=0$$

或 $$(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$$

由此并参看本节例 8 证得

$$a=b=c.$$

例 11 设两个二次三项式ax^2+bx+c，cx^2+bx+a，有一次公因式，则有$(a+c)^2=b^2$，但$a\neq c$.

证 因为ax^2+bx+c，cx^2+bx+a有一次公因式，那么这两个二次式有一公共根记为β，于是

$$a\beta^2+b\beta+c=0 \qquad (1)$$

$$c\beta^2+b\beta+a=0 \qquad (2)$$

(1)－(2)得 $(a-c)\beta^2=a-c$,

但$a\neq c$， $\therefore$ $\beta=\pm 1$.

把$\beta=\pm 1$代入(1)得

$$a\pm b+c=0 \text{ 或 } a+c=\mp b,$$

由此得 $(a+c)^2=b^2$.

例 12 设$x_1^2+y_1^2=1$， $x_2^2+y_2^2=1$及$x_1x_2+y_1y_2=0$.

求证：$x_1^2+x_2^2=1$，$y_1^2+y_2^2=1$及$x_1y_1+x_2y_2=0$.

证 $\because$ $$x_1^2+y_1^2=1, \qquad (1)$$

$$x_2^2+y_2^2=1, \qquad (2)$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0. \tag{3}$$

$\therefore \quad x_1y_1 + x_2y_2$

$= x_1y_1(x_2^2 + y_2^2) + x_2y_2(x_1^2 + y_1^2)$

$= x_1y_1x_2^2 + x_1y_1y_2^2 + x_2y_2x_1^2 + x_2y_2y_1^2$

$= x_1x_2(x_2y_1 + x_1y_2) + y_1y_2(x_1y_2 + x_2y_1)$

$= (x_2y_1 + x_1y_2)(x_1x_2 + y_1y_2)$

$= (x_2y_1 + x_1y_2) \cdot 0 = 0$

$$\therefore \quad x_1y_1 + x_2y_2 = 0. \tag{4}$$

由(3)、(4)得

$$\frac{x_1}{y_2} = \frac{-y_1}{x_2} = \frac{-x_2}{y_1}, \qquad x_1^2 = y_1^2.$$

$\therefore \quad x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + y_1^2 = 1,$

$\quad\ \ y_1^2 + y_2^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1.$

例 13 如果 $x^2 = y^2 + z^2$，证明

$$x^3 - y^3 - z^3 = (x-y)(x-z)(2x+y+z).$$

证 $\because \quad x^2 = y^2 + z^2,$

$\therefore \quad z^3 = x^2z - y^2z.$

$x^3 - y^3 - z^3 = x^3 - y^3 - x^2z + y^2z$

$= x^3 - x^2y - y^3 + x^2y - x^2z + y^2z$

$= x^2(x-y) + y(x^2 - y^2) - z(x^2 - y^2)$

$= (x-y)(x^2 + xy + y^2 - xz - yz)$

$= (x-y)[x(x-z) + y(x-z) + x^2 - z^2]$

$= (x-y)(x-z)(2x+y+z).$

例 14 若 $a+b+c+d=0$，求证

$(abc + bcd + cda + dab)^2$

$= (bc - ad)(ca - bd)(ab - cd).$

证 $\because$ $d=-(a+b+c)$，那么

$$\begin{aligned}
&abc+bcd+cda+dab\\
=&abc+d(bc+ca+ab)\\
=&abc-(bc+ca+ab)(a+b+c)\\
=&-(b+c)(c+a)(a+b),
\end{aligned}$$

$\therefore$ $(abc+bcd+cda+dab)^2$

$$=(a+b)(b+c)(c+a)(b+a)(c+b)(a+c).$$

但 $(a+b)(a+c)=a(a+b+c)+bc=bc-ad,$

同理 $(b+c)(b+a)=ca-bd,$

$(c+a)(c+b)=ab-cd,$

$\therefore$ $(abc+bcd+cda+dab)^2$

$$=(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd).$$

例 15 设 $x+y+z=xyz$，试证

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz.$$

证 这里，我们应用三角代换法来证明.

令 $x=\operatorname{tg}\alpha$，$y=\operatorname{tg}\beta$，$z=\operatorname{tg}\gamma$，

则 $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma.$

我们变换这个三角等式，那么

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-\operatorname{tg}\gamma(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta),$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=-\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}(-\gamma),$$

$\therefore$ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(-\gamma),$

$$\alpha+\beta=n\pi-\gamma,$$

$$2(\alpha+\beta)=2n\pi-2\gamma,$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha+2\beta)=-\operatorname{tg}2\gamma,$$

从而　$\operatorname{tg} 2\alpha+\operatorname{tg} 2\beta=-\operatorname{tg} 2\gamma(1-\operatorname{tg} 2\alpha\cdot\operatorname{tg} 2\beta)$.

$\therefore\quad \operatorname{tg} 2\alpha\cdot\operatorname{tg} 2\beta\cdot\operatorname{tg} 2\gamma=\operatorname{tg} 2\alpha\cdot\operatorname{tg} 2\beta\cdot\operatorname{tg} 2\gamma$.

但　$\operatorname{tg} 2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{2x}{1-x^2}$,

同理　$\operatorname{tg} 2\beta=\dfrac{2y}{1-y^2}$,　$\operatorname{tg} 2\gamma=\dfrac{2z}{1-z^2}$.

故有 $\dfrac{2x}{1-x^2}+\dfrac{2y}{1-y^2}+\dfrac{2z}{1-z^2}=\dfrac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$.

去分母，得

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)$$
$$+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz.$$

注　此题证明方法巧妙，读者可吟味思考．特别是，我们以 $x=\operatorname{tg}\alpha$ 而不以 $x=\sin\alpha$ 代换之，是什么原因？当然不用三角代换亦可和前例同样证明之．请读者自解．

例 16　若 $\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}$，其中 a，b，c 彼此不等，则 $x+y+z=0$.

证　设 $\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}=k$,

则　$x=k(a-b)$,　$y=k(b-c)$,　$z=k(c-a)$

故　$x+y+z=k[(a+b)+(b-c)+(c-a)]=0$.

例 17　若 $x=\dfrac{a-b}{a+b}$，$y=\dfrac{b-c}{b+c}$，$z=\dfrac{c-a}{c+a}$，则

$$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z).$$

证　$(1+x)(1+y)(1+z)$

$$=\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)\left(1+\frac{b-c}{b+c}\right)\left(1+\frac{c-a}{c+a}\right)$$

$$=\frac{2a}{a+b}\cdot\frac{2b}{b+c}\cdot\frac{2c}{c+a}$$

$$=\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(1-\frac{b-c}{b+c}\right)\left(1-\frac{c-a}{c+a}\right)$$

$$=(1-x)(1-y)(1-z).$$

例 18 如 $abc=1$，求证

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1.$$

证明 $\because$ $abc=1$,

$$\therefore \frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}$$

$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{a(bc+b+1)}+\frac{abc}{ab(ca+c+1)}$$

$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{abc+ab+a}+\frac{abc}{abca+abc+ab}$$

$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}$$

$$=\frac{ab+a+1}{ab+a+1}=1.$$

例 19 设 x，y，z 为三个互不相等的数，且

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}.$$

求证：$x^2y^2z^2=1$.

证 由 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}$ 得

$$yz(x-y)=y-z, \tag{1}$$

由 $y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$ 得

$$zx(y-z)=z-x, \tag{2}$$

由 $\qquad x+\frac{1}{y}=z+\frac{1}{x}$得

$$xy(z-x)=x-y, \tag{3}$$

(1)×(2)×(3)，得

$$x^2y^2z^2(x-y)(y-z)(z-x)$$
$$=(x-y)(y-z)(z-x).$$

$\because \quad x\neq y\neq z, \quad \therefore \quad (x-y)(y-z)(z-x)\neq 0.$

故 $\quad x^2y^2z^2=1.$

注 本题要善于将已知连等式看成三个等式，将已知条件进行恒等变换而出现两个数乘积的形式.

例 20 若 x，y，z 互不相等，且

$$2a-3y=\frac{(z-x)^2}{y}, \quad 2a-3z=\frac{(x-y)^2}{z}.$$

求证：$2a-3x=\frac{(y-z)^2}{x}.$

证 $\because \quad 2ay-3y^2=(z-x)^2,$

$$2az-3z^2=(x-y)^2,$$

$\therefore \quad 2a(y-z)-3(y^2-z^2)=(z-x)^2-(x-y)^2,$

$$2a(y-z)-3(y-z)(y+z)=(y-z)(2x-y-z),$$

$$2a-3(y+z)=2x-y-z.$$

即 $\qquad x+y+z=a.$

由此 $\qquad 2a-3(z+x)=2y-z-x,$

$$2a(z-x)-3(z^2-x^2)=2y(z-x)-(z^2-x^2).$$

但 $\qquad 2az-3z^2=(x-y)^2,$

故 $\qquad 2ax-3x^2=(x-y)^2-2y(z-x)+z^2-x^2,$

即 $\qquad 2ax-3x^2=(y-z)^2,$

$$\therefore \quad 2a-3x=\frac{(y-z)^2}{x}.$$

例 21　若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，($n$为自然数)求证：

$$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}.$$

证　由 $2n+1$ 为正奇数，从所要证明的等式结构的特点不难看出，只要 $a=-b$ 或 $a=-c$ 或 $b=-c$，等式就一定成立．或者说，只要 $a+b=0$，$a+c=0$，$b+c=0$ 中有一个成立即可．

因为 $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

故有 $$\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c},$$

即 $$(a+b+c)(bc+ac+ab)-abc=0.$$

整理得 $$(a+b)(b+c)(c+a)=0,$$

$$\therefore \quad a=-b, \quad 或 \quad b=-c, \quad 或 \quad c=-a.$$

若 $a=-b$，则

$$a^{2n+1}=(-b)^{2n+1}=-b^{2n+1}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{c^{2n+1}},$$

$$\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}=\frac{1}{c^{2n+1}},$$

故 $$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}b^{2n+1}c^{2n+1}}.$$

同样，若 $b=-c$，或 $c=-a$，仍可证得上式成立．

例 22　① 如 $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}+\sqrt{c-x}=0$，试证

$$(a+b+c+3x)(a+b+c-x)=4(bc+ca+ab).$$

② 如$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$，试证

$(a+b+c)^3=27abc$.

证 ① ∵ $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}+\sqrt{c-x}=0$,

∴ $a-x+b-x+2\sqrt{(a-x)(b-x)}=c-x$,

$(a+b-c-x)^2=4(a-x)(b-x)$,

∴ $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc$

$+2(a+b+c)x-3x^2=0$.

即 $(a+b+c)^2+2(a+b+c)x-3x^2=4(bc+ca+ab)$.

∴ $(a+b+c+3x)(a+b+c-x)=4(bc+ca+ab)$.

② ∵ $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y+z^2-xy-yz-zx)$,

∴ 当$x+y+z=0$时，有

$x^3+y^3+z^3=3xyz$.

若 $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$,

那么 $a+b+c=3\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{c}$,

由此得 $(a+b+c)^3=27abc$.

习 题 二

计算下列各式：

1. $(4x^3+3x-5x^2-2)(3x+2-x^2)$.
2. $(a^2-2ab+3b^2)(2a^3-3a^2b+4ab^2-5b^3)$.
3. $(x^2-x+2)^2(x^2+x-2)^2$.
4. $(2x^3-3x^2+8x-9)\div(2x+3)$.
5. $(5x^3-6x^2+7x+8)\div(5x+4)$.
6. $(6a^4+29a^3b-42a^2b^2+ab^3+6b^4)\div(2a-b)$
$\div(3a+b)$.

7. $(3x^5-8x^4-5x^3+22x^2-23x+24)$

$\div(x^3-2x^2-4x+8)$.

8. $(a^5-5a^4b+9a^3b^2-6a^2b^3+12b^5)$

$\div(a^2-3ab+2b^2)$.

9. $(2x^5-4x^4-13x^3+5x^2-18)\div(2x^3-x+3)$.

求多项式的平方根：

10. $x^4-8x^3+22x^2-24x+9$.

11. $4x^6-4x^5y+13x^4y^2-2x^3y^3+7x^2y^4+6xy^5+y^6$.

12. 被除式是 $f(x)=x^4+ax^3-5a^2x^2+12a^3x$，商式是 $q(x)=x^2+3ax-a^2$，余式是 $\gamma(x)=2a^2x^2+10a^3x$，求除式 $\varphi(x)$. 把多项式 $f(x)$ 表示成 $f(x)=\varphi(x)\cdot q(x)+\gamma(x)$ 的形式.

13. 证明，假使 n 和 p 是整数，那么：

① 当 n 能被 p 整除时，x^n-a^n 能被 x^p-a^p 整除；

② 当 $n=(2k+1)p$（k 是整数）时，x^n+a^n 能被 x^p+a^p 整除；

③ 当 $n=2kp$ 时，x^n-a^n 能被 x^p+a^p 整除.

14. 要使形如 10^n+1 的数能被 11 整除，问整数 n 应该是什么样的数？

15. 要使形如 7^n-1 的数能被 8 整除，又能被 6 整除，问整数 n 应是什么样的数？

16. 证明，多项式 $(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n$，（其中 n 是奇数）能被乘积 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 整除.

17. 证明，多项式 $x^my^n+y^mz^n+z^mx^n-x^ny^m-y^nz^m-z^nx^m$ 能被乘积 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 整除.

18. 证明，多项式 $x^my^nz^p+x^py^mz^n+x^ny^pz^m-x^py^nz^m-x^m$

$\cdot y^p z^n - x^n y^m z^p$ 能被 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 整除.

19. 证明，一个整系数的多项式，假使当它的变数值为 $x=0$ 和 $x=1$ 时它的值是奇数，那么当它的变数为任何整数值时，它的值都不会是零.

因式分解：

20. $f(x)=x^4+x^3-5x^2+2$.

21. $f(x)=x^4-4x^2+x+2$.

22. $f(x)=x^4-7x^3+12x^2+x-1$.

23. $2x^4+x^3-2x^2+4x-1$.

24. $x^4+x^3-16x^2+5x+3$.

25. $2x^4+x^3+4x^2+13x-4$.

26. $x^4-5x^3+6x^2-5x+1$.

27. $x^4+7x^3+12x^2+x-1$.

28. $x^6+x^5-11x^4-2x^3+x^2-11x-3$.

29. $x^7+x^5-x^4+x^3-x^2-1$.

30. $x^4-7x^3y+5x^2y^2+31xy^3-30y^4$.

31. $9x^4-12x^3y-71x^2y^2-40xy^3+16y^4$.

32. $15x^4-8x^3y+31x^2y^2-16xy^3+2y^4$.

33. $12x^5-32x^4y+9x^3y^2+16x^2y^3-3xy^4-2y^5$.

34. $x^3-3ax^2y+(2a^2-3b^2)xy^2+(3ab^2+2b^3-2a^2b)y^3$.

35. $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$.

提示　应用代换：$x^2+4x+8=tx$

36. $2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2$.

因式分解：

37. $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12$.

38. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

39. $(a-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^3$.

40. $(a+b+c)^3-3abc$.

41. $a^{5n}+a^n+1$.

42. $(x-1)x(x+1)(x+2)+1$.

43. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.

44. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$.

45. $x^4-2x^3-27x^2-44x+7$.

46. $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$.

47. $(b-c)(b+c)^2+(c-a)(c+a)^2+(a-b)(a+b)^2$.

48. $a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2$
$+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

49. $a^2x[2(x-1)-b^3]+2[(b^3-2)x+2]-b^6$.

50. $(ax+by)^2+(ay-bx)^2$.

51. $n[n^2-4(a+n)+x(a-n)]-a(x^2-16)$.

52. $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$.

53. $[(x^2+y^2)(a^2+b^2)+4abxy]^2-4[xy(a^2+b^2)$
$+ab(x^2+y^2)]^2$.

54. $2a^2b+4ab^2-a^2c+ac^2-4b^2c+2bc^2-4abc$.

55. $y(x-2z)^2+8xyz+x(y-2z)^2-2z(x+y)^2$.

56. $8x^3(y+z)-y^3(z+2x)-z^3(2x-y)$.

57. $(x^2+y^2)^3+(z^2-x^2)^3-(y^2+z^2)^3$.

58. $x^4-2x^2y^2-4xy^3+4x^3y+y^2(4x^2+\frac{3}{4}y^2)$.

59. 在实数范围内分解因式：
$\sqrt{6}x^2+(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})xy-12y^2$.

60. 在复数范围内分解因式：

$x^2-(3+i)x-16+15i$.

因式分解：

61. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

62. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.

63. $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$.

64. $(x-b)(x-c)(b-c)+(x-c)(x-a)(c-a)+(x-a)(x-b)(a-b)$.

65. $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

66. $x^5(y-z)+y^5(z-x)+z^5(x-y)$.

67. $x^{5n+1}+x^{5n}-x^{4n}+x^{3n}-x^{2n}-x^{n+1}$.

68. $x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$.

利用因式分解求下列多项式的最高公因式：

69. $f_1(x)=3x^3-13x^2+23x-21$;
$f_2(x)=6x^3+x^2-44x+21$.

70. $f_1(x)=x^4-7x^3+8x^2+28x-48$;
$f_2(x)=x^3-8x^2+19x-14$.

71. $f_1(x)=6a^4x-17a^3x^2+14a^2x^3-3ax^4$;
$f_2(x)=2a^4+3a^3x-9a^2x^2$.

72. $f_1(x)=2x^3-(2a-9)x^2+(6-9a)x+27$;
$f_2(x)=2x^2+13x+18$.

用因式分解求两个多项式的最低公倍式：

73. $f_1(x, y)=x^3+2x^2y-xy^2-2y^3$;
$f_2(x, y)=x^3-2x^2y-xy^2+2y^3$.

74. $f_1(x)=27a^5x^{n-3}-a^2b^3x^{n-3}$;
$f_2(x)=9a^3x^{n-4}+3a^2bx^{n-2}+ab^2x^n$.

75. $f_1(x)=x^n+n^2x^{n-1}-n^4x^{n-2}-n^6x^{n-3}$;

$f_2(x)=6x^3-12nx^2+6n^2x^2+6n^2x-12n^3x+6n^4$.

76. $f_1(x)=2x^3+(2a-3b)x^2-(2b^2+3ab)x+3b^3$;

$f_2(x)=2x^2-(3b-2c)x-3bc$.

用辗转相除法求下列多项式的最高公因式：

77. $A=2x^4-5x^3+9x^2-8x+4$;

$B=3x^4-5x^3+6x^2-2x-4$.

78. $A=2a^3-5a^2b-5ab^2+6b^3$;

$B=a^4-2a^3b-4a^2b^2+5ab^3-6b^4$.

79. $A=x^4-14x^2-12x+16$;

$B=x^4+6x^3+10x^2-8$;

$C=x^4+4x^3-8x+4$.

求下列多项式的最低公倍式，并把它分解成因式：

80. $A=x^4+3x^3+2x^2+3x+1$;

$B=2x^3+5x^2-x-1$.

81. $A=2a^4+3a^3b+4a^2b^2+2ab^3+b^4$;

$B=2a^4-a^3b+2a^2b^2+b^4$.

82. $A=2x^3-x^2-13x-6$;

$B=2x^3+7x^2+7x+2$;

$C=x^3+6x^2+11x+6$.

化简下列各式：

83. $\dfrac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$.

84. $\dfrac{a^4-2a^2b+2a^2c-2bd^2+2cd^2-d^4}{a^4-4c^2+4cd^2-4a^2b+4b^2-d^4}$.

85. $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$.

86. $\dfrac{y^2z^2}{b^2c^2}+\dfrac{(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+\dfrac{(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}$.

87. $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(c+a)}+\dfrac{b^2-ac}{(b+c)(a+b)}$

$+\dfrac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$.

88. $\dfrac{1}{(a-c)(b-c)}+\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}$.

89. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)(b-d)}$

$+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\dfrac{d}{(d-a)(d-b)(d-c)}$.

90. 当 $x=\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4(a+b)}$时，计算$\dfrac{a-x}{x-b}$的值.

91. 当 $x=\dfrac{a-1}{a}$时，计算

$\dfrac{ax+1}{x}-\left[a(x+1)-\dfrac{a(x^2-1)+x}{x}\right]$的值.

92. 当 $A=-(x+y+z)$， $B=xy+yz+xz$， $C=-xyz$ 时，计算 $P=A^2-2B$ 和 $Q=3AB-A^3-3C$ 的值.

93. 当 $y=\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}$ 时，计算 $y^2-(2y+1)\sqrt{x}$ 的值.

94. 当 $x=\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2a}}$时，计算$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$+\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}$.

95. 当 $x=\dfrac{1}{2}[\sqrt{c+n}+\sqrt{c-3n}]$， $y=\dfrac{1}{2}[\sqrt{c+n}$

$-\sqrt{c-3n}]$时，计算 x^2+xy+y^2.

96. 化简：$\sqrt{2a^2-b^2+2a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}}$. $(a\geqslant\sqrt{2}b>0)$

97. 化简$\sqrt{\frac{1}{2}(a^2-n^2)-(a-n)\sqrt{2n(a-n)}}$.

98. 化简$\sqrt{a+b-c-2\sqrt{b(a-c)}}$.

证明下列恒等式：

99. $(x+y)^3-(x^2-y^2)(x-y)=4xy(x+y)$.

100. $(x^2+xy+y^2)^2-4xy(x^2+y^2)=(x^2-xy+y^2)^2$.

101. $x^4+y^4+(x+y)^4=2(x^2+xy+y^2)^2$.

〔提示$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$〕

102. $\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{x+y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right]\cdot\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}$

$=\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

103. $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{c-b}{x-a}+\frac{a-c}{x-b}+\frac{b-a}{x-c}$.

104. 设 $x=a-b$, $y=b-c$, $z=c-a$, 求证

$xyz+y(x+y)^2+z(x+y)^2=0$.

105. 设 $a^2+b^2+c^2=1$, $x^2+y^2+z^2=1$, 求证

$(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2+$

$(ax+by+cz)^2=1$.

106. 若 $x^2=y^2+z^2$, 求证：

$(5x-3y+4z)(5x-3y-4z)=(3x-5y)^2$.

107. 若 $x=a+b$, 求证$\frac{x^2+a^2+ab}{3x}=\frac{x+a}{3}$.

108. 若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, 求证

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2.$$

109. 设 $ax^3=by^3=cz^3$，且$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，求证

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$

110. 设 a，b，x 是实数，且$\left(x^3+\frac{1}{x^3}-a\right)^2+\left|x+\frac{1}{x}-b\right|=0$，求证 $b^3-3b-a=0$.

111. 设 a，b，c，x，y，z 均为实数，且$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$，求证

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

112. 证明，假使 $a+b+c=0$，则

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=1.$$

113. 证明，　假使$\frac{a-b}{1+ab}+\frac{c-d}{1+cd}=0$，则

$$\frac{a-d}{1+ad}+\frac{c-b}{1+bc}=\frac{a+c}{1-ac}+\frac{b+d}{bd-1}=0.$$

114. 证明，假使

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1,$$

则其中的两个分式都等于1，而第三个分式等于 -1.

115. x、y、z 为任意实数，若

$$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2,$$

试证：$x=y=z$.

116. 若 $a+b+c+d=0$，求证

$$(abc+bcd+cda+dab)^2$$

$$=(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd).$$

117. 若 $X+Y+Z+W=0$，试证：

$$WX(W+X)^2+YZ(W-X)^2+WY(W+Y)^2$$
$$+ZX(W-Y)^2+WZ(W+Z)^2+XY(W-Z)^2$$
$$+4XYZW=0.$$

118. 设 $X+Y+Z=0$，求证：

$$\left(\frac{X^2+Y^2+Z^2}{2}\right)\left(\frac{X^5+Y^5+Z^5}{5}\right)$$
$$=\frac{X^7+Y^7+Z^7}{7}.$$

119. 设 $a+b+c=0$，试证

$$2(a^7+b^7+c^7)=7abc(a^4+b^4+c^4).$$

120. 设 $x+y+z=0$，试证

$$\frac{x^5+y^5+z^5}{5}=\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

第三章　方程与方程组

§1．方程与方程组

含有未知数的等式叫做方程．凡满足方程的值称为方程的解．只含有一个未知数的方程的解，也叫做方程的根．如 $f(x)$ 是一元 n 次多项式 $(n\geqslant 1)$，则 $f(x)=0$ 叫做一元 n 次方程．它的一般形式是

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0,$$

式中 $a_0\neq 0$，n 是正整数．求方程的全部解或确定方程无解的过程叫做解方程．

两个方程叫同解方程，是指其中每一个方程的解，同时是另一个方程的解．如方程的两边同加一个数或同一个代数整式，其所得的方程与原方程是同解方程．又如方程的两边同乘以（或除以）一个不等于零的数，则所得的方程与原方程也是同解方程．

在解方程的过程中，若方程两边同乘以一个代数整式，或方程两边同时作同次乘方，或未知数的允许值扩大了范围，都可能产生增根，这时要把所得的方程的解，代入原方程式进行验算，不符合原方程或使原方程无意义的未知数的值叫增根，要舍去．

在解方程的过程中，如果方程两边同时除以代数整式，或方程两边开同次方，或缩小了未知数的允许值范围，都可

能产生失根，在解方程时，应尽量避免和注意产生失根的变形．

方程的基本解法：

一元一次方程 方程中只有一个未知数，而且它的最高次数是 1．经过移项、合并同类项，总可以得到 $ax=b$．当 $a\neq 0$，方程总有一解 $x=\frac{b}{a}$；当 $a=0$，$b\neq 0$，方程无解；当 $a=0$，$b=0$，方程的解是全部实数．

一元二次方程 形如 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的方程叫做一元二次方程．

特殊的一元二次方程的解法，如 $ax^2+c=0$，用开方法；$ax^2+bx=0$，用因式分解法．

一般的一元二次方程用配方法或公式法解，求根公式是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

当 $b^2-4ac>0$，方程有两个不相同的实数根．

当 $b^2-4ac=0$，方程有两个相同的实数根．

当 $b^2-4ac<0$，方程有两个共轭的虚数根．（在实数范围内无解）

分式方程 分式的分母含有未知数的方程叫分式方程．

一般解法是用分母的最小公倍式遍乘方程每一项得一有理整方程求解．

无理方程 未知数含在根号内的方程叫做无理方程，也叫根式方程．一般解法：

① 方程两边同时乘方相同次数，脱去根号，化为有理方程求解．

② 应用换元法化为有理方程求解.

二元一次方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$

用代入法或加减法消去一个元求解.

用行列式法

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

若$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$，方程组有一组解.

若$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$，方程组无解.

若$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，方程组有无限多组解.

二元二次方程组 $\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0 \\ lx+my+n=0 \end{cases}$

用代入法消元求解.

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0 \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0 \end{cases}$$

消元　$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{d_1}{d_2}$时，可以消去 x，先求 y.

$\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{e_1}{e_2}$时，可以消去 y，先求 x.

降次　$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$时，可以消去二次项得一次方程，用代入法求解.

$\frac{d_1}{d_2}=\frac{e_1}{e_2}=\frac{f_1}{f_2}$时，可以消去一次项和常数项，得二次齐次方程，解出 $x=my$，$x=ny$，用代入法求解.

一个方程或两个方程可以分解因式，以其一个方程中的因式等于 0，分别与另一个方程联立求解.

例 1 解方程 $(1+x^2)^2=4x(1-x^2)$.

分析 $(1+x^2)^2=(1-x^2)^2+4x^2$，原方程可化为以 $(1-x^2)$ 为未知数的二次方程.

解 原方程可化为

$$(1-x^2)^2+4x^2-4x(1-x^2)=0$$

$$(1-x^2)^2-4x(1-x^2)+4x^2=0$$

$\therefore$ $(1-x^2-2x)^2=0$

$\therefore$ $x_{1,2}=-1+\sqrt{2}$，$x_{3,4}=-1-\sqrt{2}$.

例 2 解方程 $2(10x+13)^2(5x+8)(x+1)=1$.

分析 $2(5x+8)=10x+16=10x+13+3$，而 $10x+10=10x+13-3$，原方程可化为以 $(10x+13)$ 为未知数的双二次方程.

解 两边同乘以 10，得

$$(10x+13)^2[(10x+13+3)(10x+13-3)]=10$$

即 $$(10x+13)^4-9(10x+13)^2-10=0$$

$$[(10x+13)^2+1][(10x+13)^2-10]=0$$

$(10x+13)^2+1=0$，$\therefore$ $x_{1,2}=\frac{-13\pm i}{10}$

$(10x+13)^2-10=0$，$\therefore$ $x_{3,4}=\frac{-13\pm\sqrt{10}}{10}$.

例 3 解方程 $\frac{x^2+3x-1}{4x^2+6x+1}-\frac{3(4x^2+6x+1)}{x^2+3x-1}-2=0$

分析 因为 $\frac{x^2+3x-1}{4x^2+6x+1}$ 与 $\frac{4x^2+6x+1}{x^2+3x-1}$ 互为倒数，所以可用换元法.

解 令 $\frac{x^2+3x-1}{4x^2+6x+1}=y$，则 $\frac{4x^2+6x+1}{x^2+3x-1}=\frac{1}{y}$. 原方程变形为

$$y-\frac{3}{y}-2=0.$$

即 $y^2-2y-3=0$，解之得 $y_1=3$，$y_2=-1$.

由此 $\frac{x^2+3x-1}{4x^2+6x+1}=3$，解之得 $x_1=-1$，$x_2=-\frac{4}{11}$.

或 $\frac{x^2+3x-1}{4x^2+6x+1}=-1$，解之得 $x_3=0$，$x_4=-\frac{9}{5}$.

例 4 解方程 $\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0$.

分析 方程各项的分母是 x，$x-1$，$x-2$，$x-3$，$x-4$，$x-5$. 而 $x(x-5)$；$(x-1)(x-4)$；$(x-2)(x-3)$ 作为分母的前两项相同，可以用换元法使分母降次.

解 原方程变形为

$$\frac{3(2x-5)}{x(x-5)}+\frac{2x-5}{(x-1)(x-4)}+\frac{4(2x-5)}{(x-2)(x-3)}=0$$

于是得 $2x-5=0$，$\therefore\ x_1=\frac{5}{2}$.

或 $$\frac{3}{x^2-5x}+\frac{1}{x^2-5x+4}+\frac{4}{x^2-5x+6}=0.$$

令 $x^2-5x=y$，得 $\frac{3}{y}+\frac{1}{y+4}+\frac{4}{y+6}=0$.

解之得　$y=-2$ 或 $y=-\frac{9}{2}$.

$$\therefore\quad x^2-5x=-2,\ \text{解之得}\ x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2},$$

$$x^2-5x=-\frac{9}{2},\ \text{解之得}\ x_{4,5}=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}.$$

注 分式方程不是都用乘以分母的最小公倍式化为有理整方程求解，要根据题目特点，有时采用换元法将分母的未知数的次数降低，以便于用一般方法求解.

例 5　解方程　$\sqrt{2x^2+x-36}+\sqrt{2x^2+11x+9}=2x+9$.

解　方程的存在域为 $x\geqslant 4$.

$$\sqrt{(2x+9)(x-4)}+\sqrt{(2x+9)(x+1)}=2x+9,$$

$$\therefore\quad \sqrt{2x+9}\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+9}\right)=0.$$

如　$\sqrt{2x+9}=0$，则 $x=-\frac{9}{2}$,（舍去）

如　$\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2x+9}$,

两边平方得　$\sqrt{(x-4)(x+1)}=6$,

两边平方得　$x^2-3x-40=0$

$\therefore\quad x=8,\ x=-5$.（舍去）

所以原方程的解为　$x=8$.

例 6　解方程　$\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{5-x}=\sqrt[3]{5}$.　　(1)

解一　两边立方

$$5+x+5-x+3\sqrt[3]{5+x}\sqrt[3]{5-x}\left(\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{5-x}\right)=5.\quad(2)$$

以 $\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{5-x}=\sqrt[3]{5}$ 代换之，得

$$3\sqrt[3]{5+x}\sqrt[3]{5-x}=-\sqrt[3]{5^2},\quad(3)$$

两边立方　$27(25-x^2)=-25$，

$\therefore\quad x^2=\dfrac{700}{27}$，即　$x=\pm\dfrac{10}{9}\sqrt{21}$.

注　方程(2)变形为(3)时可能产生增根，所以结果要进行检验.

解二　两边同除以 $\sqrt[3]{5}$，得

$$\sqrt[3]{1+\frac{x}{5}}+\sqrt[3]{1-\frac{x}{5}}=1.$$

令　$\dfrac{x}{5}=y$，则　$\sqrt[3]{1+y}+\sqrt[3]{1-y}=1$.

令　$\sqrt[3]{1+y}=\mu$，　$\therefore\quad \mu+\sqrt[3]{2-\mu^3}=1$.

即　$\sqrt[3]{2-\mu^3}=1-\mu$.

两边立方　$3\mu^2-3\mu-1=0$，

$\therefore\quad \mu=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{6}$，将 μ 代入 $\sqrt[3]{1+y}=\mu$，

$\therefore\quad 1+y=\mu^3$，$y=\pm\dfrac{2}{9}\sqrt{21}$，代入 $\dfrac{x}{5}=y$，

则　$x=\pm\dfrac{10}{9}\sqrt{21}$.

例 7　解方程 $\sqrt{2x^2-7x+1}-\sqrt{2x^2-9x+4}=1$.

解　方程两边乘以共轭根式

$\sqrt{2x^2-7x+1}+\sqrt{2x^2-9x+4}$　得

$\sqrt{2x^2-7x+1}+\sqrt{2x^2-9x+4}=2x-3$.

与原式相加得

$$2\sqrt{2x^2-7x+1}=2x-2 \tag{*}$$

两边平方　$2x^2-7x+1=x^2-2x+1$，

即　　$x^2-5x=0$，$x=0$　或　$x=5$.

经代入(*)检验，$x=0$ 不是方程的根.

$\therefore\quad x=5$ 是原方程的根.

例 8　解方程 $\sqrt[5]{171-x}+\sqrt[5]{104+x}=5$.

解　设 $\sqrt[5]{171-x}=u$，$\sqrt[5]{104+x}=v$，则

$$u+v=5$$

$\because\quad (u+v)^5=u^5+v^5+5uv(u^3+v^3)+10u^2v^2(u+v)$

$$=u^5+v^5+5uv(u+v)^3-5u^2v^2(u+v),$$

$\therefore\quad u^2v^2-25uv+114=0,$

即　$(uv-6)(uv-19)=0.$

由此得到两个方程组：

$$① \begin{cases} u+v=5, \\ uv=6, \end{cases} \qquad ② \begin{cases} u+v=5, \\ uv=19, \end{cases}$$

解①得 $\begin{cases} u_1=2, \\ v_1=3. \end{cases}$

解②得 $\begin{cases} u_2=3, \\ v_2=2. \end{cases}$　在实数范围内无解.

若　$\sqrt[5]{171-x}=2$，则　$x_1=139$.

若　$\sqrt[5]{171-x}=3$，则　$x_2=-72$.

经检验知它们都是原方程的解.

例 9　解方程 $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

解　$\because\quad \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}$

$$=|\sqrt{x-1}-2|$$

$$\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}$$

$$=|\sqrt{x-1}-3|,$$

原方程变形为

$$|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1,$$

方程的存在域是 $x>1$.

当 $\sqrt{x-1}-2\leqslant 0$（即 $1\leqslant x\leqslant 5$）时，

$$2-\sqrt{x-1}+3-\sqrt{x-1}=1,$$

即 $\sqrt{x-1}=2$, $\quad\therefore\quad x=5$.

当 $2\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 3$（即 $5\leqslant x\leqslant 10$）时，

$$\sqrt{x-1}-2+3-\sqrt{x-1}=1,\ \text{即}\ 0\cdot\sqrt{x-1}=0.$$

这是恒等方程，$5\leqslant x\leqslant 10$ 的实数均为方程的解.

当 $\sqrt{x-1}\geqslant 3$（即 $x\geqslant 10$）时，

$$\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=1.$$

即 $\sqrt{x-1}=3$, $\quad\therefore\quad x=10$.

综合以上所得，方程的解是 $5\leqslant x\leqslant 10$.

注　绝对值方程，要分区间分别求解，所得的解若在区间内是原方程的解，若不在所分区间内，则不是原方程的解.

例 10　解方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+3x-3y=16 & (1)\\ xy+y-x=1. & (2)\end{cases}$

解一　(1) − 2(2) 得

$$(x-y)^2+5(x-y)-14=0,$$

$$\therefore\quad (x-y+7)(x-y-2)=0.$$

得下面两个方程组

$$①\begin{cases}x-y+7=0\\ xy+y-x=1,\end{cases}\qquad ②\begin{cases}x-y-2=0,\\ xy+y-x=1.\end{cases}$$

由①得 $\begin{cases}x-y=-7,\\ xy=-6,\end{cases}$　解之得 $\begin{cases}x_1=-6,\\ y_1=1;\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=6;\end{cases}$

由②得 $\begin{cases} x-y=2, \\ xy=3, \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} x_3=-1, \\ y_3=-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=3, \\ y_4=1. \end{cases}$

解二 第二个方程可以分解因式得

$$(y-1)(x+1)=0.$$

以 $y=1$ 代入(1)得 $x=-6$，$x=3$.

以 $x=-1$ 代入(1)得 $y=6$，$y=-3$.

$$\therefore \begin{cases} x_1=-6, \\ y_1=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=-1, \\ y_3=6; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=-1, \\ y_4=-3. \end{cases}$$

例 11 解方程组 $\begin{cases} x^2=6+(y-z)^2 & (1) \\ y^2=2+(z-x)^2 & (2) \\ z^2=3+(x-y)^2. & (3) \end{cases}$

解 由(1) $(x-y+z)(x+y-z)=6$ (4)

由(2) $(y+z-x)(y-z+x)=2$ (5)

由(3) $(z+x-y)(z-x+y)=3$ (6)

(4)×(5)×(6) $[(x-y+z)(x+y-z)(y+z-x)]^2=36$

$\therefore$ $(x-y+z)(x+y-z)(y+z-x)=\pm 6.$ (7)

(7)÷(4) $y+z-x=\pm 1,$ (8)

(7)÷(5) $x+z-y=\pm 3,$ (9)

(7)÷(6) $x+y-z=\pm 2,$ (10)

(8)+(9)+(10) $x+y+z=\pm 6.$ (11)

(11)−(8)得 $2x=\pm 5$，$x=\pm\frac{5}{2}$，

(11)−(9)得 $2y=\pm 3$，$y=\pm\frac{3}{2}$，

(11)−(10)得 $2z=\pm 4$，$z=\pm 2$，

$$\therefore \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{2}, \\ y_1 = \dfrac{3}{2}, \\ z_1 = 2, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{5}{2}, \\ y_2 = -\dfrac{3}{2}, \\ z_2 = -2. \end{cases}$$

例 12 解方程组 $\begin{cases} x+y+z=\sqrt{x+y+z+1}+5 & (1) \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4} & (2) \end{cases}$

解一 由(1) $x+y+z+1-\sqrt{x+y+z+1}-6=0$

$\therefore \quad \sqrt{x+y+z+1}=3$，或 $\sqrt{x+y+z+1}=-2$ (舍去)．

即 $x+y+z=8$

由(2) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}=\dfrac{x+y+z}{9}=\dfrac{8}{9}$

$\therefore \quad x=1\dfrac{7}{9}$，$y=2\dfrac{2}{3}$，$z=3\dfrac{5}{9}$．

解二 由(2) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}=k$.

$\therefore \quad x=2k$，$y=3k$，$z=4k$.

代入(1)得 $9k=\sqrt{9k+1}+5$，

解之得 $k=\dfrac{8}{9}$，或 $k=\dfrac{1}{3}$(舍去)．

$\therefore \quad x=1\dfrac{7}{9}$，$y=2\dfrac{2}{3}$，$z=3\dfrac{5}{9}$．

例 13 解方程组 $\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y}=2, \\ \dfrac{xyz}{x+z}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{xyz}{y+z}=\dfrac{6}{5}. \end{cases}$

解一 方程组变形为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}=\dfrac{1}{2},\\[2mm] \dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{2}{3},\\[2mm] \dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{5}{6}.\end{cases}$$

将诸方程两边分别相加得：

$$\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xy}=1.$$

以上式代入方程组中得

$$① \begin{cases}\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{2},\\[2mm] \dfrac{1}{xz}=\dfrac{1}{3},\\[2mm] \dfrac{1}{yz}=\dfrac{1}{6},\end{cases} \quad 即 \quad ② \begin{cases}xy=2,\\ xz=3,\\ yz=6.\end{cases}$$

②中诸方程两边分别相乘得 $xyz=\pm 6$.

以上式分别除以②中各式得

$$\begin{cases}x=\pm 1\\ y=\pm 2\\ z=\pm 3\end{cases}$$

解二 由方程左边分子均为 xyz，原方程组可变为

$$xyz=2(x+y)=\frac{3}{2}(x+z)=\frac{6}{5}(y+z),$$

于是得 $$\begin{cases}2(x+y)=\dfrac{3}{2}(x+z),\\[2mm] 2(x+y)=\dfrac{6}{5}(y+z),\\[2mm] 2(x+y)=xyz.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x+4y=3z & (1)\\ 10x+4y=6z & (2)\\ 2(x+y)=xyz & (3)\end{cases}$$

由(1)，(2)得 $x=\dfrac{1}{3}z,\qquad y=\dfrac{2}{3}z.$

以此代入(3)得 $z=\pm 3$

从而原方程组的解为

$$x=\pm 1,\ y=\pm 2,\ z=\pm 3.$$

例 14 解方程组 $\begin{cases}(x+y)^2+(y+z)^2=17,\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=3,\\ x^2+2xz+z^2=9.\end{cases}$

解 $\because$ $x+y\geqslant 0$，$y+z\geqslant 0$，由前两个方程得

$$\begin{cases}(x+y)^2=16,\\ (y+z)^2=1.\end{cases}\quad 及\quad \begin{cases}(x+y)^2=1,\\ (y+z)^2=16.\end{cases}$$

由第三个方程得 $(x+z)^2=9.$

由此得
$$\begin{cases}x+z=3,\\ x+y=4,\\ y+z=1,\end{cases}\qquad \begin{cases}x+z=-3,\\ x+y=4,\\ y+z=1.\end{cases}$$
$$\begin{cases}x+z=3,\\ x+y=1,\\ y+z=4,\end{cases}\qquad \begin{cases}x+z=-3,\\ x+y=1,\\ y+z=4.\end{cases}$$

解之得
$$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=1,\\ z_1=0,\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=0,\\ y_2=4,\\ z_2=-3,\end{cases}\quad \begin{cases}x_3=0,\\ y_3=1,\\ z_3=3,\end{cases}\quad \begin{cases}x_4=-3,\\ y_4=4,\\ z_4=0.\end{cases}$$

例 15 解方程 $(x^4+2)(y^4+3)(z^4+6)=48x^2y^2z^2$．求实数解．

解一　∵　$x^4+2\geqslant 2\sqrt{2}x^2\geqslant 0$,

$y^4+3\geqslant 2\sqrt{3}y^2\geqslant 0$,

$z^4+6\geqslant 2\sqrt{6}z^2\geqslant 0$,

∴　$(x^4+2)(y^4+3)(z^4+6)\geqslant 48x^2y^2z^2$,

仅当 $x^4=2$, $y^4=3$, $z^4=6$ 时，上式取等号.

∴　$x=\pm\sqrt[4]{2}$, $y=\pm\sqrt[4]{3}$, $z=\pm\sqrt[4]{6}$ 是原方程的解.

解二　把原方程变形为

$$x^4y^4z^4+2y^4z^4+3x^4z^4+6x^4y^4+18x^4+12y^4+6z^4-48x^2y^2z^2+36=0$$

集项　$(x^4y^4z^4-12x^2y^2z^2+36)+2(y^4z^4-6x^2y^2z^2+9x^4)+3(x^4z^4-4x^2y^2z^2+4y^4)+6(x^4y^4-2x^2y^2z^2+z^4)=0$,

$$(x^2y^2z^2-6)^2+2(y^2z^2-3x^2)^2+3(x^2z^2-2y^2)^2+6(x^2y^2-z^2)^2=0.$$

根据实数的性质，得

$$\begin{cases} x^2y^2z^2=6 & (1)\\ y^2z^2=3x^2 & (2)\\ x^2z^2=2y^2 & (3)\\ x^2y^2=z^2 & (4)\end{cases}$$

由于 x, y, z 都不为 0，所以

由(1)(2)知　$x^4=2$,　∴　$x=\pm\sqrt[4]{2}$;

由(1)(3)知　$y^4=3$,　∴　$y=\pm\sqrt[4]{3}$;

由(1)(4)知　$z^4=6$,　∴　$z=\pm\sqrt[4]{6}$.

§2. 高次方程

一元 n 次方程，当 $n>2$ 时，叫做一元高次方程．一元 n

次有理整方程有 n 个根，且仅有 n 个根(实根或复根)．其中若有复根 $a+bi$ $(b\neq 0)$，则必有共轭复根 $a-bi$ 相伴出现；若有无理根 $a+\sqrt{b}$ $(b\neq 0)$，则必有一根 $a-\sqrt{b}$ 也相伴出现．当 n 是奇数时，奇次实系数方程，至少有一实根；奇次有理系数方程至少有一有理根．

韦达(1540—1603)定理，揭示了根与系数的关系．若一元 n 次方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

的根是 x_1，x_2，$\cdots\cdots x_n$，则

$$x_1+x_2+\cdots\cdots x_n=-a_1$$

$$x_1x_2+x_2x_3+\cdots\cdots x_{n-1}x_n=a_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1x_2x_3\cdots\cdots x_n=(-1)^n a_n$$

由最后一式，显然可见：方程的每一个根，都必须是常数项 a_n 的一个因数．

平常，求 n 次方程

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$$

的根，常从常数项 a_n 入手，即先分析 a_n 的因数，然后依下述定理寻求．

余式定理 以 $x-a$ 除多项式 $f(x)$ 所得的余式等于 $f(a)$．应用这个定理，无需通过除法来求多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余式，只需计算 $f(a)$ 即得．若 $f(a)=0$，即 $f(x)$ 能被 $x-a$ 所整除．

因式定理 多项式 $f(x)$ 在且只在 $f(a)=0$ 时有因式 $x-a$．应用这个定理，若 $f(a)=0$，则 a 是 $f(x)=0$ 的解或根．

二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一般解是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

三次、四次方程也有各自的一般解法．但五次或五次以上的高次方程，已经证明不存在一般解法．因此，四次以上的高次方程，只是一些特殊的方程才能求解．

距首末两项等远的项的系数相等的有理整方程叫倒数方程，可变形求解(参看例 3)．

例 1 解方程 $x(x-1)(x-2)=a(a-1)(a-2)$

解 观察知 $x_1=a$ 是方程的一根．所以原方程可变形为

$$(x-a)[x^2+(a-3)x+(a-1)(a-2)]=0.$$

如果 $x^2+(a-3)x+(a-1)(a-2)=0$，则

$$x_{2,3}=\frac{(3-a)\pm\sqrt{1+6a-3a^2}}{2}$$

例 2 解方程 $2x^5-x^4-15x^3+9x^2+16x+4=0$

解 因为方程无 ± 1 的根，方程可能有± 2，± 4，$\pm\frac{1}{2}$的根，用试除法求

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2 & -1 & -15 & +9 & +16 & +4 & \underline{2} \\
 & +4 & +6 & -18 & -18 & -4 & \\
\hline
2 & +3 & -9 & -9 & -2 & 0 & \underline{2} \\
 & +4 & +14 & +10 & +2 & & \\
\hline
2 & +7 & +5 & +1 & 0 & & -\frac{1}{2} \\
 & -1 & -3 & -1 & & & \\
\hline
2 & +6 & +2 & 0 & & &
\end{array}$$

$$2x^2+6x+2=0,\qquad x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$\therefore$ 方程的根是 2，2，$-\frac{1}{2}$，$\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$．

例 3 解方程 $25x^4-100x^3-106x^2-100x+25=0$.

这类方程叫倒数方程，把系数相同的项放在一起，因 $x=0$ 不是原方程的解，用 x^2 除之，再变形求解.

解 用 x^2 除之得

$$25\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-100\left(x+\frac{1}{x}\right)-106=0,$$

$$\therefore\quad 25\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-100\left(x+\frac{1}{x}\right)-156=0.$$

令 $\quad x+\dfrac{1}{x}=y$，则 $\quad 25y^2-100y-156=0$,

即 $\qquad (5y+6)(5y-26)=0$,

$\therefore\quad y=-\dfrac{6}{5}$，或 $\quad y=\dfrac{26}{5}$.

如 $\quad x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{26}{5}$，则 $\quad x_1=5$，$x_2=\dfrac{1}{5}$,

如 $\quad x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{6}{5}$，则 $\quad x_{3,4}=\dfrac{-3\pm 8i}{5}$.

例 4 已知方程 $2x^4-13x^3+26x^2-18x+4=0$ 有两根互为倒数，解这个方程.

解 方程两个根互为倒数，这个方程有一个二次因式 x^2+px+1，从而另一个因式是 $2x^2+qx+4$.

$$\therefore\quad 2x^4-13x^3+26x^2-18x+4$$
$$=(x^2+px+1)(2x^2+qx+4),$$

即
$$2x^4-13x^3+26x^2-18x+4$$
$$=2x^4+(2p+q)x^3+(6+pq)x^2+(4p+q)x+4.$$

根据多项式相等的定义知

$$\begin{cases}2p+q=-13,\\ 6+pq=26,\\ 4p+q=-18.\end{cases}$$

解之得　$p=-\dfrac{5}{2}$，　$q=-8$.

∴　原方程可分解为

$$\left(x^2-\frac{5}{2}x+1\right)(2x^2-8x+4)=0.$$

如　$2x^2-5x+2=0$，则　$x_1=2$，$x_2=\dfrac{1}{2}$.

如　$x^2-4x^2+2=0$，则　$x_{3,4}=2\pm\sqrt{2}$.

例 5　若 a,b,c 为整系数方程 $12x^3-28x^2+17x+d=0$ 的根，且 $b=a+1$. 求 a，b，c，d 的值.

解　根据根与系数的关系得

$$a+b+c=\frac{28}{12}, \tag{1}$$

$$ab+bc+ca=\frac{17}{12}, \tag{2}$$

$$abc=-\frac{d}{12}, \tag{3}$$

又题设　$b=a+1$　　(4)

将(4)代入(1)，(2)得

$$\begin{cases}2a+c=\dfrac{4}{3},\\[2mm] a^2+2ac+a+c=\dfrac{17}{12}.\end{cases}$$

解之得　$\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{2},\\[2mm] c_1=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$　　$\begin{cases}a_2=\dfrac{1}{18},\\[2mm] c_2=\dfrac{11}{9}.\end{cases}$

将 a 的值代入(4)得　$b_1=\dfrac{3}{2}$，$b_2=\dfrac{19}{18}$.

将 a，b，c 的值代入(3)得 $d_1=-3$，$d_2=-\frac{209}{243}$.

因 d 是整数，略去 d_2，所求诸数应为

$$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2},\ c=\frac{1}{3},\ d=-3.$$

例 6 已知方程 $x^4-4x^3+5x^2-2x-2=0$ 有一根是 $1-i$，解这个方程.

解 有理系数整方程，虚根成对，有一根 $x_1=1-i$，必有 $x_2=1+i$ 的根.

∴ $x^4-4x^3+5x^2-2x-2=(x^2-2x+2)(x^2+ax+b)$.

从而 $x^2+ax+b=x^2-2x-1$.

如 $x^2-2x-1=0$，则 $x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$.

∴ 原方程的根是 $1-i$，$1+i$，$1\pm\sqrt{2}$.

例 7 解方程组 $\begin{cases} x^2y^2+x^2z^2=axyz, \\ y^2z^2+x^2y^2=bxyz, \\ x^2z^2+y^2z^2=cxyz. \end{cases}$

解 观察得到 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 是方程组的一组解. 当 x，y，z 都不等于 0 时，原方程组整理得

$$\begin{cases} x(y^2+z^2)=ayz & (1) \\ y(z^2+x^2)=bxz & (2) \\ z(x^2+y^2)=cxy & (3) \end{cases}$$

由(1)得 $x=\frac{ayz}{y^2+z^2}$, (4)

把(4)代入(2)得

$$a^2y^2+(y^2+z^2)^2=ab(y^2+z^2), \tag{5}$$

把(4)代入(3)得

$$a^2z^2+(y^2+z^2)^2=ac(y^2+z^2), \tag{6}$$

(5) - (6) $\quad a^2(y^2-z^2)=a(b-c)(y^2+z^2)$,

$$\therefore \quad y=\pm\frac{\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)}}{a-b+c}z. \tag{7}$$

以(7)代入(5)得

$$z=\pm\frac{\sqrt{(b-a+c)(a-b+c)}}{2};$$

从而得 $\quad y=\pm\dfrac{\sqrt{(a+b-c)(b-a+c)}}{2}$;

$$x=\pm\frac{\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)}}{2}.$$

例 8 解方程组 $\begin{cases} x+y+z=1, & (1)\\ x^2+y^2+z^2=7, & (2)\\ x^3+y^3+z^3=13. & (3)\end{cases}$

解 由(2) $\quad (x+y+z)^2-2xy-2yz-2xz=7$,

$$\therefore \quad xy+yz+zx=-3. \tag{4}$$

由(3) $\quad (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz=13$,

$$\therefore \quad xyz=1; \tag{5}$$

由(1), (4), (5), 根据韦达定理, 则

x, y, z 为 $u^3-u^2-3u-1=0$ 的三根

$(u+1)(u^2-2u-1)=0$

$\therefore \quad u_1=-1$, $u_2=1+\sqrt{2}$, $u_3=1-\sqrt{2}$.

$\therefore$ 原方程组有六组解:

$\begin{cases} x_1=-1\\ y_1=1+\sqrt{2}\\ z_1=1-\sqrt{2};\end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_2=-1\\ y_2=1-\sqrt{2}\\ z_2=1+\sqrt{2};\end{cases}$

$\begin{cases} x_3=1+\sqrt{2}\\ y_3=-1\\ z_3=1-\sqrt{2};\end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_4=1+\sqrt{2}\\ y_4=1-\sqrt{2}\\ z_4=-1;\end{cases}$

$$\begin{cases}x_5=1-\sqrt{2}\\ y_5=1+\sqrt{2}\\ z_5=-1;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_6=1-\sqrt{2}\\ y_6=-1\\ z_6=1+\sqrt{2}.\end{cases}$$

例 9 试证多项式 $x^9+x^8+x^7+\cdots+x+1$ 能整除多项式 $x^{9999}+x^{8888}+\cdots+x^{1111}+1$.

证 设 $f(x)=x^{9999}+x^{8888}+\cdots+x^{1111}+1$

$g(x)=x^9+x^8+x^7+\cdots+x+1$

则 $f(x)=f(x)-g(x)+g(x)$

$$=(x^{9999}-x^9)+(x^{8888}-x^8)+\cdots+(x^{1111}-x)+g(x)$$

$$=x^9(x^{9990}-1)+x^8(x^{8880}-1)+\cdots+x(x^{1110}-1)+g(x)$$

$$=x^9[(x^{10})^{999}-1]+x^8[(x^{10})^{888}-1]+\cdots$$

$$+x[(x^{10})^{111}-1]+g(x)$$

由于 $x^{10}-1$ 能被 $x^9+x^8+x^7+\cdots+x+1$ 整除，所以，上式每一项均能被 $g(x)$ 整除.

例 10 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 以 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 除之，若 $\alpha\neq\beta$，求其余式.

解 设 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)+(cx+d)$,

令 $x=\alpha$, $f(\alpha)=c\alpha+d$,

$x=\beta$, $f(\beta)=c\beta+d$,

以 c, d 为未知数，解之得

$$c=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha},\quad d=\frac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\beta-\alpha}.$$

例 11 若 m_1, m_2, $\cdots$, m_n 都是实数，且各不相等，求证方程

$$\frac{1}{x+m_1}+\frac{1}{x+m_2}+\cdots+\frac{1}{x+m_n}=0 \text{ 没有虚根.}$$

证 设方程$\frac{1}{x+m_1}+\frac{1}{x+m_2}+\cdots+\frac{1}{x+m_n}=0$ 有虚根 $a+bi$，则必有虚根 $a-bi$ ($b\neq0$)，于是得

$$\frac{1}{a+m_1+bi}+\frac{1}{a+m_2+bi}+\cdots+\frac{1}{a+m_n+bi}=0, \tag{1}$$

及
$$\frac{1}{a+m_1-bi}+\frac{1}{a+m_2-bi}+\cdots+\frac{1}{a+m_n+bi}=0. \tag{2}$$

(1) − (2)
$$\frac{2bi}{(a+m_1)^2+b^2}+\frac{2bi}{(a+m_2)^2+b^2}+\cdots+\frac{2bi}{(a+m_n)^2+b^2}=0,$$

即
$$2\left(\frac{1}{(a+m_1)^2+b^2}+\frac{1}{(a+m_2)^2+b^2}+\cdots+\frac{1}{(a+m_n)^2+b^2}\right)bi=0, \tag{3}$$

a，m_1，$\cdots m_n$，b 均为实数，

$$\frac{1}{(a+m_1)^2+b^2}+\frac{1}{(a+m_2)^2+b^2}+\cdots+\frac{1}{(a+m_n)^2+b^2}\neq0$$

∴ (3)不能成立，∴原方程无虚根.

§3. 方程式的讨论

方程讨论是研究方程的解的性质，或根据解所给条件确定方程中参数的值或范围.

一元一次方程 $ax=b$.

若 $a\neq 0$，方程有唯一解 $x=\frac{b}{a}$.

若 $a=0$，$b\neq 0$，方程无解.

若 $a=0$，$b=0$，方程的解是全部实数.

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的两根为 x_1，x_2.

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

若 $b^2-4ac>0$，方程有不等实根.

① $\frac{c}{a}>0$， 两根同号 $\begin{cases}-\frac{b}{a}>0, & \text{两根为正.}\\ -\frac{b}{a}<0, & \text{两根为负.}\end{cases}$

② $\frac{c}{a}<0$， 两根异号 $\begin{cases}-\frac{b}{a}>0, & \text{正根绝对值大.}\\ -\frac{b}{a}<0, & \text{负根绝对值大.}\end{cases}$

③ $\frac{c}{a}=0$，一根为 0，另一根为 $-\frac{b}{a}$.

若 $b^2-4ac=0$，方程有相等实根.

① $-\frac{b}{a}>0$，两根为正.

② $-\frac{b}{a}<0$，两根为负.

③ $b=c=0$，两根为 0.

若 $b^2-4ac<0$，方程无实数根（或方程的根是虚数）.

二元一次方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2.\end{cases}$

若 $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$，方程组有唯一解.

若$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$，方程组无解(矛盾方程组)

若$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，方程组有无穷多组解(恒等方程组)。

例 1 确定参数a的实数值，使方程$\frac{2ax-5}{a-5}=\frac{2-x}{3}+1$有非负数解.

解 先解方程$\frac{2ax-5}{a-5}=\frac{2-x}{3}+1$,

$$(7a-5)x=5(a-2),$$

$a\neq\frac{5}{7}$且$a\neq5$时，$x=\frac{5(a-2)}{7a-5}$.

若$x>0$，需且仅需$\begin{cases}a-2>0,\\7a-5>0,\end{cases}$ 即$a>2$，

或$\begin{cases}a-2<0,\\7a-5<0,\end{cases}$ 即$a<\frac{5}{7}$.

若$x=0$，需且仅需$\begin{cases}a-2=0,\\7a-5\neq0,\end{cases}$ 即$a=2$.

∴ 当$a>2$且$a\neq5$或$a<\frac{5}{7}$时，$x>0$，

当$a=2$时，$x=0$.

例 2 a是什么实数时，方程的解是正数.

$$\begin{cases}2x+ay=4\\x+4y=8\end{cases}$$

解 $x=\dfrac{\begin{vmatrix}4&a\\8&4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&a\\1&4\end{vmatrix}}=\frac{16-8a}{8-a}=\frac{8(2-a)}{8-a}$.

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 4\\1 & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & a\\1 & 4\end{vmatrix}}=\frac{12}{8-a}$$

如方程组的解是正数，则需且仅需

$$\begin{cases}\dfrac{2-a}{8-a}>0,\\[2mm]\dfrac{1}{8-a}>0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}2-a>0,\\8-a>0,\end{cases}\quad \therefore\quad a<2.$$

故当 $a<2$ 时，方程组的解才是正数.

例 3 解方程组$\begin{cases}(m+2)x+3y=9+3m\\x+(m+4)y=2\end{cases}$，并讨论之.

解 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{m+2}{1}$，$\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{3}{m+4}$，$\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{9+3m}{2}$.

若 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$，则 $\dfrac{m+2}{1}=\dfrac{3}{m+4}$

即 $m^2+6m+5=0$，$\therefore$ $m=-1$，或 $m=-5$.

讨论 ① 当 $m\neq-1$，且 $m\neq-5$ 时，$\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$，方程组有唯一的解：

$$x=\frac{3(m+2)}{m+1},\quad y=-\frac{1}{m+1}.$$

② 当 $m=-5$ 时，$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=-3$，方程组有无穷多组解，$x$，$y$ 只需满足 $x-y=2$.

③ 当 $m=-1$ 时，$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$，方程组无解，原方程组变为矛盾方程：$\begin{cases}x+3y=6,\\x+3y=2.\end{cases}$

例 4　m 取何值时，方程 $x^2-2mx+m^2-1=0$ 的两根介于 -2 与 4 之间.

解　方程 $x^2-2mx+m^2-1=0$ 的根为

$$x=m\pm\sqrt{m^2-m^2+1}=m\pm1,$$

$\therefore$　$x_1=m+1$，$x_2=m-1$.

根据题意

$$\begin{cases}-2<m+1<4,\\-2<m-1<4.\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}-3<m<3,\\-1<m<5,\end{cases}$$

$\therefore$　$-1<m<3$.

即当 $-1<m<3$ 时，方程 $x^2-2mx+m^2-1=0$ 的两根在 -2 与 4 之间.

例 5　已知方程 $x^2-2x+\lg(2a^2-a)=0$ 有一正根和一负根，求实数 a 的值的范围.

解　因方程两根符号相反，所以常数项是负数.

即　$\lg(2a^2-a)<0$.

这时参数 a 须满足

$$2a^2-a<1, \tag{1}$$

$$2a^2-a>0. \tag{2}$$

解(1)得　$-\frac{1}{2}<a<1$,

解(2)得　$a<0$　或　$a>\frac{1}{2}$.

所以参数 a 的取值范围为 $-\frac{1}{2}<a<0$，$\frac{1}{2}<a<1$. 即当 $-\frac{1}{2}<a<0$，$\frac{1}{2}<a<1$ 时，原方程有一正根及一负根.

例 6 解方程

$$a^3(b-c)(x-b)(x-c)+b^3(c-a)(x-c)(x-a)$$
$$+c^3(a-b)(x-a)(x-b)=0.$$

解 原方程变形为

$$[a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)]x^2$$
$$-[a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)]x$$
$$+[a^3(b-c)bc+b^3(c-a)ca+c^3(a-b)ab]$$
$$=0. \qquad (1)$$

现有 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 是 a、b、c 的轮换对称，当 a 换成 b 时，该式为 0，该式有 $a-b$ 的因式，同理该式有因式 $(b-c)$ 和 $(c-a)$.

$$\therefore \quad a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
$$=k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

比较 a^3b 的系数得 $k=-1$.

$$\therefore \quad a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c). \qquad (2)$$

同法得：

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca). \qquad (3)$$
$$a^3(b-c)bc+b^3(c-a)ca+c^3(a-b)ab$$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a)abc. \qquad (4)$$

把(2)，(3)，(4)代入(1)并除以 $-(a-b)(b-c)(c-a)$，得

$$(a+b+c)x^2-(ab+bc+ca)x+abc=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{(ab+bc+ca)\pm\sqrt{(ab+bc+ca)^2-4abc(a+b+c)}}{2(a+b+c)}$$

若方程有等根，则 $\Delta=0$,

即 $$(ab+bc+ca)^2=4abc(a+b+c).$$

例 7 A、B、C 为不相等实数，证明三个二次方程

$$Ax^2+2Bx+C=0,\quad Bx^2+2Cx+A=0,$$

$$Cx^2+2Ax+B=0$$

不可能都得到等根.

解 A、B、C 为不相等的实数，设

$$Ax^2+2Bx+C=0, \tag{1}$$

$$Bx^2+2Cx+A=0, \tag{2}$$

$$Cx^2+2Ax+B=0. \tag{3}$$

都有相等的实数根，则它们的判别式都等于 0，即

$$B^2=AC \tag{4}$$

$$C^2=AB \tag{5}$$

$$A^2=BC \tag{6}$$

由于 A、B、C 为不相等实数，所以 A、B、C 中没有一个为 0，因为如有一个为 0，则由 (4)，(5)，(6) 知 $A=B=C=0$.

(4) ÷ (5) 得 $\dfrac{B^2}{C^2}=\dfrac{C}{B}$，$\therefore\ B^3=C^3$，即 $B=C$.

(6) ÷ (5) 得 $A^3=B^3$，$\therefore\ A=C$.

从而 $A=B=C$，这与已知 A，B，C 为不相等的实数矛盾.

$$\therefore\ Ax^2+2Bx+C=0,\quad Bx^2+2Cx+A=0,$$

$$Cx^2+2Ax+B=0$$

不可能都为实数根.

例 8 甲、乙两架飞机分别从相距为 m 公里的 A、B 两地起飞，沿 AB 方向同向飞行，甲机速度 p 公里/小时，乙

机速度 q 公里/小时，甲机比乙机早起飞 t $(t>0)$ 小时，问当两架飞机相遇时，乙机飞行了多少时间？

解 设乙机飞行了 x 小时，则乙机飞行了 qx 公里．甲机追得乙机，则甲机在 $(x+t)$ 小时内飞行了 $(x+t)p$ 公里，依题意列方程：

$$qx+m=(x+t)p.$$

$$\therefore \quad (p-q)x=m-pt$$

讨论 （一）当 $p\neq q$ 时，$x=\dfrac{m-pt}{p-q}$.

① $\begin{cases} m-pt>0 \\ p-q>0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} m>pt \\ p>q \end{cases}$ 时，$x>0$

这就是说，当甲机速度大于乙机速度，AB 两地距离大于甲机在 t 小时飞行的距离时，则所求 x 值是乙机起飞后，甲机追及乙机的时间．

② 当 $\begin{cases} m-pt<0 \\ p-q<0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} m<pt \\ p<q \end{cases}$ 时，$x>0$.

这就是说，当甲机速度小于乙机速度，AB 两地距离小于甲机在 t 小时飞行的距离，所求 x 的值是甲机飞越 B 地后，乙机追及甲机的时间．

③ 当 $\begin{cases} m-pt>0 \\ p-q<0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} m>pt \\ p<q \end{cases}$ 时，$x<0$

这就是说，当甲机速度小于乙机速度，AB 两地距离大于甲机在 t 小时飞行的距离时，甲机还没有飞到 B 地区，乙机已起飞，由于乙机以比甲机快的速度飞行，所以甲机永远追不上乙机，这时解 $x(x<0)$ 无意义．

④ 当 $\begin{cases} m-pt<0 \\ p-q>0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} m<pt \\ p>q \end{cases}$ 时，$x<0$.

这就是说，当甲机比乙机飞行速度快，甲机在 t 小时飞过 B 地后，乙机才起飞，这样乙机永远追不上甲机．解答 $x(x<0)$ 无意义.

⑤ 当 $\begin{cases} m-pt=0 \\ p-q\neq 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} m=pt \\ p\neq q \end{cases}$ 时，$x=0$.

这就是说，虽然两飞机飞行速度不相等，但甲机 t 小时飞行距离等于 AB 两地距离，当甲机飞到 B 地时，乙机正起飞，二机相遇于 B 地，所以 $x=0$ 表明二机在 B 地相遇.

（二）当 $p=q$ 时，$(p-q)x=m-pt$.

① 当 $\begin{cases} p=q \\ m=pt \end{cases}$ 时，x 为任何实数.

这就是说，两飞机飞行速度相同，甲机 t 小时飞行速度距离等于 AB 两地距离．当甲机飞到 B 地时，乙机正起飞，由于二机速度相同，所以两飞机比翼而飞，任何时候均在一起.

② 当 $\begin{cases} p=q \\ m\neq pt \end{cases}$ 时，方程无解.

AB 之间距离不等于甲机 t 小时飞行的距离．两机速度相同，任何时候两架飞机均不相遇.

例 9 某人从 A 地到 B 地去，两地相距 60 公里，他骑马走了 4 小时，步行了 3 小时，在回来路上他骑马 a 小时，步行时间比骑马多 2 小时，求此人骑马、步行的速度.

解 设骑马速度为每小时 x 公里，步行速度为每小时 y 公里．根据题意列方程组

$$\begin{cases}4x+3y=60,\\ ax+(a+2)y=60.\end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}60 & 3\\ 60 & a+2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & 3\\ a & a+2\end{vmatrix}}=\frac{60(a-1)}{a+8}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}4 & 60\\ a & 60\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & 3\\ a & a+2\end{vmatrix}}=\frac{60(4-a)}{a+8}$$

由题意 $a>0$、$x>y>0$.

若 $y>0$，即 $4-a>0$，$\therefore$ $a<4$.

$x>y$，即 $\dfrac{60(a-1)}{a+8}>\dfrac{60(4-a)}{a+8}$，

$a+8\neq 0$，$\therefore$ $a>2.5$.

$\therefore$ 当 $2.5<a<4$ 时，方程组的解才符合题意.

答：在 $2.5<a<4$ 时，骑马速度 $\dfrac{60(a-1)}{a+8}$ 公里/小时，步行速度 $\dfrac{60(4-a)}{a+8}$ 公里/小时.

例 10 用大小不同的甲乙两管排出 100 吨水，已知两管同时开放，每小时可排出 a 吨水，如果先用甲管排出 50 吨水，然后乙管排完其余的水，共用去 n 小时，问甲、乙两管每小时可以排出多少吨水.

解 设甲水管每小时排出 x 吨水，则乙水管每小时排出 $(a-x)$ 吨水. $\dfrac{50}{x}$ 小时是甲管排水时间，$\dfrac{50}{a-x}$ 小时是乙管

排水时间．依题意得方程

$$\frac{50}{x}+\frac{50}{a-x}=n.$$

即 $50(a-x)+50x=nx(a-x)$.

整理得 $nx^2-anx+50a=0$.

$\because$ $n\neq 0$,

$\therefore$ $x_1=\frac{an+\sqrt{a^2n^2-200an}}{2n}$,

$$x_2=\frac{an-\sqrt{a^2n^2-200an}}{2n}.$$

由题意知 $a>0$, $n>0$, $0<x<a$, 且 $x_1\neq x_2$.

讨论 ① 如 $a^2n^2-200an>0$, 即 $an>200$, 方程有两相异实根.

由 $x_1x_2=\frac{500}{n}>0$, 知 x_1x_2 同号; 又由 $x_1+x_2=a>0$, 知 $x_1>0$, $x_2>0$. 这就是说上述解答是合理的，它表明甲管每小时排出 x_1 吨，或 x_2 吨. 乙管每小时排出 x_2 吨或 x_1 吨.

② 如 $a^2n^2-200an=0$, 即 $an=200$, 两根相等

$$x_1=x_2=\frac{a}{2}.$$

但题设甲、乙两管大小不同，这时方程的解 x_1, x_2 不符合题意.

③ 如 $a^2n^2-200an<0$, 方程的根是复数，不合题意.

§4. 应用问题

方程中解应用问题是运用列方程来解决实际问题，解题步骤一般是：① 分析题意(审题)，② 选择未知数，③ 列出方程，④ 解方程，⑤ 检验所得结果，⑥ 写出答案. 其

中分析题意是基础，列出方程是关键．分析题意就是根据题目明确哪些量是已知量，哪些量是未知量，已知量与未知量之间的等量关系有哪些．根据未知量在等量关系中的位置，选择合适的未知数．按等量关系列出方程，解方程得出的解要检验：① 是不是方程的增根，② 符不符合题意．最后要写出答案．

等量关系除方程中明显的数量关系，如“多”、“少”、“几倍”、“几分之几”、“快”、“超过”……等关键词语表达外，还有一些关系题中并不给出的，如：距离＝速度×时间，比重×体积＝重量，溶质÷溶液＝浓度（百分浓度），工作效率×工作时间＝工作量，以及物理、化学、数学中有关公式、定理，这要从分析题意中得出．

例 1 有客车货车各一列，在平行轨道上相向行驶，自相遇到完全通过费时 7 秒，若同向而行，则自客车追及货车并完全越过费时 35 秒．今客车完全通过 500 尺之桥需时 15 秒，货车完全通过此桥需时 20 秒，求两列火车行驶速度及车身长度．

分析 根据自相遇到完全通过费时 7 秒列出等量关系

$$\begin{aligned}&\text{客车车身长}+\text{货车车身长}\\&=7\text{秒}\times(\text{客车速度}+\text{货车速度}).\end{aligned}$$

自客车追及货车并完全通过费时 35 秒，

$$\begin{aligned}\therefore\quad&\text{客车车身长}+\text{货车车身长}\\&=35\text{秒}\times(\text{客车速度}-\text{货车速度}).\end{aligned}$$

客车通过 500 尺的桥需时 15 秒，

$\therefore$ 客车车身长＋500 尺＝15 秒×客车速度．货车通过 500 尺的桥需时 20 秒，

∴ 货车车身长 + 500 尺 = 20 秒 × 货车速度.

四个未知量，四个等量关系，可以设四个未知数，列四个方程求解，也可以根据后面两个等量关系，选择两个未知数，其他两个未知量用所设的未知数的代数式表示，用前两个等量关系列方程.

解 设客车速度每秒 x 尺，货车速度每秒 y 尺. 则客车车身长为 $15x-500$ 尺，货车车身长为 $20y-500$ 尺. 依题意列方程

$$\begin{cases}15x-500+20y-500=7(x+y),\\15x-500+20y-500=35(x-y).\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}8x+13y=1000,\\55y-20x=1000.\end{cases}$$

解之得 $x=60$，$y=40$.

答： 客车车身长 400 尺，客车速度 60 尺/秒，货车车身长 300 尺，货车速度 40 尺/秒.

例 2 某队伍长 l 公里，在行进中，末排士兵因事赶到排头，到达排头后立即返回，当他回到末排时全队已经前进了 l 公里，若队伍和士兵行走的速度不变，求这个士兵所走路的长.

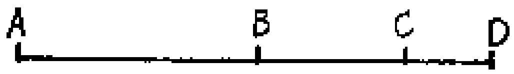


图 3—1

分析 末排士兵由 A 出发时，排头在 B 处，$AB=l$ 公里. 末排士兵赶到排头时，排头已由 B 走到 C，由此队伍由 B 到 C 的时间与末排士兵由 A 到 C 的时间相同.

$$\therefore\quad \frac{AB+BC}{\text{士兵速度}}=\frac{BC}{\text{队伍速度}}.$$

末排士兵由 C 返回时，队伍排头由 C 至 D，而排尾在 B. $\therefore$ $BD=l$ 公里．这段时间也相等

$$\therefore \quad \frac{BC}{\text{士兵速度}}=\frac{CD}{\text{队伍速度}}.$$

由上面两个等量关系可得

$$\frac{AB+BC}{BC}=\frac{BC}{CD}.$$

解一 设士兵由末排赶到排头时，头排所走的距离(BC)为 x 公里，则士兵赶到排头所走的距离 ($AB+BC$，即 AC) 为 $l+x$ 公里．士兵返回末排时，头排走的距离(CD) 为 $l-x$ 公里，依题意列方程

$$\frac{l+x}{x}=\frac{x}{l-x}$$

$$\therefore \quad l^2-x^2=x^2,\ \ 2x^2=l^2$$

即 $$x=\frac{l}{\sqrt{2}}.$$

末排士兵共走了 $l+2x$ 公里，即 $(1+\sqrt{2})l$ 公里．

答：末排士兵共走 $(1+\sqrt{2})l$ 公里．

解二 $\because$ $\dfrac{\text{距离}}{\text{速度}}=\text{时间}$,

$\therefore$ 队伍走 l 公里的时间是 $\dfrac{l}{\text{队伍速度}}$，(单位时间)

末排士兵赶到排头的时间是 $\dfrac{l}{\text{士兵速度}-\text{队伍速度}}$，(单位时间)

返回排尾的时间是 $\dfrac{l}{\text{士兵速度}+\text{队伍速度}}$．(单位时间)

从而 $$\frac{l}{\text{士兵速度}-\text{队伍速度}}+\frac{l}{\text{士兵速度}+\text{队伍速度}}$$

$$=\frac{l}{\text{队伍速度}}.$$

设士兵速度是队伍速度的 x 倍，队伍速度为 v，则

$$\frac{l}{xv-v}+\frac{l}{xv+v}=\frac{l}{v},$$

即 $$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=1,$$

解之 $x_1=1+\sqrt{2}$，$x_2=1-\sqrt{2}$.（舍去）

即士兵的速度是队伍速度的 $(1+\sqrt{2})$ 倍.

$\therefore$ 士兵走的距离是队伍走的距离的 $(1+\sqrt{2})$ 倍，队伍走了 l 公里，士兵走了 $(1+\sqrt{2})l$ 公里.

答：士兵走了 $(1+\sqrt{2})l$ 公里.

例 3 甲向乙说："我现在若是你现在的年龄时，你那时的年龄是我现在年龄的一半，当你到我现在年龄时，那时咱俩年龄的和是 63 岁。" 问甲乙二人现在各若干岁.

分析 两人年龄差是一个定值。等量关系

$$\frac{1}{2}\times\text{甲现年}=\text{乙现年}-(\text{甲乙二人年龄的差}).$$

$$\text{甲现年}+(\text{甲乙二人年龄差})+\text{乙现年}+(\text{甲乙二人年龄差})=63.$$

解 设乙现年为 x 岁，甲现年为 y 岁. 则

$$\begin{cases}\frac{1}{2}y=x-(y-x),\\ y+y-x+x+y-x=63.\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}3y=4x,\\ 3y-x=63.\end{cases}$$

解之得 $x=21$，$y=28$.

答：甲现年28岁，乙现年21岁.

例 4　3头牛在2星期中能吃完2亩地上原有的草和2星期中所生的草，2头牛在4星期中能吃完2亩地上原有的草和4星期中所生的草，问多少头牛在6星期中吃完6亩地上原有的草和6星期中所生的草？(假定牛在未吃时，所有草一样高，吃过后生长率也相同)

分析　一头牛在一星期吃完(2亩地的草和2星期中所生的草)$\times\frac{1}{6}$；一头牛在一星期吃完(2亩地的草和4星期中所生的草)$\times\frac{1}{8}$.

$$\therefore\quad \frac{2\text{亩地的草和}2\text{星期中所生的草}}{6}$$

$$=\frac{2\text{亩地的草和}4\text{星期中所生的草}}{8}$$

解　设一亩地的草的体积为x，一亩地一星期所生的草的体积为y. z头牛在6星期中吃完6亩地上原有的草和6星期中所生的草. 则

$$\frac{2(x+2y)}{6}=\frac{2(x+4y)}{8}=\frac{6(x+6y)}{6z}.$$

即　$$\frac{x+2y}{3}=\frac{x+4y}{4}=\frac{x+6y}{z}.$$

解之得　$z=5$.

答：5头牛6星期吃完6亩地上原有的草和6星期中所生的草.

习　题　三

解下列方程：

1. $(1+x^2)^2=4x(1-x^2)$.

2. $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)=8.$

3. $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44.$

4. $x^4+(x-4)^4=626.$

5. $(7x+3)^4+(2x-6)^4=(3x+7)^4+(6x-2)^4.$

6. $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{10}{3}.$

7. $x^2+\dfrac{9x^2}{(x+3)^2}=16.$

8. $\dfrac{x+1}{x+1+\dfrac{1}{x-1+\dfrac{1}{x+1}}}=\dfrac{2x+5}{2x+9}.$

9. $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-ma)(x-mb)}=\dfrac{(x+a)(x+b)}{(x+ma)(x+mb)}.$

10. $\dfrac{b+c}{bc-x}+\dfrac{c+a}{ca-x}+\dfrac{a+b}{ab-x}=\dfrac{a+b+c}{x}.$

11. $\dfrac{16x-13}{4x-3}+\dfrac{40x-43}{8x-9}=\dfrac{32x-30}{8x-7}+\dfrac{20x-24}{4x-5}.$

12. $\dfrac{m(x+a)}{x+b}+\dfrac{n(x+b)}{x+a}=m+n.$

不必解方程，说明下列方程在实数集合内无解。

13. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}+1=0.$

14. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}-1=0.$

15. $\sqrt{x-8}+\sqrt{2-x}-5=0.$

16. $x+\sqrt{x-5}=2.$

17. $\sqrt{2-x-x^2}+\sqrt{x^2-9}-3=0.$

18. $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}.$

解下列方程：

19. $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$.

20. $\sqrt[3]{(8-x)^2}+\sqrt[3]{(x+27)^2}=\sqrt[3]{(8-x)(x+27)}+7$.

21. $\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}}=5$.

22. $\sqrt{(x-4)^2}+\sqrt{(2x-1)^2}=10$.

23. $x^2-2x+6\sqrt{x^2-2x+6}=21$.

24. $2x^2-3x-2x\sqrt{x^2-3x+4}=21$.

25. $3x^2-6x-2\sqrt{x^2-2x+4}+4=0$.

26. $\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x+a-b}=\sqrt{b}$.

27. 如$|x-2|<3$，解方程$|x+1|+|x-5|+|x-3|=8$.

28. $\dfrac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b$.

29. $\dfrac{\sqrt{3-3x}+\sqrt{x+6}}{\sqrt{3-3x}-\sqrt{x+6}}=\dfrac{\sqrt{1-4x}+\sqrt{2x+8}}{\sqrt{1-4x}-\sqrt{2x+8}}$.

30. $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

31. $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$.

32. $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\sqrt[n]{x^2-1}$.

33. $\sqrt[3]{4a^6+x}+\sqrt[3]{4a^3-x}=2a$.

34. $\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^nx^{n2}}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{a^{n2}x^n}}=b$.

$(a>0,\ b>a>0)$

35. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$.

36. a是什么实数的时候，下列方程组的解是正数？

$$\begin{cases}2x+ay=4,\\ x-4y=8.\end{cases}$$

37. 试解方程组并讨论之$\begin{cases}(m+1)x+y=m, & (1)\\ 3x+(m-1)y=2. & (2)\end{cases}$

38. 解下列方程组

$$\begin{cases}5x+3y+3z=48,\\2x+6y-3z=18,\\8x-3y+2z=21.\end{cases}$$

39. 解关于 x_1, x_2, x_3, …, x_{n-1}, x_n 的方程组

$$\begin{cases}\quad\;\; x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n=1, & (1)\\x_1\quad\;\;+x_3+x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n=2, & (2)\\x_1+x_2\quad\;\;+x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n=3, & (3)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{n-1}\quad\;\;=n. & (n)\end{cases}$$

40. 解关于 x_1, x_2, x_3, …, x_8 的方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6, & (1)\\x_2+x_3+x_4=9, & (2)\\x_3+x_4+x_5=3, & (3)\\x_4+x_5+x_6=-3, & (4)\\x_5+x_6+x_7=-9, & (5)\\x_6+x_7+x_8=-6, & (6)\\x_7+x_8+x_1=-2, & (7)\\x_8+x_1+x_2=2. & (8)\end{cases}$$

解下列方程组

41. $$\begin{cases}x^2-2xy+3y^2=9, & (1)\\4x^2-5xy+6y^2=30. & (2)\end{cases}$$

42. $$\begin{cases}y^2-4xy+20x^2+3y-264x=0, & (1)\\5y^2-38xy+x^2-12y+1056x=0. & (2)\end{cases}$$

43. $$\begin{cases}x^2+y^2+3x-3y=16, & (1)\\xy+y-x=1. & (2)\end{cases}$$

44. $\begin{cases} xy + x + y = 11, & (1) \\ x^2y + xy^2 = 30. & (2) \end{cases}$

45. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, & (1) \\ xy = 15. & (2) \end{cases}$

46. $\begin{cases} 2x^2 - 4xy + 3y^2 = 36, & (1) \\ 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 36. & (2) \end{cases}$

47. $\begin{cases} (x+y)^2 - 4(x+y) = 45, & (1) \\ (x-y)^2 - 2(x-y) = 3. & (2) \end{cases}$

48. $\begin{cases} xy + 2(x-y) - 4 = 0, & (1) \\ x^2 + y^2 + 3xy + 1 = 0. & (2) \end{cases}$

49. $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + 4x + 3y - 1 = 0, & (1) \\ 2x^2 - 6xy + y^2 + 8x + 2y - 3 = 0. & (2) \end{cases}$

50. $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, & (1) \\ x^2 + y^2 + x - 11y - 2 = 0. & (2) \end{cases}$

51. $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 3x, & (1) \\ 2x^2 + y^2 = 6x. & (2) \end{cases}$

52. $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + 2y^2 + x + y - 9 = 0, & (1) \\ x^2 + xy + y^2 - 7 = 0. & (2) \end{cases}$

53. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, & (1) \\ x^3 + y^3 = 35. & (2) \end{cases}$

54. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, & (1) \\ xy(x+y) = -2. & (2) \end{cases}$

55. $\begin{cases} y^2 - 4x - 2y + 1 = 0, & (1) \\ y = x + a. & (2) \end{cases}$

解此方程组并讨论 a 取哪些实数值时，这个方程组

① 有不同的两组实数解；

② 有相同的两组实数解；

③ 没有实数解．

56. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=21, & (1) \\ x^2-xy+y^2=7. & (2) \end{cases}$

57. 求方程组 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^3+y^3+z^3=-18 \end{cases}$ 的整数解．

58. $\begin{cases} x+y=1, & (1) \\ x^5+y^5=31. & (2) \end{cases}$

59. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=a^2, & (1) \\ x^4+x^2y^2+y^4=b^4. & (2) \end{cases}$

60. 设方程组 $\begin{cases} x-y=m(1+xy) \\ 2+x+y+xy=0 \end{cases}$ 有实数解，求所有 m 的值．

61. $\begin{cases} (x+y)^2(x-y)=3xy+6y, & (1) \\ x^2-y^2=x+2. & (2) \end{cases}$

62. $\begin{cases} x^3-y^3=7, & (1) \\ x^2y-xy^2=2. & (2) \end{cases}$

63. $\begin{cases} x(x+y+z)=20, & (1) \\ y(x+y+z)=30, & (2) \\ z(x+y+z)=50. & (3) \end{cases}$

64. $\begin{cases} (x+y)(x+z)=12, & (1) \\ (y+z)(y+x)=15, & (2) \\ (z+x)(z+y)=20. & (3) \end{cases}$

65. $\begin{cases} x-2y+3z=0, & (1) \\ 2x-3y+4z=0, & (2) \\ 4x^3+3y^3+z^3-xyz=216. & (3) \end{cases}$

66. $\begin{cases} x(y+z-x)=39-2x^2, & (1) \\ y(x+z-y)=52-2y^2, & (2) \\ z(x+y-z)=78-2z^2. & (3) \end{cases}$

67. $\begin{cases} zy=ax, & (1) \\ xz=by, & (2) \\ xy=cz. & (3) \end{cases}$ 其中 a，b，c 均为正数.

68. $\begin{cases} x^2-yz=ax, & (1) \\ y^2-zx=by, & (2) \\ z^2-xy=cz. & (3) \end{cases}$

69. $\begin{cases} y^2+yz+z^2=a^2, & (1) \\ z^2+zx+x^2=b^2, & (2) \\ x^2+xy+y^2=c^2. & (3) \end{cases}$

70. $\begin{cases} x^2=a^2+(y-z)^2, \\ y^2=b^2+(z-x)^2, \\ z^2=c^2+(x-y)^2. \end{cases}$

71. 若方程组 $\begin{cases} (xy-3)^2+(x+y)^2=12 \\ (xz-3)^2+(x+z)^2=12 \\ (zt-3)^2+(z+t)^2=12 \end{cases}$ 有解 $x=a>0$，$y=b>0$，$z=c>0$，$t=d>0$，求证：$b=d$.

72. $\begin{cases} x^2y^2+x^2z^2=axyz, \\ y^2z^2+y^2x^2=bxyz, \\ z^2x^2+z^2y^2=cxyz. \end{cases}$ (其中 a，b，c 是已知数)

73. $\begin{cases} 6xyz+xy+2yz+3zx=-35, & (1) \\ 7xyz+3xy+yz+3zx=-51, & (2) \\ 9xyz+2xy+4yz+3zx=-43. & (3) \end{cases}$

74. 求出此方程所有的解：

$$\begin{cases} x^2+5y^2+6z^2+8(yz+zx+xy)=36, & (1) \\ 6x^2+y^2+5z^2+8(yz+zx+xy)=36, & (2) \\ 5x^2+6y^2+z^2+8(yz+zx+xy)=36. & (3) \end{cases}$$

解下列方程组:

75. $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3, & (1) \\ xy-x-y+15=0. & (2) \end{cases}$

76. $\begin{cases} \dfrac{xy}{ay+bx}=c, & (1) \\ \dfrac{zx}{az+cx}=b, & (2) \\ \dfrac{yz}{bz+cy}=a. & (3) \end{cases}$

77. $x^2+xy+y^2=\dfrac{a}{x^2+y^2}=\dfrac{b}{xy}$.

78. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{1-xy}=3, \\ \dfrac{x-y}{1+xy}=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

79. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{a^2}, & (1) \\ \dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{b^2}. & (2) \end{cases}$

80. $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=a, \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{a}. \end{cases}$

81. $\begin{cases} \dfrac{1}{a-x}+\dfrac{1}{a-y}=\dfrac{2}{a-b}, & (1) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{c}. & (2) \end{cases}$

82. $\begin{cases} ax^3 = by^3 = cz^3, & (1) \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a}. & (2) \end{cases}$

83. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{y-1} = \dfrac{a-1}{b-1}, & (1) \\ \dfrac{x^3-1}{y^3-1} = \dfrac{a^3-1}{b^3-1}. & (2) \end{cases}$

84. $\begin{cases} \dfrac{2(x-y)-(4-y)}{\sqrt{2x-y}+2} + \dfrac{2(x-y)-(25-y)}{\sqrt{2x-y}-5} = 9, & (1) \\ y+2(x-4) = 2\sqrt{2x+y}. & (2) \end{cases}$

85. 求整数方程$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{\cdots\cdots\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}}_{1979\text{个根号}} = y$ 的所有整数解.

86. 证明方程：$x^2+y^2+z^2=2xyz$，唯一的整数解是 $x=y=z=0$.

87. 已知 $x^2+x+1=0$，试求有理式 $x^{14}+\dfrac{1}{x^{14}}$的值.

88. 若整数 $n>1$，证明决无正整数 x, y, z，当 x，y 小于、等于 n 时，能使 $x^n+y^n=z^n$.

89. 试求方程 $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}}$的正根，并证明只有一正根.

90. 解方程 $x^4+3x^3+6x^2+6x+4=0$.

91. 解方程 $x^5-5x^3+5x-1=0$.

92. 解方程 $9x^4-15x^3+28x^2-20x+16=0$.

93. 解方程 $x^4+5x^3-7x^2-8x-12=0$.

94. 设方程 $x^3+5x^2+tx+s=0$，其中 t 及 s 为实数，已

知此方程的一根为 $2-3i$，求 t 及 s 的值.

95．求证方程 $x^4+3x^2+2x+b=0$ 无实根.

96．如 $f(x)=a^2x^2+abx+b^2$，今以 $x+1$ 和 $x-2$ 除 $f(x)$，余数分别为 7，13，试求 a，b 之值.

97．如 a，b，c 为整数系数方程

$$12x^3-28x^2+17x+d=0$$

的根，且 $b=a+1$，试求 a，b，c，d 之值.

98．如实数系数方程 $x^3+2kx^2+9x+5k=0$ 的一个虚根的模数为 $\sqrt{5}$，试求 k 值，并解方程.

99．设方程式 $x^3+2x^2+3x+4=0$ 之根为 α，β，γ.

① 求一方程式，其三根为

$$\alpha\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right),\quad \beta\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\right),\quad \gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right).$$

② 计算 $(\alpha+\beta+\gamma)^3-\alpha^3-\beta^3-\gamma^3$ 之值.

100．求证：$f(x)=x^{4444}+x^{3333}+x^{2222}+x^{1111}$ 可被多项式 $x^4+x^3+x^2+x$ 整除.

101．已知 $x^3-10x^2+qx+\gamma=0$ 之三根中，两根之和为第三根，并知三根平方和为 38，求 q 及 γ?

102．如果 a 为整数，但 $|a|\neq 2$，试证明方程 $x^4+ax+1=0$ 没有有理根.

103．变换方程式 $x^4+16x^3+89x^2+200x+156=0$ 使其缺第二项，而求原方程式之根.

104．证明：将任何整数代入 $f(x)=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3-\frac{8}{15}x$ 其结果仍为一整数.

105．求证 $1+x+x^2+\cdots+x^{999}$ 能被 $1+x+x^2+\cdots+x^{249}$

整除，并求出商。

106. 如 $f(x)=6x^4+5x^3+2ax^2-6x+4$ 能被 $x-1$ 整除，被 $x+2$ 除余 30，求解方程 $f(x)=0$。

107. 求以 x^3-x 除 $x+x^9+x^{25}+x^{49}+x^{81}$ 的余式。

108. 一个直角三角形三边长适合于一三次方程式 $x^3-12x^2+47x-k=0$

(a) 求此直角三角形三边平方之和

(b) 求此直角三角形三边之长

109. 如 a 是 1 的 7 次虚根，求证

$$\frac{a^4}{1+a}+\frac{a^5}{1+a^3}+\frac{a^6}{1+a^5}=-2.$$

110. 设方程式 $14x^3-13x^2-18x+9=0$ 之根成调和级数，求解。

111. 若方程 $x^2+2x+k=0$ 的两根相等，则 $k=$？

112. $2(m+1)x^2+4mx+3m-2=0$，并对于 m 之值加以讨论：(i) 何时有相等根；(ii) 何时有实数根；(iii) 何时有虚根；(iV) 何时有一根为无穷大；(V) 何时有一根为 0。

113. 当 a, b, c 为实数的时候，求证方程：$x^2-(a+b)x+(ab-c^2)=0$ 有两个实数根，并求出这两个根相等的条件。

114. m 取何值时，方程 $x^2-2mx+m^2-1=0$ 的两个根介于 -2 与 4 之间。

115. a 取何值时，方程 $x^2+2ax\sqrt{a^2-3}+4=0$ 有相等的两个实数根。

116. 当 m 是什么实数的时候，方程 $x^2+(m+2)x+(m+5)=0$ 的两个根都是正数。

117. 如 m 为有理数，试定 k 的值，使方程 x^2-4mx+

$4x+3m^2-2m+4k=0$ 之根为有理数.

118. 如 a,b,c 为有理数，试证方程 $abc^2x^2+3a^2cx+b^2cx-ba^2-ab+2b^2=0$ 的根也是有理数.

119. 如 a, b, c 为不相等的实数，试证方程 $(c^2-2bc+b^2)x^2-2[c^2-(a+b)c+ab]x+[2a^2-2(b+c)a+b^2+c^2]=0$ 的根为复数.

120. $x^2+(4t-2)x+3t^2-5=0$ 之两根中，其一根为另一根的二倍，则 t 值如何?

121. 设方程 $x^2-13x+q=0$ 二根平方差为 39，则 q 之值如何?

122. 在方程 $x^2-2x+q=0$ 中两根的差的平方等于16，求方程的常数项.

123. m 为怎样的实数值时，表达式 $x^2+m(m-1)x+36$ 是完全平方?

124. m 为何值时，方程 $9x^2-18mx-8m+16=0$ 的一根等于另一根的两倍?

125. 试证 m 为任一实数时，方程 $(x-1)(x-3)+m(x-2)(x-4)=0$ 有两实根.

126. a 为何值时，方程

$$x^2+ax+1=0 \tag{1}$$

$$x^2+x+a=0 \tag{2}$$

有一个共同的根?

127. m 为何值时，方程

$$2x^2-(3m+2)x+12=0 \tag{1}$$

$$4x^2-(9m-2)x+36=0 \tag{2}$$

有一个共同的根?

128．若方程 $2x^2+(3a+1)x+6=0$ 之一根与方程 $3x^2+(2a+1)x+2=0$ 之一根互为倒数，求 a 之值．

129．若方程 $(m+1)x^2+(2m-1)x+(m-1)=0$ 有虚根，求证方程 $(m-3)x^2-2(m+3)x-(m+5)=0$ 必有不等实根．

130．设 a，b 为任意给定的整数，试证明方程 $x^2+10ax+5b+3=0$ 和 $x^2+10ax+5b-3=0$ 都没有整数解．

131．已知 a，b，c 是一个三角形的三条边，求证方程 $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ 没有实数根．

132．证明方程 $x^3-x^2+1=0$ 的根的倒数是方程 $x^5+x^4+1=0$ 的根．

133．$y=\dfrac{2x-m}{x^2-4x+3}$ 当 m 为何种实数值时，对于任意 y 的实数值 x 的值恒有实数？

134．x_1 与 x_2 为方程 $x^2-3ax+a^2=0$ 的根，且 $x_1^2+x_2^2=1.75$，求 a 的值．

135．要二次多项式 $mx^2+(m-1)x+(m-1)$ 之值恒有负数，问 m 之值如何？

136．求方程 $x^2+2x\sin(xy)+1=0$ 的一切实数解．

137．已知方程 $2x^2-9x+8=0$，求作一个二次方程，使它的一根为原方程两根和的倒数，另一根为原方程两根差的平方．

138．如方程 $x^2-2px+3q=0$ 的一根是另一根的 3 倍，方程 $x^2+qx+3p=0$ 的一根是另一根的二分之一，求实数 p、q 的值(这里 p、q 不为零)．

139．设 $ax^2+bx+c=0$ 之二根为 x_1，x_2，求值：

① $(ax_1+b)^{-2}+(ax_2+b)^{-2}$,

② $(ax_1+b)^{-3}+(ax_2+b)^{-3}$.

140．证明 $x^2-ax+b=0$ 二根平方之和等于 $x^2-3ax+b+4a^2=0$ 二根平方之和.

141．若 $p^2x^2+q^2x+r^2=0$ 之二根为 $px^2+qx+r=0$ 之二根的平方，则 q 为 p，r 之几何中项，试证明之.

142．设 m，n 分别是正整数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 二根的等差中项和等比中项，且 m，n 同号．求证：

① 如果 $m<n$，方程有不相等的实数根.

② 如果 $m>n$，方程没有实数根.

143．如果 α、δ 为实数系数方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，且 α、β、γ、δ 成等差数列，试求以 β、γ 为根的二次方程.

144．如整数系数方程 $2ax^2+2(2a-b-1)x+(2a-2b-1)=0$ 和整数系数方程 $x^2+(2a+b+3)x+(a^2+ab+6)=0$ 都有二相等的实数根，试求 a、b 之值，并各取这二方程的一根为根作一元二次方程.

145．若方程 $x^2-4x\cos 2\theta+2=0$ 和方程 $2x^2+4x\sin 2\theta-1=0$ 有一根互为倒数，求 θ 角．$(0<\theta<\pi)$

146．若方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 $\operatorname{tg}\theta$ 和 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$，又这方程的两根之比是 3:2，试求 p、q 的值.

147．如 a，b，c 表示 $rt\Delta ABC$ 之三边，且 C 为斜边，又 ΔABC 的内圆分别切 BC、CA、BA 于 D、E、F，则 BD 和 AE 为方程 $2x^2-2cx+ab=0$ 的两根.

148．求解方程式 $a^3(b-c)(x-b)(x-c)+b^3(c-a)$

$(x-c)(x-a)+c^3(a-b)(x-a)(x-b)=0$，且求其有等根之条件.

149. 甲、乙二学生同解一方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$，甲生将题中数字 q 写错，其所得三根为 -1，2，4； 乙生将数字 p、r 写错，其所得三根为 -1，2，-8；若两生均无其他错误，求此方程式之真根.

150. 设一元四次方程的最高次数项系数为 1，常数项为 36. 已知方程有两根等于一等边三角形的底和高. 而另两根分别等于另一等边三角形的底和高，且这两三角形面积比为 1:3，求这个一元四次方程.

151. 设 $x>0$，$y>0$，$z>0$，解方程

$$(x^2+1)(y^2+2)(z^2+8)=32xyz.$$

152. 某人从家里骑自行车到火车站，如果每小时的速度是 15 公里，那么可以比开车时间早到 15 分钟，如果每小时速度是 9 公里，那么比开车时间迟到 15 分钟，现在打算在开车前 10 分钟到达，每小时速度应是多少？

153. 甲乙两游泳员分别从某湖的东西两岸同时出发，各游至前岸后立即游回原岸，并且每人都是按匀速游泳，已知这两人第一次相遇于距西岸 800 米处，第二次相遇于距东岸 600 米处，试求东西两岸距离.

154. 某车间共有生产工人 80 人，生产甲、乙、丙三种工件，已知一个工人平均每日可生产甲种工件 15 件或乙种工件 20 件，或丙种工件 50 件，但在安装一台机器时，同时需要甲种工件 3 件，乙种工件 2 件，丙种工件 1 件. 问该车间如何分配工人生产工件，才能保证连续安装机器时，三种工件配套.

155. 设一个六位数 $abcde7$ 乘 5 以后变成 $7abcde$. 求此数.

156. A、B 两汽车站隔相同时间相向发出一辆车，再隔相同时间发出一辆车，依此规律不断发车，且汽车的速度相同，AB 之间有一骑自行车者，发觉每隔 12 分钟后面追上来一辆汽车，每隔 4 分钟迎面开来一辆汽车，问 A、B 两站每隔几分钟发车一次.

157. 有一些人挖沟，如果同时动工，24 小时就可以结束工作，现在换一种方法挖，每过相等的时间间隔他们就一个接着一个来挖，而且每个来后，要一直挖到结束，假若第一个人挖的时间是最后一个人的 5 倍，求他们挖了多少时间.

158. 甲乙二人住在同一条街的两端，甲要把一件包裹送到乙的家里，乙也要把一件物品送到甲的家里，他们同时出发，各人按匀速步行，把东西送到目的地后，立即返回. 他们第一次相遇离甲的家 a 丈的地方，第二次相遇离乙的家 b 丈的地方，问 ① 这条街有多长. ② 如果 $a=300$，$b=400$，谁走得较快.

159. 甲乙二人分别从 A、B 两地同时同向出发，甲过 B 地后再走 3 小时 12 分在 C 地追上乙，这时二人共走 72 里，而 C、A 两地距离等于乙走 5 小时的路程，求 A、B 两地距离.

160. 两组工人合做某件工程 8 天完成，若第一组工人的 $\frac{2}{3}$ 和第二组工人的 $\frac{4}{5}$ 一起做，则在 $11\frac{1}{4}$ 天内完成，问各组单独干时几天才能完成.

第四章　不 等 式

§1.　不 等 式

不等式在求算术根、函数的定义域、函数的极值、解无理方程、数列、指数和对数、三角函数以及在高等数学中都有广泛的应用。而在有关不等式的问题中，主要是解不等式(组)和证明不等式两大类。现分述于下：

在解不等式时，显然应在实数范围内进行，因为虚数是不规定大小的。解题时往往要用到不等式的同解性质，这些性质有些与方程的同解性质类似，有的却不同。我们只把不同的列举一下。

1. 不等式 $F(x)>f(x)$ 与不等式 $mF(x)>mf(x)$，仅在 $m>0$ 时同解，当 $m<0$ 时，它就应与 $mF(x)<mf(x)$ 同解.

2. 不等式 $F(x)>f(x)$ 与不等式 $F^2(x)>f^2(x)$，仅在 $|F(x)|>|f(x)|$ 时同解，否则它们就不同解.

3. 不等式 $F(x)>f(x)$，当 $F(x)$ 与 $f(x)$ 同号(异号)且都不为0时，恒与不等式 $\frac{1}{F(x)}<\frac{1}{f(x)}$ $\left(\frac{1}{F(x)}>\frac{1}{f(x)}\right)$ 同解.

4. 不等式 $F(x)\cdot f(x)>0$ 时与不等式组

$$\begin{cases}F(x)>0\\f(x)>0\end{cases}\quad 和 \quad\begin{cases}F(x)<0\\f(x)<0\end{cases}\quad 同解，$$

不等式 $F(x)\cdot f(x)<0$ 时与不等式组

$$\begin{cases}F(x)>0\\f(x)<0\end{cases} \text{和} \begin{cases}F(x)<0\\f(x)>0\end{cases} \text{同解.}$$

5. 不等式$\frac{F(x)}{f(x)}\geqslant 0$ 当 $f(x)\neq 0$ 时，恒与不等式 $F(x)\cdot f(x)\geqslant 0$ 同解.

6. 绝对值不等式 $|x|<a(a>0)$ 与不等式 $-a<x<a$ 同解；而 $|x|>a(a>0)$ 则与 $x<-a$ 或 $x>a$ 同解.

7. 一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（或 $ax^2+bx+c<0$，$a\neq 0$）通常的解法是：

① 讨论图象法．找出二次抛物线中纵坐标大于 0（或小于 0）的那些点的横坐标的取值范围，即不等式的解；

② 因式分解法．即将原不等式化为 $a(x-x_1)(x-x_2)>0$（或小于 0），再化为不等式组求解；

③ 开平方法．把不等式化为 $a(x+m)^2>k$（或 $a(x+m)^2<k$），在$\frac{k}{a}\geqslant 0$ 的条件下，两边开平方，得 $|x+m|>\sqrt{\frac{k}{a}}$（或 $|x+m|<\sqrt{\frac{k}{a}}$）.

8. 一元高次不等式或分式不等式，首先移项，使一边为 0，在另一边因式分解将它化为比较简单的不等式或不等式组来解。必要时还可采用列表格的办法来求解.

9. 无理不等式：

① $\sqrt{f(x)}>-c(c\geqslant 0)$，则使 $f(x)\geqslant 0$ 的一切 x 值都是原不等式的解；

② $\sqrt{f(x)}<-c(c\geqslant 0)$，无解；

③ $\sqrt{f(x)}>c(c\geqslant 0)$，则可化为 $f(x)>c^2$ 来解.

④ $\sqrt{f(x)}<c\,(c>0)$，则可化为$\begin{cases}f(x)\geqslant 0\\ f(x)<c^2\end{cases}$来求解；

⑤ $\sqrt{f(x)}>\phi(x)$，则可分解为：

$\begin{cases}\phi(x)<0\\ f(x)\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\phi(x)\geqslant 0\\ f(x)>\phi^2(x)\end{cases}$ 来解；

⑥ $\sqrt{f(x)}<\phi(x)$，则不等式可以化为不等式组：

$\begin{cases}\phi(x)>0\\ f(x)\geqslant 0\\ f(x)<\phi^2(x)\end{cases}$ 来解.

在证明不等式时，通常采用以下几种办法进行：

1. 要证明 $A>B$，可以证 $A-B>0$；要证明 $A<B$，可以证 $A-B<0$，这就是所谓比较法.

2. 若 $A>0, B>0$，要证明 $A>B$，可证 $A/B>1$；要证明$A<B$，可证 $A/B<1$. 这就是比值比较法.

3. 利用已证明成立的不等式作为根据，再进行适当的变换即可. 下列不等式，都可作为证题根据：

① $a^2+b^2\geqslant 2ab$.

② $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\quad(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$.

③ $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2\quad(a>0,\ b>0)$.

④ $\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}\quad(n>0)$.

*⑤ $\dfrac{1}{n!}<\dfrac{1}{2^{n-1}}\quad(n\geqslant 2,\ n\in N)$.

*⑥ $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+m}{b+m}\quad(0<a<b,\ m>0)$.

*⑦ $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

(a_1、a_2，…，a_n都是非负实数).

4. 证明一个不等式在某个范围内成立，可采用解不等式的办法，说明不等式的解即给定的范围.

5. 应用数学归纳法.

6. 对于绝对值不等式，以下各条可视为定理使用：

$|a+b| \leqslant |a|+|b|$； $|a+b| \geqslant |a|-|b|$.

$|ab| \geqslant |a|\cdot|b|$； $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

例 1 解不等式 $(x+2)(x-2)(x-4)>0$

解 这种不等式可转化为下面四个不等式组：

$$\begin{cases}x+2>0\\x-2<0\\x-4<0\end{cases}\quad \begin{cases}x+2<0\\x-2>0\\x-4<0\end{cases}\quad \begin{cases}x+2<0\\x-2<0\\x-4>0\end{cases}\quad \begin{cases}x+2>0\\x-2>0\\x-4>0\end{cases}$$

但这样解比较麻烦，不如用列表法简便：

式子 符号 x范围	$x+2$	$x-2$	$x-4$	$(x+2)(x-2)(x-4)$
$x<-2$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-2<x<2$	$+$	$-$	$-$	$+$
$2<x<4$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x>4$	$+$	$+$	$+$	$+$

由表可知：原不等式的解是 $-2<x<2$ 或者是 $x>4$.

例 2　解不等式 $\sqrt{x^2-x-2}<2$.

解　依题意，根据无理不等式解法④应有

$$\begin{cases}x^2-x-2\geqslant 0\\ x^2-x-2<4.\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}(x+1)(x-2)\geqslant 0\\ (x+2)(x-3)<0.\end{cases}$$

亦即 $\begin{cases}x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 2\\ -2<x<3\end{cases}$

∴　原不等式的解为 $-2<x\leqslant -1$ 或 $2\leqslant x<3$.

例 3　解不等式 $\sqrt{4-x^2}<x+1$

解　依题意，根据无理不等式解法⑥应有

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ x+1>0\\ 4-x^2<(x+1)^2\end{cases}$$

其解为 $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}<x\leqslant 2$.

∴　原不等式的解为 $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}<x\leqslant 2$.

例 4　解不等式　$a^{x^2+x-88}>10^{2\lg a}$

解　∵　$10^{2\lg a}=10^{\lg a^2}=a^2$

∴　$a^{x^2+x-88}>a^2$

根据对数的性质，知原式中的 $a>0$，因此，分两种情况讨论：

当　$a>1$ 时，得 $x^2+x-88>2$,

∴　$x<-10$　或　$x>9$.

当　$0<a<1$ 时，得 $x^2+x-88<2$,

∴　$-10<x<9$.

故原不等式 $a^{x^2+x-88}>10^{2\lg a}$ 的解为

$a>1$ 时，$x<-10$ 或 $x>9$；

$0<a<1$ 时，$-10<x<9$.

例 5 设 $a>b>0$，解不等式

$$\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}}>\frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}. \tag{1}$$

解 这是含有参数的不等式. 很明显分母 $\sqrt{x^2+a^2}>0$，$\sqrt{x^2+b^2}>0$. 由于 $a>b>0$，故须按 $x+b>0$；$x+b\leqslant 0$ 且 $x+a\geqslant 0$ 以及 $x+a<0$ 三种情形来研究其解法.

① 若 $x+b>0$，由 $a>b>0$，$\therefore\ x+a>0$.

将原不等式去分母且两边平方得

$$(x+a)^2(x^2+b^2)>(x+b)^2(x^2+a^2) \tag{2}$$

化简整理得：

$$2x^3(a-b)-2abx(a-b)>0.$$

$\because\ a>b$，$\therefore\ a-b>0$. 两边约去 $2(a-b)$ 得

$$x^3-abx>0 \tag{3}$$

即 $x(x^2-ab)>0$

于是得不等式组：

$$\begin{cases}x>0\\x^2-ab>0\\x+b>0\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}x<0\\x^2-ab<0\\x+b>0\end{cases}$$

解之得 $x>\sqrt{ab}$ 或 $-b<x<0$.

② 若 $x+a<0$，即 $x<-a$，则这时有 $x+b<0$，原不等式两边都是负数，平方去分母后，不等式(2) 应反号，从而不等式(3) 变为

$$x^3-abx<0, \quad 即 \quad x(x^2-ab)<0,$$

$\because \quad x<-a$, $\quad \therefore \quad x<0$. 于是得不等式组

$$\begin{cases} x<0 \\ x^2-ab>0 \\ x+a<0. \end{cases}$$

解之得 $\quad x<-a$.

③ 若 $x+a\geqslant 0$，且 $x+b\leqslant 0$（因已知 $a>b>0$），故有 $-a\leqslant x\leqslant -b$，且有 $x+a>x+b$. 从而

$$\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}}\geqslant\frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}.$$

因之，原不等式的解为 $-a\leqslant x\leqslant -b$.

由此可知，原不等式的解当 $x+b>0$ 时，$x>\sqrt{ab}$，或 $-b<x<0$；当 $x+a<0$ 时，$x<-a$；当 $x+a\geqslant 0$ 且 $x+b\leqslant 0$ 时，就是 $-a\leqslant x\leqslant -b$.

例 6 解不等式 $|3-4x|<5$.

解 设 $y=3-4x$，则有 $|y|<5$

即 $\quad -5<y<5$

亦即 $\quad -5<3-4x<5$

解得 $\quad -\frac{1}{2}<x<2$.

例 7 求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

证 由 $a^2+b^2\geqslant 2ab$

$b^2+c^2\geqslant 2bc$

$c^2+a^2\geqslant 2ca$

相加得 $\quad 2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ca)$

$\therefore \quad a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

例 8 若 a、b、c 均非负数，试证：

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc.$$

证 因为 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

已知 a、b、c 均非负数，∴ $a+b+c\geqslant 0$，由上例知 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geqslant 0$ 故得：

$$a^3+b^3+c^3-3abc\geqslant 0$$

∴ $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc.$

注 此题若将不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

$$(a_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\cdots,n)$$

视为定理，则本题之证明就更为简单：

∵ $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，$c\geqslant 0$，

∴ $a^3\geqslant 0$，$b^3\geqslant 0$，$c^3\geqslant 0$.

故 $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\geqslant\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=abc$，

即 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc.$

例 9 试证：若 $m>0$，$n>0$，则 $(m+n)\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)\geqslant 4.$

证 用比较法：

$$(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)-4=\frac{(m+n)^2}{mn}-4$$

$$=\frac{(m+n)^2-4mn}{mn}=\frac{(m-n)^2}{mn}\geqslant 0$$

∴ $(m+n)\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)\geqslant 4.$

注 此题也可由不等式 $(m+n)^2-4mn\geqslant 0$ $(m>0,\ n>0)$

直接推出.

例 10 如果 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant 0$，求证：

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

证 因为 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant 0$，

故有 $\frac{a}{b}\geqslant 1, \frac{a}{c}\geqslant 1, \frac{b}{c}\geqslant 1$

及 $a-b\geqslant 0$，$a-c\geqslant 0$，$b-c\geqslant 0$.

从而 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\geqslant 1.$

即 $a^{a-b}\cdot b^{-(a-b)}\cdot b^{b-c}\cdot a^{a-c}\cdot c^{-(b-c)}\cdot c^{-(a-c)}\geqslant 1$

即 $a^{2a-b-c}\cdot b^{2b-a-c}\cdot c^{2c-a-b}\geqslant 1$

$\therefore$ $[a^{2a-b-c}\cdot b^{2b-a-c}\cdot c^{2c-a-b}]^3\geqslant 1.$

即 $$\frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}}\geqslant 1.$$

故 $a^a b^b c^c\geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$

例 11 设 a，b，c 均为正数，求证：

$$\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\geqslant\frac{9}{a+b+c}.$$

证 由著名不等式$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$可知：对正数 a、b、c 我们有

$$\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{2}{b+c}\times\frac{2}{c+a}\times\frac{2}{a+b}}. \quad (1)$$

同时还有

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)\geqslant 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}. \quad (2)$$

将(1)、(2)两边分别相乘，即

$$\left(\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\right)[2(a+b+c)]\geqslant 9\sqrt[3]{8},$$

即 $$\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\geqslant\frac{9}{a+b+c}.$$

例 12 试证 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

分析 要证明$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$，只要证明

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}-\left(\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}\right)\leqslant 0.$$

为此，我们可以逐次扩大被减数$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}$，而缩小减数$\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$，最后得出

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}-\left(\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}\right)$$

确实不大于零.

证明 $$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}-\left(\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}\right)$$

$$\leqslant\frac{|a+b|}{1+|a+b|}-\left(\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\right).$$

$\because$ $$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}-\left(\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\right)$$

$$=\frac{|a+b|}{1+|a+b|}-\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{|a+b|}}-\frac{1}{1+\frac{1}{|a|+|b|}}.$$

而 $$\frac{1}{1+\frac{1}{|a|+|b|}} \geqslant \frac{1}{1+\frac{1}{|a+b|}},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{1+\frac{1}{|a+b|}} - \frac{1}{1+\frac{1}{|a|+|b|}}$$

$$\leqslant \frac{1}{1+\frac{1}{|a+b|}} - \frac{1}{1+\frac{1}{|a+b|}} = 0.$$

$$\therefore\quad \frac{|a+b|}{1+|a+b|} - \left(\frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}\right) \leqslant 0$$

就是 $$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

例 13 已知$|a|<1$,$|b|<1$，求证：$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

分析 要证明$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$,只要证明$\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)^2<1$,因此，只要证明$(a+b)^2<(1+ab)^2$. 而

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab,$$

$$(1+ab)^2 = 1+a^2b^2+2ab,$$

所以，要证明$(a+b)^2<(1+ab)^2$，只要证明

$$a^2+b^2<1+a^2b^2,\ 就是\ 1+a^2b^2-a^2-b^2>0.$$

而$1+a^2b^2-a^2b^2=(1-b^2)(1-a^2)$，已知$|a|<1$,所以$a^2<1$,就是$1-a^2>0$.同理可得$1-b^2>0$.所以$1+a^2b^2-a^2-b^2>0$.

证明 $\because\ |a|<1$，$\therefore\ a^2<1$，就是$1-a^2>0$.

$\because\ |b|<1$，$\therefore\ b^2<1$，就是$1-b^2>0$,

$\therefore\ (1-a^2)(1-b^2)>0$.

就是 $a^2b^2+1>a^2+b^2$.

$\therefore\ a^2b^2+2ab+1>a^2+b^2+2ab$.

$\therefore \quad (ab+1)^2 > (a+b)^2$.

$\therefore \quad \dfrac{(a+b)^2}{(ab+1)^2} < 1$. $\therefore \quad \left|\dfrac{a+b}{ab+1}\right| < 1$.

例 14　若正实数 a、b、c 满足条件 $a+b+c=1$.

① 求 abc 的最大值，② 求证 $a^2+b^2+c^2 \geqslant \dfrac{1}{3}$；

③ 求 $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(c+\dfrac{1}{c}\right)^2$ 的最小值.

解　① $\because$ a、b、c 是正实数，

$\therefore \dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$. $\therefore \quad \dfrac{1}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$

$\therefore \quad abc \leqslant \dfrac{1}{27}$，等号只在 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ 时成立．即 abc 的最大值是 $\dfrac{1}{27}$.

② $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$

$=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0$

$\therefore \quad a^2+b^2+c^2 \geqslant \dfrac{1}{3}(a+b+c)^2=\dfrac{1}{3}$.

其中等号仅在 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ 时成立.

③ $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(c+\dfrac{1}{c}\right)^2$

$=a^2+b^2+c^2+6+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$

$\because \quad \dfrac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2b^2c^2}}$

据①　　$\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}\geqslant\sqrt[3]{27}=9$,

$$\therefore\quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant 27$$

再据②，得

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\geqslant\frac{1}{3}+6+27$$

$$=\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}.$$

其中等号只在 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时成立，这时所求关系式取得最小值 $33\frac{1}{3}$.

例 15　解方程 $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

解　原方程可变形为

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=1.$$

因此要分下列三种情况来研究解法：

① 当 $\sqrt{x-1}\geqslant 3$，即 $x\geqslant 10$ 时，得

$$(\sqrt{x-1}-2)+(\sqrt{x-1}-3)=1,$$

即 $\sqrt{x-1}=3$，解之，得 $x=10$.

② 当 $0\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 2$ 即 $1\leqslant x\leqslant 5$ 时，得

$$(2-\sqrt{x-1})+(3-\sqrt{x-1})=1.$$

解之，得　$x=5$

③ 当 $2<\sqrt{x-1}<3$，即 $5<x<10$ 时得

$$(\sqrt{x-1}-2)+(3-\sqrt{x-1})=1$$

即 $1=1$ 为恒等式，这就是说当 $x\in(5,10)$ 时，x 的任何值都是原方程的解.

综合①、②、③可知，原方程的解是满足不等式 $5 \leqslant x \leqslant 10$ 中的一切实数 x。

习 题 四

1. x^3 与 x^2-x+1 哪个大？

2. $2x^3$ 与 $x-1$ 哪个大？

3. 设 a 与 b 都为正数，则 $\dfrac{2a+3b}{3a+2b}$ 与 $\dfrac{5a+6b}{9a+8b}$ 哪个大？

4. 如 a，b，c 是不全相等的实数，$ab+bc+ca$ 与 $a^2+b^2+c^2$ 哪个大？

5. 设 a，b 都为正数，且不相等，试比较 a^3+b^3 与 $ab(a+b)$ 的大小？

6. 设 a、b 皆为正数，比较 a^3-b^3 与 $3a^2(a-b)$ 的大小？

7. 解不等式 $x^2-a<0$

8. 解不等式
$$\begin{cases} x+2y>15 & (1) \\ 3x+2y=31 & (2) \end{cases}$$

9. 解不等式 $2x^2-5xy+3y^2>0$

10. 求 x 适合于 $18x-3x^2>24$ 之整数值。

11. 求满足 $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 3x^2-2y^2>25 \end{cases}$ 的 x、y 的整数值组。

12. 求证：$x^2-5x+7 \nless \dfrac{3}{4}$。

13. 求适合 $\begin{cases} x^2-3x-4>0 \\ x^2-x-6>0 \end{cases}$ 的 x 的取值范围

解以下不等式：

14. $\dfrac{6x^2-7x+2}{2x^2-5x-3}<0$

15. $\frac{4x^2-20x+18}{x^2-5x+4}>3$

16. 求使不等式$\frac{4x^2+2\lambda x+2}{x^2+x+1}>2$对一切实数$x$都成立的$\lambda$值的范围.

17. $\sqrt{3-x}>x-2$.

18. $\sqrt{5x+1}-\sqrt{2x-1}>\sqrt{7x}$.

19. $\lg(x+1)-\lg(x-1)>1$

20. $\lg(10x+9)-2<\lg(x^2+x-1)-\lg(10x-9)$.

21. 求函数$\lg\left(\frac{5x^2-10x+3}{3x^2-7x+2}-1\right)$的定义域.

22. 当自然数n是怎样的值时下列不等式成立?

$\left|\frac{3n}{n+1}-3\right|<0.01$

23. 为了保持不等式$\left|\frac{1}{10x-1}\right|>1000$的正确性, x值必须满足什么条件?

24. 一个分数的分子分母都是正整数, 分子加3则大于$\frac{1}{2}$, 分母加3则等于$\frac{2}{7}$, 求该分数?

25. 解不等式 $9^{\log_3 x}-7^{\log_{49} x^2}-12>0$

26. 不等式$|x|+|y|<100$的整数解有多少组?

证不等式:

27. $x\neq1$ 证 $3(1+x^2+x^4)>(1+x+x^2)^2$.

28. $x>0$, $y>0$且$x<\frac{1-y}{1+y}$则$y<\frac{1-x}{1+x}$

29. 若$a>1$, 求证: $a^3>a+\frac{1}{a}-1$

30. 设 a，b，c 为三整数，且其中任意二数之和大于第三数，则 $a^2+b^2+c^2<2(bc+ca+ab)$

31. 已知 a，b，c 为互不相等的正数，求证

$$2(a^3+b^3+c^3)>a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$$

32. 设 $n>1$，$x>1$．求证 $x+\dfrac{1}{nx}>1+\dfrac{1}{n}$．

33. 若 $x<a$，且 x，a 皆为正数，则 $\dfrac{a-x}{a+x}<\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$．

34. 设 $a>b>0$，求证 $\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{2ab-b^2}>a$．

35. 设 x，y，z 为正数，$x^2=y^2+z^2$ 则 $x>y$，$x>z$．

36. 若 $x+y=a$ 求证 $x^n+y^n\geqslant\dfrac{a^n}{2^{n-1}}$（$n$ 为正整数，$a>0$）．

37. 不求根，证明 $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$ 成立．

38. 若 a 为不等于 ±1 的实数，n 为自然数求证

$$\frac{1}{a^n+a^{-n}-1}<1.$$

39. 设 $a^2+b^2+c^2=1$，$x^2+y^2+z^2=1$ 试证

$ax+by+cz\leqslant1$．（其中 a、b、c、x、y、z 皆为正实数）．

40. 设 $a>b>c$，则 $\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{a-b}>0$

41. 若对任何 i（$i=1$，2，3…）$a_i>0$

$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots\cdots a_n=1$ 求证

$(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_n)\geqslant2^n$．

42. 若 $\dfrac{a_1}{b_1}<\dfrac{a_2}{b_2}<\cdots\cdots<\dfrac{a_n}{b_n}$；且 a_1，a_2，…，a_n 和 b_1，b_2，b_3……，b_n 都为正数．求：$\dfrac{a_1}{b_1}<\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}<\dfrac{a_n}{b_n}$

43. 假设 x,y,z 都是实数，且它们满足：

Ⅰ. $x+y+z=a$.　Ⅱ. $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$, $a>0$.

求证：x, y, z 都不会是负数，也都不大于$\frac{2}{3}a$.

44. 若 $a>b>c>0$，求证：$a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

45. 设 $f(x)=x^2+ax+b$. 证明：值 $|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|$ 中，至少有一个不小于$\frac{1}{2}$.

46. 若 $a>0, b>0$，则：$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

47. 若 a, b, c. 是全不相等的正实数，求证：

$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(c+b)>6abc$.

48. 若 $a>b>0$，求证：$a^ab^b>a^bb^a$

49. 求证：$13^{13}\cdot 11^{11}>13^{11}\cdot 11^{13}$.

第五章　函数与极值

§1. 函数的概念

在两个变量 x 和 y 的变化过程中，如果对于变量 x 在它的变化范围内的每一个值，变量 y 都有唯一确定的值与它相对应，则称变量 y 是变量 x 的函数．变量 x 叫做自变量，变量 y 又叫做因变量．变量 x 和变量 y 间的对应关系常称为函数关系．记作 $y=f(x)$．

表示函数的方法，通常有：

解析法——用数学式子表示变量间函数关系的方法．

列表法——把自变量与函数的一系列的值，对应地列成表格加以表示的方法．

图象法——通过坐标系用图形表示函数的方法．

通常我们所讨论的函数，大都是用解析法表示的．

幂函数　$y=x^k$（k 为任意实数）；

指数函数　$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

对数函数　$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\operatorname{tg} x$ 等；

反三角函数　$y=\arcsin x$，　$y=\arccos x$，　$y=\operatorname{arc\,tg} x$ 等通称为五类基本初等函数．初等函数是能用一个分析式子表示的函数，而这一分析式子是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算（加、减、乘、除）以及有限次的函数复合步

骤所形成的.

初等函数一般分列为：

$$
\text{初等函数}\begin{cases}\text{代数函数}\begin{cases}\text{有理函数}\begin{cases}\text{整函数(多项式)}\\ \text{一般有理函数}\end{cases}\\ \text{无理函数}\end{cases}\\ \text{超越函数}\end{cases}
$$

对于自变量的某一已知数值，函数具有确定的对应值，则称对应该值函数是有定义的.

数轴上使函数有定义的一切点的全体，叫做函数的定义域. 确定初等函数的定义域时应注意：

函数中若有分式，分母不该为零；

函数中若有偶次根式，根底应大于或等于零(即非负数)；

函数中若幂的指数是无理数或含有变数时，根底数应该是正的；

函数中若有对数函数，对数符号下的式子应该是正的；

函数中若有正切函数，正切符号下的式子不能为 $k\pi+\frac{\pi}{2}$ (k 是整数)；若有余切函数，余切符号下的式子不能为 $k\pi$ (k 为整数)；

函数中若有反正弦函数或反余弦函数，反正弦或反余弦符号下的式子的绝对值不能大于 1；

若所研究的函数是由几个基本初等函数进行四则运算而组成时，则这个函数的定义域应是各个函数定义域的公共部分，但使分母为零的自变量值应除外.

对于函数 $f(x)$，若存在一常数 $N>0$，使定义域里的一切 x 值都有 $|f(x)|<N$，则函数 $f(x)$ 在此定义域上是有界的. 否则，函数 $f(x)$ 是无界的.

确定函数有界与否，常根据定义而定.

若函数 $y=f(x)$ 当 x 改变符号时，函数值也只改变符号，即 $f(-x)=-f(x)$，则此函数叫做奇函数．奇函数的图象是对称于原点的.

若函数 $y=f(x)$ 当 x 改变符号时，函数值不变，即 $f(-x)=f(x)$，则此函数叫做偶函数．偶函数的图象是对称于 y 轴的.

根据函数的奇偶性的定义，不难证明：

两个偶（奇）函数的和或差仍是偶（奇）函数；

两个偶（奇）函数的积是偶函数；

一个偶函数与一个奇函数的积是奇函数；

函数 $f(x)$ 与 $\dfrac{1}{f(x)}$ 具有相同的奇偶性.

函数 $y=f(x)$ 在定义域的某个区间 M 上，任取两数 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，若 $f(x_1)<f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在 M 上是递增的；当 $x_1<x_2$ 若 $f(x_1)>f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在 M 上是递减的.

我们约定：若函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在所讨论的区间上都是递增（减）的，则称它们依同向变化；否则若一个是递增，一个是递减的，则称它们在所讨论的区间上依反向变化．于是便有：

函数 $f(x)$ 与 $f(x)+c$（c 是常数）是同向变化的；

函数 $f(x)$ 与 $cf(x)$（c 是常数），当 $c>0$ 时它们依同向变化，当 $c<0$ 时它们依反向变化；

若函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 依同向变化，则 $f_1(x)+f_2(x)$ 与原函数依同向变化；

若正值函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 依同向变化，则函数 $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 与原函数同向变化；

若负值函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 依同向变化，则函数 $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 与原函数反向变化；

函数 $f(x)$ 与 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $f(x)\neq 0$ 的同号区间里依反向变化；

若函数 $y=f(u)$，$u=\phi(x)$ 依同向变化，则复合函数 $y=f[\phi(x)]$ 是递增的；

若函数 $y=f(u)$，$u=\phi(x)$ 依反向变化，则复合函数 $y=f[\phi(x)]$ 是递减的.

此外，应用函数的奇偶性，可简化单调性的研究：

若函数 $f(x)$ 是偶函数，则在关于原点的对称区间里函数 $f(x)$ 是反向的；

若函数 $f(x)$ 是奇函数，则在关于原点的对称区间里函数 $f(x)$ 是同向的.

由于互反函数具有共同的单调性，所以可以借助反函数的单调性来讨论原函数的单调性.

利用平面坐标系，满足函数 $y=f(x)$ 的点集叫做函数 $y=f(x)$ 的图象. 绘制函数图象的基本方法是描点法. 为了使描点更具有针对性，常先讨论函数的特性，然后再描点作图. 其次是应用图形的初等变换作图，它包括：

对称变换：

函数 $y=f(x)$ 的图象和函数 $y=-f(x)$ 的图象是关于 x 轴对称的；

函数 $y=f(x)$ 的图象和函数 $y=f(-x)$ 的图象是关于 y 轴对称的；

函数 $y=f(x)$ 的图象和函数 $y=-f(-x)$ 的图象是关于

原点对称的.

平移变换：

函数 $y=f(x)+b$ 可由函数 $f(x)$ 的图象沿 y 轴平移 b 个单位而得到；

函数 $y=f(x-b)$ 可由函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴平移 b 个单位而得到.

放大变换：

把函数 $y=f(x)$ 的图象沿 y 轴方向放大 $k(k>0)$ 倍，就得到函数 $y=kf(x)$ 的图象；

把函数 $y=f(x)$ 的图象沿 x 轴方向放大 $k(k>0)$ 倍，就得到函数 $y=f\left(\frac{x}{k}\right)$ 的图象.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 M，值域为 N，若 M、N 能拼成一一对应，则可得出以 N 为定义域，以 M 为值域的函数 $x=f^{-1}(y)$，并称此为 $y=f(x)$ 的反函数. 由于习惯以 x 表示自变量，故 $y=f(x)$ 的反函数常记作 $y=f^{-1}(x)$.

这里应注意：互反函数具有相同的单调性；互反函数，若 $y=f(x)$ 的反函数以 $x=f^{-1}(y)$ 表示，则其图象不变. 若 $y=f(x)$ 的反函数以 $y=f^{-1}(x)$ 表示，则其图象是关于直线 $y=x$ 对称.

例 1　求下列函数的定义域：

① $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$；

② $y=\dfrac{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)}}{2^{\frac{x}{x-1}}-2^{\frac{x}{1-x}}}$；

③ $y=\arcsin\frac{1}{x-1}+\lg[1-\lg(x^2-5x+16)]$.

解 ① x 须满足$\begin{cases}x^2-3x+2\geqslant 0\\3+2x-x^2>0\end{cases}$

即 $\begin{cases}(x-1)(x-2)\geqslant 0\\(x+1)(x-3)<0\end{cases}$ 亦即$\begin{cases}x\leqslant 1 \text{ 或 } x\geqslant 2\\-1<x<3\end{cases}$

∴ $-1<x\leqslant 1$ 或 $2\leqslant x<3$. 就是所求函数的定义域.

② x 须满足$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)\geqslant 0\\2^{\frac{x}{x-1}}-2^{\frac{x}{1-x}}\neq 0\end{cases}$

即 $\begin{cases}0<\frac{1}{2}-x\leqslant 1\\\frac{x}{x-1}\neq\frac{x}{1-x}\end{cases}$ 解之$\begin{cases}-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}\\x\neq 0,\ x\neq 1\end{cases}$

∴ $-\frac{1}{2}\leqslant x<0$ 或 $0<x<\frac{1}{2}$. 就是所求函数的定义域.

③ 在函数 $\arcsin\frac{1}{x-1}$ 里，x 须满足

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|\leqslant 1,\ \text{即}\ |x-1|\geqslant 1,$$

从而 $x-1\leqslant -1$ 或 $x-1\geqslant 1$,

∴ $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 2$.

在函数 $\lg[1-\lg(x^2-5x+16)]$ 里，x 须满足

$$1-\lg(x^2-5x+16)>0,$$

即 $\lg(x^2-5x+16)<1$,

从而 $x^2-5x+16<10$, $x^2-5x+6<0$.

$(x-2)(x-3)<0$, ∴ $2<x<3$.

上述二函数定义域的公共部分，即 $2<x<3$，就是所求函数的定义域.

例 2 判断下列函数的有界性：

① $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$；

② $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

解 ① 对于一切实数 x，$\dfrac{x^2}{x^2+1}$都是真分数，

即 $\left|\dfrac{x^2}{x^2+1}\right|<1$

根据有界函数的定义可知函数 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$是有界的.

② 对于任意给定的正数 $M>0$ 在定义域内总可找到一个 x_0

使 $\left|x_0{}^2+\dfrac{1}{x_0^2}\right|>M$ 成立.

根据有界函数的定义可知函数 $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$是无界的.

例 3 判断下列函数的奇偶性：

① $f(x)=2\sin x+x^3-\lg b^x\ (b>0)$；

② $g(x)=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}\ (a>1)$；

③ $\phi(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})\ (a>1)$.

解 ① 由于 $f(-x)=2\sin(-x)+(-x)^3-\lg b^{-x}$

$$=-(2\sin x+x^3-\lg b^x)=-f(x)$$

所以 $f(x)$是奇函数.

② 由于 $g(-x)=(-x)\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=(-x)\dfrac{1-a^{x}}{1+a^{x}}$

$$=x\frac{a^{x}-1}{a^{x}+1}=g(x)$$

所以 $g(x)$ 是偶函数.

③ 由于 $\phi(-x)=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})$

$$=\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})$$

$$=\log_a\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-\phi(x)$$

所以 $\phi(x)$ 是奇函数.

例 4 判断下列函数的单调性:

① $f(x)=ax^2+bx+c\quad(a>0)$;

② $g(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$;

③ $\phi(x)=\sqrt{1+x^2}-x\quad(x>0)$.

解 ① 由于 $f(x_2)-f(x_1)=(ax_2^2+bx_2+c)$

$$-(ax_1^2+bx_1+c)$$

$$=a(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)$$

$$=(x_2-x_1)[a(x_1+x_2)+b]$$

$$=a(x_2-x_1)\left[\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)+\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)\right].$$

所以当 $x_1<x_2<-\dfrac{b}{2a}$ 时, $f(x_2)-f(x_1)<0$ 即 $f(x_2)<f(x_1)$ 函数 $f(x)$ 是递减的; 当 $-\dfrac{b}{2a}<x_1<x_2$ 时, $f(x_2)-f(x_1)>0$ 即 $f(x_1)<f(x_2)$, 函数 $f(x)$ 是递增的.

② 函数 $y=2^{\frac{1}{x-1}}$ 可以看成是由函数 $y=2^u$, $u=\dfrac{1}{x-1}$ 构

成的复合函数．它的定义域是 $x \neq 1$ 的一切实数．直接应用单调性定义判断它的单调性比较困难，这里应用单调性有关定理讨论之．

当 $-\infty < x < 1$，x 增加时，我们有

$x-1$ 是负值的增函数，〔定理(1)〕

$\dfrac{1}{x-1}$ 是负值的减函数．〔定理(5)〕

由于 $y=2^u$ 是增函数，

所以 $y=2^{\frac{1}{x-1}}$ 是减函数．〔定理(6)〕．

当 $1 < x < +\infty$，x 增加时，我们有

$x-1$ 是正值的增函数，〔定理(1)〕

$\dfrac{1}{x-1}$ 是正值的减函数．〔定理(5)〕

由于 $y=2^u$ 是增函数，

所以 $y=2^{\frac{1}{x-1}}$ 是减函数．〔定理(6)〕

③ 把 $\phi(x)$ 看成两个函数 $\sqrt{1+x^2}$ 与 $-x$ 的和应用定理判断它的单调性困难，这里设法把 $\phi(x)$ 变形，然后应用定理．

$$\phi(x)=\sqrt{1+x^2}-x=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

当 x 在 $(0,+\infty)$ 内逐渐增加时，我们有

x 是正值增函数，

x^2 是正值增函数，〔定理(4)〕

x^2+1 是正值增函数，〔定理(1)〕

$\sqrt{1+x^2}$ 是正值增函数，〔定理(6)〕

$x+\sqrt{1+x^2}$ 是正值增函数，〔定理(3)〕

$\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ 是正值减函数. 〔定理(5)〕

所以当 $x>0$ 时，$\phi(x)=\sqrt{1+x^2}-x$ 是增函数.

例 5 已知函数 $y=f(x)$ 的图象，求作下列各函数的图象：

① $y=f(x+2)$；　② $y=f\left(\dfrac{x}{2}\right)$；

③ $y=|f(x)|$；　④ $y=\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$.

解 ① 比较函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(x+2)$ 可以看出，当第二个函数的 x 值比第一个函数的 x 值小 2 时，它们所对应的函数值是相等的. 这就是说，把函数 $y=f(x)$ 图象上的点向左平移 2 个单位所得的点就是函数 $y=f(x+2)$ 的图象上的点. 因此，把函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移两个单位就得到函数 $y=f(x-2)$ 的图象. 如图 5—1.

② 比较函数 $y=f(x)$ 与 $y=f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ 可以看出，当第二个函数中的 x 值是第一个函数中 x 值的 2 倍时，它们所对应的函数值是相等的. 这就是说，把函数 $y=f(x)$ 的图象上的点的横坐标扩大 2 倍而纵坐标保持不变所得到的点就是函数 $y=f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ 图象上的点. 因此，把函数 $y=f(x)$ 的图象从原点开始沿 x

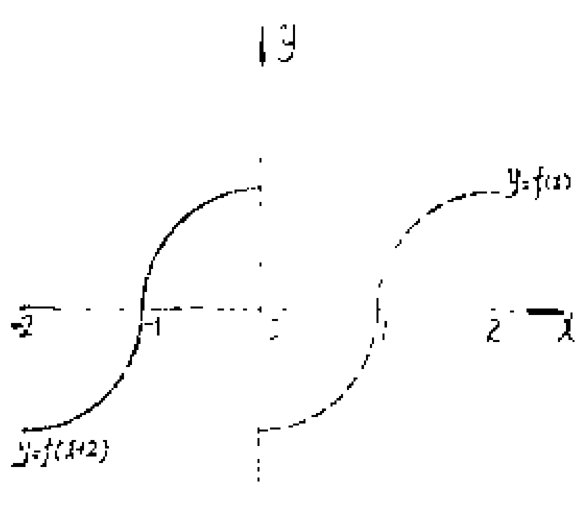


图 5—1

轴伸长 2 倍就得到函数 $y=f\left(\frac{x}{2}\right)$ 的图象. 如图 5—2.

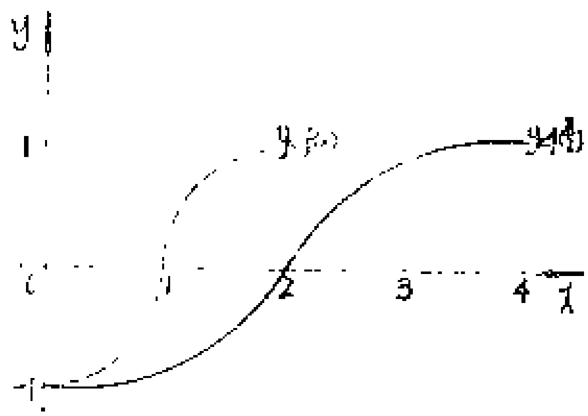


图 5—2

③ 比较函数 $y=f(x)$ 与 $y=|f(x)|$ 可以看出:

当 $f(x)\geq 0$ 时, $|f(x)|=f(x)$;

当 $f(x)<0$ 时, $|f(x)|=-f(x)$.

这就是说, 当 $f(x)\geq 0$ 时, 函数 $y=|f(x)|$ 与 $y=f(x)$ 的图象是一致的; 当 $f(x)<0$ 时, 函数 $y=|f(x)|$ 与 $y=f(x)$ 的图象是关于 x 轴对称的. 如图 5—3.

④ 函数 $y=\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$ 可以写成:

当 $f(x)>0$ 时, $y=\dfrac{|f(x)|}{f(x)}=\dfrac{f(x)}{f(x)}=1$;

当 $f(x)<0$ 时, $y=\dfrac{|f(x)|}{f(x)}=\dfrac{-f(x)}{f(x)}=-1$;

当 $f(x)=0$ 时, $y=\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$ 无意义.

所以 $y=\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$ 的图象如图 5—4.

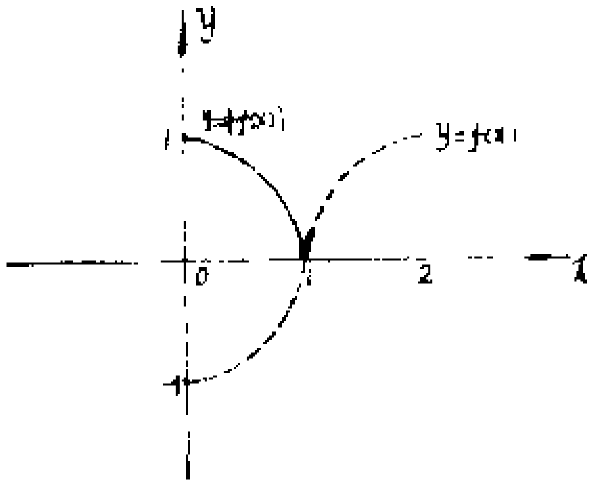


图 5—3

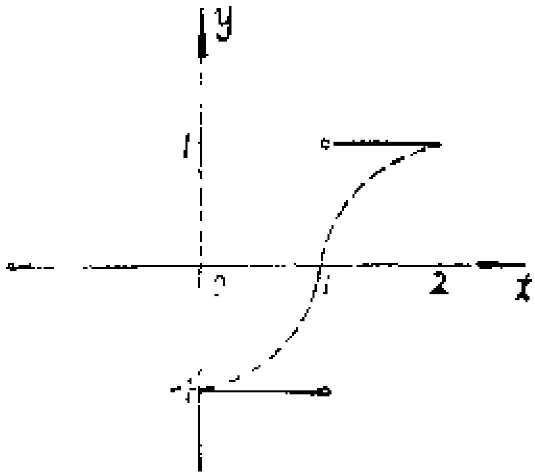


图 5—4

例 6　作函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 的图象.

解 为了使描点更具有针对性，我们先对函数进行讨论：

定义域　x 可取一切不等于零的实数；

值　域　函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 可以写成 $x^2-yx+1=0$

如 x 为实数，这个关于 x 的二次方程的判别式须为非负数：

$$y^2-4\geqslant 0 \quad \therefore \quad |y|\geqslant 2.$$

奇偶性　由于 $f(-x)=-x+\dfrac{1}{(-x)}=-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$. 所以函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 是奇函数. 它的图象关于原点对称.

单调性　已知函数的图象关于原点对称，所以我们首先研究 $x>0$ 时图象的大致情况.

观察函数 $y=x+\dfrac{1}{x}(x>0)$，y 等于两正数 x 和 $\dfrac{1}{x}$ 的和，而它们的乘积一定 $x\cdot\dfrac{1}{x}=1$，所以当 $x=\dfrac{1}{x}$ 即 $x=1$ 时函数 y 有

最小值.

我们进一步研究当 $0<x<1$ 及 $x>1$ 时图象的情况.

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)+\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)$$

$$=(x_2-x_1)\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right).$$

当 $0<x_1<x_2<1$ 时，$f(x_2)-f(x_1)<0$，函数是递减的；当 $1<x_1<x_2$ 时，$f(x_2)-f(x_1)>0$，函数是递增的.

又由于函数可以写成 $y-x=\frac{1}{x}$，所以随着 x 的增大图象越接近于直线 $y=x$.

又由于函数可变形为 $(y-x)x=1$ 当 $x>0$ 时 $y-x>0$ 所以图象总在直线 $y=x$ 的上方.

根据以上讨论，列出函数的对应数值表：

x	…,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{2}$,	1,	2,	4,	……
y	…,	$4\frac{1}{4}$,	$2\frac{1}{2}$,	2,	$2\frac{1}{2}$,	$4\frac{1}{4}$,	……

描点作出函数在第一象限的图形，再利用图象关于原点对称的性质，作出它在第三象限的图形. 这两支曲线就是所求函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图形. 如图 5—5.

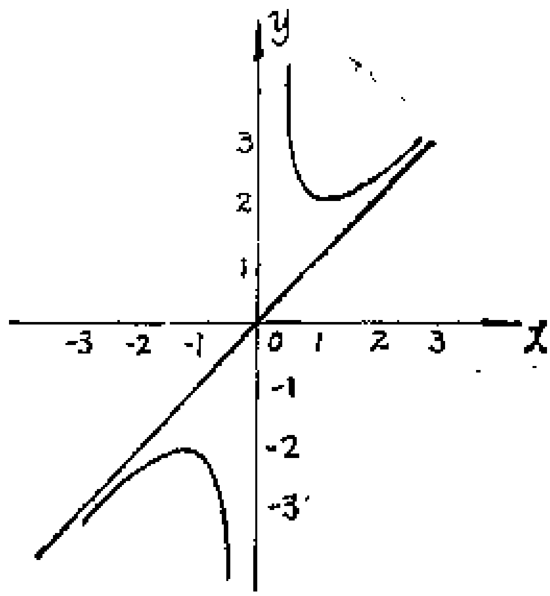


图 5—5

例 7 已知函数

$$y=\frac{mx+n}{px+q}\ (mq-np\neq 0),$$

① 求它的反函数；

② 若原函数和它的反函数相同，求 m、n、p、q 间的关系.

解 ① 函数 $y=\dfrac{mx+n}{px+q}$ 的定义域为 $x\neq-\dfrac{q}{p}$ 的一切实数. 把函数变形为

$$y(px+q)=mx+n, \text{ 即 } (py-m)x=n-qy.$$

当 $py-m\neq0$，即 $y\neq\dfrac{m}{p}$ 时，则有

$$x=\frac{n-qy}{py-m}.$$

这就是说自变量集合 $\left(x\neq-\dfrac{q}{p}\right)$ 和函数值集 $\left(y\neq\dfrac{m}{p}\right)$ 可以构成一一对应，所以原函数 $y=\dfrac{mx+n}{px+q}$ 存在反函数：

$$x=\frac{n-qy}{py-m}.$$

按习惯记法，x 表示自变量，y 表示函数，所求反函数又可写成

$$y=\frac{n-qx}{px-m}.$$

② 由于 $mq-np\neq0$，所以分式 $\dfrac{mx+n}{px+q}$ 与 $\dfrac{n-qx}{px-m}$ 都是既约分式. 它们相等的充要条件是

$$mx+n=n-qx; \quad px+q=px-m.$$

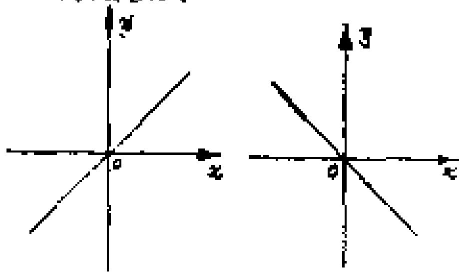
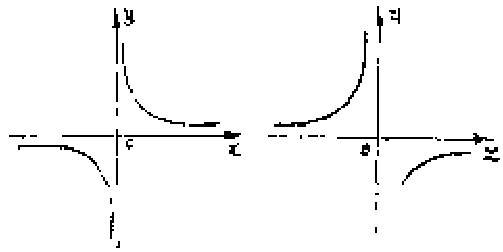
即 $m+q=0$.

所以，如原函数和它的反函数相等，系数 m,n,p,q 应满足

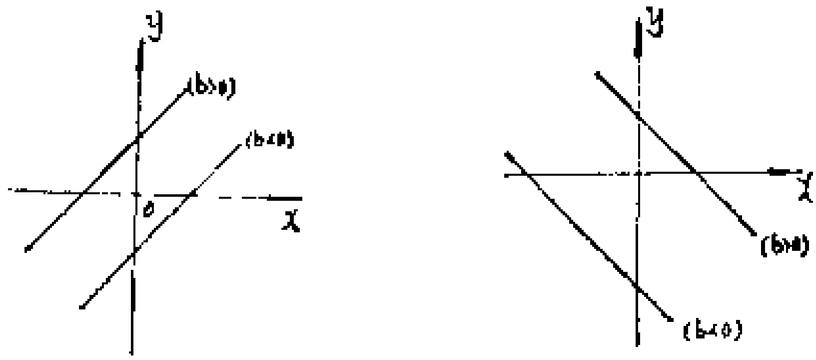
$$mq-np\neq0 \text{ 及 } m+q=0.$$

§2. 函数的性质

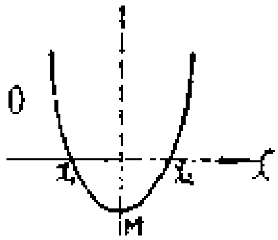
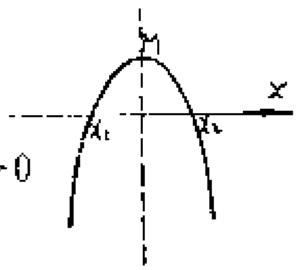
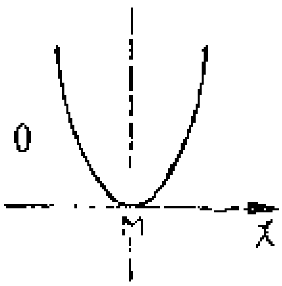
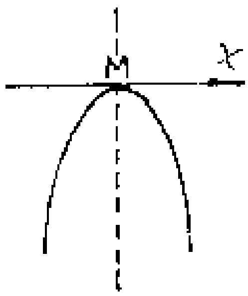
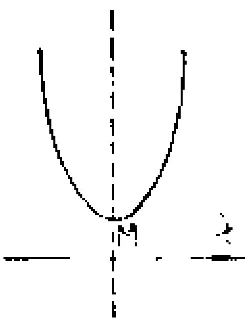
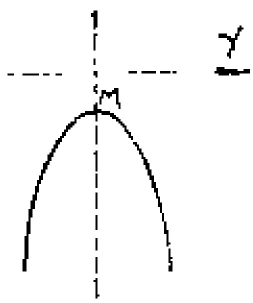
正比函数和反比函数

	正　比　函　数	反　比　函　数
定　义	$y=kx\,(k\neq 0)$ 叫做正比函数	$y=\dfrac{k}{x}\,(k\neq 0)$ 叫做反比函数
定义域	x 为任意实数	x 为除 0 外的任意实数
图　象 图 5—6	经过原点和点 $(1,k)$ 的一条直线  $(k>0)$　　$(k<0)$	以原点为中心，坐标轴为渐近线的双曲线  $(k>0)$　　$(k<0)$
性　质	① 当 $k>0$ 时，$y=kx$ 是增函数； 当 $k<0$ 时，$y=kx$ 是减函数． ② 当 $k>0$ 时，y 与 x 同号； 当 $k<0$ 时，y 与 x 异号． ③ 当 $k>0$ 时，k 越大 y 增大越快； 当 $k<0$ 时，$\|k\|$ 越大，y 减小越快． ④ 当 $x=1$ 时，$y=k$	① 当 $k>0$ 时，$y=\dfrac{k}{x}$ 是减函数； 当 $k<0$ 时，$y=\dfrac{k}{x}$ 是增函数． ② 当 $k>0$ 时，y 与 x 同号； 当 $k<0$ 时，y 与 x 异号． ③ 当 $\|k\|$ 越大时，曲线离原点越远． ④ 当 $x=1$ 时，$y=k$．

一次函数

定 义	$y=kx+b\,(k\neq 0)$ 叫做一次函数
定义域	x 为任意实数
图 象 图 5—7	经过点 $\left(-\dfrac{b}{k},0\right)$ 与 $(0,b)$ 的一条直线  $(k>0)$　　　　$(k<0)$
性 质	① 当 $k>0$ 时，$y=kx+b$ 是增函数； 当 $k<0$ 时，$y=kx+b$ 是减函数. ② 当 $k>0$ 时，如 $x>-\dfrac{b}{k}$ 则 $y>0$；如 $x=-\dfrac{b}{k}$ 则 $y=0$；如 $x<-\dfrac{b}{k}$ 则 $y<0$. 当 $k<0$ 时，如 $x<-\dfrac{b}{k}$ 则 $y>0$；如 $x=-\dfrac{b}{k}$ 则 $y=0$；如 $x>-\dfrac{b}{k}$ 则 $y<0$. ③ $\lvert k\rvert$ 越大，函数增大(减小)的越快.

二次函数

定 义	$y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$ 叫做二次函数	
定义域	x 为任意实数	
图 象	$a>0$ 是顶点在 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 开口向上的一条抛物线	$a<0$ 是顶点在 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4ac}\right)$，对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 开口向下的一条抛物线
	$b^2-4ac>0$ 	$b^2-4ac>0$ 
	$b^2-4ac=0$ 	$b^2-4ac=0$ 
图 5—8	$b^2-4ac<0$ 	$b^2-4ac<0$ 

性质	① 当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，是减函数； 当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，是增函数； 当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数有极小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$。 ② 当 $b^2-4ac>0$ 时 如 $x_1<x<x_2$，则 $y<0$； 如 $x<x_1$ 或 $x>x_2$， 则 $y>0$。 当 $b^2-4ac=0$ 时 如 $x\neq-\frac{b}{2a}$ 时， $y>0$； 如 $x=-\frac{b}{2a}$ 时， $y=0$。 当 $b^2-4ac<0$ 时 不论 x 为何值总有 $y>0$	① 当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，是增函数； 当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，是减函数； 当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数 y 有极大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$。 ② 当 $b^2-4ac>0$ 时 如 $x_1<x<x_2$， 则 $y>0$； 如 $x<x_1$ 或 $x>x_2$， 则 $y<0$ 当 $b^2-4ac=0$ 时 如 $x\neq-\frac{b}{2a}$ 时， $y<0$； 如 $x=-\frac{b}{2a}$ 时， $y=0$。 当 $b^2-4ac<0$ 时 不论 x 为何值总有 $y<0$。

注 x_1，x_2 为 ax^2+bx+c 的根：$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

例 1 已知 $f(x)=(m^2+2m)x^{m^2+m-1}$，当 m 为何值时，

① $f(x)$ 是正比函数；② $f(x)$ 是反比函数；

③ $f(x)$ 是二次函数.

解 ① 欲 $f(x)$ 是正比函数，m 须满足

$$\begin{cases} m^2+2m\neq 0 \\ m^2+m-1=1, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} m(m+2)\neq 0 \\ (m-1)(m+2)=0. \end{cases}$$

$\therefore \quad m=1.$

② 欲 $f(x)$ 是反比函数，m 须满足

$$\begin{cases} m^2+2m\neq 0 \\ m^2+m-1=-1, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} m(m+2)\neq 0 \\ m(m+1)=0. \end{cases}$$

$\therefore \quad m=-1.$

③ 欲 $f(x)$ 是二次函数，m 须满足

$$\begin{cases} m^2+2m\neq 0 \\ m^2+m-1=2 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} m(m+2)\neq 0 \\ m^2+m-3=0 \end{cases}$$

$\therefore \quad m=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$

答 当 $m=1$ 时，$f(x)$ 是正比函数；当 $m=-1$ 时，$f(x)$ 是反比函数；当 $m=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 时，$f(x)$ 是二次函数.

例 2 已知 $f(x)=|x+2|-|x-2|$

① 求证 $f(x)$ 是奇函数；② 画出函数的图象.

解 ① 由于
$$\begin{aligned} f(-x) &= |-x+2|-|-x-2| \\ &= |-(x-2)|-|-(x+2)| \\ &= |x-2|-|x+2| \\ &= -(|x+2|-|x-2|)=-f(x) \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

② 当 $x<-2$ 时，

$f(x)=-(x+2)-[-(x-2)]=-4$；

当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，

$f(x)=(x+2)-[-(x-2]=2x$；

当 $x>2$ 时，

$f(x)=(x+2)-(x-2)=4$.

分以上三种情况，分别画出它们的图象，就是所求函数的图象. 如图 5—9

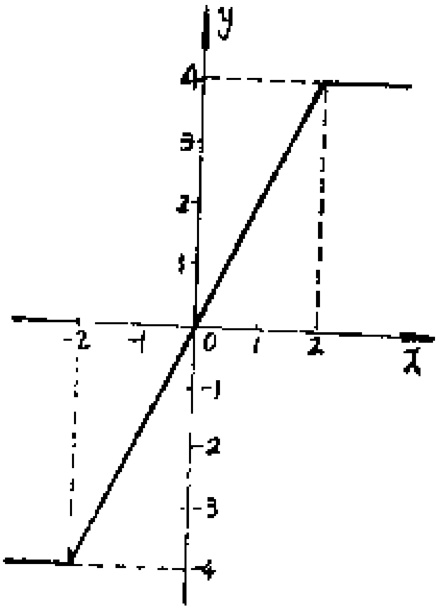


图 5—9

例 3 如 $f_1(x)$ 是正比函数，$f_2(x)$ 是反比函数，且 $\dfrac{f_1(1)}{f_2(1)}=2$，$f_1(2)+4f_2(2)=6$，试证明：$f_1(x)=2x$，$f_2(x)=\dfrac{1}{x}$.

证 设 $f_1(x)=k_1x$，

$f_2(x)=\dfrac{k_2}{x}$ (k_1, k_2 是常数)，

则 $f_1(1)=k_1$，$f_1(2)=2k_1$；

$f_1(2)=2k_1, f_2(2)=\dfrac{k_2}{2}$.

于是由题设条件知

$$\frac{k_1}{k_2}=2,\quad 2k_1+4\left(\frac{k_2}{2}\right)=6.$$

即 $\begin{cases}k_1-2k_2=0\\ k_1+k_2=3,\end{cases}$ 解之，$k_1=2$，$k_2=1$.

$\therefore\quad f_1(x)=2x,\ f_2(x)=\dfrac{1}{x}.$

例 4 已知函数 $y_1=ax^2+bx+c$ 和 $y_2=mx+n$ 的图象相

交于(1, -3)和(3, 5)，又 y_1 的图象的对称轴是直线 $x=1$.

① 写出这两个函数式；② 作出它们的图象；

③ 当 x 取什么值时，$y_1>y_2$.

解 ① 已知函数 $y_1=ax^2+bx+c$ 的图象经过点(1, -3)和(3,5)且对称轴方程是 $x=1$，所以有

$$\begin{cases}-3=a+b+c,\\5=9a+3b+c,\\-\dfrac{b}{2a}=1.\end{cases}$$

解之得　$a=2$，$b=-4$，$c=-1$.

从而　　$y_1=2x^2-4x-1$.

又知函数 $y_2=mx+n$ 的图象经过点(1, -3)和(3, 5)所以有

$$\begin{cases}-3=m+n,\\5=3m+n.\end{cases}$$

解之得　$m=4$，$n=-7$.

从而　　$y_2=4x-7$.

② $y_1=2x^2-4x-1$

$\quad\;=2(x-1)^2-3$.

所以 $y_1=2x^2-4x-1$ 的图象是顶点在(1, -3)，对称轴方程为 $x=1$，开口向上的一条抛物线.

又 $y_2=4x-7$ 的图象是经过点(1, -3)和(3,5)的一条直线. 如图 5—10.

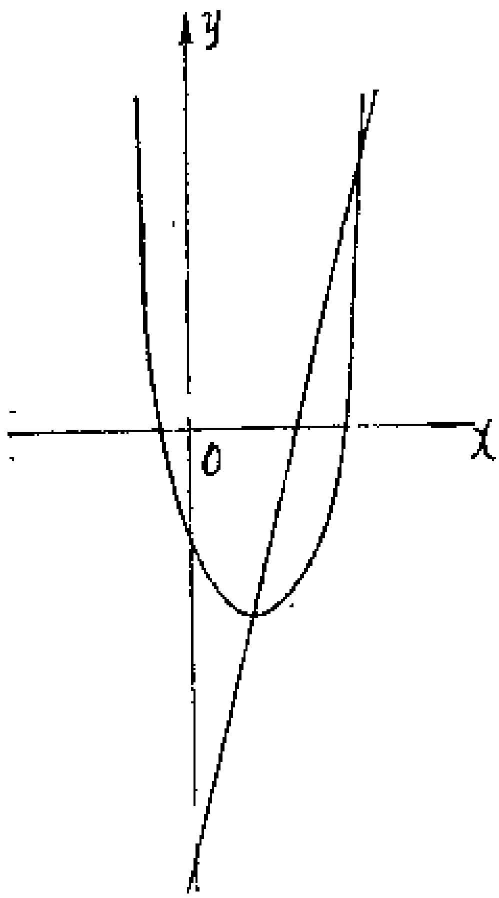


图 5—10

③ $y_1>y_2$

即 $2x^2-4x-1>4x-7$，$2x^2-8x+6>0$，$(x-1)(x-3)>0$.

$\therefore\quad x<1$ 或 $x>3$.

当 $x<1$ 或 $x>3$ 时，$y_1>y_2$.

例 5 如果抛物线 $y=x^2-2mx+m^2+m+1$ 的顶点在直线 $2x-y-1=0$ 上，求 m 的值和顶点的坐标，并指出其同号区间和单调区间.

解 $y=(x-m)^2+(m+1)$，所以抛物线的顶点为 $M(m, m+1)$. 由于顶点在直线 $2x-y-1=0$ 上，于是得

$$2m-(m+1)-1=0,\quad \therefore\quad m=2.$$

从而抛物线的顶点为 $M(2,3)$. 抛物线的方程为 $y=(x-2)^2+3=x^2-4x+7$.

当 $x<2$ 时，函数 $y=x^2-4x+7$ 是递减的；

当 $x>2$ 时，函数 $y=x^2-4x+7$ 是递增的；

当 $x=2$ 时，函数 $y=x^2-4x+7$ 有极小值 2；

当 x 不论是什么实数，$y=(x-2)^2+3>0$，所以 y 恒为正值. 同号区间为：$(-\infty,+\infty)$，单调区间为：$(-\infty,2)$ 和 $(2,+\infty)$

例 6 已知某二次函数的图象关于直线 $x+2=0$ 对称，且与直线 $y=2x+1$ 相切，在 x 轴上截得长为 $2\sqrt{2}$ 的线段，求此二次函数.

解 由于二次函数的图象关于直线 $x+2=0$ 对称，所以设二次函数的解析式为

$$y=a(x+2)^2+b,\qquad (a\neq 0)$$

令 $y=0$，得曲线在 x 轴上的截距为

$$x_1=-2-\sqrt{-\frac{b}{a}},\quad x_2=-2+\sqrt{-\frac{b}{a}}.$$

于是得 $\quad x_2-x_1=2\sqrt{-\frac{b}{a}}=2\sqrt{2}.$

$\therefore \quad b=-2a.$

从而所求二次函数为 $y=a(x+2)^2-2a$.

以 $y=2x+1$ 代入上式，得

$$2x+1=a(x+2)^2-2a,$$

即 $\quad ax^2+(4a-2)x+2a-1=0.$

由于直线 $y=2x+1$ 与曲线 $y=a(x+2)^2-2a$ 相切，所以二次方程的判别式应等于零．即

$$(2a-1)^2-a(2a-1)=0 \quad 即 \quad (2a-1)(a-1)=0.$$

$\therefore \quad a=\frac{1}{2}, 1.$

故所求二次函数为 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-1$，或 $y=(x+2)^2-2$.

例 7 已知抛物线的顶点是$\left(1.5, -\frac{25}{4}\right)$且过点$M(-1, 0)$；又一直线平行于直线 $y=2x$，且在 y 轴上的截距是 -10，求抛物线和直线的交点．

解 由于抛物线的顶点是$\left(1.5, -\frac{25}{4}\right)$，所以它的方程是

$$y=a\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}.$$

又由于抛物线经过点 $M(-1,0)$，所以有

$$0=a\left(-1-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}, \quad \therefore \quad a=1.$$

于是抛物线的方程为 $y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=x^2-3x-4.$ (1)

又直线的方程为 $\quad y=2x-10.$ (2)

解(1)，(2)得　$x=2$，$y=-6$；$x=3$，$y=-4$.

所以抛物线和直线的交点是$(2,-6)$，$(3,-4)$.

例 8 把抛物线$y=\frac{1}{3}x^2$固定顶点旋转180°，然后向右平移2个单位，再向下平移5个单位，求抛物线方程.

解 将抛物线$y=\frac{1}{3}x^2$固定顶点旋转180°，它的方程为$y=-\frac{1}{3}x^2$；再将抛物线$y=-\frac{1}{3}x^2$向右平移2个单位，它的方程为$y=-\frac{1}{3}(x-2)^2$；最后，把抛物线$y=-\frac{1}{3}(x-2)^2$向下平移5个单位，它的方程为$y=-\frac{1}{3}(x-2)^2-5$.

§3. 函数的极值

设函数$y=f(x)$在点x_0的邻域$(x_0-\delta<x<x_0+\delta)$上有定义，在这个邻域内异于$x_0$的任何$x$值，若$f(x)<f(x_0)$恒成立，则称$f(x_0)$为函数$y=f(x)$的极大值．反之，若$f(x)>f(x_0)$恒成立，则称$f(x_0)$为函数$y=f(x)$的极小值．否则在此邻域上若上述两者都不能恒成立，则$f(x_0)$非函数的极值.

函数的极大值与极小值统称为极值．使函数取得极值的点称为极值点．函数的极值是就其局部说来的最大值或最小值，平常所说的函数的最大值或最小值都是就整个区间而言的，因此说函数的最大值或最小值是全局性的概念.

在中学数学的范围内求极值，主要是靠对二次函数(抛物线与椭圆)的研究及对正弦形函数等特殊情形而给出的.

① 函数 $y=ax^2+bx+c$ $(-\infty,\ \infty)$，

当 $a>0$ 时，在点 $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ 有极小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$；

当 $a<0$ 时，在点 $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ 有极大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

这里，由于此二次曲线在 $(-\infty,\ \infty)$ 上只有一个极值，因此函数的极小值就是函数的最小值 (y_{min})；函数的极大值就是函数的最大值 (y_{max}).

② 运用关系式：$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，或 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$

若 $a+b=$ 常数，则当 $a=b$ 时，$a\cdot b$ 有最大值.

若 $a\cdot b=$ 常数，则当 $a=b$ 时，$a+b$ 有最小值.

③ 若函数 $y=f(x)$ 可化成

$$f_1(y)x^2+f_2(y)x+f_3(y)=0.$$

则从 x 有实数解的二次三项判别式：

$$\triangle=f_2{}^2(y)-4f_1(y)\cdot f_3(y)\geqslant 0,$$

求解出 y 的上、下确界即得函数的极值.

④ 椭圆函数 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$，在点 x_0 有极大值（也是最大值）$y_{max}=b$. 同时在点 x_0 有极小值（也是最小值）$y_{min}=-b$.

⑤ 函数 $y=A\sin(\omega t+\varphi)$，当 $\omega t+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，

即 $t=\frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi-\varphi\right)$，$k=0$，$\pm1$，$\pm2$，…时，函数有极大值且最大值是 $y_{max}=A$.

当 $\omega t+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，即 $t=\frac{1}{\omega}\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi-\varphi\right)$，$k=0$，

± 1，± 2，…时，函数有极小值且最小值是 $y_{min}=-A$.

上述所讨论的极值问题，对于函数的自变量，除了限制在函数的定义域内以外，并无其他条件限制，因此统属无条件极值问题．但现实问题中却存在大量对自变量附加条件限制的极值问题，如函数 $z=f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y)=0$ 限制下求极值，这些统称为条件极值．

这里，由于条件的出现，常与自变量增加相伴随．因此含有解方程组的内容，通常采用代入法消去一个或一些未知数化成无条件极值问题．

如果遇到一个几何问题或实际问题，需要求变量 T 的最小值或最大值，则首先要搞清楚问题当中有哪几个变量，其次这些变量之间有什么关系，选择一个变量 x 为自变量，再求出 $T=f(x)$，应用以上这些求极值的方法，求出允许范围内的极值．

本节内容大体如此．

例 1 一门高射炮，炮弹的初速为 v_0，射角为 α，问炮弹离炮口多少时间，炮弹达到最大高度？并求最大高度．

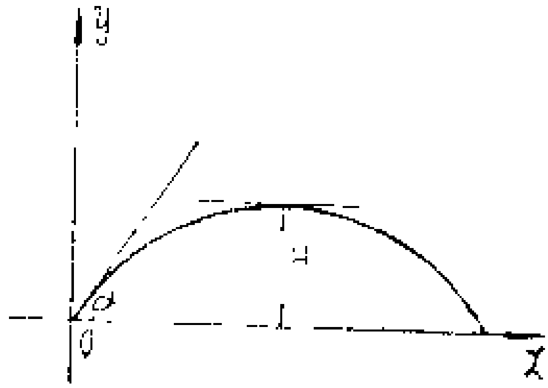


图 5—11

解 设炮弹上升的高度为 y，t 为炮弹飞行的时间，按物理学公式：

$$y=v_0 t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2,$$

由函数解析式可以看出，这里

$$a=-\frac{1}{2}g<0,\quad b=v_0\sin\alpha,\quad c=0.$$

根据定理1，当 $t=-\frac{b}{2a}=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$ 时，y 有极大值.

$$y_{max}=v_0\sin\alpha\,\frac{v_0\sin\alpha}{g}-\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$$
$$=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

故我们知道，当炮弹离开炮口 $\frac{v_0\sin\alpha}{g}$ (时间单位)时，炮弹上升的最大高度 $H=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$.

例 2　x 为何值，$y=(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)+12$ 有最小值？

解　$y=(x^2-10x+16)(x^2-10x+24)+12$

$$=(x^2-10x)^2+40(x^2-10x)+396$$
$$=(x^2-10x+20)^2-4.$$

$\therefore$　$x^2-10x+20=0$ 时，即 $x=5\pm\sqrt{5}$ 时，$y_{min}=-4$.

例 3　求 $y=\frac{(x+1)(x-3)}{2x^2+2x+1}$ 的极值.

解　函数式变形为：

$$y=\frac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}.$$

去分母，得

$$2yx^2+2yx+y=x^2-2x-3.$$

移项，整理得

$$(2y-1)x^2+2(y+1)x+y+3=0.$$

$\because$　y 有极值时，x 必须为实数．判别式为非负数.

$\therefore$　$\triangle=4(y+1)^2-4(2y-1)(y+3)\geqslant 0.$

即 $$y^2+3y-4\leqslant 0.$$

$$-4\leqslant y\leqslant 1$$

$\therefore\quad y_{min}=-4.\qquad y_{max}=1.$

例 4 求 $y=2x-5-\sqrt{15-4x}$ 极值.

解 两边乘以 -2,

$$\begin{aligned}-2y&=-4x+10+2\sqrt{15-4x}\\&=(15-4x)+2\sqrt{15-4x}+1-6.\\&=(\sqrt{15-4x})^2+2\sqrt{15-4x}+1-6\\&=(\sqrt{15-4x}+1)^2-6.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{2}[(\sqrt{15-4x}+1)^2-6]$$

$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{15-4x}+1)^2+3.$$

当 $\sqrt{15-4x}=0$ 时，即 $x=\dfrac{15}{4}$ 时，$y_{max}=\dfrac{5}{2}$.

例 5 已知 $y^3=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$, x 为何值, y 有极值?

解 原式移项得：$\sqrt{1+x}=y^3+\sqrt{1-x}$.

$\therefore\quad y^3+\sqrt{1-x}\geqslant 0\quad(\because\quad\sqrt{1+x}\geqslant 0)$

从而当 $x=-1$时，即$\sqrt{1+x}=0$ 时，$y^3+\sqrt{1-x}$ 有极小值.

此时 $\quad y^3+\sqrt{1-x}=0\quad$ (其中 $x=-1$).

即 $\quad y^3_{min}+\sqrt{2}=0$.

$\therefore\quad y_{min}=-\sqrt[6]{2}$.

例 6 求 $y=\log_2{}^4x+12\log_2{}^2x\log_2\dfrac{8}{x}$的极值$(1<x<64)$.

解 为求函数的极值，我们对等式右边进行恒等变形：

$$\log_2{}^4x+12\log_2{}^2x\log_2\frac{8}{x}$$

$$=\log_2^2x[\log_2^2x+12(\log_2 8-\log_2 x)]$$
$$=\log_2^2x[\log_2^2x-12\log_2x+36]$$
$$=\log_2^2x(\log_2x-6)^2$$
$$=[\log_2x(6-\log_2x)]^2.$$

由函数的定义域为 $1<x<64$,

$\therefore\quad \log_2x>0,\quad 6-\log_2x>0.$

且 $\log_2x+(6-\log_2x)=6$(常量).

所以当且仅当 $\log_2x=6-\log_2x$,即 $\log_2x=3$,也就是 $x=8$ 时,$\log_2x(6-\log_2x)$ 有极大值是 $\left(\frac{6}{2}\right)^2=9$,而 y 有极大值为 $9^2=81$.

例 7 x、y、z 为实数. 且

$$\begin{cases}x+2y-z=21 & (1)\\ x-y+2z=12 & (2)\end{cases}$$

x、y、z 为何值时,$x^2+y^2+z^2$ 值最小?

解 以 x、y 为未知数,解(1)、(2)得:

$$\begin{cases}x=15-z,\\ y=3+z.\end{cases}$$

以此代入 $x^2+y^2+z^2$ 得:

$$x^2+y^2+z^2=3(z-4)^2+186.$$

所以当 $z=4$,$x=11$,$y=7$ 时,$x^2+y^2+z^2$ 有最小值 186.

例 8 $x\geqslant 0$,$y\geqslant 0$,而且 $x+2y=1$ 时,求 $2x+3y^2$ 的极大值和极小值.

解 由 $x+2y=1$ 得 $\quad y=\frac{1}{2}(1-x)$, (1)

但 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$， 由(1)可知

$$0\leqslant x\leqslant 1,\qquad 0\leqslant y\leqslant \frac{1}{2}.$$

把(1)代入 $2x+3y^2$ 中得

$$u=2x+\frac{3}{4}(1-x)^2=\frac{3}{4}(x^2+\frac{2}{3}x+1)$$

很显然 u 为正值.

$$\therefore\quad u(0)=\frac{3}{4},\quad u(1)=2.$$

故 $2x+3y^2$ 最大值为 2，最小值为$\frac{3}{4}$.

例 9 若 $2x+3y=20$，求 $\lg x+\lg y$ 的极值.

解 由已知条件 $x>0$，$y>0$，$\lg x$，$\lg y$ 才存在.

又由 $2x+5y\geqslant 2\sqrt{2x\cdot 5y}=2\sqrt{10xy}$，

$\therefore\quad 20\geqslant 2\sqrt{10xy},\qquad xy\leqslant 10,$

$\therefore\quad \lg x+\lg y=\lg xy\leqslant \lg 10=1.$

故 $\lg x+\lg y$ 的最大值为 1.

例 10 已知 $x>1$，$y>1$，$z>1$，且 $x+y+z=6$ 时，求

$$\log_x y+\log_y z+\log_z x$$

的最小值. 并求此时 x、y、z 的值.

解 由 $x>1$，$y>1$，$z>1$，得

$$\lg x>0,\quad \lg y>0,\quad \lg z>0.$$

但 $$\log_x y=\frac{\lg y}{\lg x},\qquad \log_y z=\frac{\lg z}{\lg y},\qquad \log_z x=\frac{\lg x}{\lg z}.$$

$\therefore\quad \log_x y+\log_y z+\log_z x$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{\lg y}{\lg x}\cdot\frac{\lg z}{\lg y}\cdot\frac{\lg z}{\lg x}}=3.$$

等号在$\frac{\lg y}{\lg x}=\frac{\lg z}{\lg y}=\frac{\lg x}{\lg z}$时成立。因分子、分母均为正值，即有

$$\lg x=\lg y=\lg z,$$

$$\therefore\quad x=y=z.$$

但$x+y+z=6$，故我们得到$x=y=z=2$时，和有最小值3.

例 11　求点(x,y)在曲线$\left|\frac{x}{2}\right|+|y|=1$上移动时，$x^2-xy+y^2$的最大值和最小值.

解　由$\left|\frac{x}{2}\right|+|y|=1$，当$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$时

$$x=2(1-y)，且\quad 0\leqslant y\leqslant 1.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x^2-xy+y^2&=7y^2-10y+4\\&=7\left(y-\frac{5}{7}\right)^2+\frac{3}{7}.\end{aligned}$$

故当$y=0$时有最大值为4，当$y=\frac{5}{7}$时有最小值$\frac{3}{7}$.

当$x\leqslant 0$，$y\geqslant 0$时，

$$x=2(y-1),$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x^2-xy+y^2&=3y^2-6y+4\\&=3(y-1)^2+1.\end{aligned}$$

故当$y=0$时有最大值4，当$y=1$时有最小值1.

当$x\leqslant 0$，$y\leqslant 0$时同$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$时一样结果；

当$x\geqslant 0$，$y\leqslant 0$时同$x\leqslant 0$，$y\geqslant 0$时一样结果.

综上所解，故x^2-xy+y^2最大值4，最小值$\frac{3}{7}$.

例 12　已知：$y=\frac{ax+b}{x^2+1}$的$y_{max}=4$，$y_{min}=-1$，求a、b.

解 $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$,

整理得 $yx^2-ax+y-b=0$,

$\because$ x 为实数, $\therefore$ $\triangle=a^2-4y(y-b)\geqslant 0$,

即 $4y^2-4by-a^2\leqslant 0$,

解之得 $\dfrac{b-\sqrt{b^2+a^2}}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{b+\sqrt{b^2+a^2}}{2}$.

从而 $y_{\max}=\dfrac{b+\sqrt{b^2+a^2}}{2}=4$, $y_{\min}=\dfrac{b-\sqrt{b^2+a^2}}{2}=-1$,

即 $\begin{cases}b+\sqrt{b^2+a^2}=8;\\ b-\sqrt{a^2+b^2}=-2.\end{cases}$

解之得 $\begin{cases}b=3\\ a=4;\end{cases}$ $\begin{cases}b=3\\ a=-4.\end{cases}$

例 13 求曲线 $2x^2-2xy+y^2-6x-4y+27=0$ 最高点和最低点坐标.

解 原方程为一平面曲线方程, x、y 必为实数.

整理原式得:

$$2x^2-2(y+3)x+y^2-4y+27=0.$$

$\because$ x 为实数, $\therefore$ $B^2-4AC\geqslant 0$,

即 $4(y+3)^2-4\times 2\times(y^2-4y+27)\geqslant 0$,

解之得 $5\leqslant y\leqslant 9$,

即 $y_{\min}=5$, $y_{\max}=9$

由于当 $y_{\min}=5$ 时, $x=4$; 当 $y_{\max}=9$ 时, $x=6$.

$\therefore$ 曲线最高点坐标为(6, 9), 最低点坐标为(4, 5).

例 14 给定二平行线 l_1、l_2 和一割线 BC。见图, 由 l_2 上一定点 D, 引一条动直线 DA 交割线 BC 于 I, 交 l_1 于 A, 若令 $BI=x$, $BC=b$, 试求: x 值应取什么三角形 AIC, BID

面积和才最小.

解　分析，设 $BD=a$，$BC=b$，$BI=x$，d 是给定二平行线之间距离，S 是二个三角形 AIC、BID 面积的和，我们有

$$S=\frac{AC\times IK+BD\times IH}{2}$$

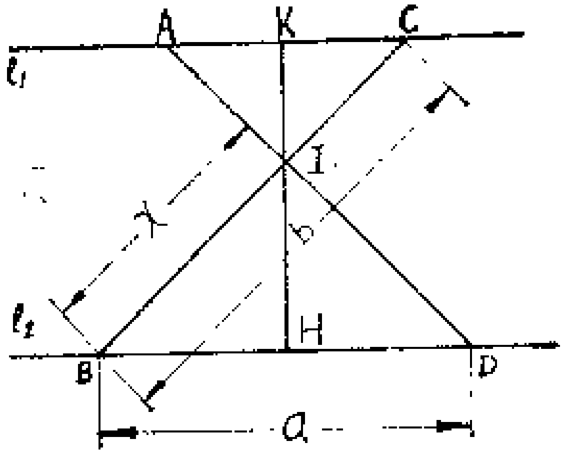


图 5--12

又由相似三角形 AIC 及 BID 可以推出

$$\frac{AC}{BD}=\frac{CI}{BI}=\frac{b-x}{x},$$

$$\therefore\quad AC=\frac{a(b-x)}{x}.$$

又 $\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{IK}{IH}=\dfrac{CI}{BI}=\dfrac{b-x}{x}$，由此可推出

$$\frac{IK}{IK+IH}=\frac{b-x}{b-x+x},\qquad 即\quad \frac{IK}{d}=\frac{b-x}{b}.$$

$$\therefore\quad IK=\frac{d}{b}(b-x).$$

同样，对 $\dfrac{IK}{IH}=\dfrac{b-x}{x}$，应用合比定理，得

$$\frac{d}{IH}=\frac{b}{x},\qquad \therefore\quad IH=\frac{dx}{b}.$$

于是
$$S=\frac{1}{2}\left[\frac{a(b-x)}{x}\cdot\frac{d}{b}(b-x)+a\cdot\frac{dx}{b}\right]$$

$$=\frac{ad}{2b}\left[\frac{(b-x)^2}{x}+x\right]=\frac{ad}{2b}\left(2x+\frac{b^2}{x}-2b\right).$$

因为 a、b、d 均为正数，S 同 $2x+\frac{b^2}{x}$ 同时有极大值；

又因为 $2x\cdot\frac{b^2}{x}=2b^2$ 为一定值，当 $2x=\frac{b^2}{x}$，即 $x=\frac{\sqrt{2}b}{2}$ 时，$2x+\frac{b^2}{x}$ 有极小值 $2\sqrt{2}b$.

$\therefore\quad S_{min}=ad(\sqrt{2}-1)$.

例 15　周长一定的正方形白铁片，四角剪去一个正方形制成一个盒子．使制成盒子容积最大，求剪去的正方形边长是多少？

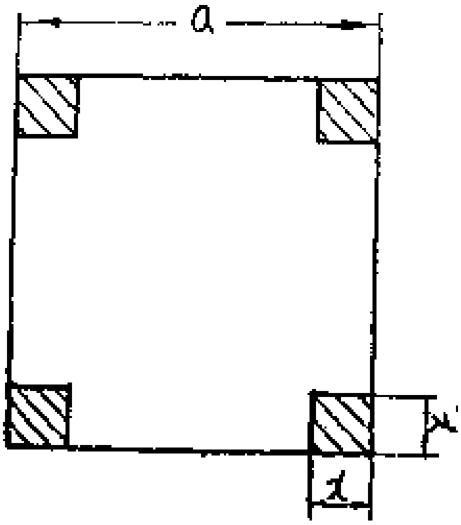


图 5—13

解　设正方形边长为 a，剪去正方形边长为 x．设制成盒子的体积为 V．则

$$V=x(a-2x)^2,$$

$$4V=4x(a-2x)^2.$$

由于 $4x+(a-2x)+(a-2x)=2a$ 为定值，所以当

$$4x=a-2x=a-2x,$$

即当 $x=\frac{a}{6}$ 时，$4V$ 最大，即容积 V 最大．

例 16　一边长为 a 的正三角形中，设点 P、Q、R 三边在 BC、CA、AB 上运动，并保持 $BP+CQ+AP=a$，求 $\triangle RPQ$ 面积 S 最大值，并求 S 最大时 PQ、QR、RP 的值．

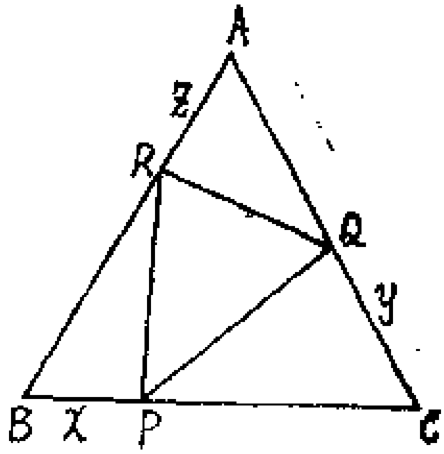


图 5—14

解 设 $BP=x$，$CQ=y$，$AR=z$.

由 $AQ=a-y$，$\angle A=60^\circ$，得

$$S_{(\triangle AQR)}=\frac{1}{2}(a-y)z\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}(a-y)z.$$

同理 $S_{(\triangle BRP)}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a-z)x$，$S_{(\triangle CPQ)}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a-x)y$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad S&=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}[(a-y)z+(a-z)x+(a-x)y]\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}[a(x+y+z)-(yz+zx+xy)]\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}[a^2-a(x+y+z)+(yz+zx+xy)]\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}(yz+zx+xy).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\because\quad &x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy\\&=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geqslant 0,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad yz+zx+xy\leqslant x^2+y^2+z^2. \tag{1}$$

又因 $x+y+z=a$,

$$\therefore\quad (x^2+y^2+z^2)+2(yz+zx+xy)=a^2, \tag{2}$$

$$x^2+y^2+z^2=a^2-2(yz+zx+xy)$$

由(1)、(2)得 $3(yz+zx+xy)\leqslant a^2$,

$$\therefore\quad S\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a^2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2.$$

在(1)中，仅当 $x=y=z$，等号成立，即 $S_{max}=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2$

而当 $x=y=z=\frac{a}{3}$，此时

$$QR=PQ=RP$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{2a}{3}\right)^2-2\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{2a}{3}\cdot\cos 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

故 $S_{max}=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2$，此时 $QR=PQ=RP=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

例 17 四面体 P—ABC 中，PA、AB、BC 互相垂直．已知 6 条棱的和为 S，求此四面体体积最大值．

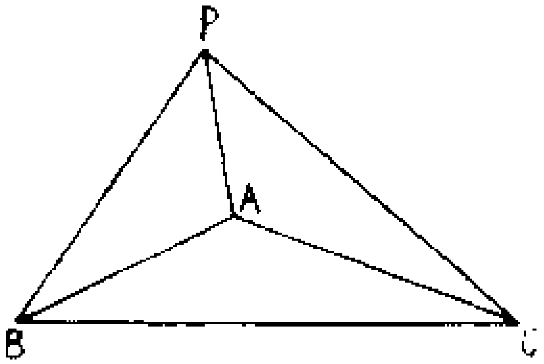


图 5—15

解 设 $PA=a$，$AB=b$，$AC=c$ 则 $V=\frac{1}{6}abc$.

已知 $S=a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$

$\geqslant 3\sqrt[3]{abc}+\sqrt{2ab}+\sqrt{2bc}+\sqrt{2ca}$

$\geqslant 3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{\sqrt{8a^2b^2c^2}}$

$=3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{2\sqrt{2}\,abc}$

$=3\sqrt[3]{6V}+3\sqrt[3]{12\sqrt{2}V}$

$=3\sqrt[3]{6V}(1+\sqrt{2})$

$\therefore\ S\geqslant 3\sqrt[3]{6}(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{V}$. (1)

当 $a=b=c$ 时，(1)式取等号成立，$\sqrt[3]{V}$ 达到极大值，从而 V 也极大．

此时 $S=3\sqrt[3]{6}(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{V}$，

$\therefore\quad V=\frac{S^3}{162(1+\sqrt{2})^3}$ 为极大值．

例 18 已知 $\triangle ABC$ 三边为 a、b、c，且 $a>b>c$，在这三边上有两点 P、Q，线段 PQ 将 $\triangle ABC$ 分成二部分，使此二部分面积相等，求 PQ 最小值．

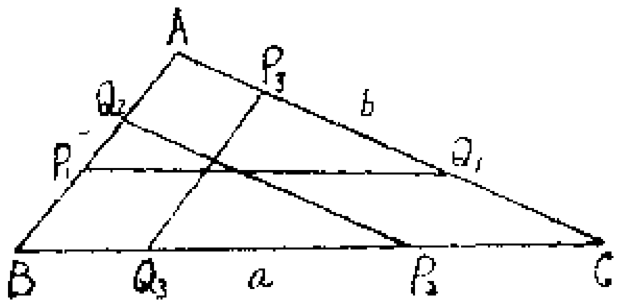


图 5—16

解　① 设 P_1、Q_1 分别在 AB、AC 上，依题意可得

$$\frac{1}{2}AP_1\cdot AQ_1\sin A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right)$$

$\therefore\quad 2AP_1\cdot AQ_1=bc,$

又因 $P_1Q_1{}^2=AP_1{}^2+AQ_1{}^2-2AP_1\cdot AQ_1\cos A$　　　　(1)

$$\geqslant 2AP_1\cdot AQ_1-bc\cos A$$

$$=bc-bc\cos A=bc(1-\cos A)$$

$$=2bc\sin^2\frac{A}{2}.$$

这时，当 $AP_1=AQ_1$ 时，P_1Q_1 有最小值.

即　$P_1Q_{1\min}=\sin\frac{A}{2}\cdot\sqrt{2bc}.$

② 当 P_2、Q_2 分别在 BC、BA 上，P_3Q_3 分别在 CA、CB 上，

同理可证：当 $BP_2=BQ_2$ 时，　$P_2Q_{2(\min)}=\sin\frac{B}{2}\cdot\sqrt{2ac}$，

$CP_3=CQ_3$ 时，$P_3Q_{3(\min)}=\sin\frac{C}{2}\sqrt{2ab}.$

③ 比较 $P_1Q_{1(\min)}$；$P_2Q_{2(\min)}$ 和 $P_3Q_{3(\min)}$ 三段最小值之间谁最小.

由正弦定理 $\dfrac{P_1Q_1{}^2{}_{(min)}}{P_2Q_2{}^2{}_{(min)}}=\dfrac{2bc\sin^2\dfrac{A}{2}}{2ac\sin^2\dfrac{B}{2}}=\dfrac{b\sin^2\dfrac{A}{2}}{a\sin^2\dfrac{B}{2}}$

$$=\frac{2R\sin B\sin^2\dfrac{A}{2}}{2R\sin A\sin^2\dfrac{B}{2}}=\frac{\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}},$$

但 $a>b>c$, $\therefore$ $A>B>C$, 且 $\dfrac{\pi}{2}>\dfrac{A}{2}>\dfrac{B}{2}>\dfrac{C}{2}>0$,

故有 $\sin\dfrac{A}{2}>\sin\dfrac{B}{2}$, $\cos\dfrac{B}{2}>\cos\dfrac{A}{2}$.

$\therefore$ $\dfrac{\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}}>1$, 故 $P_1Q_1{}^2{}_{(min)}>P_2Q^2_{2(min)}$,

即知 $P_1Q_{1min}>P_2Q_{2min}$

同理可证:

$P_1Q_{1(min)}>P_2Q_{2(min)}>P_3Q_{3(min)}$,

因此 $P_3Q_{3(min)}$ 是这些极小值中的最小者. 综上所述, 即当 PQ 在 $\triangle ABC$ 中最小角 C 的二边上取 $CP=CQ$ 时, (使$\triangle ABC$ 分成二等分), PQ 的值为最小, 最小值为 $\sin\dfrac{C}{2}\cdot\sqrt{2ab}$.

习 题 五

1. ① 已知 $f(x+1)=x^2-3x+2$, 求 $f(x)$;

② 已知 $\phi(x)=x^2$, $f(x)=2^x$, 求 $\phi[f(x)]$和 $f[\phi(x)]$;

③ 已知 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, 求$\dfrac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\Delta x}$和 $f[f(x)]$;

④ 已知 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 并记 $f_n(x)=f\{f[\cdots f_{n次}(x)]\}$，求 $f_n(x)$.

2. ① 已知 $\phi(x)=\lg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$，证明

$$\phi(x)+\phi(y)=\phi\left(\frac{xy}{1+xy}\right);$$

② 已知 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right]$,

证明 $f(n)+f(n+1)=f(n+2)$ (n 是正整数)；

③ 对于 $y=f(x)$，如 $f(ab)=f(a)+f(b)$，证明

$$f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)-f(b).$$

3. 求下列函数的定义域：

① $y=\sqrt{2x+3}+\dfrac{x}{\sqrt{2-x}}$； ② $y=\dfrac{3}{x^2-2|x|}$；

③ $y=\log_{2x-1}(3x-2)$； ④ $y=\dfrac{x^2+1}{\lg\sin x}$.

4. 设 $f(x)$ 的定义域是 $0\leqslant x\leqslant 1$. 问 $f(x-m)+f(x+m)$ $(m>0)$ 的定义域是什么？参数 m 应有何限制？

5. 由方程 $af(x-1)+bf(1-x)=c(x)$ 求 $f(x)$. 其中 a, b, c 为实数，且 a, b 不同时为零.

6. 判断下列函数的奇偶性：

① $f(x)=\sin x-5x^3$； ② $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ $(a>0)$；

③ $f(x)=|x|$；

④ 设 $f(x)=-3+6x+2x^2$，求

$$Q(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right],$$

$$\phi(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right],$$

并指出哪个是奇函数？哪个是偶函数？

7．讨论下列函数的增减性：

① $y=\sin x\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$；　　② $y=\dfrac{x}{1+x^2}$；

③ 求证当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=a^x-b^x$ $(a>b>1)$ 是递增函数，并利用此性质证明方程 $5^x-2^x=21$ 仅有一个正根 2．

8．$f(x)$、$g(x)$是否表示同一函数？在哪些区间它们是相同的？

① $f(x)=x$，$g(x)=\dfrac{x^2}{x}$；　② $f(x)=x^0$，$g(x)=1$；

③ $f(x)=(\sqrt{x})^2$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

④ $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$．

9．描出下列函数的图象：

① $y=|x|$；　　　② $y=|\ln x|\ \left(\dfrac{1}{e}\leqslant x\leqslant e\right)$；

③ $y=|\cos x|\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$．

10．已知函数

$$y=\begin{cases}x^2+x-2 & \text{当 } x<-3 \text{ 时}\\ 4-3x-x^2 & \text{当 } -3\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时}\\ x^2+3x-4 & \text{当 } x>1 \text{ 时}\end{cases}$$

利用绝对值符号将它表示成一个解析式．

11．在同一坐标平面上，函数 $y=x^2$ 和 $x=\sqrt{y}$ 的图形是否相同．

12．若 $f(x)=x^{10}+2x^9-2x^8-2x^7+x^6+3x^2+6x+1$，求 $f(\sqrt{2}-1)$ 的值．

13. 已知a^2-b^2与c^2成正比，且$a=5$，$b=3$时$c=2$，

① 求a，b，c间的关系式；

② 求证b是$a+2c$，$a-2c$的等比中项；

14. ① 如y是x的正比函数，x是z的正比函数，写出y与z的关系式；

② 如y是x的正比函数，x是z的反比函数，写出y与z的关系式；

③ 已知函数$f(x)$是反比函数，且$f(3)=7$，求$f(-2)$.

15. 已知一次函数$y=kx+b$ $(k\neq 0)$，当$x=1$时$y=-1$，$x=3$时$y=3$，求这个一次函数.

16. ① 设 $t=(x-1)^2$，作关于x的函数

$$y=\sqrt{t}-\sqrt{t-2x+3}$$ 的图象；

② 求直线$x-2y+6=0$与(1)的图象所包围的面积.

17. 用$[x]$表示不超过x的最大整数，试作下列函数的图象

① $y=[x]$；　② $y=x-[x]$.

18. 求下列条件所确定的二次函数$y=ax^2+bx+c$：

① 图象经过点$(-1,0)$，$(2,3)$和$(-2,-5)$；

② 顶点坐标是$(2,-3)$且过$(0,1)$；

③ 图象和x轴的交点是$(\frac{1}{3},0)$，$(-2,0)$，与y轴的交点是$(0,-2)$；

④ 对称轴的方程是$x=-1$，且经过点$(1,\frac{9}{2})$，$(-1,\frac{5}{2})$；

⑤ 当$x=\frac{1}{2}$时有极大值25，在x轴上截距的立方和等

于19.

19. ① 如果对于任意实数 x 都有

$(m+1)x^2-2(m-1)x+3(m-1)<0$ 求 m 的值；

② 如果函数 $y=ax^2+(a-1)x+(a-1)$ 之值恒为正数，试求 a 的值；

③ 如果函数 $y=-3x^2+2x+k$ 的图象与 x 轴相离，试求 k 的值.

20. 根据下列问题求 a，b：

① 抛物线 $y=2x^2$ 向 x 轴方向平移 a，向 y 轴方向平移 b 后通过点 $(0,6)$ 和 $(1,4)$；

② $y=x^2+x+1$ 的图象向 x 轴方向平移 a，向 y 轴方向平移 b 后成为 $y=x^2-3x+5$.

21. ① 假设函数 $f(x)=ax^2-2x+2$（a 为正数）对于 $1<x<4$ 中的所有实数 x 都满足 $f(x)>0$，求 a 的范围；

② 若抛物线 $y=x^2+ax+2$ 和两点 $(0,1)$，$(2,3)$ 的连线有两个相异的交点，求 a 的范围.

22. 若 $y=ax^2+bx+2\ (a<0)$ 的图象与 x 轴相交于点 A、B，与 y 轴相交于点 C，设原点为 O，求下列各式的值：

① OA^2+OB^2； ② $\triangle ABC$ 的面积.

23. 求出与抛物线 $y=3x^2-6x+7$ 关于点 $(2,1)$ 相对称的抛物线方程.

24. 已知二次三项式 x^2+px+q 的一根为3，又已知它的图象对称轴为直线 $x=2$，求此三项式的最小值。

25. 已知：$y=x^2+px+q$ 的两相异的实根为 α、β，求函数的极小值.

26. 已知 $f(x,y)=x^2-2xy+6y^2-14x-6y+72$，$x,y$

均取实数，当 x, y 取何值时表达式 $f(x,y)=x^2-2xy+6y^2-14x-6y+72$ 有最小值．

27．求一个三位数与它的数字之和的比的极小值．

28．求函数：$y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 的极值．

29．求函数：$y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ 的极值．

30．设 x 为实数．则 $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ 的值不能在 5 与 9 之间．

31．求曲线 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 的最高点及最低点的坐标．

32．求函数 $y=\sqrt{-x^2+4x+12}-\sqrt{-x^2+2x+3}$ 的极小值．

33．设方程 $9x^2+2xy+y^2-92x-20y+244=0$ 中，x 及 y 均为实数，则 x 必在 3 与 6 之间，y 必在 1 与 10 之间．

34．设 α、β 为 x 的二次方程 $x^2+2(m+3)x+2m+4=0$ 的二根，求当 m 变化时，$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 的极值．

35．已知某二次三项式当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时取得极值 25，这个二次三项式的两根的立方和等于 19，求这个二次三项式．

36．有成等比级数之三数，其和等于正常数 a，则其积之极大及极小如何？

37．求 $f(x)=\left(2+\dfrac{\pi}{2}\right)x+\dfrac{5}{x}$ 的极小值，此时 $x=?$（其中 s、π 为常量）．

38．设 $ax+by+cz=P$，问在什么条件下：$S=x^2+y^2+z^2$ 最小值（此处 a、b、c 至少有一个不为零）．

39．已知某二次三项式在 $x=\frac{1}{2}$ 时取得极小值 $-\frac{49}{4}$，它的两个根的四次方的和等于 337，求此二次三项式．

40．求函数 $y=\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)^2$ 的最小值，其中 $x_i(i=1,2\cdots n)$ 是已知值．

引用不等式求函数的极值也是用初等数学方法讨论极值常用方法之一，今列举一例．

首先有下述定理：当 $x\geqslant-1$ 时，又 $0<\alpha<1$，则有：$(1+x)^{\alpha}<1+\alpha x$，对 $x>0$ 和 $\alpha>1$，则 $(1+x)^{\alpha}>1+\alpha x$；不等式中的等号当 $x=0$ 时成立．

请引用此定理及其变形来讨论下述问题．

41．求函数 $y=x^{\alpha}-mx$ $(m>0,\ x\geqslant0,\ \alpha>1)$ 的极小值，并验证 x^2-mx 有小值 $-\frac{m^2}{4}$，x^3-27x 有极小值是 -54．

42．证明函数 $mx-x^{\alpha}$ $(\alpha>1,\ m>0,\ x\geqslant0)$ 当 $x=\left(\frac{m}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ 时，有一极大值 $(\alpha-1)\left(\frac{m}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$．

43．求函数 $y=x^6+8x^2+5$ 的极小值．

44．求函数 $y=x^6-8x^2+5$ 的极小值．

45．求函数 $y=\frac{x^3}{x^4+5}$ 及 $x^6-0.6x^{10}$ 的极大值．

46．当 p 为何值时 $y=\frac{p}{x^2}+\sqrt{x}$ 有极小值是 2.5．

47．求 $x(6-x)^2$ 的极大值．

48．在边长为 a 的正方形中，怎样的内接正方形面积最小？

49. 今拟建一排 4 间的猪舍（图见解答）由于材料的限制，围墙和墙的总长只能造 p 米，图中 $x=?$ (m) 时，猪舍面积最大？

50. 欲制一长方形的木板箱，体积为 V，则其规格如何时，所用的木板最省？

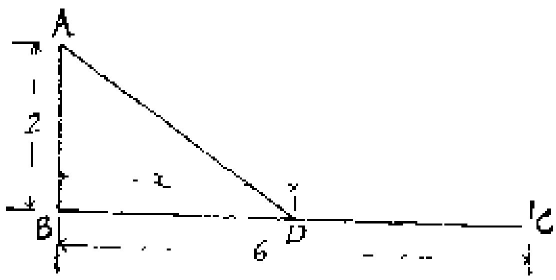
51. 已知扇形的周长是 $2p$，求面积最大的扇形.

52. 求证一边在三角形底边长的内接最大矩形的面积为原三角形面积的一半.

53. 做一个圆柱形锅炉，其容量为 V，两端材料价格每单位面积为 a 元，侧面积材料每单位价格为 b 元，试求当锅炉的半径与高之比等于多少时，其造价最省？

54. 已知 $\triangle ABC$ 的底边 $BC=2$，高 $AD=1$，在 BC 边上取一点 M，过 M 作 $MN \parallel AC$，$MP \parallel AB$，分别与 AB、AC 相交于 N，P. 问 BN 为多长时，$\triangle MNP$ 的面积最大？

55. 一人在舟中，舟距海岸最近点 B 为 2 海浬，欲以最快的速度至距 B 点为 6 海浬的 C 岸上，若此人每小时划船行 4 海浬，在岸上步行能行 5 海浬，问此人应首先向岸上距最近点的何处划去为最好？（题图 5—55）



题图 5—55

56. 一轮船的燃料费与其速度的立方成正比。当速度为10公里/小时时，燃料费为20元，其余费用(假定与速度无关)为每小时320元。当轮船的速度为若干时，航行每公里的费用总和最小？此时每小时的费用总数为多少？

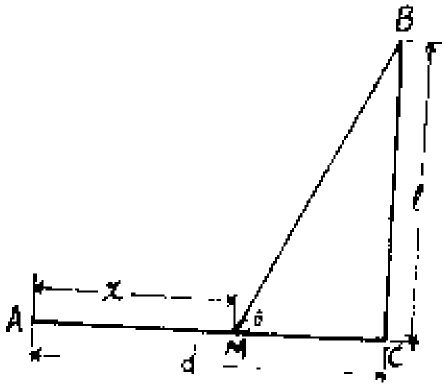
57. 在长为$2p$的直角三角形中，什么样的直角三角形斜边最小？

58. 在直角坐标系第一象限内一点$M(a,b)$，引一直线与两正半轴相交，问当截线与ox轴的交角(锐角)为何值时，此截线与两轴所围成三角形的面积为最小？

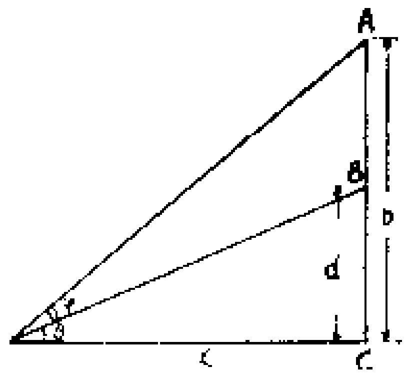
59. 太阳光斜照地面，光线与水平面所成之角为θ. 一定长l的杆，当其与地面成什么角时，其影子最长？

60. 从河流上游发货站A，运货物到某城B，A、B沿河方向的距离为d公里，B到河岸的垂直距离为l公里，陆地与水路单位里程的运价之比为$a(a>1)$，试求货物的水运里程为多少，总运价最省？(题图5—60)

61. 有一幅图画挂在墙上，它的下边在观察者眼睛上方$a(m)$处，它的上边在$b(m)$处，问观察者在离墙多远的地方，才能使视角φ最大？(题图5—61)



题图 5—60



题图 5—61

62. 半径为R的球的内切圆锥中，那一个全面积最小？

第六章　指数与对数

§1. 指数函数与对数函数

幂函数(x^m)与指数函数(a^x)都直接牵涉到幂，幂函数的底是变数，指数是常数；指数函数的底是常数，指数是变数.

幂的概念是经逐步扩充而完整的：

正整指数幂　$a^n = \underbrace{aa\cdots a}_{n\text{个}}$　(n 是正整数)

零指数幂　$a^0 = 1$　($a \neq 0$)

负整指数幂　$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$　(n 是正整数，$a \neq 0$)

分指数幂　$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$　(m、n 是正整数，$a \geqslant 0$)

无理指数幂　$a^{\alpha_n^-} < a^\alpha < a^{\alpha_n^+}$　($a > 1$，α 是正无理数)

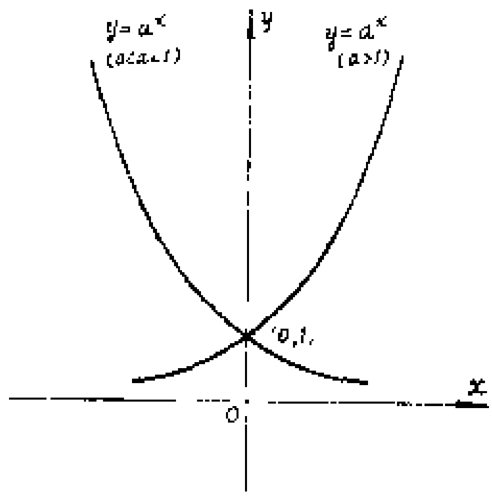
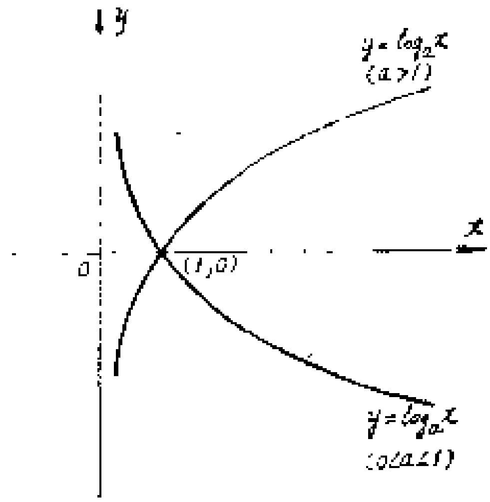
$a^{\alpha_n^+} < a^\alpha < a^{\alpha_n^-}$　($0 < a < 1$，α 是正无理数)

关于指数函数与对数函数的定义、定义域、图象、性质如下表：

幂的运算遵循下列三条基本法则

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；$(a^m)^n = a^{mn}$；

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

	指　数　函　数	对　数　函　数
定义	$y=a^x(a>0,\ a\neq1)$称为指数函数	$y=\log_a x(a>0,\ a\neq1)$称为对数函数
定义域	x为任意实数	x为任意正数
图象	 图 6—1	 图 6—2
性质	1) $a^x>0$ 2) $a^0=1$, $a^1=a$. 3) $a>1$时 ①若$x>0$, 则$a^x>1$ ②若$x<0$, 则$a^x<1$ ③若$x_1<x_2$则$a^{x_1}<a^{x_2}$, 即a^x为增函数 4) $0<a<1$时 ①若$x>0$则$a^x<1$ ②若$x<0$则$a^x>1$ ③若$x_1<x_2$则$a^{x_1}>a^{x_2}$即a^x为减函数.	1)零和负数无对数,即$x>0$. 2) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$. 3) $a>1$时 ①若$x>1$, 则$\log_a x>0$ ②若$0<x<1$, 则$\log_a x<0$ ③若$x_1<x_2$则$\log_a x_1<\log_a x_2$即$\log_a x$为增函数 4) $0<a<1$时 ①若$x>1$, 则$\log_a x<0$ ②若$0<x<1$, 则$\log_a x>0$ ③若$x_1<x_2$,则$\log_a x_1>\log_a x_2$即$\log_a x$为减函数.

所谓对数可编顺口溜为：

对数、对数，
知底知幂求指数.
这指数，
叫该底该幂的对数.

幂 $\rightarrow y = a^x \leftarrow$ 指数，底 $\rightarrow a$

$x = \log_a y$
（习惯记作 $y = \log_a x$）

化乘除为加减；（注）	$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$；
化乘方开方为乘除.	$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$；
学会对数，	$\log_a M^n = n \log_a M$；
简化运算有好处.	$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_a M$.

根据指数与对数的定义：

$$y = a^x,\quad x = \log_a y$$

显然有 $x = \log_a a^x$，$y = a^x = a^{\log_a y}$.
这里正好反映了同底的指数与对数构成互逆的运算.

当底为 10 时，称 10 为底的对数为常用对数. 记作

$$\log_{10} N = \lg N;$$

当底为 e 时，称 e 为底的对数为自然对数. 记作

$$\log_e N = \ln N.$$

由于如 20000 的常用对数为

$$\lg 20000 = \lg(2 \times 10^4) = \lg 10^4 + \lg 2$$
$$= 4 + 0.3010 = 4.3010.$$

（编者注） 确切地应是"化乘或除的对数为分别取对数的加或减". 此外第二句也同样是通俗而不确切的说法.

所以，常用对数表最前一位均表示个位，顺次第二、三、四位各表示小数点后第一、二、三位．因此为 235.7 的常用对数为

$$\lg 235.7 = \lg(2.357\times 10^2) = \lg 10^2 + \lg 2.357.$$
$$= 2 + 0.3724 = 2.3724.$$

这里的 0.3724 称为尾数， 2 称为首数．

知对数求真数，

首定位（按 10^n 有几位为几位），

尾定值（按反对数表查值）．

用首用尾同时确定真数值．

如：已知 $\lg x = 2.3724$，从尾数 0.3724 查反对表为2357，从首数 2 按 $10^2 = 100$ 是三位，故得 $x = 235.7$．

此外，对数的换底公式及其推论为：

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a},$$

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a},$$

$$\log_a b = \frac{r\log_m b}{r\log_m a} = \frac{\log_m b^r}{\log_m a^r} = \log_{a^r} b^r \qquad (r \neq 0);$$

$$\log_{\frac{1}{a}} b = \frac{\log_a b}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a b}{-\log_a a} = -\log_a b = \log_a \frac{1}{b}.$$

本节的例题与习题，仅对一般教科书起加强作用而已．

例 1　计算

① $\left(2\frac{1}{4}\right)^{0.5} + (0.1)^{-2} + (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}} - (0.5)^{-3}$；

② $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}\div\dfrac{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{a^2}$;

③ $\left(\dfrac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right)^2$;

④ 已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，求$\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+2}{x^2+x^{-2}+3}$的值.

解 ① 原式$=\left(\dfrac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+10^2+(2^{\frac{3}{2}})^{-\frac{2}{3}}-2^3$

$$=\frac{3}{2}+100+\frac{1}{2}-8=94;$$

② 原式$=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}[(a^{\frac{1}{3}})^3-(2b^{\frac{1}{3}})^3]}{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}-a^{\frac{2}{3}}$

$$=\frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}$$

$$-a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=0.$$

③ 原式$=\left(\dfrac{a^{-1}(4a^2-9)}{a^{-\frac{1}{2}}(2a-3)}+\dfrac{a^{-1}(a^2-4a+3)}{a^{-\frac{1}{2}}(a-1)}\right)^2$

$$=[a^{-\frac{1}{2}}(2a+3)+a^{-\frac{1}{2}}(a-3)]^2$$

$$=(3a^{\frac{1}{2}})^2=9a.$$

④ 已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，可以推知 $x+x^{-1}=7$，

原式$=\dfrac{[(x^{\frac{1}{2}})^3+(x^{-\frac{1}{2}})^3]+2}{(x+x^{-1})^2+1}$

$$=\frac{(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1}-1)+2}{(x+x^{-1})^2+1}$$

$$=\frac{3(7-1)+2}{7^2+1}=\frac{2}{5}$$

例 2 试比较下列各组数的大小

① $\left(\frac{1}{2}\right)^{0.5}$与$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$；　② $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$与$\left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$；

③ $(\sqrt{2})^{8.1}$与$\left(\frac{1}{3}\right)^{2.9}$；　④ $\log_{\frac{1}{2}}4$ 与 $\log_{\frac{1}{2}}5$；

⑤ $\log_8 9$ 与 $\log_9 8$；　⑥ $\log_2\frac{2}{3}$与 $\log_4\frac{4}{3}$.

解 ① 由于$\left(\frac{1}{2}\right)^{0.5}$与$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$的底数相同，指数不同，所以可以用指数函数的性质讨论它的大小. 因为底数为小于 1 的正数的指数函数是减函数，所以$\left(\frac{1}{2}\right)^{0.5}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

② $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$与$\left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$的指数相同而底数不同，可以用幂函数性质讨论它的大小. 由于 x^{-4} 当 $0<x<1$ 时是减函数，所以$\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}<\left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$.

③ $(\sqrt{2})^{8.1}$ 与 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2.9}$ 的底数与指数都不相同，难于仅用函数的单调性讨论它的大小，但由指数函数性质知 $(\sqrt{2})^{8.1}>1$，$\left(\frac{1}{3}\right)^{2.9}<1$，所以$(\sqrt{2})^{8.1}>\left(\frac{1}{3}\right)^{2.9}$.

④ 由于 $\log_{\frac{1}{2}}x$ 是减函数，所以 $\log_{\frac{1}{2}}4>\log_{\frac{1}{2}}5$.

⑤ 由于 $\log_8 9>\log_8 8=1=\log_9 9>\log_9 8$，所以 $\log_8 9>\log_9 8$.

⑥ 由于$\log_2\frac{2}{3}=\log_4\frac{4}{9}<\log_4\frac{4}{3}$，所以 $\log_2\frac{2}{3}<\log_4\frac{4}{3}$.

例 3 按照下列各题给定条件决定 a 的范围：

① $a^{-\frac{1}{2}}>1$； ② $a^3>a^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$；

③ $\lg(-a)<-2$； ④ $\log_a x<\log_a(x-1)$.

解 这类问题可用不同的方法解决，这里仅用函数的单调性讨论.

① 由于 $-\frac{1}{2}<0$ 且 $a^{-\frac{1}{2}}>1=a^0$，表明函数 a^x 是减函数，所以 $0<a<1$.

② 由于 $\sqrt{3}+\sqrt{2}>3$ 且 $a^3>a^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，这表明函数 a^x 为减函数，所以 $0<a<1$.

③ $\lg(-a)<-2$，即 $\lg(-a)<\lg 10^{-2}$，所以 $-a<10^{-2}$，也就是 $a>-\frac{1}{100}$，又因为当 $a\geqslant 0$ 时 $\log(-a)$ 无意义，因此 $-\frac{1}{100}<a<0$.

④ $\log_a x<\log_a(x-1)$ 存在的条件是 $x>1$，由于 $x>x-1$ 且 $\log x<\log(x-1)$，因此 $\log_a x$ 是减函数，所以 $0<a<1$.

例 4 已知 $\log_m 5.4>\log_n 5.4$，试比较 m，n 的大小.

解 $\log_m 5.4>\log_n 5.4$， (m，n 为不等于 1 的正数)，

即 $$\frac{\lg 5.4}{\lg m}>\frac{\lg 5.4}{\lg n},$$

由于 $\lg 5.4>0$，所以 $\frac{1}{\lg m}>\frac{1}{\lg n}$. 为了比较 m，n 的大小，这里需要对 $\lg m$、$\lg n$ 的符号加以讨论.

① 如 $\lg m>0$，$\lg n>0$，即 m、n 都大于 1，则可知 $\lg m<\lg n$，所以 $1<m<n$；

② 如 $\lg m>0$，$\lg n<0$，即 $m>1$ 且 $0<n<1$，则可知 $\lg m>\lg n$，所以 $m>n$；

③ 如 $\lg m<0$，$\lg n>0$，即 $0<m<1$ 且 $n>1$，则可知 $\frac{1}{\lg m}>\frac{1}{\lg n}$ 无解；

④ 如 $\lg m<0$，$\lg n<0$，即 m、n 都小于 1 且为正数，则可知 $\lg m<\lg n$，所以 $m<n$.

例 5　已知 $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}$，问当 x 为何值时 $y>0$？$y<0$？

解　函数 $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}$ 的存在域为 $x>-3$，

① 当 $y>0$，即 $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}>0$，由于 $\frac{1}{\sqrt{2}}<1$，

$\therefore$　$0<\frac{1}{x+3}<1$，解之得 $x>-2$.

(2) 当 $y<0$，即 $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}<0$，由于 $\frac{1}{\sqrt{2}}<1$，

$\therefore$　$\frac{1}{x+3}>0$ 且 $\frac{1}{x+3}>1$，解之，得 $-3<x<-2$.

答　当 $x>-2$ 时 $y>0$；当 $-3<x<-2$ 时 $y<0$.

例 6　当 x 为何值时 $a^{2x^2+1}>a^{x^2+2}$，其中 $a>0$，且 $a\neq 1$.

解　这里需要对底数 a 进行分类讨论.

① 对于 $a^{2x^2+1}>a^{x^2+2}$，当 $0<a<1$ 时，由指数函数的递减性质可知

$$2x^2+1<x^2+2,\qquad \therefore\quad |x|<1$$

② 当 $a>1$ 时，由指数函数的递增性可知

$$2x^2+1>x^2+2,\qquad \therefore\quad |x|>1.$$

答　当 $0<a<1$ 时，$-1<x<1$；当 $a>1$ 时，$x<-1$ 或

$x>1$.

例 7 计算

① $\log_{\frac{1}{9}}\sqrt[5]{27}$；　　　② $\log_{(\sqrt{2}+1)}(3-2\sqrt{2})$；

③ $\log_3\sqrt[3]{81\sqrt[4]{729\times 9^{-\frac{2}{3}}}}$；

④ $\lg(\sqrt{6+\sqrt{35}}-\sqrt{6-\sqrt{35}})$；

⑤ $2^{\log_4\frac{16}{25}}$；　　　⑥ $36^{0.5+\log_{\sqrt{6}}\sqrt{5}}$

解 ①—④需要把真数写成底数的幂的形式，⑤、⑥则需要应用对数恒等式.

① $\log_{\frac{1}{9}}\sqrt[5]{27}=\log_{\frac{1}{9}}3^{\frac{3}{5}}=\log_{\frac{1}{9}}(3^{-2})^{-\frac{3}{5\times 2}}=-\frac{3}{10}$.

为了便于把真数写成底数的幂的形式，有时可利用公式 $\log_a b=\log_{a^n}b^n$ 把底数变形.

$$\log_{\frac{1}{9}}\sqrt[5]{27}=\log_{\frac{1}{9}}3^{\frac{3}{5}}=\log_{(\frac{1}{9})^{-\frac{1}{2}}}(3^{\frac{3}{5}})^{-\frac{1}{2}}=\log_3 3^{-\frac{3}{10}}=-\frac{3}{10}.$$

② $\log_{(\sqrt{2}+1)}(3-2\sqrt{2})=\log_{(\sqrt{2}+1)}(\sqrt{2}-1)^2$

$$=\log_{(\sqrt{2}+1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2=-2.$$

这里请注意 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ 这类共轭根式性质的应用.

③ $\log_3\sqrt[3]{81\sqrt[4]{729\times 9^{-\frac{2}{3}}}}=\log_3\sqrt[3]{3^4\sqrt[4]{3^6\cdot 3^{-\frac{4}{3}}}}$

$$=\log_3\sqrt[3]{3^4\cdot 3^{\frac{7}{6}}}=\log_3 3^{\frac{31}{18}}=\frac{31}{18}$$

④ 应用复合二次根式变形.

$$\lg(\sqrt{6+\sqrt{35}}-\sqrt{6-\sqrt{35}})=\lg\left(\sqrt{\frac{12+2\sqrt{35}}{2}}\right.$$

$$-\sqrt{\frac{12-2\sqrt{35}}{2}})$$

$$=\lg\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sqrt{7}+\sqrt{5})-(\sqrt{7}-\sqrt{5})]$$

$$=\lg\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\lg\sqrt{10}=\frac{1}{2}$$

应用共轭根式的性质，

$$\lg(\sqrt{6+\sqrt{35}}-\sqrt{6-\sqrt{35}})=\frac{1}{2}\lg(\sqrt{6+\sqrt{35}}$$

$$-\sqrt{6-\sqrt{35}})^2$$

$$=\frac{1}{2}\lg[12-2\sqrt{(6+\sqrt{35})(6-\sqrt{35})}]$$

$$=\frac{1}{2}\lg 10=\frac{1}{2}.$$

⑤ $2^{\log_4\frac{16}{25}}=2^{\log_4\left(\frac{4}{5}\right)^2}=2^{2\log_4\left(\frac{4}{5}\right)}=4^{\log_4\left(\frac{4}{5}\right)}=\frac{4}{5}$

或 $2^{\log_4\frac{16}{25}}=4^{\frac{1}{2}\log_4\frac{16}{25}}=4^{\log_4\frac{4}{5}}=\frac{4}{5}$

或 $2^{\log_4\frac{16}{25}}=2^{\log_{\sqrt{4}}\sqrt{\frac{16}{25}}}=2^{\log_2\frac{4}{5}}=\frac{4}{5}$

⑥ $36^{0.5+\log_{\sqrt{6}}\sqrt{5}}=36^{\frac{1}{2}}\cdot 36^{\log_{\sqrt{6}}\sqrt{5}}=6\cdot 6^{2\log_6 5}$

$=6\cdot 6^{\log_6 25}=6\times 25=150$

或 $36^{0.5+\log_{\sqrt{6}}\sqrt{5}}=36^{\frac{1}{2}}\cdot 6^{2\log_{\sqrt{6}}\sqrt{5}}=6\cdot\sqrt{6}^{4\log_{\sqrt{6}}\sqrt{5}}$

$=6\cdot(\sqrt{6}^{\log_{\sqrt{6}}\sqrt{5}})^4=6(\sqrt{5})^4=150$

例 8 计算

① $\lg 4+\lg 9+2\sqrt{\lg^2 6-2\lg 6+1}$；

② $\lg^3 2+\lg^3 5+3\lg 2\cdot\lg 5$；

③ $(\log_2 125+\log_4 25+\log_8 5)(\log_{125}8+\log_{25}4+\log_5 2)$；

④ $\lg\frac{1}{3}+\lg\frac{10}{3^2}+\lg\frac{100}{3^3}+\cdots+\lg\frac{10^{n-1}}{3^n}$；

⑤ $|0.01^{-\frac{1}{2}}-2\lg 5|-\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$

$+\sqrt{4\lg^2 2-4\lg 2+1}$；

解 ① 根据式中真数的特征可以把它化为含 $\lg 2\cdot\lg 3$ 的式子或仅含 $\lg 6$ 的式子，然后加以简化.

$$\text{原式}=2\lg 2+2\lg 3+2\sqrt{(\lg 6-1)^2}=2(\lg 2+\lg 3)$$
$$+2(1-\lg 6)=2\lg 6+2(1-\lg 6)=2$$

② 由于 $\lg 2+\lg 5=\lg 10=1$，所以简化这类式子时尽量利用这个变形

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(\lg^3 2+\lg^3 5)+3\lg 2\cdot\lg 5\\&=[(\lg 2+\lg 5)^3-3\lg 2\cdot\lg 5(\lg 2+\lg 5)]\\&\quad+3\lg 2\cdot\lg 5\\&=1-3\lg 2\cdot\lg 5+3\lg 2\cdot\lg 5=1\end{aligned}$$

或 $\text{原式}=\lg^3 2+\lg^3 5+3\lg 2\cdot\lg 5\cdot(\lg 2+\lg 5)$

$$=(\lg 2+\lg 5)^3=1$$

或由 $\lg 5=1-\lg 2$ 得，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lg^3 2+(1-\lg 2)^3+3\lg 2\cdot(1-\lg 2)\\&=\lg^3 2+(1-\lg 2)[(1-\lg 2)^2+3\lg 2]\\&=\lg^3 2+(1-\lg 2)(1+\lg 2+\lg^2 2)\\&=\lg^3 2+1-\lg^3 2=1\end{aligned}$$

③ 对于不同底数的对数式，一般情况应化为同底的对数式，然后加以化简.

$\text{原式}=(\log_2 125+\log_2\sqrt{25}+\log_2\sqrt[3]{5})(\log_5 2$

$+\log_5 2+\log_5 2)$

$$=\log_2(125\times5\times5^{\frac{1}{3}})\cdot3\log_5 2=\frac{13}{3}\log_2 5\cdot3\log_5 2$$

$$=13\log_2 5\cdot\log_5 2=13.$$

或　原式 $=\left(\frac{\lg 125}{\lg 2}+\frac{\lg 25}{\lg 4}+\frac{\lg 5}{\lg 8}\right)\cdot$

$$\left(\frac{\lg 8}{\lg 125}+\frac{\lg 4}{\lg 25}+\frac{\lg 2}{\lg 5}\right)$$

$$=\left(\frac{3\lg 5}{\lg 2}+\frac{2\lg 5}{2\lg 2}+\frac{\lg 5}{3\lg 2}\right)\cdot$$

$$\left(\frac{3\lg 2}{3\lg 5}+\frac{2\lg 2}{2\lg 5}+\frac{\lg 2}{\lg 5}\right)$$

$$=\frac{13}{3}\left(\frac{\lg 5}{\lg 2}\right)\cdot3\left(\frac{\lg 2}{\lg 5}\right)=13$$

④ 原式 $=\lg\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{3^2}\cdot\frac{100}{3^3}\cdots\frac{10^{n-1}}{3^n}\right)$

$$=\lg\frac{10^{1+2+3+\cdots+(n-1)}}{3^{1+2+3+\cdots+n}}$$

$$=[1+2+\cdots+(n-1)]-(1+2+3+\cdots+n)\lg 3$$

$$=\frac{[1+(n-1)]\cdot(n-1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}\lg 3$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}\lg 3$$

或　原式 $=-\lg 3+(1-2\lg 3)+(2-3\lg 3)+\cdots+$

$[(n-1)-n\lg 3]$

$$=[1+2+\cdots+(n-1)]-(1+2+3+\cdots n)\lg 3$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}\lg 3.$$

⑤ 原式 $= |10-2\lg 5| + \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[6]{(\sqrt{2}+1)^2}$

$$+\sqrt{(2\lg 2-1)^2}$$

$$=10-2\lg 5+\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$+(1-2\lg 2)=10-2\lg 5+1+1-2\lg 2$$

$$=12-2(\lg 5+\lg 2)=10$$

例 9 ① 已知 $\lg 9=0.9542$，问 3^{100} 是几位数？它的个位数字是几？

② 已知 $\lg 3=0.4771$，且 $\lg x^3=-4.5687$，求 x.

③ 已知 $\lg 2=0.3010$，且 $f(x)=\log_{\sqrt{10}}x$，求 $f(5)$.

④ n 是什么正整数时，不等式 $2<\log_n 47<3$ 成立？

解 ① 由于 $\lg 3^{100}=\lg 9^{50}=50\lg 9=50\times 0.9542=47.71$，所以 3^{100} 是 48 位数.

由于 $3^{100}=(3^4)^{25}=81^{25}$，所以 3^{100} 的个位数是 1.

② $\lg x^3=-4.5687$，即 $3\lg x=-4.5687$，

$\lg x=-1.5229=\bar{2}.4771$，所以 $x=0.03$.

③ $f(5)=\log_{\sqrt{10}}5=\log_{10}25=\lg\frac{100}{4}=2-2\lg 2$

$$=2-2\times 0.3010=1.3980.$$

④ 已知 $2<\log_n 47<3$（n 是大于 1 的整数），

即 $n^2<47<n^3$ $\therefore$ $n=4,\ 5,\ 6$.

例 10 已知 $(1.25)^n$ 的整数部分为 8 位数，求整数 n 的存在范围.（$\lg 2=0.3010$）.

解 由题设，$10^7\leqslant(1.25)^n<10^8$

$\therefore$ $\lg 10^7\leqslant\lg(1.25)^n<\lg 10^8$

$$7\leqslant n\lg 1.25<8$$

$$\therefore \quad \frac{7}{\lg 1.25} \leqslant n < \frac{8}{\lg 1.25} \tag{1}$$

$$\text{但} \quad \lg 1.25 = \lg \frac{10}{8} = 1 - 3\lg 2 = 0.097 \tag{2}$$

把(2)代入(1)，得

$$72.1\cdots \leqslant n < 82.4$$

因为 n 是整数，所以 $n = 73$、74、…、82.

例 11 a 是自然数，a^{100} 是一个 120 位数，试问 $\frac{1}{a}$ 从小数点后第几位开始出现非零数字？进一步地，如果 a^b 是一个 10 位的自然数，求自然数 b 的值.

解 由已知条件 a^{100} 是 120 位数，

$$\therefore \quad 119 \leqslant \lg a^{100} < 120, \quad 1.19 \leqslant \lg a < 1.2 \tag{1}$$

$$-1.2 < -\lg a \leqslant -1.19 \text{ 即 } \bar{2}.8 < \lg\frac{1}{a} < \bar{2}.81.$$

所以，$\frac{1}{a}$ 从小数点后第二位开始出现非零数字.

又，a^b 是十位数，$\quad \therefore \quad 9 \leqslant \lg a^b < 10$

由(1)式可得

$$9 \leqslant 1.19\, b \leqslant b \lg a < 1.2b < 10$$

$$\therefore \quad 7.56\cdots \leqslant b < 8.33\cdots$$

因为 b 是自然数，$\quad \therefore \quad b = 8$.

例 12 若方程 $\lg ax \lg ax^2 = 4$ 的所有解大于 1，试求出 a 值的范围.

解 由 $x > 1$，$\therefore \quad a > 0$，$\lg x > 0$.

令 $\lg x = X$，$\lg a = A$，则

$$(X + A)(2X + A) = 4,$$

即 $\quad 2X^2 + 3AX + A^2 - 4 = 0$

此方程的判别式 $\triangle=(3A)^2-4\times2\times(A^2-4)$

$$=A^2+32>0$$

$\because$ 其两个解都是正的，

$$\therefore\quad\begin{cases}\text{两解之和}=-\dfrac{3A}{2}>0\\ \text{两解之积}=A^2-4>0\end{cases}$$

从而 $A<-2$，即 $\lg a<-2$

$\therefore\quad 0<a<10^{-2}$ 或 $0<a<\dfrac{1}{100}$.

例 13 若 a、b 是两个不相等的正常数，x 为正的变量，又已知 $\log_m\dfrac{x}{a}\log_m\dfrac{x}{b}$ 的最小值为 $-\dfrac{1}{4}$，试求出 m 用 a、b 表示的值.

解 由已知条件

$$\log_m\frac{x}{a}\log_m\frac{x}{b}=(\log_m x-\log_m a)(\log_m x-\log_m b)$$

$$=(\log_m x)^2-(\log_m a+\log_m b)\log_m x+\log_m a\log_m b$$

$$=\left(\log_m x-\frac{\log_m a+\log_m b}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(\log_m a-\log_m b)^2$$

$$=\left(\log_m x-\frac{1}{2}\log_m ab\right)^2-\frac{1}{4}\left(\log_m\frac{a}{b}\right)^2,$$

$\because$ 最小值为 $-\dfrac{1}{4}(\log_m\dfrac{a}{b})^2=-\dfrac{1}{4}$，

$\therefore\quad \log_m\dfrac{a}{b}=\pm1.$

$$m=\frac{a}{b}，\text{或 } m=\frac{b}{a}.$$

例 14 ① 已知 $2\lg(x-2y)=\lg x+\lg y$，求 $\log_2\dfrac{x}{y}$，

② 已知 x、y 为实数，且 $y=\sqrt{\dfrac{x-24}{x^2+1}}+\sqrt{\dfrac{24-x}{x^2+1}}+7$，

求 $\log_{24}\left(\sqrt{y+\sqrt{x}}+\sqrt{y-\sqrt{x}}\right)$，

③ 已知$\log_a(x^2+1)+\log_a(y^2+4)=\log_a 8+\log_a x+\log_a y$，$(a>0$ 且 $a\neq1)$，求 $\log_2(xy)$.

④ 已知 $\lg x$，$\lg(3x-2)$，$\lg(3x+2)$成等差数列，求 $\log_x\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

解 解这类问题的关键在于应用题给条件求出有关变量(真数或底数)的值.

① $2\lg(x-2y)=\lg x+\lg y$，$(x>0$，$y>0$，且 $x-2y>0)$

即 $$(x-2y)^2=xy,\quad x^2-5xy+4y^2=0$$
$$(x-y)(x-4y)=0$$

由题设条件知 $x-y\neq0$，所以 $x-4y=0$.

即 $$\frac{x}{y}=4,\quad \therefore\quad \log_2\frac{x}{y}=\log_2 4=2.$$

② $y=\sqrt{\dfrac{x-24}{x^2+1}}+\sqrt{\dfrac{24-x}{x^2+1}}+7$，欲 y 为实数，x 须满足

$$\begin{cases}x-24\geqslant0\\24-x\geqslant0\end{cases},\quad 即\quad x=24.$$

故得 $$x=24,\quad y=7,$$

从而 $$\log_{24}\left(\sqrt{y+\sqrt{x}}+\sqrt{y-\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2}\log_{24}\left(\sqrt{y+\sqrt{x}}+\sqrt{y-\sqrt{x}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\log_{24}\left(2y+2\sqrt{y^2-x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\log_{24}\left(2\times7+2\sqrt{7^2-24}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log_{24}24=\frac{1}{2}$$

③ $\log_a(x^2+1)+\log_a(y^2+4)=\log_a 8+\log_a x+\log_a y$.

$(x>0,\ y>0)$.

即 $(x^2+1)(y^2+4)=8xy$

$x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$

$[(xy)^2-4xy+4]+[4x^2-4xy+y^2]=0$

$(xy-2)^2+(2x-y)^2=0$

∴ $\begin{cases}xy=2\\ y=2x\end{cases}$，从而 $\log_2(xy)=\log_2(2)=1$

④ 已知 $2\lg(3x-2)=\lg x+\lg(3x+2)$

即 $(3x-2)^2=x(3x+2)$，$(3x-1)(x-2)=0$，

∴ $x=2$（$x=\frac{1}{3}$不合条件，故略去）

从而 $\log_x\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=\log_2 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=\frac{7}{8}$.

例 15 ① 已知 $\log_{\sqrt{3}}2=\frac{1-a}{a}$，求 $\log_{12}3$；

② 已知 $\log_{12}27=a$，求 $\log_6 16$；

③ 已知 $\lg 6=a$，$\lg 108=b$，求 $\lg 5.4$；

④ 已知 $\log_{18}9=a$，$18^b=5$，求 $\log_{36}45$.

解 解决这类问题的关键是借助对数的性质及对数的换底公式等建立所求结果与已知条件之间的联系．这种联系方式因题而异．探讨诸例的解法，可得一点启示．

① 把 $\log_{12}3$ 化为以$\sqrt{3}$ 为底的对数，以便使用条件．

$$\log_{12}3=\frac{1}{\log_3 12}=\frac{1}{\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3\times4}}$$

$$=\frac{1}{1+\log_{\sqrt{3}}2}=\frac{1}{1+\frac{1-a}{a}}=a.$$

由于 $\log_{\sqrt{3}}2=\log_3 4=\frac{1-a}{a}$， 所以也可把 $\log_{12}3$ 化成以 3 为底的对数求解.

$$\log_{12}3=\frac{1}{\log_3 12}=\frac{1}{1+\log_3 4}=\frac{1}{1+\frac{1-a}{a}}=a.$$

这里也可以把条件、结论都化为以 10 为底的对数，以建立它们之间的联系.

已知 $\log_{\sqrt{3}}2=\frac{1-a}{a}$， 即 $\frac{\lg 4}{\lg 3}=\frac{1-a}{a}$，

$$\therefore\quad \log_{12}3=\frac{\lg 3}{\lg 12}=\frac{\lg 3}{\lg 4+\lg 3}=\frac{1}{\frac{\lg 4}{\lg 3}+1}$$

$$=\frac{1}{\frac{1-a}{a}+1}=a.$$

②已知 $a=\log_{12}27=\frac{\lg 27}{\lg 12}=\frac{3\lg 3}{2\lg 2+\lg 3}$，

$$\therefore\quad \frac{\lg 3}{\lg 2}=\frac{2a}{3-a}.$$

从而 $\log_6 16=\frac{\lg 16}{\lg 6}=\frac{4\lg 2}{\lg 2+\lg 3}=\frac{4}{1+\frac{\lg 3}{\lg 2}}$

$$=\frac{4}{1+\frac{2a}{3-a}}=\frac{4(3-a)}{3+a}.$$

这里也可以化为以 3 为底的对数来解. 请试作.

③〈解一〉已知$\begin{cases}\lg 6=a\\ \lg 108=b\end{cases}$，即$\begin{cases}\lg 2+\lg 3=a\\ 2\lg 2+3\lg 3=b\end{cases}$

解之得　$\lg 2=3a-b$，　$\lg 3=b-2a$.

$$\therefore\quad \lg 5.4=\lg\frac{54}{10}=\lg 2+3\lg 3-1$$
$$=(3a-b)+3(b-2a)-1=2b-3a-1.$$

〈解二〉　已知$\begin{cases}\lg 6=a & ①\\ \lg 108=b & ②\end{cases}$

由②　　$b=\lg 108=\lg\frac{216}{2}=3\lg 6-\lg 2=3a-\lg 2$.

$\therefore\quad \lg 2=3a-b.$

从而　　$\lg 5.4=\lg\frac{108}{2\times 10}=\lg 108-\lg 2-1=2b-3a-1$

〈解三〉　$\lg 5.4=\lg\frac{108}{20}=\lg 108-\lg 2-1$

$$=\lg 108-\lg\frac{6^3}{108}-1$$
$$=2\lg 108-3\lg 6-1$$
$$=2b-3a-1$$

④〈解一〉$\log_{36}45=\frac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\frac{\log_{18}5+\log_{18}9}{\log_{18}18+\log_{18}2}$

$$=\frac{\log_{18}5+\log_{18}9}{\log_{18}18+\log_{18}\frac{18}{9}}=\frac{\log_{18}5+\log_{18}9}{2\log_{18}18-\log_{18}9}$$

$$=\frac{a+b}{2-a}$$

〈解二〉已知$a=\frac{\lg 9}{\lg 18}$，$b=\frac{\lg 5}{\lg 18}$，

$$\therefore\quad \log_{36}45=\frac{\lg 45}{\lg 36}=\frac{\lg 5+\lg 9}{2\lg 2+\lg 9}=\frac{\lg 5+\lg 9}{2\lg\frac{18}{9}+\lg 9}$$

$$=\frac{\lg 5+\lg 9}{2\lg 18-\lg 9}=\frac{(a+b)\lg 18}{(2-a)\lg 18}$$

$$=\frac{a+b}{2-a}$$

例 16　证明：

① 已知 a、b 为不等于 1 的正数且 $a^b=b^a$，求证 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}$.

② 已知 $2^{6a}=3^{3b}=6^{2c}$，求证 $3ab-2ac-bc=0$.

③ 已知 a、b、c 成等差数列，x、y、z 成等比数列，且它们都是正数．求证：

$$(b-c)\lg x+(c-a)\lg y+(a-b)\lg z=0$$

④ 已知 $\dfrac{x(y+z-x)}{\log_a x}=\dfrac{y(z+x-y)}{\log_a y}=\dfrac{z(x+y-z)}{\log_a z}$，求证．

$$y^z\cdot z^y=z^x\cdot x^z=y^x\cdot x^y.$$

证 ①〈证一〉应用幂的变形证明．

因 a，b 为不等于 1 的正数且 $a^b=b^a$，所以 $b=a^{\frac{b}{a}}$，从而 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=\left(\dfrac{a}{a^{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}\left(1-\frac{b}{a}\right)}=a^{\frac{a}{b}-1}$.

〈证二〉应用对数变形证明．

因 a、b 为不等于 1 的正数且 $a^b=b^a$，所以 $b=\log_a b^a$，即　$\log_a b=\dfrac{b}{a}$.

从而　$\log_a\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=\frac{a}{b}(1-\log_a b)=\frac{a}{b}\left(1-\frac{b}{a}\right)=\frac{a}{b}-1$

即 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}$.

② 应用对数变形证明.

$\because\quad 2^{6a}=3^{3b}=6^{2c}$

$\therefore\quad 6a\lg 2=3b\lg 3=2c\lg 6.$

即 $\begin{cases}2a\lg 2=b\lg 3\\ 3a\lg 2=c(\lg 2+\lg 3),\end{cases}$

为了消去 $\lg 2$、$\lg 3$，把它变形为$\begin{cases}2a\lg 2=b\lg 3\\ (3a-c)\lg 2=c\lg 3,\end{cases}$ 相除得$\frac{2a}{3a-c}=\frac{b}{c}$，即 $3ab-2ac-bc=0$.

③ 已知 $a+c=2b$，$y^2=xz$，由于 x、y、z 都是正数，故有

$$2\lg y=\lg x+\lg z$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &2[(b-c)\lg x+(c-a)\lg y+(a-b)\lg z]\\ &=2(b-c)\lg x+(c-a)(\lg x+\lg z)+2(a-b)\lg z\\ &=[2(b-c)+(c-a)]\lg x+[(c-a)+2(a-b)]\lg z\\ &=[2b-(a+c)]\lg x+[(a+c)-2b]\lg z=0\end{aligned}$$

从而 $(b-c)\lg x+(c-a)\lg y+(a-b)\lg z=0.$

④ 设 $\frac{x(y+z-x)}{\log_a x}=\frac{y(z+x-y)}{\log_a y}$

$$=\frac{z(x+y-z)}{\log_a z}=\frac{1}{k}$$

即 $\log_a x=kx(y+z-x)$， 即 $x=a^{kx(y+z-x)}$，

$\log_a y=ky(z+x-y)$， 即 $y=a^{ky(z+x-y)}$，

$\log_a z=kz(x+y-z)$， 即 $z=a^{kz(x+y-z)}$，

于是 $y^z\cdot z^y=[a^{ky(x+z-y)}]^z\cdot[a^{kz(x+y-z)}]^y=a^{kxyz}$，

同理 $z^x\cdot x^z=x^y\cdot y^x=a^{kxyz}$,

$\therefore\quad y^z z^y=z^x\cdot x^z=x^y\cdot y^x$.

例 17 ① 证明 $\dfrac{1}{\log_5 19}+\dfrac{2}{\log_3 19}+\dfrac{3}{\log_2 19}<2$

② 已知 $a>b>c>0$，证明 $a^{2a}\cdot b^{2b}\cdot c^{2c}>a^{b+c}\cdot b^{a+c}\cdot c^{a+b}$.

证 ① $\dfrac{1}{\log_5 19}+\dfrac{2}{\log_3 19}+\dfrac{3}{\log_2 19}=\log_{19}5+2\log_{19}3+3\log_{19}2$.

$=\log_{19}(5\times3^2\times2^3)=\log_{19}360<\log_{19}361=2$.

② 这个题目不易直接建立条件和结论之间的关系，现加以分析.

为想 $a^{2a}\cdot b^{2b}\cdot c^{2c}>a^{b+c}\cdot b^{a+c}\cdot c^{a+b}$，只需 $a^{2a-(b+c)}\cdot b^{2b-(a+c)}\cdot c^{2c-(a+b)}>1$，为了便于应用题设条件，把它变形为

$$a^{(a-b)+(a-c)}\cdot b^{(b-a)+(b-c)}\cdot c^{(c-a)+(c-b)}>1,$$

即 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}\cdot\left(\dfrac{b}{c}\right)^{b-c}\cdot\left(\dfrac{a}{c}\right)^{a-c}>1$,

欲使上述诸正数之积大于1，只需诸因子大于1，现就$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}$讨论.

由于 $a>b>0$，所以 $a-b>0$，$\dfrac{a}{b}>1$，从而$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$.

这样通过以上的分析就得到了证题途径.

证 由于 $a>b>c>0$，故 $a-b>0$，$\dfrac{a}{b}>1$； $b-c>0$，$\dfrac{b}{c}>1$； $a-c>0$，$\dfrac{a}{c}>1$.

从而 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，$\left(\dfrac{b}{c}\right)^{b-c}>1$，$\left(\dfrac{a}{c}\right)^{a-c}>1$.

相乘得 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}>1$

即 $a^{(a-b)+(a-c)}\cdot b^{(b-c)-(a-b)}\cdot c^{-(b-c)-(a-c)}>1$

$a^{2a-(b+c)}\cdot b^{2b-(a+c)}\cdot c^{2c-(a+b)}>1$

故 $a^{2a}\cdot b^{2b}\cdot c^{2c}>a^{b+c}\cdot b^{a+c}\cdot c^{a+b}$

§2. 指数方程与对数方程

指数方程的几种类型及解法

① $a^x=b$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$

当 $b>0$ 时，由对数的定义知 $x=\log_a b$.

当 $b<0$ 时，无解.

② $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ 根据同底的幂相等则其指数相等的性质，原方程可化为 $f(x)=g(x)$ 求解.

③ $a^{f(x)}=b^{g(x)}$ $(a\neq b$，a、b 都是不为 1 的正数)．方程两边取对数，则可化为 $f(x)\cdot\lg a=g(x)\cdot\lg b$ 求解 (当然对数的底数可根据具体情况决定)．

④ $f(a^x)=0$ 这时可用添设辅助未知数的方法，令 $y=a^x(y>0)$ 得 $f(y)=0$ 求解.

指数方程没有一般解法，通常应根据具体情况化为以上几种类型来求解．另外还可用图解法求解的近似值．例如 $2^x=2x$ 可以通过图解法求其近似解.

对数方程的几种类型和解法.

① $\log_a x=b$ 这时 $x=a^b$

② $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ 其中 $f(x)$、$g(x)$ 为正值函数，这时可化为方程 $f(x)=g(x)$ 求解.

③ $f(\log_a x)=0$ 这时可用添设辅助未知数的方法，设

$y=\log_a x$，得方程 $f(y)=0$ 以求解.

④ 如方程中的对数函数含有不同的底，须应用换底公式化成同底的对数式，以方便对数方程的变形.

和指数方程一样，对数方程也没有一般解法. 一般应设法化为上述类型求解，或用图解法求解的近似值. 在解指数方程、对数方程的变形过程中，常因改变方程的存在域破坏方程的同解性，所以须注意增根、失根的讨论.

例 18　解下列方程.

① $6^{2x+4}=2^{x+3}\cdot 3^{3x}$

② $(m^2-n^2)^{3(x-2)}-(m-n)^{3x}\cdot(m+n)^{-6}=0$　$m>n>0$ 且 $m+n\neq 1$.

③ $\lg x\cdot\ln x=\lg x^2$

④ $\frac{1}{2}(\lg x-\lg 5)=\lg 2+\frac{1}{2}\lg(9-x)$

解 ① 原方程可以变形为

$$(2\cdot 3)^{2x+4}=2^{x+3}\cdot 3^{3x},\quad 即\quad 2^{x+1}=3^{x-4}$$

取对数　$(x+1)\lg 2=(x-4)\lg 3$,

$$\therefore\quad x=\frac{\lg 2+4\lg 3}{\lg 3-\lg 2}.$$

② $[(m+n)(m-n)]^{3(x-2)}=(m-n)^{3x}\cdot(m+n)^{-6}$

即　$(m+n)^{3x}=(m-n)^6$

取对数　$3x\lg(m+n)=6\lg(m-n)$

$$\therefore\quad x=\frac{2\lg(m-n)}{\lg(m+n)}.$$

③ $\lg x\cdot\ln x=2\lg x\quad(x>0)$

$\lg x\cdot(\ln x-2)=0$

如　$\lg x=0$,　则　$x=1$

如　$\ln x-2=0$，　则　$x=e^2$。

④ $\lg x-\lg 5=2\lg 2+\lg(9-x)\quad(0<x<9)$

即　$\lg x=\lg 20(9-x)$，

∴　$x=20(9-x)$

即　$x=\dfrac{20\times 9}{21}=\dfrac{60}{7}$。

例 19　解下列方程：

① $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x+(\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x=6$；

② $4\cdot 9^{\sqrt{x}-2}-3\cdot 15^{\sqrt{x}-2}=25^{\sqrt{x}-2}$

③ $\log_x^2\sqrt{5}-\log_x 5\sqrt{5}+1.25=0$

④ $2\log_4 x+2\log_x 4=5$.

解　这类问题可以用添设辅助未知数的方法解决.

① 由于 $\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}=1$，所以方程可以变形为

$$(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x+\left(\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right)^x=6$$

$$(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^{2x}-6(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x+1=0$$

∴　$(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x=\dfrac{6\pm\sqrt{6^2-4}}{2}=3\pm 2\sqrt{2}$.

因而得　$x=2$　或　$x=-2$.

② 以 $25^{\sqrt{x}-2}$ 除方程各项，得

$$4\left(\frac{9}{25}\right)^{\sqrt{x}-2}-3\left(\frac{3}{5}\right)^{\sqrt{x}-2}-1=0$$

$$4\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{\sqrt{x}-2}\right]^2-3\left(\frac{3}{5}\right)^{\sqrt{x}-2}-1=0$$

令　$\left(\dfrac{3}{5}\right)^{\sqrt{x}-2}=y>0$，则得 $4y^2-3y-1=0$

$\therefore\quad y=1$ 或 $y=-\dfrac{1}{4}$ （略去）

从而 $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{\sqrt{x}-2}=1$，$\therefore\quad x=4$.

③ 令 $\log_x\sqrt{5}=y\quad(x>0$ 且 $x\neq1)$，则原方程可变形为

$$y^2-3y+1.25=0$$

$\therefore\quad y=\dfrac{5}{2}$ 或 $y=\dfrac{1}{2}$，

从而 $\log_x\sqrt{5}=\dfrac{5}{2}$，$x^{\frac{5}{2}}=\sqrt{5}$，即 $x=\sqrt[5]{5}$

或 $\log_x\sqrt{5}=\dfrac{1}{2}$，$x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$，即 $x=5$.

④ 由于 $\log_4x\cdot\log_x4=1\quad(x>0$ 且 $x\neq1)$，所以方程可变形为

$$2\log_4x+\frac{2}{\log_4x}=5,$$

即 $2\log_4^2x-5\log_4x+2=0$.

$\therefore\quad \log_4x=\dfrac{1}{2}$ 或 $\log_4x=2$

$\therefore\quad x=2$ 或 $x=16$.

例 20 解下列方程

① $\log_3x+\log_{\sqrt{3}}x-\log_{\frac{1}{3}}x=6$；

② $\log_ax+\log_{a^2}x+\log_{a^4}x=\dfrac{3}{4}$；

③ $\log_4(x+12)\cdot\log_x2=1$.

解 这类题目一般应先化为同底的对数式，以便利用对数变形进行简化.

① 原方程可以变形为 $\log_3 x+2+\log_3 x=6$

即　$\log_3 x=2$，　∴　$x=9$，

② 原方程可变形为

$$\log_a x+\frac{1}{2}\log_a x+\frac{1}{4}\log_a x=\frac{3}{4}$$

$$\log_a x=\frac{3}{7}\quad\therefore\quad x=a^{\frac{3}{7}}$$

③ 原方程可以变形为

$$\log_4(x+12)\cdot\frac{1}{\log_2 x}=1,\quad \log_4(x+12)=\log_4 x^2,$$

即　$x^2=x+12$，　∴　$x=4$　或　$x=-3$　(略去)．

例 21　解下列方程：

① $x^x=1$；　② $x^{1+\lg x}=0.1^{-2}$；

③ $2^{3\lg x}\cdot 5^{\lg x}=1600$．

解 ① 方程的存在域是 $x>0$，两边取对数得

$$\lg x^x=0,\quad 即\quad x\lg x=0.$$

∴　$x=0$　或　$x=1$．

由于 $x=0$ 不在存在域内而须略去．∴　$x=1$．

② 原方程可以变形为

$$(1+\lg x)\lg x=\lg 0.1^{-2},\quad 即\quad \lg^2 x+\lg x-2=0.$$

∴　$\lg x=-2$　或　$\lg x=1$．

从而　$x=\frac{1}{100}$　或　$x=10$．

③ 方程两边取对数，得

$$3\lg x\cdot\lg 2+\lg x\cdot\lg 5=\lg 1600\ (x>0)$$

即　$\lg x\cdot\lg 40=\lg 1600$

∴　$\lg x=\frac{\lg 1600}{\lg 40}=2$，从而　$x=100$．

例 22　解下列方程组

① $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 & (1) \\ 2^y \cdot 3^x = 18; & (2) \end{cases}$

② $\begin{cases} \log_2(x+y) + \log_3(x-y) = 1 \\ x^2 - y^2 = 2; \end{cases}$

③ $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2; \end{cases}$

④ $\begin{cases} x^{x+y} = y^{60} \\ y^{x+y} = x^{15}, \end{cases}$ 求 x、y 的整数解.

解 ① 〈解一〉 由(1)·(2)，(1)÷(2)得

$$6^{x+y} = 6^3, \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{2}{3}.$$

于是 $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1, \end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases} x=2 \\ y=1. \end{cases}$

〈解二〉 原方程可变形为

$$\begin{cases} x\lg 2 + y\lg 3 = \lg 12 \\ x\lg 3 + y\lg 2 = \lg 18 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \dfrac{\lg 2 \cdot \lg 12 - \lg 3 \cdot \lg 18}{\lg^2 2 - \lg^2 3} = 2 \\ y = \dfrac{\lg 12 - 2\lg 2}{\lg 3} = 1. \end{cases}$$

② 将原方程组化为以 2 为底的对数式

$$\begin{cases} \log_2(x+y) + \dfrac{1}{\log_2 3} \cdot \log_2(x-y) = 1 & (1) \\ \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 1 & (2) \end{cases}$$

(1) − (2)　$\log_3 2 \cdot \log_2(x-y) = 0$，　即　$x-y=1$

代入(1)得 $x+y=2$， ∴ $\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\ y=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

③ 方程的存在域为 $x>0$，$y>0$，$z>0$

$$\begin{cases}\log_4 x^2yz=2,\\ \log_9 xy^2z=2,\\ \log_{16}xyz^2=2,\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}x^2yz=16\\ xy^2z=81\\ xyz^2=256\end{cases}$$

相乘得 $x^4\cdot y^4\cdot z^4=24^4$， 即 $xyz=24$，

∴ $x=\dfrac{2}{3}$， $y=\dfrac{27}{8}$， $z=\dfrac{32}{3}$.

④ 方程组存在域为 x、y 都是正整数，取常用对数

$$\begin{cases}(x+y)\lg x=60\lg y\\ (x+y)\lg y=15\lg x\end{cases}$$

即 (一) $\begin{cases}\dfrac{\lg x}{\lg y}=\dfrac{4\lg y}{\lg x} & (1)\\ (x+y)\lg y=15\lg x & (2)\end{cases}$

及(二) $\begin{cases}\lg x=0\\ \lg y=0\end{cases}$

解(一) 由(1) $\lg^2 x=4\lg^2 y$， 即 $\lg x=2\lg y$

代入(2)得 $x+y=30$

于是 $\begin{cases}x=y^2,\\ x+y=30,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}x=25\\ y=5\end{cases}$

解(二) 得 $\begin{cases}x=1\\ y=1.\end{cases}$

例 23 美国物价从 1939 年的 100 增加到 40 年后 1979 年的 500，如果每年物价增长率相同，问每年增长百分之几？

注意 自然对数 $\ln x$ 是以 $e=2.718\cdots$ 为底的对数. 本题中增长率 $x<0.1$，可用自然对数的近似公式 $\ln(1+x)\approx x$. 取 $\lg 2=0.3$，$\ln 10=2.3$ 来计算.

解一 设每年平均增长率为 x，依题意得：

$$100(1+x)^{40}=500,\qquad 即\qquad (1+x)^{40}=5$$

取常用对数 $40\lg(1+x)=\lg 5$

但 $\lg(1+x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\ln 10}\doteq\dfrac{x}{2.3}$

$$\lg 5=1-\lg 2\doteq 1-0.3=0.7$$

$$\therefore\quad 40\cdot\frac{x}{2.3}=0.7,\qquad x\approx 4\%$$

解二 仿上，得 $(1+x)^{40}=5$，取自然对数

$$40\ln(1+x)=\ln 5,$$

$$40x\doteq\frac{\lg 5}{\lg e}$$

$$\therefore\quad x\doteq\frac{(1-\lg 2)\ln 10}{40}\doteq\frac{(1-0.3)\cdot 2.3}{40}\approx 4\%$$

答 每年平均增长率约为 4 %.

习 题 六

1. ① 当 x 为何值时，$\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}}$ 才有意义？

② 如 $A=\lg\sqrt{x+1}$，$B=\lg\sqrt{4-x}$，$C=\lg\sqrt{x-2}$，问 x 为什么值时 A、B、C 都有意义？x 取什么值时，$A+B-C$ 的值为 $25^{\log_5\sqrt{\lg 2}}$？

③ x 取哪些有理数时，$\log_2(x^2-4x-1)$ 的值为整数？

2. 计算

① $\log_{2-\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})$；

② $\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$；

③ $(\log_7 5+\frac{1}{2}\log_7 4)\log_{\sqrt{10}}\sqrt{7}$；

④ $\log_5\frac{\sqrt[3]{25}}{5}\cdot\log_2[4^{\frac{1}{2}\log_2 3}\cdot(2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}}-4\log_5 5]$；

⑤ $\sqrt{(\log_3 10)^2-6\log_3 10+9}$.

3. ① 已知 $\lg 2673=3.4270$，$\lg 3=0.4771$，求 $\lg 11$；

② 已知 $\lg 2=a$，$\lg 7=b$，求 $\log_8 9.8$；

③ 如$\sqrt{10}=3.16$，$\lg 2=0.30$，求 2^{64} 的估值.

4. ① 如 x，y 都是实数，且 $y=\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x^2-1}}{x+1}$，求 $\lg(x+y)$ 的值；

② 如 x，y 均为实数，且 $(2x-1)^2+(y-8)^2=0$，求 $\log_8(xy)$ 的值；

③ 已知 $\log_2 x+\log_2\left(x-\frac{3}{8}\right)+2\log_2 4=0$，求无穷级数 $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots$ 的和.

5. 证明

① 若 $a>0$，$b>0$，且 $4a^2+9b^2=4ab$，

则 $$\lg\frac{2a+3b}{4}=\frac{\lg a+\lg b}{2}；$$

② 若 $a^2+b^2=c^2$，

则 $$\log_{b+c}a+\log_{c-b}a=2\log_{b+c}a\cdot\log_{c-b}a；$$

③ 若 $\log_k x$，$\log_m x$，$\log_n x$ 成等差数列，

则 $$n^2=(kn)^{\log_k m}.$$

6. 证明

① $\frac{4}{\log_2 10}+\frac{2}{\log_3 10}+\frac{1}{\log_7 10}>3$;

② $\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_5 \pi}>2$.

7. ① 已知 $x>0$，$y>0$，$x+2y=8$，求 $\log_4 x+\log_4 y$ 的最大值；

② 已知 $\log_2 x+\log_2 y=1$，求 $x+2y$ 的最小值.

8. ① 当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，求函数 $f(x)=3+2\cdot 3^{x+1}-9^x$ 的最大值和最小值，以及它们在 x 取什么值时候得到这个最值；

② 给出函数 $f(x)=(\log_a x)^2-\log_a x^2+5\ (2\leqslant x\leqslant 4)$ 其中 $a=\frac{1}{2}$，求它的最大值和最小值.

解下列方程(组)

9. ① $9^x=27^{1-2x}$； ② $3\cdot 2^{x+2}+2\cdot 4^x=80$；

③ $2^x-2^{3-x}+2=0$； ④ $3^x=27^{y+1}$，$25^y=5^{x+1}$.

10. ① $2\log_x 3\cdot\log_{3x}3=\log_{9\sqrt{x}}3$；

② $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}x=6$；

③ $\log_2 3\cdot\log_9 x\cdot\log_4 x=1$；

④ $\lg^2 9x-3\lg(x+2)\lg 9x+2\lg^2(x+2)=0$.

11. ① $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)}=9$；

② $3^{\log_3 x}+7^{\log_x 1}=5^{\log_{25}(2x+5)}$；

③ $x^{\lg^2 x+\lg x^3+2}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}}$.

12. ① $\begin{cases}\log_{xy}(x-y)=1\\ \log_{xy}(x+y)=0\end{cases}$，

② $\begin{cases}\log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0;\end{cases}$

③ $\begin{cases}xy = 40 \\ x^{\lg y} = 4;\end{cases}$

④ $\begin{cases}\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2.\end{cases}$

13. 解不等式

① $\log_3(2x+3) - \log_3 x < 1$;

② $\log_2(x-1) \leqslant \log_4(2x-1)$;

③ $2\log_a(x-4) > \log_a(3x-8)$.

14. 求证 $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$.

15. 证明下列不等式:

① $\log_a \frac{1}{x} \log_a \frac{1}{y} \geqslant \log_a \sqrt{\frac{y}{x}} \log_a \sqrt{\frac{x}{y}}$;

② $\log_a(a^m + a^n) \geqslant \frac{m+n}{2} + \log_a 2$ (其中 $a>1$).

16. ① 若 $x>0$, 则 $(x-1)\lg x > 0$.

② 若正数 x、y 同时满足 $x^x = y$, $y^y = x$, 则必有 $x = y = 1$.

第七章　数列与极限

§1. 数　　列

数列是指这样一种数的集合，它的元素可按自然数编号，一个一个地排列起来：

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots(\text{简记为}\{a_n\}).$$

换言之，数列是一种定义于自然数集合上的一个函数（简称整标函数）．a_1，a_2 分别称为数列的第 1 项，第 2 项．第 n 项 a_n 称为数列的通项或一般项．若一个数列只有有限个项，为有限数列，否则称为无穷数列．在初等数学中主要讨论有限数列，而且限于讨论其中特殊的两种，即等差数列和等比数列．在下一节讲极限时，将提到无穷等比数列．把数列的各项用加号连接起来的式子

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots\cdots$$

称为级数．（注意，在初等代数中，有时对数列和级数这两个概念不加严格区分，比如讲 a，b，c，成等差级数，意即三数成等差数列）．对于有限数列，这个式子的意义自明．但对于无穷数列，掌握了极限概念才能理解这个式子的意义，这里只能看作是一个形式的定义．

1．　等差数列

定义　一个数列从第二项起，每一项等于它的前一项加上同一常数 d，也就是说数列中任一项减去前一项的差都相

等(等于常数 d)，这个数列就叫做等差数列，d 叫做它的公差．相应的级数叫做等差级数或算术级数．

主要公式：

通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$；

求和公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$．

其中 a_1 为首项，a_n 为第 n 项(若仅有 n 项，a_n 亦可称为末项)，n 为项数，S_n 为等差数列的前 n 项之和，d 为公差．

此外，如 a、b、c 三数成等差数列，则称 b 为 a、c 的等差中项，或算术平均数．对此，显然有

$$b=\frac{a+c}{2}.$$

2．等比数列

定义 一个数列从第二项起，每一项等于它的前一项乘以同一个常数 q，也就是说数列中任一项与它前一项的比都相等(等于常数 q)，则称为等比数列，常数 q 叫公比．相应的级数叫做等比级数或几何级数．

主要公式：

通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$；

求和公式 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$．(设 $q\neq1$)

其中 a_1 为首项，q 为公比，a_n 为第 n 项(若仅有 n 项，亦称末项)，n 为项数，S_n 为前 n 项之和．

此外，若 a、b、c 三正数成等比数列，则称 b 为 a、c 的等比中项，或几何平均数．对此，显然有

$$b=\sqrt{ac}.$$

例 1 试求 200 与 800 间能被 7 所整除的各个数的和．

分析 很明显，若将200与800间能被7所整除的各个数依次排列起来，正好是一个公差为7的等差数列，问题是要求出此等差数列的和，因而，我们很自然地想到利用和的公式．为此必须先求出首项 a_1，末项 a_n 和项数 n．据题意，a_1 应是大于200的第一个能被7所整除的整数，a_n 应是小于800而最接近于800的能被7所整除的整数，因此，只要用7去试除200和800，便能定出 a_1 和 a_n．有了 a_1 和 a_n，根据通项公式立即可定出 n．

解 以7试除200和800，得：

$$a_1 = 203,\quad a_n = 798.$$

由通项公式得

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{798 - 203}{7} + 1 = 86.$$

将所求出的 a_1，a_n 和 n 代入和的公式，得

$$S_{86} = \frac{86(203 + 798)}{2} = 43043.$$

例 2 已知一等差数列，项数为9，和为2，从首项中减去16正好是末项的4倍，求此等差数列的第3项．

分析 与等差数列相关联的共有五个量（有时称为等差数列的五要件，或五要素），即首项 a_1，末项 a_n，公差 d，项数 n 以及前 n 项和 S_n．这五个量不是完全独立的，通项公式与和的公式便是它们的普遍联系，对任何等差数列都成立．所以原则上讲，五个量中只要给出三个量，或者给出这五个量之间的三个关系，那么这个等差数列就完全确定了．简言之，三个条件决定一个等差数列，有了这一认识，再来解答本题或类似的问题就不难了．

解　先列出一般公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \tag{A}$$

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}. \tag{B}$$

其次，列出本题给出的具体条件：

$$n = 9, \tag{C}$$

$$S_n = 2, \tag{D}$$

$$a_1 - 16 = 4a_n. \tag{E}$$

将(C)、(D)、(E)代入(B)，得

$$a_n = -\frac{28}{9}. \tag{F}$$

再利用(E)，得

$$a_1 = \frac{32}{9}. \tag{G}$$

将(C)、(F)、(G)代入(A)，得

$$d = -\frac{5}{6}. \tag{H}$$

最后根据(G)、(H)，取 $n=3$，利用(A)，得

$$a_3 = 1\frac{8}{9}.$$

例 3　设 a^2，b^2，c^2 成等差数列，求证 $\frac{1}{b+c}$，$\frac{1}{c+a}$，$\frac{1}{a+b}$ 也成等差数列.

分析　解证明题，往往从欲证之结论入手分析．本题所要证明的事实为

$$\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a},$$

亦即

$$\frac{b-a}{(c+a)(b+c)} = \frac{c-b}{(a+b)(c+a)}.$$

至此再与已知条件联系起来考虑，证法立即可得.

证 由假设知

$$b^2-a^2=c^2-b^2,$$

即 $$(b-a)(b+a)=(c-b)(c+b).$$

上式两边同除以$(c+a)(b+c)(a+b)$（由题意知$(c+a)(b+c)(a+b)\neq0$），得

$$\frac{b-a}{(c+a)(b+c)}=\frac{c-b}{(a+b)(c+a)},$$

亦即 $$\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}.$$ 证毕.

例 4 等差数列的第一项是13，若前三项的和与前11项的和相等.

① 求公差;

② 试问前几项的和为最大？此时最大值又为多少？

解 ① 设公差为d，则

$$3\times13+\frac{3\times2}{2}d=11\times13+\frac{11\times10}{2}d,$$

∴ $d=-2$.

② $S_n=n\times13+\dfrac{n(n-1)}{2}\times(-2)$

$$=-n^2+14n=-(n-7)^2+49.$$

∴ 当$n=7$时，S_n最大，最大值49.

另解：设从第n项起为负数，则

$$13-2(n-1)<0\qquad(n\text{ 为整数})$$

∴ $n\geqslant8$.

于是，前7项的和最大，最大值为49.

例 5 等差数列的第一项是-60，第十七项是-12，若

把这个数列的各项取绝对值相应地作一个新数列，求这个数列前 30 项的和.

解 设公差为 d，则

$$-60+16d=-12,\qquad \therefore\quad d=3.$$

由 $-60+3(n-1)<0$，得 $n<21$，

从而，前 20 项为负数，从第 21 项起为正数(第 21 项是 0).

$$\therefore\quad 所求和=\left|-60\times20+\frac{20\times19}{2}\times3\right|+\frac{10}{2}(2\times0+3\times9)=765.$$

即前 30 项的和为 765.

例 6 在三位的自然数中，求出既能被 2 也能被 3 整除的那些数的和以及只被 2、3 中的一个整除的那些数的和.

解 假设能被 2、3、6 整除的那些三位数的和分别为 S_2、S_3、S_6，则

$$\begin{aligned}S_2&=100+102+\cdots+998\\&=2(50+51+\cdots+499)\\&=2\times\frac{450}{2}(50+499)=247050;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_3&=3(34+35+\cdots+333)\\&=3\times\frac{300}{2}(34+333)=165150;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_6&=6(17+18+\cdots+166)\\&=82350.\end{aligned}$$

既能被 2 也能被 3 整除的数的和为 $S_6=82350$，只能被 2、3 中的一个整除的数的和为

$$S_2 + S_3 - S_6 = 329850.$$

例 7 一等比数列，已知 $a_1 = -\frac{9}{16}$，$a_n = -\frac{16}{9}$，$S_n = -\frac{781}{144}$，求 q 及 n.

分析 与等差数列类似，等比数列也有五要件：首项 a_1，末项 a_n，公比 q，项数 n，前 n 项和 S_n，它们之间有两个公式联系着，所以给出这五个量中的三个或三个关系，一般就可以决定此等比数列.

解 等比数列的通项公式及前 n 项和公式是

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \tag{A}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q)^n}{1-q}. \tag{B}$$

由(A)，有 $a_1q^n = a_nq$，代入(B)得

$$S_n = \frac{a_1 - a_nq}{1-q}.$$

解出 q，$q = \frac{a_1 - S_n}{a_n - S_n} = \frac{-\frac{9}{16} - \left(-\frac{781}{144}\right)}{-\frac{16}{9} - \left(-\frac{781}{144}\right)} = \frac{4}{3}.$

因此，

$$-\frac{16}{9} = -\frac{9}{16}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \frac{256}{81} = \left(\frac{4}{3}\right)^4,$$

所以 $n = 5$.

例 8 设一等比数列的前 p 项之和为 x，前 $2p$ 项之和为 y，前 $3p$ 项之和为 z，求证 x，y，$y+z-x$ 也为等比数列.

分析 要证明三数 a，b，c 成等比数列，即证明 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$，亦即 $b^2=ac$，因而，本题只要验证 $x(y+z-x)=y^2$ 即可。

证 设原等比数列之首项为 a_1，公比为 q，则由和的公式，有

$$x=\frac{a_1(1-q^p)}{1-q},\qquad y=\frac{a_1(1-q^{2p})}{1-q},$$

$$z=\frac{a_1(1-q^{3p})}{1-q}.$$

于是 $$y^2=\frac{a_1^2(1-q^{2p})^2}{(1-q)^2}=\frac{a_1^2(1-2q^{2p}+q^{4p})}{(1-q)^2};$$

$$x(y+z-x)=\frac{a_1(1-q^p)}{1-q}$$

$$\times\frac{a_1(1-q^{2p}+1-q^{3p}-1+q^p)}{1-q}$$

$$=\frac{a_1^2(1-q^p)(1+q^p-q^{2p}-q^{3p})}{(1-q)^2}$$

$$=\frac{a_1^2(1-2q^{2p}+q^{4p})}{(1-q)^2}.$$ 证毕。

例 9 三数成等比数列，其和为38，其积为1728，求此三数.

解 设三数分别为：$\frac{\alpha}{\beta}$、α、$\alpha\beta$，由题意应有

$$\frac{\alpha}{\beta}+\alpha+\alpha\beta=38, \tag{A}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\alpha\cdot\alpha\beta=1728. \tag{B}$$

由 (B)，$\alpha^3=1728$，$\alpha=12$ （在实数范围内），并代入

(A)，得

$$12\left(\frac{1}{\beta}+1+\beta\right)=38,\qquad \frac{1}{\beta}+1+\beta=\frac{19}{6},$$

$$6\beta^2-13\beta+6=0.$$

解得 $\beta_1=\frac{3}{2}$，$\beta_2=\frac{2}{3}$.

如 $\beta=\frac{3}{2}$，（注意已求得 $\alpha=12$）则所求三数依次为：

$$\frac{\alpha}{\beta}=8,\ \alpha=12,\ \alpha\beta=18;$$

如 $\beta=\frac{2}{3}$，则三数依次为 18，12，8.

注 1) 解此题时，我们设组成等比数列的三数为 $\frac{\alpha}{\beta}$，α，$\alpha\beta$ 较为方便；若设三数为 a_1，a_1q，a_1q^2 亦未尝不可，但运算较繁，同样，成等差数列的三数，若设为 $a-d$，a，$a+d$ 一般来说，比设成 a，$a+d$，$a+2d$ 要方便，这些问题虽属解题方法中的细节，但也应注意.

2) 对本题还可作一般性讨论如下：若三数之和为 S，三数之积为 p，那么我们将得到如下之方程：

$$\frac{\alpha}{\beta}+\alpha+\alpha\beta=S; \tag{A}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\alpha\cdot\alpha\beta=p. \tag{B}$$

由(B)式有 $\alpha=\sqrt[3]{p}$，代入(A)式得

$$\frac{1}{\beta}+\beta=\frac{S}{\sqrt[3]{p}}-1, \tag{C}$$

即 $\beta^2-\left(\frac{S}{\sqrt[3]{p}}-1\right)\beta+1=0.$

若限定在实数范围内求解，则应要求

$$\left(\frac{S}{\sqrt[3]{p}}-1\right)^2-4\geqslant 0,$$

或
$$\left|\frac{S}{\sqrt[3]{p}}-1\right|\geqslant 2. \tag{D}$$

(D)式是本题可解的条件

当(D)的等号成立时，β 或为 1 或为 -1，所求三数是

$$\sqrt[3]{p},\ \sqrt[3]{p},\ \sqrt[3]{p}\ \text{或}\ -\sqrt[3]{p},\ \sqrt[3]{p},\ -\sqrt[3]{p}.$$

当(D)的不等号成立时，β 有二实根，但从(C)式看，此二根互为倒数，可见与 β 的二根相应的二组解实际是同样的三个数构成，只是首末二项易位.

例 10 设 x，a_1，a_2，y 为等差数列，x，b_1，b_2，y 为等比数列，x，c_1，c_2，y 为调和数列. 求证 $\dfrac{b_1b_2}{c_1c_2}=\dfrac{a_1+a_2}{c_1+c_2}$

注 （若一数列的各项的倒数成等差数列，则称原数列为调和数列.）

分析 这类证明题一般不难，关键在于概念必须清晰. 比如已知 x，a_1，a_2，y 成等差，意味着有关系：$a_1-x=y-a_2$ 等等. 然后设法利用这些关系推出所需结果.

证 依题设，有

$$a_1+a_2=x+y; \tag{A}$$

$$b_1b_2=xy; \tag{B}$$

$$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}. \tag{C}$$

由(C)有

$$\frac{c_1+c_2}{c_1c_2}=\frac{x+y}{xy}, \tag{D}$$

将(A)(B)代入(D)即可得

$$\frac{b_1b_2}{c_1c_2}=\frac{a_1+a_2}{c_1+c_2}.$$

例 11 ① 设等比数列的前 n 项的和为 A，第 $n+1$ 项到第 $2n$ 项的和为 B，第 $2n+1$ 项到第 $3n$ 项的和为 C，则 B 为 A、C 的等比中项.

② 等比数列的前 n 项的和为 S，积为 P，其倒数的前 n 项的和为 T，试证 $P^2=\left(\frac{S}{T}\right)^n$，其中公比不等于 1.

解 ① 设首项为 a，公比为 q，

当 $q=1$ 时，$A=na$，$B=na$，$C=na$.

$\therefore\quad B^2=AC$；

当 $q\neq1$ 时，$A=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$，

$$B=\frac{a(1-q^{2n})}{1-q}-\frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

$$=\frac{a(1-q^n)}{1-q}\cdot q^n=Aq^n.$$

$$C=\frac{a(1-q^{3n})}{1-q}-\frac{a(1-q^{2n})}{1-q}$$

$$=\frac{a(1-q^n)}{1-q}q^{2n}=Aq^{2n}.$$

$\therefore\quad B^2=A^2q^{2n}=A(Aq^{2n})=AC.$

② $S=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$，

$$T=\frac{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{q^n}\right)}{1-\frac{1}{q}}=\frac{1-q^n}{aq^{n-1}(1-q)}=\frac{S}{a^2q^{n-1}}.$$

$$\therefore\quad \left(\frac{S}{T}\right)^n=(a^2q^{n-1})^n$$

$$=a^{2n}q^{n(n-1)},\tag{1}$$

又 $P=a^nq^{1+2+\cdots+(n-1)}$

$$=a^nq^{\frac{n(n-1)}{2}},\tag{2}$$

由(1)、(2)得

$$P^2=\left(\frac{S}{T}\right)^n.$$

例 12 已知a、b、c三数成等差数列，x、y、z三个正数成等比数列，求证：

$$(b-c)\lg x+(c-a)\lg y+(a-b)\lg z=0.$$

分析 因为 $c-a=-[(a-b)+(b-c)]$，所以要证明上式成立，只要证明

$$(b-c)\lg x-(b-c)\lg y-(a-b)\lg y+(a-b)\lg z=0$$

因此，就只要证明

$$(b-c)\lg\frac{x}{y}=(a-b)\lg\frac{y}{x}.$$

证明 因为a、b、c成等差数列，所以

$$b-c=a-b.\tag{1}$$

因为 x、y、z 成等比数列，所以

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{z}.$$

$$\therefore\quad \lg\frac{x}{y}=\lg\frac{y}{z}.\tag{2}$$

(1)×(2)，得

$$(b-c)\lg\frac{x}{y}=(a-b)\lg\frac{y}{z},$$

$$(b-c)\lg x+(c-a)\lg y-(a-b)\lg y+(a-b)\lg z=0.$$

$$\therefore\quad (b-c)\lg x+(c-a)\lg y+(a-b)\lg z=0.$$

例 13 如果 a、b、c 依次同时是一个等差数列和一个等比数列的第 p 项，第 q 项和第 r 项．求证：$a^{b-c}\cdot b^{c-a}\cdot c^{a-b}=1$．

证明 设等差数列的首项是 a_1，公差是 d；等比数列的首项是 b_1，公比是 m，那么

$$a=a_1+(p-1)d=b_1m^{p-1},$$

$$b=a_1+(q-1)d=b_1m^{q-1},$$

$$c=a_1+(r-1)d=b_1m^{r-1}.$$

$$\therefore\quad a^{b-c}=[b_1m^{p-1}]^{[a_1+(q-1)d-a_1-(r-1)d]}$$

$$=[b_1m^{p-1}]^{(qd-rd)}$$

$$=b_1^{(qd-rd)}m^{(pqd-prd-qd+rd)}$$

同理可得

$$b^{c-a}=b_1^{(rd-pd)}m^{(qrd-pqd-rd+pd)}$$

$$c^{a-b}=b_1^{(pd-qd)}m^{(prd-rqd-pd+qd)}$$

$$\therefore\quad a^{b-c}\cdot b^{c-a}\cdot c^{a-b}=b_1^{(qd-rd+rd-pd+pd-qd)}m^{(pqd-prd-qd+rd)+(qrd-pqd-rd+pd)+(prd-rqd-pd+qd)}$$

$$=b_1^0m^0=1.$$

例 14 求数列：1^2，2^2，3^2，…，n^2，…前 n 项的和．

解法一 $\because\quad (n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1,$

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1,$$

$$\therefore\quad 2^3-1^3=3\times1^2+3\times1+1,$$

$$3^3-2^3=3\times2^2+3\times2+1,$$

$$4^3-3^3=3\times3^2+3\times3+1,$$

……………………

把上面各等式的两边分别相加，得

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+\frac{3n(n+1)}{2}+n$$

$\therefore\quad 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$$=\frac{1}{3}\left[(n+1)^3-1-n-\frac{3n(n+1)}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{6}[2n(n+1)(n+2)-3n(n+1)]$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

解法二 因为 $a_n=n^2$，它是 n 的二次函数，所以前 n 项的和 S_n 是 n 的三次函数.

设 $S_n=b_0n^3+b_1n^2+b_2n+b_3$，其中 b_0、b_1、b_2、b_3 是待定系数.

$$S_1=b_0+b_1+b_2+b_3=1^2,$$
$$S_2=8b_0+4b_1+2b_2+b_3=1^2+2^2,$$
$$S_3=27b_0+9b_1+3b_2+b_3=1^2+2^2+3^2,$$
$$S_4=64b_0+16b_1+4b_2+b_3=1^2+2^2+3^2+4^2.$$

解由上面四个方程组成的方程组，得

$$b_0=\frac{1}{3},\quad b_1=\frac{1}{2},\quad b_2=\frac{1}{6},\quad b_3=0.$$

$$\therefore\quad 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

注 数列 1，4，9，16，25，…叫做自然数平方数列，它的通项公式为 n^2，前 n 项和公式就是

$$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

本题的解法，原则上同样适用于求自然数的立方和，四次方和等等，不过方次越高，计算越繁，兹将一些结果抄录如下(直至10次方)：

$$\sum_{K=1}^{n} K=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2};$$

$$\sum_{K=1}^{n} K^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\sum_{K=1}^{n} K^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2;$$

$$\sum_{K=1}^{n} K^4=\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1);$$

$$\sum_{K=1}^{n} K^5=\frac{n^2}{12}(n+1)^2(2n^2+2n-1);$$

$$\sum_{K=1}^{n} K^6=\frac{n}{42}(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1);$$

$$\sum_{K=1}^{n} K^7=\frac{n^2}{24}(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2);$$

$$\sum_{K=1}^{n} K^8=\frac{n}{90}(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3$$
$$-n^2+9n-3);$$

$$\sum_{K=1}^{n} K^9=\frac{n^2}{20}(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3);$$

$$\sum_{K=1}^{n} K^{10}=\frac{n}{66}(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3-2n^2-15n+5),$$

若已知结果，当然亦可用数学归纳法证之.

例 15 求数列 1，3，6，10，15，…，$\frac{n^2+n}{2}$… 前 n 项的和.

分析 因为 $a_n=\frac{n^2+n}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$. 所以数列的每一项都可以看成是二项的和，这样整个数列的前 n 项的和 S_n，可以用前 n 个自然数的平方和与前 n 个自然数的和的公式求出：

解
$$\begin{aligned}S_n&=1+3+6+10+\cdots+\frac{n^2+n}{2}\\&=\frac{1^2+1}{2}+\frac{2^2+2}{2}+\frac{3^2+3}{2}+\frac{4^2+4}{2}+\cdots+\frac{n^2+n}{2}\\&=\frac{1}{2}[(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots+n)]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]\\&=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.\end{aligned}$$

例 16 求 $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n-1)(n+2)$ 的和.

分析 $a_n=n(n+1)(n+2)=n^3+3n^2+2n$. 所以数列每一项可以看作是三项的和，这样，整个数列的前 n 项的和 S_n 可以用前 n 个自然数的立方和，前 n 个自然数的平方和与前 n

个自然数的和的公式求出.

解 $S_n=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)$

$$=(1^3+3\cdot1^2+2\cdot1)+(2^3+3\cdot2^2+2\cdot2)+\cdots+(n^3+3n^2+2n)$$

$$=(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)+3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+2(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

例 17 求数列 1，$3a$，$5a^2$，$7a^3,\cdots,(2n-1)a^{n-1}$，$\cdots$的前 n 项之和(设 $a\neq1$).

分析 首先我们注意，此数列既不是等差数列，也不是等比数列，因此没有现成的求和公式好用，遇到这类数列，我们首先应注意该数列的特点，然后设法利用等比数列或等差数列的求和公式．本题数列的特点是：由通项$(2n-1)a^{n-1}$知其系数构成等差数列，而文字因式 a^{n-1} 构成等比数列．因此可设计出本题解法．以下介绍两种解法，其中解法一从思路来说比较自然，对于我们探求其它类似问题的解法很有启发，而解法二则包含一定的技巧，也值得借鉴．

解一 记 $S_n=1+3a+5a^2+\cdots+(2n-1)a^{n-1}$，
我们将 S_n 作如下之排列

$$\begin{aligned}S_n=1+a+a^2+a^3+&\cdots\cdots\cdots\cdots+a^{n-1}\\+a+a^2+a^3+&\cdots\cdots\cdots\cdots+a^{n-1}\\+a+a^2+a^3+&\cdots\cdots\cdots\cdots+a^{n-1}\\+a^2+a^3+&\cdots\cdots\cdots\cdots+a^{n-1}\end{aligned}$$

$$+a^2+a^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+a^{n-1}$$

$$+a^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+a^{n-1}$$

$$+a^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+a^{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+a^{n-2}+a^{n-1}$$

$$+a^{n-2}+a^{n-1}$$

$$+a^{n-1}$$

$$+a^{n-1}$$

于是 $$S_n=\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{2a(1-a^{n-1})}{1-a}+\frac{2a^2(1-a^{n-2})}{1-a}+\cdots+\frac{2a^{n-1}(1-a)}{1-a}$$

$$=\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{2a}{1-a}(1+a+a^2+\cdots+a^{n-2})-\frac{2(n-1)a^n}{1-a}$$

$$=\frac{1-(2n-1)a^n}{1-a}+\frac{2a(1-a^{n-1})}{(1-a)^2}$$

$$=\frac{1+a-(2n+1)a^n+(2n-1)a^{n+1}}{(1-a)^2}.$$

解二 记

$$S_n=1+3a+5a^2+\cdots+(2n-1)a^{n-1} \tag{A}$$

于是 $$aS_n=a+3a^2+5a^3+\cdots+(2n-1)a^n \tag{B}$$

(A) − (B)，得

$$(1-a)S_n=1+2a+2a^2+2a^3+\cdots+2a^{n-1}-(2n-1)a^n$$

$$=1-(2n-1)a^n+2a(1+a+\cdots+a^{n-2})$$

$$=1-(2n-1)a^n+\frac{2a(1-a^{n-1})}{1-a}$$

$$=\frac{1+a-(2n+1)a^n+(2n-1)a^{n+1}}{1-a},$$

因 $a\neq1$，故

$$S_n=\frac{1+a-(2n+1)a^n+(2n-1)a^{n+1}}{(1-a)^2}.$$

例 18 求 $S_n=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$.

分析 这个数列各项的分母是自然数列前n项的和，所以先应用等差数列前n项的和的公式把各项分母求出来，从而把原数列变形成一个新的数列再求和.

解 $S_n=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

$$=\frac{2}{1\times2}+\frac{1}{\frac{2\times3}{2}}+\frac{1}{\frac{3\times4}{2}}+\frac{1}{\frac{4\times5}{2}}+\cdots+\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=\frac{2}{1\times2}+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}$$

$$=2\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}.$$

例 19 求级数 $5+55+555+\cdots$前n项的和.

分析 所有形如 5，55，555，…或 7，77，777…的数列都与数列 9，99，999，…有关，而后者可以化为 $10-1$，

$100-1$，$1000-1,\cdots$，由此就可以求出原数列的和.

解 $5+55+555+\cdots$

$$=\frac{5}{9}(9+99+999+\cdots)$$

$$=\frac{5}{9}[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+\cdots]$$

$$=\frac{5}{9}[10+100+1000+10000+\cdots+10^n-n]$$

$$=\frac{5}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{10-1}-n\right)=\frac{5(10^{n+1}-10-9n)}{81}.$$

§2. 极　　限

本节内容主要包括极限的有关概念及其基本性质.

1. 极限概念

① 自变量趋于无穷时函数的极限：

符号

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A \quad 或 \quad a_n\to A \ (n\to\infty)$$

表示当自变量 n（n 为正整数）无限地增大时，a_n 趋近于某一个常数 A，并称该常数 A 为数列$\{a_n\}$（即整标函数）当 n 趋于无穷大时的极限.

符号

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \ (x\to\infty)$$

表示当自变量 x 的绝对值无限地增大时，函数值 $f(x)$ 趋近于某一个常数 A，并称该常数为函数 $f(x)$ 当 x 趋于无穷时的极限.

② 自变量趋于有限数时函数的极限：

符号

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (x \to x_0)$$

表示当自变量 x 无限地趋于 x_0 时，函数值 $f(x)$ 趋于某一个常数 A，并称该常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限.

③ 无穷小与无穷大：

无穷小是绝对值无限变小的变量(或是以 0 为极限的变量)；无穷大是绝对值无限增大的变量.

无穷小与无穷大之间有如下的简单联系：如果 $X(\neq 0)$ 是一个无穷小，则 $\frac{1}{X}$ 便是一个无穷大；如果 X 是一个无穷大，则 $\frac{1}{X}$ 便是一个无穷小.

2. 极限的一些基本性质

① 极限的唯一性：

若某一变量有极限，则极限是唯一的. 常量的极限就等于这个常量.

② 极限的四则运算：

若极限 $\lim x$ 与极限 $\lim y$ 都存在，则有

$$\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y,$$

$$\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y,$$

$$\lim \frac{y}{x} = \lim y / \lim x \quad (\lim x \neq 0).$$

③ 关于极限的不等式

若 $x \leqslant y$，并且极限 $\lim x$ 与 $\lim y$ 都存在，则 $\lim x \leqslant \lim y$.

若 $x \leqslant z \leqslant y$，而 $\lim x = \lim y = A$，则极限 $\lim z$ 存在，且 $\lim z = A$.

例 20 计算 $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

分析 当$x\to4$时，$\sqrt{1+2x}-3$与$\sqrt{x}-2$都趋近于0，所求极限是$\frac{0}{0}$型．对这种形式的极限，不能使用极限的四则运算法则，这是因为极限四则运算法则的使用是有条件的，这个条件是：在求商的极限时，不仅要分子、分母的极限都存在，而且还要求分母的极限不为0．不注意这个条件，往往会在极限的计算中出现如下错误．

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\frac{\lim\limits_{x\to4}(\sqrt{1+2x}-3)}{\lim\limits_{x\to4}(\sqrt{x}-2)}=\frac{0}{0}=1$$

而实际上该极限值并不等于1．

计算这种$\frac{0}{0}$型的极限，以及类似地还有$\frac{\infty}{\infty}$型，$0\cdot\infty$型、$\infty-\infty$型等极限的计算，都不能直接使用四则运算法则．而是要不断利用变量替换或恒等变形，将所给算式的极限转化为可直接使用四则运算法则进行演算的另一算式的极限．

解一 令$m=\sqrt{x}-2$，则$x=(m+2)^2$；并且当$x\to4$时，$m\to0$．于是有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}&=\lim_{m\to0}\frac{\sqrt{1+2(m+2)^2}-3}{m}\\&=\lim_{m\to0}\frac{\sqrt{2m^2+8m+9}-3}{m}\\&=\lim_{m\to0}\frac{2m^2+8m}{m(\sqrt{2m^2+8m+9}+3)}\\&=\lim_{m\to0}\frac{2m+8}{\sqrt{2m^2+8m+9}+3}\\&=\frac{\lim\limits_{m\to0}(2m+8)}{\lim\limits_{m\to0}(\sqrt{2m^2+8m+9}+3)}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

解二 由解法一知，求无理式极限时，有理化常为有效手段．下面我们直接用此法求极限．

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{4}{3}.$$

例 21 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+2\cos x}$.

分析 由 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，$-1\leqslant\cos x\leqslant 1$，得知

$$x-1\leqslant x-\sin x\leqslant x+1$$

$$x+2\geqslant x+2\cos x\geqslant x-2.$$

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x-2}=1$，于是根据极限与不等式的关系，立即可得所求极限之值．

解一 由 $\dfrac{x-1}{x+2}\leqslant\dfrac{x-\sin x}{x+2\cos x}\leqslant\dfrac{x+1}{x-2}$，得．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+2}\leqslant\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+2\cos x}\leqslant\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-2}.$$

而
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{1-0}{1+0}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\frac{1+0}{1-0}=1,$$

故 $$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+2\cos x}=1.$$

解二 由于分子和分母当 $x\to\infty$ 时都没有极限，所以不能直接使用商的极限运算法则. 但考虑到 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$，我们先用 x 去除分子和分母，于是便可使用商的极限运算法则进行演算：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+2\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{2\cos x}{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{\sin x}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+2\dfrac{\cos x}{x}\right)}=\frac{1-0}{1+0}=1.$$

例 22 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

分析 因为 $n>1$ 时，显然有 $\sqrt[n]{n}>1$. 如果令

$$\sqrt[n]{n}=1+h_n\quad(h_n>0)$$

于是所求极限就转化为极限 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n$ 的计算. 已知 $h_n>0$，倘能找到新的变量 A_n，使 $h_n\leqslant A_n$，且当 $n\to\infty$ 时，$A_n\to 0$；这样便可根据极限与不等式的关系，立即得到 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$，从而得到所求的极限值为 1.

解 令 $\sqrt[n]{n}=1+h_n$ $(h_n>0)$，由二项式定理

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots+h_n^n$$

$$>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2.$$

因$n>2$时有$n-1>\frac{n}{2}$，于是有

$$n>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2>\frac{n^2}{4}h_n^2,$$

从而 $$0<h_n<\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

根据极限与不等式的关系，得$\lim\limits_{n\to\infty}h_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$.

于是得证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}(1+h_n)=1+\lim_{n\to\infty}h_n=1.$$

注 在计算变量的极限时，常使用极限与不等式的关系．例如极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\quad(x\text{ 以弧度为单位})$$

就是利用极限与不等式的关系得到的．这是一个很重要的极限，利用它可以帮助我们计算含有三角函数算式的极限．比如

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{\sin5x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin4x}{4x}\cdot\frac{5x}{\sin5x}\cdot\frac{4x}{5x}\right)=\frac{4}{5}.$$

例 23 如果$b>0$，求数列

$$a_1=\sqrt{b},\ a_2=\sqrt{b+\sqrt{b}},\ a_3=\sqrt{b+\sqrt{b+\sqrt{b}}},$$
$$\cdots,\ a_n=\sqrt{b+\sqrt{b+\cdots\sqrt{b}}},\ \cdots$$

当$n\to\infty$时的极限．

分析 因$a_{n+1}=\sqrt{b+a_n}$，显然$a_{n+1}>a_n$，即数列$\{a_n\}$是

单调递增数列；另方面，当 $n=1$ 时，有 $a_1=\sqrt{b}<\sqrt{b}+1$，用数学归纳法可以证明 $a_n<\sqrt{b}+1$ 恒成立．事实上，若假定某一个 $a_n<\sqrt{b}+1$，则对其后一个值也得到 $a_{n+1}=\sqrt{b+a_n}<\sqrt{b+\sqrt{b}+1}<\sqrt{b+2\sqrt{b}+1}=\sqrt{b}+1$．

上述表明，所给数列 $\{a_n\}$ 是一个单调递增而且有界的数列．然而，单调递增(或递减)且有界的数列是一定有极限的．我们用 C 表示所给数列 $\{a_n\}$ 的极限，为了求出 C，考虑到 a_{n+1} 与 a_n 取值于同一数列(除第一项外)，因而它们必有同一极限 C，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$，于是便得具体解法如下．

解　设该数列的极限为 C，由 $a_{n+1}=\sqrt{b+a_n}$ 有

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{b+a_n},$$

于是得　$C=\sqrt{b+c}$，$C^2=b+C$

这样，便得到所求的极限值 C 适合的二次方程，该方程有异号的两个根

$$C=\frac{1\pm\sqrt{1+4b}}{2}.$$

但本例所给数列的极限值不可能是负数，因此所求的极限值必等于其正根，即

$$C=\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}.$$

从而得到

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}.$$

注　从本例的求解过程中看出，利用"单调且有界的变量一定有极限"这个极限存在准则（参看有关的高等数学）求极限的一般程序是：先证明极限的存在，然后根据已知条件

得到极限值应满足的方程，再解方程即得所要求的极限值.

例 24 求无穷等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots \quad (|r| < 1)$$

的和 S.

分析 所谓某无穷级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 的和，是指该级数前 n 项部分和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

当 $n\to\infty$ 时的极限值(假定此极限值存在)，即

$$S = \lim_{n\to\infty} S_m.$$

因此，按照无穷级数的“和”的概念，为了寻求本例所给无穷等比级数的和，首先就要写出其前 n 项的部分和 S_n，然后再求 S_n 的极限，便得到所要求的和 S.

解 所给无穷等比级数的前 n 项部分和为

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r} \quad (r \neq 1).$$

当 $|r| < 1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$，于是有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r};$$

当 $|r| > 1$ 或 $r = -1$ 时，由于极限 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ 不存在，因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 也不存在；

当 $r = 1$ 时，此时

$$S_n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{ 个}} = na,$$

显然，当 $n\to\infty$ 时，S_n 的极限也不存在，

综合上述，便得知本例的无穷等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ 的公比 r 的绝对值小于 1 的情况下，它的和为

$$S=\frac{a}{1-r}.$$

而在其他的情况下便无和可言.

注 在中学数学里，一般都将公比 r 的绝对值小于 1 的无穷等比数列

$$a,\ ar,\ ar^2,\ \cdots,\ ar^{n-1},\ \cdots$$

叫做无穷递缩等比数列.

如何求这种数列的全部项的和呢？由于项数无穷，故不能用通常的加法运算来求．为了达到不确定的、无限的东西，必须从确定的、有限的东西出发．在这里，我们可以通过先求前 n 项的和，再用取极限的办法求得．因此，可以这样来定义：

当 n 无限增大时，无穷递缩等比数列前 n 项和 S_n 的极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-r}$$

叫做该无穷递缩等比数列各项的和，并记作

$$S=\frac{a}{1-r}\quad(|r|<1).$$

这种思想方法在解决实际问题中有着广泛的应用，如物理上的瞬时速度，几何上的曲线长度以及曲线形的面积等等.

例 25 将下列循环小数化为分数：

① $0.\dot{7}$；　② $0.2\dot{2}\dot{3}$.

分析 因为无限循环小数（包括纯循环和混循环）都可以写成某些有限个项加上无穷递缩等比数列各项和的形式，所以这一问题可以利用无穷递缩等比数列各项的和的公式给以解决.

解 ① $0.\dot{7}=0.777\cdots$

$$=\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{7}{9},$$

② $0.2\dot{2}\dot{3}=0.2232323\cdots$

$$=\frac{2}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\frac{23}{10000000}+\cdots$$

$$=\frac{2}{10}+\left[\frac{23}{1000}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{100}+\frac{23}{1000}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^2+\cdots\right]$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{\frac{23}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{2}{10}+\frac{23}{990}$$

$$=\frac{2(100-1)+23}{990}$$

$$=\frac{223-2}{990}=\frac{221}{990}.$$

注 根据解答过程，可以归纳出化循环小数为分数的如下法则：

纯循环小数化成分数，分子是一个循环节的数字所组成的数；分母的各位数字都是9，9的个数与一个循环节的位数相等．

混循环小数化成分数，分子是小数点后面第二个循环前面的数字所组成的数减去不循环部分的数字所组成的数；分母的头n位数字是9，末n位数字是0，9的个数与一个循环节的位数相等，0的个数与不循环部分的位数相等．

以上就是小学算术里所总结出化循环小数为分数的法则，但其理论根据则是无穷递缩等比数列各项的和的公式．

例 26　在相交的两直线$0a$及$0b$，自$0a$线上一点B作直线$0b$的垂线BC，又自C点作直线$0a$的垂线CD，再自D点作直线$0b$的垂线DE（如图所示），如此继续作无数根垂线．今设$\overline{BC}=7$，$\overline{CD}=6$，试求所作的无数根垂线长的总和．

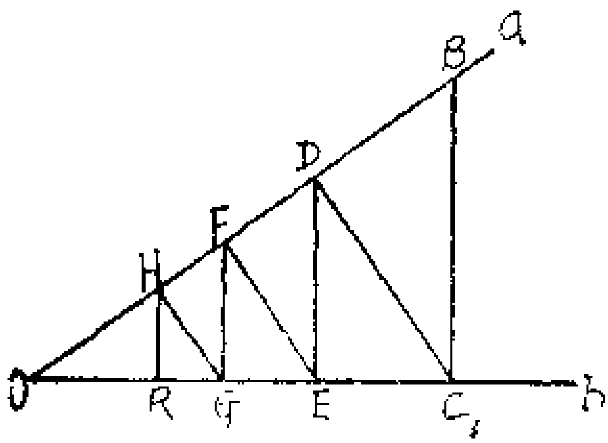


图 7—1

分析　依次记每条垂线的长为l_1，l_2，…l_n，…，用L表示它们的总和．把各垂线长用加号连接起来，便得一个无穷级数

$$\sum_{n=1} l_n = l_1 + l_2 + \cdots + l_n + \cdots$$

现在的问题就是要求出该级数的和L，为此，首先由$l_1=\overline{BC}=7$，$l_2=\overline{CD}=6$推算出l_n（$n=3$，$4\cdots$）的通值公式，然后求

无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} l_n$的和，即得所有垂线长之总和 L.

解 由$\triangle CDB \backsim \triangle DEC$，得

$$\frac{CD}{DE}=\frac{BC}{CD},\ \frac{6}{DE}=\frac{7}{6},$$

$$l_3=\overline{DE}=\frac{6^2}{7}.$$

又由$\triangle EFD \backsim \triangle DEC$，得$\frac{EF}{DE}=\frac{DE}{CD}$，从而有

$$l_4=\overline{EF}=\frac{\left(\frac{6^2}{7}\right)^2}{6}=\frac{6^3}{7^2}.$$

依同样的作法，可归纳得出自垂线 DE 数起，往后的第 n 根垂线长 l_{n+2} 的值为

$$l_{n+2}=6^{n+1}/7^n.$$

于是所求的总和为

$$L=7+6+\frac{6^2}{7}+\frac{6^3}{7^2}+\cdots+\frac{6^{n+1}}{7^n}+\cdots.$$

上面的无穷数列从第三项起，是一个以 $r=\frac{6}{7}$（<1）为公比的无穷递缩等比级数，依等比级数求和公式便得：

所有垂线长之总和 $L=13+\dfrac{1}{1-\frac{6}{7}}\times\dfrac{6^2}{7}=49$.

例 27 求证$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$.

分析 按照无穷级数的和的概念，在本例里，就是要证明该级数的前 n 项部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$$

当 $n\to\infty$ 时的极限值为$\frac{1}{2}$，在此，我们先用"裂项相消法"计算出和式 S_n，然后导求其极限值.

解　将其通项经恒等变形分裂成两项：

$$\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right).$$

于是有

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\\&\quad+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).\end{aligned}$$

$n\to\infty$ 时取极限，得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$ 证毕.

注　计算某些数列的前 n 项部分和时，"裂项相消法"是我们常使用的一种方法．这个方法的基本思想是：利用恒等变形，先把每一项分裂成几项，然后通过加或减，消去一些项，从而获得前 n 项部分和 S_n 的简便算式.

例 28　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}\ (a>0)$.

分析　求极限时，有时形式的变换不能达到预想的目的．在这种情况下，就需要从算式本身的性质加以考察．当 $x\to\infty$ 时，$a^x\ (a>0)$ 的极限是什么？这就要分 $0<a<1$，$a=1$，$a>1$ 三种不同的情况分别观察．于是本例所给算式的极限，

在不同的情况下就会有不同的变化趋势.

解 如果 $0<a<1$，因 $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=0$，于是有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1;$$

如果 $a=1$，这时 $a^x\xrightarrow[x\to\infty]{}1$，$a^{-x}\xrightarrow[x\to\infty]{}1$，因而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=0;$$

如果 $a>1$，这时 $a^x\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$，而 $a^{-x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$，

于是有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-a^{-2x}}{1+a^{-2x}}=\frac{1-0}{1-0}=1.$$

例 29 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{10}+(n+2)^{10}+(n+3)^{10}}{n^{10}+10^{10}}$.

分析 所求极限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，不能直接使用商的极限运算法则. 但当用 n^{10} 遍除所给算式的分子与分母之后，就可以把所求极限变为能直接使用商的极限运算法则进行演算的另一算式的极限.

解
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{10}+(n+2)^{10}+(n+3)^{10}}{n^{10}+10^{10}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}+\left(1+\frac{2}{n}\right)^{10}+\left(1+\frac{3}{n}\right)^{10}}{1+\left(\frac{10}{n}\right)^{10}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}+\left(1+\frac{2}{n}\right)^{10}+\left(1+\frac{3}{n}\right)^{10}\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{10}{n}\right)^{10}\right]}=\frac{3}{1}=3.$$

例 30 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\Big[\sin(n!)\cdot\left(\frac{n+1}{n^2-1}\right)^{10}-\Big(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}$

$$+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\Big)\cdot\frac{2n^2+1}{n^2-1}\Big].$$

分析 能否直接使用极限运算法则计算出这个极限呢？这就需要检验每项的极限是否存在．我们知道，$\sin(n!)$是一个有界变量，而公式$\frac{n+1}{n^2-1}$经用$n+1$约简之后，显然其极限为0（$n\to\infty$时），因而$\left(\frac{n+1}{n^2-1}\right)^{10}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$．由于有界变量与无穷小量之积仍为无穷小量，所以算式中的第一项的极限存在，而且极限值为0，使用裂项相消法可以求出变量$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}$的极限；至于分式$\frac{2n^2+1}{n^2-1}$的分子和分母都含有趋于无穷变数$n$的平方项，当用$n^2$去除分子和分母后，可容易算出其极限，因此所给算式的第二项的极限也存在．于是，可使用四则运算法则，直接演算之．

解
$$\lim_{n\to\infty}\Big[\sin(n!)\cdot\left(\frac{n+1}{n^2-1}\right)^{10}-\Big(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\Big)\cdot\frac{2n^2+1}{n^2-1}\Big]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sin(n!)\left(\frac{n+1}{n^2-1}\right)^{10}-\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{1\cdot2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\Big)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2-1}$$
$$=0-\lim_{n\to\infty}\Big[\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Big)+\cdots\Big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\Big)\Big]\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = -1\cdot 2 = -2.$$

例 31 计算无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^{n-1}}) = (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\cdots$$

当 $|x|<1$ 时的值 P.

分析 所谓某无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}P_n = p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdots p_n\cdots \quad (P_n\neq 0)$$

的值 P，是指其前 n 个数组成的部分乘积

$$P_n = p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdots p_n$$

当 $n\to\infty$ 时的极限值，即

$$P=\lim_{n\to\infty}P_n.$$

因此，如要计算无穷乘积的值 P，就得首先求出部分乘积 P_n，然后求 P_n 的极限便得知要计算的 P 值.

解 本例所给无穷乘积的部分乘积为

$$P_n=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$$

$$=\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})}{1-x}$$

$$(x\neq 1)$$

分子连乘以后就容易断定为 $1-x^{2^n}$，因而

$$P_n=\frac{1-x^{2^n}}{1-x}$$

取极限，当 $|x|<1$ 时，立即得

$$P=\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^n}}{1-x}=\frac{1}{1-x}$$

所以 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^{n-1}})=\frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$.

习 题 七

1. 等差数列的第 59 项是 70，第 66 项是 80，

① 求它的第 100 项；

② 指出第几项开始出现正数；

③ 求它的所有为负数的项的和.

2. 试求：

① 在 8 和 24 中间插入 7 个数，使它们和这两个数成等差数列；

② 若在 8 和 24 中间插入 n 个数，使它们和这两个数成等差数列，且其和为 400，试问要插入多少项？

3. 已知两个等差数列：

(A)：1，4，7，10，…1000；

(B)：11，21，31，41，…1001；

① 试问(A)和(B)中含有公共数可组成什么样的数列？

② 求出(A)和(B)中含有的公共数的总和.

4. 试问：① 前 n 项的和 S_n 为 $n(4n+7)$ 的数列是一个什么样的数列？

② $S_n=4n^2+7n+2$ 又如何？

5. ① 在 5 和 80 中间插入 3 个数，使它们和这两个数成等比数列；

② 等比数列的公比是 3，末项是 486，和为 728，求它的第一项与项数；

③ 等比数列的前 4 项的和是 240，第二项与第四项的

和是180，求它的第一项与公比.

6. 试用n表示下列数列的前n项的和：

① 1，$2x$，$3x^2$，$4x^3\cdots$；

② 12，1212，121212，12121212，….

7. 前n项的和能表示成$\frac{3^n-2^n}{2^n}$的数列是一个什么样的数列？

8. 为盖一座工厂，今年初借了A万元，从今年末起，每年末偿还一定金额，10年全部还清，问每年要付多少元，其中年利率为i，按年计算复利.

9. 设等差数列的项数为11，$a_1=24$，又a_1，a_5，a_{11}组成等比数列，试写出此数列的各项.

10. 设一等差数列共有9项，首项为1，数列的和为369，另有一等比数列，也有9项，且其首项、末项与已知等差数列的首项、末项相应相等. 求此等比数列的第7项.

11. 三个数组成一等比数列，如果第二项增加8，则已知数列变成等差数列；在此基础上，将第三项增加64，则它又成为等比数列. 试决定此三数.

12. 在3与一个未知数间增添这样一个数，以使这三个数组成一等差数列，且当这数列的第二项减去6以后，则成等比数列. 试求此未知数.

13. 和为114的三个数，若既可以看作是某等比数列连续的三项，又可以看作是某等差数列的首项、第四项及第二十五项，求此三数.

14. 设等比数列的前n项、前$2n$项、前$3n$项的和分别是S_n，S_{2n}，S_{3n}，求证

$$S_n^2+S_{2n}^2=S_n(S_{2n}+S_{3n}).$$

15. 设方程 $p^2x^2+q^2x+r^2=0$ 的两根分别为方程 $px^2+qx+r=0$ 的两根之平方，则 p，q，r 成等比数列。

16. 设 a_m，a_n，a_k，a_l 是等差数列.

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

的四项，若 $m+n=k+l$，试证：$a_m+a_n=a_k+a_l$。

17. 如果 $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$，求等差数列 a_1，$a_2,\cdots$，a_n 的前 20 项之和 S_{20}。

18. 设三数 a_1，a_2，a_3 成等差数列，且 $a_1+a_2+a_3=9$，$a_1a_2a_3=15$，求此等差数列.

19. 等差数列有十项，偶位项的和等于 15，奇位项的和等于 12.5，求此数列各项.

20. 设 a，b，c 成等比数列，而 x 与 y 分别是 a，b 与 b，c 的等差中项，求证 $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$。

21. 如 $a+b+c$，$b+c-a$，$c+a-b$，$a+b-c$ 为等比数列，且公比为 q，求证 $q^3+q^2+q=1$ 及 $q=\frac{a}{c}$.

22. 已知 a_1，a_2，$\cdots$，$a_n,\cdots$为等差数列，令 $S_1=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$S_2=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}$，$S_3=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}$，$\cdots$；求证：$S_1$，$S_2$，$S_3\cdots$也是等差数列.

23. 若 a，b，c，d 为一等差数列的连续四项，试证 $a^2-3b^2+3c^2-d^2=0$。

24. 设 a_m，a_n，a_k，a_l 是等比数列 a_1，a_2，$\cdots a_n$，$\cdots$的四项，已知 $m+n=k+l$，求证：

$$a_m\cdot a_n=a_k\cdot a_l.$$

25. 设 x，y，z 组成等比数列，求证：

$$(x+y+z)(x-y+z)=x^2+y^2+z^2.$$

26. 已知正数 a_1, a_2, …, a_n 成等差数列，求证：

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$
$$=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

27. 如果 $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ 的两根相等，试证 a, b, c 成等差数列.

28. 试确定 λ 的值，使方程

$$x^4-(3\lambda+4)x^2+(\lambda+1)^2=0$$

的四个根成等差数列.

29. 设 $(1+x)^n$ 的展开式的第五、第六、第七三项的系数成等差数列，试求 n 的值.

30. 求介于 m 和 n 之间 $(m<n)$ 的所有分母为 3 的不可约分数之和.

31. 如果等差数列的 $a_{m+n}=A$, $a_{m-n}=B$ 两项为已知，求 a_m 和 a_n.

32. 如果等差数列有关系 $S_m=S_n$，求证：$S_{m+n}=0$.（其中 S_k 表数列的前 k 项之和）

33. 三正数 a, b, c 成等比数列，并且 $a+b+c=62$, $\lg a+\lg b+\lg c=3$，求这三个数.

34. 在等差数列中，已知 $\dfrac{S_m}{S_n}=\dfrac{m^2}{n^2}$，求证：

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}.$$

35. 若 a, b, c 三数，既构成等差数列又构成等比数列，求证 $a=b=c$.

36. 设 a_1, a_2, …, a_n 为等比数列，并设

$$S=a_1+a_2+\cdots+a_n,\quad K=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n},\quad P=a_1\cdot a_2\cdots a_n$$

求证

① $\dfrac{S}{K}=a_1a_n$，　② $P^2K^n=S^n$.

37. 求下列数列的通项与前 n 项的和：

① 1×3, 2×5, 3×7, 4×9, …;

② 1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, …;

③ $1\times2\times3$, $2\times3\times4$, $3\times4\times5$, $4\times5\times6$, ……;

④ 1×2^3, 2×3^2, 3×4^2, 4×5^2, …;

⑤ 4, 25, 64, 121, ….

38. 求下列数列的通项与前 n 项的和：

① 2, 4, 8, 14, 22, 32, …;

② 5, 6, 8, 12, 20, 36, ….

39. 求和：

① $\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{2\times4}+\dfrac{1}{3\times5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}$;

② $\dfrac{1}{2\times5}+\dfrac{1}{5\times8}+\dfrac{1}{8\times11}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$;

③ $\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{1}{2\times3\times4}+\dfrac{1}{3\times4\times5}$

$$+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

40. 求和

① $1\times n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+(n-1)2+n\times1$;

② $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2$.

41. 若$(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$，求$a_1$，$a_2$.

42. 若下列n^2个自然数之和为14400，求n：

$1，2，3，\cdots，n$，

$2，4，6，\cdots，2n$，

$3，6，9，\cdots，3n$，

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$n，2n，3n，\cdots n^2$.

43. 求数列7，77，777，7777，…的和.

44. 将自然数依下述方法分组：第一组一个数，即1；第二组二个数，即2，3；第三组三个数，即4，5，6；…求证：第n组的几个数之和为$\frac{1}{2}(n^3+n)$.

45. 将奇数数列1，3，5，7，…分组如下：第一组一个数，即1；第二组二个数，即3，5；第三组三个数，即7，9，11；…，证明：每组内各数之和等于该组序号之立方(例如：$7+9+11=3^3$).

46. 试证数列49，4489，444889，… 的每项都是完全平方数.

47. 证明数列$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{8}$，…，$\frac{n}{2^n}$…的前n项之和小于2.

48. 求$S=1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+n)$.

49. 求证：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

50. 求下列各题的极限：

① $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+(-1)^n n}{2n^2-n}$；　② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$；

③ $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})$；　④ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$；

⑤ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+q+\cdots+q^n}{1+p+\cdots+p^n}$ $(|p|<1,\ |q|<1)$；

⑥ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$；

⑦ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)\cdot n\cdot\sin\frac{1}{n}\right]$；

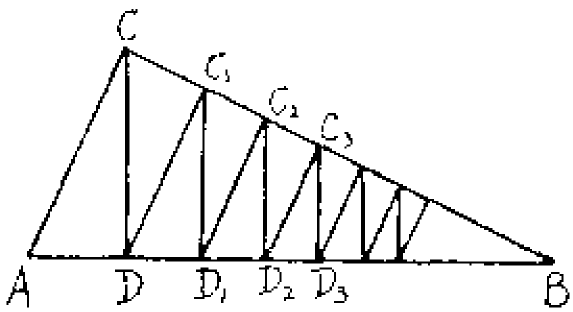
⑧ $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$

⑨ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)$；

⑩ 若数列$\{a_n\}$取值

$$a_1=0.9,\ a_2=0.99,\cdots,a_n=0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}},\cdots,\lim_{n\to\infty}a_n=?$$

51. 在直角三角形ABC内，已知直角边$CA=b$，$\angle BAC=\alpha$，由直角顶点C作斜边AB的垂线CD从D点作$DC_1\perp BC$，又从C_1作$C_1D_1\perp AB$，等等，求这些垂线的和$CD+DC_1+C_1D_1+D_1C_2+\cdots$.



题图 7—51

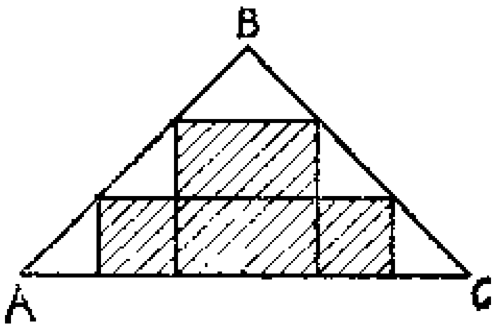
52. 已知边长为a的正三角形，以其高为边作新的正三角形，如此n次，试求当$n\to\infty$时，所有正三角形面积的总和.

53. 在半径为R的圆内作内接正方形，在这正方形内作

内切圆，又在这圆内作内接正方形，如此 n 次，试求当 $n\to\infty$ 时，所有之面积总和的极限与所有正方形面积总和的极限.

54. 在等腰直角三角形 ABC 中，将底分成 $2n$ 等分，作内接台阶形，试证当 $n\to\infty$ 时，三角形面积与台阶形面积之差的极限是零.

55. 证明：



题图 7—54

① $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$；

② $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A^n+B^n}=A$

$(A>B>0)$；

③ $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$；

④ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{4}$；

⑤ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arc\ \mathrm{tg}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)=\dfrac{\pi}{4}$；

⑥ 从给定二正数 a 及 $b(a>b)$ 出发，作出等差中项及等比中项组成的数列：

$$a_1=\frac{a+b}{2},\qquad b_1=\sqrt{ab}$$

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\qquad b_2=\sqrt{a_1b_1}$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\qquad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$

求证：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

56. 回答下列问题：

① 若$\lim X$存在，$\lim Y$不存在，问$\lim(X+Y)$是否存在？

② 若$\lim X$不存在，$\lim Y$也不存在，问$\lim(X+Y)$是否不存在？

③ 若$\{a_n\}$是任意的数列，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$，问是否有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n=0$？

57. 求$\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\cdots}}}}$的值。

58. 求$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$的值。

59. 求下列变量的极限：

① $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$；

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$；

③ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\cdots+(x+50)^{10}}{x^{10}+5^{10}}$；

④ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$；（$m$，$n$ 为自然数）

⑤ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$；

⑥ $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$（$m$，$n$ 为整数）；

⑦ $\lim\limits_{x\to a}\left(\sin\dfrac{t-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi t}{2a}\right)$；

⑧ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$；

⑨ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg} x)$；

⑩ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{1+a^x}\ (a>0)$；

⑪ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})}{(1-x)^3}$；

⑫ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

第八章　排列组合与二项式定理

§1. 排列组合与二项式定理

本节内容包括：无重复的排列组合、二项式定理以及有关的恒等式.

1. 无重复的排列与组合

排列和组合是研究从有限集(合)中取出部分或全部元(素)，按照一定的要求，有多少种取法的问题. 若取法与顺序有关则属于排列问题；若取法与顺序无关则属于组合问题.

排列、组合数的主要公式有：

1) 排列数公式：$A_m^n = m(m-1)\cdots(m-n+1)$；

2) 组合数公式：$C_m^n = A_m^n / A_n^n = \dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}$；

3) 组合数的性质：

① $C_m^n = C_m^{m-n}$.

② $C_{m+1}^n = C_m^n + C_m^{n-1}$.

③ 在 $m+1$ 个组合数 C_m^0、C_m^1、C_m^2、…、C_m^m 中，当 m 为偶数时，则 $m+1$ 为奇数，以中间一个组合数为最大；当 m 为奇数时，则 $m+1$ 为偶数，以中间两个相等的组合数 $C_m^{\frac{m-1}{2}}$ 与 $C_m^{\frac{m+1}{2}}$ 为最大.

解排列组合应用题时，注意被考虑到的排列和组合既不

要重复也不要遗漏．特别要有意识地使用下面两个原理：

加法原理——完成某事件，既可用甲法，亦可用乙法，如果甲法有 m 种，乙法有 n 种，那么完成这一事件共有 $m+n$ 种方法；

乘法原理——完成某事件必须分两步，如果第一步有 m 种方法完成，第二步有 n 种方法完成，那么完成这一事件的方法共有 mn 种．

显然，上述两个原理都可以进一步推广．

2．二项式定理

二项式定理的应用很广泛，它通过公式的形式，表示出二项式的幂展开式在项数、系数、各项中的指数等方面的内在联系．二项式定理就是公式：

$$(x+a)^n=x^n+c_n^1ax^{n-1}+C_n^2a^2x^{n-2}+\cdots+c_n^ka^kx^{n-k}+\cdots+c_n^{n-1}a^{n-1}x+a^n.$$

右边称为二项展开式，是关于 x 的 n 次多项式，主要性质有下面四个方面．

1）指数：x 的指数在第一项是 n，在以后各项依次减 1 至零；a 的指数在第一项是 0，以后依次加 1 至 n；每项中 x 与 a 的指数和均为 n．

2）项数：共 $n+1$ 项．

3）系数：① 第 $k+1$ 项的系数是 c_n^k；② 与首末两项等距离的项的系数相等；③ 系数最大的项必在中间，若 n 为偶数，则有一个系数最大项，若 n 为奇数，则有两个系数最大项；④ 相邻两项的系数，后者等于前者乘以前一项里 x 的指数，除以前一项的项数；⑤ $(x-a)^n$ 的系数正负相间．

4）通项：展开式的通项一般是指第 $k+1$ 项

$$T_{k+1}=c_n^k a^k x^{n-k}\quad(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n).$$

易知，通项集中反映了展开式的一切性质，由此可见它的重要性.

在证有关排列组合数的恒等式时，经常采用下面几种方法：根据排列组合数的公式证；根据排列组合的定义证；根据组合的两个性质证；根据二项式定理证；根据数学归纳法证.

例 1 从 m 个各不相同的元里每次取出 n 个 $(1\leqslant n\leqslant m)$ 各不相同的元的排列种数用符号 A_m^n 表示，试用数学归纳法证明：$A_m^n=m(m-1)\cdots(m-n+1)$.

证 当 $n=1$ 时，显然有 $A_m^1=m$，命题为真.

设当 $n=k$ 时命题为真，即

$$A_m^k=m(m-1)\cdots(m-k+1).$$

那么当 $n=k+1$ 时，可以这样得到从 m 个元中取 $k+1$ 个元的排列：对于取 k 个元的每一排列可在后面连上余下的 $m-k$ 个元中的任一个，从而构成 $m-k$ 个 $k+1$ 个元的排列. 这样，既不重复又不遗漏地得到从 m 个元中取 $k+1$ 元的全部排列.

事实上，我们假设在其中有两个相同的排列 A_1 和 A_2，除去最后的元，则得到从 m 个元中取 k 个元的两个相同的排列 A_1' 和 A_2'. 这与我们是由从 m 个元中取 k 个不同元的排列后面连上余下的元素的构成法相矛盾. 故没有重复.

我们再假设 A 是由 m 个元素取 $k+1$ 个所组成的任一排列，它的最后一元为 a，除去 a，前面是一个不含 a 的 k 元排列，记为 A'，而 A' 是我们取过了的，在后面连的 $m-k$ 个元中必有 a，故 A 没有被遗漏. 于是

$$A_m^{k+1}=A_m^k(m-k)=m(m-1)\cdots(m-k+1)(m-k)$$
$$=m(m-1)\cdots(m-\overline{k+1}+1)$$
原命题亦真.

总之，对一切满足 $1\leqslant n\leqslant m$ 的自然数 m、n，皆有原命题成立.

注 当 $m=n$ 时，得从 m 个不同的元里取 m 个不同的元的全排列数

$$P_m=A_m^m=m(m-1)\cdots3\cdot2\cdot1=m!$$

其中，$m!$ 读成"m 的阶乘".

例 2 某校共有数学教师 13 人，其中高中教师 5 人，初中教师 8 人．现要选 3 名教师辅导数学竞赛小组，在选出的 3 个人中至少有一是高中教师，问共有多少种选法？

分析 这是一个带附加条件的排列组合的应用题．可按两种思路解答：直接找合乎条件者，或从总数中减去不合条件的种数.

解一 组成指导小组是一事件，可用三种独立的方法完成：在高中教师中选一个，初中教师中选两个；在高中教师中选两个，初中教师中选一个；在高中教师中选三个，初中教师中不选．构成辅导小组的方法数是每种构成法的种数的总和．再考察对于三种构成辅导小组的方式，每一种有几个方法完成．以第一种为例，在高中教师中选一个，有 C_5^1 种选法，对于每一种选法，需要两个初中老师才能构成辅导小组，而初中教师中选 2 个出来共有 C_8^2 种选法，因此第一种构成法的种数为 $C_5^1C_8^2$，故共有

$$C_5^1C_8^2+C_5^2C_8^1+C_5^3C_8^0=230\text{（种选法）}.$$

解二 从 13 个教师中挑 3 人共有 C_{13}^3 种选法；其中不

合条件者是三个都是初中教师，这种情况共有 C_8^3 种选法，故合乎要求的选法是 $C_{13}^3-C_8^3=230$.

注 ① 解排列组合应用题不宜直接验算(因为抽象且数据大)，一般可用两个(或两个以上)不同的观点去解答，若结果一致，则证明解答是正确的.

② 在解一中，运用了前述的两个重要原理(加法原理和乘法原理)，读者可结合本例深刻领会，灵活运用.

例 3 5个不同的元素 a、b、c、d、e，每次全取作排列，如果 a 不能排在首位，e 不能排在末位，共有几种排列法?

解一 不计附加条件，五个元素的全排列数共有 P_5 种，a 排在首位的有 P_4 种，e 排在末位的也有 P_4 种，但这两个 P_4 种有 P_3 个重复.

a 在首位时有下面几种情况：

a	e			

a		e		

a			e	

a				e

e 在末位时也有类似的几种情况：

			a	e

		a		e

	a			e

a				e

显然，上述两类的第四种情况重复了，重复的排列数为 P_3. 故本题的解答为：

$$P_5-2P_4+P_3=78.$$

解二 不合条件的有三种情况：① a 在首，e 在末，有

P_3 种选法；② a 在首，e 不在末，有 P_4-P_3 种选法，③ a 不在首，e 在末，有 P_4-P_3 种排法．故解答应为：

$$P_5-2(P_4-P_3)-P_3=P_5-2P_4+P_3=78.$$

注 在解较复杂的排列组合应用题时一定要细心，考虑周到，最好象解二一样用科学分类法，不要产生遗漏（如本例 P_3），也不要产生重复（参见下面的例 4），并且遗漏与重复有的是个别情况，有的是部分情况，有的是成倍的情况，限于篇幅，恕不一一举例．

例 4 六个人分成三组下象棋，有多少种分法？

解 易知，如果六个人分成编号不同的第一、二、三组下象棋，则这一组合问题的分法共有 $C_6^2C_4^2C_2^2$ 种．但本题的分配是等额的且各组之间无顺序区别，而一种分法 $ab-cd-ef$ 在有顺序时又对应着 $P_3=6$ 种分法：$ab-cd-ef$、$ab-ef-cd$、$cd-ab-ef$、$cd-ef-ab$、$ef-ab-cd$、$ef-cd-ab$．故本题的答案应为 $\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^2}{P_3}=15$．

例 5 用数学归纳法证明：$(x+a)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}c_n^ka^kx^{n-k}$．

证明 ① 当 $n=1$ 时，左边 $=(x+a)^1=x+a$，右边 $=c_1^0a^0x^{1-0}+c_1^1a^1x^{1-1}=x+a$，等式成立．

② 假设 $n=m(1\leqslant m\leqslant n)$ 时，等式成立，即

$$(x+a)^m=\sum_{k=0}^{m}c_m^ka^kx^{m-k}.$$

那么当 $n=m+1$ 时，

$$(x+a)^{m+1}=(x+a)^m(x+a)=\left(\sum_{k=0}^{m}c_m^ka^kx^{m-k}\right)(x+a)$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} (c_m^{k-1} a^k x^{m-k+1} + c_m^k a^k x^{m-k+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} (c_m^{k-1} + c_m^k) a^k x^{\overline{m+1}-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} c_{m+1}^k a^k x^{\overline{m+1}-k}.$$

这说明当 $n=m+1$ 时，等式成立．故对一切自然数 n 等式成立．

注 本例证明的公式是著名的二项式定理．右边叫做二项展开式．这里使用了记号"Σ"，它表示分别令 $k=0,1,2,\cdots,n$，求总和．具体说，就是：

$$\sum_{k=0}^{n} c_n^k a^k x^{n-k} = x^n + c_n^1 a x^{n-1} + c_n^2 a^2 x^{n-2} + \cdots + c_n^k a^k x^{n-k} + \cdots + c_n^{n-1} a^{n-1} x + a^n.$$

例 6 已知 $(x^{\lg x}+1)^n$ 展开式最后三项的系数和是方程 $3^{y^2}\cdot 9^{-10y}\cdot 81^{-11}=1$ 的正数解，而它的中项是方程 $\sqrt[3]{\frac{z}{2}}=100+\sqrt{2z}$ 的解，求 x.

解 由 $3^{y^2}\cdot 9^{-10y}\cdot 81^{-11}=1$，得 $3^{y^2-20y-44}=3^0$，故 $y^2-20y-44=0$，解之得 $y=-2$ 或 $y=22$.

依题意，$c_n^{n-2}+c_n^{n-1}+c_n^n=22$，即 $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+n+1=22$，故 $n^2-n-42=0$，解之得 $n_1=-7$(舍去)，$n_2=6$．因此二项式的指数为 $n=6$.

解无理方程 $\sqrt[3]{\frac{z}{2}}=100+\sqrt{2z}$，得二项式展式中的中项

之值为 $z=20000$，又 $(x^{\lg x}+1)^6$ 的展式的中项为第四项，即 $T_4=c_6^3(x^{\lg x})^3=20000$，亦即 $\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\cdot x^{3\lg x}=20000$，$x^{3\lg x}=1000$，解之得 $x=10$ 或 $x=0.1$.

注 这是一个以二项展开式性质为中心的代数综合题，牵涉的面很广，有指数方程、对数方程、无理方程、"组合数方程"等等.

例 7 从二项式定理

$$(x_1+x_2)^n=\sum_{r=0}^{n}c_n^r x_1^{n-r}x_2^r=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{(n-r)!\,r!}x_1^{n-r}x_2^r,$$

猜想多项式定理，即 $\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^n$ 的展开式如何？并用数学归纳法证明之.

解 当 $m=3$ 时，

$$(x_1+x_2+x_3)^n=[(x_1+x_2)+x_3]^n$$

$$=\sum_{r_2=0}^{n}\frac{n!}{(n-r_2)!\,r_2!}(x_1+x_2)^{n-r_2}x_3^{r_2}$$

$$=\sum_{r_2=0}^{n}\frac{n!}{(n-r_2)!\,r_2!}\left[\sum_{r_1=0}^{n-r_2}\frac{(n-r_2)!}{(n-r_1-r_2)!\,r_1!}x_1^{n-r_1-r_2}x_2^{r_1}\right]x_3^{r_2}$$

$$=\sum_{r_2=0}^{n}\sum_{r_1=0}^{n-r_2}\frac{n!}{(n-r_1-r_2)!\,r_1!\,r_2!}x_1^{n-r_1-r_2}x_2^{r_1}x_3^{r_2}$$

$$=\sum_{r_1+r_2=0}^{n}\frac{n!}{(n-r_1-r_2)!\,r_1!\,r_2!}x_1^{n-r_1-r_2}\cdot x_2^{r_1}\cdot x_3^{r_2}.$$

由此猜想，

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^n$$

$$=\sum_{\sum\limits_{i=1}^{m-1} r_i=0}^{n} \frac{n!}{\left(n-\sum\limits_{i=1}^{m-1} r_i\right)!\prod\limits_{i=1}^{m-1} r_i!} x_1^{n-\sum\limits_{i=1}^{m-1} r_i} x_2^{r_1} x_3^{r_2} \cdots x_m^{r_{m-1}}.$$

现用数学归纳法证明如下：

设 $m=k$ 时，命题为真，那么当 $m=k+1$ 时，

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right)^n=\left[\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)+x_{k+1}\right]^n$$

$$=\sum_{r_k=0}^{n} \frac{n!}{(n-r_k)!\,r_k!}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^{n-r_k} x_{k+1}^{r_k}$$

$$=\sum_{r_k=0}^{n} \frac{n!}{(n-r_k)!\,r_k!}\left[\sum_{\sum\limits_{i=1}^{k-1} r_i=0}^{n-r_k} \frac{(n-r_k)!}{\left(n-\sum\limits_{i=1}^{k} r_i\right)!\prod\limits_{i=1}^{k-1} r_i!}\right.$$

$$\left. x_1^{n-\sum\limits_{i=1}^{k} r_i} x_2^{r_1} x_3^{r_2} \cdots x_k^{r_{k-1}}\right] x_{k+1}^{r_k}$$

$$=\sum_{\sum\limits_{i=1}^{k} r_i=0}^{n} \frac{n!}{\left(n-\sum\limits_{i=1}^{k} r_i\right)!\prod\limits_{i=1}^{k} r_i!} x_1^{n-\sum\limits_{i=1}^{k} r_i} x_2^{r_1} x_3^{r_2} \cdots x_k^{r_{k-1}} x_{k+1}^{r_k}.$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时命题亦真．证毕．

注　① 这里使用了乘积的记号"∏"，记号"$\prod\limits_{i=1}^{k} r_i!$"表示 k 个数，$r_1!$、$r_2!$、…、$r_k!$ 相连乘．

② 本例是发展性习题，可以培养学生研究问题的能力.

例 8　证明恒等式：

① $C_m^n = C_m^{m-n}$（组合性质之 1）；

② $C_m^{n-1} + C_m^n = C_{m+1}^n$（组合性质之 2）；

③ $C_k^0 + C_{k+1}^1 + \cdots + C_{k+m-1}^{m-1} = C_{k+m}^{m-1}$；

④ $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$；

⑤ $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot \cdots \cdot n! = \dfrac{(n!)^{n-1}}{3\cdot 4^2\cdot 5^3\cdot \cdots \cdot n^{n-2}}$.

证　① 根据组合数的公式证.

$$左 = \frac{m!}{n!\,(m-n)!},$$

$$右 = \frac{m!}{(m-n)!\,(m-\overline{m+n})!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}.$$

② 根据组合的定义证.

由所给的 $m+1$ 个元中先指定一元，这样由 $m+1$ 个元中取 n 个的所有组合，分成含这个元的与不含这个元的两类. 第一类有 C_m^{n-1} 个组合，第二类有 C_m^n 个组合，由加法原理得

$$C_m^{n-1} + C_m^n = C_m^n.$$

③ 根据组合的两个性质证.

由性质 1，左 $= C_k^k + C_{k+1}^k + \cdots + C_{k+m-1}^k$.

由性质 2，

$$C_k^k = C_{k+1}^{k+1},\quad C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1} = C_{k+2}^{k+1},$$

$$C_{k+2}^k + C_{k+2}^{k+1} = C_{k+3}^{k+1},\quad \cdots,\quad C_{k+m-1}^k + C_{k+m-1}^{k+1} = C_{k+m}^{k+1}.$$

将这些恒等式两边相加，相消后，得

$$C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \cdots + C_{k+m-1}^k = C_{k+m}^{k+1} = C_{k+m}^{m-1}.$$

故原等式成立.

④ 根据二项式定理证.

考察恒等式$(x+1)^n(x+1)^n=(x+1)^{2n}$. 根据

$$(x+1)^n=c_n^0x^n+c_n^1x^{n-1}+\cdots+c_n^px^{n-p}+\cdots+c_n^n,$$

$$(x+1)^n=c_n^0x^n+c_n^1x^{n-1}+\cdots+c_n^px^{n-p}+\cdots+c_n^n,$$

$$(x+1)^{2n}=c_{2n}^0x^{2n}+c_{2n}^1x^{2n-1}+\cdots+c_{2n}^px^{2n-p}+\cdots+c_{2n}^{2n}.$$

比较左、右两边x^n项的系数，得

$$c_n^0c_n^n+c_n^1c_n^{n-1}+\cdots+c_n^pc_n^{n-p}+\cdots+c_n^nc_n^0=c_{2n}^n,$$

即 $$(c_n^0)^2+(c_n^1)^2+\cdots+(c_n^p)^2+\cdots+(c_n^n)^2=c_{2n}^n.$$

⑤ 根据数学归纳法证.

n的允许值为$n\geqslant 3$的自然数.

当$n=3$时，等式左边$=1!\cdot 2!\cdot 3!=12$，等式右边$=\dfrac{(3!)^{3-1}}{3}=12$，即原等式成立.

假设当$n=k$时，等式成立，即

$$1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\cdots\cdot k!=\frac{(k!)^{k-1}}{3\cdot 4^2\cdot 5^3\cdot\cdots\cdot k^{k-2}},$$

那么，当$n=k+1$时，

$$1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\cdots\cdot k!\cdot(k+1)!$$

$$=\frac{(k!)^{k-1}}{3\cdot 4^2\cdot 5^2\cdot\cdots\cdot k^{k-2}}\cdot(k+1)!$$

$$=\frac{(k!)^{k-1}\cdot k!\cdot(k+1)}{3\cdot 4^2\cdot 5^2\cdot\cdots\cdot k^{k-2}}$$

$$=\frac{(k!)^k\cdot(k+1)^k}{3\cdot 4^2\cdot 5^3\cdot\cdots\cdot k^{k-2}\cdot(k+1)^{k-1}}$$

$$=\frac{[(k+1)!]^{\overline{k+1}-1}}{3\cdot 4^2\cdot 5^3\cdot\cdots\cdot k^{k-2}(k+1)^{k-1}}.$$

这说明当$n=k+1$时原等式也成立.

注 ① 本例给出了五个小题，每个小题都用了不同的方

法，在证有关排列组合数的等式时，经常采用这些方法.

§2. 有重复的排列与组合

本节主要介绍可重复的排列与组合的有关问题.

1. 重复排列

从 m 种不同的元素中每次取出 n 个元素，其中元素可以重复，这种允许元素重复出现的排列叫做重复排列；其总数为 $m^n(n\gtreqless m)$，这是因为在每一个排列中有 n 个位置，现在各元素既然可以重复，那么每一个位置都可由此 m 种元素中任选一个排入，所以它的排列数是：

$$\underbrace{m\cdot m\cdot\cdots\cdot m}_{n\text{个}}=m^n.$$

例如，由 1、2 两个数字所组成的数字允许重复的三位数共有八个. 因为在 1、2 中取个位、十位、百位均有两种取法，故总数为：$2\cdot2\cdot2=2^3=8$. 它们是：111；112；121；122；211；212；221；222.

2. 重复的全排列

设 $\{a, b, \cdots, c\}$ 为有限集，元素 a 重复 α 次，b 重复 β 次，…，c 重复 γ 次的每一重复排列，叫做重复

$$m=\alpha+\beta+\cdots+\gamma$$

次的全排列，其中 a, b, …, c 分别重复 α, β, …, γ 次.

假定所求的重复的全排列数为 x. 将 α 个 a、β 个 b、…、γ 个 c 分别编号，得到 m 个相异的元素：a_1, a_2, …, a_α, b_1, b_2, …b_β, …, c_1, c_2, …, c_γ. 再将所求的重复全排列的一个排列中的 α 个 a、β 个 b、…、γ 个 c 分别作编号后的全排列，于是得到 $\alpha!\beta!\cdots\gamma!$ 个 m 个相异元素的全排

列，因之，$x\cdot\alpha!\beta!\cdots\gamma!=m!$，故 $x=\dfrac{m!}{\alpha!\beta!\cdots\gamma!}$.

例如，作对 1 重复三次，对 2 重复两次的全排列，共有 $\dfrac{5!}{3!2!}=10$（个）. 它们分别是：11122；11212；11221；12112；12121；12211；21112；21121；21211；22111.

3．重复组合

从 a_1，a_2，…，a_m m 个不同的元素中每次取 n 个允许重复的元的组合叫做重复组合；其组合总数为 c^n_{m+n-1} $(n\gtreqless m)$，因为：

设 $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}$ 是一个从 m 个不同的元中每次取 n 个允许重复的元的一个组合，其中 i_1，i_2，…，i_n 是 1，2，…，m 中的任一个可能值，且 $i_1\leqslant i_2\cdots\leqslant i_n$，将下标 i_1，i_2，…，i_n 分别加上 0，1，…，$n-1$，得 i_1+0，i_2+1，…，i_n+n-1 是 n 个不同的数码，且在 1 至 $m+n-1$ 中取值. 因此. $a_{i_1+0}a_{i_2+1}\cdots a_{i_n+n-1}$ 是从 $m+n-1$ 个不同的元中取 n 个不同的元的一个组合. 由于 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 构成的集与 $(i_1+0, i_2+1, \cdots, i_n+n-1)$ 构成的集一一对应，故所求的组合总数为 c^n_{m+n-1}.

例如，由 a_1、a_2、a_3 三个文字，每次取两个且允许重复的组合总数为 $c^2_{3+2-1}=c^2_4=6$. 它们分别是：a_1a_1；a_1a_2；a_1a_3；a_2a_2；a_2a_3；a_3a_3. 如将各组合的每个下标分别加 0 和 1，则得：a_1a_2；a_1a_3；a_1a_4；a_2a_3；a_2a_4；a_3a_4，正是从四个元 a_1，a_2，a_3，a_4 中每次取两个元的全部组合.

4．环形排列

最后，简单地介绍一下由 m 个不同元素中，每次取 n 个不同元素的环形排列. 前面所讲的排列，是将所取元素摆成

直线形，称为直线排列．如果将所取元素摆成圆圈形式，这种排列称为环形排列．因环形排列无首尾之分，又每一个 n 元的环形排列对应 n 个 n 元的直线形排列，因此，在 m 个不同元素中每次取 n 个不同元素的环形排列的种数为：

$$\frac{A_m^n}{n}(n\leqslant m).$$

上式，当 $n=m$ 时，$\frac{A_m^n}{n}=\frac{P_m}{m}=(m-1)!$ 这就是 m 个不同元素的环形全排列的种数．

例 9 某校有 10 名成绩优异的学生报名参加湖北省中学生数、理、化竞赛，每人只许参加一科，问有几种报名法？

解 每一个同学都可以报名参加三科中的任意一科，因此每一个同学的报名方法有三种，故报名方法共有 3^{10} 种，即 59049 种．

例 10 有 n 种不同的书，每种有 p 本，从中选出若干本，问有多少选法？

解 对于每一种书，共有 $p+1$ 种拿法：0 本，1 本，2 本，…，p 本．因此，若将 n 种书给以某一顺序（编号），则一种取书法对应于一个由 $p+1$ 个数取 n 个数的重复排列，其总数为 $(p+1)^n$．但每种书取 0 本的排列应除外，故本题答案为 $(p+1)^n-1$．

例 11 假定某棋盘纵横各为 8 档，某棋子从棋盘的左下角走到右上角，要路径最短，有几种走法？

解 棋盘横有 8 档，纵有 8 档，要使路径最短，棋子必经过且只经过横、纵各 8 档，这就相当于对横 8 档、纵 8 档作重复全排列，故有 $\frac{16!}{8!8!}=12870$（种走法）．

例 12 试证：和 $x_1+x_2+\cdots+x_k$ 的 n 次方幂的标准式是

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=n}\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_k!}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots\alpha_k^{\alpha_k},$$

在右端的和里，α_1，α_2，…，α_k 遍举满足条件 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=n$ 的所有可能的非负整数值.

证 见《初等代数专门教程》P.535.（诺沃塞洛夫著）

例 13 某人在商店选购 A、B、C 三种商品 9 件，问有多少种选购法？（假设货源是充足的）

解 A、B、C 为三种不同的元素，在其中选 9 种且允许重复，故选购法共有

$$c_{3+9-1}^9=c_{11}^9=c_{11}^2=55\text{（种）}.$$

例 14 证明 k 元 n 次齐次多项式的标准式共含有 $\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$ 个项.

证明 k 元 n 次齐次多项式的标准式是形如 $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_k^{\alpha_k}$ 的各项之和，这里 A 是系数，$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=n$. 在每一项内，$x_1$ 连乘 α_1 次，x_2 连乘 α_2 次，以此类推，因子的总数等于 n. 因此多项式所含不同项的项数，即为由 k 个元 x_1，x_2，…，x_k 取 n 个的有重复的组合数，即

$$c_{k+n-1}^n=\frac{(k+n-1)!}{n!(k-1)!}.$$

例 15 九口之家，围坐圆桌吃饭，最老的和最小的不能坐在一起，问有几种坐法？

解 九人环形排列，共有 8! 种排法. 老小在一起的排法有：$p_2\cdot p_7=2\cdot 7!$ 种排法. 故老小不在一起的排法共有：$8!-2\cdot 7!=6\cdot 7!=30240$（种）.

例 16 用 12 颗不同的玛瑙，每次取五颗穿成一个圆圈，

问可穿成多少种不同的形式？

解 十二个不同的玛瑙每次取五个不同的玛瑙进行环形排列，共有 $A_{12}^5/5=19008$（种）．但玛瑙圈正反两面都可以看，如图，

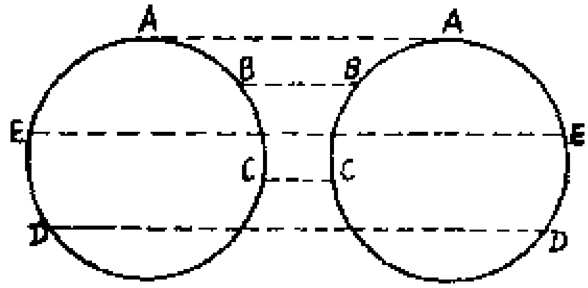


图 8—1

两种不同的环形排列只能算一种了，故本题的答案为$19008/2=9504$（种）．

习　题　八

1．平面上 n 个点，其中除了在一直线上的 m 个点以外，没有任何三点在一直线上．

① 这些点可以连成多少条直线？

② 有多少个以这些点为顶点的三角形？

2．自 n 个白球和 m 个黑球中取出 P 个球，使其中最少包含两个白球，问有多少种取法？

3．已知 n 个元素 1，2，…，n，若其中 K 个已知元素 1，2，…，K，不占 K 个相连的位置，问有多少种排列？

4．由数码 0，1，2，3，4，可以组成多少个不同的自然数（每一数中的数码都不能重复出现）？

5．问有多少个数满足下列三个条件：① 它们的常用对数的首数都是 3；② 它们的小数部分只有十分位不是零；

③ 它们的各个数位上的数码都不相同.

6. 设由八个数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 中取出 5 个不同数字作成五位数，其第一位，第三位，第五位上的数字用奇数，问可作成多少个不同的数?

7. 囊 A 盛球五个，其一白色，囊 B 盛球六个，无一白色，设自 A 中取球三个置于 B 中， 然后自 B 中取球三个置于 A 中，则此白球在 A 之机会如何?

8. 在 3000 与 8000 之间，有数字不重复之奇数多少个? 这些奇数中能为 5 所整除者有多少个?

9. 有 $2n$ 个网球选手参加比赛，在第一轮比赛中，每个选手恰好比赛一次，因而有 n 次比赛，每次 2 人对赛，试证安排第一轮比赛恰好有 $1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)$ 种不同的方法.

10. 一袋盛有白球四个及黑球八个，有 A、B、C 三人预先约定按 A、B、C 的顺序，轮流自袋中取球，而且规定首先得白球者为胜. 若取出之球不再投入，则 A、B、C 各人首先得到白球的机会为若干? 若取出之球随即投入，则 A、B、C 各人首先得到白球的机会为若干?

11. 用二项式定理计算 $(3.02)^4$，使误差小于千分之一.

12. 试求以 11 除 101^{10} 的余数.

13. 在 $(\sqrt[3]{x^{-1}}-\sqrt[5]{x^{-2}})^n$ 的展开式中，所有偶数项的系数的和等于 1024，试求它的两个中项.

14. 求 $(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^{n+2}$ 展开式里含 x^2 项的系数.

15. 解方程 $ax^4+bx^2+c=0$，其中系数 a 满足条件 $0.2^{\sqrt{a}}=0.008$，系数 b 由方程 $\lg(2b+6)+\lg 5=3-\lg\left(\frac{5}{2}\right)$ 确

定，常数 c 为$\left(z+\frac{1}{z}\right)^6$的展开式的中项的$\frac{1}{5}$.

16. 设 n 为正奇数，试证$(1+x)^n$展开式的中间两项的系数都等于$\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n}{1\cdot2\cdot3\cdots\frac{n+1}{2}}\cdot2^{\frac{n-1}{2}}$.

17. 求$\left(9x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{18}$展开式中的常数项.

18. 如$(\sqrt[4]{27}-\sqrt[3]{3^{-2}})^{6n}$展开式中的末项为$\left(\frac{1}{25^3}\right)^{\log_5 9}$，试求第七项.

19. 在 55 和 555 之间插入几个等差中项时，其中最后一个等差中项为$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{15}$展开式中含 x^3 项的系数.

20. 如$(\sqrt[3]{x^{-4}}+x)^n$展开式中第五、六、七项的系数成等差数列，试求展开式中不含 x 的项.

21. 求$(1+a_1)(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n$的展开式的所有项系数的代数和.

22. 在$(\sqrt[3]{36}-\sqrt[7]{6^x})^9$展开式中第八项等于$6^{-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)\log_5\frac{27}{8}}$的相反数，求 x 的值.

23. 如$(ax+1)^8$和$(x+a)^9(a\neq0)$展开式中，含 x^4 项的系数相等，求 a 的值.

24. 如$(ax+1)^{2n}$和$(x+a)^{2n+1}$（这里 $a\neq0$）展开式中，含 x^n 项的系数相等，试证$\frac{1}{a}$必是下列方程的根：

$$n^2(n+1)x^3+(2n+1)^2x^2-(2n+1)^3=0$$

25. 试证：$c_n^1-2c_n^2+3c_n^3-\cdots-(-1)^n nc_n^n=0$.

26. n 为正整数，试证：

$$1+m+\frac{m(m+1)}{2!}+\cdots+\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}{n!}.$$

27. 求和：$S_n=m!+\frac{(m+1)!}{1!}+\frac{(m+2)!}{2!}+\cdots$

$$+\frac{(m+n)!}{n!}.$$

28. 证明恒等式：$c_n^0c_m^p+c_n^1c_m^{p-1}+\cdots+c_n^pc_m^0=c_{m+n}^p$.

29. 证恒等式：$1+\frac{1}{2}c_n^1+\frac{1}{3}c_n^2+\cdots+\frac{1}{n+1}c_n^n$

$$=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

30. 求证：$\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)$.

31. 由四个数码 1，2，3，4 可以组成多少个三位数？

32. 由 1，2，3，4，5 五个数字能组成多少个数字允许重复而又不大于 55555 的自然数？

33. 在第 2 题中，大于 23400 的有多少个？

34. 某校给 10 名先进教育工作者发奖，奖品是六支圆珠笔和四个大文具盒（圆珠笔与文具盒等价格），每人只得一种，问有多少种发奖法？

35. 某团委有委员 7 人，今需 3 人任书记，2 人任组委，2 人任宣委，问有多少种分工法？

36. 展开 $x+y+z$ 的三次幂.

37. 将五种酒任意注入四杯，使之不混合，有几种方法？

38. 父亲有 1 元的币十张，分给甲、乙、丙、丁 4 个孩

子，问有几种分法？

39. 证明 k 元 n 次多项式的标准式的项数为 C_{n+k-1}^{n}.

40. 两位老师及甲乙丙丁四个学生围圆桌而坐，小丁定要两位老师在其左右而坐，问共有几种坐法？

41. 四女四男围圆桌而坐，同性者不相邻接，问有多少种坐法？

42. 八粒颜色不同的钻石，全拿来穿钻石圈，问可穿成几种钻石圈？

第九章　数学归纳法

§1. 数学归纳法概述

归纳法是由特殊到一般的一种推理方法.

考察事物的属性时，往往有从其中一个或几个结果推出一般性的结论. 这种归纳推理，由于它的基础是不够完全的，因此叫做不完全归纳法. 例如由等差数列

$$a_1 = a_1 + (1-1)d = a_1,$$
$$a_2 = a_1 + (2-1)d,$$
$$a_3 = a_1 + (3-1)d,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

得

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

在探索真理过程中，人们常习于用到它. 但它仅基于部分结果就推出一般性的结论，这是难以可靠的. 本节将通过一些例题说明这一点.

此外，根据某类事物中每一个对象都具有某种属性，从而推出这类事物的全体都有这种属性，这叫完全归纳法. 例如，证明圆周角等于同弧的圆心角的一半时，为讨论其全体都有这种属性，分三种可能情况：

1. 圆心在圆周角的一边上；
2. 圆心在圆周角内；
3. 圆心在圆周角外

而一一加以证明，从而得出一般性的结论．这时对每一个可能的情况，都详加探讨，因此完全归纳法得出的结论是一定正确的．只是证明时应注意，一不要遗漏；二要避免重复．

当研究的对象，与自然数列具有相对应的特征时，其论证与推理常用数学归纳法．数学归纳法是一种完全归纳法．

关于自然数集，有一个著名的皮阿诺(Peano)公理：

1．1是一个自然数．

2．在自然数集中的每一个数 a 有一个确定的后继 a^+．

3．$a^+\neq 1$ 这就是说，没有数以1作为后继．

4．由 $a^+=b^+$ 推出 $a=b$．即对每一个数，没有或恰有一个数以它作为后继．

5．“完全归纳法原理”：如果自然数的一个集合包含数1，并且对于每个属于它的数 a 都包含 a 的后继 a^+，它就包含全体自然数．

数学归纳法从理论上说来，就是基于性质5的．当我们要证明对应于所有的自然数，都具有一个性质 E 时，我们就首先对应数1作出证明，然后在“归纳假设”之下，即假定对应于数 n 具有性质 E，来证明对应于数 n^+ 具有性质 E．根据5，具有性质 E 所对应的自然数的集合必然包含所有自然数，换言之，根据5，与自然数列具有相对应的研究对象都具有性质 E．

因此，用数学归纳法证明问题时，须包括下列三步：

① 确定所研究的对象是否与自然数列相对应．

② 对应于数列的首项来说是否正确．

③ 假定对于数列的 k 项是正确的，由此推出 $k+1$ 项也是正确的．

由于第一步是先决条件，证明时不必写出，因此一般只用第二与第三这两步．第二步是证明问题的基础，第三步是证明问题的延续性．

第二步的首项不一定对应于1开始，也可以对应于2或3等等作为开始．

有的问题，对第三步“设 $n=k$ 与 $n=k+1$ 时命题为真，则 $n=k+2$ 时也真”，关于这种双延续问题，对于第二步则首先要验明头两项都真，即当 $n=1$，2时命题要真．

兹分别举例如下：

例 1　考察 x^2+x+41 能否构造质数时，不完全归纳法依

$x=1$ 可得　$(x^2+x+41)_{x=1}=43$；

$x=2$ 可得　$(x^2+x+41)_{x=2}=47$；

$x=3$ 可得　$(x^2+x+41)_{x=3}=53$；

$x=4$ 可得　$(x^2+x+41)_{x=4}=61$；

$x=5$ 可得　$(x^2+x+41)_{x=5}=71$；

$x=6$ 可得　$(x^2+x+41)_{x=6}=83$；

$x=7$ 可得　$(x^2+x+41)_{x=7}=97$；

…………

一直算到 $x=39$，$(x^2+x+41)_{x=39}=1601$ 都是质数，据此结论：当 x 为自然数时，x^2+x+41 的值都是质数．对吗？

答　不对．因为当 $x=40$ 时

$$(x^2+x+41)_{x=40}=41^2$$

是一合数．而且现已证明：凡有理整代数式，对于未知数的任何整数值，不能仅表质数．

注　又如

$$f(n)=4729494n^2+1,$$

当 $n=1$, 2, 3, …直至

50,549,485,234,315,033,074,477,819,735,540,408,986,339 这一41 位数时，$f(n)$ 都不是一个完全平方数，依不完全归纳法称此：当 n 为自然数时，$f(n)=4729494n^2+1$ 不是完全平方数. 但电子计算机却算得，当

$n=50,549,485,234,315,033,074,477,819,735,540,408,986,340$

时，是一完全平方数：$f(n)=$

$(103,931,986,732,829,734,979,866,232,821,433,543,901,088,049)^2$

由此可见，不完全归纳法尽管在科研中经常使用，但它的结论却不一定是正确的.

例 2 一谬论称："凡自然数都相等." 因为它是根据 "任一自然数等于紧随在它后面的那个自然数，即 n 表自然数时 $n=n+1$"，而此又经下述论证：

"设 $n=k$ 时，$k=k+1$ 为真，则当 $n=k+1$ 时，有 $k+1=(k+1)+1=k+2$ 亦真."

试问这谬论错在那里？

答 这说明了数学归纳法的第二步是必不可少的. 因为当 $n=1$ 时，

$$1\neq 2.$$

即这谬论错在光证第三步，不证第二步，且当第二步属错时，第三步的证明也就枉然.

例 3 求证 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 时，某某道："当 $n=1$ 时，$1^2=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$，验明. 设 $n=k$ 时，$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ 成立，则当 $n=k+1$ 时，有

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k$$

$+1)+1]$得证."结果却说他没证出来，为什么？

答 问题在于当 $n=k+1$ 时，没有根据归纳假设给出证明，还是象归纳假设那样一写而过.

例 4 论证 $2^n>n^2$ 这一命题时，有：

"当 $n=1$ 时，验明 $2^1>1^2$.

设 $n=k$ 时，$2^k>k^2$ 成立，则 $n=k+1$ 时，由于 $k\geqslant3$ 有 $2^k>2k+1$，故得

$$2^{k+1}=2^k\cdot2=2^k+2^k>k^2+(2k+1)=(k+1)^2\text{"}.$$

这样证，对吗？为什么？

答 检验命题，显见：

当 $n=2$ 时，有 $2^2>2^2$，不对；

当 $n=3$ 时，有 $8>9$，不对；

当 $n=4$ 时，有 $16>16$，不对；

当 $n=5$ 时，有 $32>25$，对；

当 $n=6$ 时，有 $64>36$，对；

…………

其所以出现不完全对，问题在于证明时，中间借助条件 $k\geqslant3$ 有 $2^k>2k+1$，而此与第二步考察 $n=1$ 不相呼应.

若更正为：当 $n=5$ 时，$32>25$ 成立.

设 $n=k$ 时，$2^k>k^2$ 成立，则 $n=k+1$ 时，由于 $k\geqslant3$ 有 $2^k>2k+1$，故得

$$2^{k+1}=2^k\cdot2=2^k+2^k>k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

再加上当 $n=1$ 时 $2>1$ 成立，故对于 $n=1$ 和 $n\geqslant5$ 时，命题成立.

例 5　求证 $c_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 时，有

"当 $n=1$ 时，$c_1^1=\dfrac{1!}{1!(1-1)!}=\dfrac{1}{1\times1}=1$ 验明。

设 $n=k$ 时，$c_k^k=\dfrac{k!}{k!(k-k)!}=1$，则 $n=k+1$ 时，

$$c_{k+1}^k=\frac{(k+1)!}{k!(k+1-k)!}=\frac{(k+1)!}{k!}=k+1$$

得证"．对吗？

答　不对，错误较多．主要错误在于应用数学归纳法时，对于题中的两个变量 k 与 n 认识不清．

在第一步中，原说当 $n=1$，却使 $n=k=1$，这就形成同时对 n 与 k 两个变量进行归纳了．此外，c_n^k 原是表明在 n 个元素中每次取 k 个元素的所有组合的种数，因此纵使 $c_1^1=1$ 也该说明在"一个元素中每取一个元素的组合是 1"后才能说"验明"．

在第二步中，把从"k"到"$k+1$"中的"k"，和 c_n^k 中的"k"混淆起来．

在证明具有两个自然数的变量的命题时，应注意对其中一个变量进行归纳，把另一变量看作常量．

本题的证明，既有对 n 进行归纳的，也有对 k 进行归纳的．如果对 n 进行，则当 $k>1$ 时，就无法来讨论 $n=1$ 时命题的正确性了．

"当 $k=1$ 时，从 n 个元素中每次取一个元素的组合种数与 $\dfrac{n!}{1!(n-1)!}=n$ 一致．

设 $k=r$ 时，$c_n^r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$ 正

确；则当 $k=r+1$ 时，有：

从 $n-r$ 个元素里每次任取一个元素共有 $(n-r)$ 种方法，从 n 个元素里每次任取 $r+1$ 个元素的组合方法，可以有 $C_n^r\cdot(n-r)$ 种．并且有 $r+1$ 个组合重复．因此所求组合种数是：

$$C_n^r\cdot\frac{n-r}{r+1},$$

它与

$$\begin{aligned}C_n^{r+1}&=\frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!}\\&=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)}{1\cdot2\cdot3\cdots r(r+1)}\\&=C_n^r\cdot\frac{n-r}{r+1}\end{aligned}$$

一致，证毕．

例 6 $s_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

若错误地作下面猜想：

$$s_n=\frac{n+1}{3n+1}$$

在用归纳法论证时，能否发现错误？

答 能发现．当 $n=1$ 时，$s_1=\frac{1+1}{3+1}=\frac{1}{2}$ 为真．

设 $n=k$ 时，$s_k=\frac{k+1}{3k+1}$ 正确，则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}s_{k+1}&=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\&=\frac{k+1}{3k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\end{aligned}$$

$$=\frac{k^3+4k^2+8k+3}{(k+1)(k+2)(3k+1)}$$

$$\neq\frac{\overline{k+1}+1}{3(k+1)+1}.$$

可见，尽管令 $n=k$ 时，命题为真，仍推不出猜想的结论.

§2. 数学归纳法续

考察某些事物的属性时，其属性是否恰以一整标函数 $f(n)$，$(n=1, 2, \cdots)$ 所表示？要回答这一点，常用到数学归纳法.

由于很多问题，要用整标函数表示，因此数学归纳法的牵涉面很宽. 本节仅就数列求和、不等式、递归数列、根与系数问题、代数基本定理、整除性问题、几何问题、三角问题等举例.

在求证形如

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=s_n$$

或 $$a_1\cdot a_2\cdots a_n=M_n$$

的恒等式时，第三步在归纳假设下，原要论证：

$$s_k+a_{k+1}=s_{k+1}$$

或 $$M_k\cdot a_{k+1}=M_{k+1},$$

现转化成论证：

$$s_{k+1}-s_k=a_{k+1}$$

或 $$\frac{M_{k+1}}{M_k}=a_{k+1},$$

将更为简便，具体如例 8，例 9，例21.

例 7 求证：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$。

证明 由于 $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，代入上式右

边，即求证

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2.$$

当 $n=1$ 时，$1^3=1^2$，验明.

设 $n=k$ 时，

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2$$

成立，则 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3\\&=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2+(k+1)^3=(k+1)^2\left[\left(\frac{k}{2}\right)^2+k+1\right]\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^2(k+1)^2(k+2)^2=\left[\frac{1}{2}(k+1)(\overline{k+1}+1)\right]^2.\end{aligned}$$

证毕.

注 ① 最后一式 $k+1$ 上面加一横，表示线括号，是小括号里面的括号.

② 本命题又可记作

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\sum_{k=1}^{n}k\right]^2. \tag{1}$$

它是

$$\sum_{k=1}^{n}A_k^3\leqslant\left[\sum_{k=1}^{n}A_k\right]^2, \tag{2}$$

当 $A_k-A_{k-1}=1$（$k=2, 3, \cdots, n$）时的特殊情况. 当 $A_k-A_{k-1}\leqslant 1$（$k=2, 3, \cdots, n$）时，(2)式成立.

例 8 若 a 为自然数，求证：

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$$

$$=\frac{n}{a(a+n)}.$$

证明 当 $n=1$ 时，$\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a(a+1)}$，验明.

设 $n=k$ 时，

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}$$

$$=\frac{k}{a(a+k)}$$

为真，则 $n=k+1$ 时，有

$$s_{k+1}-s_k=\frac{k+1}{a(a+k+1)}-\frac{k}{a(a+k)}$$

$$=\frac{1}{a(a+k)(a+k+1)}[(k+1)(a+k)-k(a+k+1)]$$

$$=\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}.$$ 证毕.

例 9 求证：

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+d}}+\frac{1}{\sqrt{a+d}+\sqrt{a+2d}}+\cdots$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a+(n-2)d}+\sqrt{a+(n-1)d}}$$

$$=\frac{n-1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+(n-1)d}}.$$

证明 上式左边为 $(n-1)$ 项之和，即

$$u_2+u_3+\cdots+u_n,$$

其中 $$u_n=\frac{1}{\sqrt{a+(n-2)d}+\sqrt{a+(n-1)d}}.$$

当 $n=2$ 时，$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+d}}=\frac{2-1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+(2-1)d}}$

为真.

设 $n=k$ 时，

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+d}}+\cdots$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a+(k-2)d}+\sqrt{a+(k-1)d}}$$

$$=\frac{k-1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+(k-1)d}},$$

则 $n=k+1$ 时，有

$$s_{k+1}-s_k=\frac{k}{\sqrt{a}+\sqrt{a+kd}}-\frac{k-1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+(k-1)d}}$$

$$=\frac{1}{d}\left[\sqrt{a+kd}-\sqrt{a+(k-1)d}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a+(k-1)d}+\sqrt{a+kd}}.$$

例 10 求证 $\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n\text{重}}<\sqrt{a}+1$；$(a>0)$。

分析 这一命题是怎样得出来的呢？从

$$\sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4}}}=\sqrt{4+\sqrt{4+2}}<\sqrt{4+3}<3$$

$$=\sqrt{4}+1;$$

$$\sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4}}}}<\sqrt{4+3}<3=\sqrt{4}+1;$$

$$\sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4}}}}}<\sqrt{4+3}<3$$

$$=\sqrt{4}+1;$$

…………

及从

$$\sqrt{9+\sqrt{9+\sqrt{9}}}=\sqrt{9+\sqrt{9+3}}<\sqrt{9+4}<4$$

$$=\sqrt{9}+1;$$

$$\sqrt{9+\sqrt{9+\sqrt{9+\sqrt{9}}}}<\sqrt{9+4}<4=\sqrt{9}+1;$$

$$\sqrt{9+\sqrt{9+\sqrt{9+\sqrt{9+\sqrt{9}}}}}<\sqrt{9+4}<4$$
$$=\sqrt{9}+1;$$

…………

等归纳出

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}<\sqrt{a}+1.$$

证明 当 $n=1$ 时，$\sqrt{a}<\sqrt{a}+1$ 为真.

设 $n=k$ 时，$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{k\text{重}}<\sqrt{a}+1$，则 $n=k+1$ 时，

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{k+1\text{重}}=\sqrt{a+\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{k\text{重}}}$$
$$<\sqrt{a+(\sqrt{a}+1)}<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}+1.$$

例 11 求证：$\dfrac{1+a^2+a^4+\cdots+a^{2n}}{a+a^3+a^5+\cdots+a^{2n-1}}>\dfrac{n+1}{n}$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

证明 当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 前提下，由于 $(1-a)^2>0$. 故 $1+a^2>2a$，从而证得当 $n=1$ 时，$\dfrac{1+a^2}{a}>2$，为真.

设 $n=k$ 时，$\dfrac{1+a^2+a^4+\cdots+a^{2k}}{a+a^3+a^5+\cdots+a^{2k-1}}>\dfrac{k+1}{k}$ 成立，则当 $n=k+1$ 时有

$$\frac{1+a^2+a^4+\cdots+a^{2k}+a^{2k+2}}{a+a^3+a^5+\cdots+a^{2k-1}+a^{2k+1}}$$
$$=\frac{1+a^2+a^4+\cdots+a^{2k}+a^{2k+2}}{a+a^3+a^5+\cdots+a^{2k-1}+a^{2k+1}}$$
$$+\frac{a+a^3+a^5+\cdots+a^{2k-1}}{1+a^2+a^4+\cdots+a^{2k}}-\frac{a+a^3+a^5+\cdots+a^{2k-1}}{1+a^2+a^4+\cdots+a^{2k}}$$

$$=\frac{1+a^2+a^4+\cdots+a^{2k}+a^{2k+2}+a^2+a^4+a^6+\cdots+a^{2k}+1-1}{a(1+a^2+a^4+\cdots+a^{2k})}$$

$$-\frac{a+a^3+a^5+\cdots+a^{2k-1}}{1+a^2+a^4+\cdots+a^{2k}}$$

$$>\frac{2(1+a^2+a^4+\cdots+a^{2k})-[1-(a^2)^{k+1}]}{a(1+a^2+a^4+\cdots+a^{2k})}-\frac{k}{k+1}$$

$$=\frac{2}{a}-\frac{1-a^2}{a}-\frac{k}{k+1}$$

$$=\frac{1}{a}+a-\frac{k}{k+1}>2-\frac{k}{k+1}$$

$$=\frac{k+2}{k+1}=\frac{\overline{k+1}+1}{k+1}.$$ 证毕.

例 12 斐波那西(Fibonacci)数列

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \cdots\cdots$$

系按 $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}(n=0,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 构成各项，且 $u_0=0$，$u_1=1$. 求证

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

分析 斐波那西是十三世纪初意大利数学家. 本题与一般数列的表写不同，除用 $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ 及已知初始值 $u_0=0$，$u_1=1$ 表出这数列各项：

$$u_0=0,\qquad\qquad u_1=1,$$

$$u_2=u_1+u_0=1+0=1,\quad u_3=u_2+u_1=1+1=2,$$

$$u_4=u_3+u_2=2+1=3,\quad u_5=u_4+u_3=3+2=5,$$

$$u_6=u_5+u_4=5+3=8,\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

外，同时又提出了构成各项的另一种关系

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

即用这种关系也可表出同样的数列：

$$u_0=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right]=0,$$

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}=1,$$

$$u_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{4}\right]=1,$$

$$u_3=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{8}\cdot[1+3\sqrt{5}+3\cdot5+5\cdot\sqrt{5}-(1-3\sqrt{5}$$

$$+3\cdot5-5\cdot\sqrt{5})]=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{8}\cdot2\cdot8\cdot\sqrt{5}=2,$$

…………

显然，前一种构成法比后一种构成法要简便，后一种形式比前一种要统一，这里，问题在于论证前者对后者的转化.

证明 当 $n=2$ 时，$u_2=u_1+u_0=1+0=1$

与 $u_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]=1$ 一致.

设 $n=k-2$；$k-1$ 时：

$$u_{k-2}=u_{k-3}+u_{k-4}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\right];$$

$$u_{k-1}=u_{k-2}+u_{k-3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right].$$

成立．则 $n=k$ 时，有

$$\begin{aligned}u_k&=u_{k-1}+u_{k-2}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right]\\&\quad+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)\right.\\&\quad\left.-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right.\\&\quad\left.-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right].\end{aligned}$$

其中： $\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$,

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+2\sqrt{5}+5)=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

因而 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$；同理

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

例 13 已知两数列

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots;\quad y_0,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots$$

系按下述法则构成：

$$x_n=x_{n-1}+2y_{n-1}\sin^2\alpha;\quad y_n=y_{n-1}+2x_{n-1}\cos^2\alpha,$$

且 $x_0=0$, $y_0=\cos\alpha$. 求证

$$x_n=\frac{1}{2}\sin\alpha[(1+\sin 2\alpha)^n-(1-\sin 2\alpha)^n];$$

$$y_n=\frac{1}{2}\cos\alpha[(1+\sin 2\alpha)^n+(1-\sin 2\alpha)^n].$$

证明 当 $n=1$ 时,

$$x_1=x_0+2y_0\sin^2\alpha=2\cos\alpha\sin^2\alpha;$$

$$y_1=y_0+2x_0\cos^2\alpha=\cos\alpha.$$

显然与

$$x_1=\frac{1}{2}\sin\alpha[(1+\sin 2\alpha)-(1-\sin 2\alpha)]$$

$$=2\sin^2\alpha\cos\alpha;$$

$$y_1=\frac{1}{2}\cos\alpha[(1+\sin 2\alpha)+(1-\sin 2\alpha)]=\cos\alpha$$

一致.

设 $n=k-1$ 时,

$$x_{k-1}=x_{k-2}+2y_{k-2}\sin^2\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha[(1+\sin 2\alpha)^{k-1}-(1-\sin 2\alpha)^{k-1}];$$

$$y_{k-1}=y_{k-2}+2x_{k-2}\cos^2\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\cos\alpha[(1+\sin 2\alpha)^{k-1}+(1-\sin 2\alpha)^{k-1}]$$

成立. 则 $n=k$ 时, 有

$$x_k=x_{k-1}+2y_{k-1}\sin^2\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha[(1+\sin 2\alpha)^{k-1}-(1-\sin 2\alpha)^{k-1}]$$

$$+2\sin^2\alpha\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha[(1+\sin 2\alpha)^{k-1}+(1-\sin 2\alpha)^{k-1}]$$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha\{(1+\sin 2\alpha)^{k-1}-(1-\sin 2\alpha)^{k-1}$$

$$+\sin 2\alpha[(1+\sin 2\alpha)^{k-1}+(1-\sin 2\alpha)^{k-1}]\}$$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha\{(1+\sin 2\alpha)^{k-1}(1+\sin 2\alpha)$$

$$-(1-\sin 2\alpha)^{k-1}(1-\sin 2\alpha)\}$$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha[(1+\sin 2\alpha)^{k}-(1-\sin 2\alpha)^{k}]$$

$$y_k=y_{k-1}+2x_{k-1}\cos^2\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\cos\alpha[(1+\sin 2\alpha)^{k-1}+(1-\sin 2\alpha)^{k-1}]$$

$$+2\cdot\frac{1}{2}\sin\alpha[(1+\sin 2\alpha)^{k-1}-(1-\sin 2\alpha)^{k-1}]\cos^2\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\cos\alpha\{(1+\sin 2\alpha)^{k-1}+(1-\sin 2\alpha)^{k-1}$$

$$+\sin 2\alpha[(1+\sin 2\alpha)^{k-1}-(1-\sin 2\alpha)^{k-1}]\}$$

$$=\frac{1}{2}\cos\alpha[(1+\sin 2\alpha)^{k-1}\cdot(1+\sin 2\alpha)$$

$$+(1-\sin 2\alpha)^{k-1}(1-\sin 2\alpha)]$$

$$=\frac{1}{2}\cos\alpha[(1+\sin 2\alpha)^{k}+(1-\sin 2\alpha)^{k}].$$ 证毕.

例 14 设 α 和 β 是二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的两个根，试证 $\alpha^n+\beta^n$(n 为自然数)是关于 a、b、c 的有理式.

证明 当 $n=1$ 时 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$是关于 a、b 的有理式，即命题成立.又当 $n=2$ 时，$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\dfrac{b^2}{a^2}-2\cdot\dfrac{c}{a}$ 是关于 a、b、c 的有理式.

设 $n=k-1$ 与 k 时 $\alpha^{k-1}+\beta^{k-1}$ 与 $\alpha^k+\beta^k$ 是关于 a、b、c 的

有理式．则 $n=k+1$ 时，有

$$\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}=\alpha^{k+1}+\alpha\beta^{k}+\alpha^{k}\beta+\beta^{k+1}-\alpha\beta^{k}-\alpha^{k}\beta$$
$$=(\alpha+\beta)(\alpha^{k}+\beta^{k})-\alpha\beta(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1}).$$

由于 $(\alpha+\beta)$；$(\alpha\beta)$；$(\alpha^{k}+\beta^{k})$；$(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})$ 都是 a、b、c 的有理式，故对它们施行有限次四则运算，其结果仍然是关于 a、b、c 的有理式．证毕．

注 回顾本题论证过程，主要是因为当 $n=k+1$ 时，既牵涉 $\alpha^{k}+\beta^{k}$，又牵涉到 $\alpha^{k-1}+\beta^{k-1}$，所以在第二步须设 $n=k$ 及 $k-1$ 同时成立，因而一开始就要验明 $n=1$ 及 $n=2$ 都成立．

例 15 试证自然数的乘法适合交换律．

分析 设 a；b 为自然数．题意在于论证

$$a\cdot b=b\cdot a.$$

证明 当 $b=1$ 时，$a\cdot 1=1\cdot a$，命题显然成立；设 $b=k$ 时，$a\cdot k=k\cdot a$ 成立，则 $b=k+1$ 时，

$$b\cdot a=(k+1)\cdot a=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{k\text{个}}+a=k\cdot a+a$$
$$=a\cdot k+a=\underbrace{(k+k+\cdots+k)}_{a\text{个}}+\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{a\text{个}}$$
$$=\underbrace{(k+1)+(k+1)+\cdots+(k+1)}_{a\text{个}}=a\cdot(k+1)$$
$$=a\cdot b.$$ 证毕．

其中以加法的交换律、结合律为前提．

注 ① 证明时，以自然数的加法适合交换律、结合律为前提．

② 命题涉及两个自然数，在上述证明中是以 a 为任一常量的；如以 b 为常量，对 a 施以数学归纳法证明亦可．

例 16 对于任意自然数 n，多项式 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$ 被 x^2+x+1 整除.

证明：当 $n=1$ 时，$[x^3+(x+1)^3]\div(x^2+x+1)=2x+1$，命题成立.

设 $n=k$ 时，$[x^{k+2}+(x+1)^{2k+1}]$ 被 (x^2+x+1) 整除. 则 $n=k+1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
& x^{(k+1)+2}+(x+1)^{2(k+1)+1} \\
= & x\cdot x^{k+2}+(x+1)^2(x+1)^{2k+1} \\
= & x[x^{k+2}+(x+1)^{2k+1}]+(x^2+x+1)(x+1)^{2k+1}
\end{aligned}
$$

据 $x^{k+2}+(x+1)^{2k+1}$ 能被 (x^2+x+1) 整除. 且第二项又含有 (x^2+x+1) 的因式，故命题也成立. 证毕.

例 17 求证 $(\sqrt{3}+1)^{2m+1}-(\sqrt{3}-1)^{2m+1}$ 能被 2^{m+1} 整除，但不能被 2^{2m+2} 整除，也不能被 2^{m+2} 整除.

分析 $(\sqrt{3}+1)^{2m+1}-(\sqrt{3}-1)^{2m+1}$ 是否整数呢？由二项定理有

$$
\begin{aligned}
& (\sqrt{3}+1)^{2m+1}-(\sqrt{3}-1)^{2m+1} \\
= & [(\sqrt{3})^{2m+1}+c_{2m+1}^1(\sqrt{3})^{2m}+c_{2m+1}^2(\sqrt{3})^{2m-1} \\
& +c_{2m+1}^3(\sqrt{3})^{2m-2}+\cdots+c_{2m+1}^{2m}\cdot(\sqrt{3})+1] \\
& -[(\sqrt{3})^{2m+1}-c_{2m+1}^1(\sqrt{3})^{2m}+c_{2m+1}^2(\sqrt{3})^{2m-1} \\
& -c_{2m+1}^3\cdot(\sqrt{3})^{2m-2}+\cdots+c_{2m+1}^{2m}(\sqrt{3})-1] \\
= & 2[c_{2m+1}^1(\sqrt{3})^{2m}+c_{2m+1}^3(\sqrt{3})^{2m-2}+\cdots+1] \\
= & 2[c_{2m+1}^1 3^m+c_{2m+1}^3 3^{m-1}+\cdots+1],
\end{aligned}
$$

可见确为整数。

证明 当 $m=1$ 时，$(\sqrt{3}+1)^3-(\sqrt{3}-1)^3=2^2\cdot5$ 能被 2^2 整除，不能被 2^4 或 2^3 整除. 当 $m=2$ 时验明亦然.

设 $m=k-2$ 与 $k-1$ 时命题正确. 此时令

$$(\sqrt{3}+1)^{2k-3}-(\sqrt{3}-1)^{2k-3}=2^{k-1}\cdot P;$$
$$(\sqrt{3}+1)^{2k-1}-(\sqrt{3}-1)^{2k-1}=2^{k}\cdot Q,$$

其中P、Q应是奇数. 则$m=k$时，有

则$m=k$时　令$\sqrt{3}+1=a$，$\sqrt{3}-1=b$有

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{3}+1)^{2k+1}-(\sqrt{3}-1)^{2k+1}\\
&=a^{2k+1}-b^{2k+1}=a^{2k-1}\cdot a^2-b^{2k-1}\cdot b^2\\
&=a^{2k-1}\cdot a^2+a^{2k-1}\cdot b^2-a^{2k-1}b^2+a^2b^{2k-1}-a^2b^{2k-1}-b^{2k-1}b^2\\
&=a^{2k-1}(a^2+b^2)-a^2b^2(a^{2k-3}-b^{2k-3})-b^{2k-1}(a^2+b^2)\\
&=(a^2+b^2)(a^{2k-1}-b^{2k-1})-a^2b^2(a^{2k-3}-b^{2k-3})\\
&=[(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2][(\sqrt{3}+1)^{2k-1}\\
&\quad-(\sqrt{3}-1)^{2k-1}]\\
&\quad-(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{3}-1)^2[(\sqrt{3}+1)^{2k-3}\\
&\quad-(\sqrt{3}-1)^{2k-3}]\\
&=8\cdot 2^k\cdot Q-4\cdot 2^{k-1}P\\
&=2^{k+1}(4Q-P),
\end{aligned}$$

其中$a=\sqrt{3}+1$，$b=\sqrt{3}-1$.

因由归纳法假设知P为奇数，又易知$4Q$为偶数，故$4Q-P$为奇数，即$4Q-P$无2的因子. 从而

$$(\sqrt{3}+1)^{2k+1}-(\sqrt{3}-1)^{2k+1}=2^{k+1}(4Q-P)$$

能被2^{k+1}整除，但不能被2^{2k+2}整除，也不能被2^{k+2}整除. 证毕.

例 18　若平面上的n条直线，其中任两直线都不平行，也无三直线共(交于一)点，则此n条直线分平面为$\frac{1}{2}n(n+1)+1$部分.

证明　令$f(n)=\frac{1}{2}n(n+1)+1$.

当 $n=1$ 时，$f(1)=2$ 与一直线分平面为两部分一致.

设 $n=k$ 时，k 条直线分平面为 $f(k)=\frac{1}{2}k(k+1)+1$ 部分，则 $n=k+1$ 时，有

$$f(k+1)-f(k)=\frac{1}{2}(k+1)(\overline{k+1}+1)+1-\left[\frac{1}{2}k(k+1)+1\right]$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)(k+2-k)=k+1,$$

即 $$f(k+1)=f(k)+(k+1).$$

这就是说，$k+1$条直线分平面为$f(k)+(k+1)$部分. 事实上：

在 k 条直线的基础上，依所设条件再增加一条直线时，就使平面在原有 $f(k)$ 个部分上再增加 $(k+1)$ 个部分. 证毕.

例 19　求证任何凸 $n(\geqslant 3)$ 边形都可变为一个和它等积的三角形.

证明　当 $n=3$ 时，命题显然正确.

当 $n=4$ 时，设任意凸四边形为 $ABCD$ (如图)，连结 AC，从 D 作 AC 的平行线，交 BC 的延长线于 E，则 $\triangle ABE$ 即为所求. 事实上，因为 $\triangle ACE$ 的面积 $=\triangle ACD$ 的面积，

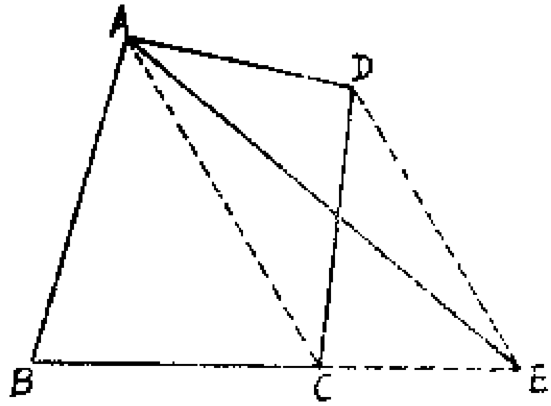


图 9—1

$\therefore$ $(\triangle ABC+\triangle ACE)$的面积

$=(\triangle ABC+\triangle ACD)$的面积，

即　　$\triangle ABE$ 的面积 = 凸四边形 $ABCD$ 的面积.

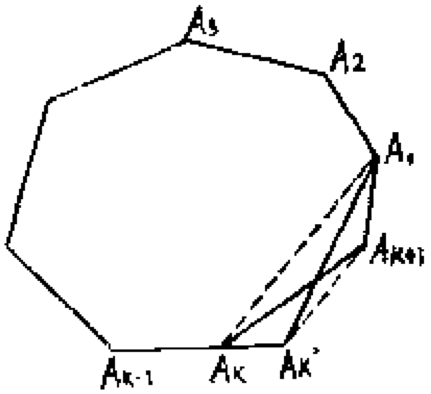


图 9—2

设 $n=k$ 时，命题正确．即任一凸 k 边形都可变形为一等积的三角形．则 $n=k+1$ 边形时（如图），联结 A_1A_k，并作 $A_{k+1}A_k' \parallel A_1A_k$，于是有 $\triangle A_1A_kA_k'$ 的面积 = $\triangle A_1A_kA_{k+1}$ 的面积，所以

凸 k 边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 的面积

$+\triangle A_1A_kA_k'$ 的面积

= 凸 k 边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 的面积 + $\triangle A_1A_kA_{k+1}$ 的面积.

即　凸 k 边形 $A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k'$ 的面积

= 凸 $(k+1)$ 边形 $A_1A_2,\cdots A_kA_{k+1}$ 的面积.

再依 $n=k$ 时所设，命题得证.

例 20　证明 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ 是关于 x 的 n 次多项式.

证明　当 $n=1$、2 时，$T_1(x)=\cos(\arccos x)=x$、$T_2(x)=\cos(2\arccos x)=2x^2-1$，命题成立.

设 $n=k-1$、k 时，$T_{k-1}(x)$、$T_k(x)$ 分别是关于 x 的 $k-1$ 次、k 次多项式．则 $n=k+1$ 时，从

$$
\begin{aligned}
&T_{k+1}(x)+T_{k-1}(x)\\
&=\cos[(k+1)\arccos x]+\cos[(k-1)\arccos x]\\
&=\cos[k\arccos x+\arccos x]\\
&\quad+\cos[k\arccos x-\arccos x]\\
&=\cos(k\arccos x)\cos(\arccos x)\\
&\quad-\sin(k\arccos x)\sin(\arccos x)
\end{aligned}
$$

$$+\cos(k\arccos x)\cos(\arccos x)$$

$$+\sin(k\arccos x)\sin(\arccos x)$$

$$=2\cdot x\cdot\cos(k\arccos x)=2xT_k(x),$$

移项可得

$$T_{k+1}(x)=2xT_k(x)-T_{k-1}(x)$$

是一关于 x 的 $k+1$ 次多项式．证毕．

注　$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ 叫契比谢夫多项式．

这里，既完成了论证，还给出了一个递归函数列．依此，有

$$T_3(x)=2xT_2(x)-T_1(x)=2x(2x^2-1)-x$$

$$=4x^3-3x.$$

$$T_4(x)=2xT_3(x)-T_2(x)$$

$$=2x(4x^3-3x)-(2x^2-1)$$

$$=8x^3-8x^2-1,$$

…………

反过来，用契比谢夫多项式，又可很快引出 $\cos nx$ 的表达式，即余弦倍角公式．例如，令 $\alpha=\arccos x$，则 $x=\cos\alpha$，于是，我们得到：

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,$$

$$\cos 4\alpha=8x^4-8x^2+1=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1,$$

$$\cos 5\alpha=16x^5-20x^3+5x$$

$$=16\cos^5\alpha-20\cos\alpha+5\cos\alpha,$$

…………

例 21　求证 $(2\cos x-1)(2\cos 2x-1)\cdots(2\cos 2^{n-1}x-1)$

$$=\frac{2\cos 2^n x+1}{2\cos x+1}.$$

证明　当 $n=1$ 时，左端 $=2\cos x-1$，右端 $=\dfrac{2\cos 2x+1}{2\cos x+1}$

$=\dfrac{4\cos^2 x-1}{2\cos x+1}=2\cos x-1$，等式成立.

设 $n=k$ 时，下式成立：

$$(2\cos x-1)(2\cos 2x-1)\cdots(2\cos 2^{k-1}x-1)=\frac{2\cos 2^k x+1}{2\cos x+1},$$

则 $n=k+1$ 时，令

$$M_k=\frac{2\cos 2^k x+1}{2\cos x+1}$$

则

$$\frac{M_{k+1}}{M_k}=\left(\frac{2\cos 2^{k+1}x+1}{2\cos x+1}\right)\Big/\left(\frac{2\cos 2^k x+1}{2\cos x+1}\right)$$

$$=\frac{2\cos 2^{k+1}x+1}{2\cos 2^k x+1}=\frac{2\cos 2\cdot 2^k x+1}{2\cos 2^k x+1}$$

$$=\frac{4(\cos 2^k x)^2-1}{2\cos 2^k x+1}=2\cos 2^k x-1$$

由此有　$M_{k+1}=(2\cos 2^k x-1)\cdot M_k$

即

$$\frac{2\cos 2^{k+1}x+1}{2\cos x+1}=(2\cos 2^k x-1)\cdot\frac{2\cos 2^k x+1}{2\cos x+1}$$

$$=(2\cos x-1)(2\cos 2x-1)\cdots(2\cos 2^{k-1}x-1)$$

$$\cdot(2\cos 2^k x-1).$$

证毕.

注　本题采用倒过来证，方法甚便. 但需注意 $M_k\neq 0$.

习　题　九

下列 1—4 题在应用数学归纳法时有无错误？若有，错在那里？

1. 证明：

$$\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

当 $n=1$ 时，$\frac{1}{1\cdot3\cdot5}=\frac{1}{15}$；$\frac{1\cdot(1+1)}{2(2+1)(2+3)}=\frac{2}{2\cdot3\cdot5}$

$=\frac{1}{15}$. 等式成立.

设$\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$

$=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}$成立.

则 $n=k+1$ 时，

$$\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2}{3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$$

$$+\frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2[2(k+1)+1][2(k+1)+3]}$$得证.

2. 费尔马曾考察过形如 $2^{2^n}+1$ 的数（其中 n 为非负整数）：

$F_0=2^{2^0}+1=2^1+1=3$ 是质数；

$F_1=2^{2^1}+1=2^2+1=5$ 是质数；

$F_2=2^{2^2}+1=2^4+1=17$ 是质数；

$F_3=2^{2^3}+1=2^8+1=257$ 是质数；

$F_4=2^{2^4}+1=2^{16}+1=65537$ 是质数；

因此费尔马曾猜测：形为 $2^{2^n}+1$ 的数都是质数.

3. 所谓巴罗(Barlow)质数式 $2n^2+29$:

当 $n=1$ 时，得 $2+29=31$

当 $n=2$ 时，得 $8+29=37$

当 $n=3$ 时，得 $18+29=47$

当 $n=4$ 时，得 $32+29=61$

当 $n=5$ 时，得 $50+29=79$

当 $n=6$ 时，得 $72+29=101$

…………

一直到 $n=28$ 时，得 $1568+29=1597$ 都是质数。故 $2n^2+29$ 对任意自然数都是质数。

4. 证明对于任意自然数 n，$n^2+(n+1)^2$ 是 4 的倍数。

设 $n=k$ 时，$k^2+(k+1)^2$ 是 4 的倍数。

当 $n=k+1$ 时，$(k+1)^2+(k+2)^2=(k+1)^2+k^2+4k+4$ $=[k^2+(k+1)^2]+4(k+1)$

由于 $k^2+(k+1)^2$ 是 4 的倍数，$4(k+1)$ 也是 4 的倍数。故 $n^2+(n+1)^2$ 是 4 的倍数。

5. 试证：$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$

$$=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1).$$

6. 由 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2),$$

$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3),$$

…………

归纳出 $1\cdot2\cdot3\cdots k+2\cdot3\cdots(k+1)+\cdots$

$$+n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)$$

$$=\frac{1}{k+1}n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)$$，试证之.

7．由 $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$,

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1},$$

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1},$$

…………

归纳出 $\frac{1}{1\cdot(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(2k+1)}+\cdots$

$+\frac{1}{[kn-(k-1)](kn+1)}=\frac{n}{kn+1}$，试证之.

8． $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}$

$$=\frac{2^n+(-1)^{n+1}(6n+1)}{9\cdot2^{n-1}}.$$

9． $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$

10．试从

$$1=1$$

$$1-4=-(1+2)$$

$$1-4+9=1+2+3$$

$$1-4+9-16=-(1+2+3+4)$$

…………

推测出一般式，并加以证明.

11．试从

$$1=1$$

$$3+5=8$$

$$7+9+11=27$$

$$13+15+17+19=64$$

$$21+23+25+27+29=125$$

$$\cdots\cdots$$

推测出一般式，并加以证明.

12. 试从

$$1=1$$

$$2+3+4=1+8$$

$$5+6+7+8+9=8+27$$

$$10+11+12+13+14+15+16=27+64$$

$$\cdots\cdots$$

推测出一般式，并加以证明.

13. 设 $s(n)=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$，则

$$s(1)=\frac{1}{2};\quad s(2)=\frac{5}{6};\quad s(3)=\frac{23}{24}\cdots.$$

试进一步求 $s(n)$ 的表达式.

14. 对于大于 1 的自然数 n，试证 $\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

15. 对于大于 1 的自然数 n，试证 $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

16. 已知：$a>-1$ 且 $a\neq 0$，又 n 为大于 1 的自然数，试证：

$$(1+a)^n>1+na.$$

17. 对于任何自然数 n，及 $x>0$，试证：

$$x^n+x^{n-2}+\cdots+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^n}\geqslant n+1.$$

18. 数列 J_1，J_2，J_3，…按照法则 $J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2}$ 组成，

并且$J_1=-1$，$J_2=\frac{1}{2}$；求证：$J_n=(-1)^n\frac{(n-1)!!}{n!!}$.

19．设数对(a_0, b_0)，(a_1, b_1)，(a_2, b_2)，…根据下述规律组成：$a_1=\frac{a_0+b_0}{2}$，$b_1=\frac{a_1+b_0}{2}$；$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$，$b_2=\frac{a_2+b_1}{2}$，…试证：

$$a_n=a_0+\frac{2}{3}(b_0-a_0)\left(1-\frac{1}{4^n}\right);$$

$$b_n=a_0+\frac{2}{3}(b_0-a_0)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^n}\right).$$

20．数列a_1，a_2，a_3，……；b_1，b_2，b_3……由关系式：

$$a_{n+1}=-2a_n+4b_n,\qquad b_{n+1}=-5a_n+7b_n;$$

$$a_1=-10,\qquad b_1=-13$$

所确定，求a_n和b_n.

21．求方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=m$正整数解的组数．(m、n为正整数，且$m>n$)．

22．试证：$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_1a_n+a_2a_3+a_2a_4+\cdots+a_2a_n+\cdots+a_{n-1}a_n)$.

23．试证等差数列的通项是$a_n=a_1+(n-1)d$.

24．求证三个连续整数的立方和能被9整除.

25．设n为自然数，则$11^{n+2}+12^{2n+1}$能被133所整除.

26．设n为自然数，则$5^{6n+5}+7^{6n+7}$能被9整除.

27．对大于1的自然数n，$n^{n-1}-1$能被$(n-1)^2$整除.

28．试证 $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$

$$=\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{2(1-\cos x)}=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

29. 试证 $\cos x+2\cos 2x+\cdots+n\cos nx$

$$=\frac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

30. 试证 $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cdots\cos 2^{n-1}\alpha=\frac{\sin 2^n\alpha}{2^n\sin\alpha}$

31. 试证 $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}$

$$=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^n}-\operatorname{ctg}\alpha.\quad(\alpha\neq m\pi)$$

32. 试证 $arc\operatorname{ctg}3+arc\operatorname{ctg}5+\cdots+arc\operatorname{ctg}(2n+1)$

$$=arc\operatorname{tg}2+arc\operatorname{tg}\frac{3}{2}+\cdots+arc\operatorname{tg}\frac{n+1}{n}$$

$$-narc\operatorname{tg}1.$$

33. 试证 $\sin x+2\sin 2x+\cdots+n\sin nx$

$$=\frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

34. 试证 $1+\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}+\frac{\cos 3x}{\cos^3 x}+\cdots+\frac{\cos nx}{\cos^n x}$

$$=\frac{\sin(n+1)x}{\cos^n x\sin x}.$$

35. 试证 $(\sqrt{3}+i)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right).$

36. 试证 $(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx.$

37. 从 $2n$ 个数 1, 2, 3, …, $2n$ 中, 任取 $n+1$ 个数, 试证这 $n+1$ 个数中, 至少有这样两个数, 其中一个可以除尽另一个.

38. 平面上有 n 条直线把平面分成若干区域

附　录

整除性与中国剩余定理
——数论初步

§1. 整除性概念及其基本性质

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$$

叫自然数。在自然数(N)集中,

自然数＋自然数＝自然数;

自然数×自然数＝自然数.

但自然数减自然数，却不一定是自然数，可以是零，也可以是负整数.

自然数又叫正整数．正整数，零，和负整数，统称为整数．下面若不特别声明，所用

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \cdots,\ p,\ q,\ r,\ \cdots,\ x,\ y,\ z$$

都表示整数.

整数＋整数＝整数,

整数－整数＝整数,

整数×整数＝整数.

究竟怎样的整数除以怎样的整数才能得到整数呢？这就是整除性的问题.

若 $b\neq 0$，且 $0\leqslant r<|b|$，则任何整数 a 都可用余数形式

$$a=bq+r$$

表示．其中 q 叫不完全商，为简便起见 q 也称商．r 叫余数．

当 $r=0$ 时，则称 a 被 b 整除．或说 b 整除 a，或 a 是 b 的倍数，b 是 a 的约数．常记作

$$b \nmid a$$

当 $r\neq 0$ 时，则称 a 不被 b 整除．常记作

$$b \nmid a.$$

如　$3|6$，　　$9|534726$.

为熟悉这记号，请填填空

8 给 4 整除　(　　　)|(　　　)，

5 整除 715　(　　　)|(　　　)，

86386 不被 11 整除　(　　　)∤(　　　)．

这种记号与分数相比较，恰巧相反，被除数是置于后面而不在前面．

根据整除的概念，显然任何整数都能为 1 及自身所整除．即

$$1|a \quad 及 \quad a|a.$$

通常称仅为 1 与自身所整除，且大于 1 的整数为素数或质数．否则为合数．因此对素数说来整数可分为三类：

① 1，　② 素数集，　③ 合数集

在思考整除性问题时，常牵涉下列定理：

定理 1　若 $a|b$，$b|c$　则　$a|c$.

证明　已知　$a|b$　即　$b=aq_1$，

$b|c$　即　$c=bq_2$.

$$\therefore \quad c=bq_2=(aq_1)q_2=a(q_1q_2)$$

由于整数 × 整数 = 整数，故 c 为 a 所整除．

定理 2　若 $a|b$ 及 $a|c$ 则 $a|(b+c)$.

证明　已知 $a|b$ 即 $b=aq_1$,

$a|c$ 即 $c=aq_2$.

$$\therefore\quad b+c=aq_1+aq_2=a(q_1+q_2)$$

由于整数+整数=整数，故 $a|(b+c)$.

类似还可证明下列一些定理.

定理 3　若 $a|b$ 则 $a|bx$.

定理 4　若 $a|b$ 且 $c\neq0$ 则 $ac|bc$.

反之，若 $ac|bc$ 且 $c\neq0$ 则 $a|b$.

定理 5　若 $a|c$, $b|d$, 则 $ab|cd$.

综合上述，举例如下：

例 1　试证合数为无穷多.

证　由于 2^n, $n=2, 3, \cdots, k, \cdots$ 都是合数，故合数应为无穷多.

例 2　试证素数为无穷多.

证　用反证法. 设素数仅为有限多，即设素数仅有

$$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$$

个. 并设

$$a=p_1p_2p_3\cdots p_n+1$$

则 a 被 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ 中任一个素数除后，从上式一目了然其余数

$$r=1.$$

这就表明 a 不能被任何素数除尽，于是 a 应为素数，这便与“设素数仅为有限多”矛盾. 可见素数不能为有限多，应为无穷多.

例 3　若 $(m-p)|(mn+pq)$ 则

$$(m-p)|(mq+np).$$

证 $mq+np=mq+np-mn-pq+mn+pq$

$=q(m-p)-n(m-p)+(mn+pq)$

$=(m-p)(q-n)+(mn+pq).$

由于整数－整数＝整数，故$(q-n)$为整数，于是

$$(m-p)|(m-p)(q-n)$$

又已知 $(m-p)|(mn+pq)$

依定理 2 故此得证 $(m-p)|(mq+np).$

例 4 设 $4x-y$ 为 3 的倍数，求证 $4x^2+7xy-2y^2$ 是 9 的倍数.

证 $4x^2+7xy-2y^2=(4x-y)(x+2y)$

已知 $3|(4x-y)$

而 $x+2y=4x-y-3x+3y$

$=(4x-y)-3(x-y)$

$\therefore\ 3|(x+2y)$

依定理 5 得证

$$3^2|(x+2y)(4x-y)=4x^2+7xy-2y^2.$$

这里，尽可能熟记一下：

① 整数与整数的和、差、积仍是整数.

② 整除的概念与记号.

③ 整除性定理 1—5.

§2. 一些十进制的整除性

在十进制数系中

(1) 若一数的末位数能被 2（或 5）整除时，则此数必为 2（或 5）所整除．换句话说：

凡末位数是 0，2，4，6，8 的都能被 2 整除.

凡末位数是 0，5 的都能被 5 整除.

(2) 若一数的末两位数能被 4(或 25)整除时，则此数必能被 4(或 25)所整除.

(3) 若一数的末三位数能被 8（或 125)整除时，则此数必能被 8（或 125)所整除.

(4) 若一数的数码和是 9(或 3)的倍数，则此数是 9(或 3)的倍数. 否则不是.

(5) 若一数的奇位上的数码和与偶位上的数码和的差是 11 的倍数，则此数是 11 的倍数. 否则不是.

(6) 任意 n 个连续自然数的积，必被 $n!$ 所整除.

在论证这些规律前，先引进

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$$

表示任一整数，其中

$$a_i, \quad i=1, 2, \cdots, n$$

各表一十进制数系中的基数(即指 0，1，2，…，9)它们中有的是表示相同的基数，如

$$a_1a_2a_3a_4=2732$$

即 $\qquad a_1=2, \quad a_2=7, \quad a_3=3, \quad a_4=2.$

这里 $a_1a_2\cdots a_n$ 之间的关系不是相乘，而是指

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n=a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\cdot 10+a_n.$$

关于(1)的证明：由

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n=a_1a_2\cdots a_{n-1}0+a_n$$

已知某末位数被 2 整除(或被 5 整除)，即

$$2\mid a_n \qquad (\text{或 } 5\mid a_n)$$

又 $\qquad 2\mid a_1a_2\cdots a_{n-1}0 \quad (\text{或 } 5\mid a_1a_2\cdots a_{n-1}0)$

再依上节定理2，于是

$$2\mid(a_1a_2\cdots a_{n-1}0+a_n)=a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$$

（或 $5\mid a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$）.

同理可证(2)与(3). 而(4)与(5)的证明留待下节.

关于(6)的证明：设某 n 个连续自然数的积为

$$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$$

则它被 $n!$ 除正是

$$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}=C_m^n$$

为一整数.

例 5 求证 ① $9\mid 534726$； ② $9\nmid 9456$；

③ $3\mid 9456$； ④ $11\mid 86383$.

证 ① 由于534726的数码和 $(5+4)+(6+3)+(7+2)$ 恰是9的倍数，故依规律(4)

$$9\mid 534726.$$

② 由于9456的数码和 $9+(4+5)+6$ 不是9的倍数，而是3的倍数，故依规律(4)

$$9\nmid 9456;\quad 3\mid 9456.$$

③ 由于86383的奇位上的数码和为

$$8+3+3=14$$

偶位上的数码和为

$$8+6=14,$$

差为 $\quad 14-14=0$

故能为11所整除，依规律(5)

$$11\mid 86383.$$

例 6 已知 $695xy155$ 这个8位数是99的倍数，求数码

x 和 y.

解 要 $99\mid 695xy155$，则需

$$9\mid 695xy155,\qquad 11\mid 695xy155$$

依规律(4)和(5)，则需

$$9\mid(6+9+5+x+y+1+5+5)$$

即 $$9\mid(4+x+y)$$

由于 x 与 y 分别是十进制的基数，当 $9\mid(4+x+y)$ 时，

$$x+y=5\quad 或\quad x+y=14.$$

又 $$11\mid(5+1+x+9)-(5+y+5+6)=x-y-1$$

当 $x-y=1$ 时方被 11 所整除.

$$\begin{cases}x+y=14\\x-y=1\end{cases}$$

无整数解. 而

$$\begin{cases}x+y=5\\x-y=1\end{cases}$$

得 $x=3$，$y=2$ 是为所求.

例 7 设 n 为自然数，证明 n^3+11n 能被 6 整除.

解 $n^3+11n=n^3-n+12n=n(n-1)(n+1)+12n$

由于依规律(6)

$$3!\mid(n-1)n(n+1)$$

又 $6\mid 12n$，$\quad\therefore\quad 6\mid n^3+11n$.

例 8 设 n 为自然数，证明 n^5-n 能被 30 所整除.

证 用归纳法证.

当 $n=1$ 时，$1-1=0$，

设 $n=k$ 时，$30\mid k^5-k$，

则 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
&(k+1)^5-(k+1)\\
&=k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1-k-1\\
&=(k^5-k)+5k(k^3+2k^2+2k+1)\\
&=(k^5-k)+5k(k+1)(k^2+k+1)\\
&=(k^5-k)+5k(k+1)(k^2+2k-k-2+3)\\
&=(k^5-k)+5k(k+1)(k+2)(k-1)+15k(k+1)
\end{aligned}
$$

由于设 $30\mid k^5-k$

又 $5\cdot 4!=120\mid 5k(k+1)(k+2)(k-1)$

$30\mid 15k(k+1)$.

$\therefore\quad 30\mid (k+1)^5-(k+1)$.

尽可能熟记一下：在十进制中整除性规律(1)—(6).

§3. 同余式

若 $\begin{array}{l} a=q_1m+r\\ b=q_2m+r \end{array}\quad 0\leqslant r<m$

则称对于模(*Module*)m，a 与 b 同余．或对于模 m，b 与 a 同余．常记作

$$\left.\begin{array}{ll} a\equiv b & (Mod\ \ m)\\ b\equiv a & (Mod\ \ m)\end{array}\right.\quad (\text{对称性}).$$

由此，任何(整)数与其自身同余．

$$a\equiv a\quad (Mod\ \ m)\qquad (\text{自反性}).$$

并且，若 $a\equiv b(Mod\ \ m)$，$b\equiv c(Mod\ \ m)$，则

$$a\equiv c\quad (Mod\ \ m)\qquad (\text{传递性}).$$

同余的观念，在日常生活中，是经常用到的．如每天中午 12 时吃午饭，它是对模 24 小时说的；每星期三上××课，它是对模 7 天说的．

同余的概念，除上述直观的定义外，也常用：

若 a 与 b 的差是 m 的倍数，则对于 m，a 与 b 同余．且同样记作

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

数学上，对这样的概念问题，是常以充分必要条件出现，即 a 与 b 对模 m 同余的充要条件是：a 与 b 的差是 m 的倍数．

即"充分性"：已知 $\quad m\mid(a-b)\quad$ 则 $\quad r_1=r_2$．

其中 $\qquad a=q_1m+r_1,\qquad b=q_2m+r_2$

$$0\leqslant r_1<m,\qquad 0\leqslant r_2<m.$$

事实上 $m\mid(a-b)=(q_1-q_2)m+(r_1-r_2)$，故 $m\mid(r_1-r_2)$，由于 $r_1-r_2<m$

$\therefore\quad |r_1-r_2|=0,\qquad$ 即 $\quad r_1=r_2$．

"必要性"：已知 $\quad a=mq_1+r$；$b=mq_2+r$．

则 $\qquad m\mid(a-b)$．

事实上，依已知 $a-b=m(q_1-q_2)$．

$\therefore\quad m\mid(a-b)$．

凡充分必要条件都可作定义用．

因此同余问题与整除性密切相关．

一、同余的基本性质

关于同余的基本性质，除了上述对称性、自反性、传递性外，还有下列分别叙述的一系列基本性质．

定理 1　若 $a\equiv b\pmod{m}$，$c\equiv d\pmod{m}$．则

① $a+c\equiv b+d\pmod{m}$

② $a-c\equiv b-d\pmod{m}$

③ $a\cdot c\equiv b\cdot d\pmod{m}$

证　已知 $\quad m\mid(a-b)$，$m\mid(c-d)$

依整除性定理可得

$$m\mid(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d);$$

与 $$m\mid(a-b)-(c-d)=(a-c)-(b-d);$$

$$m\mid c(a-b)+b(c-d)=ac-bd.$$

推论1 若 $a\equiv b(Mod\ m)$ 则

① $a+k\equiv b+k\quad(Mod\ m)$,

② $a-k\equiv b-k\quad(Mod\ m)$,

③ $ak\equiv bk\quad(Mod\ m)$,

④ $a^n\equiv b^n\quad(Mod\ m)$. $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

推论2 若 $a_k\equiv b_k\quad(Mod\ m)$, $k=1,\ 2,\ 3,\cdots,n$.

$x_k\equiv y_k\quad(Mod\ m)$, $k=1,2,3,\cdots,l$.

则 $$f(a_1,a_2,\cdots,a_n;x_1,x_2,\cdots,x_l)$$
$$\equiv f(b_1,b_2,\cdots,b_n;y_1,y_2,\cdots,y_l)$$

其中 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n;x_1,x_2,\cdots,x_l)$ 是 $x_1,\ x_2,\cdots,x_l$ 的有理整函数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是整系数.

例 9 由于 $100\equiv4\quad(Mod\ 8)$ 及

$56\equiv0(Mnd\ 8)$, $-27\equiv-3(Mod\ 8)$,

$-41\equiv-1(Mod\ 8)$.

$x^2\equiv x^2(Mod\ 8)$, $xy\equiv xy(Mod\ 8)$, $y\equiv y(Mod\ 8)$

$\therefore\quad 100x^2+56xy-27y-41\equiv4x^2-3y-1\quad(Mod\ 8)$.

定理 2 若 $ac\equiv bc\quad(Mod\ m)$ 且 $(c,\ m)=d>1$，则

$$a\equiv b\left(Mod\frac{m}{d}\right)$$

注 $(c,m)=d$ 表示 c 与 m 的最大公约数 d.

证 已知 $(c,\ m)=d>1$，设 $c=c_1d$，$m=m_1d$，故 $(c_1,\ m_1)=1$.

由 $m\mid(ac-bc)=c(a-b)$ 得

$$m_1\mid c_1(a-b).$$

又因 $(c_1,\ m_1)=1$，故 $m_1\mid(a-b)$，而 $m_1=\dfrac{m}{d}$，

$$\therefore\quad a\equiv b\left(Mod\frac{m}{d}\right).$$

例如 $15\equiv33\ (Mod\ 6)$，由于 $(3,\ 6)=3$

$$\therefore\quad 5\equiv11\left(Mod\frac{6}{3}\right)$$

即 $\qquad 5\equiv11\ (Mod\ 2)$

如 $20\equiv4\ (Mod\ 16)$，由于 $(4,\ 16)=4$，若不注意，则将发生：

$$5\equiv1\ (Mod\ 16),$$

而 $\qquad 5\not\equiv1\ (Mod\ 16)\qquad 5\equiv1\ (Mod\ 4).$

一般同余式两边的公约数和 m 有一公约数 $d>1$ 时，也可以用 $(Mod\ m)$ 而不必 $\left(Mod\dfrac{m}{d}\right)$.

如 $\quad 6\equiv26\ (Mod\ 10)$

可得 $\quad 3\equiv13\ (Mod\ 10)$

也可得 $\quad 3\equiv13\ (Mod\ 5)$

只是不用 d 去除 m 时，应稍加注意仍否同余.

定理 3 若 $a\equiv b\ (Mod\ m)$，则 $ac\equiv bc\ (Mod\ cm)$.

证 由 $m\mid(a-b)$ 可得 $cm\mid c(a-b)$.

定理 4 若 $a\equiv b\ (Mod\ m)$，且 $m_1\mid m$，则

$$a\equiv b(Mod\ m_1).$$

证 因 $m_1\mid m$，且 $m\mid(a-b)$，故 $m_1\mid(a-b)$，

如 $\quad 10\equiv2\ (Mod\ 8)$，

$\qquad 10\equiv2\ (Mod\ 4)$，

$10 \equiv 2 \pmod{2}$.

有了同余的概念与性质，则上节规律(4)、(5)将得到证明.

关于规律(4)的证明：

由于任何基数 a_i 都有

$$a_i \equiv a_i \pmod{9},\ a_i \cdot 10^n \equiv a_i \pmod{9} \quad (n\text{为自然数})$$

如 $5 \equiv 5 \pmod{9}$; $7 \equiv 7 \pmod{9}$;

$70 \equiv 7 \pmod{9}$; $70000 \equiv 7 \pmod{9}$.

$$\therefore \quad a_1a_2\cdots a_n = a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\cdot 10 + a_n$$

$$\equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \pmod{9}$$

这就证明了从数码和能否给 9 整除则该数能否给 9 整除.

关于规律(5)的证明：

由于 $10 \equiv -1 \pmod{11}$; $10^2 \equiv 1 \pmod{11}$; $\cdots$,

$10^{2k+1} \equiv -1 \pmod{11}$; $10^{2k} \equiv 1 \pmod{11}$.

$k = 1, 2, 3, \cdots, n$.

$$\therefore \quad a_1a_2\cdots a_{2k}a_{2k+1} = a_1 10^{2n} + a_2 10^{2n-1} + \cdots + a_{2n}10 + a_{2n+1}$$

$$\equiv a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2n} + a_{2n-1}$$

$$= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}) - (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}) \pmod{11}$$

又当此数是偶位数时，其证明类推.

例 10 关于去 9 验算法.

任何两数相乘，如

$$\begin{array}{r} 7\,3\,5\,8 \\ \times \quad 9\,6\,7 \\ \hline 5\,1\,5\,0\,6 \\ 4\,4\,1\,4\,8 \\ 6\,6\,2\,2\,2 \\ \hline 7\,1\,1\,5\,1\,8\,6 \end{array}$$

这是否乘对了呢？用交叉去 9 验算法，一般是很灵验的．即

（第 3 步）

交叉积去 9

$5\times4=20\equiv2\ (Mod\ 9)$

↓

（第 1 步）		（第 2 步）
被乘数数码和去 9 得 $7+3+5+8=23\equiv5\ (Mod\ 9)$ →	5　②　4　②	← 乘数数码和去 9 得 $9+6+7=22\equiv4\ (Mod\ 9)$

↑

（第 4 步）

乘积数数码和去 9 得

$7+1+1+5+1+8+6=29\equiv2\ (Mod\ 9)$

当第 3 步与第 4 步去 9 后的余数相同时，则基本上是验对了．否则计算有误．

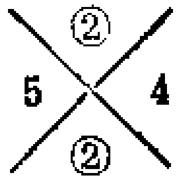
其理论根据是：

$$7358=7000+300+50+8\equiv7+3+5+8$$
$$=23\equiv5\ (Mod\ 9)$$
$$967=900+60+7\equiv9+6+7=22\equiv4\ (Mod\ 9)$$
$$7358\times967\equiv5\times4=20\equiv2\ (Mod\ 9)$$
$$7115186=7000000+100000+10000$$
$$+5000+100+80+6$$
$$\equiv7+1+1+5+1+8+6=29\equiv2\ (Mod\ 9)$$

即对于模 9，7358×967 与 7115186 同余(2)．

显然，任何数 $a=a_1a_2\cdots a_n$ 与 $b=b_1b_2\cdots b_m$ 相乘，都可用此法检验，其理论根据也一样．但要指出的是，若每一步没算错而仅是数位搞错了，则这种方法失灵．如 7358×967 错

为 $7538 \times 967 = 7289246$，则用



验算不出来.

尽可能多熟悉一下：

① 同余的概念与记法.

② 同余的性质 1—4 及二个推论.

二、费尔马小定理

若两数的公因子仅为 1，则此两数互质. 即 $(a, b) = 1$ 表明 a 与 b 互质.

如：比 8 小且和 8 互质的正整数是 1，3，5，7 共 4 个.

又如：比 15 小且和 15 互质的自然数是 1，2，4，7，8，11，13，14 共 8 个.

不大于 a 且和 a 互质的自然数的个数记为 $\varphi(a)$. 则上述可记作 $\varphi(8) = 4$，$\varphi(15) = 8$.

又 $\varphi(2) = 1$，$\varphi(3) = 2$，$\varphi(4) = 2$，$\varphi(5) = 4$，$\varphi(6) = 2$，$\varphi(7) = 6$，…

由于质数 p 与它前 $(n-1)$ 个正整数都互质，故

$$\varphi(p) = p - 1.$$

一般 $\varphi(a)$ 可按下法算得：

若 $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$

则 $$\varphi(a) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1)\, p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \cdots p_n^{\alpha_n - 1}(p_n - 1).$$

例 11 $$\varphi(280) = \varphi(2^3 \cdot 5 \cdot 7) = 2^{3-1}(2-1)\, 5^{1-1}(5-1) \cdot 7^{1-1}(7-1) = 2^2 \cdot 4 \cdot 6 = 96$$

费尔马—欧拉(Fermat-Euler)定理：

若 $(a, m)=1$，则 $a^{\varphi(m)-1}\equiv 1\ (Mod\ m)$

例 12 $13^{1980}\equiv ?\ (Mod\ 60)$

解 因 $(13, 60)=1$，$\varphi(60)=\varphi(2^2\cdot 3\cdot 5)=16$

$\therefore\quad 13^{16}\equiv 1\ (Mod\ 60)$

又 $\quad 1980=16\times 123+12$

$$\therefore\quad 13^{1980}=13^{16\times 123+12}=(13^{16})^{123}\cdot 13^{12}\equiv 13^{12}$$
$$=169^6\equiv(-11)^6=121^3\equiv 1^3=1\ (Mod\ 60)$$

费尔马小定理：若 m 是素数，且 $(a, m)=1$ 时，则

$$a^{m-1}\equiv 1\ (Mod\ m)$$

事实上，当 m 是素数时，$\varphi(m)=m-1$，故费尔马小定理是费尔马—欧拉定理的特例.

例 13 $195^{196}\equiv ?\ (Mod\ 23)$

解 由于 $196=22\times 8+20$，$195=23\times 8+11$，

$$195\equiv 11\ (Mod\ 23)$$

$$\therefore\quad 195^{196}\equiv 11^{196}=11^{22\times 8+20}\equiv 11^{20}$$
$$=121^{10}\equiv 6^{10}=36^5\equiv 13^5\equiv(-10)^5$$
$$=(-10)\cdot 100^2\equiv(-10)\cdot 8^2\equiv(-10)(-5)$$
$$=50\equiv 4\ (Mod\ 23)$$

例 14 $2^9\equiv ?\ (Mod\ 14)$

解 由于 $(14, 2)=2$，考虑 $2^8\equiv ?\ (Mod\ 7)$

依费尔马小定理有

$$2^{7-1}=2^6\equiv 1\ (Mod\ 7)$$

而 $\quad 2^8=2^6\cdot 2^2\equiv 2^2\equiv 4\ (Mod\ 7)$

$\therefore\quad 2^9\equiv 8\ (Mod\ 14)$.

例 15 $1949^{1979^{2000}}\equiv ?\ (Mod\ 7)$

解 由于 $(1949, 7)=1$，$\quad\therefore\quad 1949^6\equiv 1\ (Mod\ 7)$

又$(1979,\ 6)=1$，所以，

$$1979^{2000}=(1979^6)^{333}\cdot 1979^2\equiv 1979^2$$
$$\equiv 5^2\equiv 1\ (Mod\ 6)$$

于是有 $1949^{1979^{2000}}=1949^{6n+1}\equiv 1949\equiv 3\ (Mod\ 7)$。

注意熟悉：① $\varphi(a)$的含意与求法

② 费尔马—欧拉定理及费尔马小定理.

注　关于费尔马—欧拉定理的证明：

通过同余式的对称性、自反性、传递性，说明整数可分为若干同余类，余数相同的为同一类，余数相异的为异类.这样依模 m 分成 m 个同余类.

根据这样的分类，对于欧拉函数 $\varphi(m)$说来，$\varphi(m)$ 原表示比 m 小与 m 互质的自然数个数，现在也可以说 $\varphi(m)$ 为与 m 互质的类的个数．在与 m 互质的各类中各取一代表.

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{\varphi(m)},$$

代表着 $\varphi(m)$ 类，这又称为缩剩余系或缩系.

对于这缩系，当 a 与 m 互质时，则

$$aa_1,\ aa_2,\ \cdots,\ aa_{\varphi(m)}$$

也是一缩系．此命题可用反证法证明.

设 a_i，a_j 为缩系 a_1，a_2，$\cdots$，$a_{\varphi(m)}$ 中二类代表，显然这里所指 a_i 与 a_j 是非同余类的．若

$$aa_i\equiv aa_j\ (Mod\ m)$$

则因$(a,\ m)=1$，故得

$$a_i\equiv a_j\ (Mod\ m)$$

由此矛盾，应有　$aa_i\not\equiv aa_j\ (Mod\ m)$.

有了这，即可证明费尔马—欧拉定理.

已知：$(a,\ m)=1$．求证：$a^{\varphi(m)}\equiv 1\ (Mod\ m)$

证　依上一命题有

$$(aa_1)(aa_2)\cdots(aa_{\varphi(m)})\equiv a_1a_2\cdots a_{\varphi(m)}\ (Mod\ m)$$

即　$a^{\varphi(m)}\cdot a_1a_2\cdots a_{\varphi(m)}\equiv a_1a_2\cdots a_{\varphi(m)}\ (Mod\ m)$

由于　$(m,\ a_i)=1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ \varphi(m).$

$\therefore\quad a^{\varphi(m)}\equiv 1\ (Mod\ m).$

§4. 解同余式、中国剩余定理

含有变数形如

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\equiv 0\ (Mod\ m)$$

的同余式叫代数同余式．其中 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ 都是整数．当 $x=\alpha$ 满足代数同余式时，则 α 叫做它的根或解．

例如 $x=2$ 不是 $x^3+x+1\equiv 0\ (Mod\ 3)$ 的解，因为

$$2^3+2+1=11\not\equiv 0\ (Mod\ 3).$$

$x=1$ 是 $x^3+x+1\equiv 0\ (Mod\ 3)$ 的解，因为

$$1+1+1=3\equiv 0\ (Mod\ 3)$$

一、一次同余式

任何一个一元一次同余式，都可简化成

$$ax\equiv b\ (Mod\ m) \tag{1}$$

其中 a 不是 m 的倍数，否则除非 $b=0$.

当 $(a,\ m)=1$ 时，(1) 有解且是唯一的．

因为 $(a,\ m)=1$，故依欧拉—费尔马定理有

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1\ (Mod\ m) \tag{2}$$

依同余式定理，(1) 式两边同乘 $a^{\varphi(m)-1}$ 可得

$$a^{\varphi(m)}x\equiv ba^{\varphi(m)-1}\ (Mod\ m) \tag{3}$$

依 (2) 对于 (3) 则得

$$x\equiv ba^{\varphi(m)-1}\ (Mod\ m)$$

这，不仅给出了有解且是唯一的证明，而且连解的形式也给出了.

例 16 求 $8x\equiv 9(Mod\ 11)$ 的解.

解一 由于 $(8,\ 11)=1$

$$\therefore\quad x\equiv 9\cdot 8^{\varphi(11)-1}=9\cdot 8^{9}\equiv(-2)(-3)^{9}=6\cdot 9^{4}$$
$$=54\cdot 9^{3}\equiv(-1)\cdot(-2)^{3}=8(Mod\ 11)$$

解二 先将(1)写成 $x\equiv\frac{b}{a}\ (Mod\ m)$，再依同余式定理使分子分母同乘一数，与转化成同余数的方法，力求分母化成 ± 1.

$$\therefore\quad x\equiv\frac{9}{8}\equiv\frac{36}{32}\equiv\frac{3}{-1}\equiv -3\equiv 8(Mod\ 11).$$

此外，应该指出：

① 若 $(a,\ m)=d>1$，$d\nmid b$ 则(1)无解.

② 若 $(a,\ m)=d>1$，$d\mid b$ 则(1)有 d 个解.

设 r 是对模 μ 的一个根，其中 $\mu=\frac{m}{d}$，则

$$r,\ r+\mu,\ r+2\mu,\ \cdots,\ r+(d-1)\mu.$$

为(1)的 d 个根.

例 17 解同余式 $111x\equiv 75(Mod\ 321)$

解 由于 $(111,\ 321)=3$，$3\mid 75$，于是从

$37x\equiv 25(Mod\ 107)$

可得 $$x\equiv\frac{25}{37}\equiv\frac{75}{111}\equiv\frac{-32}{4}\equiv -8\equiv 99(Mod\ 107)$$

故原式的三个根为

$$x\equiv 99;\ 99+107;\ 99+214=99;\ 206;\ 313(Mod\ 321).$$

例 18 $2x\equiv 3(Mod\ 4)$

解 $(2,4)=2$, $2\nmid 3$ 故无解.

解一次同余式，有什么用呢?

我们民族，曾世代流传着许许多多算题，其中有一类属于不定方程．如

例 19 柑三、梨四、七橄榄，百钱买百个，问各买几何?

译成现代白话：柑子三分钱买一个，梨子四分钱买一个，橄榄一分钱买七个，现用一百分买了一百个，问可各买多少个.

解 设柑为 x 个，梨为 y 个；橄榄 $100-x-y$ 个，于是有

$$3x+4y+\frac{1}{7}(100-x-y)=100$$

即得一不定方程(未知数的个数多于方程的个数)

$$20x+27y=600.$$

怎么求出这类不定方程的整数解呢?我们把不定方程

$$-20x=27y-600$$

看作求某数与(-20)的积被 27 除，余 -600. 即

$$-20x\equiv -600\,(Mod\ 27)$$

依解一次同余式得

$$x\equiv\frac{-600}{-20}=30\equiv 3\,(Mod\ 27)$$

于是 $$y=\frac{600-3\times 30}{27}=20$$

$$z=100-3-20=77$$

答 可买柑 3 个，梨 20 个，橄榄 77 个.

例 20 “百鸡问题”：鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱

三；鸡雏三，值钱一．百钱买百鸡，问鸡翁、母、雏各几何？

这一数学史上有名的“百鸡问题”，源于公元五世纪，我国古代数学家张丘建所著《算经》．它与例 20 类似．

解 设 x 为鸡翁数，y 为鸡母数，z 为雏数．则

$$\begin{cases} 5x+3y+\dfrac{z}{3}=100 \\ x+y+z=100 \end{cases}$$

消去 z 得

$$14x+8y=200$$

即 $$7x+4y=100.$$

由于 x 与 y 应为方程

$$-7x=4y-100$$

的整数解，故看作：求某数与 (-7) 的积被 4 除，余 -100，即

$$-7x\equiv -100 (Mod\ 4)$$

即 $$-7x\equiv 0\ (Mod\ 4)$$

这里表明 $(-7x)$ 能被 4 所整除．而 $(-7,\ 4)=1$．

故 x 应为 4 所整除．换句话说 x 应为 4 的倍数．且依题意

$$0\leqslant x<20$$

$\therefore$ $x=0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16$

相应有 $y=25,\ 18,\ 11,\ 4,$ 不相容

$z=75,\ 78,\ 81,\ 84,$ 不相容

答 有四种买法．

鸡翁 鸡母 雏鸡 $\begin{cases}0\\25\\75,\end{cases}$ $\begin{cases}4\\18\\78,\end{cases}$ $\begin{cases}8\\11\\81,\end{cases}$ $\begin{cases}12\\4\\84.\end{cases}$

注意：① 一次同余式有唯一解、无解、有 d 个解条件和结论.

② 熟悉两种一次同余式的解法.

二、一元一次同余式组

一元一次同余式组

$$\begin{cases} a_1x \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ a_2x \equiv b_2 \pmod{m_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_sx \equiv b_s \pmod{m_s} \end{cases}$$

若 $x=\alpha$ 能满足上组所有同余式，则此 α 叫一元一次同余式组的解或根. 如：$x\equiv 19 \pmod{24}$ 是

$$\begin{cases} x\equiv 7 \pmod{12} \\ x\equiv 3 \pmod{8} \end{cases}$$

的解. 因为同余式组等价于

$$\begin{cases} 2x\equiv 14 \pmod{24} \\ 3x\equiv 9 \pmod{24} \end{cases}$$

将 $x\equiv 19 \pmod{24}$ 代入可得

$$\begin{cases} 38\equiv 14 \pmod{24} \\ 57\equiv 9 \pmod{24} \end{cases}$$

验得确是同余式组的解.

设 $\begin{cases} x\equiv c_1 \pmod{m_1} & (1) \\ x\equiv c_2 \pmod{m_2} & (2) \end{cases}$

$(m_1, m_2)=d$ （最大公约数）

$\{m_1, m_2\}=M$ （最小公倍数）

若 $d\nmid(c_1-c_2)$，则这两个同余式没有公共解.

若 $d\mid(c_1-c_2)$，则它们有解，且这解是以 M 为模的一类剩

余.

例 21 $\begin{cases} x\equiv 4 \pmod{12} \\ x\equiv 2 \pmod 8 \end{cases}$

解 因为$(12,8)=4$，$4\nmid(4-2)$故无解.

例 22 求解$\begin{cases} x\equiv 7 \pmod{12} & (1) \\ x\equiv 3 \pmod 8 & (2) \end{cases}$

解 因$(12,8)=4$，$4\mid(7-3)$故有解．其解法如下：

将同余式(1)换成余数形式

$$x=12y+7 \tag{3}$$

代入(2)式得

$$12y+7\equiv 3 \pmod 8$$

即

$$12y\equiv -4 \pmod 8$$

$$3y\equiv -1 \pmod 2$$

$$\therefore\quad y\equiv -\frac{1}{3}\equiv -\frac{1}{1}\equiv 1 \pmod 2 \tag{4}$$

再将(4)转换成余数形式

$$y=2z+1 \tag{5}$$

代入(3)式则得

$$x=24z+12+7=24z+19$$

即

$$x\equiv 19 \pmod{24}$$

是为所求.

关于n个联立同余式

$$\begin{cases} x\equiv c_1 \pmod{m_1} \\ x\equiv c_2 \pmod{m_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x\equiv c_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

记 $(m_k, m_\lambda)=d_{k\lambda}$　$1\leqslant k<\lambda\leqslant n$.

若有一个 $d_{k\lambda}\nmid(c_k-c_\lambda)$，则它们没有公共解. 若所有的 $d_{k\lambda}$ 都能除尽 c_k-c_λ，则有解. 而且是以最小公倍数 $\{m_1, m_2, \cdots, m_n\}=M$ 为模的一类剩余.

例 23　求解 $\begin{cases} x\equiv 2 \pmod 3 & (1)\\ x\equiv 3 \pmod 5 & (2)\\ x\equiv 2 \pmod 7 & (3)\end{cases}$

解　因为　$(3, 5)=1$,　$1\mid(3-2)$;

$(5, 7)=1$,　$1\mid(2-3)$;

$(3, 7)=1$,　$1\mid(2-2)$.

故有解. 可见凡模两两互质的都有解.

将(1)化成余数形式

$$x=3y+2 \tag{4}$$

代入(2)式得

$$3y+2\equiv 3 \pmod 5$$

即

$$3y\equiv 1 \pmod 5$$

$$y\equiv\frac{1}{3}\equiv\frac{2}{6}\equiv\frac{2}{1}\equiv 2 \pmod 5$$

再化成余数形式　$y=5z+2$，代入(4)式得

$$x=15z+6+2=15z+8$$

转换成同余式即

$$x\equiv 8 \pmod{15} \tag{5}$$

与(3)式联立，继续解下去有

$$x=15y+8 \tag{6}$$

代入(3)得

$$15y+8\equiv 2 \pmod 7$$

即 $y\equiv\frac{-6}{15}\equiv\frac{1}{1}\equiv 1 \pmod 7$

换成余数形式

$$y=7z+1$$

代入(6)式得

$$x=105z+15+8=105z+23$$

还原成同余式，即得

$$x\equiv 23 \pmod{105}.$$

可见解 n 个联立同余式，实质上是逐步两两联立求解.

例 24 求解 $\begin{cases}x\equiv 7 \pmod{12}\\ x\equiv 4 \pmod{15}\\ x\equiv -2 \pmod{20}\end{cases}$

解 因 $(12,15)\mid(7-4)$，$(12,20)\nmid(7+2)$ 故无解.

注意：① 关于一元一次同余式组有解与无解的条件.

② 二个一元一次同余式组解法.

③ n 个一元一次同余式组，逐步化作两两联立求解的解法.

三、中国剩余定理

据传《孙子算经》，出于三国或晋期间，离今一千七百年左右，曾提出并解决：

“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何．答曰二十三”。

这一孙子求数问题，即求联立同余式正整数解.

$$\begin{cases}x\equiv 2 \pmod 3\\ x\equiv 3 \pmod 5\\ x\equiv 2 \pmod 7\end{cases}$$

上一节在谈到求 n 个联立同余式解的例 23 中，通过逐步两个两个联立同余式求得这解是：

$$x\equiv 23 \pmod{105}$$

事实上《孙子算经》不仅提出了问题和答案，而且还记载着：

"术曰，三三数数之剩二，置一百四十；五五数之剩三，置六十三；七七数之剩二，置三十；并之，得二百三十三，以二百一十减之，即得。"

为了怕读者搞不清楚 140, 63, 30 是根据什么而得到的，《孙子算经》又道：

"凡三三数之剩一，则置七十；五五数之剩一，则置二十一；七七数之剩一，则置十五；一百另六以上，以一百另五减之，即得。"

这里，稍加比较可得：

$70\times 2=140$，三三数之剩二，

$21\times 3=63$，五五数之剩三，

$15\times 2=30$．七七数之剩二．

而 70，21，15 又怎么得来的呢？从最后一段．

$$\begin{cases} x\equiv 1 \pmod 3 \\ x\equiv 1 \pmod 5 \\ x\equiv 1 \pmod 7 \end{cases}$$

70 乃是 5，7 的倍数，且 3 除余 1 的数；21 乃 3，7 的倍数，且 5 除余 1 的数；15 乃 3，5 的倍数，7 除余 1 的数．

经孙子等中国古代数学家的研究，已提炼出一个公式：

一数用 3 除余 a，用 5 除余 b，用 7 除余 c，则此数为

$$x\equiv 70a+21b+15c \pmod{105}.$$

明朝程大位，在他的《算法统宗》(1593)中歌曰：

三人同行七十稀，
五树梅花廿一枝，
七子团圆整半月，
除百另五便得知.

根据孙子们的妙算(实际上就是孙子定理)，求此数是：

$$x \equiv 70\times 2+21\times 3+15\times 2=140+63+30$$
$$=233\equiv 23\ (Mod\ 105)$$

这里很明确的显示出，孙子们在那些古老的年代，已具备了解同余式组的思想和方法. 这一惊人的智慧，又一次的证明着中华民族是一伟大的民族，她的科学文化在人类史上，辉煌夺目遥遥领先.

这种解联立一次同余式组，在中国数学史上也有过多种名目："鬼谷算"，"隔墙算"，"秦王暗点兵法"，"剪管术"、"神奇妙算"，"大衍求一术"…等等. 把这些研究成果总结成今天的术语，即中外驰名的中国剩余定理：

一元一次同余式组

$$\begin{cases} x\equiv c_1\ (Mod\ m_1) \\ x\equiv c_2\ (Mod\ m_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x\equiv c_n\ (Mod\ m_n) \end{cases}$$

若 m_1，m_2，…，m_n 两两互质，记

$$m_1m_2\cdots m_n=M=m_1M_1=m_2M_2=\cdots=m_nM_n$$

且 $M_ka_k\equiv 1\ (Mod\ m_k)$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$

则此同余式组有且只有一个公共解.

$$x\equiv M_1a_1c_1+M_2a_2c_2+\cdots+M_na_nc_n\ (Mod\ M).$$

到了清朝，黄宗宪的《求一术通解》中，对各种记号详加了定义：

定母：m_1，m_2，…，m_n；

衍母：$m_1m_2\cdots m_n=M$；

衍数：M_1，M_2，…，M_n；

乘数：α_1，α_2，…，α_n；

用数：$M_1\alpha_1$，$M_2\alpha_2$，…，$M_n\alpha_n$；

剩数：c_1，c_2，…，c_n；

各总：$M_1\alpha_1c_1$，$M_2\alpha_2c_2$，…，$M_n\alpha_nc_n$；

所求率：$M_1\alpha_1c_1+M_2\alpha_2c_2+\cdots+M_n\alpha_nc_n$.

对这类题说来，定母 m_1，m_2，…，m_n，剩数 c_1，c_2，…，c_n 是已知的. 根据定母可求衍母 M，及衍数 $M_1, M_2, \cdots, M_n$. 问题在于乘数 α_1，α_2，…，α_n 怎么求呢？从

$$M_k\alpha_k\equiv 1\ (Mod\ m_k),\ k=1,2,\cdots,n.$$

可见 α_k 通过解同余式

$$\alpha_k\equiv\frac{1}{M_k}\ (Mod\ m_k),\ k=1,2,\cdots,n.$$

将不难求得. 只待 $\alpha_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 求得则物不知其数则可得求了.

例 25 七数剩一，八数剩二，九数剩三，问本数.（见《续古摘奇算法》）

解 定母：$m_1=7$，$m_2=8$，$m_3=9$；

衍母：$m_1m_2m_3=7\times8\times9=504(=M)$；

衍数：$M_1=\dfrac{504}{7}=72$，$M_2=63$，$M_3=56$；

剩数：$c_1=1$，$c_2=2$，$c_3=3$；

乘数：

$$a_1 \equiv \frac{1}{72} \equiv \frac{3}{216} \equiv \frac{3}{-1} \equiv -3 \equiv 4 \pmod 7$$

$$a_2 \equiv \frac{1}{63} \equiv \frac{1}{-1} \equiv -1 \equiv 7 \pmod 8$$

$$a_3 \equiv \frac{1}{56} \equiv \frac{5}{280} \equiv \frac{5}{1} \equiv 5 \pmod 9$$

故对于一元一次同余式组

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 7 \\ x \equiv 2 \pmod 8 \\ x \equiv 3 \pmod 9 \end{cases}$$

有公共解

$$x \equiv 72 \times 4 \times 1 + 63 \times 7 \times 2 + 56 \times 5 \times 3$$
$$= 2010 \equiv -6 \equiv 498 \pmod{504}$$

练　　习

① 十一数余三，十二数余二，十三数余一，问本数.

② 二数余一，五数余二，七数余三，九数余四，问本数.

(以上二题见杨辉《续古摘奇算法》(1275))

注　关于中国剩余定理的证明：

因 m_1，m_2，…，m_n 两两互质，即

$$(M_1,\ m_1) = (M_2,\ m_2) = \cdots = (M_n,\ m_n) = 1.$$

故必有 n 个数 a_1，a_2，…，a_n 可使

$$M_k a_k \equiv 1 \pmod{m_k},\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

当 $\lambda \neq k$ 时，已知 $m_\lambda \mid M_k$

$$\therefore\quad M_k a_k \equiv 0 \pmod{m_\lambda},\ \lambda \neq k.$$

令　　$R = M_1 a_1 c_1 + M_2 a_2 c_2 + \cdots + M_n a_n c_n$

则
$$\begin{cases} R \equiv M_1 a_1 c_1 \equiv c_1 \pmod{m_1} \\ R \equiv M_2 a_2 c_2 \equiv c_2 \pmod{m_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R \equiv M_n a_n c_n \equiv c_n \pmod{m_n}. \end{cases}$$

故 R 能同时满足这 n 个同余式，是为公共解.

又设 S 也是公共解，即 S 也满足这 n 个同余式，则

$$R \equiv S \pmod{m_k}, \quad k=1, 2, \cdots, n.$$

即
$$m_k \mid (R-S),$$

已知 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 两两互余，故 $M \mid (R-S)$

即
$$R \equiv S \pmod{M}.$$

故 R 是唯一的解.

习 题 解 答

习 题 一 答 案

1. 可能. 例 $3\sqrt{2}+\sqrt{2}=3$.

2. 能够的，因为 $\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{ab}=a$，其中 a 和 b 是符号相同的任意数. 例如：$\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{3\cdot 2}=2$

3. 能够的. 对于给定的负数 k，选择适当的 b、c，使 $k=c-b^2$，且 $0<c<b^2$，c 不是完全平方数，则 $k=c-b^2=(\sqrt{c}-b)(\sqrt{c}+b)$.

4. 由于 2 和 $\sqrt{3}$ 都是实数，故它们的和 $2+\sqrt{3}$ 是一个实数. 因为偶数是指整数范围内能被 2 所整除的数，与无理数不相干，故 $2\sqrt{3}$ 不能叫偶数.

5. $a^2-kb^2=1$.

6. $2a,\left(a<\frac{1}{3}\right)$. $2-4a,\left(\frac{1}{3}\leqslant a<1\right)$. $-2a$，$(a\geqslant 1)$.

7. ① $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant 1$；② $a\geqslant-\frac{1}{2}$；③ $\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$.

8. 由 $\sqrt{2-a}$ 知 $a\leqslant 2$，故 $\sqrt[3]{a-4}$ 是负数，$\sqrt{2-a}$ 是正数，所以 $\sqrt{2-a}>\sqrt[3]{a-4}$. 当 $a>2$ 时不能比较两者大小.

9. ② 根号里面可以化为 $\frac{(10^n)^2-2\cdot 10^n+1}{3^2}=\frac{(10^n-1)^2}{3^2}$.

10. 参阅例 3.

11. 在等式的两边乘以 $\sqrt[3]{4}$ 得到 $a\sqrt[3]{4}+2b+2c\sqrt[3]{2}=0$，原式乘

a 以 a 减去这个式子乘以 c 得到 $(ab-2c^2)\sqrt[3]{2}+a^2-2bc=0$． 显然 $ab-2c^2=0$．$a^2-2bc=0$．现设 $a\neq 0$，$b\neq 0$，由前两式可得 $a^3=2b^3$ 即 $\frac{a}{b}=\sqrt[3]{2}$，这也是不可能的，故 $a=0$ 或 $b=0$．由原式即可得 $a=b=c=0$．

13．$x=-\frac{4}{11}, y=\frac{5}{11}$．

14．$x=\pm 1$，$y=\pm 3$．

15 $x=-2$，$y=1.5$，$z=2$，$t=-0.5$．

17．① 当 $n=4K-1$ 时，$A=8$；当 $n=4K$ 时，$A=8i$；当 $n=4K+1$ 时，$A=-8$；当 $n=4K+2$ 时 $A=-8i$，

② $A=\frac{(1-i)^{2n}}{(1+i)^{2m}}=\frac{(1-i)^{2(n+m)}}{2^m}$

$$=\frac{[(1-i)^2]^{n+m}}{2^m}=\frac{(-2i)^{n+m}}{2^m}=2^n(-i)^{n+m}.$$

讨论：(1′) 如 $m+n=4K$，则 $A=2^n$；(2′) 如 $n+m=4K+1$，则 $A=-2^n i$；(3′) 如 $n+m=4K+2$，则 $A=-2^n$；(4′) 如 $n+m=4K-1$，则 $A=2^n i$．

18．$x=1+i$，$y=i$．　19．$x=3+i$，$y=3-i$．

20．设 $z=x+yi$ 则 $z^2=(x^2-y^2)+2xyi$；$\bar{z}=x-yi$；根据题设条件 $z^2=\bar{z}$ 知 $x^2-y^2=x$，$2xy=-y$，解之，得适合条件的复数为 $0+0i$，$1+i\cdot 0$；$-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$．

21．分子的模为 $\sqrt{n^2+an}$，分母的模 $\sqrt{an+a^2}$，所以分式的模为 $\sqrt{\frac{n}{a}}$．

22．$2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$

23．$-\frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

24. $\cos(2\pi-2\alpha)+i\sin(2\pi-2\alpha)$

25. $-1+\frac{i}{2}$.

26. 如果 n 不能被 3 整除，那么 $n=3K\pm1$. 由于 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{3}$，且 $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=1$，所以当 $n=3k+1$ 时，

$$\varepsilon^n=\varepsilon^{3R+1}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3R}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},$$

且 $\varepsilon^{2n}=(\varepsilon^n)^2=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$,

从而 $\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-1$.

对于 $n=3K-1$ 的情况，我们同样得到：

$\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}=-1$.

27. $|Z-R|<R$ 即 $(x-a)^2+(y-b)^2<R^2$.

28. $\frac{1+i}{2}$.　　29. $24+10i$.

30. $Z=x+iy=\frac{1+it}{1-it}=\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}i$. 这就是说，

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2}.$$

消去 t 得所求轨迹的普通方程为圆 $x^2+y^2=1$.

34. $2^n\cdot\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$.

35. $\dfrac{2^n\sin\frac{n\pi}{6}}{3^{\frac{n-1}{2}}}$.

36. ① $\dfrac{a^{K+2}\sin(\varphi+Kh)-a^{K+1}\sin[\varphi+(K+1)h]}{a^2-2a\cos h+1}$

$$=\frac{a\sin(\varphi+h)+\sin\varphi}{a^2-2a\cosh+1}.$$

② $\dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$.

37. 我们令 $T=\sum\limits_{K=1}^{n}\sin Kx$ 而且假定 $S=\sum\limits_{K=1}\cos Kx$，于是 $S+iT$ $=\sum\limits_{K=1}^{n}(\cos Kx+i\sin Kx)=\sum\limits_{K=1}^{n}\alpha^{2K}$，其中 $\alpha=\cos\dfrac{x}{2}+i\sin\dfrac{x}{2}$，或者

$$S+iT=\frac{\alpha^n\left(\alpha^{n+1}-\dfrac{1}{\alpha^{n+1}}\right)}{\alpha-\dfrac{1}{\alpha}},$$

由此得 $T=\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$.

38. $\dfrac{1}{2}\sqrt{n}\,(\sqrt{14}-i\sqrt{2})$. 39. $\pm[x+(x-1)i]$.

42. 显然，$\varepsilon^n=1$，我们令 $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}=S$，于是 $S\cdot\varepsilon=\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}+\varepsilon^n=(S-1)+1=S$，假使 $\varepsilon\neq1$，那么由此得出：$S=0$；假使 $\varepsilon=1$，那么 $S=n$.

43. 假使 $\varepsilon\neq1$，那么得 $\dfrac{n}{1-\varepsilon}$；假使 $\varepsilon=1$，那么得 $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

44. 令 $\alpha^a=1$，$\beta^b=1$，那么 $(\alpha\beta)^{ab}=(\alpha^a)^b\cdot(\beta^b)^a=1$.

45. 我们有 $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^n=1$，即 $i^n=1$，因此，我们得到 $n=4k$ 其中 $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$.

习题二答案

1. $-4x^5+17x^4-10x^3+x^2-4$.

2. $2a^5-7a^4b+16a^3b^2-22a^2b^3+22ab^4-15b^5$.

3. $x^8-2x^6+8x^5-7x^4-8x^3+24x^2-32x+16$.

4. $Q=x^2-4$, $R=3$.

5. $Q=x^2-2x+3$, $R=-4$.

6. $Q=a^2+5ab-6b^2$, $R=0$.

7. $Q=3x^2-2x+3$, $R=-4x^2+5x$.

8. $Q=a^3-2a^2b+ab^2+b^3$, $R=ab^4+10b^5$.

9. 注意除式的 x^2 的余数是 0．$Q=x^2-2x-6$，$R=0$.

10. $\pm(x^2-4x+3)$.

11. $\pm(2x^3-x^2y+3xy^2+y^3)$.

12. $\varphi(x)=x^2-2ax$;

$$f(x)=x^4+ax^3-5a^2x^2+12a^3x=(x^2+3ax-a^2)(x^2-2ax)+2a^2x^2+10a^3x.$$

14. 因为 $11=10+1$，所以此题就在于要决定这样的 n，使得 (10^n+1) 能被 $(10+1)$ 整除，根据余数定理，这个要在 n 为奇数时成立.

15. 因为 $8=7+1$，以及 $6=7-1$，所以要使 7^n-1 能被 8 和 6 整除，就需要使它能被 $(7-1)\cdot(7+1)=7^2-1$ 所整除，这就需要 n 为偶数.

16. 事实上，当 $x=-y$ 时，多项式变为 0，这就是说，它能被 $x+y$ 整除；同样地可以证明它能被 $y+z$ 和 $z+x$ 整除．所以多项式能被 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 整除.

19. 假设 p 和 q 是同为偶数或同为奇数的两个整数，于是，多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ 在 $x=p$ 和 $x=q$ 时的值的差数将等于：

$$f(p)-f(q)=a_n(p^n-q^n)+a_{n-1}(p^{n-1}-q^{n-1})+\cdots\cdots+a_1(p-q),$$

而且能被数 $p-q$ 整除，且当 p 和 q 同为偶数或同为奇数时，$p-q$ 是个偶数．我们取 $q=0$，于是当 p 是偶数时，$f(p)-f(0)$ 是个偶数．这就是说，$f(p)$ 和 $f(0)$ 应该同时为偶数或者同时为奇数；在定理的条

件中，$f(0)$是奇数，于是$f(p)$也是一个奇数，而且$f(p)\neq 0$. 同样我们可以推出当$q=1$时的情形. 所以假使x为整数，那么$f(x)\neq 0$，即多项式没有整根.

20. 应用待定系数法，令

$x^4+x^3-5x^2+2=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ 我们得到了方程组：

$$\begin{cases}a+c=1,\\ ac+b+d=-5,\\ ad+bc=0,\\ bd=2.\end{cases}\tag{1}$$

可能有下面两种情况：(a) $b_1=1$，$d_1=2$；(b) $b_2=1$，$d_2=-2$.

研究情况(a)；这时方程组(1)可化为形式：

$$\begin{cases}a+c=1,\\ ac=-8,\\ 2a+c=0.\end{cases}\tag{2_a}$$

由最后的方程求出$c=-2a$，代入第一个方程得$a=-1$，$c=2$，但这样的a和c的值不适合方程组(2_a)里的第二个方程，所以此方程组无解.

再研究情况(b)，这时方程组(1)可再写成：

$$\begin{cases}a+c=1,\\ ac=-2,\\ 2a+c=0.\end{cases}\tag{2_b}$$

由此得到$a=-1$，$c=2$. 这样的a和c值适合方程组(2_b)的第二个方程. 所以方程组的解为$a=-1$，$b=1$，$c=2$，$d=2$.

从而 $x^4+x^3-5x^2+2=(x^2-x-1)(x^2+2x-2)$

$$=(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

21. $(x-1)(x+2)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

22. $(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$

$\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

23. $2(x^2-x+1)\left(x+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}\right)\left(x+\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}\right)$.

24. $\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$

$(x+2+\sqrt{7})(x+2-\sqrt{7})$.

25. $2(x^2-x+4)\left(x+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}\right)\left(x+\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}\right)$.

26. $(x^2-x+1)(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})$.

27 $(x+2+\sqrt{5})(x+2-\sqrt{5})\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

$\left(x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

28. $(x+1)(x-3)(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})(x^2-x+1)$.

29. $(x-1)(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)$.

30. $(x+2y)(x-y)(x-3y)(x-5y)$.

31. $(3x+4y)^2(x^2-4xy+y^2)$.

32. $(3x-y)(5x-y)(x^2+2y^2)$.

33. $(3x+y)(2x+y)(x-y)(x-2y)(2x-y)$.

34. $(x-by)[x-(2a+b)y][x-(a-2b)y]$.

35. $(x+2)(x+4)(x^2+5x+8)$.

36. $9(x+1)^2(x^2+4x+1)$.

37. $(x^2+x+6)(x-1)(x+2)$.

38. $(x^2+x+5)(x+2)(x-1)$.

39. $(a-x)(a-y)(x-y)(a+x+y)$.

40. $3(a+b)(b+c)(c+a)$.

41. $a^{5n}-a^{2n}+a^{2n}+a^n+1=a^{2n}(a^{3n}-1)+(a^{2n}+a^n+1)$

$=(a^{2n}+a^n+1)(a^{3n}-a^{2n}+1)$.

42. $[(x-1)(x+2)][x(x+1)]+1=(x^2+x-2)(x^2+x)+1$

$=(x^2+x)^2-2(x^2+x)+1=(x^2+x-1)^2$.

43. $(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$.

44. $[(x+a)(x+4a)][(x+2a)(x+3a)]+a^4$

$=(x^2+5ax+4a^2)^2+2a^2(x^2+5ax+4a^2)+a^4$

$=(x^2+5ax+5a^2)^2$.

45. $(x^2+5x+7)(x^2-7x+1)$.

46. $(x-y)(y-z)(z-x)$.

47. $(b-a)(b-c)(c-a)$. 48. $4abc$.

49. $(2x-b^3-2)(a^2x+b^3-2)$.

50. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$.

51. $(n-x-4)(n^2+ax-4a)$.

52. $(a+b)(b+c)(c-a)$.

53. $(a+b)^2(a-b)^2(x+y)^2(x-y)^2$.

54. $A=2a^2b+4ab^2-a^2c-2abc+ac^2+2bc^2-4b^2c-2abc$

$=2ab(a+2b)-ac(a+2b)+c^2(a+2b)-2bc(a+2b)$

$=(a+2b)(2ab-ac+c^2-2bc)$

$=(a+2b)[a(2b-c)-c(2b-c)]$

$=(a+2b)(2b-c)(a-c)$.

55. $A=yx^2-4xyz+4yz^2+8xyz+xy^2-4xyz+4xz^2-2z(x+y)^2$

$=yx^2+xy^2+4xz^2+4yz^2-2z(x+y)^2$

$=xy(x+y)+4z^2(x+y)-2z(x+y)^2$

$=(x+y)[xy+4z^2-2z(x+y)]$

$=(x+y)[y(x-2z)-2z(x-2z)]$

$=(x+y)(x-2z)(y-2z)$.

56. $A=8x^3(y+z)-y^3z-2xy^3-2xz^3+yz^3$

$$= 8x^3(y+z) - y^3z + yz^3 - 2xy^3 - 2xz^3$$
$$= 8x^3(y+z) - yz(y^2-z^2) - 2x(y^3+z^3)$$
$$= (y+z)[8x^3 - yz(y-z) - 2x(y^2-yz+z^2)]$$
$$= (y+z)(8x^3 - y^2z + yz^2 - 2xy^2 + 2xyz - 2xz^2)$$
$$= (y+z)(8x^3 - 2xy^2 + 2xyz - y^2z - 2xz^2 + yz^2)$$
$$= (y+z)[2x(4x^2-y^2) + yz(2x-y) - z^2(2x-y)]$$
$$= (y+z)(2x-y)[2x(2x+y) + yz - z^2]$$
$$= (y+z)(2x-y)(4x^2+2xy+yz-z^2)$$
$$= (y+z)(2x-y)(2x+z)(2x+y-z).$$

57. $A = [(x^2+y^2) + (z^2-x^2)][(x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2)(z^2-x^2)$
$$+ (z^2-x^2)^2] - (y^2+z^2)^3$$
$$= (y^2+z^2)[(x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2)(z^2-x^2) + (z^2-x^2)^2]$$
$$- (y^2+z^2)^3 = (y^2+z^2)[(x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2)(z^2-x^2)$$
$$+ (z^2-x^2)^2 - (y^2+z^2)^2]$$
$$= (y^2+z^2)[(x^2+y^2)(x^2+y^2-z^2+x^2)$$
$$+ (z^2-x^2+y^2+z^2)(z^2-x^2-y^2-z^2)]$$
$$= (y^2+z^2)[(x^2+y^2)(2x^2+y^2-z^2) - (x^2+y^2)$$
$$\cdot (2z^2-x^2+y^2)]$$
$$= (y^2+z^2)(x^2+y^2)(2x^2+y^2-z^2-2z^2+x^2-y^2)$$
$$= (y^2+z^2)(x^2+y^2)(3x^2-3z^2)$$
$$= 3(x^2+y^2)(x^2-z^2)(y^2+z^2)$$
$$= 3(x^2+y^2)(x+z)(x-z)(y^2+z^2).$$

58. 原式 $= x^4 - 2x^2y^2 - 4xy^3 + 4x^2y^2 + y^4 - \dfrac{y^4}{4}$
$$= \left(x^2+2xy-y^2\right)^2 - \left(\frac{y^2}{2}\right)^2$$
$$= \left(x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2\right)\left(x^2+2xy-\frac{3}{2}y^2\right).$$

59. 应用一元二次方程求根公式，得 $(\sqrt{3}x+2\sqrt{6}y)(\sqrt{2}x-\sqrt{6}y)$.

60. 用求根公式，得 $(x-6+i)(x-2i+3)$.

61. 原式为 x、y、z 的对称多项式，原式分解为 $3(x+y)(y+z)(z+x)$.

62. 原式为 a、b、c 的轮换对称多项式，原式分解为

$3(a-b)(b-c)(c-a)$.

63. 原式为 x、y、z 的五次齐次对称多项式，故可设

原式 $\equiv xyz[k(x^2+y^2+z^2)+z(xy+yz+zx)]$

令 $x=1$，$y=1$，$z=1$，得 $80=K+L$ (1)

令 $x=1$，$y=1$，$z=-1$，得 $240=3K-L$ (2)

将(1)，(2)联立解之 $K=80$，$L=0$，故得

原式 $=80xyz(x^2+y^2+z^2)$.

64. 原式虽然对于 x，a，b，c 不是对称的，但它是对于 a，b，c 的轮换对称式，原式 $=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

65. 原式 $=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

66. 原式关于 x、y、z 的轮换对称式，可设原式 $=(x-y)(y-z)(z-x)[l(x^3+y^3+z^3)+m(x^2y+y^2z+z^2x)+nxyz)]$，求出待定系数.

原式 $=(x-y)(y-z)(z-x)\left(-x^3-y^3-z^3-x^2y-y^2z-z^2x-\frac{3}{2}xyz\right)$

67. 原式 $=x^n(x^{4n+1}-x+x^{4n}-x^{3n}+x^{2n}-x^n)$

$$\begin{aligned}&=x^n[x(x^{4n}-1)+x^{3n}(x^n-1)+x^n(x^n-1)]\\&=x^n(x^n-1)[x(x^{2n}+1)(x^n+1)+x^{3n}+x^n)\\&=x^n(x^n-1)(x^{2n}+1)[x(x^n+1)+x^n]\\&=x^n(x^n-1)(x^{2n}+1)(x^{n+1}+x^n+x)\ .\end{aligned}$$

68. 原式 $=\dfrac{x^{15}-1}{x^3-1}=\dfrac{x^5-1}{x-1}\cdot\dfrac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}$

$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$.

69. $D(f_1;\ f_2)=3x-7$.　　70. $D(f_1;\ f_2)=x-2$.

71. $D(f_1;\ f_2)=a(3x-2a)$.　　72. $D(f_1;\ f_2)=2x+9$.

73. $K(f_1;\ f_2)=(x+y)(x-y)(x-2y)(x+2y)$.

74. $K[f_1;\ f_2] = a^2x^{n-3}(27a^3 - b^3x^6)$.

75. $K[f_1;\ f_2] = 6x^{n-3}(x-n^2)(x-n)^2(x+n^2)^2$.

76. $K[f_1;\ f_2] = (x+c)(2x-3b)(x^2+ax-b^2)$.

77. x^2-x+2.　　　78. $a-3b$.

79. 先用辗转相除法求得 A 和 B 的最高公因式 x^3+4x^2+2x-4，再用辗转相除法求得 x^3+4x^2+2x-4 和 c 的最高公因式 x^2+2x-2. 那么 x^2+2x-2 就是 A、B 和 C 的最高公因式.

80. $(2x-1)(x^2+1)(x^2+3x+1)$.

81. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)(2a^2+ab+b^2)$.

82. 先用辗转相除法求得 A 和 B 的最高公因式是 $2x^2+5x+2=(x+2)(2x+1)$，最低公倍式是 $(x-3)(x+1)(x+2)(2x+1)$，然后用这四个一次因式分别去试除 c，$(x-3)$ 不能整除 c，$c\div(x+1)=x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$. 因此，$A$、$B$ 和 C 的最低公倍式是 $(x-3)(x+1)(x+2)(x+3)(2x+1)$.

83. $\dfrac{1}{1-x^2}$.　　　84. $\dfrac{a^2+d^2}{a^2-2b-2c+d^2}$.

85. $\dfrac{a+b+c}{2}$.

86.
$$
\begin{aligned}
A &= \frac{y^2z^2}{b^2c^2} + \frac{c^2(y^2-b^2)(z^2-b^2)-b^2(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{b^2c^2(b^2-c^2)}\\
&= \frac{y^2z^2}{b^2c^2} + \frac{c^2y^2z^2-c^2b^2z^2-c^2y^2b^2}{b^2c^2(b^2-c^2)}\\
&\quad + \frac{c^2b^4-b^2y^2z^2+b^2c^2z^2+b^2y^2c^2-b^2c^4}{b^2c^2(b^2-c^2)}\\
&= \frac{y^2z^2}{b^2c^2} + \frac{c^2y^2z^2-b^2y^2z^2+c^2b^4-b^2c^4}{b^2c^2(b^2-c^2)}\\
&= \frac{y^2z^2}{b^2c^2} + \frac{y^2z^2(c^2-b^2)+b^2c^2(b^2-c^2)}{b^2c^2(b^2-c^2)}\\
&= \frac{y^2z^2}{b^2c^2} + \frac{-y^2z^2+b^2c^2}{b^2c^2} = \frac{b^2c^2}{b^2c^2} = 1.
\end{aligned}
$$

87. 令 $a+b=m$，$b+c=n$，$c+a=p$，于是所给的等式就化为形

式：

$$\frac{a^2-bc}{mp}+\frac{b^2-ac}{mn}+\frac{c^2-ab}{np}$$
$$=\frac{ma^2-nbc+pb^2-acp+mc^2-abm}{mnp}.$$

但 $an-bm=ac-b^2$，$bp-cn=ab-c^2$，$cm-ap=bc-a^2$. 这就是说：
$a(an-bm)=a^2c-ab^2, b(bp-cn)=ab^2-bc^2$，$c(cm-ap)=bc^2-a^2c$.
所以所给的式子等于：

$$\frac{a^2c-ab^2+ab^2-bc^2+bc^2-a^2c}{mnp}=0\ .$$

88. 令 $a-b=m$，$b-c=n$，$c-a=p$，所以，

$$-\frac{1}{np}-\frac{2}{mp}-\frac{1}{mn}=-\frac{m+2n+p}{mnp},$$

因为 $m+n+p=0$，所以所给式子可化成形式：

$$-\frac{n}{mnp}=-\frac{1}{mp}=\frac{1}{(a-b)(a-c)}.$$

89. 令 $a-b=m$，$a-c=n$，$a-d=p$，$b-c=q$，$b-d=r, c-d=s$，于是我们有：

$$\frac{a}{mnp}+\frac{b}{(-m)qr}+\frac{c}{(-n)(-q)s}+\frac{d}{(-p)(-r)(-s)}$$
$$=\frac{a}{mnp}-\frac{b}{mqr}+\frac{c}{nqs}-\frac{d}{prs}$$
$$=\frac{s(aqr-bnp)+m(cpr-dnq)}{mnpqrs}.$$

但 $\quad aqr=a(b-c)(b-d)=ab^2-abc-abd+acd$,

$bnp=b(a-c)(a-d)=a^2b-abc-abd+bcd$,

$\therefore\quad aqr-bnp=ab^2-a^2b+acd-bcd$

$=-ab(a-b)+cd(a-b)=(a-b)(cd-ab)$

$=m(cd-ab)$.

同样地得到：

$cpr-dnq=s(ab-cd)$.

$\therefore\quad s(apr-bnp=ms(cd-ab)$,

而且 $\quad m(cpr-dnq)=ms(ab-cd)$,

亦即 $\quad s(aqr-bnp)+m(cpr-dnq)$

$=ms(cd-ab+ab-cd)=0$.

从而原式的值等于 0.

90. $-\dfrac{a^2}{b^2}$. 91. $1-a$.

92. $P=x^2+y^2+z^2$, $Q=x^3+y^3+z^3$.

93. 0. 94. a.

95. $x+y=\sqrt{c+n}$; $xy=\dfrac{1}{4}(c+n-c+3n)=n$;

$(x+y)^2-xy=c+n-n=c$.

96. 式子前一个根号下可写为:

$(a^2-b^2)+2a\sqrt{a^2-b^2}+a^2$, 即为$(\sqrt{a^2-b^2}+a)^2$, 第二个根号下面可写成:

$a^2-b^2-2b\sqrt{a^2-b^2}+b^2$, 即为$(\sqrt{a^2-b^2}-b)^2$,

原式$=|\sqrt{a^2-b^2}+a|-|\sqrt{a^2-b^2}-b|=a+b$.

97. $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a-n)-\sqrt{n(a-n)}\right|$. 98. $\sqrt{a-c}-\sqrt{b}$.

99. $(x+y)^3-(x^2-y^2)(x-y)=(x+y)(x^2+2xy+y^2)$

$-(x+y)(x-y)^2=(x+y)(x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2)$

$=4xy(x+y)$.

102. 中括号里面为

$$\frac{y^2+x^2}{x^2y^2}+\frac{2}{x+y}\cdot\frac{x+y}{xy}=\frac{y^2+2xy+x^2}{x^2y^2}=\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}.$$

和括号外面式子相乘即得到要证明的结果.

114. 把 1 移项到等号左边去, 再加以变形, 我们得到:

$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)=0$;

假定 $c=a+b$, 于是就证明了结果.

115. $(y+z-2x)^2-(y-z)^2=-4(x-y)(z-x)$,

$(z+x-2y)^2-(z-x)^2=-4(y-z)(x-y)$,

$(x+y-2z)^2-(x-y)^2=-4(z-x)(y-z)$.

由题设，得 $(x-y)(z-x)+(y-z)(x-y)+(z-x)(y-z)=0$.

又 $(x-y)+(z-x)+(y-z)=0$,

且 $[(x-y)+(z-x)+(y-z)]^2$

$=(x-y)^2+(z-x)^2+(y-z)^2-2(x-y)(z-x)$

$-2(y-z)(x-y)-2(z-x)(y-z)$,

故 $(x-y)^2+(z-x)^2+(y-z)^2=0$,

$\therefore$ $(x-y)=(z-x)=(y-z)=0$. $x=y=z$.

116. $\because$ $d=-(a+b+c)$,

$\therefore$ $abc+bcd+cda+dab=abc+d(bc+ca+ab)$

$=abc-(bc+ca+ab)(a+b+c)$

$=-(b+c)(c+a)(c+b)$.

$(abc+bcd+cda+dab)^2$

$=(a+b)(a+c)(b+c)\cdot(b+a)(c+a)(c+b)$.

但 $(a+b)(a+c)=a(a+b+c)+bc=bc-ad$;

$(b+c)(b+a)=ca-bd$; $(c+a)(c+b)=ab-cd$.

$\therefore$ $(abc+bcd+cda+dab)^2=(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd)$.

118. 由 $z=-(x+y)$

左端 $=\dfrac{x^2+y^2+(x+y)^2}{2}\cdot\dfrac{x^5+y^5-(x+y)^5}{5}$

$=-xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$.

右端 $=\dfrac{x^7+y^7-(x+y)^7}{7}=-xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$. 所以命题得证.

119. 注意到所设条件下有

$a^3+b^3+c^3=3abc$,

$(a^4+b^4+c^4)(a^3+b^3+c^3)$

$=a^7+b^7+c^7+a^3(b^4+c^4)+b^3(a^4+c^4)+c^3(a^4+b^4)$,

即 $$a^7+b^7+c^7=3abc(a^4+b^4+c^4)-[a^3(b^4+c^4)+b^3(a^4+c^4)+c^3(a^4+b^4)],$$

即 $$2(a^7+b^7+c^7)=6abc(a^4+b^4+c^4)-2[a^3(b^4+c^4)+b^3(a^4+c^4)+c^3(a^4+b^4)].$$

只要证明 $-2[a^3(b^4+c^4)+b^3(a^4+c^4)+c^3(a^4+b^4)]=abc(a^4+b^4+c^4)$即可.

120. 由$(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)=x^5+y^5+z^5-xyz(xy+xz+yz)$，可以得到

$$x^5+y^5+z^5=(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)+xyz(xy+xz+yz),$$

但 $$xyz=\frac{x^3+y^3+z^3}{3},$$

而 $$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=0,$$

即 $$xy+yz+zx=-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

应用这两个事实，即可证得等式成立.

习 题 三 答 案

1. 方程的左边变为$(1-x^2)^2+4x^2$，$(1-x^2)^2-4x(1-x^2)+4x^2=0$，$[(1-x^2)-2x]^2=0$.

答：$x_1=-1+\sqrt{2}$，$x_2=-1-\sqrt{2}$.

2. $[(x+3)(x+6)][(x+4)(x+5)]=8$,

$(x^2+9x+18)[(x^2+9x+18)+2]=8$.

令$x^2+9x+18=y$，于是有$y^2+2y-8=0$. $y_1=-4$，$y_2=2$.

即 $x^2+9x+22=0$，$x_{1,2}=\dfrac{-9\pm i\sqrt{7}}{2}$；$x^2+9x+16=0$，

$x_{3,4}=\dfrac{-9\pm i\sqrt{17}}{2}$.

3. 原方程即$[(x+2)(x-4)][(x+3)(x-5)]=44$,

∴ $(x^2-2x-8)(x^2-2x-15)=44$（注意两个括号里前两项是相

同的)．设 $x^2-2x-8=y$，则 $y^2-7y-44=0$，∴ $y_1=11$，$y_2=-4$．由此可求出方程的根为 $x_1=1+2\sqrt{5}$，$x_2=1-2\sqrt{5}$，$x_3=1+\sqrt{5}$，$x_4=1-\sqrt{5}$．

4．令 $y=x-2$，则原方程变为 $(y+2)^4+(y-2)^4=626$．

即 $y^4+24y^2-297=0$．解得原方程两实根与两虚根：$5, -1, 2+\sqrt{33}\,i$，$2-\sqrt{33}\,i$．

5．$[(7x+3)^4-(3x+7)^4]+[(2x-6)^4-(6x-2)^4]=0$．

化简得 $(x^2-1)[5(58x^2+84x+58)-4(40x^2-48x+40)]=0$．

$$x^2-1=0,\quad x_{1,2}=\pm1;$$

$$5(58x^2+84x+58)-4(40x^2-48x+40)=0.$$

即 $65x^2+256x+65=0$，由此可求出方程的另两根．

6．去分母 $3[(x+1)^2+(x-1)^2]=10(x+1)(x-1)$．

化简得 $6x^2+6=10x^2-10$，$4x^2=16$．

∴ $x=\pm2$，故 $x=\pm2$ 是原方程的根．

7．$\left(x-\dfrac{3x}{x+3}\right)^2+6\dfrac{x^2}{x+3}-16=0$．

即 $\left(\dfrac{x^2}{x+3}\right)^2+6\dfrac{x^2}{x+3}-16=0$．

设 $\dfrac{x^2}{x+3}=y$，得 $y^2+6y-16=0$．

$$y_1=2,\quad y_2=-8.$$

即 $x_{1,2}=1\pm\sqrt{7}$，$x_{3,4}=-4\pm2\sqrt{2}\,i$．

8．左 $=\dfrac{x^2}{x^2+1}$，即 $\dfrac{x^2}{x^2+1}=\dfrac{2x+5}{2x+9}$．

去分母 $4x^2-2x-5=0$，

$$\therefore\quad x=\frac{2\pm\sqrt{4+80}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{4}.$$

9．$\dfrac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}-1=\dfrac{(x+ma)(x+mb)}{(x-ma)(x-mb)}-1$．

通分得

$$\frac{2(a+b)x}{(x-a)(x-b)}=\frac{2m(a+b)x}{(x-ma)(x-mb)},$$

∴ $x_1=0$ 或 $(x-ma)(x-mb)=m(x-a)(x-b)$,

即 $x^2=mab$, ∴ $x_2=\sqrt{mab}$, $x_3=-\sqrt{mab}$.

10. 将原方程化为

$$\left(\frac{b+c}{bc-x}-\frac{a}{x}\right)+\left(\frac{c+a}{ca-x}-\frac{b}{x}\right)+\left(\frac{a+b}{ab-x}-\frac{c}{x}\right)=0,$$

由此得

$$(a+b+c)x-abc=0 \tag{1}$$

或 $$\frac{1}{x(bc-x)}+\frac{1}{x(ca-x)}+\frac{1}{x(ab-x)}=0 \tag{2}$$

由(1)得 $x_1=\dfrac{abc}{a+b+c}$.

由(2)得 $(ca-x)(ab-x)+(ab-x)(bc-x)+(bc-x)(ca-x)=0$,

即 $3x^2-2(bc+ca+ab)x+abc(a+b+c)=0$

∴ $x_{2,3}=\dfrac{1}{3}\left[bc+ca+ab\pm\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-abc(a+b+c)}\right]$.

11. 令 $4x-3=n$, 原方程即为:

$$\frac{4n-1}{n}+\frac{10n-13}{2n-3}=\frac{8n-6}{2n-1}+\frac{5n-9}{n-2},$$

两边通分、移项、合并得

$69n-6=63n$, $6n=6$, $n=1$,

∴ $4x-3=1$, $x=1$.

12. $m(x+a)^2+n(x+b)^2=(m+n)(x+a)(x+b)$,

$mx^2+2amx+ma^2+nx^2+2bnx+b^2n$

$=(m+n)[x^2+(a+b)x+ab]$, $(a-b)(m-n)x$

$=(b-a)(ma-nb)$,

∴ $x=-\dfrac{ma-nb}{m-n}$, 即 $x=\dfrac{nb-ma}{m-n}$.

讨论: ① $a\neq b$, $\begin{cases} m\neq n \text{ 时}, \\ m=n \text{ 时}, \end{cases}$

$x=\dfrac{nb-ma}{m-n}$方程无解.

② $a=b$ 时，则 x 可为 $-a$ 或 $-b$ 以外的任何值.

13. ∵ 方程的一、三项均为正数，第二项为正数或零，∴在实数集合内无解.

14. ∵$x\geqslant4$ 是方程的允许值范围.

当 $x\geqslant4$ 时，$\sqrt{x+1}>2$.

∴ $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}-1>0$，原方程无解.

15. $\sqrt{x-8}$ 的允许值为 $x\geqslant8$，$\sqrt{2-x}$ 的允许值为 $x\leqslant2$. $x\geqslant8$ 且 $x\leqslant2$ 是矛盾区间，原方程无解.

16. $x\geqslant5$ 是方程的允许值范围，$x+\sqrt{x-5}\geqslant5$.

∴ 原方程无解.

17. ∵ $2-x-x^2\geqslant0$，∴ $-2\leqslant x\leqslant1$，$x^2-9\geqslant0$，$x\geqslant3$ 或 $x\leqslant-3$. x 无公共区间，∴ 原方程无解.

18. x 为任何实数，$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}<0$，$1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}>0$，

∴ 原方程无解.

19. $x+2\sqrt{x^2+7x}+x+7+(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})-42=0$，

$(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})-42=0$，

∴ $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=6$，或$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=-7$（舍去）.

解 $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=6$，得 $x=\dfrac{841}{144}$.

经检验，$x=\dfrac{841}{144}$是原方程的解.

20. $\sqrt[3]{(8-x)^2}-\sqrt[3]{(8-x)(x+27)}+\sqrt[3]{(x+27)^2}=7$.

方程两边乘以$\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{x+27}$得$\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{x+27}=5$，

两边立方得 $x^2+19x=0$，$x_1=0$，$x_2=-19$.

21. 方法一：把方程写如

$$\sqrt{x-3+2\sqrt{x-3}+1}+\sqrt{x-3+4\sqrt{x-3}+4}=5,$$

或者$\sqrt{(\sqrt{x-3}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-3}+2)^2}=5$.

即 $\sqrt{x-3}+1+\sqrt{x-3}+2=5$.

于是 $\sqrt{x-3}=1$, $\therefore$ $x=4$.

方法二：令$\sqrt{x-3}=y$，则$x=y^2+3$，原方程变为

$$\sqrt{y^2+1+2y}+\sqrt{y^2+4+4y}=5,$$

或 $|y+1|+|y+2|=5$.

但因$y\geqslant0$，所以$y+1+y+2=5$. 即$y=1$，由此即得$x=4$.

方法三：把方程改写为$\sqrt{B}=5-\sqrt{A}$ (1)，

其中 $A=x-2+2\sqrt{x-3}$，$B=x+1+4\sqrt{x-3}$.

把(1)两边平方得：$B-A=25-10\sqrt{A}$.

而 $B-A=3+2\sqrt{x-3}$.

代入上式得 $5\sqrt{A}=11-\sqrt{x-3}$，两边平方得

$$25A=118+x-22\sqrt{x-3}\text{，或 }72\sqrt{x-3}=168-24x.$$

即 $3\sqrt{x-3}=7-x$，两边平方得$x^2-33x+76=0$,

即 $(x-19)(x-4)=0$，所以$x=4$或$x=19$.

显然$x=19$不合题意，故得解$x=4$.

22. 利用算术根的定义，原方程可以化为

$$|x-4|+|2x-1|=10 \quad (1),$$

所有实数被$x=4$和$x=\frac{1}{2}$分为三部分.

当$x\leqslant\frac{1}{2}$时，(1)式变为$-(x-4)+[-(2x-1)]=10$,

$\therefore$ $-x+4-2x+1=10$, $\therefore$ $x=-\frac{5}{3}$.

当 $\frac{1}{2}<x<4$时，(1)式变为$-(x-4)+(2x-1)=10$,

$\therefore$ $x=7$，但7超出$\frac{1}{2}<x<4$的范围，所以不是方程的解.

当$x\geqslant4$时，(1)式变为$x-4+2x-1=10$, $\therefore$ $x=5$. 故原方程

的解是 $x_1=-\frac{5}{3}$，$x_2=5$.

23. 本题若用移项平方的方法，将会导致高次方程. 先变原方程为

$$x^2-2x+6+6\sqrt{x^2-2x+6}=21+6 \qquad (1),$$

令 $\sqrt{x^2-2x+6}=y$，则 $x^2-2x+6=y^2$，代入(1)得：

$y^2+6y-27=0$，∴ $y_1=-9$，$y_2=3$.

故有 $\sqrt{x^2-2x+6}=-9$(显然这个方程无根)，

或 $\sqrt{x^2-2x+6}=3$，解之：$x^2-2x+6=9$，$x^2-2x-3=0$.

∴ $x_1=3$，$x_2=-1$. 验根后可知原方程的根是 $x_1=3$，$x_2=-1$.

24. 用配方法. 原方程可以化为：

$$(\sqrt{x^2-3x+4})^2-2x\sqrt{x^2-3x+4}+x^2=21+4,$$

即 $(\sqrt{x^2-3x+4}-x)^2=25$，

∴ $\sqrt{x^2-3x+4}-x=\pm5$.

由 $\sqrt{x^2-3x+4}-x=5$ 移项，平方解得：$x=-\frac{21}{13}$.

由 $\sqrt{x^2-3x+4}-x=-5$ 移项，平方解得：$x=3$(不合). 经检验知原方程的解是 $x=-\frac{21}{13}$.

25. 化原方程为 $3(x^2-2x+4)-2\sqrt{x^2-2x+4}-8=0$.

令 $\sqrt{x^2-2x+4}=y$，则上式变为：$3y^2-2y-8=0$，

∴ $y_1=2$，$y_2=-\frac{4}{3}$(不合).

即 $\sqrt{x^2-2x+4}=2$，故原方程的解是 $x_1=0$，$x_2=2$.

26. ∵ $\sqrt{x}+\sqrt{x+a-b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$，两边平方得

$$x+2\sqrt{x^2+(a-b)x}+x+a-b=a+b+2\sqrt{ab}.$$

∴ $x^2+(a-b)x=x^2+b^2+ab-2bx-2x\sqrt{ab}+2b\sqrt{ab}$.

∴ $(a+2\sqrt{ab}+b)x=b^2+2b\sqrt{ab}+ab$.

即 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2x=b(b+2\sqrt{ab}+a)=b(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$,

$\therefore \quad x=\dfrac{b(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=b.$

27. $\because \quad |x-2|<3$, $\therefore \quad -3<x-2<3$. 于是 $-1<x<5$.

$\because \quad x>-1$, $\therefore \quad |x+1|=x+1$;

$\because \quad -1<x<5$, $\therefore \quad |x-3|=\pm(x-3)$;

$\because \quad x<5$, $\qquad \therefore \quad |x-5|=5-x$. 所以原方程可化为

$x+1-(x-5)\pm(x-3)=8$,

即 $\pm(x-3)=2$, $\therefore \quad x_1=5$, $x_2=1$.

28. 原方程可化为$\dfrac{(x-a)^{\frac{3}{2}}+(x-b)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{1}{2}}+(x-b)^{\frac{1}{2}}}=a-b$.

$\therefore \quad x-a-(x-a)^{\frac{1}{2}}\cdot(x-b)^{\frac{1}{2}}+x-b=a-b$.

整理得 $(x-a)(x-b)=4(x-a)^2$,

$\therefore \quad (x-a)(x-b)-4(x-a)^2=0$,

即 $(x-a)[x-b-4(x-a)]=0$, $\therefore \quad x_1=a$.

又 $-3x=-4a+b$, $\therefore \quad x_2=\dfrac{4a-b}{3}$.

检验可知二根均适合原方程.

29. 用合分比定理，原方程可化为

$$\frac{\sqrt{3-3x}}{\sqrt{x+6}}=\frac{\sqrt{1-4x}}{\sqrt{2x+8}},$$

$\therefore \quad \sqrt{3-3x}\cdot\sqrt{2x+8}=\sqrt{1-4x}\cdot\sqrt{x+6}$.

等号两边平方，移项整理得：$2x^2-5x-18=0$,

$\therefore \quad x_1=-2, \quad x_2=4\frac{1}{2}$.

由于原方程未知数允许值是：

$$-4\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}，且 x\neq-\frac{3}{4} 和 x\neq-\frac{7}{6},$$

$\therefore \quad x_2=4\frac{1}{2}$是增根.

检验后知原方程的根是 $x=-2$.

注意：当无理分式方程等号的两端各有一项，且分子、分母只有一项的符号相异时，可用合分比解法解之，并且要验根．

30．仔细观察二个分式项中分子与分母的关系，原方程可以变为

$$\frac{(\sqrt[3]{x^2})^2-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{(\sqrt[3]{x})^2-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4,$$

$\therefore\quad \sqrt[3]{x^2}+1-\sqrt[3]{x}+1=4.$

故有 $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-2=0$，$\therefore\quad (\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x}+1)=0.$

若 $\sqrt[3]{x}-2=0$，则 $\sqrt[3]{x}=2$，$\therefore\quad x_1=8.$

若 $\sqrt[3]{x}+1=0$，则 $\sqrt[3]{x}=-1$，$\therefore\quad x_2=-1$．但 $x_2=-1$ 使分母 $\sqrt[3]{x}+1=0$，故应舍去．故原方程的根是 $x=8$．

31．这是一个二项三次根式的无理方程，它的一般解常有如下之步骤，就是在原方程的形式下，两端立方得：

$$x+45-3(\sqrt[3]{x+45})^2\cdot\sqrt[3]{x-16}+3\sqrt[3]{x+45}\cdot(\sqrt[3]{x-16})^2-(x-16)=1,$$

即 $61-3\sqrt[3]{x+45}\cdot\sqrt[3]{x-16}(\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16})=1.$

由原方程知 $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$ 代入上式，

$\therefore\quad 61-3\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}=1$，$\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}=20.$

两端再立方得 $(x+45)(x-16)=8000$，

$\therefore\quad x^2+29x-8720=0$，$x_1=-109$，$x_2=80.$

检验知它们都是原方程的根．

32．若 $x\neq\pm1$ 时，可用 $\sqrt[n]{x^2-1}$ 除原方程的两端，变原方程为

$$\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt[n]{\frac{x-1}{x+1}}=4 \qquad (1)$$

令 $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}=y$，$\therefore\quad \sqrt[n]{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{1}{y}$，代入(1)，

$\therefore\quad y+\frac{1}{y}=4$，即 $y^2-4y+1=0$，

$\therefore\quad y=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=2\pm\sqrt{3}$．故有 $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}=2\pm\sqrt{3}$

(因 $2\pm\sqrt{3}$ 是正值，故不论 n 为奇数或偶数，两端 n 乘方后，不会有增根)．

$$\therefore \quad \frac{x+1}{x-1}=(2\pm\sqrt{3})^n.$$

去分母化简，则有 $[(2\pm\sqrt{3})^n-1]x=(2\pm\sqrt{3})^n+1$，

$$\therefore \quad x=\frac{(2\pm\sqrt{3})^n+1}{(2\pm\sqrt{3})^n-1}.$$

33．原式两端立方得：

$$8a^3+3\sqrt[3]{4a^3+x}\cdot\sqrt[3]{4a^3-x}\,(\sqrt[3]{4a^3+x}+\sqrt[3]{4a^3-x})=8a^3,$$

$$\therefore \quad 6a\sqrt[3]{4a^3+x}\cdot\sqrt[3]{4a^3-x}=0.$$

两端立方得 $(4a^3+x)(4a^3-x)=0$，

$\therefore \quad x=\pm 4a^3$．检验知它们都是原方程的根．

34．原方程可化为

$$\sqrt[n]{x^n+a^{\frac{n}{n+1}}x^{\frac{n2}{n+1}}}+\sqrt[n]{a^n+a^{\frac{n2}{n+1}}x^{\frac{n}{n+1}}}=b.$$

$$x\sqrt[n]{\frac{a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}}}{x^{\frac{n}{n+1}}}}+a\sqrt[n]{\frac{a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}}}{a^{\frac{n}{n+1}}}}=b,$$

$$\frac{x}{x^{\frac{1}{n+1}}}\sqrt[n]{a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}}}+\frac{a}{a^{\frac{n}{n+1}}}\sqrt[n]{a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}}}=b,$$

即 $x^{\frac{n}{n+1}}(a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}})^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{n}{n+1}}(a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}})^{\frac{1}{n}}=b.$

提公因式 $(a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}})^{\frac{1}{n}}(a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}})=b,$

即 $(a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}}=b$，$\therefore \quad a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}}=b^{\frac{n}{n+1}}$，

$\therefore \quad x^{\frac{n}{n+1}}=b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}$，$\quad \therefore \quad x=(b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}}$．

35．和前题一样两端立方整理得：

$$2x+3\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x-1}\,(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1})=5x,$$

用 $\sqrt[3]{5x}$ 代替括号内的式子，$\therefore \quad \sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{5x}=x.$

两端再立方得　$5x(x^2-1)=x^3$,

即　$x(4x^2-5)=0$,

$$\therefore\quad x_1=0,\quad x_2=\frac{\sqrt{5}}{2},\quad x_3=-\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

检验知它们都是原方程的根.

36. $\because$ $$x=\frac{\begin{vmatrix}4 & a\\ 8 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & a\\ 1 & 4\end{vmatrix}}=\frac{16-8a}{8-a}=\frac{8(2-a)}{8-a},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & a\\ 1 & 4\end{vmatrix}}=\frac{12}{8-a},$$

欲使 $y>0$, $x>0$, 则必须有$\begin{cases}8-a>0\\ 2-a>0\end{cases}$,

故当 $a<2$ 时，方程组的解才是正数.

37. $$D=\begin{vmatrix}m+1 & 1\\ 3 & m-1\end{vmatrix}=(m+2)(m-2),$$

$$D_x=\begin{vmatrix}m & 1\\ 2 & m-1\end{vmatrix}=(m-2)(m+1),$$

$$D_y=\begin{vmatrix}m+1 & m\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-1(m-2),$$

$\therefore$ 当 $m\neq\pm2$ 时，$D=(m+2)(m-2)\neq0$,

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{m+1}{m+2},\quad y=\frac{D_y}{D}=-\frac{1}{m+2},$$

当 $m=-2$ 时，分母为零，无解；当 $m=2$ 时，原方程组两个方程成相同的两个二元一次方程，故有无数组解.

38. $$D=\begin{vmatrix}5 & 3 & 3\\ 2 & 6 & -3\\ 8 & -3 & 2\end{vmatrix}=-231\neq0,$$

$$\therefore\quad x=\frac{\begin{vmatrix}48&3&3\\18&6&-3\\21&-3&2\end{vmatrix}}{D}=\frac{-693}{-231}=3,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}5&48&3\\2&18&6\\8&21&-3\end{vmatrix}}{D}=\frac{-1155}{-231}=5,$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}5&3&48\\2&6&18\\8&-3&21\end{vmatrix}}{D}=\frac{-1386}{-231}=6.$$

39. (1) + (2) + (3) + …… + (n) 得 $(n-1)(x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n)=1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,

$$\therefore\quad x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_{n-1}+x_n=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}\qquad(n+1).$$

将第$(n+1)$个方程分别减(1)，(2)，(3)，……(n)即得方程组的解：

$$x_1=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}-1,\quad x_2=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}-2,$$

$$x_3=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}-3,\quad\cdots\cdots,\quad x_n=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}-n.$$

40. (1) + (2) + …… + (8) 得

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=0\qquad(9),$$

(1) + (4) 得 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=3$ (10),

(9) − (10) 得 $x_7+x_8=-3$ (11),

(6) − (11) 得 $x_6=-3$，(7) − (11) 得 $x_1=1$.

将 $x_1=1$，$x_6=-3$ 代入(10)得 $x_2+x_3+x_4+x_5=5$ (12),

(10) − (3) 得 $x_2=2$，(12) − (2) 得 $x_5=-4$. 即可求得方程组的解

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=4,\ x_5=-4,\ x_6=-3,$$

$$x_7=-2,\ x_8=-1.$$

41. (1)×10－(2)×3，再分解因式得 $(x+4y)(-2x+3y)=0$，

答：$x=\pm3$，$y=\pm2$；和 $x=\mp\frac{4}{3}\sqrt{3}$，$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

42. (1)×4＋(2)得 $(y-3x)^2=0$，

答：$x_1=0$，$y_1=0$；$x_2=15$，$y_2=45$.

43. 由(2)有 $y(x+1)-(x+1)=0$，即 $(x+1)(y-1)=0$，

答：$x_1=1$，$y_1=-3$；$x_2=-1$，$y_2=-6$；$x_3=-6$，

$y_3=1$；$x_4=3$，$y_4=1$.

44. 设 $x+y=\alpha$，$xy=\beta$，原方程组变为

$\begin{cases}\alpha+\beta=11,\\ \alpha\beta=30.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}\alpha=5\\ \beta=6\end{cases}$ 或$\begin{cases}\alpha=6\\ \beta=5.\end{cases}$

从而求得方程组的解

$\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=3;\end{cases}\begin{cases}x_2=3,\\ y_2=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=1,\\ y_3=5;\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=5,\\ y_4=1.\end{cases}$

45. (1)＋(2)×2 得 $(x+y)^2=64$，$\therefore\ (x+y)=\pm8$.

答：$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=5;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=5,\\ y_2=3;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=-3,\\ y_3=-5;\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=-5,\\ y_4=-3.\end{cases}$

46. (2)－(1)得 $x^2-y^2=0$，即 $(x+y)(x-y)=0$.

答：$\begin{cases}x_1=6,\\ y_1=6;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-6,\\ y_2=-6;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=2,\\ y_3=-2;\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=-2,\\ y_4=2.\end{cases}$

47. 此二方程都可以分解因式，即有

$$\begin{cases}(x+y)^2-4(x+y)-45=0\\ (x-y)^2-2(x-y)-3=0,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}(x+y-9)(x+y-5)=0\\ (x-y-3)(x-y+1)=0.\end{cases}$$

答：$\begin{cases}x_1=6,\\ y_1=3;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=-4;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=4,\\ y_3=5;\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=-3,\\ y_4=-2.\end{cases}$

48. 方程(1)可以分解为 $(y+2)(x-2)=0$.

答：$\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=2,\\ y_2=-5;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=1,\\ y_3=-2;\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=5,\\ y_4=-2.\end{cases}$

49. 因含 x 的对应项的系数成比例 $\frac{1}{2}=\frac{-3}{-6}=\frac{4}{8}$，故由 $2\times(1)$ 得 $3y^2+4y+1=0$，$y_1=-1$，$y_2=-\frac{1}{3}$.

答：$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}(-7+\sqrt{57}),\\ y_1=-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{1}{2}(-7-\sqrt{57}),\\ y_2=-1;\end{cases}$

$\begin{cases}x_3=\frac{1}{3},\\ y_3=-\frac{1}{3};\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-\frac{16}{3},\\ y_4=-\frac{1}{3}.\end{cases}$

50. (1)可以分解，即 $(x-2y)(x-3y)=0$,

答：$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=4,\\ y_2=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=-\frac{2}{5},\\ y_3=-\frac{1}{5};\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-\frac{3}{5},\\ y_4=-\frac{1}{5}.\end{cases}$

51. 消去 x 的一次项，看是否可以分解因式. (1) $\times 2-$ (2) 得：$-6xy+3y^2=0$，即 $3y(2x-y)=0$.

答：$\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\ y_2=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=0,\\ y_3=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=0,\\ y_4=0.\end{cases}$

52. (1) $-$ (2) 得 $(x+y)^2+(x+y)-2=0$,

即 $(x+y+2)(x+y-1)$.

答：$\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=-3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-3,\\ y_2=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=3,\\ y_3=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}y_4=-2,\\ y_4=3.\end{cases}$

53. 将(2)中 x^3+y^3 分解为 $(x+y)(x^2-xy+y^2)$，(2) $\div$ (1) 得

$x+y=5$ (3),

(1)的两边各加 $3xy$ 得 $(x+y)^2=7+3xy$ (4),

(3)代入(4)得 $xy=6$，现解方程组：

$\begin{cases}x+y=5\\ xy=6,\end{cases}$

答：$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=2,\\ y_2=3.\end{cases}$

54. (2) $\times 3+1$ 得 $(x+y)^3=1$，∴ $x+y=1$ (3)

把(3)代入(2)得 $xy=-2$ (4)

解(3)、(4)组成的方程组得 $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-1,\\y_2=2.\end{cases}$

55. 由(2)有 $x=y-a$ (3)

代入(1)得 $y^2-6y+4a+1=0$，

∴ $y=3\pm2\sqrt{2-a}$．代入(3)得 $x=3-a\pm2\sqrt{2-a}$．

方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=3-a+2\sqrt{2-a},\\y_1=3+2\sqrt{2-a};\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=3-a-2\sqrt{2-a},\\y_2=3-2\sqrt{2-a}.\end{cases}$$

讨论 ① 当 $a<2$ 时，方程组有不同的两组实数解；

② 当 $a=2$ 时，方程组有相同的两组实数解；

③ 当 $a>2$ 时，方程组没有实数解.

56. (1) ÷ (2)得 $x^2+xy+y^2=3$ (3)

(3) − (2)得 $2xy=-4$，即 $xy=-2$ (4)

(3) + (4)得 $x^2+2xy+y^2=1$，∴ $x+y=\pm1$ (5)

由方程(4)，(5)联立得原方程组的解为：

$$\begin{cases}x_1=1,\\y_1=-2;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=1;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=2,\\y_3=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=-1,\\y_4=2.\end{cases}$$

57. 由(1)有 $z=-(x+y)$ (3)

(3)代入(2)得 $x^3+y^3-(x+y)^3=-18$.

化简得 $xy(x+y)=6$，即 $xyz=-6$ (4)

由(4)可知 x,y,z 必须是6的约数 ±1，±2，±3，且要满足(1)、(2)，所以其中有且只有一个取负数，这两个负数的绝对值应该最大，如令

$x=-3$ 时，则得 $\begin{cases}y=1,\ 2\\z=2,\ 1.\end{cases}$ 故所求解为

$$\begin{cases}x_1=-3,\\y_1=1,\\z_1=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-3,\\y_2=2,\\z_2=1;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=2,\\y_3=-3,\\z_3=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_4=1,\\y_4=-3,\\z_4=2;\end{cases}\begin{cases}x_5=1,\\y_5=2,\\z_5=-3;\end{cases}\begin{cases}x_6=2,\\y_6=1,\\z_6=-3.\end{cases}$$

58. 由(1)得 $y=1-x$，代入(2)得 $x^5+(1-x)^5=31$.

展开合并得 $x^4-2x^3+2x^2-x-6=0$.

分解因式为 $(x-1)(x-2)(x^2-x+3)=0$.

答：$\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=2,\\y_2=-1;\end{cases}$

$$\begin{cases}x_3=\dfrac{1+\sqrt{11}\,i}{2},\\y_3=\dfrac{1-\sqrt{11}\,i}{2};\end{cases}\begin{cases}x_4=\dfrac{1-\sqrt{11}\,i}{2},\\y_4=\dfrac{1+\sqrt{11}\,i}{2}.\end{cases}$$

59. (2)变形为 $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=b^4$.

将(1)代入得 $x^2-xy+y^2=\dfrac{b^4}{a^2}$ (3)

(1)－(3)得 $2xy=\dfrac{a^4-b^4}{a^2}$ (4)

由(1)和(4)知 $x^2+2xy+y^2=\dfrac{3a^4-b^4}{2a^2}$,

即 $x+y=\pm\sqrt{\dfrac{3a^4-b^4}{2a^2}}$.

又由(3)和(4)得 $x-y=\pm\sqrt{\dfrac{3b^4-a^4}{2a^2}}$.

由此，求得方程组的解为

$$x=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{3a^4-b^4}{2a^2}}\pm\sqrt{\frac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right),$$

$$y=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{3a^4-b^4}{2a^2}}\mp\sqrt{\frac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right).$$

60. 由(1)得 $y=\dfrac{x-m}{1+mx}$，由(2)得 $y=-\dfrac{2+x}{1+x}$.

由此有 $\dfrac{x-m}{1+mx}=-\dfrac{2+x}{1+x}$,

即有方程　$(1+m)x^2+(2+m)x+(2-m)=0$ (3)

方程(3)有二实根的充要条件是

$$\begin{cases}1+m\neq 0\\(2+m)^2-4(1+m)(2-m)\geqslant 0.\end{cases}$$

解这个不等式得　$|m|\geqslant\frac{2\sqrt{5}}{5}$　$(m\neq -1)$.

如 $m=-1$，则(3)变形为 $x+3=0$，$\therefore$　$x=-3$，

即当　$m=-1$ 时方程(3)有一个根 $x=-3$.

61. 由(1)得　$(x+y)^2(x-y)=3y(x+2)$ (3)

(3)÷(2)得 $x+y=3y$，即　$x=2y$ (4)

(4)代入(2)即求得方程组的两组解. 因两方程相除时，除式不得为零，即 $x+2\neq 0$，即 $x\neq -2$，可能出现失解，找回失解，将 $x=-2$ 代入原方程组，得两组解也适合原方程组，故原方程组有四组解：

$$\begin{cases}x_1=\frac{2}{3}(1+\sqrt{7}),\\y_1=\frac{1}{3}(1+\sqrt{7});\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=\frac{2}{3}(1-\sqrt{7}),\\y_2=\frac{1}{3}(1-\sqrt{7});\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_3=-2,\\y_3=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=-2,\\y_4=-2.\end{cases}$$

62. (1)+(2)得　$2x^2-5xy+2y^2=0$，

即　$(x-2y)(2x-y)=0$，故可求原方程组的解为$\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=-2;\end{cases}$

$$\begin{cases}x_2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\\y_2=1+\sqrt{3}i;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\\y_3=1-\sqrt{3}i.\end{cases}$$

63. (1)+(2)+(3)得$(x+y+z)^2=100$，$\therefore$　$x+y+z=\pm 10$. 分别代入(1)，(2)，(3)，即得原方程组的解

$$\begin{cases}x_1=2,\\y_1=3,\\z_1=5;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=-3,\\z_2=-5.\end{cases}$$

64. 设 $x+y=X$，$x+z=Y$，$y+z=Z$，代入原方程组得

$$\begin{cases} XY=12 & (4)\\ ZX=15 & (5)\\ YZ=20 & (6)\end{cases}$$

(4) × (5) × (6) 得 $(XYZ)^2=3600$，即　$XYZ=\pm 60$　　(7)

(7) ÷ (4)，(7) ÷ (5)，(7) ÷ (6) 所得结果代回原设，即可求得原方程组的解：

$$\begin{cases} x_1=1,\\ y_1=2,\\ z_1=3;\end{cases}\qquad \begin{cases} x_2=-1,\\ y_2=-2,\\ z_2=-3.\end{cases}$$

65. 由 (1) × 2 − (2) 得 $-y+2z=0$，$y=2z$，

∴　$x=2y-3z=4z-3z=z$.

把 $x=z$，$y=2z$ 代入 (3) 得 $z^3=8$，

∴　$z_1=2$，$z_2=-1+\sqrt{3}\,i$，$z_3=-1-\sqrt{3}\,i$.

故原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=2,\\ y_1=4,\\ z_1=2;\end{cases}\quad \begin{cases} x_2=-1+\sqrt{3}\,i,\\ y_2=-2+2\sqrt{3}\,i,\\ z_2=-1+\sqrt{3}\,i;\end{cases}\quad \begin{cases} x_3=-1-\sqrt{3}\,i,\\ y_3=-2-2\sqrt{3}\,i,\\ z_3=-1-\sqrt{3}\,i.\end{cases}$$

66. 将各式展开相加而得

$$2(xy+yz+zx)+(x^2+y^2+z^2)=169,$$

即　$(x+y+z)^2=169$，∴　$x+y+z=\pm 13$　　(4)

由 (4) 得　$y+z=\pm 13-x$，$x+z=\pm 13-y$，$x+y=\pm 13-z$，分别代入 (1)，(2)，(3)，即得原方程的解：

$$\begin{cases} x_1=3,\\ y_1=4,\\ z_1=6;\end{cases}\qquad \begin{cases} x_2=-3,\\ y_2=-4,\\ z_2=-6.\end{cases}$$

67. (1) × (2) × (3) 得　$x^2y^2z^2=abcxyz$，

即有　$xyz=abc$　　(4)

　　$xyz=0$　　(5)

$\because$ a, b, c 均为正数，(4) ÷ (1) 得 $x=\pm\sqrt{bc}$，

(4) ÷ (2) 得 $y=\pm\sqrt{ac}$，(4) ÷ (3) 得 $z=\pm\sqrt{ab}$.

答：$\begin{cases}x_1=0,\\y_1=0,\\z_1=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\sqrt{bc},\\y_2=\sqrt{ac},\\z_2=\sqrt{ab};\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=-\sqrt{bc},\\y_3=-\sqrt{ac},\\z_3=-\sqrt{ab};\end{cases}$

$\begin{cases}x_4=\sqrt{bc},\\y_4=-\sqrt{ac},\\z_4=-\sqrt{ab};\end{cases}$ $\begin{cases}x_5=-\sqrt{bc},\\y_5=-\sqrt{ac},\\z_5=\sqrt{ab};\end{cases}$ $\begin{cases}x_6=-\sqrt{bc},\\y_6=\sqrt{ac},\\z_6=-\sqrt{ab}.\end{cases}$

68. (1)，(2)，(3) 分别乘以 y, z, x 相加得

$$axy+byz+czx=x^2y-y^2z+y^2z-z^2x+z^2x-x^2y=0 \quad (4)$$

又 (1)，(2)，(3) 分别乘以 z, x, y 相加得

$$axz+bxy+cyz=x^2z-z^2y+y^2x-x^2z+z^2y-y^2x=0 \quad (5)$$

由 (4)，(5) 得 $\dfrac{xy}{c^2-ab}=\dfrac{yz}{a^2-bc}=\dfrac{zx}{b^2-ac}$.

$$\therefore \quad \frac{yz}{a^2-bc}=\frac{xy}{c^2-ab}\cdot\frac{zx}{b^2-ac}\div\frac{yz}{a^2-bc}=\frac{(a^2-bc)x^2}{(c^2-ab)(b^2-ac)}.$$

两边除以 (a^2-bc) 得 $\dfrac{yz}{(a^2-bc)^2}=\dfrac{x^2}{(c^2-ab)(b^2-ac)}$，

$$\therefore \quad \frac{x^2}{(c^2-ab)(b^2-ac)}=\frac{yz-x^2}{(a^2-bc)^2-(c^2-ab)(b^2-ac)}$$

$$=\frac{-ax}{a(a^3+b^3+c^3-3abc)}.$$

因此 $x_1=0$，$x_2=-\dfrac{(c^2-ab)(b^2-ac)}{a^3+b^3+c^3-3abc}$.

若 $x=0$，则由 (3) 得 $z=0$ 或 $z=c$，由 (2) 得 $y=0$ 或 $y=b$. 因而由 (1) 得 $x=0$ 或 $x=a$.

$\therefore$ $\begin{cases}x_1=0,\\y_1=0,\\z_1=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=0,\\y_2=0,\\z_2=c;\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=0,\\y_3=b,\\z_3=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=a,\\y_4=0,\\z_4=0.\end{cases}$

若 $x=-\frac{(c^2-ab)(b^2-ac)}{a^3+b^3+c^3-3abc}$，则 y，z 依前法可求得：

$$y=-\frac{(a^2-bc)(c^2-ab)}{a^3+b^3+c^3-3abc},\quad z=-\frac{(b^2-ac)(a^2-bc)}{a^3+b^3+c^3-3abc}.$$

69．(1)＋(2)＋(3)得

$$2(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=a^2+b^2+c^2 \qquad (4)$$

又(1)－(2)得 $(y-x)(x+y+z)=a^2-b^2$,

即 $$x+y+z=\frac{a^2-b^2}{y-x}.$$

同理，$$x+y+z=\frac{b^2-c^2}{z-y}=\frac{c^2-a^2}{x-z},$$

由此可得 $$(x+y+z)^2=\frac{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2}{(y-x)^2+(z-y)^2+(x-z)^2}$$

$$=\frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)}$$

$$=\frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{a^2+b^2+c^2-(x+y+z)^2}.$$

∴ $(x+y+z)^4-(a^2+b^2+c^2)(x+y+z)^2+a^4+b^4+c^4$
$-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2=0$，解此方程求得 $x+y+z$ 之值，假定为 k，

则 $$x-y=\frac{b^2-a^2}{k},\ y-z=\frac{c^2-b^2}{k},\ z-x=\frac{a^2-c^2}{k}.$$

因此 $$x+y+z-(x-y)=2y+z=k-\frac{b^2-a^2}{k}=\frac{k^2+a^2-b^2}{k},$$

∴ $$(y-z)+(2y+z)=3y=\frac{k^2+a^2-2b^2+c^2}{k},$$

∴ $$y=\frac{k^2+a^2-2b^2+c^2}{3k}.$$

同理得 $$x=\frac{k^2-2a^2+b^2+c^2}{3k},\quad z=\frac{k^2+a^2+b^2-2c^2}{3k}.$$

70．原方程变形为

$$\begin{cases}(x-y+z)(x+y-z)=a^2 & (1)\\ (y-z+x)(y+z-x)=b^2 & (2)\\ (z-x+y)(z+x-y)=c^2 & (3)\end{cases}$$

三式相乘得 $(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)=\pm abc$ $\qquad (4)$

(4)分别除以(1)，(2)，(3)得

$$\begin{cases}z-x+y=\pm\dfrac{bc}{a},\\[2ex] x-y+z=\pm\dfrac{ac}{b},\\[2ex] y-z+x=\pm\dfrac{ab}{c},\end{cases}$$

解之得 $\begin{cases}x_1=\dfrac{ab^2+ac^2}{2bc},\\[2ex] y_1=\dfrac{a^2b+bc^2}{2ac},\\[2ex] z_1=\dfrac{a^2c+b^2c}{2ab};\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=-\dfrac{ab^2+ac^2}{2bc},\\[2ex] y_2=-\dfrac{a^2b+bc^2}{2ac},\\[2ex] z_2=-\dfrac{a^2c+b^2c}{2ab}.\end{cases}$

71. 把 $x=a$，$y=b$，$z=c$，$t=d$ 代入方程组，求出 b，d 以 a，c 所表之代数式，证明 $b-d=0$ 即可.

72. 整理得

$$\begin{cases}x(y^2+z^2)=ayz & (1)\\ y(z^2+x^2)=bxz & (2)\\ z(x^2+y^2)=cxy & (3)\end{cases}$$

由(1)得 $$x=\frac{ayz}{y^2+z^2} \qquad (4)$$

把(4)代入(2)得 $$a^2y^2+(y^2+z^2)=ab(y^2+z^2) \qquad (5)$$

把(4)代入(3)得 $$a^2z^2+(y^2+z^2)=ac(y^2+z^2) \qquad (6)$$

(5)－(6)得 $$y=\pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{a-b+c}}\cdot z \qquad (7)$$

把(7)代入(5)得 $$z=\pm\sqrt{\frac{(b-a+c)(a-b+c)}{2}}.$$

再代回(7)，(4)即可解出 y，x.

73. (3) − (1) 得 $3xyz + xy + 2yz = -8$ (4)

(3) − (2) 得 $2xyz - xy + 3yz = 8$ (5)

(4) + (5) 得 $yz(x+1) = 0$.

由原方程组知 $y \neq 0$，$z \neq 0$，即 $yz \neq 0$.

$$\therefore \quad x + 1 = 0,\ 即\ x = -1.$$

即可求得方程组的解

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = 2, \\ z_1 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -4, \\ z_2 = -3. \end{cases}$$

74. (1) + (2) + (3) 得 $12(x^2 + y^2 + z^2) + 24(xy + yz + zx) = 108$,

即 $(x + y + z)^2 = 9$，$x + y + z = \pm 3$.

(2) − (1) 得 $5x^2 - 4y^2 - z^2 = 0$,

(2) − (3) 得 $x^2 - 5y^2 + 4z^2 = 0$,

消去 z 得 $x^2 = y^2$，同理可得 $x^2 = y^2 = z^2$.

即 $|x| = |y| = |z|$，且 $x + y + z = \pm 3$.

若 x，y，z 同号，$x = y = z = 1$ 或 $x = y = z = -1$;

若 x，y，z 不全同号，则有

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = -3, \\ z_1 = -3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -3, \\ y_2 = 3, \\ z_2 = -3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = -3, \\ y_3 = -3, \\ z_3 = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 3, \\ y_4 = 3, \\ z_4 = -3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_5 = 3, \\ y_5 = -3, \\ z_5 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_6 = -3, \\ y_6 = 3, \\ z_6 = 3. \end{cases}$$

75. 将(1)两边平方得

$$(x+1) + (y+1) = 9 - 2\sqrt{(x+1)(y+1)} \tag{3}$$

由(2)得 $(x+1)(y+1) - 2[(x+1) + (y+1)] + 18 = 0$ (4)

将(3)代入(4)整理得 $(x+1)(y+1) + 4\sqrt{(x+1)(y+1)} = 0$.

观察得 $(x+1)(y+1) = 0$，即 $x = -1$ 或 $y = -1$.

故方程组的解为$\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=8;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=8,\\y_2=-1.\end{cases}$

76. 由(1)得 $$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{1}{c} \tag{4}$$

由(2)得 $$\frac{a}{x}+\frac{c}{z}=\frac{1}{b} \tag{5}$$

由(3)得 $$\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{1}{a} \tag{6}$$

(4)+(5)+(6)所得方程分别减去(6),(5),(4)即可求得方程组的解

$$x=\frac{2a^2bc}{ab+ac-bc},\quad y=\frac{2b^2ca}{bc+ba-ca},\quad z=\frac{2c^2ab}{ca+cb-ab}.$$

77. 原方程即

$$\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{a}{b}xy & (1)\\(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)=a & (2)\end{cases}$$

由(2)得 $(x^2+y^2)^2+xy(x^2+y^2)=a$,将(1)代入可得

$$xy=\pm\frac{b}{\sqrt{a+b}}.$$

可是由(1)得 $x^2+y^2=\pm\dfrac{a}{\sqrt{a+b}}$,

故有 $$(x+y)^2=\pm\frac{a}{\sqrt{a+b}}\pm\frac{2b}{\sqrt{a+b}}=\pm\frac{a+2b}{\sqrt{a+b}}.$$

$$\therefore\quad x+y=\pm\sqrt{\pm\frac{a+2b}{\sqrt{a+b}}},\quad x-y=\pm\sqrt{\pm\frac{a-2b}{\sqrt{a+b}}}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\pm\frac{a+2b}{\sqrt{a+b}}}\pm\sqrt{\pm\frac{a-2b}{\sqrt{a+b}}}\right),$$

$$y=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\pm\frac{a+2b}{\sqrt{a+b}}}\mp\sqrt{\pm\frac{a-2b}{\sqrt{a+b}}}\right).$$

78. 将原方程组变形为

$$\begin{cases} x+y=3(1-xy) & (1) \\ x-y=\dfrac{1}{3}(1+xy) & (2) \end{cases}$$

$(1)^2-(2)^2$化简整理得 $2x^2y^2-5xy+2=0$,

$\therefore\ xy=2$, 或 $xy=\dfrac{1}{2}$ 代回(1),(2)求解,

答: $\begin{cases} x_1=-1, \\ y_1=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=1, \\ y_2=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

79. (1)+(2)得 $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$,

即 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\pm\dfrac{1}{ab}\sqrt{a^2+b^2}$

由(1)得 $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{1}{a^2}$,

$\therefore\ x=a^2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\pm\dfrac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}$.

同理 $y=\pm\sqrt{a^2+b^2}$.

80. 令 $xy=u$, $\dfrac{x}{y}=v$, 则原方程组变形为

$$\begin{cases} u-v=a \\ u-\dfrac{1}{v}=\dfrac{1}{a}, \end{cases}$$

由此得 $\begin{cases} x_1=\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}, \\ y_1=\sqrt{1+a^2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}, \\ y_2=-\sqrt{1+a^2}. \end{cases}$

81. 由(1)得 $(a-b)(a-y)+(a-b)(a-x)=2(a-x)(a-y)$,

即 $2xy-(a+b)x-(a+b)y+2ab=0$ (3)

由(2)得 $2xy-cx-cy=0$ (4)

(3)−(4)得 $-(a+b-c)x-(a+b-c)y+2ab=0$,

$\therefore\ x+y=\dfrac{2ab}{a+b-c}$ (5)

将(5)代入(4)得 $xy=\dfrac{abc}{a+b-c}$ (6)

由(5)，(6)知 x,y 为方程 $(a+b-c)m^2-2abm+abc=0$ 的根.

解此方程得 $m=\dfrac{ab\pm\sqrt{a^2b^2-abc(a+b-c)}}{a+b-c}$.

因此可求得 $x=\dfrac{ab\pm\sqrt{a^2b^2-abc(a+b-c)}}{a+b-c}$,

$$y=\frac{ab\pm\sqrt{a^2b^2-abc(a+b-c)}}{a+b-c}.$$

82. 由(1)得 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a}\,x}$, $\dfrac{1}{y}=\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}\,x}$.

故 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}\,x}+\dfrac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a}\,x}=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a}}$

$$=\frac{1}{a},$$

$\therefore$ $x=\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a}}a$.

同理, $y=\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{b}}\cdot a$, $z=\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{b}}\cdot a$.

83. (2) + (1) 得 $\dfrac{x^2+x+1}{y^2+y+1}=\dfrac{a^2+a+1}{b^2+b+1}$ (3)

假定 $x=a+m$, $y=b+n$.

则由(1)得 $\dfrac{a+m-1}{b+n-1}=\dfrac{a-1}{b-1}=\dfrac{m}{n}$ (4)

由(3)得 $\dfrac{a^2+2am+m^2+a+m+1}{b^2+2bn+n^2+b+n+1}=\dfrac{a^2+a+1}{b^2+b+1}=\dfrac{m^2+(2a+1)m}{n^2+(2b+1)n}$

(5)

由(4)得 $m=\dfrac{a-1}{b-1}n$,

由(5)得 $(b^2+b+1)[m^2+(2a+1)m]=(a^2+a+1)[n^2+(2b+1)n]$.

将 m 的值代入得

$$(b^2+b+1)\left[\left(\frac{a-1}{b-1}n\right)^2+(2a+1)\frac{a-1}{b-1}n\right]$$

$$=(a^2+a+1)\left[n^2+(2b+1)n\right].$$

可求得 $n=0$，因而 $m=0$ $\therefore$ $x=a$，$y=b$.

又 $$\left[(b^2+b+1)\left(\frac{a-1}{b-1}\right)^2-(a^2+a+1)\right]n$$

$$=(a^2+a+1)(2b+1)-(b^2+b+1)\frac{(2a-1)(a-1)}{b-1},$$

即 $3(a-b)(ab-1)n=(b-1)\cdot 3\cdot(b-a)(ab+a+b)$,

$\therefore$ $n=\dfrac{(b-1)(ab+a+b)}{1-ab}$, $\qquad m=\dfrac{(a-1)(ab+a+b)}{1-ab}$.

$\therefore$ $x=a+\dfrac{(a-1)(ab+a+b)}{1-ab}=\dfrac{a^2-b}{1-ab}$,

$y=b+\dfrac{(b-1)(ab+a+b)}{1-ab}=\dfrac{b^2-a}{1-ab}$.

84. 由(1)得 $$\frac{(2x-y)-4}{\sqrt{2x-y}+2}+\frac{(2x-y)-25}{\sqrt{2x-y}-5}=9 \qquad (3)$$

令 $\sqrt{2x-y}=u$，则(3)为 $\dfrac{u^2-4}{u+2}+\dfrac{u^2-25}{u-5}=9$.

解之得 $u=3$，即 $2x-y=9$，$y=2x-9$.

将 $y=2x-9$ 代入(2)得

$$2x-9+2(x-4)=2\sqrt{2x+(2x-9)},$$

整理得 $16x^2-152x+325=0$，$(4x-25)(4x-13)=0$.

$\therefore$ $x_1=\dfrac{25}{4}$，$x_2=\dfrac{13}{4}$. 分别代入 $y=2x-9$ 得

$$\begin{cases} x=\dfrac{25}{4}, \\ y=\dfrac{7}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{13}{4} \\ y=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \text{(不适合，舍去)}.$$

$\therefore$ 原方程组的解是 $\begin{cases} x=\dfrac{25}{4} \\ y=\dfrac{7}{4} \end{cases}$

85. 方程两边平方得

$$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{\cdots\cdots\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}_{1978\text{个根号}}=y^2-x,$$

由于 y^2-x 为一整数，这样继续下去，可得 $\sqrt{x+\sqrt{x}}=m$，$\sqrt{x}=m^2-x=k$，其中 m，k 均为整数，于是有 $k^2+k=m$，这是不可能的，因为一个整数平方加上此整数不可能为一个完全平方数，除它等于零，所以方程的整数解只能为：

$$x=0,\quad y=0.$$

86. 显然 $x=y=z=0$ 是方程的一组解．将方程变形为

$$x^2-2yzx+y^2+z^2=0,$$

解之得 $x=\dfrac{2yz\pm\sqrt{4y^2z^2-4(y^2+z^2)}}{2}=yz\pm\sqrt{y^2z^2-y^2-z^2}$.

要 x 为整数，$y^2z^2-y^2-z^2$ 应为平方数．

为此，要 $y^2z^2-y^2-z^2$ 关于 y(或 z) 有等根，即其判别式为 0．

$\therefore\quad 4(z^2-1)z^2=0,$

由此得 $z=0$ 或 $z=\pm1$.

若 $z=0$，则 $x=y=0$；若 $z=\pm1$，则 $(x\pm y)^2+1=0$ 这不可能．由此，$y^2z^2-y^2-z^2$ 除 $y=z=0$ 外，不可能为平方数，故原方程不可能有另外的整数解．

87. $\because\quad x^2+x+1=0,$

$\therefore\quad x\neq0$．$x^2+x+1=0$ 的两边同除以 x 得

$$x+\frac{1}{x}=-1.$$

$x^2+x+1=0$ 的两边同乘以 x，$x^3=-x^2-x$.

由 $x^2+x+1=0$ 得 $-x^2-x=1$，$\therefore\quad x^3=1$.

$$x^{14}+\frac{1}{x^{14}}=(x^3)^4\cdot x^2+\frac{1}{(x^3)^4\cdot x^2}=1^4\cdot x^2+\frac{1}{1^4\cdot x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(-1)^2-2=-1.$$

88. 假设存在三个正整数 x，y，z 能满足方程：$x^n+y^n=z^n$，其中 $x\leqslant y$，且 $x\leqslant n$（由于 x，y 的对称性，这样假定不影响结论的全面性），由于 $x<z$，$y<z$，故得

$$z^n-y^n=(z-y)(z^{n-1}+z^{n-2}y+z^{n-3}y^2+\cdots+y^{n-1})>1\cdot n\cdot x^{n-1}\geqslant x^n,$$

这与假定 $x^n+y^n=z^n$ 相矛盾.

∴ 满足题设条件的正整数不存在.

89. 解一 ① 如 $x=2$，则 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+2}}}}=2$，

∴ 2 是方程的根.

② $x>2$，令 $x=2+a$ $(a>0)$，

则因 $(2+a)^2=4+4a+a^2>4+a>4$，

∴ $x^2>2+x>4$，$x>\sqrt{x+2}>2$.

故 $2+x$ 的平方根大于 2 而小于 x.

同理可得 $2>\sqrt{2+\sqrt{2+x}}>\sqrt{2+x}$.

又 $2>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$，

∴ $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}$

$>\sqrt{2+\sqrt{2+x}}>\sqrt{2+x}>x$.

即当 $0<x<2$ 时，也不能是方程的根，因此，这一方程唯一的正根是 2.

解二 因为方程中左端 x，可以右端的全部式子代入，故与方程 $x=\sqrt{2+x}$ 实质一样，因此只要解此无理方程.

即 $x^2=2+x$，$(x-2)(x+1)=0$，

∴ $x=2$ 或 $x=-1$.

$x=-1$ 不符合算术根的意义和本题的要求，所以这一方程只有唯一的正根 2.

90. $(x^4+2x^3+2x^2)+(x^3+2x^2+2x)+(2x^2+4x+4)=0$，

即 $x^2(x^2+2x+2)+x(x^2+2x+2)+2(x^2+2x+2)=0$，

亦即 $(x^2+2x+2)(x^2+x+2)=0$，

$\therefore \quad x^2+2x+2=0 \quad$ 或 $\quad x^2+x+2=0$,

从而 $\quad x_{1,2}=-1\pm i \quad$ 或 $\quad x_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$.

91. $(x^5-1)-(5x^3-5x)=0$,

$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)-5x(x+1)(x-1)=0$,

$(x-1)(x^4+x^3-4x^2-4x+1)=0$,

$\dfrac{1}{4}(x-1)[(2x^2+x-3)^2-5(x+1)^2]=0$,

$(x-1)[2x^2+(1+\sqrt{5})x-(3-\sqrt{5})]$

$[2x^2+(1-\sqrt{5})x-(3+\sqrt{5})]=0$,

$\therefore \quad x_1=1, \quad x_{2,3}=\dfrac{1}{4}(-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{30-6\sqrt{5}})$,

$x_{4,5}=\dfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{30-6\sqrt{5}})$.

92. 方程两边同时除以 x^2 得

$9x^2+\dfrac{16}{x^2}-5\left(3x+\dfrac{4}{x}\right)+28=0$,

即 $\left(3x+\dfrac{4}{x}\right)^2-5\left(3x+\dfrac{4}{x}\right)+4=0$.

设 $3x+\dfrac{4}{x}=y$, 即得 $y^2-5y+4=0$,

解得 $y_1=1$, $y_2=4$.

即 $3x+\dfrac{4}{x}=1$, $3x+\dfrac{4}{x}=4$,

解得 $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{47}i}{6}$, $\quad x_{3,4}=\dfrac{2\pm2\sqrt{2}i}{3}$.

93. ∵方程的系数全部都是整数，∴它们的有理根只能是 12 的约数，即 ±1，±2，±3，±4，±6，±12，用综合除法试验，2，-6是原方程的根，

$$\begin{array}{l|l} 1+5-\ 7-\ 8-12 & \underline{\ 2\ } \\ \underline{\ \ +2+14+14+12} & \\ 1+7+\ 7+\ 6\quad 0 & \underline{-6} \\ \underline{\ \ -6-\ 6-\ 6} & \\ 1+1+\ 1\quad 0 & \end{array}$$

$\therefore$ 方程变为 $(x-2)(x+6)(x^2+x+1)=0$,

即原方程的根为：$x_1=2$，$x_2=-6$，$x_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

94. 方程的系数都是实数，它的复根成对出现，所以 $2+3i$ 也是它的根，还有一根设为 α，则由韦达定理

$$\alpha+2+3i+2-3i=5,$$

$$\alpha(2+3i)+\alpha(2-3i)+(2+3i)(2-3i)=t,$$

$$\alpha(2+3i)(2-3i)=-s.$$

解上面三方程得 $\alpha=1$, $t=17$, $s=-13$.

95. 原方程可化为

$$(x^4+2x^2+1)+(x^2+2x+1)+4=0,$$

即 $(x^2+1)^2+(x+1)^2+4=0$.

若 x 为实数，则 $(x^2+1)^2+(x+1)^2+4>0$,

所以原方程无实根.

96. 根据裴蜀定理，$f(-1)=a^2-ab+b^2=7$ (1)

$f(2)=4a^2+2ab+b^2=13$ (2)

(1) ×13 得 $13a^2-13ab+13b^2=91$ (3)

(2) ×7 得 $28a^2+14ab+7b^2=91$ (4)

(4) − (3) 得 $5a^2+9ab-2b^2=0$,

即 $(a+2b)(5a-b)=0$.

再分别解方程组 $\begin{cases}a+2b=0\\a^2-ab+b^2=7\end{cases}$ 和 $\begin{cases}5a-b=0\\a^2-ab+b^2=7\end{cases}$

得 $\begin{cases}a_1=2,\\b_1=-1;\end{cases}$ $\begin{cases}a_2=-2,\\b_2=1;\end{cases}$ $\begin{cases}a_3=\dfrac{\sqrt{3}}{3}, & a_4=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\\ b_3=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}; & b_4=-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$

97. 根据根与系数的关系，

$$a+b+c=\frac{28}{12} \tag{1}$$

$$ab+bc+ac=\frac{17}{12} \tag{2}$$

$$abc=-\frac{d}{12} \tag{3}$$

又 $\quad b=a+1 \qquad (4)$

将(4)代入(1)，(2)中，得

$$2a+c=\frac{4}{3} \tag{5}$$

$$a^2+2ac+a+c=\frac{17}{12} \tag{6}$$

(5)，(6)联立解之，得$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{2}, \\ c_1=\dfrac{1}{3}, \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} a_2=\dfrac{1}{18}, \\ c_2=\dfrac{11}{9}. \end{cases}$

将 a 之值代入(4)得 $b_1=\frac{3}{2}$，$b_2=\frac{19}{18}$.

将 a,b,c 之值代入(3)得，$\quad d_1=-3$，$\quad d_2=-\frac{209}{243}$.

但 d 为整数，所以 $a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}, c=\frac{1}{3}$，$d=-3$ 为所求.

98. 设方程的三根为 $a+bi$，$a-bi$，c，则有

$$\begin{cases} (a+bi)+(a-bi)+c=-2k, \\ (a+bi)(a-bi)+c(a+bi)+c(a-bi)=9, \\ c(a+bi)(a-bi)=-5k, \\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} 2a+c=-2k & (1) \\ a^2+b^2+2ac=9 & (2) \\ c(a^2+b^2)=-5k & (3) \\ a^2+b^2=5 & (4) \end{cases}$$

由(3)，(4)，$c=-k$ (5)

由(2)，(3)，$ac=2$ (6)

由(1)，(5)，(6) 得$\begin{cases}k_1=2,\\c_1=-2,\\a_1=-1;\end{cases}$ $\begin{cases}k_2=-2,\\c_2=2,\\a_2=1.\end{cases}$

将 a 的值代入(4)得，$b=\pm 2$.

但因 $a+bi$ 和 $a-bi$ 是共轭的. 所以只取 $b=2$ 即可. $k=2$ 时，方程的解是：$-1+2i$，$-1-2i$，-2.

$k=-2$时，方程的解是：$1+2i$，$1-2i$，2.

99. 由根与系数的关系得，

$\alpha+\beta+\gamma=-2$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=3$，$\alpha\beta\gamma=-4$.

① 由于 $\alpha\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-1$

$$=\alpha\left(\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma}{\alpha\beta\beta}\right)-1$$

$$=-\frac{3}{4}\alpha-1,$$

所以新方程和旧方程的解之间的关系式为：

$$y=-\frac{3}{4}x-1,\quad 即\ x=-\frac{4}{3}(1+y).$$

代入原方程，即得新方程：

$$\left[-\frac{4}{3}(1+y)\right]^3+2\left[-\frac{4}{3}(1+y)\right]^2+3\left[-\frac{4}{3}(1+y)\right]+4=0,$$

即 $16y^3+24y^2+27y-8=0$.

② $(\alpha+\beta+\gamma)^3-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)$

$=(-2)^3-[(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-3\alpha\beta\gamma+3\alpha\beta\gamma]$

$=-8-3\times(-4)-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)$

$=4-(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

$=4+2[(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)]$

$=4+2[(-2)^2-3\times 3]=-6.$

100. $\because\quad x^4+x^3+x^2+x=x(x^3+x^2+x+1)$

$=x[x^2(x+1)+(x+1)]$

$=x(x+1)(x^2+1)=x(x+1)(x+i)(x-i)$,

由 $f(0)=0+0+0+0=0$,

$f(-1)=(-1)^{4444}+(-1)^{3333}+(-1)^{2222}+(-1)^{1111}$

$=1-1+1-1=0$,

$f(-i)=(-i)^{4444}+(-i)^{3333}+(-i)^{2222}+(-i)^{1111}$

$=1-i+i-1=0$,

$f(i)=i^{4444}+i^{3333}+i^{2222}+i^{1111}=1+i-1-i=0$,

可知 $f(x)$ 可被 $x^4+x^3+x^2+x$ 整除.

101. 由根与系数的关系知 $x_1+x_2+x_3=10$ (1)

平方后, $(x_1+x_2+x_3)^2=100$,

$\sum x_1^2+2\sum x_1x_2=100$,

$2\sum x_1x_2=100-\sum x_1^2=100-38=62$,

$\therefore\quad \sum x_1x_2=31,\quad q=\sum x_1x_2=31$ (2)

$x_1x_2x_3=x_1x_2(x_1+x_2)=x_1x_2[(x_1+x_2+x_3)-x_3]$

$=x_1x_2(x_1+x_2+x_3)-x_1x_2x_3$,

$2x_1x_2x_3=x_1x_2(x_1+x_2+x_3)=10x_1x_2$ (3)

$\because$ 已知 $x_1+x_2=x_3$,

$\therefore\quad x_3=\dfrac{10}{2}=5$, 代入(2)得

$x_1x_2+5x_1+5x_2=x_1x_2+5(x_1+x_2)=x_1x_2+5x_3$

$=x_1x_2+25=31$,

$\therefore\quad x_1x_2=31-25=6$.

由(3)有 $x_1x_2x_3=\dfrac{10}{2}x_1x_2=5x_1x_2=5\times6=30$.

$\therefore\quad p=30$.

102. 假设方程有分数根$\dfrac{m}{n}$, 这里m、n是互质的整数, 且$|n|\neq1$, 以此根代换方程中 x, 得

$$\frac{m^4}{n^4}+a\cdot\frac{m}{n}+1=0.$$

用 n 乘上式两边，即得

$$\frac{m^4}{n^3}+am+n=0.$$

但这是不可能的．因为 $\frac{m^4}{n^3}$ 是分数，而 $am+n$ 是整数．假定方程有整数根 m，那么在方程中以 m 代换 x，得

$$m^4+am+1=0,$$

用 m 除方程所有各项，得

$$m^3+a+\frac{1}{m}=0.$$

但如果 $m\neq\pm1$，则这是不可能的．因为 m^3+a 是整数，而 $\frac{1}{m}$ 是分数．

如果 $m=\pm1$，则 $a=\mp2$，这与题设不符．

所以方程 $x^4+ax+1=0\quad(|a|\neq2)$ 无有理数根．

103．解一

$$\begin{array}{llllll}
1+ & 16 & +\ 89 & +\ 200 & +\ 156 & \underline{|\,k} \\
+ & k & +\text{——} & +\text{——} & +\text{——} & \\
\hline
1+ & (16+k) & +\text{——} & +\text{——} & +\text{——} & \\
+ & k & +\text{——} & +\text{——} & & \\
\hline
1+ & (16+2k) & +\text{——} & +\text{——} & & \\
+ & k & +\text{——} & & & \\
\hline
1+ & (16+3k) & +\text{——} & & & \\
+ & k & +\text{——} & & & \\
\hline
1+ & (16+4k) & & & &
\end{array}$$

若缺第二项，则 $16+4k=0$，即 $k=-4$．

$\therefore$　令 $y=4+x$，则原方程变为 $y^4-7y^2+12=0$，

即　$(y^2-3)(y^2-4)=0$，$(y-\sqrt{3})(y+\sqrt{3})(y-2)(y+2)=0$．

$\therefore$　$y_1=\sqrt{3}$，$y_2=-\sqrt{3}$，$y_3=2$，$y_4=-2$．

故　$x_1=\sqrt{3}-1$，$x_2=-\sqrt{3}-4$，$x_3=-2$，$x_4=-6$．

解二　令 $x=y+k$，原方程变为

$$(y+k)^4+16(y+k)^3+89(y+k)^2+200(y+k)+156=0,$$

即 $y^4+(4k+16)y^3+(6k^2+48k+89)y^2$

$+(4k^3+48k^2+178k+200)y+(k^4+16k^3+89k^2$

$+200k+156)=0.$

令第二项等于"0"，即 $4k+16=0$，∴ $k=-4.$

代入上式即得所求方程 $y^4-7y^2+12=0.$

解之得 $y_1=\sqrt{3}$，$y_2=-\sqrt{3}$，$y_3=2$，$y_4=-2.$

∴ $x_1=\sqrt{3}-4$，$x_2=-\sqrt{3}-4$，$x_3=-2$，$x_4=-6.$

104. $15f(x)=3x^5+5x^3-8x=3x(x^4-5x^2+4)+20x(x^2-1)$

$=3x(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)+20x(x+1)(x-1).$

$3(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$ 与 $20(x-1)x(x+1)$ 都是15的倍数，所以 $f(x)$ 为整数.

105. $f(x)=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{999}$

$$=\frac{x^{1000}-1}{x-1}=\frac{(x^{250})^4-1}{x-1}$$

$$=\frac{[(x^{250})^2+1](x^{250}+1)(x^{250}-1)}{x-1},$$

$g(x)=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{249}$

$$=\frac{x^{250}-1}{x-1}.$$

所以 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除，商为 $R(x)=x^{750}+x^{500}+x^{250}+1.$

106. 因 $(x-1)$ 能整除 $f(x)$，所以 $6+5+2a-b+4=0$，

即 $2a-b=-15$ (1)

同理 $4a+b=-15$ (2)

由(1)，(2)得 $a=-5$，$b=5.$

所以，$6x^4+5x^3-10x^2-5x+4=0.$

由于它有有理根，且可能为 ±1，±2，±4，$\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{1}{3}$，$\pm\frac{2}{3}$，…，试除之.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6 & +5 & -10 & -5 & +4 & \underline{1} \\
 & +6 & +11 & -1 & -4 & \\
\hline
6 & +11 & +1 & -1 & +0 & \underline{-1} \\
 & -6 & -5 & +4 & & \\
\hline
6 & +5 & -4 & +0 & & \underline{\tfrac{1}{2}} \\
 & +3 & +4 & & & \\
\hline
6 & +8 & +0 & & &
\end{array}
$$

所有方程的根为 1，-1，$\frac{1}{2}$，$-\frac{4}{3}$.

107. 实际上即求 x^2-1 除 $1+x^8+x^{24}+x^{48}+x^{80}$ 的余式.

设 以 x^2-1 除之商为 $p(x)$，余式为 $ax+b$，

则 $1+x^8+x^{24}+x^{48}+x^{80}=(x^2-1)p(x)+ax+b$.

当 $x=1$ 时，$5=a+b$，　当 $x=-1$ 时，$5=-a+b$.

$\therefore$ $a=0$，$b=5$.

故 x^3-x 除 $x+x^9+x^{25}+x^{49}+x^{81}$ 的余式为 5 .

108. (*a*) 由根与系数的关系，

$$x_1+x_2+x_3=12 \tag{1}$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=47 \tag{2}$$

$$\therefore\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)$$

$$=144-94=50 \tag{3}$$

(*b*) 由勾股定理，$x_1^2+x_2^2=x_3^2$ (4)

$$\therefore\quad x_1^2x_2^2x_3^2=x_1^2x_2^2(x_1^2+x_2^2)=x_1^2x_2^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_3^2)$$

$$=x_1^2x_2^2[(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-x_3^2]$$

$$=x_1^2x_2^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-x_1^2x_2^2x_3^2,$$

即 $2x_1^2x_2^2x_3^2=x_1^2x_2^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$，$\therefore$ $2x_3^2=50$，

$$\therefore\quad x_3^2=25，从而\quad x_3=5 \tag{5}$$

以(5)代入(1)，$x_1+x_2=12-x_3=12-5=7$ (6)

以(5)及(6)代入(2)，$x_1x_2+x_3(x_1+x_2)=47$，

$$x_1x_2=47-x_3(x_1+x_2)=47-5\times7=12 \tag{7}$$

以(5)代入(4)，$x_1^2+x_2^2=x_3^2=25$ (8)

(8) $2\times(7)$，$x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=1$，$\therefore\quad x_1-x_2=1$ (9)

解(6)，(9)得 $x_1=4$，$x_2=3$.

$\therefore$ 直角三角形的三边之长为 3，4，5.

109. 首先考虑方程 $x^7-1=0$ (1)

的根. 由 $x^7=1=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi$,

$$\therefore\quad x=\cos\frac{2n\pi}{7}+i\sin\frac{2n\pi}{7}.$$

令 $n=0$，$x_1=\cos 0+i\sin 0$；

$n=1$，$x_2=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$；

$n=2$，$x_3=\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}$；

$n=3$，$x_4=\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}$；

$n=4$，$x_5=\cos\frac{8\pi}{7}+i\sin\frac{8\pi}{7}$；

$n=5$，$x_6=\cos\frac{10\pi}{7}+i\sin\frac{10\pi}{7}$；

$n=6$，$x_7=\cos\frac{12\pi}{7}+i\sin\frac{12\pi}{7}$.

这里 x_1，x_2，…，x_7 就是 1 的 7 个 7 次方根. 其中只有 x_1 是实数. 很显然，根据棣莫佛定理，

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta,$$

可知，若令 a 代表 x_2，则 $x_3=a^2$，$x_4=a^3$，…，$x_7=a^6$，不但如此，我们令 a 代表 x_2，x_3，x_4，…，x_7 中任一个数，都可得出同样的结果，如令 a 代表 x_4，则 $x_4=a$，

$$x_7=\cos\frac{12\pi}{7}+i\sin\frac{12\pi}{7}=\left(\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\right)^2=a^2,$$

$$x_3=\cos\frac{4x}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}=\cos\frac{18\pi}{7}+i\sin\frac{18\pi}{7}$$

$$=\left(\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\right)^3=a^3.$$

同样可得 $x_6=a^4$，$x_2=a^5$，$x_8=a^6$. 既然如此，可见我们可以用 1，a，a^2，a^3，a^4，a^5，a^6 表示 1 的 7 个 7 次方根.

显然 $\quad a^7=1 \qquad (2)$

根据一元 n 次方程的根与系数的关系，可见方程 (1) 的 7 个根之和为 0，

即 $\quad 1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6=0 \qquad (3)$

$$\text{原等式左边}=\frac{a^4(1+a^3)(1+a^5)+a^5(1+a)(1+a^5)+a^6(1+a)(1+a^3)}{(1+a)(1+a^3)(1+a^5)}$$

$$=\frac{a^4+a^5+2a^6+2a^7+2a^9+2a^{10}+a^{11}+a^{12}}{1+2a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6}$$

$$=\frac{(a^4+a^5+a^6+a^7+a^9+a^{10})+(a^6+a^7+a^9+a^{10}+a^{11}+a^{12})}{a+(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)}$$

$$=\frac{a^4(1+a+a^2+a^3+a^5+a^6)+a^6(1+a+a^3+a^4+a^5+a^6)}{a+(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)}.$$

由等式(3)可知 $\quad 1+a+a^2+a^3+a^5+a^6=-a^4 \qquad (4)$

$$1+a+a^3+a^4+a^5+a^6=-a^2 \qquad (5)$$

由(3)，(4)，(5)可知

$$\text{原等式左边}=\frac{a^4(-a^4)+a^6(-a^2)}{a}=-\frac{2a^8}{a}=-2a^7.$$

由等式(2)可知 $\quad -2a^7=-2.$

所以原等式可以成立.

110. $14x^3-13x^2-18x+9=0 \qquad (1)$

因(1)的根成调和级数，

故 $\quad 9x^3-18x^2-13x+14=0 \qquad (2)$

其根成等差级数，设(2)之各根为

$$a-d,\ a,\ a+d \qquad (3)$$

则由根与系数的关系得

$$(a-d)+a+(a+d)=-\left(\frac{-18}{9}\right)=2,$$

$$3a=2, \qquad \therefore\ a=\frac{2}{3} \qquad (4)$$

$$a(a-d)(a+d)=-\frac{14}{9},\quad \frac{2}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2-d^2\right]=-\frac{14}{9},$$

$$d^2=\frac{25}{9},\qquad \therefore\quad d=\frac{5}{3} \tag{5}$$

以(4)及(5)代入(3)得(2)之三根：$-1,\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{3}$.

故(1)之三根为 $-1,\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{3}$.

111. 由判别式 $\Delta=2^2-4k=0$ 得 $k=1$.

112. $2(m+1)x^2+4mx+3m-2=0$,

$$x=\frac{-4m\pm\sqrt{(-4m)^2-4\times2(m+1)(3m-2)}}{4(m+1)}$$

$$=\frac{-2m\pm\sqrt{2(2-m-m^2)}}{2(m+1)}.$$

(i) 有相等根时，则 $2(2-m-m^2)=0$,

$2(1-m)(2+m)=0$, $\therefore\quad m=1$ 或 $m=-2$.

(ii) 有实数根时，则 $2(2-m-m^2)\geqslant0$,

$2(1-m)(2+m)\geqslant0$, $\therefore\quad -2\leqslant m\leqslant1$.

(iii) 有虚根时，则 $2(2-m-m^2)<0$,

$2(1-m)(2+m)<0$, $\therefore\quad m<-2$ 或 $m>1$.

(iv) 有一根为无穷大时，则其分母为零.

即 $2(m+1)=0$, $\therefore\quad m=-1$.

(v) 有一根为 0 时，则常数项为零.

即 $3m-2=0$, $\therefore\quad m=\frac{2}{3}$.

113. 方程 $x^2-(a+b)x+(ab-c^2)=0$ 的根的判别式

$\Delta=(a+b)^2-4(ab-c^2)=(a-b)^2+4c^2$.

因为 a,b,c 都是实数，所以 $(a-b)^2+4c^2\geqslant0$. 于是这个方程有两个实数根. 这两个根相等的条件是 $(a-b)^2+4c^2=0$，这就必须 $a=b$ 和 $c=0$.

114. 方程的根为：$x=\dfrac{2m\pm\sqrt{(2m)^2-4(m^2-1)}}{2}=m\pm1$，

即 $x_1=m+1$，$x_2=m-1$. 由题意我们有：

$$\begin{cases}-2<m+1<4,\\-2<m-1<4,\end{cases}\quad 即\quad\begin{cases}-3<m<3,\\-1<m<5,\end{cases}$$

$\therefore\quad -1<m<3$.

115. 当 $(2a\sqrt{a^2-3})^2-4\times4=0$ 时，方程有相等的实数根.

即 $a^4-3a^2-4=0$，　$\therefore\quad a=\pm2$.

故 $a=2$ 与 $a=-2$ 时，方程有相等的实数根.

116. 希望方程的两个根都是正数，首先要求它们是实数，这就需要方程的根的判别式的值不是负数；既然两个根都是正数，那么它们的和与积必然都是正数，这就需要方程（已知其首项系数是 1）的一次项的系数是负数，而常数项是正数. 就是：

$$\begin{cases}(m+2)^2-4(m+5)\geqslant0 & (1)\\-(m+2)>0 & (2)\\m+5>0 & (3)\end{cases}$$

由(1)得　$m\geqslant4$ 或 $m\leqslant-4$，由(2)得 $m<2$，由(3)得 $m>-5$.

$\therefore\quad -5<m\leqslant-4$.

117. 原方程可整理为

$$x^2+4(1-m)x+(3m^2-2m+4k)=0.$$

其判别式 $\Delta=16(1-m)^2-4(3m^2-2m+4k)$

$$=4m^2-24m+16(1-k).$$

方程的根若为有理数，则其判别式应为完全平方式，即二次三项式 $4m^2-24m+16(1-k)$ 应有等根.

因此 $m^2-6m+4(1-k)$ 的判别式又必须为 0.

即　$36-16(1-k)=0$，

$\therefore\quad k=-\dfrac{5}{4}$.

118. 整理方程得 $abc^2x^2+(3a^2c+b^2c)x-(6a^2+ab-2b^2)=0$.

其判别式为：

$$
\begin{aligned}
&(3a^2c+b^2c)^2-4abc^2(-6a^2-ab+2b^2)\\
&=9a^4c^2+6a^2b^2c^2+b^4c^2+24a^3bc^2+4a^2b^2c^2-8ab^3c^2\\
&=c^2(9a^4+24a^3b+10a^2b^2-8ab^3+b^4)\\
&=c^2(3a^2+4ab-b^2)^2=[c(3a^2+4ab-b^2)]^2.
\end{aligned}
$$

故原方程的根也是有理数.

119. $\because\quad \Delta=4[c^2-(a+b)c+ab]^2-4(c^2-2bc+b^2)$

$$
\begin{aligned}
&[2a^2-2(b+c)a+b^2+c^2]\\
&=4[c^2-ac-bc+ab]^2-4(c-b)^2\\
&\quad[(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)]\\
&=4(c-a)^2(c-b)^2-4(c-b)^2[(a-b)^2+(a-c)^2]\\
&=4(c-b)^2[(c-a)^2-(a-b)^2-(a-c)^2]\\
&=-4(c-b)^2(a-b)^2<0.
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 原方程的解为复数.

120. 设一根为y，则另一根为 $2y$. 由根与系数的关系，有

$$
\begin{cases}2y+y=-(4t-2),\\ 2y^2=3t^2-5,\end{cases}
$$

解此方程组(消去 y)得，$t=-1$ 或 $t=\dfrac{37}{5}$.

121. 设方程的根为 α，β，则 $\alpha+\beta=13$，$\alpha\beta=q$.
据此假定 $\alpha>\beta$. 于是

$$
\begin{aligned}
\alpha^2-\beta^2&=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\\
&=13\sqrt{13^2-4q}=13\sqrt{169-4q}=39.
\end{aligned}
$$

即 $\sqrt{169-4q}=3$.

$\therefore\quad q=40$.

122. $(x_1-x_2)^2=16$，但 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$,

$\therefore\quad (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=16$，即 $2^2-4q=16$，$\therefore\quad q=-3$.

123. 使二次三项式完全平方，必要的是它有相等的两根，即
$[m(m-1)]^2-4\times36=0$，$m(m-1)=\pm12$.

① $m(m-1)=12$， ∴ $m_1=4$， $m_2=-3$.

② $m(m-1)=-12$，求出的 m 为虚数值.

124. 设方程的两根为 x_1， x_2， 则

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{18m}{9}=2m, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{16-8m}{9}, \\ x_1=2x_2, \end{cases}$$

解之得 $m_1=-2$， $m_2=1$.

125. 原方程变形为 $(1+m)x^2-(4+6m)x+3+8m=0$.

∵ $\Delta=(4+6m)^2-4(1+m)(3+8m)=m^2+m+1$

$$=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0.$$

∴ 方程恒有两实根.

126. (1) − (2) 得 $(a-1)(x-1)=0$， ∴ $a=1$ 或 $x=1$.

将 $x=1$ 代入(1)得 $a=-2$.

故当 $a=1$ 和 $a=-2$ 时两方程有共同的根.

127. 如果方程有共同的根 $x=\alpha$，则

$$2\alpha^2-(3m+2)\alpha+12=0 \tag{3}$$

$$4\alpha^2-(9m-2)\alpha+36=0 \tag{4}$$

(3) × 2 − (4) 得 $3(m-2)\alpha-12=0$，

∴ $\alpha=\dfrac{4}{m-2}$. 代入(3)得

$$2\cdot\frac{16}{(m-2)^2}-\frac{4(3m+2)}{m-2}+12=0.$$

解这个方程得， $m=3$.

128. 设方程 $2x^2+(3a+1)x+6=0$ 的一根为 x_0， 则方程 $3x^2+(2a-1)x+2=0$ 的一根为 $\dfrac{1}{x_0}$， 故有

$$\begin{cases}2x_0^2+(3a+1)x_0+6=0,\\ 3\cdot\dfrac{1}{x_0^2}+(3a+1)\dfrac{1}{x_0}+2=0,\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}2x_0^2+(3a+1)x_0+6=0 & (1)\\ 2x_0^2+(2a+1)x_0+3=0 & (2)\end{cases}$$

(1) - (2)，$ax_0+3=0$，$x_0=-\dfrac{3}{a}$

将 $x_0=-\dfrac{3}{a}$ 代入方程 $2x^2+(3a+1)x+6=0$ 得

$$2\left(-\frac{3}{a}\right)^2+(3a+1)\left(-\frac{3}{a}\right)+6=0.$$

解这个方程，得 $a=-3$，或 $a=2$.

129. 由已知条件可知

$$(2m-1)^2-4(m+1)(m-1)<0,\quad \therefore\quad m>\frac{5}{4}.$$

又方程 $(m-3)x^2-2(m+3)x-(m+5)=0$ 的判别式为

$$\Delta=4(m+3)^2-4(m-3)[-(m+5)]=8[(m+2)^2-7],$$

显然 $m>\frac{5}{4}$ 时，$(m+2)^2>7$，即 $(m+2)^2-7>0$，$\therefore\ \Delta>0$.

故方程 $(m-3)x^2-2(m+3)x-(m+5)=0$ 必有不等实根.

130. $x=\dfrac{-10a\pm\sqrt{100a^2-(20b+12)}}{2}$.

因为 $100a^2$ 末两位为 0，$20b+12$ 末位为 2，所以 $100a^2-(20b+12)$ 的末位是 8，而任何一个数的平方其末位都不能为 8，因此 x 不可能为整数，即方程 $x^2+10ax+5b+3=0$ 没有整数解. 同理另一方程也没有整数解.

131. $\Delta=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2=(b^2+c^2-a^2+2bc)$
$(b^2+c^2-a^2-2bc)$
$=[(b+c)^2-a^2][(b-c)^2-a^2]$
$=(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)$.

因为 a,b,c 是三角形的三边，所以 a,b,c 均为正数，且任两边之和大

于第三边，即

$$a+b+c>0,\ b+c-a>0,\ b-c+a>0,\ b-c-a<0.$$

故有 $\Delta<0$，因此方程没有实数根.

132. 设 x_0 是方程 $x^3-x^2+1=0$ 的根，即

$$x_0^3-x_0^2+1=0 \tag{1}$$

将$\dfrac{1}{x_0}$代入方程 $x^5+x^4+1=0$ 的左边得

$$\frac{1}{x_0^5}+\frac{1}{x_0^4}+1=\frac{1+x_0+x_0^5}{x_0^5}=\frac{(x_0^3-x_0^2+1)(x_0^2+x_0+1)}{x_0^5} \tag{2}$$

(1)代入(2)得 $\left(\dfrac{1}{x_0}\right)^5+\left(\dfrac{1}{x_0}\right)^4+1=0$,

$\therefore$ $\dfrac{1}{x_0}$是方程 $x^5+x^4+1=0$ 的根.

133. $\because$ $y=\dfrac{2x-m}{x^2-4x+3}$, $\quad\therefore$ $x^2y-4xy+3y=2x-m$.

即 $yx^2-(4y+2)x+(3y+m)=0$，要使 x 的值恒为实数，必须有 $[-(4y+2)]^2-4y(3y+m)\geqslant 0$.

即 $y^2+(4-m)y+1\geqslant 0$，对于任意 y 的值为实数.

则 $(4-m)^2-4\geqslant 0$.

解之得 $m\geqslant 6$ 或 $m\leqslant 2$.

134. 已知 $x_1^2+x_2^2=1.75$ (1)

$x_1\cdot x_2=a^2$ (2)

$x_1+x_2=3a$ (3)

$(3)^2-(2)\times 2$，$x_1^2+x_2^2=7a^2$ (4)

比较(1)，(4)，$7a^2=1.75$，$\therefore$ $a=\pm\dfrac{1}{2}$.

135. 要二次多项式 $mx^2+(m-1)x+(m-1)$ 之值恒有负数，则要求：

$$\begin{cases} m<0, \\ (m-1)^2-4m(m-1)<0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} m<0, \\ (m-1)(3m+1)>0. \end{cases}$$

解之得 $m<-\frac{1}{3}$.

136. 原方程有实数解，则 $\Delta\geqslant 0$.

$$\Delta=[2\sin(xy)]^2-4=4\sin^2(xy)-4,$$

即 $4\sin^2(xy)-4\geqslant 0$, $\sin^2(xy)\geqslant 1$, $|\sin(xy)|\geqslant 1$.

而 $|\sin(xy)|\leqslant 1$, $\therefore$ $|\sin(xy)|=1$, 即 $\sin(xy)=\pm 1$.

此时原方程为：$x^2+2x+1=0$, $x=-1$;

$$x^2-2x+1=0,\ x=1.$$

当 $x=-1$, $\sin y=-1$, $y=2n\pi+\frac{3\pi}{2}$,

当 $x=1$, $\sin y=1$, $y=2n\pi+\frac{\pi}{2}$.

$$\therefore \begin{cases}x=1,\\ y=2n\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}\qquad \begin{cases}x=-1,\\ y=2n\pi+\frac{3\pi}{2}.\end{cases}$$

137. 设 x_1、x_2 为方程 $2x^2-9x+8=0$ 的两个根，

则 $$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{9}{2},\\ x_1x_2=4.\end{cases}$$

设所求方程为 $x^2+px+q=0$，它的两根为 x_1'、x_2'. 根据题意，

$$x_1'=\frac{1}{x_1+x_2}=\frac{2}{9}.$$

$$x_2'=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{81}{4}-16=\frac{17}{4}.$$

$$p=-(x_1'+x_2')=-\left(\frac{2}{9}+\frac{17}{4}\right)=-\frac{161}{36}.$$

$$q=x_1'\cdot x_2'=\frac{2}{9}\times\frac{17}{4}=\frac{34}{36}.$$

所求作的方程是 $36x^2-161x+34=0$.

138. 设 α、3α 为方程 $x^2-2px+3q=0$ 的根，则

$$\begin{cases}\alpha+3\alpha=2p,\\ \alpha\cdot 3\alpha=3q,\end{cases}$$

消去 α 得　$p^2=4q$.

再设 β、2β 为方程 $x^2+qx+3p=0$ 的根，则

$$\begin{cases}\beta+2\beta=-q,\\ \beta\cdot 2\beta=3p,\end{cases}$$

消去 β 得　$2q^2=27p$. 解方程组：

$$\begin{cases}p^2=4q & (1)\\ 2q^2=27p & (2)\end{cases}$$

由(1)得　$q=\dfrac{p^2}{4}$，代入(2)化简得，$p^4=216p$.

又∵　$p\neq 0$，∴　$p^3=216$，故　$p=6$.

代入(1)得　$q=9$.

139. ① 由题设方程式得

$$ax^2+bx=-c,\quad\therefore\quad ax+b=-\frac{c}{x}=-cx^{-1}.$$

因此，　$(ax+b)^{-2}=(-cx^{-1})^{-2}=\dfrac{x^2}{c^2}$.

$$\therefore\quad (ax_1+b)^{-2}+(ax_2+b)^{-2}=\frac{x_1^2}{c^2}+\frac{x_2^2}{c^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{c^2}$$

$$=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{c^2}=\frac{1}{c^2}\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{2c}{a}\right]=\frac{1}{c^2}\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right).$$

② $(ax_1+b)^{-3}+(ax_2+b)^{-3}=-\dfrac{x_1^3+x_2^3}{c^3}$

$$=-\frac{1}{c^3}(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)$$

$$=-\frac{1}{c^3}(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$$

$$=-\frac{1}{c^3}\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{3c}{a}\right)=\frac{b(b^2-3ac)}{a^3c^3}.$$

140. 设 $x^2-ax+b=0$ 之二根为 α，β. 则

$$\begin{cases}\alpha+\beta=a & (1)\\ \alpha\cdot\beta=b & (2)\end{cases}$$

(1)^2 − (2)×2, $\alpha^2+\beta^2=a^2-2b$ (3)

又设 $x^2-3ax+b+4a^2=0$ 之二根为 γ, δ,

则同理可得 $\gamma^2+\delta^2=a^2-2b$ (4)

比较(3)、(4)得 $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2+\delta^2$.

141. $p^2x^2+q^2x+\gamma^2=0$ (1)

$px^2+qx+\gamma=0$ (2)

设(2)之二根为 α, β, 则 $\alpha+\beta=-\dfrac{q}{p}$, $\alpha\beta=\dfrac{\gamma}{p}$. 由题意，方程(2)之根的平方为(1)的根，故有

$$\alpha^2+\beta^2=-\frac{q^2}{p^2},\quad \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=-\frac{q^2}{p^2}+\frac{2\gamma}{p}.$$

$$\therefore\ (\alpha+\beta)^2=\frac{-q^2+2p\gamma}{p^2},\ \text{即}\ \left(-\frac{q}{p}\right)^2=\frac{-q^2-2p\gamma}{p^2}.$$

∴ $q^2=p\gamma$, 即 q 为 p, r 之几何中项.

142. 设方程两根为 x_1, x_2, 则

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

由 m, n 分别是 x_1、x_2 的等差中项和等比中项可得

$$m=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a},\quad n=\pm\sqrt{x_1x_2}=\pm\frac{\sqrt{ac}}{a}.$$

因 $ax^2+bx+c=0$ 是正整数二次方程，且 m, n 同号，故

$$m=-\frac{b}{2a}\text{时},\ n=-\frac{\sqrt{ac}}{a}.$$

① 当 $m<n$ 时，即 $-\dfrac{b}{2a}<-\dfrac{\sqrt{ac}}{a}$ 时，化简得

$b^2-4ac>0$, ∴ 方程有不相等的两实数根.

② 当 $m>n$ 时，即 $-\dfrac{b}{2a}>-\dfrac{\sqrt{ac}}{a}$ 时，化简得

$b^2-4ac<0$, ∴ 方程没有实数根.

143. 因 α、β、γ、δ 成等差数列，所以有

$$2\beta = \alpha + \gamma,\quad 2\gamma = \beta + \delta.$$

即 $2\beta - \gamma = \alpha$ (1)

$2\gamma - \beta = \delta$ (2)

(1) + (2)，$\beta + \gamma = \alpha + \delta$ (3)

(1) × (2) 得 $-2(\beta+\gamma)^2 + 9\beta\gamma = \alpha\delta$ (4)

又 $\alpha + \delta = -\dfrac{b}{a}$，$\alpha\delta = \dfrac{c}{a}$，代入(3)，(4)得

$$\beta + \gamma = -\frac{b}{a} \tag{5}$$

$$\beta\gamma = \frac{ac + 2b^2}{9a^2} \tag{6}$$

由(5)，(6)可知，以 β、γ 为根的二次方程为

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{ac + 2b^2}{9a^2} = 0,$$

即 $9a^2x^2 + 9abx + ac + 2b^2 = 0$.

144. 因为方程有相等实数根，所以有

$$4(2a - b - 1)^2 - 8a(2a - 2b - 1) = 0,$$

$$(2a + b + 3)^2 - 4(a^2 + ab + 6) = 0,$$

即 $b^2 - 2a + 2b + 1 = 0$ (1)

$b^2 - 12a + 6b - 15 = 0$ (2)

由(1)，$2a = b^2 + 2b + 1$ (3)

(3)代入(2)，$7b^2 + 18b - 9 = 0$.

$\therefore\ b = -3$ 或 $b = \dfrac{3}{7}$.

将 b 代入(3)，$a = 2$，或 $a = \dfrac{50}{49}$.

因为原方程是整数系数方程，所以 $a = 2$，$b = -3$ 为所求，于是这两个方程为

$$4x^2 + 12x + 9 = 0,\quad x^2 + 4x + 4 = 0.$$

前一个方程的根为 $-\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{3}{2}$. 后一方程的根为 -2，-2.

又 $\left(-\frac{3}{2}\right)+(-2)=-\frac{7}{2}$，$\left(-\frac{3}{2}\right)(-2)=3$，

所以以$\left(-\frac{3}{2}\right)$、$(-2)$为根的一元二次方程为

$$2x^2+7x+6=0.$$

145. 按假定 α, $\frac{1}{\alpha}$分别表示题中前后二方程之根，那么

$$\alpha^2-4\alpha\cos 2\theta+2=0 \quad (1)$$

$$2\cdot\frac{1}{\alpha^2}+4\cdot\frac{1}{\alpha}\sin 2\theta-1=0 \quad (2)$$

由(2)得 $\alpha^2-4\alpha\sin 2\theta-2=0 \quad (3)$

(1)－(2) 并化简，$\alpha=\frac{1}{\cos 2\theta-\sin 2\theta}$.

将之代入(1)，化简后得

$$\cos^2 2\theta=\frac{3}{4}，\quad \therefore \quad \cos 2\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

由 $\cos 2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 得，$\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{12}$.

由 $\cos 2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 得，$\theta=n\pi\pm\frac{5\pi}{12}$.

令 $n=0$，得 $\theta=\frac{\pi}{12}$，$\frac{5\pi}{12}$. 令 $n=1$，得 $\theta=\frac{11\pi}{12}$，$\frac{7\pi}{12}$.

答：$\theta=\frac{\pi}{12}$，$\frac{5\pi}{12}$，$\frac{7\pi}{12}$，$\frac{11\pi}{12}$.

146. $\because$ $\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=-p \quad (1)$

$$\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=q \quad (2)$$

由于 $\theta+\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{\pi}{4}$，所以有

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{tg}\left[\theta+\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]=\frac{\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{1-\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}.$$

把(1)，(2)代入并化简，$p-q+1=0$ (3)

又方程两根之比为 3:2，于是假定它的两根为 $3x$ 和 $2x$，所以有

$$3\alpha+2\alpha=-p,\quad 3\alpha\cdot 2\alpha=q.$$

由上二式中消去 α 得 $6p^2=25q$ (4)

解(3)、(4)所组成的方程组得

$$\begin{cases}p_1=5,\\ q_1=6;\end{cases}\quad \begin{cases}p_2=-\dfrac{5}{6},\\ q_2=\dfrac{1}{6}.\end{cases}$$

147. 设 $AE=\alpha$，$BD=\beta$，$CD=\gamma$，则

$$\beta+\gamma=a,\quad \gamma+\alpha=b,\quad \alpha+\beta=c.$$

解之得 $\alpha=\dfrac{b+c-a}{2}$，$\beta=\dfrac{c+a-b}{2}$.

$$\because\quad \alpha+\beta=\frac{b+c-a}{2}+\frac{c+a-b}{2}=c \tag{1}$$

$$\alpha\cdot\beta=\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{c+a-b}{2}=\frac{1}{4}(c^2-a^2-b^2+2ab).$$

但在 $rt\triangle ABC$ 中，$c^2=a^2+b^2$.

于是 $$\alpha\cdot\beta=\frac{ab}{2} \tag{2}$$

由(1)，(2)可知 AE 和 BD (即 α 和 β) 为方程

$$2x^2-2cx+ab=0.$$

148. 原方程变形为

$$\begin{aligned}&[a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)]x^2\\ &\quad-[a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)]x\\ &\quad+[a^3(b-c)bc+b^3(c-a)ca+c^3(a-b)ab]=0 \qquad (1)\end{aligned}$$

$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 为 a、b、c 之轮换对称式. 当 a 换

成 b 时，该式为"0"，故该式有因式$(a-b)$．同理该式有因式$(b-c)$和$(c-a)$．

$$\therefore\quad a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
$$=k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c),$$

比较 a^3b 之系数得，$k=-1$．

$$故\quad a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \qquad (2)$$

$$同法得\quad a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \qquad (3)$$
$$a^3bc(b-c)+b^3ac(c-a)+c^3ab(a-b)$$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a)abc \qquad (4)$$

把(2)、(3)、(4)代入(1)，并以$-(a-b)(b-c)(c-a)$除之得

$$(a+b+c)x^2-(ab+bc+ca)x+abc=0,$$

$$\therefore\quad x=\frac{(ab+bc+ca)\pm\sqrt{(ab+bc+ca)^2-4abc(a+b+c)}}{2(a+b+c)}.$$

若方程二根相等，则 $\triangle=0$，即

$$(ab+bc+ca)^2=4abc(a+b+c).$$

149．甲生所解之方程式当为 $x^3+px^2+q'x+r=0$，根为 -1，2，4．则

$$p=-(x_1+x_2+x_3)=-(-1+2+4)=-5.$$
$$r=x_1\cdot x_2\cdot x_3=-(-1)\cdot 2\cdot 4=8.$$

乙生所解之方程当为 $x^3+p'x+qx+r'=0$，根为-1，2，-8．则 $q=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-10$．

因此所解方程式应为 $x^3-5x^2-10x+8=0$．解这个方程得

$$(x+2)(x^2-7x+4)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=-2,\quad x_2=\frac{7+\sqrt{23}}{2},\quad x_3=\frac{7-\sqrt{23}}{2}.$$

150．设此一元四次方程为

$$x^4+bx^3+cx^2+dx+36=0,$$

其四根为 x_1，x_2，x_3，x_4．则$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2=\frac{1}{3}$，$\left(\frac{x_3}{x_4}\right)^2=\frac{1}{3}$；

$$x_3=\frac{\sqrt{3}}{2}x_1,\quad x_4=\frac{\sqrt{3}}{2}x_2.$$ 且 x_1，x_2，x_3，x_4 均为正数.

故 $x_1=2$，$x_2=2\sqrt{3}$，$x_3=\sqrt{3}$，$x_4=3$.

$\therefore$ $b=-(x_1+x_2+x_3+x_4)=-(5+3\sqrt{3})$，

$c=\sum x_1x_2=12+15\sqrt{3}$，

$d=\sum x_1x_2x_3=-6(5+3\sqrt{3})$.

由此得所求一元四次方程为

$$x^4-(5+3\sqrt{3})x^3+(12+15\sqrt{3})x^2-6(5+3\sqrt{3})x+36=0.$$

151．原方程变形为

$$(y^2+2)(z^2+8)x^2-32yz\cdot x+(y^2+2)(z^2+8)=0,$$

$$\begin{aligned}\triangle&=(-32yz)^2-4(y^2+2)(z^2+8)(y^2+2)(z^2+8)\\&=(32yz)^2-[2(y^2+2)(z^2+8)]^2\\&=[32yz+2(y^2+2)(z^2+8)][32yz-2(y^2+2)(z^2+8)]\\&=[2(yz+4)^2+4(2y+z)^2]\{-2(yz-4)^2-4(2y-z)^2\}\\&=-4[(yz+4)^2+2(2y+z)^2][(yz-4)^2+2(2y-z)^2].\end{aligned}$$

当 $\triangle<0$ 时，方程无实根.

当 $\triangle\geqslant0$，即 $-4[(yz+4)^2+2(2y+z)^2][(yz-4)^2+2(2y-z)^2]\geqslant0$，

$$[(yz+4)^2+2(2y+z)^2][(yz-4)^2+2(2y-z)^2]\leqslant0.$$

Ⅰ．$\begin{cases}(yz+4)^2+2(2y+z)^2\geqslant0\\(yz-4)^2+2(2y-z)^2\leqslant0\end{cases}$　Ⅱ．$\begin{cases}(yz+4)^2+2(2y+z)^2\leqslant0\\(yz-4)^2+2(2y-z)^2\geqslant0.\end{cases}$

解之得　$yz=4$，$2y=z$，或　$yz=-4$，$2y=-z$，

$\because$ $x>0$，$y>0$，$z>0$.

$\therefore$ $\begin{cases}yz=4,\\2y=z,\end{cases}$

解之得　$y=\sqrt{2}$，$z=2\sqrt{2}$，$x=1$.

故方程的解为　$x=1$，$y=\sqrt{2}$，$z=2\sqrt{2}$.

152. 设家里到火车站的距离为 x 公里．依题意可列方程

$$\frac{x}{15}+\frac{1}{4}=\frac{x}{9}-\frac{1}{4},$$

∴　$x=11\frac{1}{4}$（公里）.

现需要提前 10 分钟到达，设速度应是 y 公里/小时，

则　$$\frac{11\frac{1}{4}}{y}+\frac{10}{60}=\frac{11\frac{1}{4}}{15}+\frac{1}{4},$$

∴　$y=11\frac{1}{4}\div\frac{5}{6}=13.5$.

答：速度应该是 13.5 公里/小时.

153. 在同一时间速度比等于距离的比．设湖的东西两岸的距离是 x 米．依题意列方程

$$\frac{x-800}{800}=\frac{x-600+800}{x-800+600},$$

解此方程得　$x=0$　或　$x=1800$.

显然 $x=0$ 不符合题意.

答：湖东西两岸的距离为 1800 米.

154. 设生产甲、乙、丙三种工件分别是 x 人，y 人，z 人．依题意列方程组：

$$\begin{cases}x+y+z=80,\\ \dfrac{15x}{3}=\dfrac{20y}{2}=\dfrac{50z}{1},\end{cases}$$

解之得　$x=50$，$y=25$，$z=5$.

答：分配生产甲种工件 50 人，生产乙种工件 25 人，生产丙种工件 5 人.

155. 设这个数是 $abcde\times 10+7$，依题意列方程

$$(abcde\times 10+7)\times 5=7\times 100000+abcde,$$

解这个方程得　$abcde=14285$.

答：这个数是 142857.

156. 设自行车速度为 x 公里/分，汽车速度为 y 公里/分. 则相邻两辆从自行车后面来的汽车距离 $12(y-x)$ 公里，从前面来的汽车的距离 $4(x+y)$ 公里. 因为两地的发车时间相同，汽车速度相同.

$\therefore$　$12(y-x)=4(x+y)$，即 $2x=y$.

设车站发车的时间间隔为 t 分，则汽车在 t 分钟所走的距离等于同向两汽车距离.

$\therefore$　$yt=4(x+y)$,

即　$yt=4x+4y=2y+4y$,

$\therefore$　$t=6$.

答：A、B 两站每隔 6 分钟发车一次.

157. 设最后一个工人的工作时间为 x 小时，每两个相邻的人开始工作，中间的时间间隔为 y 小时，共有 z 个工人. 依题意列出方程

$$\begin{cases} x+(x+y)+(x+2y)+\cdots+[x+(z-1)y]=24z & (1)\\ x+(z-1)y=5x & (2)\end{cases}$$

由(1)　$2x+y(z-1)=48$,

由(2)　$y(z-1)=4x$,

$\therefore$　$x=8$.

答：他们一共挖了 40 小时.

158. ① 设这条街的长为 l 丈. 则 $\dfrac{a}{甲速}=\dfrac{l-a}{乙速}$；$\dfrac{a+l-b}{乙速}=\dfrac{l-a+b}{甲速}$.

$\therefore$　$\dfrac{a}{l-a}=\dfrac{l-a+b}{l+a-b}$，解之得　$l=3a-b$.

② $a=300$ 丈，$b=400$ 丈，则 $l=500$ 丈，

$$\frac{甲速}{乙速}=\frac{a}{l-a}=\frac{300}{500-300}=\frac{3}{2}.$$

即　甲比乙走得快.

159. 设 A、B 两地距离为 s 里，则 B、C 两地距离为 $\frac{72-s}{2}$ 里，甲乙两人共走 72 里，所以 $72+s$ 是 A、C 两地距离的两倍.

$$\therefore\quad 甲速=\frac{\frac{72-s}{2}}{3\frac{1}{5}}里/小时,\quad 乙速=\frac{\frac{72+s}{2}}{5}里/小时.$$

∵　甲走 AC 的时间与乙走 BC 的时间相同，在时间相同时，速度比等于同时间所走的距离比.

$$\therefore\quad \frac{\frac{72+s}{2}}{甲速}=\frac{\frac{72-s}{2}}{乙速},\quad 即\ \frac{甲速}{乙速}=\frac{72+s}{72-s}.$$

按速度比相等列方程

$$\frac{72+s}{72-s}=\frac{\frac{72-s}{2}}{3\frac{1}{5}}:\frac{\frac{72+s}{2}}{5},$$

解此方程得　$s=8$.

答：A、B 两地距离 8 里.

160. 设第一组工人单独做 x 天完成，第二组工人单独做 y 天完成. 依题意列方程

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8},\\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{11\frac{1}{4}},\end{cases}$$

解此方程组得　$x=12$，$y=24$.

答：第一组工人单独做需 12 天完成，第二组工人单独做需 24 天完成.

习题四答案

1．$x^3-(x^2-x+1)=x^3-x^2+x-1=(x^2+1)(x-1)$，

其中 $x^2+1>0$．所以，

$x<1$ 时，则 $x^3<x^2-x+1$；

$x=1$ 时，则 $x^3=x^2-x+1$；

$x>1$ 时，则 $x^3>x^2-x+1$．

2．$2x^3-(x-1)=(x+1)(2x^2-2x+1)$

$$=(x+1)\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right].$$

其中 $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$．所以，

$x<-1$ 时，则 $2x^3<x-1$；

$x=-1$ 时，则 $2x^3=x-1$；

$x>-1$ 时，则 $2x^3>x-1$．

3．提示：解法同前，先求两数之差再观察．

4．$ab+bc+ca-(a^2+b^2+c^2)$

$$=\frac{1}{2}(2ab+2bc+2ca-2a^2-2b^2-2c^2)$$

$$=-\frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)]$$

$$=-\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

但 a、b、c 是不全等的实数，

$\therefore\quad (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$，

$\therefore\quad ab+bc+ca-(a^2+b^2+c^2)<0$．

从而 $ab+bc+ca<a^2+b^2+c^2$．

5．$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，

$(a^3+b^3)-ab(a+b)=(a+b)(a-b)^2$，

$\because\quad a$、b 都为正数且不相等，$\therefore\quad a+b>0$，$(a-b)^2>0$，从而

$(a^3+b^3)-ab(a+b)>0$，即 $a^3+b^3>ab(a+b)$.

6．若 $a\neq b$，则 $a^3-b^3<3a^2(a-b)$；

若 $a=b$，则 $a^3-b^3=3a^2(a-b)$.

7．原不等式可变形为 $(x+a)(x-a)<0$.

当 $a>0$ 时，$a>-a$，∴ $-a<x<a$.

当 $a<0$ 时，$a<-a$，∴ $a<x<-a$.

故若 $a>0$ 时，不等式的解为 $-a<x<a$；

若 $a<0$ 时，不等式的解为 $a<x<-a$.

8．解法一 由 $2y=31-3x$ 代入不等式中，得

$x+31-3x>15$，∴ $x<8$.

∴ 其解为：$x<8$，$y=\dfrac{31-3x}{2}$.

解法二

由 $x=\dfrac{31-2y}{3}$ 代入不等式中，得

$\dfrac{31-2y}{3}+2y>15$，∴ $y>\dfrac{7}{2}$.

其解为 $x=\dfrac{31-2y}{3}$，$y>\dfrac{7}{2}$.

解法三

引进一个参数将不等式也写作方程的形式得：

$x+2y=15+k\quad(k>0)$.

两方程相减得 $2x=16-k$，∴ $x=8-\dfrac{k}{2}$，$y=\dfrac{7}{2}+\dfrac{3k}{4}$，即为所求之解．三种解答形异而质同．

9．$2x^2-5xy+3y^2=(2x-3y)(x-y)>0$.

若 $y=0$，其解为 $x\neq0$；若 $y\neq0$，把不等式两边同除以 $2y^2$ 得：

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{x}{y}-1\right)>0.$$

解之，得 $\frac{x}{y}>\frac{3}{2}$，或$\frac{x}{y}<1$.

10. 原不等式为：$3(6x-x^2-8)>0$.

即 $-(x^2-6x+8)>0$,

即 $x^2-6x+8<0$,

$\therefore\ 2<x<4$,

故所求 x 值为 3.

11. 由$3x+2y=7$，得 $y=\frac{7-3x}{2}$.

代入第二式，

$$3x^2-2\cdot\left(\frac{7-3x}{2}\right)^2>25,$$

$\therefore\ x^2-14x+33<0$,

$\therefore\ 3<x<11$.

又 $y=\frac{7-3x}{2}$为整数，所以 x 必须是奇数，

$\therefore\ x=5,\ 7,\ 9$.

与此相对应，

$y=-4,\ -7,\ -10$.

$\therefore\ \begin{cases}x=5,\\ y=-4;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=7,\\ y=-7;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=9\\ y=-10.\end{cases}$

12. $\because\ x^2-5x+7=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$,

$\therefore\ x^2-5x+7\nless\frac{3}{4}$.

13. $x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$,

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$,

$\therefore$ 原不等式组为：$\begin{cases}(x-4)(x+1)>0 & (1),\\ (x-3)(x+2)>0 & (2).\end{cases}$

解(1)得 $x>4$ 或 $x<-1$.

解(2)得 $x>3$ 或 $x<-2$.

故适合不等式组的解为：$x<-2$ 或 $x>4$.

14. 原不等式为：$\dfrac{(2x-1)(3x-2)}{(x-3)(2x+1)}<0$.

在各因式的值不为0的条件下，上述不等式和不等式

$(2x-1)(3x-2)(x-3)(2x+1)<0$ 同解.

为了便于讨论各因子的符号，以求得不等式的解，我们应用列表法，先求出各因式的根，并把它们按从小至大的顺序排列：

$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，3，列出下表.

	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3},3\right)$	$(3,+\infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$3x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{(2x-1)(3x-2)}{(x-3)(2x+1)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

从而得到不等式的解是：$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}<x<3$.

15. $\dfrac{4x^2-20x+18}{x^2-5x+4}-3>0$. 化简 $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-5x+4}>0$，

即 $\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-4)}>0$，

分别求出各个因式的根，按从小到大的顺序排列为：

$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$，$x_4=4$，

列出表得到不等式的解是：

$x<1$; $2<x<3$; $x>4$.

16. 不存在.

17. 不等式的存在域是 $x<3$.

① 设 $x-2\leqslant 0$，即 $x\leqslant 2$ 时，由于$\sqrt{3-x}$是正值，所以不等式恒成立.

② 当 $2\leqslant x<3$ 时，将两边平方得：

$3-x>x^2-4x+4$.

移项合并得 $x^2-3x+1<0$.

解得 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$,

$\because$ $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}<3$, $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<2$. $\therefore$ $2\leqslant x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

18. 不等式无解.

19. 对数的真数必为正数，故在 $x>1$ 的限制下得：

$\lg\dfrac{x+1}{x-1}>\lg 10$, $\therefore$ $\dfrac{x+1}{x-1}>10$.

解之，得 $x<\dfrac{11}{9}$.

故原不等式的解为 $1<x<\dfrac{11}{9}$.

20. 真数必大于 0，所以

$$\begin{cases}10x+9>0,\\10x-9>0,\\x^2+x-1>0,\end{cases}\quad 解得\begin{cases}x>-\dfrac{9}{10},\\x>\dfrac{9}{10},\\x<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\ 或\ x>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}.\end{cases}$$

$\therefore$ $x>\dfrac{9}{10}$是它们的公共解. 在此限制下：

$\lg\dfrac{10x+9}{100}<\lg\dfrac{x^2+x-1}{10x-9}$,

$\dfrac{10x+9}{100}<\dfrac{x^2+x-1}{10x-9}$.

$\because\quad 10x-9>0,$

$\therefore\quad 100x^2-81<100x^2+100x-100,$

$100x>19,\qquad x>\dfrac{19}{100}.$

故原不等式的解为： $x>\dfrac{9}{10}.$

21. 函数的定义域为：$\dfrac{5x^2-10x+3}{3x^2-7x+2}-1>0,$

$$\frac{5x^2-10x+3-3x^2+7x-2}{3x^2-7x+2}>0,$$

即 $\dfrac{(2x-1)(x-1)}{(3x-1)(x-2)}>0.$

列表解出：

$x<\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{2}<x<1$，$x>2$ 即为函数定义域.

22. $\left|\dfrac{3n-(3n+3)}{n+1}\right|<0.01$，$\left|\dfrac{-3}{n+1}\right|<\dfrac{1}{100}$，

$\dfrac{3}{n+1}<\dfrac{1}{100}$ （因 n 为自然数，所以可以去掉绝对值记号）

$n+1>300$，$n>299$.

所以不等式的解为大于 299 的自然数.

23. $\left|10^x-1\right|<\dfrac{1}{1000}$，

$$-\frac{1}{1000}<10^x-1<\frac{1}{1000},$$

$0.999<10^x<1.001.$

由于不论 x 为何值，$10^x>0$，两边取常用对数

得 $\lg 0.999<x<\lg 1.001$，

$\because\quad x=0$ 使$\left|\dfrac{1}{10^x-1}\right|$失去了意义，

$\therefore\quad \lg 0.999<x<0$，$0<x<\lg 1.001.$

24. 设所求分数为$\frac{x}{y}$，由题意得：

$$\frac{x+3}{y}>\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{x}{y+3}=\frac{2}{7} \quad (2)$$

由(2)得 $x=\frac{2y+6}{7}$ (3)

由(1)得 $2x+6>y$ (4)

现将(4)代入(3)得：$x<\frac{2(2x+6)+6}{7}$.

∴ $x<6$. ∵ x为正数，∴ x之值为：1、2、3、4、5；

又将(3)化为 $7x=2(y+3)$ (5)

而 y为正整数，且(5)的右边为2的倍数，但左边的7非2的倍数，∴ x一定是2的倍数.

即 x为2或4.

若 $x=2$，则 $y=1$；若 $x=4$，则 $y=11$.

所以所求分数为 $\frac{2}{4}$或$\frac{4}{11}$.

25. 原式可写为 $x^2-x-12>0$ (1)

命 $y=x^2-x-12$，由 $A=1$，$\Delta=b^2-4ac=49>0$，

故抛物线开口向上，且与x轴交于$x_1=-3$与$x_2=4$.

所以不等式(1)的解是 $x<-3$ 或 $x>4$. 而由题意知：

$x>0$. 故原不等式的解为 $x>4$.

26. $|x|+|y|<100$.

∵ 当 $x>0$、$y>0$时，$x+y<100$.

当 $x<0$、$y>0$时，$-x+y<100$.

当 $x<0$、$y<0$时，$-x-y<100$.

当 $x>0$、$y<0$时，$x-y<100$.

∴ 满足 $|x|+|y|<100$的点$(x、y)$应在

$x+y=100$、$-x+y=100$、$-x-y=100$、$x-y=100$

这四条直线所围成的正方形的开区域内.

因此，$|x|+|y|<100$ 的整数解的组数应等于这个正方形开区域内整数点的个数，不难计算共有 19801 个整数点，

即 $|x|+|y|<100$ 有 19801 组整数解.

注 当 $x=99$ 时，$y=0$. 有 1 组；

当 $x=98$ 时，$y=0$，±1，有 3 组；

当 $x=97$ 时，$y=0$，±1，±2，有 5 组；…

当 $x=1$ 时，$y=0$，±1，±2，…±98. 有 197 组；

当 $x=0$ 时，$y=0$，±1，±2，…±99. 有 199 组；

由对称性，总和数应为 $2(1+3+5+\cdots+197)+199=19801$.

27. $1-x^2+x^4=(1-x+x^2)(1+x+x^2)$,

而 $1+x+x^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，故本题只要求证

$3(1-x+x^2)>1+x+x^2$,

即 $3(1-x+x^2)-(1+x+x^2)>0$,

即 $2(1-2x+x^2)>0$.

$(1-x)^2>0$. 在 $x\neq1$ 时，$(1-x)^2$ 恒大于 0.

因此 $2(1-2x+x^2)>0$ 成立，于是本题之不等式成立.

28. 由 $x<\frac{1-y}{1+y}$，又 $y>0$，$\therefore$ $1+y>0$. 故 $x+xy<1-y$；$y+xy<1-x$.

而 $x>0$，$\therefore$ $1+x>0$，故 $y<\frac{1-x}{1+x}$.

29. $\because$ $a>1$，$\therefore$ $a^3>a$ (1).

又 $\frac{1}{a}<1$，即 $1-\frac{1}{a}>0$.

$\therefore$ $a>a-(1-\frac{1}{a})$,

即 $a > a + \frac{1}{a} - 1$

由(1)和(2)得 $a^3 > a + \frac{1}{c} - 1$.

30. ∵ $b+c>a$, $c+a>b$, $a+b>c$, 第一式乘以 a, 第二式乘以 b, 第三式乘以 c 后相加得 $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$.

31. $a^3+b^3>a^2b+ab^2$,

$b^3+c^3>b^2c+bc^2$,

$c^3+a^3>c^2a+ca^2$.

把以上三式相加得:

$2(a^3+b^3+c^3)>(a^2b+ab^2)+(b^2c+bc^2)+(c^2a+ca^2)$,

即 $2(a^3+b^3+c^3)>a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$.

32. $x+\frac{1}{nx}-\left(1+\frac{1}{n}\right)=x-1+\frac{1}{nx}-\frac{1}{n}$

$=(x-1)-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{x}\right)=(x-1)-\frac{1}{n}\cdot\frac{x-1}{x}$

$=(x-1)\left(1-\frac{1}{nx}\right)=\frac{1}{x}(x-1)\left(x-\frac{1}{n}\right)$.

∵ $x>1$, $n>1$,

∴ $\frac{1}{x}>0$, $x-1>0$, $x-\frac{1}{n}>0$.

即 $x+\frac{1}{nx}-\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$. ∴ $x+\frac{1}{nx}>1+\frac{1}{n}$.

33. 由于 $(a-x)(a^2+x^2)-(a+x)(a^2-x^2)$

$=(a-x)[a^2+x^2-(a+x)^2]=2ax(x-a)<0$,

∵ $0<x<a$. ∴ $x-a<0$, 所以 $2ax(x-a)<0$,

∴ $(a-x)(a^2+x^2)<(a+x)(a^2-x^2)$.

又 a^2-x^2 及 $a+x$ 皆为正数,

∴ $\frac{a-x}{a+x}<\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$.

34. ∵ $a>b>0$, ∴ $a+b>a-b>0$,

$(a+b)(a-b)>(a-b)^2$，即 $a^2-b^2>(a-b)^2$，

$\sqrt{a^2-b^2}>a-b$，

$2a\sqrt{a^2-b^2}>2a(a-b)$，

即 $2ab>2a^2-2a\sqrt{a^2-b^2}$.

两边同减去 b^2 得：

$2ab-b^2>a^2+a^2-b^2-2a\sqrt{a^2-b^2}$，

即 $2ab-b^2>(a-\sqrt{a^2-b^2})^2$.

∴ $\sqrt{2ab-b^2}>a-\sqrt{a^2-b^2}$，

即 $\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{2ab-b^2}>a$.

35. 由 $x^2=y^2+z^2$，则 $x^2-y^2=z^2$，

即 $(x+y)(x-y)=z^2$，∴ $(x+y)(x-y)>0$.

而 x，y 皆为正数，∴ $x+y>0$.

故 $x-y>0$，即 $x>y$. 同理可证 $x>z$.

36. 设 $x=\frac{a}{2}+t$，$y=\frac{a}{2}-t$，那么，

$$x^n=\left(\frac{a}{2}+t\right)^n=\frac{a^n}{2^n}+c_n^1\frac{a^{n-1}}{2^{n-1}}t+\cdots,$$

$$y^n=\left(\frac{a}{2}-t\right)^n=\frac{a^n}{2^n}-c_n^1\frac{a^{n-1}}{2^{n-1}}t+\cdots.$$

∴ $x^n+y^n=2\cdot\frac{a^n}{2^n}+2c_n^2\frac{a^{n-2}}{2^{n-2}}t^2+\cdots$，

∴ $x^n+y^n\geqslant\frac{a^n}{2^{n-1}}$ （当 $x=y=\frac{a}{2}$ 时，等式成立）.

37. 设 $a=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$，$b=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$，

则 $a>b>0$，且 $a^3+b^3=6$，

问题就是在 $a>b>0$ 且 $a^3+b^3=6$ 的条件下，求证

$a+b<2\sqrt[3]{3}$.

由于 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$，

所以 $3(a^3+b^3)>3ab(a+b)$，即 $18>3ab(a+b)$.

两端加上 a^3+b^3 得：$18+(a^3+b^3)>3ab(a+b)+(a^3+b^3)$，

即 $24>(a+b)^3$，

$\therefore\quad a+b<2\sqrt[3]{3}$，

即 $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$.

38. 左边分子分母各乘以 a^n 得

$$\frac{a^n}{a^{2n}-a^n+1}=\frac{a^n}{(a^n-1)^2+a^n}.$$

因为 a 为不等于±1 的实数，$\therefore\ a^n<(a^n-1)^2+a^n$，

即 $\dfrac{a^n}{(a^n-1)^2+a^n}<1$，即 $\dfrac{1}{a^n+a^{-n}-1}<1$.

39. $\because\quad a^2+b^2+c^2=1$，$x^2+y^2+z^2=1$，

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2=2$.

又$\because\quad a^2+x^2\geqslant 2ax$，$b^2+y^2\geqslant 2by$，

$c^2+z^2\geqslant 2cz$，

$\therefore\quad 2ax+2by+2cz\leqslant 2$，

即 $ax+by+cz\leqslant 1$.

40. $\because\quad a>b>c$，

$\therefore\quad 2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$=2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ca-2ab$

$=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$.

故 $a^2+b^2+c^2-bc-ac-ab>0$ (1)

$$\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}$$

$$=\frac{(c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

分子化简为 $-(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$.

由(1)得此分子为负.

又$\because\quad a>b>c$，$\therefore$ 分母也为负.

$\therefore\quad \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}>0$

41. 对于任何 $i(i=1, 2, 3\cdots n)$，$a_i>0$，

则 $\frac{1+a_1}{2}\geqslant\sqrt{1\cdot a_1}$，

$\frac{1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{1\cdot a_2}$，$\cdots$

$\frac{1+a_n}{2}\geqslant\sqrt{1\cdot a_n}$.

即 $1+a_1\geqslant2\sqrt{a_1}$ (1)

$1+a_2\geqslant2\sqrt{a_2}\cdots$ (2)

$1+a_n\geqslant2\sqrt{a_n}$ (n)

(1)．(2)$\cdots$$(n)$：

$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant2\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

又 $a_1\cdot a_2\cdots\cdots a_n=1$，

$\therefore\quad \sqrt{a_1\cdot a_2\cdots a_n}=1$.

则 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant2^n$.

42. 设 $\frac{a_1}{b_1}=N$，$\frac{a_n}{b_n}=M$，

$N=\frac{a_1}{b_1}<M$，$N<\frac{a_2}{b_2}<M$，$\cdots N<\frac{a_n}{b_n}=M$.

$b_1N=a_1<b_1M$，$b_2N<a_2<b_2M$，$\cdots$

$b_nN<a_n=b_nM$.

相加得：$(b_1+b_2+\cdots+b_n)N<a_1+a_2\cdots+a_n<(b_1+b_2\cdots+b_n)M$.

$\therefore\quad \frac{a_1}{b_1}=N<\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n}<M=\frac{a_n}{b_n}$.

43. 将 $z=a-(x+y)$ 代入(2)得：

$x^2+y^2+(x+y)^2-2a(x+y)+a^2=\frac{a^2}{2}$.

按 y 的降幂排列．并除以 2 得：

$$y^2+(x-a)y+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=0.$$

∵ y 是实数，由判别式得：

$$(x-a)^2-4\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\geqslant 0,\ \text{即}\ x(2a-3x)\geqslant 0.$$

解得： $0\leqslant x\leqslant \frac{2}{3}a$.

同理可得： $0\leqslant y\leqslant \frac{2}{3}a$，$0\leqslant z\leqslant \frac{2}{3}a$，

($x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$ 的等号不能同时成立)。

44. 已知 $a>b>0$，

∴ $\frac{a}{b}>1$，$a-b>0$，∴ $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$.

同理 $\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}>1$，$\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}>1$.

∴ $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}>1$，

即 $\frac{a^{2a}}{a^{b+c}}\cdot\frac{b^{2b}}{b^{c+a}}\cdot\frac{c^{2c}}{c^{a+b}}>1$.

∴ $a^{2a}\cdot b^{2b}\cdot c^{2c}>a^{b+c}\cdot b^{a+c}\cdot c^{a+b}$.

45. 由已知 $|f(1)|=|1+a+b|$，

$|f(2)|=|4+2a+b|$，

$|f(3)|=|9+3a+b|$.

假设 $|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$ 都小于$\frac{1}{2}$，

则 $\begin{cases}-\frac{1}{2}<1+a+b<\frac{1}{2} & (1),\\ -\frac{1}{2}<4+2a+b<\frac{1}{2} & (2),\\ -\frac{1}{2}<9+3a+b<\frac{1}{2} & (3),\end{cases}$

(1) + (3) 得 $\quad -11<4a+2b<-9 \qquad (4)$,

(2) × 2 得 $\quad -9<4a+2b<-7 \qquad (5)$.

(4)、(5) 两式矛盾，则假设错误.

故证得 $|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$.

46. 证一，用分析法：

设 $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$,

即 $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$ （$\because$ $a>0$，$b>0$），

$\therefore$ $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$，移项．分解因式得：

$(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})\geqslant0$，即 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant0$.

显然，此式成立，以上步步可逆问题得到证明.

证二，用综合法：

$\because$ $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant0$，又 $a>0$，$b>0$，

$\therefore$ $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ 乘上式的两端，

$\therefore$ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant0$,

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-2\sqrt{ab}+b)\geqslant0$,

即 $a\sqrt{a}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}+b\sqrt{b}\geqslant0$，移项得：

$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$，两端除以 $\sqrt{a}\sqrt{b}>0$ 得：

$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$,

$\therefore$ $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

47. $\because$ $a^2+b^2\geqslant2ab$，$b^2+c^2\geqslant2bc$，$c^2+a^2\geqslant2ca$,

仅当 $a=b=c$ 时，以上三式才能取等号.

而 a，b，c 是不全相等的正实数，

故以上三式最多只有一个式子等号成立.

因为 a，b，c 是正实数，$\therefore$ $a^2c+b^2c\geqslant2abc$.

$ab^2+ac^2 \geqslant 2abc$, $bc^2+a^2b \geqslant 2abc$.

三式相加得：$a^2c+b^2c+cb^2+ac^2+bc^2+a^2b>6abc$,

即　$(b^2c+bc^2)+(c^2a+ca^2)+(a^2b+ab^2)>6abc$.

故　$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)>6abc$.

48. $\because$　$a>b>0$, $\therefore$　$a^{a-b}>b^{a-b}$,

即　$\dfrac{a^a}{a^b}>\dfrac{b^a}{b^b}$. 因底数 a、b 为正数，故其幂亦为正数.

用 $a^b b^b$ 乘不等式的两端得：

$a^a b^b > a^b b^a$.

49. 用分析法. 设 $13^{13}\cdot 11^{11}>13^{11}\cdot 11^{13}$,

则有　$\dfrac{13^{13}}{11^{13}}>\dfrac{13^{11}}{11^{11}}$, 即　$\left(\dfrac{13}{11}\right)^{13}>\left(\dfrac{13}{11}\right)^{11}$.

因为正的假分数其指数大的，幂值亦大. 或根据底数大于 1 的指数函数是增函数的道理.都可知道后式成立. 所以 $13^{13}\cdot 11^{11}>13^{11}\cdot 11^{13}$.

习 题 五 答 案

1. ① $f(x)=x^2-5x+6$;

② $\varphi[f(x)]=4^x$, $f[\phi(x)]=2^{x^2}$;

③ $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=-\dfrac{1}{x(x+\Delta x)}$, $f[f(x)]=x$;

④ $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

2. ③ $f\left(\dfrac{a}{b}\cdot b\right)=f\left(\dfrac{a}{b}\right)+f(b)$,

即　$f(a)=f\left(\dfrac{a}{b}\right)+f(b)$,

$\therefore$　$f\left(\dfrac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)$.

3. ① $-\frac{3}{2}\leqslant x<2$； ② $x\neq 0$； ± 2；

③ $x>\frac{2}{3}$但 $x\neq 1$；

④ $2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$或 $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\pi$.

4. x，m 须满足

$$\begin{cases} 0\leqslant x+m\leqslant 1, \\ 0\leqslant x-m\leqslant 1, \\ \qquad m>0. \end{cases}$$

解之，得 $m\leqslant x\leqslant 1-m$.

所以所求函数定义域为 $m\leqslant x\leqslant 1-m$，其中 $0<m\leqslant\frac{1}{2}$.

5. 由于函数与自变量的记法无关，分别作变换.

令 $x-1=t$，$1-x=-t$，则得

$$\begin{cases} af(t)+bf(-t)=c(1+t) \\ bf(t)+af(-t)=c(1-t). \end{cases}$$

就 $f(t)$ 解之，

① 若 $a^2\neq b^2$，则 $f(x)=\frac{c}{a-b}x+\frac{c}{a+b}$；

② 若 $a^2=b^2$，$c\neq 0$，则 $f(x)$ 不存在；

③ 若 $a=b$，$c=0$，则 $f(x)$ 为任意奇函数；

④ 若 $a=-b$，$c=0$，则 $f(x)$ 为任意偶函数.

6. ① 奇函数； ② 偶函数； ③ 偶函数；

④ $Q(x)=2x^2-3$ 偶函数，$\phi(x)=6x$ 奇函数.

7. ① 当 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$时 $\sin x$ 是递增的；

当 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{3}{2}\pi$ 时 $\sin x$ 是递减的.

② 当 $x<-1$ 时 函数 $y=\frac{x}{1+x^2}$是递减的；

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 是递增的；

当 $x>1$ 时，函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 是递减的.

③ 当 $0<x_1<x_2$，且 $a>b>1$ 时，我们有 $a^{x_2-x_1}>b^{x_2-x_1}$，

$a^{x_2-x_1}-1>b^{x_2-x_1}-1>0$，

又 $a^{x_1}>b^{x_1}>0$，

从而 $a^{x_1}(a^{x_2-x_1}-1)>b^{x_1}(b^{x_2-x_1}-1)$，

即 $a^{x_2}-a^{x_1}>b^{x_2}-b^{x_1}$.

$\therefore$ $f(x_2)-f(x_1)=(a^{x_2}-a^{x_1})-(b^{x_2}-b^{x_1})>0$.

即 $f(x)$ 为增函数.

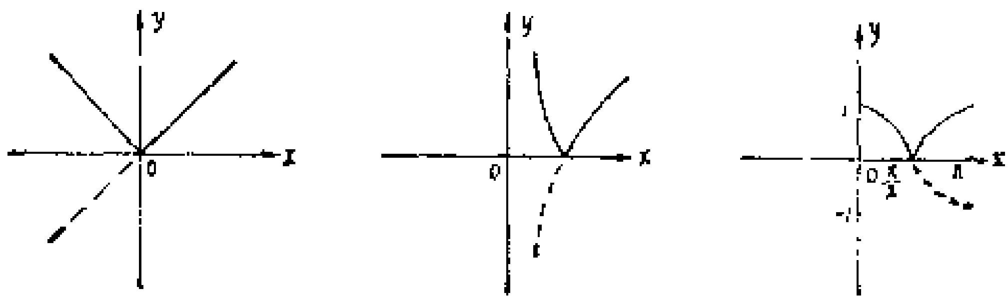
8. ① 不是. 当 $x\neq 0$ 时 它们是相同的；

② 不是. 当 $x\neq 0$ 时 它们是相同的；

③ 不是. 当 $x>0$ 时 它们是相同的；

④ 不是. 当 $x>0$ 时 它们是相同的.

9. ① $y=|x|$ ② $y=|\ln x|$ ③ $y=|\cos x|$.



10. $$y=\begin{cases}(x+3)(x-1)+(1-x) & (x<-3),\\ -(x+3)(x-1)+(1-x) & (-3\leqslant x\leqslant 1),\\ (x+3)(x-1)+(x-1) & (x>1).\end{cases}$$

$\therefore$ $y=|(x+3)(x-1)|+|x-1|$.

11. 不同. 当 $x>0$、$y>0$ 时，它们的图象是相同的.

12. 当 $x=\sqrt{2}-1$ 时，$\dfrac{1}{x}=\sqrt{2}+1$，$x-\dfrac{1}{x}=-2$.

$$\therefore \quad f(x)=x^3\left[x^2-2+\frac{1}{x^2}+2\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]+3x\left(x-\frac{1}{x}\right)+6x+4$$

$$=x^3\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]+3x\left(x-\frac{1}{x}+2\right)+4$$

$$=x^3\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}+2\right)+3x\left(x-\frac{1}{x}+2\right)+4$$

$$=\left(x-\frac{1}{x}+2\right)\left[x^3\left(x-\frac{1}{x}\right)+3x\right]+4$$

$$=4.$$

13. ① $a^2-b^2=4c^2$;

② $b^2=a^2-4c^2=(a+2c)(a-2c)$,

∴ b 是 $(a+2c)$ 与 $(a-2c)$ 的比例中项.

14. ① $y=cz$ （c 是常数），y 是 z 的正比函数；

② $y=\frac{c}{z}$ （c 是常数），y 是 z 的反比函数.

③ $f(x)=\frac{21}{x}$，$f(-2)=-\frac{21}{2}=-10.5$.

15. $y=2x-3$.

16. 提示：把 $y=\sqrt{t}-\sqrt{t-2x+3}$ 化成

$$y=|x-1|-|x-2|.$$

17. 提示：记号〔 〕的定义是：当 $n\leqslant x<n+1$ 时 $[x]=n$，可以分别考虑…，$-2\leqslant x<-1$，$-1\leqslant x<0$，$0\leqslant x<1$，…作出其图形.

18. ① $y=-x^2+2x+3$；② $y=x^2-4x+1$；③ $y=3x^2+5x-2$；

④ $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{5}{2}$；⑤ $y=-4x^2+4x+24$.

提示：对称轴与 y 轴平行的抛物线主要表示法有：

① 一般形式 $y=ax^2+bx+c$；

② 与 x 轴交于点 $(\alpha,0)$，$(\beta,0)$ 则 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$，

③ 与 x 轴相切于 $(\alpha,0)$，则 $y=a(x-\alpha)^2$；

④ 其顶点为 (p,q)，则 $y=a(x-p)^2+q$.

应视具体情况选择式子，以使运算简便.

19. ① $m\geqslant 1$；　② $a>1$；　③ $k<-\frac{1}{3}$.

20. ① $a=1$，$b=4$；　② $a=b=2$.

21. ① 提示　对于函数

$$f(x)=ax^2-2x+2=a\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+\frac{2a-1}{a},$$

分以下情况讨论：1°. 当 $2a-1>0$，即 $a>\frac{1}{2}$时，$f(x)>0$. 2°. 当 $2a-1=0$，即 $a=\frac{1}{2}$时，$f(x)$除 $x=\frac{1}{a}$时为零外，总为正数. 这时只需$\frac{1}{a}>1$ 或 $\frac{1}{a}>4$，$f(x)>0$. 3°. 当 $2a-1<0$时，二次式有二根 x_1，x_2，只需 $4<x_1$，或$x_2<1$ 就有 $f(x)>0$.

② 经过(0，1)和(2，3)两点的直线方程为

$$y=x+1.$$

以 $y=x+1$ 代入抛物线方程 $y=x^2+ax+2$，得

$(x+1)=x^2+ax+2$，

即　$x^2+(a-1)x+1=0$.

由于直线和抛物线交于相异两点，此二次方程应有相异实根. 所以，

$\Delta=(a-1)^2-4>0$，

$\therefore$　$a<-1$ 或 $a>3$.

22. ① 令　$y=0$，得　$ax^2+bx+2=0$.

此方程的二根就是抛物线 $y=ax^2+bx+2$ 在 x 轴上的截距. 设为 x_1，x_2，则由韦达定理知

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{2}{a}.$$

从而　$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{4}{a}=\frac{b^2-4a}{a^2}$， ② $|AB|=|x_2-x_1|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{8}{a}}$

$=\sqrt{\frac{b^2-8a}{a^2}}=-\frac{1}{a}\sqrt{b^2-8a}$.

$|oc|=2$ （即抛物线在 y 轴上的截距）.

$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|oc|=-\frac{1}{a}\sqrt{b^2-8a}$.

23. $y=-3(x-2)^2+7$.

24. 由题设条件知：

$$\begin{cases}3^2+3p+q=0,\\ -\frac{p}{2}=2.\end{cases}$$

解之，得 $p=-4$，$q=3$.

$\therefore\quad y_{\min}=-1$.

25. 当 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ 时，$y_{\min}=-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$.

26. 提示：由于 $f(x,y)=(x-y-7)^2+5(y-2)^2+3$，
所以当 $x=9$，$y=2$ 时 $f(x,y)$ 最小.

27. 令 $\lambda=\frac{100x+10y+z}{x+y+z}$，其中 $1\leqslant x\leqslant 9$，
$0\leqslant y\leqslant 9$，$0\leqslant z\leqslant 9$.

由于 $\lambda=1+9\left(\frac{11x+y}{x+y+z}\right)$知，当 z 取最大值，即当 $z=9$ 时 λ 最小，又由于这时 $\lambda=\left[1+9\left(1+\frac{10x-9}{9+x+y}\right)\right]$知，当 y 取最大值，即 $y=9$ 时 λ 最小．由于这时 $\lambda=100-\frac{|70|}{x+18}$，当 x 取最小值，即 $x=1$ 时 λ 有最小值为：$199/19=10\frac{9}{19}$.

28. $\because\quad y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$，$\therefore\quad (y-1)x^2+(y+1)x+y-1=0$.

$\therefore$ y 有极值时 x 必为实数，$\therefore$ $\Delta\geqslant0$.

即 $\Delta=(y+1)^2-4(y-1)^2=(3y-1)(3-y)\geqslant0$.

$\therefore$ $\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant3$,

即 $y_{min}=\frac{1}{3}$, $y_{max}=3$.

29. 仿上题得

$$\Delta=(b'^2-4a'c')y^2-2(bb'-2ac'-2a'c)y+b^2-4ac$$
$$=(b'^2-4a'c')(y-y_1)(y-y_2)\geqslant0 \quad (\text{其中 } y_1<y_2).$$

那么：(i) $b'^2-4a'c'>0$ 时，$y_{max}=y_1$, $y_{min}=y_2$.

(ii) $b'^2-4a'c'<0$ 时，$y_{min}=y_1$, $y_{max}=y_2$

(iii) $b'^2-4a'c'=0$ 时，

如 $bb'-2ac'-2a'c>0$,

则 $y_{max}=\dfrac{b^2-4ac}{2(bb'-2ac'-2a'c)}$.

30. 设 $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}=y$,

去分母化简得：

$x^2(y-1)+2(y-17)x-7y+71=0$.

$\because$ x 为实数，判别式 $\Delta\geqslant0$,

即 $\{(y-17)^2-(y-1)(7y-71)\}4\geqslant0$,

$8(y-5)(y-9)\geqslant0$.

$\therefore$ $y\leqslant5$, $y\geqslant9$,

即 y 不能在 5 与 9 之间.

31. 利用判别式求极值，最高点为 $(1, 1)$，最低点为 $(-1, -1)$.

32. 方程两边平方得：

$y^2=[\sqrt{(x+2)(6-x)}-\sqrt{(x+1)(3-x)}]^2+3\geqslant3$,

$\therefore$ $y>0$, $|y|=y$, $y=\sqrt{3}$, $y_{min}=\sqrt{3}$.

33. 将原方程变形为：

$$9x^2+2x(y-46)-y^2+244=0.$$

由于 x 为实数，所以

$$\Delta=4(y-46)^2-36(y^2-20\ y+244)$$

$$=-32(y-1)(y-10)\geqslant 0.$$

$\therefore\quad 1\leqslant y\leqslant 10,$

即　$1\leqslant y\leqslant 10.$

同理：x 必在 3 与 6 之间.

34. 由根与系数的关系

$$\alpha+\beta=-2(m+3)$$

$$\alpha\beta=2m+4$$

$$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$$

$$=\alpha^2+\beta^2-2(\alpha+\beta)+2$$

$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2$$

$$=4(m+3)^2+4(m+3)-4m-6$$

$$=4(m+3)^2+6\geqslant 6$$

$\therefore m=-3$ 时有最小值 6

35. 由第一个已知条件可知，这个二次三项式的首项系数不等于 0，而且可以写作：

$$a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+25 \tag{1}$$

令　$a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+25=0$，即　$ax^2-ax+\left(\frac{a}{4}+25\right)=0.$

由韦达定理知：

$$x_1+x_2=1,\quad x_1\cdot x_2=\frac{1}{4}+\frac{25}{a}.$$

$$\therefore\quad x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$$

$$=1-3\left(\frac{1}{4}+\frac{25}{a}\right)=\frac{1}{4}-\frac{75}{a}.$$

由第二个已知条件得：

$$\frac{1}{4}+\frac{75}{a}=19, \quad \therefore \quad a=-4.$$

代入(1)化简得所求二次三项式为：

$$-4x^2+4x+24$$

(因为二次项系数是负的，所以25是极大值)．

36．设中间之数为 x，公比为 q，则三数为：$\frac{x}{q}$，q，qx．

按题意得：$\frac{x}{q}+x+xq=a$ (1)

今欲求 $\frac{x}{q}\cdot x\cdot xq=x^3$ 之极大值及极小值，即求 x 的极大值及极小值．由(1)得：$xq^2+(x-a)q+x=0$，

由于 q 为实数，则须使判别式为非负整数．

$\therefore \quad (x-a)^2-4x^2\geqslant 0.$

即 $(x-a-2x)(x-a+2x)\geqslant 0,$

$(x-a)(3x-a)\leqslant 0,$

从而 $-a\leqslant x\leqslant \frac{a}{3}.$

故 所求之积的极大值为 $\left(\frac{a}{3}\right)^3$，极小值为 $-a^3$．

37．$\because \quad \left(2+\frac{\pi}{2}\right)x\cdot\frac{S}{x}=\left(2+\frac{\pi}{2}\right)S$ 是常量，

$\therefore$ 当 $\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x=\frac{S}{x}$，即 $x=\sqrt{\frac{2S}{4+\pi}}$ 时，

$f(x)$ 有极小值，

且 $f(x)_{\min}=\frac{2S}{x}=\frac{2S}{\sqrt{\frac{2S}{4+\pi}}}=\sqrt{2(4+\pi)S}.$

38．根据布尼耶可夫斯基不等式，

$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)\geqslant(ax+by+cz)^2$,

故 $\quad x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{p^2}{a^2+b^2+c^2}$.

即当 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$时，$S_{\min}=\dfrac{p^2}{a^2+b^2+c^2}$.

39. 解法与23同．答案为 $x^2-x-12=0$.

40. 当 $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i/n$, $\quad y_{\min}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2/n$.

41. 取 $1+x=t$，有 $t^2\geqslant1+2(t-1)$.

$t^2-2t\geqslant1-2$ $\quad(t\geqslant0)$，等号仅当 $t=1$ 时成立.

以 c^2 乘上不等式得：

$(ct)^2-2c^{2-1}\cdot ct\geqslant(1-2)c^2$, $t\geqslant0$.

令 $\quad x=cy$, $ac^{2-1}=m$, $c=\left(\dfrac{m}{2}\right)^{\frac{1}{2-1}}$,

等号仅当 $\quad x=c=\left(\dfrac{m}{2}\right)^{\frac{1}{2-1}}$ 时成立.

即 $\quad x^2-mx\ (2>1,\ m>0,\ x\geqslant0)$.

当 $\quad x=\left(\dfrac{m}{2}\right)^{\frac{1}{2-1}}$ 时有一极小值 $(1-2)\left(\dfrac{m}{2}\right)^{\frac{2}{2-1}}$.

特别 $a=2$ 时有一极小值 $(1-2)\left(\dfrac{m}{2}\right)^{\frac{2}{2-1}}=-\dfrac{m^2}{4}$.

再取 $m=27$，$a=3$ 时，x^2-27x.

当 $\quad x=\left(\dfrac{27}{3}\right)^{\frac{1}{3-1}}=3$ 时，有一极小值

$1-3\left(\dfrac{27}{3}\right)^{\frac{3}{3-1}}=-54$.

42. 当 $\quad x=\left(\dfrac{m}{-2}\right)^{\frac{1}{2-1}}$ 时有极小值 $(1-2)=\left(\dfrac{m}{-2}\right)^{\frac{2}{2-1}}$.

43. 当 $\quad x=6$ 时，有 $y_{\min}=5$.

44. 提示：令 $x^2=t$，仅讨论 t^3-8t 的极小值.

答：$y_{\min}=\dfrac{45-32\sqrt{6}}{9}$.

45. 提示：$\dfrac{x^3}{x^4+5}$的极大值 x 应是正数.

变 $\dfrac{x^3}{x^4+5}=\dfrac{1}{5\left(\frac{1}{5}x+x^{-3}\right)}$.

答：$y_{\max}=\dfrac{3}{4\sqrt[4]{15}}$对于 $x^6-0.6x^{10}$

可令 $t=x^6$，$t\geqslant 0$，$y_{\max}=0.4$

46. 提示：令 $t=\dfrac{1}{x^3}$,

则得：$\dfrac{p}{x^2}=\sqrt{x}=pt+t^{-\frac{1}{4}}$.

答：$p=8$.

47. 提示：令 $y=6-x$，$x=6-y$,

则有 $(6-y)y^2=6y^2-y^3$.

再令 $y^2=t$，有 $6t-t^{\frac{3}{2}}$.

答：$x=2$，$y_{\max}=32$.

48. 以连接四边中点的内接正方形的面积最小.

49. 猪舍面积 $S=\dfrac{p}{2}x-\dfrac{5}{2}x^2$,

$0<x<\dfrac{p}{5}$. 当 $x=\dfrac{p}{10}$米时,

$S_{\max}=\dfrac{p^2}{40}$ (米^2).

50. 答：长方体的三度相等(成立方体)时所用木板最省.

51. 答：$2r=l$，$S_{\max}=p^2/4$.（r 为扇形半径）

53. 答：当 $h:r=2a:b$ 时造价 $p_{\min}=3\sqrt[3]{2ab^2\pi r^2}$.

54. 答：当 $BM=1$，$S_{\triangle MNP}=\dfrac{1}{4}$最大.

55. 答：$x=\frac{8}{3}$浬时，费时 $t=\frac{3}{2}$小时最少.

56. 答：每小时燃料费$\frac{1}{50}v^3$元.

提示：航行每公里费用总和 $p=\dfrac{\frac{1}{50}v^3+320}{v}$

$$=\frac{1}{50}v^2+\frac{160}{v}+\frac{160}{v}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{(160v)^2}{50v^2}}=24.$$

当 $v=20$ 公里/小时 时 $p_{\min}=24$元，每小时费用是 480 元.

57. 答：等腰直角三角形斜边为最短.

58. 提示：设所求直线与x轴交角为α，方程为 $y-b=\operatorname{tg}\alpha(x-a)$. 分别令 $x-b$，$y=0$，得出直线在二轴截距，再求所围成三角形面积极小值.

当 $\operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}$时，$S_{\min}=2ab$.

59. 当杆与地面成$\frac{\pi}{2}-\varphi$的角度时杆影最长 $l/\sin\varphi$.

60. 当水运里数为 $d-l\sqrt{a^2-1}/(a^2-1)$公里时，总运费最省.

设 $AC=d$，$Bc=l$，$AM=x$，$\angle BMC=\theta$，

$BC\perp AC$，水运单位里程运价为 p 元，则水陆总运价为：

$y=p(d-l\operatorname{ctg}\theta)+a\,pl\csc\theta=pd+pl(a\csc\theta-\operatorname{ctg}\theta)$.

$\theta\in\left(\theta,\frac{\pi}{2}\right)$.

令 $z=a\csc\theta-\operatorname{ctg}\theta$，$z+\operatorname{ctg}\theta=a\csc\theta$，

$(a^2-1)\operatorname{ctg}^2\theta-2z\operatorname{ctg}\theta+a^2-z^2=0$，$\because$ $\theta\in\left(\theta,\frac{\pi}{2}\right)$，

故 $\operatorname{ctg}\theta$为实数.

$\therefore$ $\Delta=4z^2-4(a^2-1)(a^2-z^2)\geqslant 0$，

$z^2-(a^2-1)a^2+(a^2-1)z^2\geqslant 0$，

即 $z^2-(a^2-1)\geqslant 0$，$\therefore$ $z\geqslant\sqrt{a^2-1}$，$z\leqslant-\sqrt{a^2-1}$.

相应的 $\operatorname{ctg}\theta=\dfrac{2z\pm\sqrt{\Delta}}{z(a^2-1)}$，当 $z=\sqrt{a^2-1}$ 时，

$\operatorname{ctg}\theta=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a^2-1}$，当 $z=-\sqrt{a^2-1}$ 时，

$\operatorname{ctg}\theta=-\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a^2-1}<0.$

但 $\theta\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 故 $\operatorname{ctg}\theta>0$，$\therefore$ z 无法达到极大值，

即 $z\neq-\sqrt{a^2-1}$. 而当 $\operatorname{ctg}\theta=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a^2-1}$，

$x=d-l\sqrt{a^2-1}/(a^2-1)$ 公里时，

$z_{\min}=\sqrt{a^2-1}$，$y_{\min}=pd+pl\sqrt{a^2-1}$ 元.

故当水运里程为 $d-l\sqrt{a^2-1}/(a^2-1)$ 公里时，总运价最省.

从上列解答过程中发现，θ 只与陆地、水流运价之比 a 有关而与 d、l 无关，故上列解答的价值尚可推广到下面更一般问题：

从河流上游的发货站 A，运到河流两岸若干镇 B_1，B_2，B_3，…，它们与 A 沿河流方向的距离分别为 d_1，d_2，d_3，…，与河岸的垂直距离分别为 l_1，l_2，l_3，…，陆地与水路的单位里数运费之比为 $a(a>1)$. 试求当水路里程分别等于多少时，货运总价最省？（河流看作直线，陆地里程也以直线距离计算）则水路里程分别为：

$d_1-l_1\sqrt{a^2-1}/(a^2-1)$，

$d_2-l_2\sqrt{a^2-1}/(a^2-1)$，

$d_3-l_3\sqrt{a^2-1}/(a^2-1)$ …时，总运价最省。

61. 提示：有 $\operatorname{ctg}\varphi=\dfrac{b}{b-a}\operatorname{tg}\theta+\dfrac{a}{b-a}\operatorname{ctg}\theta.$

注意：$\dfrac{b}{b-a}\operatorname{tg}\theta\cdot\dfrac{a}{b-a}\operatorname{ctg}\theta=\dfrac{ab}{(a-b)^2}$.

答：$x=\sqrt{ab}$，φ 有极大值.

62. 提示：设圆锥母线与底面夹角为 φ，则全面积为

$2\pi R^2\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi(1-\operatorname{tg}^2\varphi)}$.

注意：$\lg^2\varphi+(1-\lg^2\varphi)=1$.

答：圆锥底半径为$\sqrt{2}R$时，有最小全面积$8\pi R^2$.

习题六答案

1. ① x须满足

$\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}\geqslant 0$,　$\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}\geqslant 1$,

$\lg\sqrt{\lg x}\geqslant 1$,　$\sqrt{\lg x}\geqslant 10$,

$\lg x\geqslant 100$,　$\therefore$　$x\geqslant 10^{100}$.

② 当 $2<x<4$ 时，A、B、C 都有意义.

由于 $A+B-C=\lg\sqrt{\dfrac{(x+1)(4-x)}{x-2}}$,

又　$25^{\log_5\sqrt{\lg 2}}=5^{\log_5(\lg 2)}=\lg 2$,

所以　$\lg\sqrt{\dfrac{(x+1)(4-x)}{x-2}}=\lg 2$,　$\dfrac{(x+1)(4-x)}{x-2}=2$,

$\therefore$　$x=3$　或　-4(不在定义域内略去).

③ 设　$\log_2(x^2-4x-1)=m$　(m为整数),

则　$x^2-4x-(2^m+1)=0$,

$\therefore$　$x=2\pm\sqrt{2^m+5}$.

显然，当　$\sqrt{2^m+5}$为有理数时，x为有理数.

兹分别讨论如下：

1°. 如 $m>0$，2^m+5为奇数.

设　$2^m+5=(2k+1)^2$　(k为整数),

则　$2^{m-2}=k(k+1)-1$.

这时等式左端为奇数，仅当 $m=2$ 时等式成立．从而得到 $x_1=5$，$x_2=-1$.

2°. 如 $m<0$，设 $m=-n$　($n>0$),

则　$\sqrt{2^m+5}=\sqrt{\dfrac{5\cdot 2^n+1}{2^n}}$.

由此知 n 应为偶数．设 $n=2p$ （p 为正整数），于是得 $5\cdot 2^{2p}+1=(2k+1)^2$，即 $5\cdot 4^{p-1}=k(k+1)$．由于 5 与 4^{p-1}、k 与 $k+1$ 都是互质的，所以 $k=4^{p-1}, k+1=5$，从而得 $p=2$，$m=-2p=-4$．

$$\therefore \quad x=2\pm\sqrt{2^{-4}+5}=\frac{17}{4}\text{或}-\frac{1}{4}.$$

2．① -1； ② $\frac{1}{2}$； ③ 1； ④ -1； ⑤ $3-\log_3 10$．

3．① $\lg 2673=\lg(3^5\times 11)=5\lg 3+\lg 11$，

$\therefore \quad \lg 11=\lg 2673-5\lg 3=1.0413$；

② $\log_8 9.8=\dfrac{\lg 9.8}{\lg 8}=\dfrac{\lg(4.9\times 2)}{3\lg 2}$

$=\dfrac{2\lg 7+\lg 2-\lg 10}{3\lg 2}=\dfrac{2b+a-1}{3a}$，

③ 已知 $\sqrt{10}=3.16$，

所以 $\lg\sqrt{10}=\lg 3.16$．

从而 $\lg 3.16=0.5$，

$\therefore \quad \lg 1.58=\lg 3.16-\lg 2=0.5-0.3=0.2$．

又 $\lg 2^{64}=64\lg 2=64\times 0.3=19.2$，

这两个数的尾数相同，其真数数字相同，

$\therefore \quad 2^{64}=1.58\times 10^{19}$．

4．① 欲 y 有意义，则须 $x=1$．这时 $y=0$．

$\therefore \quad \lg(x+y)=\lg(1+0)=0$；

② 由题设条件知 $x=\frac{1}{2}$，$y=8$．

$\therefore \quad \log_8(xy)=\log_8 4=\frac{2}{3}$；

③ 由题设条件知

$\log_2 16x\left(x-\frac{3}{8}\right)=0$，　$16x^2-6x-1=0$，

$\therefore \quad x=\frac{1}{2}$或　$-\frac{1}{8}$　（不在定义域内，舍去）．

从而 $1+x+x^2+\cdots=\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2.$

5. ① 由题设条件知 $\left(\dfrac{2a+3b}{4}\right)^2=ab,$

取对数得 $2\lg\dfrac{2a+3b}{4}=\lg a+\lg b,$

即 $\lg\dfrac{2a+3b}{4}=\dfrac{\lg a+\lg b}{2}.$

② 由题设条件知 $a^2=(c+b)(c-b),$

以 a 为底取对数，得

$2=\log_a(c+b)+\log_a(c-b),$

即 $2=\dfrac{1}{\log_{b+c}a}+\dfrac{1}{\log_{c-b}a},$

∴ $\log_{b+c}a+\log_{c-b}a=2\log_{b+c}a\cdot\log_{c-b}a.$

③ 由题设条件知

$2\log_m x=\log_k x+\log_n x,$

化作以 k 为底的对数，得

$\dfrac{2\log_k x}{\log_k m}=\log_k x+\dfrac{\log_k x}{\log_k n},$

$\log_k x(2\log_k n-\log_k m\log_k n-\log_k m)=0.$

如 $\log_k x=0$，则 $x=1$，从而 k、m、n 为任何不等于 1 的正数；如 $2\log_k n-\log_k m(\log_k n+1)=0,$

即 $2\log_k n=\log_k m\ \log_k kn,$

即 $\log_k n^2=\log_k(kn)^{\log_k m}.$

∴ $n^2=(kn)^{\log_k m}.$

6. ① $\dfrac{4}{\log_2 10}+\dfrac{2}{\log_3 10}+\dfrac{1}{\log_7 10}=4\lg 2+2\lg 3+\lg 7$

$=\lg(2^4\cdot 3^2\cdot 7)=\lg 1008>\lg 1000=3;$

② 由于 $10>\pi^2$，取以 π 为底的对数，得

$\log_\pi 10>2$，即 $\log_\pi 2+\log_\pi 5>2.$

$$\therefore \quad \frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_5 \pi}>2.$$

7. ① $\log_4 x+\log_4 y=\log_4 xy=\log_4(x\cdot 2y)-\log_4 2$

$=2\log_4\sqrt{x\cdot 2y}-\log_4 2\leqslant 2\log_4\dfrac{x+2y}{2}-\log_4 2$

$=2\log_4 4-\log_4 2=\dfrac{3}{2}$;

② 由题设条件知 $xy=2$，即 $x(2y)=4$.

$x+2y\geqslant 2\sqrt{x\cdot(2y)}=2\sqrt{4}=4$.

8. ① $f(x)=3+2\cdot 3^{x+1}-9^x=-(3^{2x}-6\cdot 3^x-3)$

$=-(3^x-3)^2+12$.

$\therefore$ 当 $3^x-3=0$，即 $x=1$ 时，$f(x)$ 有极大值 $f(1)=12$.

又 $f(2)=-(3^2-3)^2+12=-24$.

$\therefore$ $f(1)=12$ 是最大值；$f(2)=-24$ 是最小值.

② $f(x)=(\log_a x)^2-\log_a x+5=\left(\log_a x-\dfrac{1}{2}\right)^2+4\dfrac{3}{4}$,

$\therefore$ 当 $\log_a x-\dfrac{1}{2}=0$，即 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$时，

$f(x)$有极小值(舍去).

又 $f(2)=\left(\log_{\frac{1}{2}}2-\dfrac{1}{2}\right)^2+4\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{4}+\dfrac{19}{4}=7$.

$f(4)=\left(\log_{\frac{1}{2}}4-\dfrac{1}{2}\right)^2+4\dfrac{3}{4}=11$.

$\therefore$ $f(2)=7$ 是最小值；$f(4)=11$ 是最大值.

9. ① $x=\dfrac{3}{8}$；② $x=4$ 或 -10；③ $x=1$；

④ $x=-9$，$y=-4$.

10. ① 应用换底公式 $x_1=9$，$x_2=\dfrac{1}{9}$；

② 应用换底公式，以 3 为底. $x=27$；

③ 换成以 2 为底的对数. $x=4$ 或 $\frac{1}{4}$.

④ 提示：$[\lg 9x-\lg(x+2)][\lg 9x-2\lg(x+2)]=0$,

$\therefore\quad x=\frac{1}{4}$, 1, 4.

11. ① 化为 $(x-2)^2=9$ 解得 $x=5$;

② 化为 $x+1=\sqrt{2x+5}$ 解得 $x=2$;

③ $x^{\lg^2 x+3\lg x+3}=x$, 取常用对数得

$\lg x(\lg^2 x+3\lg x+2)=0$,

$\therefore\quad x=1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100}$.

12. ① 化为 $x-y=xy$, $x+y=1$, 解得 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$$y=\frac{3-\sqrt{5}}{2};$$

② 化为 $x=y^2$, $x^2-5y^2+4=0$, 解得 $x=1$, $y=1$;

$x=4$, $y=2$.

③ 化为 $\lg x+\lg y=\lg 4+1$, $\lg x\cdot\lg y=\lg 4$.

解得 $x=4$, $y=10$; $x=10$, $y=4$.

④ 化为

$$\begin{cases} x\sqrt{yz}=4, \\ y\sqrt{xz}=9, \\ z\sqrt{xy}=16, \end{cases}\qquad 解得\begin{cases} x=\frac{2}{3}, \\ y=\frac{27}{8}, \\ z=\frac{32}{3}. \end{cases}$$

13. ① $\log_3(2x+3)<\log_3 3x$, $2x+3<3x$, $\therefore\ x>3$;

② $\log_4(x-1)^2\leqslant\log_4(2x-1)$, $(x-1)^2\leqslant 2x-1$,

$\therefore\quad 2-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2+\sqrt{2}$;

③ 如 $a>1$, 则 $(x-4)^2>3x-8$, $\therefore\ x<3$ 或 $x>8$.

如 $0<a<1$，则 $(x-4)^2<3x-8$，∴ $3<x<8$.

14. 对于任意的自然数 $n>1$，有

$$\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)>\lg\left(1+\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\lg\frac{n+1}{n}>\lg\frac{n+2}{n+1},$$

$$\lg(n+1)-\lg n>\lg(n+2)-\lg(n+1)>0,$$

$$\frac{\lg(n+1)-\lg n}{\lg n}>\frac{\lg(n+2)-\lg(n+1)}{\lg(n+1)},$$

$$\frac{\lg(n+1)}{\lg n}>\frac{\lg(n+2)}{\lg(n+1)},\quad \therefore\ \lg_n{}^{(n+1)}>\lg_{n+1}{}^{(n+2)}.$$

15. ① 左一右

$$=\log_a x\log_a y-\frac{1}{4}(\log_a y-\log_a x)(\log_a x-\log_a y)$$

$$=\log_a x\log_a y+\frac{1}{4}(\log_a x-\log_a y)^2$$

$$=\frac{1}{4}(\log_a x+\log_a y)^2\geqslant 0$$ （等号仅在 $\log_a xy=0$，即 $xy=1$ 时才成立）.

$$\therefore\quad \log_a\frac{1}{x}\log_a\frac{1}{y}\geqslant\log_a\sqrt{\frac{y}{x}}\log_a\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

② 分析：即证 $\log_a(a^m+a^n)-\log_a{}^2\geqslant\frac{m+n}{2}$,

即证 $\log_a\frac{a^m+a^n}{2}\geqslant\frac{m+n}{2}$,

即证 $\frac{a^m+a^n}{2}\geqslant a^{\frac{m+n}{2}}=\sqrt{a^m a^n}$.

根据（算术平均值）$\geqslant$（几何平均值），上式是成立的（等号仅当 $a^m=a^n$，即当 $m=n$ 时才成立）.

习题七答案

1. 设第一项为 a，公比为 d，则

$$\begin{cases}a+58d=70,\\a+65d=84,\end{cases}$$

$\therefore\quad a=-46,\ d=2.$

① $a_{100}=a+99d=152$；

② $-46+2(n-1)>0$，得 $n>24$，即第25项开始出现正数；

③ 求出前24项的和：$\frac{24}{2}[-92+2(24-1)]=-552.$

2. ① 由于24为第9项，设公差为d，则

$24=8+8d,\quad\therefore\quad d=2.$

故所插入的7个数为：10，12，14，16，18，20，22.

② 由$\frac{1}{2}(n+2)(8+24)=400,\quad\therefore\quad n=23.$

即要插入23项.

3. ① (A)的第m项为$a_m=1+3(m-1)=3m-2.$

(B)的第n项为$b_n=11+10(n-1)=10n+1.$

令 $a_m=b_n$，则 $3m-2=10n+1$，

$\therefore\quad n=\frac{3}{10}(m-1).$

求出适合上式的最小的m，n即$m=11$，$n=3$. $a_{11}=b_3=31$. 即(A)和(B)中含有公共数组成第一项为31，公差为30的等差数列.

② 具有公共数的数列的通项为

$31+30(p-1)=30p+1.$

但最大项应满足 $30p+1\leqslant1000,\quad\therefore\quad p\leqslant33.$

故所求和$=\frac{33}{2}[31\times2+30(33-1)]=16863.$

4. ① $a_1=s_1=4+7=11$ (1)

当$n\geqslant2$时，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(4n^2+7n)-[4(n-1)^2+7(n-1)]$$
$$=8n+3. \tag{2}$$

在(2)中令$n=1$便得出(1)，$\therefore$ $\{a_n\}$是第一项为11、公差为8

的等差数列；

② 在此情形，$a_1=S_1=13$，$a_n=8n+3(n\geqslant 2)$，因此，除第一项外，变成等差数列.

5. ① 设公比为 q，由于第 4 项是 5，第 5 项是 80，则 $5q^4=80$.

$\therefore\ q=\pm 2$；故插入的三个数为 10，20，40 或 -10，-20，-40.

② 设第一项为 a，项数为 n，则

$$a\cdot 3^{n-1}=486 \tag{1}$$

$$\frac{a(3^n-1)}{3-1}=728,$$

$$\therefore\ a\cdot 3^n-a=1456. \tag{2}$$

(1) 代入 (2)：

$$486\times 3-a=1456,\qquad \therefore\ a=2.$$

由 (1) $3^{n-1}=243=3^5$，　$\therefore\ n=6$ 即第一项为 2，项数是 6.

③ 设第一项为 a，公比为 q，则：

$$\frac{a(1-q^4)}{1-q}=a(1+q)(1+q^2)=240. \tag{1}$$

$$aq+aq^3=aq(1+q^2)=180. \tag{2}$$

(1) 除以 (2) 得

$$\frac{1+q}{q}=\frac{4}{3},\qquad \therefore\ q=3.$$

代入 (2) 得 $a=6$. 即第一项为 6，公比为 3.

6. ① 当 $x\neq 1$ 时，

$$S_n=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

当 $x=1$ 时，$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

② 第 n 项 $a_n=12\ 12\cdots 12$

$$=12+12\times 10^2+12\times 10^4+\cdots+12\times 10^{2(n-1)}$$

$$=\frac{12(100^n-1)}{100-1}=\frac{12}{99}(100^n-1),$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{12}{99}\left[\sum_{k=1}^{n}100^k-\sum_{k=1}^{n}1\right]$$

$$=\frac{12}{99}\left[\frac{100(100^n-1)}{100-1}-n\right]$$

$$=\frac{1}{99^2}(12\times100^{n+1}-1200-1188n).$$

7. $a_1=\frac{1}{2}$，当 $n\geqslant2$ 时，

$$a_n=\frac{3^n-2^n}{2^n}-\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{2^{n-1}}$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

故第一项为$\frac{1}{2}$，公比为$\frac{3}{2}$的等比数列.

8. 设两次还 x 万元，由于借款本利和与还款本利的和相等，

$$\therefore\quad A(1+i)^{10}=x+x(1+i)+x(1+i)^2+\cdots+x(1+i)^9$$

$$=\frac{x[(1+i)^{10}-1]}{(1+i)-1}=\frac{x[(1+i)^{10}-1]}{i}.$$

答：$\frac{Ai(1+i)^{10}}{(1+i)^{10}-1}$(万元).

9. 用字母 d 来记这一等差数列的公差，那末这数列的第一项、第五项、第十一项可写为：24、$24+4d$、$24+10d$，因为它们成等比数列，所以

$$(24+4d)^2=(24+10d)\cdot24.$$

解这个方程，得：$d_1=0$，$d_2=3$.

由此得到二个数列：

24，24，24，24，24，24，24，24，24，24，24；

24，27，30，33，36，39，42，45，48，51，54.

10. 由关系式

$$9\cdot\frac{1-a_9}{2}=369$$

可求得$a_9=81$．等比数列的公比q可由关系式$81=1\cdot q^8$确定，由此求得：$q=\pm\sqrt{3}$．

所以等比数列的第七项为：

$$a_7=a_1q^6=27.$$

11．用a_1，a_2，a_3表示顺次的三个数，由三数成等比级数得：

$$a_2^2=a_1\cdot a_3.$$

数a_1，a_2+8，a_3由题意成等差数列，因而可写出

$$a_2+8=\frac{a_1+a_3}{2}.$$

最后，a_1，a_2+8，a_3+64组成等比数列，因而又得

$$(a_2+8)^2=a_1(a_3+64).$$

将上面所得的三个方程联立解之，得二组数为：

$$4，12，36；\quad 或\quad \frac{4}{9}，-\frac{20}{9}，\frac{100}{9}.$$

12．以x记所求数，介于3和x之间之数记为y，则三数成一等差数列，于是，

$$y=\frac{3+x}{2}. \tag{1}$$

数3，$y-6$，x根据条件成等比数列，因此可得

$$(y-6)^2=3x. \tag{2}$$

(1)代入(2)，得

$$\left(\frac{3+x}{2}-6\right)^2=3x.$$

解之，得：$x_1=27$，$x_2=3$．

13．设三数顺次为x、y、z，根据条件我们有

$$x+y+z=114,\quad y^2=xz.$$

另一方面，三数又是等差数列的第一、四、二十五项，所以又得：

$$y=x+3d,\quad z=x+24d,$$

d为数列的公差．将z和y的值代入上面所得的方程中，得

$$x(x+3d)+(x+24d)=114, \tag{1}$$

$$(x+3d)^2=x(x+24d) \tag{2}$$

解 (1)、(2)，得：$d_1=0$，$d_2=2x_2$.

将 d_1、d_2 的值代入上面的方程(1)，得

$x_1=38$，$x_2=2$，$d_2=4$.

由此得二组解

$x_1=38$，$y_1=38$，$z_1=38$；

$x_2=2$，$y_2=14$，$z_2=98$.

14. 设等比数列的第一项为 a_1，公比为 q，则

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1},\quad S_{2n}=\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1},\quad S_{3n}=\frac{a_1(q^{3n}-1)}{q-1}.$$

于是，
$$\begin{aligned}S_n^2+S_{2n}^2&=\left[\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}\right]^2+\left[\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1}\right]^2\\&=\left(\frac{a_1}{q-1}\right)^2\left((q^n-1)^2+(q^{2n}-1)^2\right)\\&=\left(\frac{a_1}{q-1}\right)^2(q^{2n}-2q^n+1+q^{4n}-2q^{2n}+1)\\&=\left(\frac{a_1}{q-1}\right)^2(q^{4n}-q^{2n}+2q^n+2).\end{aligned}$$

又因
$$\begin{aligned}S_n(S_{2n}+S_{3n})&=\frac{a_1}{q-1}(q^n-1)\left[\frac{a_1}{q-1}(q^{2n}-1)\right.\\&\qquad\left.+\frac{a_1}{q-1}(q^{3n}-1)\right]\\&=\left(\frac{a_1}{q-1}\right)^2(q^n-1)(q^{3n}+q^{2n}-2)\\&=\left(\frac{a_1}{q-1}\right)^2(q^{4n}+q^{3n}-2q^n-q^{3n}-q^{2n}+2)\\&=\left(\frac{a_1}{q-1}\right)^2(q^{4n}-q^{2n}-2q^n+2),\end{aligned}$$

所以，$S_n^2+S_{2n}^2=S_n(S_{2n}+S_{3n})$.

15. 设方程 $p^2x^2+q^2x+r^2=0$ 的两个根为 x_1，x_2，则

$$x_1+x_2=-\frac{q^2}{p^2}.$$

又设方程 $px^2+qx+r=0$ 的两根为 x_3、x_4，则

$$x_3+x_4=-\frac{q}{p},\quad x_3\cdot x_4=\frac{r}{p},$$

$$x_3^2+x_4^2=(x_3+x_4)^2-2x_3x_4$$

$$=\left(-\frac{q}{p}\right)^2-2\frac{r}{p}=\frac{q^2-2rp}{p^2}.$$

按题意有：$x_1+x_2=x_3^2+x_4^2$，即

$$-\frac{q^2}{p^2}=\frac{q^2-2rp}{p^2},\quad 2q^2=2rp,\quad q^2=rp.$$

故 p、q、r 成等比数列.

16. 利用公式 $a_n=a_1+d(n-1)$，这里 a_1 与 d 分别是数列的首项与公差，因此，

$$a_m+a_n=a_1+d(m-1)+a_1+d(n-1)$$

$$=2a_1+d(m+n-2)$$

$$=2a_1+d(k+l-2)$$

$$=a_1+d(k-1)+a_1+d(l-1)$$

$$=a_k+a_l.$$

17. 因为 a_6 和 a_{15}，以及 a_9 和 a_{12} 是距离数列第一项和第 20 项相等位置的项，所以，

$$a_6+a_{15}=a_9+a_{12}=a_1+a_{20}.$$

由此，　$2(a_1+a_{20})=20$，$a_1+a_{20}=10$，故得

$$S_{20}=\frac{a_1+a_{20}}{2}\cdot 20=10\times 10=100.$$

18. 根据等差数列的性质 $a_2-a_1=a_3-a_2$ 或 $2a_2=a_3+a_1$，用 $2a_2$ 在第一式中代换 a_1+a_3，得

$$a_2=3,\quad a_1+a_3=6.$$

将 a_2 的值代入第二方程中，得 $a_1a_3=5$. 将 $a_1+a_3=6$ 与 $a_1\cdot a_3=5$ 联立求解得 a_1 的两个值 1 与 5，相应地可以求出公差 d 的两个值 2 与 -2. 故符合题意的等差数列有两个：

1，3，5，7，…；

$5, 3, 1, -1, \cdots$.

19. 由等差数列的定义，有

$$a_2 - a_1 = a_4 - a_3 = \cdots = a_{10} - a_9 = d,$$

于是，$a_2 + a_4 + \cdots + a_{10} - a_1 - a_3 - \cdots - a_9$

$$= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{10} - a_9) = 5d.$$

由此，$d = 0.5$. 现从数列的前十项的表达式求它的第一项：

$$S_{10} = 15 + 12.5 = 27.5 = 10a_1 + 9 \times 5 \times 0.5,$$

因而 $a_1 = 0.5$，故所求数列为

$0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5$.

20. 因 $x = \frac{a+b}{2}$，$y = \frac{b+c}{2}$；且 $b^2 = ac$，所以，

$$\frac{a}{x} + \frac{c}{y} = \frac{2a}{a+b} + \frac{2c}{b+c}$$

$$= 2 \cdot \frac{ab + b^2 + ac + bc}{(a+b)(b+c)} \quad (\text{以 } b^2 \text{ 代 } ac)$$

$$= 2 \cdot \frac{(a+b)(c+b)}{(a+b)(b+c)} = 2.$$

21. 因 $a+b+c$，$b+c-a$，$c+a-b$，$a+b-c$ 为等比数列且公比为 q，故

$$b + c - a = q(a+b+c) \qquad (1)$$

$$c + a - b = q^2(a+b+c) \qquad (2)$$

$$a + b - c = q^3(a+b+c) \qquad (3)$$

(1) + (2) + (3)：

$$a + b + c = (q + q^2 + q^3)(a+b+c).$$

因　$a + b + c \neq 0$,

∴　$q + q^2 + q^3 = 1$.

又　$q = \frac{a+b-c}{c+a-b} = \frac{c+a-b}{b+c-a} = \frac{a+b-c+c+a-b}{c+a-b+b+c-a}$

$$= \frac{2a}{2c} = \frac{a}{c}.$$

22. $S_1=a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$,

$$S_2=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}=\frac{n(a_{n+1}+a_{2n})}{2}$$

$$=\frac{n(a_1+a_n)}{2}+n^2d,$$

$$S_3=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}$$

$$=\frac{n(a_{2n+1}+a_{3n})}{2}$$

$$=\frac{n(a_1+a_n)}{2}+2n^2d,\ \cdots,$$

所以　$S_2-S_1=S_3-S_2=\cdots=n^2d$.

因而，　S_1、S_2、$S_3\cdots$成等差数列.

23. 令 a 为等差数列之首项，d 为第四项，则

$d=a+(4-1)(c-b)=a+3(c-b)$,

$a-d=-3(c-b)$　　(1)

$a+d=c+b$　　(2)

(1)×(2)得

$3(b-c)(b+c)=(a-d)(a+d)$,

$3(b^2-c^2)=a^2-d^2$,

$a^2-3b^2+3c^2-d^2=0$. 证毕.

24. 利用公式，$a_p=a_1\cdot q^{p-1}$，这里，a_1 和 q 是数列的首项和公比，得，

$a_m\cdot a_n=a_1\cdot q^{m-1}\cdot a_1\cdot q^{n-1}$

$=a_1^2q^{m+n-2}=a_1^2q^{k+l-2}$

$=a_1q^{k-1}\cdot a_1q^{l-1}=a_k\cdot a_l$. 证毕.

25. 乘开左边的括弧，并利用公式 $y^2=xz$，有

$(x+y+z)(x-y+z)=(x+z)^2-y^2$

$=x^2+2y^2+z^2-y^2=x^2+y^2+x^2$. 证毕.

26. 因为 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n 成等差数列，所以，它的公差

$d=a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}$.

又由　$a_n=a_1+(n-1)d$，知道　$d=\dfrac{a_n-a_1}{n-1}$，故得

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$

$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}+\cdots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{\dfrac{a_n-a_1}{n-1}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}.\text{ 证毕.}$$

27. 因二次方程的判别式

$$\begin{aligned}&(c-a)^2-4(b-c)(a-b)\\=&c^2-2ac+a^2-4ab+4ac+4b^2-4bc\\=&c^2+2ac+a^2-4b(c+a)+4b^2\\=&(c+a)^2-4b(c+a)+4b^2\\=&(c+a-2b)^2=0.\end{aligned}$$

所以， $c+a-2b=0$，

$c-b=b-a$. 证毕.

28. 此方程为双二次方程，故四个根为两对相反数，因此可设方程的四根分别为 $-\beta$、$-\alpha$、α、β. 因为它们成等差数列，则

$$-\alpha=\frac{\alpha-\beta}{2},\text{ 所以 } \beta=3\alpha.$$

于是，四个根依次为 -3α、$-\alpha$、α、3α. 由韦达定理，得

$$\alpha^2\cdot(3\alpha)^2=(\lambda+1)^2,$$

$$9\alpha^4=(\lambda+1)^2,\qquad 3\alpha^2=\pm(\lambda+1),$$

$$\alpha^2=\pm\frac{\lambda+1}{3}. \tag{1}$$

又 $\alpha^2+(3\alpha)^2=3\lambda+4$,

$$10\alpha^2=3\lambda+4. \tag{2}$$

(1)代入(2)，并解之，得

$$\lambda_1=2,\qquad \lambda_2=-\frac{22}{19}.$$

29. 由第五项的系数 $T_5=c_n^4$，第六项的系数 $T_6=c_n^5$，第七项的系数 $T_7=c_n^6$，得

$$2c_n^5=c_n^4+c_n^6,$$

$$\frac{2\cdot n!}{5!(n-5)!}=\frac{n!}{4!(n-4)!}+\frac{n!}{6!(n-6)!}.$$

两边同乘以 $\frac{4!(n-6)!}{n!}(\neq 0)$，得

$$\frac{2}{5(n-5)}=\frac{1}{(n-4)(n-5)}+\frac{1}{30},$$

$$n^2-21n+98=0.$$

所以 $n_1=14$，$n_2=7$.

30. 姑且把数 m 看为 $\frac{3m}{3}$，而数 n 看为 $\frac{3n}{3}$，那么分母为 3 的所有的分数(包含 m 和 n 在内)将组成下列分数数列：

$$\frac{3m}{3},\ \frac{3m+1}{3},\ \frac{3m+2}{3},\ \frac{3m+3}{3},\ \cdots,\ \frac{3n}{3}.$$

在这数列中，$\frac{3m}{3}$，$\frac{3m+3}{3}$……，$\frac{3n}{3}$ 是可约的分数，它们可写为：m，$m+1$，$m+2$，……，n. 因此计算界于数 m 和 n 之间的、所有不可约的分数的和可变为：将分数数列 $\frac{3m}{3}$、$\frac{3m+1}{3}$、…$\frac{3n}{3}$ 的各项和减去数列 $m, m+1, m+2, \cdots, n$ 的各项和. 分数数列是一个第一项为 m，末项为 n，公差 $d=\frac{1}{3}$ 的等差数列. 现求此数列的项数 k：

$$n=m+\frac{1}{3}(k-1),\quad k-1=3(n-m),\quad k=3n-3m+1.$$

由此，分数数列各项和为 $\frac{(m+n)(3n-3m+1)}{2}$.

同样，数列 m，$m+1$，…，n 显然也是一等差数列，它的首项为 m，末项为 n，公差为 1. 求此数列的项数 k'：

$$n=m+k'-1,\qquad k'=n-m+1.$$

由此，这些数之和为：$\frac{(m+n)(n-m+1)}{2}$.

这样，介于 m 和 n 之间分母为 3，且不可约的分数的和为：

$$\frac{(n+m)(3n-3m+1)}{2}-\frac{(n+m)(n-m+1)}{2}=n^2-m^2.$$

31. 我们把 a_n 看为等差数列的第一项，那么 a_{m+n} 就是此数列的第 $m+1$ 项，并且有关系式

$$a_{m+n}=a_n+md.$$

同样，可把 a_m 看为等差数列的第一项，把 a_{m+n} 看为第 $n+1$ 项，则

$$a_{m+n}=a_m+nd.$$

最后把 a_{m-n} 看为数列的第一项，而 a_{m+n} 看为第 $2n+1$ 项，得出

$$a_{m+n}=a_{m-n}+2nd.$$

在所有这些等式中，d 为已知数列之公差.

由这三个方程我们求得：

$$a_m=a_{m+n}-nd=A-nd,\quad a_n=a_{m+n}-md=A-md,$$

$$d=\frac{a_{m+n}-a_{m-n}}{2n}=\frac{A-B}{2n}.$$

将 d 代入前二方程，我们求得

$$a_m=A-nd=A-\frac{A-B}{2}=\frac{A+B}{2},$$

$$a_n=A-md=A-m\frac{A-B}{2n}=\frac{2nA-mA+mB}{2n}$$

$$=\frac{(2n-m)A+mB}{2n}.$$

32. 由等式 $S_m=S_n$ 得出：

$$\frac{2a_1+d(m-1)}{2}\cdot m=\frac{2d_1+d(n-1)}{2}\cdot n,$$

$$2a_1m+d(m^2-m)=2a_1n+d(n^2-n),$$

$$2a_1(m-n)+d(m^2-m-n^2+n)=0,$$

$$2a_1+d(m+n-1)=0\quad(m-n\neq 0).$$

所以 $$S_{m+n}=\frac{2a_1+d(m+n-1)}{2}(m+n)=0.$$

33. 依题意：$\begin{cases} b^2 = ac, \\ a+b+c=62, \\ abc=1000. \end{cases}$

解之得：　$a=50$，$b=10$，$c=2$；或 $a=2$，$b=10$，$c=50$.

34. 利用公式 $S_k=\frac{2a_1+d(k-1)}{2}\cdot k$，根据题给条件，得

$$\frac{[2a_1+d(m-1)]m}{[2a_1+d(n-1)]n}=\frac{m^2}{n^2},$$

$$[2a_1+d(m-1)]n=[2a_1+d(n-1)]m,$$

$$2a_1(m-n)+d[(n-1)m-(m-1)n]=0.$$

因 $m-n\neq0$ 化简上面的等式后，我们求得：$a_1=d/2$. 这样，

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{a_1+d(m-1)}{a_1+d(n-1)}=\frac{d/2+d(m-1)}{d/2+d(n-1)}=\frac{2m-1}{2n-1}.$$

35. 由题意知：

$$b=\frac{a+c}{2}, \tag{1}$$

$$b=\sqrt{ac}. \tag{2}$$

由(1)、(2)得：$\frac{a+c}{2}=\sqrt{ac}$.

把上式两边平方，得：$(a+c)^2=4ac$,

$$a^2+2ac+c^2-4ac=0,$$

$$(a-c)^2=0,\qquad 所以\quad a=c. \tag{3}$$

把(3)代入(1)，得：$b=\frac{a+c}{2}=\frac{a+a}{2}=a$ (4)

由(3)、(4)得　$a=b=c$.

36. 因 a_1，a_2，a_3，…，a_n 成等比数列，

故 $\frac{1}{a_1}$，$\frac{1}{a_2}$，$\frac{1}{a_3}$，…，$\frac{1}{a_n}$也成等比数列，且公比是原等比数列的倒数.

设　a_1，a_2，a_3，…，a_n 的公比为 q，

则 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}$的公比为$\frac{1}{q}$. 于是,

$$S=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \quad k=\frac{\frac{1}{a_1}\left[1-\left(\frac{1}{q}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{q}}=\frac{q^n-1}{a_1q^n}\cdot\frac{q}{q-1}.$$

所以, $\frac{S}{k}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\cdot\frac{a_1q^n}{q^n-1}\cdot\frac{q-1}{q}=a_1\cdot a_1q^{n-1}=a_1a_n$;

$$p^2=(a_1a_2\cdots a_n)^2=(a_1a_2\cdots a_n)(a_n\cdot a_{n-1}\cdots a_1)$$
$$=(a_1a_n)\cdot(a_2a_{n-1})\cdots(a_na_1)$$
$$=(a_1a_n)^n=\left(\frac{S}{k}\right)^n,$$

即 $p^2k^n=S^n$.

37. ① $S_n=\sum_{k=1}^{n}k(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}2k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$$=2\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)[2(2n+1)+3]=\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5).$$

② $a_n=(2n-1)^2$.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+n$$
$$=\frac{1}{3}n(4n^2-1).$$

③ $a_n=n(n+1)(n+2)$.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+3\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\times\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

④ $a_n=(n+1)^2\cdot n$.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)^2=\sum_{k=1}^{n}k^3+2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5).$$

⑤ 原数列变为 2^2，5^2，8^2，11^2，…，

∴ $a_n=(3n-1)^2=9n^2-6n+1$，即可求 S_n.

38. ① 这个数列的后一项减去前一项所得的阶差数列为 2，4，6，8，…它是首项为 2 公差为 2 的等差数列，通项

$$a_n=2+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2-n+2.$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+2)=\frac{1}{3}n(n^2+5).$$

② 阶差为首项是 1，公比是 2 的等比数列，从而

$$a_n=a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$$
$$=5+(1+2+4+\cdots+2^{n-2})=4+2^{n-1}.$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2^{k-1}+4)=\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}4$$

$$=\frac{2^n-1}{2-1}+4n=2^n+4n-1.$$

39. ① 通项 $a_n=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$，

∴ $S_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)\right]$

$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}.$$

② $a_n=\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$，

∴ $S_n=\dfrac{1}{3}\left[\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)\right]$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{n}{2(3n+2)}.$$

③ $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$,

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

40. ① $a_k=k[n-(k-1)]=-k^2+(n+1)k$,

$$S=-\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

② $S=[1^2+2^2+\cdots+(2n)^2]-2[2^2+4^2+\cdots+(2n)^2]$

$$=\sum_{k=1}^{2n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=\sum_{k=1}^{2n}k^2-8\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\frac{1}{6}\times 2n(2n+1)[2(2n)+1]-8\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=-n(2n+1).$$

41. 两个多项式恒等的必要条件是对应项的系数相等.

$$a_1=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

a_2 是 1，2，3，…，n 中两两之积的和，则

$$(1+2+3+\cdots+n)^2=(1^2+2^2+\cdots+n^2)+2a_2,$$

∴ $2a_2=(1+2+3+\cdots+n)^2-(1^2+2^2+\cdots+n^2)$

$$=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)[3n(n+1)-2(2n+1)]$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2-n-2)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n-1)(3n+2),$$

$$a_2=\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2).$$

42. 第 k 列的数的和 $=k(1+2+3+\cdots+n)=\frac{1}{2}kn(n+1)$,

$$\therefore\quad S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}kn(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

由 $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=14400$,

则 $n(n+1)=240=15\times16$, $\quad\therefore\quad n=15.$

43. $S=7(1+11+111+\cdots+\overbrace{11\cdots1}^{n\text{个}})$

$$=\frac{7}{9}(9+99+999+\cdots+\overbrace{99\cdots9}^{n\text{个}})$$

$$=\frac{7}{9}\{(10-1)+(100-1)+\cdots+(10^n-1)\}$$

$$=\frac{7}{9}(10+10^2+10^3+\cdots+10^n-n)$$

$$=\frac{7}{9}\left(\frac{10}{9}(10^n-1)-n\right)$$

$$=\frac{7}{81}(10^{n+1}-10-9n).$$

44. 根据题给条件分组，那末推出第 n 组的最后一个自然数为 $\frac{n(n+1)}{2}$. 又公差为 1，项数为 n，故第 n 组的首项为：

$$\frac{n(n+1)}{2}-(n-1).$$

因此，第 n 组的 n 个数的和为

$$S=n\frac{\left[\frac{n(n+1)}{2}-(n-1)+\frac{n(n+1)}{2}\right]}{2}$$

$$=\frac{n(n^2+n-n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(n^3+n).$$

45. 因奇数列为等差数列，所以，各组数分别都是等差数列，公差为 2，各组首项的通项为：

$$1+2[1+2+3+\cdots+(n-1)]=1+\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)+1,$$

各组末项的通项为：

$$1+n(n-1)+2(n-1)=n^2+n-1.$$

所以第 n 组内数之和：

$$S=\frac{n[n(n-1)+1+n^2+n-1]}{2}$$

$$=\frac{2n^3}{2}=n^3.$$

即每组内各数之和等于其组之顺序号的立方.

46. $49=7^2$,

$4489=67^2$,

$444889=667^2$, $\cdots$

$$\overbrace{44\cdots4}^{n个4}\overbrace{88\cdots\cdots8}^{(n-1)个8}9$$

$$=\overbrace{44\cdots4}^{n个4}\overbrace{88\cdots8}^{n个8}+1$$

$$=4(\overbrace{11\cdots1}^{n个1}\overbrace{22\cdots2}^{n个2})+1$$

$$=4\left(\frac{\overbrace{33\cdots3}^{n个3}}{3}\times10^n+2\cdot\frac{\overbrace{33\cdots3}^{n个3}}{3}\right)+1$$

$$=4\left[\overbrace{33\cdots3}^{n个3}\left(\frac{10^n}{3}+\frac{2}{3}\right)\right]+1$$

$$=4\left[\overbrace{33\cdots3}^{n个3}\left(\frac{10^n-1}{3}+1\right)\right]+1$$

$$=4\left[\overbrace{33\cdots3}^{n个3}(\overbrace{33\cdots3}^{n个3}+1)\right]+1$$

$$=4\left[(\overbrace{33\cdots3}^{n个3})^2+\overbrace{33\cdots3}^{n个3}\right]+1$$

$$=(2\cdot\overbrace{33\cdots3}^{n个3})^2+2\cdot(2\cdot\overbrace{33\cdots3}^{n个3})+1$$

$$=(\overbrace{66\cdots6}^{n个6}+1)^2=(\overbrace{66\cdots\cdots6}^{(n-1)个6}7)^2.$$

47. 设数列前 n 项和为 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$，则

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}},$$

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}$$

$$=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}.$$

所以， $S_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{2+n}{2^n}<2$. 证毕.

48. 因 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,

将 1、2、3、…、n 顺次代入，则得

$$1=\frac{1\times2}{2},\qquad 1+2=\frac{2\times3}{2},$$

$$1+2+3=\frac{3\times4}{2},\ \cdots,$$

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

把上面几个等式相加，

$$S=\frac{1}{2}[1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)].$$

49. 由 $(n-1)^4=n^4-4n^3+6n^2-4n+1$ 得

$$n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1.$$

因为上式是恒等式，分别取 $n=1, 2, 3, \cdots, n$，则有：

$$1^4-0^4=4\times1^3-6\times1^2+4\times1-1,$$

$$2^4-1^4=4\times2^3-6\times2^2+4\times2-1,$$

$$3^4-2^4=4\times3^3-6\times3^2+4\times3-1,\ \cdots,$$

$$n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1.$$

将这 n 个等式两边相加：

$$n^4=4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)-6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$
$$+4(1+2+3+\cdots+n)-n,$$

所以，
$$4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$$
$$=(n^4+n)+6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=n(n+1)[n^2-n+1+2n+1-2]$$
$$=n(n+1)\cdot n(n+1)=n^2(n+1)^2,$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

本题亦可仿照例 4 的解法或用数学归纳法来解.

50. ① $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+(-1)^n n}{2n^2-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^n\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}$;

② $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$;

③ $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})$

$=2\lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\right]$

$=2\lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right]$

$=0$;

④ 因 $0<\dfrac{n!}{n^n}<\dfrac{2}{n^2}$ （当 $n>3$），故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$；

⑤ 因 $1+q+\cdots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$，$1+p+\cdots+p^n=\dfrac{1-p^{n+1}}{1-p}$，

当 $|p|<1$，$|q|<1$ 时，立即得

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+q+\cdots+q^n}{1+p+\cdots+p^n}=\dfrac{1-p}{1-q}$；

⑥ 因 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$，

$2+4+\cdots+2n=n(n+1)$，

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n}{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=-1$；

⑦ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)\cdot n\cdot\sin\dfrac{1}{n}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}=1$；

⑧ $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}2^{1-\frac{1}{2^n}}=2$；

⑨ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\text{;}$$

⑩ 由 $a_n=0.99\cdots9=1-\frac{1}{10^n}$得

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

51. 因 $\angle CAD=\angle C_1DD_1=\angle C_2D_1D_2=\cdots=\angle DCC_1$
$=\angle D_1C_1C_2=\angle D_2C_2C_3=\cdots=\alpha$,

于是，由$\triangle ADC$，$\triangle DCC_1$，$\triangle C_1DD_1$，…有

$CD=b\sin\alpha$;

$C_1D=CD\sin\alpha=b\sin^2\alpha$;

$C_1D_1=C_1D\sin\alpha=b\sin^3\alpha$; ….

$$CD+C_1D+C_1D_1+C_2D_1+\cdots$$
$$=b(\sin\alpha+\sin^2\alpha+\sin^3\alpha+\cdots)$$
$$=\frac{b\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\quad(0<\sin\alpha<1).$$

52. 所有三角形面积的总和为

$$S=\frac{\sqrt{3}}{2^2}a^2+\frac{(\sqrt{3})^3}{2^4}a^2+\frac{(\sqrt{3})^5}{2^6}a^2+\cdots$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(1+\frac{(\sqrt{3})^2}{2^2}+\frac{(\sqrt{3})^4}{2^4}+\cdots\right)$$
$$=\sqrt{3}a^2.$$

53. 所有圆面积的总和为：

$$S_1=\pi R^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)=2\pi R^2.$$

所有正方形面积的总和为：

$$S_2=\left(\frac{2R}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{2R}{(\sqrt{2})^2}\right)^2+\left(\frac{2R}{(\sqrt{2})^3}\right)^2+\cdots$$

$$=4R^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right)=4R^2.$$

54. 设等腰直角三角形的底边长为 2，将底边 $2n$ 等分后，$\triangle ABC$ 的面积与内接台阶形的面积之差为

$$p_n=1-2\cdot\frac{1}{n^2}\cdot[1+2+3+\cdots+(n-1)]$$

$$=1-\frac{n(n-1)}{n^2},$$

当 $n\to\infty$ 时，$p_n\to 0$.

55. ① 记 $a_n=\frac{2^n}{n!}$. 显然，$a_{n+1}=a_n\cdot\frac{2}{n+1}$,

故变量 a_n 是单调减少；另方面，又有 $a_n>0$. 因此，变量 a_n 一定有极限，把它记为 b. 因 a_{n+1} 与 a_n 取值于同一数列，于是有

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1},$$

即 $\quad b=b\cdot 0,$

由此得 $\quad b=0$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0.$

② 因 $A\leqslant\sqrt[n]{A^n+B^n}\leqslant\sqrt[n]{2}\,A$, 又 $2^{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$,

故 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A^n+B^n}=A.$

③ 因 $\frac{3}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{5^2}\cdots$

$$\frac{(n-1)^2-1}{(n-1)^2}\cdot\frac{n^2-1}{n^2}$$

$$=\frac{3}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdot\frac{(4-1)(4+1)}{4^2}\cdot\frac{(5-1)(5+1)}{5^2}$$

$$\cdots\frac{(n-2)\cdot n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

所以 $$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.$$

④ 由 $S_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}$

$$+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right),$$ 得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}.$$

⑤ 因 $arc\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)=arc\,\mathrm{tg}\left[\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}\right]$

$=arc\mathrm{tg}(n+1)-arc\mathrm{tg}\,n$，所以，

$$\sum_{n=1}^{\infty}arc\mathrm{tg}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left(arc\mathrm{tg}(n+1)-arc\mathrm{tg}n\right)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(arc\mathrm{tg}(m+1)-arc\mathrm{tg}\,1\right)=\frac{\pi}{4}.$$

⑥ 由已知的不等式

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}\quad(a\neq b)$$

及 $a_1<a$ 与 $b_1>b$，有

$$a>a_1>b_1>b;$$

对于数 a_2 及 b_2，如上所述，亦有

$$a_1>a_2>b_2>b_1;$$

仿此，对数 a_n 及 b_n，也有

$$a_n>a_{n+1}>b_{n+1}>b_n.$$

由此可知，其中第一个变量 a_n 是减小的，而第二个变量 b_n 是增大的. 同时 $a_n<a$，$b_n>b$，这就是说，两变量都是有界的，故二者都趋向有限的极限：

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha \text{ 及 } \lim_{n\to\infty}b_n=\beta.$$

若在等式 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ 中取极限，则得 $\alpha=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，由此 $\alpha=\beta$.

证毕.

56. ① 不存在；② 不一定；③ 不一定.

57. $$\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\cdots}}}}=3^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2^2}}\cdot 3^{\frac{1}{2^3}}\cdot 5^{\frac{1}{2^4}}\cdots$$

$$=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots}\cdot 5^{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots}=3^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{45}.$$

58. 令 $$\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}}_{n\text{ 重根号}}=t_n,$$

显然，　$t_n>t_{n-1}$，$t_n<2$.

由　$t_n^2=1+t_{n-1}$，记　$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\alpha$，经取极限便得

$$\alpha^2=1+\alpha,\text{ 解出 }\quad \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\text{（取正值）}.$$

59. ① $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}=\frac{a}{2};$$

② 令$\sqrt[n]{1+x}-1=y$，于是 $x=(1+y)^n-1$，因而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{(1+y)^n-1}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{ny+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\cdots+y^n}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{n+\frac{n(n-1)}{2!}y+\cdots+y^{n-1}}=\frac{1}{n};$$

③ $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\cdots+(x+50)^{10}}{x^{10}+5^{10}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}+\left(1+\frac{2}{x}\right)^{10}+\cdots+\left(1+\frac{50}{x}\right)^{10}}{1+\left(\frac{5}{x}\right)^{10}}$$

$$=\frac{50}{1}=50;$$

④ $$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}=\frac{m}{n};$$

⑤ $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2-(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(x-1)(x+1)}=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{2};$$

⑥ $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(x^n)}{x^n}\cdot\frac{x^n}{x^m}\cdot\frac{x^m}{(\sin x)^m}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{x^n}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^m=\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m}$$

$$=\begin{cases}0 & (\text{当 } n>m),\\ 1 & (\text{当 } n=m),\\ \infty & (\text{当 } n<m);\end{cases}$$

⑦ $\lim\limits_{t\to a}\left(\sin\dfrac{t-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi t}{2a}\right)$

$\xlongequal{令 t=a+u}\lim\limits_{u\to 0}\left[\sin\dfrac{u}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2a}(u+a)\right]$

$=\lim\limits_{u\to 0}\left[\sin\dfrac{u}{2}\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi u}{2a}\right)\right]=\lim\limits_{u\to 0}\left[\sin\dfrac{u}{2}\cdot\left(-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi u}{2a}\right)\right]$

$=-\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{u}{2}}{\dfrac{u}{2}}\cdot\dfrac{\dfrac{\pi u}{2a}}{\sin\dfrac{\pi u}{2a}}\cdot\dfrac{a}{\pi}\cdot\cos\dfrac{\pi u}{2a}\right)=-\dfrac{a}{\pi}$;

⑧ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[-2\dfrac{\sin a\sin x}{x}\right]$

$=-2\sin a\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=-2\sin a$;

⑨ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg}x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=0$;

⑩ 如果 $0<a<1$，则

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{1+a^x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}a^x}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+a^x)}=\dfrac{0}{1}=0$,

如果 $a=1$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{1+a^x}=\dfrac{1}{2}$,

如果 $a>1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{1+a^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+a^{-x}}=1$;

⑪ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})}{(1-x)^3}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})}{(1-x)^3(1+\sqrt{x})}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(1-\sqrt[4]{x})}{(1-x)^2(1+\sqrt{x})(1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-x)(1+\sqrt{x})(1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})(1+\sqrt[4]{x})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(1+\sqrt{x})(1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})(1+\sqrt[4]{x})(1+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{1}{24};$$

⑫ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}=\frac{1}{2}.$$

习题八答案

1. ① 若没有任何三点在一直线上时，则 n 个点可联成 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ 条不同的直线；其中 m 个点就可以连成 $\frac{m(m-1)}{2}$ 条直线，由题设，这 $\frac{m(m-1)}{2}$ 条合成一条．所以共有 $\frac{n(n-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}+1$ 条不同的直线．②同理于①，不同三角形的数目等于 $C_n^3-C_m^3$．因为这时 C_m^3 个三角形各自缩成了一条线段．

2. 当 $n\geqslant2$，$P\leqslant n+m$ 时，问题有解，这时可以按照所含白球的数目，将 P 个球的组合分成类，先看含 K 个白球，$P-K$ 个黑球的

类，其中 $K\leqslant n$，因为从 m 个黑球里取出 $P-K$ 个，必须 $P-K\leqslant m$，就是 $K\geqslant P-m$；因此所允许的 K 值，由条件 $P-m\leqslant K\leqslant n$ 及 $2\leqslant K\leqslant P$ 来确定．从 n 个白球里取 K 个的方法有 C_n^K 种，可以将取出来的每 K 个白球，用 C_m^{P-K} 种不同方法和 $P-K$ 个黑球结合，这样，我们所讨论的这一类里有 $C_n^KC_m^{P-K}$ 个不同的组合．令 $K=2,\ 3,\ \cdots\cdots$，则得到 $C_n^2C_m^{P-2}+C_n^3C_m^{P-3}+\cdots\cdots=\sum C_n^KC_m^{P-K}$ 种不同的可能组合

3．先求当元素 1，2，…，K 占有 K 个相连位置时，不同的排列数，设这组元素 1，2，…，K 所占位置是自第 m 位开始的，由元素 1，2，…，K 在指定的这些位置上作所有可能的全排列，而对其余 $n-K$ 个元素也作所有可能的全排列，由此可知这样的所有可能全排列数等于 $K!\ (n-K)!$，但 m 可能是 1，2，…，$(n-K+1)$ 中的一个，因此，所求的全排列数是 $(n-K+1)K!\ (n-K!\ )=K!\ (n-K+1)!$，而剩下的全排列数是 $n!\ -K!\ (n-K+1)!$．

4．由这五个数码可以有 $A_5^5=5!$ 种不同的排列，这些排列，除了第一数码为零的排列外，给出了所有可能的五位数，而第一数码为零的这些排列数等于 A_4^4．所以由这些数码可以组成 $A_5^5-A_4^4=5!-4!=96$ 个不同的五位数．由 0，1，2，3，4 可能组成的不同的四位数的个数等于 A_5^4 减去其中第一数码为 0 的排列数，即 $A_5^4-A_4^3=5\cdot4\cdot3\cdot2-4\cdot3\cdot2=96$．同样可知，不同的三位数，二位数，一位数的个数，分别等于 $A_5^3-A_4^2=48$，$A_5^2-A_4^1=16$，4．故一共可得到符合条件的 260 个自然数．

5．由条件②、③得知，这种数的整数部分有四位，小数部分只有十分位的正的带小数，它的十分位不是 0，应是 1 …… 9 中任一个，所以有 $C_9^1=9$ 个可能情形，又它的千位数也不可能是 0，再由条件①可知千位数有 $C_8^1=8$ 个可能情形，中间三数共有 A_8^3 个排法，所以满足这三个条件的数有：$C_9^1\cdot C_8^1\cdot A_8^3=9\times8\times8\times7\times6=24192$（个）．

6．奇数计有 1，3，5，7，四字．偶数计有 2，4，6，8 四字，可用为第一位者有四字，则可用为第三位者有三字，可用为第五位者有二字，可用为第二位者有五字，可用为第四位者有四字，则可作不同

之数共计有：$4\cdot3\cdot2\cdot5\cdot4=480$（个）.

7. 白球自 A 取出后再回 A 之机会

$$\frac{C_4^2}{C_5^4}\cdot\frac{C_8^2}{C_9^3}=\frac{\frac{4\cdot3}{1\cdot2}}{\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}}\cdot\frac{\frac{8\cdot7}{1\cdot2}}{\frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3}}=\frac{1}{5}.$$ 白球始终未出 A 之机

会 $\frac{C_4^3}{C_5^3}=\frac{\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}}{\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}}=\frac{2}{5}$. 故白球在 A 之机会 $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

8. 数字 1，2，3，4，5，6，7，8，9，0 中为奇数者 1，3，5，7，9. 为偶数者 2，4，6，8，0. 当千位数为奇数时并且在 3000 至 8000 间之奇数计有，$3\cdot8\cdot7\cdot4=672$；当千位数为偶数时并且在 3000 至 8000 之间的奇数计有 $2\cdot8\cdot7\cdot5=560$. 所以在 3000 至 8000 间数字不重复之奇数计有 $672+560=1232$ 个，其中能被 5 整除者，个位必为 5，千位只能是 3、4、6 或 7，百位、十位可在余下的八个数码中任取两个排列，故可被 5 整除者的总数为：$A_4^1\cdot A_8^2=4\cdot8\cdot7=224$.

9. 用 Q 表示安排第一轮比赛的方法的种数，先设将 n 次比赛编号，分别称为第一次，第二次，第三次，…，第 n 次，则安排第一次比赛共有 C_{2n}^2 种方法. 安排第二次比赛有 C_{2n-2}^2 种方法，…. 安排第 n 次比赛有 C_2^2 种方法. 但实际安排时不考虑各场比赛的先后次序，所以

$$\begin{aligned}Q&=\frac{C_{2n}^2\cdot C_{2n-2}^2\cdots\cdots C_2^2}{P_n}\\&=\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots4\times3\times2\times1}{2^nP_n}\\&=1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1).\end{aligned}$$

10. 若取出之球不投入则，A 获胜之机会为：

$$\frac{C_4^1}{C_{12}^1}+\frac{C_8^1}{C_{12}^1}\times\frac{C_7^1}{C_{11}^1}\cdot\frac{C_6^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_4^1}{C_9^1}+\frac{C_8^1}{C_{12}^1}\cdot\frac{C_7^1}{C_{11}^1}\cdot\frac{C_6^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_5^1}{C_9^1}\cdot\frac{C_4^1}{C_8^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_7^1}\cdot\frac{C_4^1}{C_6^1}$$

$$=\frac{4}{12}+\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}$$

$$\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{56}{495}+\frac{2}{99}=\frac{231}{495}.$$

B 获胜之机会为：

$$\frac{C_1^8}{C_1^{12}}\cdot\frac{C_1^4}{C_1^{11}}+\frac{C_1^8}{C_1^{12}}\cdot\frac{C_1^7}{C_1^{11}}\cdot\frac{C_1^6}{C_1^{10}}\cdot\frac{C_1^5}{C_1^9}\cdot\frac{C_1^4}{C_1^8}$$

$$+\frac{C_1^8}{C_1^{12}}\times\frac{C_1^7}{C_1^{11}}\cdot\frac{C_1^6}{C_1^{10}}\cdot\frac{C_1^5}{C_1^9}\cdot\frac{C_1^4}{C_1^8}\cdot\frac{C_1^3}{C_1^7}$$

$$\cdot\frac{C_1^2}{C_1^6}\cdot\frac{C_1^4}{C_1^5}$$

$$=\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{11}+\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{8}{12}$$

$$\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}$$

$$=\frac{8}{33}+\frac{7}{99}+\frac{4}{495}=\frac{159}{495}.$$

C 获胜之机会为：

$$\frac{C_1^8}{C_1^{12}}\cdot\frac{C_1^7}{C_1^{11}}\cdot\frac{C_1^4}{C_1^{10}}+\frac{C_1^8}{C_1^{12}}\cdot\frac{C_1^7}{C_1^{11}}\cdot\frac{C_1^6}{C_1^{10}}\cdot\frac{C_1^5}{C_1^9}$$

$$\cdot\frac{C_1^4}{C_1^8}\times\frac{C_1^4}{C_1^7}+\frac{C_1^8}{C_1^{12}}\cdot\frac{C_1^7}{C_1^{11}}\cdot\frac{C_1^6}{C_1^{10}}\cdot\frac{C_1^5}{C_1^9}$$

$$\cdot\frac{C_1^4}{C_1^8}\cdot\frac{C_1^3}{C_1^7}\cdot\frac{C_1^2}{C_1^6}\cdot\frac{C_1^1}{C_1^5}\cdot\frac{C_1^4}{C_1^4}$$

$$=\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}\cdot\frac{4}{10}+\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}$$

$$\cdot\frac{4}{7}+\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}$$

$$=\frac{28}{165}+\frac{4}{99}+\frac{1}{495}=\frac{105}{495}.$$

若取出之球随即投入，则

A 获胜之机会为：

$$\frac{C_1^4}{C_1^{12}}+\left(\frac{C_1^8}{C_1^{12}}\right)^3\cdot\frac{C_1^4}{C_1^{12}}+\left(\frac{C_1^8}{C_1^{12}}\right)^6\frac{C_1^4}{C_1^{12}}+\cdots$$

$$=\frac{4}{12}+\left(\frac{8}{12}\right)^3\cdot\frac{4}{12}+\left(\frac{8}{12}\right)^6\cdot\frac{4}{12}+\cdots$$

$$\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{8}{27}}=\frac{9}{19}.$$

B 获胜之机会为：

$$\frac{C_1^8}{C_1^{12}}\cdot\frac{C_1^4}{C_1^{12}}+\left(\frac{C_1^8}{C_1^{12}}\right)^4\frac{C_1^4}{C_1^{12}}+\left(\frac{C_1^8}{C_1^{12}}\right)^7\cdot\frac{C_1^4}{C_1^{12}}+\cdots$$

$$=\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{12}+\left(\frac{8}{12}\right)^4\cdot\frac{4}{12}+\left(\frac{8}{12}\right)^7\cdot\frac{4}{12}+\cdots$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{7}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots\right]=\frac{6}{19}.$$

C 获胜之机会为：

$$1-\frac{9}{19}-\frac{6}{19}=\frac{4}{19}.$$

11. $(3.02)^4=\left(3+\frac{2}{100}\right)^4$

$$=3^4+4\times3^3\times\frac{2}{100}+6\times3^2\times\left(\frac{2}{100}\right)^2$$

$$+4\times3\times\left(\frac{2}{100}\right)^3+\left(\frac{2}{100}\right)^4$$

$$=81+2.16+0.0216+\cdots\cdots\approx83.1816.$$

因而其误差小于$\frac{1}{1000}$的答案有两个：

83.182 是过剩近似值，83.181 是不足近似值.

12. 因 $101=99+2$，故

$$101^{10}=(99+2)^{10}=99^{10}+C_{10}^{1}99^{9}\cdot 2^{1}+\cdots+C_{10}^{9}99\cdot 2^{9}+2^{10}$$
$$=99(99^{9}+C_{10}^{1}99^{8}\cdot 2+\cdots+C_{10}^{9}\cdot 2^{9})+2^{10}.$$

由于 99 可被 11 整除，所以 $99(99^{9}+C_{10}^{1}99^{8}\cdot 2+\cdots+C_{10}^{9}\cdot 2^{9})$ 可被 11 整除，因此，以 11 除 101^{10} 所得的余数就是 11 除以 2^{10} 所得的余数．又因 $2^{10}=1024=11\times 93+1$.

所以 11 除 101^{10} 所得余数是 1．

13. 因为二项式展开式中的所有奇数项的系数和等于所有偶数项的系数和，所以这个展开式的所有偶数项的系数和与所有的奇数项的系数和都为 1024，因之它的所有项的系数和应为

$$2\times 1024=2048.$$

由方程 $2^{n}=2048$，得 $n=11$.

因为 $(\sqrt[3]{x^{-1}}-\sqrt[5]{x^{-2}})^{11}$ 展开式中共有 12 项，所以其中第六、七项为中间项，即：

$$T_{6}=C_{11}^{5}\cdot(\sqrt[3]{x^{-1}})^{11-5}(-\sqrt[5]{x^{-2}})^{5}=-462x^{-4}=-\frac{462}{x^{4}}.$$

$$T_{7}=C_{11}^{6}(\sqrt[3]{x^{-1}})^{11-6}(-\sqrt[5]{x^{-2}})^{6}=462x^{-\frac{61}{15}}=\frac{462\sqrt[15]{x^{14}}}{x^{5}}.$$

14. 解一 因为 $(1+x)^{3}+(1+x)^{4}+(1+x)^{5}+\cdots+(1+x)^{n+2}$

$$=\frac{(1+x)^{3}[(1+x)^{n}-1]}{(1+x)-1}=\frac{1}{x}[(1+x)^{n+3}-(1+x)^{3}].$$

所以展开式里含 x^{2} 项的系数是

$$C_{n+3}^{3}-1=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!}-1=\frac{n^{3}+6n^{2}+11n}{6}.$$

解二 $(1+x)^{3}+(1+x)^{4}+(1+x)^{5}+\cdots+(1+x)^{n+2}$ 展开式里 x^{2} 项的系数是 $C_{3}^{2}+C_{4}^{2}+C_{5}^{2}+\cdots C_{n+2}^{2}$．根据组合性质 $C_{m}^{n-1}=C_{m+1}^{n}-C_{m}^{n}$，上式可以写成 $(C_{4}^{3}-C_{3}^{3})+(C_{5}^{3}-C_{4}^{3})+(C_{6}^{3}-C_{5}^{3})+\cdots+(C_{n+3}^{3}-C_{n+2}^{3})$，即 $C_{n+3}^{3}-1$，于是所求的 x^{2} 项的系数是

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}-1=\frac{n^{3}+6n^{2}+11n}{6}.$$

15. $0.2^{\sqrt{x}}=0.008$，两边同时取常用对数得：

$$\sqrt{a}\lg 0.2=\lg 0.008,\ \sqrt{a}\lg 0.2=3\lg 0.2,\ a=9.$$

又由 $\lg(2b+6)+\lg 5=3-\lg 2\frac{1}{2}$，得：

$$\lg 5(2b+6)=\lg 1000-\lg\frac{5}{2}=\lg\frac{1000}{\frac{5}{2}},$$

$$5(2b+6)=\frac{1000}{\frac{5}{2}}=\frac{2000}{5}=400,$$

$$2b+6=80,\ b=\frac{80-6}{2}=37.$$

再由二项式$\left[z+\frac{1}{z}\right]^6$之展开式中项是第四项，得：

$$T_{3+1}=C_6^3\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^3\cdot z^{6-3},\quad C_6^3=\frac{6\times5\times4}{3\cdot2\cdot1}=20,$$

$$C=\frac{1}{5}\times20=4.$$

总结以上关系，按题意得：$ax^4+bx^2+C=0$，即

$$9x^4+37x^2+4=0.$$

解之得， $x=\pm\frac{1}{3}i$ 或 $x=\pm2i$.

16. 因 n 是正奇数，故 $(1+x)^n$ 展开式的中间两项的系数相等并且为最大，即 $C_n^{\frac{n+1}{2}}=C_n^{\frac{n-1}{2}}$.

$$C_n^{\frac{n+1}{2}}=\frac{n!}{\left(\frac{n+1}{2}\right)!\left(n-\frac{n+1}{2}\right)!}$$

$$=\frac{n!}{\left(\frac{n+1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$$

$$=\frac{(1\cdot3\cdot5\cdots n)\left[2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]}{\left(\frac{n+1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots\cdots n}{\left(\frac{n+1}{2}\right)!} \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots\cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots \left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$$

17. 第 $r+1$ 项 $= C_{18}^{r}(9x)^{18-r}\left(-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{r}$

$$= C_{18}^{r} \times 9^{18-r}(-1)^{r}\left(\frac{1}{3}\right)^{r} \cdot x^{18-r-\frac{1}{2}r}$$

设 $18-r-\frac{1}{2}r=0$，则 $r=12$，因而所求的常数项为：

第十三项 $= (-1)^{12} \cdot C_{18}^{12} \times 9^{18-12} \times \frac{1}{3^{12}}$

$$= C_{18}^{6} \times 9^{6} \times \frac{1}{3^{12}} = C_{18}^{6}$$

$$= \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 18564.$$

18. 因 $\left(\frac{1}{25^{3}}\right)^{\log_5 9} = (5^{-6})^{\log_5 9} = (5^{\log_5 9})^{-6} = 9^{-6} = 3^{-12}$，又这个展开式的末项是 $(-1)^{6n} \cdot (\sqrt[3]{3^{-2}})^{6n} = 3^{-4n}$，故得：

$3^{-4n} = 3^{-12}$，$n=3$.

于是第七项应为：

$$T_7 = C_{18}^{6}(\sqrt[4]{27})^{18-6}(-\sqrt[3]{3^{-2}})^{6}$$

$$= C_{18}^{6} \cdot 27^{3} \cdot 3^{-4} = 4511052.$$

19. 设 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{15}$ 展开式中含 x^3 项是第 $r+1$ 项，

则 $T_{r+1} = C_{15}^{r}(\sqrt{x})^{15-r}\left(\frac{1}{x}\right)^{r} = C_{15}^{r}\, x^{\frac{15-3r}{2}}$.

令 $\frac{15-3r}{2}=3$，则 $r=3$.

所以展开式中含 x^3 项的系数是 $C_{15}^{3}=455$.

再设在 55，555 之间插入 n 个等差中项，其最末一个是 455，于是这个等差数列的公差是：$555-455=100$.

又由 $555=55+(\overline{n+2}-1)\cdot 100$. 解得 $n=4$，所以在 55，555 之间插入 4 个即可.

20. 在这个展开式中第五、六、七项的系数分别是 C_n^4，C_n^5，C_n^6，由已知条件可得：

$$2C_n^5=C_n^4+C_n^6,$$

$$\frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-5)}{6!},$$

$$\frac{2(n-4)}{5}=1+\frac{(n-4)(n-5)}{5.6},$$

$$n^2-21n+98=0,$$

解之得 $n=7$ 或 14.

当 $n=7$ 时，设第 $r+1$ 项不含 x 项，则：

$$Tr_{+1}=C_7^r(\sqrt[3]{x^{-4}})^{7-r}\cdot x^r=C_7^r x^{\frac{7r-28}{3}},$$

$$\frac{7r-28}{3}=0,\qquad r=4.$$

故 $\qquad T_5=C_7^4=35$ 为所求；

当 $n=14$ 时：设第 $S+1$ 项不含 x 项，则：

$$T_{S+1}=C_{14}^S(\sqrt[3]{x^{-4}})^{14-S}\cdot x^S=C_{14}^S x^{\frac{7S-56}{3}}$$

$$\frac{7S-56}{3}=0,\qquad S=8.$$

故 $\qquad T_9=C_{14}^8=3003$ 为所求.

21. $(1+a_1)$ 的各项系数和是 2；

$(1+a_2)^2$ 的各项系数和是 2^2；

$(1+a_3)^3$ 的各项系数和是 2^3；…，

$(1+a_n)^n$ 展开式的各项系数和是 2^n.

所以 $(1+a_1)(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(a_n+1)^n$ 的展开式的所有项的系数之和是

$$2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdots 2^n=2^{1+2+3+4+\cdots+n}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

22. 展开式中第八项:

$$T_8=C_9^7(\sqrt[3]{36})^{9-7}(-\sqrt[7]{6^x})^7=-6^2\cdot 6^{\frac{4}{3}+x}=-6^{\frac{10}{3}+x}.$$

又 $6^{-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)\log_5\frac{27}{8}}=6^{-\left(5^{-\frac{1}{3}}\right)\log_5\frac{27}{8}}=6^{-5^{-\frac{1}{3}\log_5\frac{27}{8}}}$

$$=6^{-\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}}=6^{-\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}}=6^{-\frac{2}{3}}.$$

由题设得 $-6^{\frac{10}{3}+x}=-6^{-\frac{2}{3}}$,

$$\frac{10}{3}+x=-\frac{2}{3},\qquad x=-4.$$

23. 显然 $(ax+1)^8$ 展开式中含 x^4 项是第五项,

$T_5=C_8^4(ax)^{8-4}=C_8^4a^4x^4$; 又 $(x+a)^9$ 展开式中含 x^4 项是第六项,

$$T_6=C_9^5x^{9-5}a^5=C_9^5a^5x^4.$$

从已知条件得:

$$C_8^4a^4=C_9^5a^5,\qquad 70\,a^4=126\,a^5.$$

因 $a\neq 0$, 所以 $126\,a=70$, 即 $a=\frac{5}{9}$.

24. $(ax+1)^{2n}$ 展开式中 x^n 项为第 $n+1$ 项,

即 $C_{2n}^n(ax)^n$; 又 $(x+a)^{2n+1}$ 展开式中 x^n 项是第 $n+2$ 项,

即 $C_{2n+1}^{n+1}a^{n+1}x^n$. 依题意有 $C_{2n}^na^n=C_{2n+1}^{n+1}a^{n+1}$, 解得 $\frac{1}{a}$后, 再代入所给方程中验算, 即得证明.

25. 左 $=C_n^1-2\,C_n^2+3\,C_n^3\cdots\cdots-(-1)^nnC_n^n$

$$=n-n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$+\cdots-(-1)^n\left[\frac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}\right]=n\left[C_{n-1}^0-C_{n-1}^1+\right.$$

$C_{n-1}^{2}+\cdots-(-1)^{n}C_{n-1}^{n-1}]=n\times 0=0.$

26. 左 $=\dfrac{m+1}{1}+\dfrac{m(m+1)}{2!}+\cdots+\dfrac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}$

$$=\frac{2(m+1)+m(m+1)}{2!}+\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}+\cdots$$

$$+\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)}{2!}+\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}+\cdots$$

$$+\frac{m(m+1)\cdots\cdots(m+n-1)}{n!}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3!}+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4!}$$

$$+\cdots+\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}$$

$$=\cdots\cdots=\frac{(m+1)(m+2)\cdots\cdots(m+n)}{n!}.$$

27. $S_n=m!+\dfrac{(m+1)!}{1!}+\dfrac{(m+2)!}{2!}+\cdots\cdots+\dfrac{(m+n)!}{n!}$

$$=m!\left[1+\frac{m+1}{1!}+\frac{(m+1)(m+2)}{2!}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}{n!}\right]$$

$$=m!\,(C_m^0+C_{m+1}^1+C_{m+2}^2+\cdots+C_{m+n}^n).$$

$C_m^0=C_{m+1}^0$, $C_{m+1}^1=C_{m+2}^1-C_{m+1}^0$,

$C_{m+2}^2=C_{m+3}^2-C_{m+2}^1$, $\cdots$, $C_{m+n}^n=C_{m+n+1}^n-C_{m+n}^{n-1}$.

把各式加起来即得:

$$C_m^0+C_{m+1}^1+\cdots+C_{m+n}^n=C_{m+n+1}^n.$$

故 $$S_n=m!\,C_{m+n+1}^n=\frac{(m+n+1)!}{(m+1)\,n!}.$$

28. 考察恒等式: $(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{m+n}$, 比较等式两边展开式中含 x^p 项的系数, 左边展开式中 x^p 的系数为: $C_n^0C_m^p+C_n^1C_m^{p-1}+$

$\cdots + C_n^p C_m^0$，右边展开式中 x^p 的系数为：C_{m+n}^p. 根据两个多项式恒等，则同次幂的系数对应相等，于是原等式成立.

29. 根据二项式定理，我们有：

$$\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}=\frac{1}{n+1}\left((C_{n+1}^0+C_{n+1}^1x+C_{n+1}^2x^2+\cdots\right.$$

$$\left.+C_{n+1}^{n+1}x^{n+1})-1\right).$$

令 $x=1$，则有

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1}=\frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+\cdots+C_{n+1}^{n+1})$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{(n+1)+\frac{(n+1)n}{2!}+\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{(n+1)!}{(n+1)!}\right\}$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot n+\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n-1)}{2!}+\cdots$$

$$+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n!}{n!}$$

$$=1+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n.$$

30. 根据数学归纳法证明.

① 当 $n=1$ 时，左边 $=\frac{(2\cdot 1)!}{2^1\cdot 1!}=1$，右边 $=1$ 原等式成立.

② 假设当 $n=k$ 时，原等式成立，即

$$\frac{(2k)!}{2^k\cdot k!}=1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1),$$

则当 $n=k+1$ 时，

$$\frac{(2(k+1))!}{2^{k+1}\cdot(k+1)!}=\frac{(2k+2)(2k+1)\cdot(2k)!}{2(k+1)\cdot 2^k\cdot k!}$$

$$=\frac{(2k+2)(2k+1)}{2(k+1)}\cdot\frac{(2k)!}{2^k\cdot k!}$$

$$=(2k+1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)$$

$$=1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)(2k+1).$$

这说明：当 $n=k+1$ 时，原等式也成立.

因此，对一切自然数 n 原等式成立.

31. 个位数从1，2，3，4中取，由于没有限制不允许重复，因此，十位数、百位数均可以在这四个数码中选取，故构成在四个元素中取3个的重复排列，共有 $4^3=64$（个）.

32. 不大于55555的自然数可以是一位的、二位的、三位的、四位的、五位的. 故总数为：

$$5^1+5^2+5^3+5^4+5^5=3905\text{（个）}.$$

33. 大于23400的必为五位数，其可重复的排列数为 5^5. 另外，以1排首位的，小于该数，共有 5^4 个；21、22排在前的，亦小，共有 2×5^3 个；231、232、233排在前的，亦小，共有 3×5^2 个；此外没有了. 故本题答案为：

$$5^5-(5^4+2\times5^3+3\times5^2)=2175\text{（个）}.$$

34. 因10名先进教育工作者各不相同，所以发奖方式也不同，构成有重复的全排列，其总数为：

$$\frac{10!}{6!\,4!}=210\text{（种）}.$$

35. 显然是一个有重复的全排列，总数为：

$$\frac{7!}{3!\,2!\,2!}=210\text{（种）}.$$

36. 由本节例4，$(x+y+z)^3$

$$=\frac{3!}{3!\,0!\,0!}x^3+\frac{3!}{0!\,3!\,0!}y^3+\frac{3!}{0!\,0!\,3!}z^3+\frac{3!}{2!\,1!\,0!}x^2y+\frac{3!}{2!\,0!\,1!}x^2z$$

$$+\frac{3!}{0!\,2!\,1!}y^2z+\frac{3!}{1!\,2!\,0!}y^2x+\frac{3!}{1!\,0!\,2!}z^2x+\frac{3!}{0!\,1!\,2!}z^2y+\frac{3!}{1!\,1!\,1!}xyz$$

$$=x^3+y^3+z^3+3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+6\,xyz.$$

37. 可以将一种酒注入四个杯子，也可以两种酒注入，也可以三种酒，也可以四种酒，但不能五种酒．因此，注入方法数是从五种酒每次取四种出来且允许重复的组合数：$C_{5+4-1}^{4}=70$(种)．

38. 若甲得 a 元，乙得 b 元，丙得 c 元，丁得 d 元，将四人得的币分别记"甲"、"乙"、"丙"、"丁"，则这种分法可写为：

$$\underbrace{\text{甲甲}\cdots\text{甲}}_{a\text{张}},\ \underbrace{\text{乙乙}\cdots\text{乙}}_{b\text{张}},\ \underbrace{\text{丙丙}\cdots\text{丙}}_{c\text{张}},\ \underbrace{\text{丁丁}\cdots\text{丁}}_{d\text{张}}.$$

这里 $a+b+c+d=10$．可见这种分法是从 4 个不同的元素中取 10 个元素的有重复的组合．其总数为

$$C_{4+10-1}^{10}=C_{13}^{10}=C_{13}^{3}=286.$$

39. 每一 k 元非齐次多项式 $P_n(x_1, x_2, \cdots, x_k)$，可以和且只可以和一个与它项数相同的 $k+1$ 元 n 次齐次多项式对应．事实上，若某项 $Ax_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k}$ 是 n 次，则使这项不变；若此项的次数 m 小于 n，则把它联上一个因子 t^{n-m}，这样，得到一个关于 $x_1, x_2, \cdots, x_k, t$ 的 n 次齐次多项式 $P_n(x_1, x_2, \cdots, x_k, t)$．反之，若给出 n 次齐次多项式 $P_n(x_1, x_2, \cdots, x_k, t)$，则只要在所有项中，把变数 t 略去，就变成非齐次多项式 $P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$了．多项式 $P_n(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 的项数 $=P_n(x_1, x_2, \cdots, x_k, t)$ 的项数 $=C_{n+(k+1)-1}^{n}=C_{n+k}^{n}$.

40. 因为小广定要坐在两位老师中间，可视三人为一体，则其排列数为 $(4-1)!=6$．但两位老师可以易位，故坐法总数为 $2\times 6=12$(种)．

41. 先请女子间位入席，排列数为 $(4-1)!=3!=6$．再请男子坐入空位，共有四个不同的位置，全排列数为 $4!=24$．故坐法共有 $24\times 6=144$(种)．

42. 仿本节例 8，$\dfrac{(8-1)!}{2}=\dfrac{7!}{2}=2520$(种)．

习题九答案

1. $n=K+1$ 时，象 $n=K$ 时所设一样，没有完成证明．

2. 欧拉(Euler)于1732年举出

$$F_5=2^{2^5}+1=641\times 6700417\ (=4294967297)$$

为一合数，故费尔马猜测并不正确.

今，反有人推测"Fermat 数仅表有限个素数".

3. 显然，当 $n=29$ 时，

$$2\cdot(29)^2+29=29\cdot(2\cdot 29+1)=29\times 59\ (=1711)$$

是一合数.

4. 当 $n=1$ 时，$1^2+(1+1)^2=5$ 不是 4 的倍数.

5. 提示 当 $n=K+1$ 时，

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2K-1)^2+[2(K+1)-1]^2$$

$$=\frac{K(2K-1)(2K+1)}{3}+(2K+1)^2$$

$$=(2K+1)\left[\frac{1}{3}K(2K-1)+2K+1\right]$$

$$=\frac{1}{3}(2K+1)(2K^2+5K+3)$$

$$=\frac{1}{3}(2K+1)(K+1)(2K+3)$$

$$=\frac{1}{3}(K+1)[2(K+1)-1][2(K+1)+1].$$

6. 提示 当 $n=\gamma+1$ 时，

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots K+2\cdot 3\cdot 4\cdots(K+1)+\cdots+\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots$$

$$(\gamma+K-1)+(\gamma+1)(\overline{\gamma+1}+1)(\overline{\gamma+1}+2)\cdots(\overline{\gamma+1}+K-1)$$

$$=\frac{1}{K+1}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+K)+(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)\cdots$$

$$(\gamma+K)=(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+K)\left(\frac{\gamma}{K+1}+1\right)$$

$$=\frac{1}{K+1}(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+K)(\gamma+K+1)$$

$$=\frac{1}{K+1}(\gamma+1)(\overline{\gamma+1}+1)\cdots(\overline{\gamma+1}+K-1)(\overline{\gamma+1}+K).$$

7. 提示 当 $n=\gamma+1$ 时，

$$\frac{1}{1\cdot(K+1)}+\frac{1}{(K+1)(2K+1)}+\cdots$$

$$+\frac{1}{[K\gamma-(K-1)](K\gamma+1)}$$

$$+\frac{1}{[K(\gamma+1)-(K-1)][K(\gamma+1)+1]}$$

$$=\frac{\gamma}{K\gamma+1}+\frac{1}{(K\gamma+1)(K\gamma+K+1)}$$

$$=\frac{1}{K\gamma+1}\left[\gamma+\frac{1}{(K\gamma+K+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{K\gamma+1}\cdot\frac{K\gamma^2+K\gamma+\gamma+1}{K\gamma+K+1}=\frac{\gamma+1}{K(\gamma+1)+1}$$

8. 提示

$$1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\cdots-\frac{4K-1}{2^{2K-1}}+\frac{4K+1}{2^{2K}}$$

$$=\frac{2^{2K}-(12K+1)}{9\cdot 2^{2K-1}}+\frac{4K+1}{2^{2K}}=\frac{2^{2K+1}+12K+7}{9\cdot 2^{2K}}$$

$$=\frac{2^{2K+1}+(-1)^{2K+1}[6(2K+1)+1]}{9\cdot 2^{2K}}.$$

9. 提示

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+K\cdot K!+(K+1)[(K+1)!]$$

$$=(K+1)!-1+(K+1)[(K+1)!]$$

$$=(K+1)![1+K+1]-1$$

$$=(\overline{K+1}+1)!-1.$$

10. 提示

$$1-4+9-16+\cdots+(-1)^{K-1}K^2+(-1)^K(K+1)^2$$

$$=(-1)^{K-1}\cdot\frac{K(K+1)}{2}+(-1)^K(K+1)^2$$

$$=(-1)^K\left[-\frac{K(K+1)}{2}+(K+1)^2\right]$$

$$=(-1)^K(K+1)\cdot\frac{2K+2-K}{2}$$

$$=(-1)^K\frac{(K+1)(\overline{K+1}+1)}{2}.$$

11．由

$1,\ 3,\ 7,\ 13,\ 21,\ \cdots$ 有 n^2-n+1；

$5,\ 9,\ 15,\ 23,\ \cdots$ 有 n^2-n+3；

$11,\ 17,\ 25,\ \cdots$ 有 n^2-n+5；

…………

故得一般式为：

$$(n^2-n+1)+(n^2-n+3)+(n^2-n+5)+\cdots+(n^2-n+2n-1)=n^3.$$

因为

$$\begin{aligned}&(n^2-n+1)+(n^2-n+3)+(n^2-n+5)+\cdots\\&\quad+(n^2-n+2n-1)\\&=n\cdot(n^2)-n\cdot(n)+[1+3+5+\cdots+(2n-1)]\\&=n^3-n^2+\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^3,\end{aligned}$$

因而，所推出的等式是一恒等式，故其对于任何自然数 n 都成立．

12．提示 由

$1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ \cdots$ 有 $(n-1)^2+1$；

$3,\ 6,\ 11,\ 18,\ 27,\ \cdots$ 有 $(n-1)^2+2$；

$4,\ 7,\ 12,\ 19,\ 28,\ \cdots$ 有 $(n-1)^2+3$；

$8,\ 13,\ 20,\ 29,\ \cdots$ 有 $(n-1)^2+4$；

$9,\ 14,\ 21,\ 30,\ \cdots$ 有 $(n-1)^2+5$；

…………

又依此表项数的变化为 1，3，5，7，…，可见第 n 个等式左边的项数应是 $2n-1$ 项．而它的首项是$[(n-1)^2+1]$，末项为$[(n-1)^2+2n-1]$，故第 n 个等式为

$$[(n-1)^2+1]+[(n-1)^2+2]+[(n-1)^2+3]+\cdots$$

$$+[(n-1)^2+2n-1]=(n-1)^3+n^3.$$

将上式左边展开整理知其为一恒等式.

13. 提示

$$S(K+1)=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{K}{(K+1)!}$$

$$+\frac{K+1}{(\overline{K+1}+1)!}=\frac{(K+1)!-1}{(K+1)!}+\frac{K+1}{(K+2)!}$$

$$=\frac{1}{(K+2)!}[(K+2)!-(K+2)+K+1]$$

$$=\frac{(\overline{K+1}+1)!-1}{(\overline{K+1}+1)!}.$$

14. 当 $n=2$，代入不等式得$\frac{16}{3}<6$，不等式显然成立.

设 $\frac{4^K}{K+1}<\frac{(2K)!}{(K!)^2}$成立，

这里，对于自然数 K，不难证明辅助不等式

$$\frac{4^{K+1}}{K+2}<\frac{(2K+1)(2K+2)}{(K+1)^2}.$$

因此

$$\frac{4^K}{K+1}\cdot\frac{4^{K+1}}{K+2}<\frac{(2K)!}{(K!)^2}\cdot\frac{(2K+1)(2K+2)}{(K+1)^2},$$

即

$$\frac{4^{K+1}}{K+2}<\frac{(2K+2)!}{[(K+1)!]^2}.$$

15. 当 $n=2$，因为

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2},$$

故不等式为真.

设

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{K}}>\sqrt{K},$$

则要证

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{K}}+\frac{1}{\sqrt{K+1}}>\sqrt{K+1},$$

即要证

$$\frac{1}{\sqrt{K+1}}>\sqrt{K+1}-\sqrt{K}.$$

事实上，由于

$$1+\sqrt{\frac{K}{K+1}}>1,$$

两边同乘 $\sqrt{K+1}-\sqrt{K}$，即得

$$\frac{1}{\sqrt{K+1}}>\sqrt{K+1}-\sqrt{K}.$$

16. 当 $n=2$ 时，因 $a>-1$ 且 $a\neq 0$，故有

$$(1+a)^2=1+2a+a^2>1+2a.$$

设 $(1+a)^K>1+Ka$ 成立，则

$$(1+a)^{K+1}=(1+a)(1+a)^K>(1+a)(1+Ka)$$
$$=1+(K+1)a+Ka^2>1+(K+1)a.$$

17. 已知 $x>0$，当 $n=1$ 时，关于 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ 可由

$$(x-1)^2\geqslant 0,$$
$$x^2+1\geqslant 2x$$

得证：

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2.$$

设 $x^K+x^{K-2}+\cdots+\frac{1}{x^{K-2}}+\frac{1}{x^K}\geqslant K+1$ 成立，

则由于 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，用 x^{K+2} 代 x 有：

$$x^{K+2}+\frac{1}{x^{K+2}}\geqslant 2,$$

故

$$x^{K+2}+x^K+x^{K-2}+\cdots+\frac{1}{x^{K-2}}+\frac{1}{x^K}+\frac{1}{x^{K+2}}$$

$$\geqslant x^{K+2}+\frac{1}{x^{K+2}}+K+1\geqslant 2+K+1$$

$$=\overline{K+2}+1.$$

18. 由于 J_1，J_2 是已知的，当先验明 3 和 4；

当 $n=3$ 时， $J_3=\frac{3-1}{3}J_1=-\frac{2}{3}$，另一方面：

$$J_3=(-1)^3\cdot\frac{2!!}{3!!}=(-1)^3\frac{2}{1\cdot 3}=-\frac{2}{3},$$

当 $n=4$ 时，$J_4=\frac{4-1}{4}J_2=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$，另一方面：

$$J_4=(-1)^4\frac{3!!}{4!!}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}=\frac{3}{8}.$$

都真.

设 $J_K=(-1)^K\frac{(K-1)!!}{K!!}$ 为真. 则

$$J_{K+2}=\frac{K+2-1}{K+2}J_K=\frac{K+1}{K+2}(-1)^K\frac{(K-1)!!}{K!!}$$

$$=(-1)^{K+2}\frac{(K+1)!!}{(K+2)!!}.$$

注 “!!”表双阶乘，如 $5!!=1\cdot 3\cdot 5$；

$7!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot 7$；

$6!!=2\cdot 4\cdot 6$；

$8!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot 8$.

19. 当 $n=1$ 时，

$$a_1=\frac{a_0+b_0}{2}=a_0+\frac{b_0-a_0}{2}=a_0+\frac{2}{3}(b_0-a_0)\left(1-\frac{1}{4}\right);$$

$$b_1=\frac{a_1+b_0}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_0+b_0}{2}+b_0\right)=\frac{1}{4}(a_0+3b_0)$$

$$=a_0+\frac{3}{4}(b_0-a_0)=a_0+\frac{2}{3}(b_0-a_0)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right).$$

设 $a_K=\frac{a_{K-1}+b_{K-1}}{2}=a_0+\frac{2}{3}(b_0-a_0)\left(1-\frac{1}{4^K}\right)$；

$$b_K=\frac{a_K+b_{K-1}}{2}=a_0+\frac{2}{3}(b_0-a_0)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^K}\right)$$

为真，则

$$a_{K+1}=\frac{a_K+b_K}{2}=\frac{1}{2}\left[a_0+\frac{2}{3}(b_0-a_0)\left(1-\frac{1}{4^K}\right)+a_0\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}(b_0-a_0)\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^K}\right)\right]$$

$$=a_0+\frac{1}{3}(b_0-a_0)\left(1-\frac{1}{4^K}+1+\frac{1}{2\cdot 4^K}\right)$$

$$=a_0+\frac{1}{3}(b_0-a_0)\left(2-\frac{1}{2\cdot 4^K}\right)$$

$$=a_0+\frac{2}{3}(b_0-a_0)\left(1-\frac{1}{4^{K+1}}\right);$$

$$b_{K+1}=\frac{a_{K+1}+b_K}{2}=\frac{1}{2}\left[a_0+\frac{2}{3}(b_0-a_0)\left(1-\frac{1}{4^{K+1}}\right)\right.$$

$$\left.+a_0+\frac{2}{3}(b_0-a_0)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^K}\right)\right]$$

$$=a_0+\frac{1}{3}(b_0-a_0)\left(1-\frac{1}{4^{K+1}}+1+\frac{1}{2\cdot 4^K}\right)$$

$$=a_0+\frac{1}{3}(b_0-a_0)\left(2+\frac{2}{4^{K+1}}\right)$$

$$=a_0+\frac{2}{3}(b_0-a_0)\left(1+\frac{1}{4^{K+1}}\right).$$

20. 由已知条件可得：

$a_1=-10=2-12,$

$a_2=20-52=4-36,$

$a_3=64-164=8-108,$

$a_4=200-508=16-324,\ \cdots,$

因而 $a_n=2^n-4\cdot 3^n$； 又由

$b_1=-13=2-15,$

$b_2=50-91=4-45$,

$b_3=160-287=8-135$,

$b_4=500-889=16-405$, …,

可得 $b_n=2^n-5\cdot 3^n$.

事实上：若设 $n=K$ 时结论正确，则当 $n=K+1$ 时，有：

$$a_{K+1}=-2a_K+4b_K=-2(2^K-4\cdot 3^K)+4(2^K-5\cdot 3^K)$$
$$=2\cdot 2^K+8\cdot 3^K-20\cdot 3^K=2^{K+1}-4\cdot 3^{K+1};$$
$$b_{K+1}=-5a_K+7b_K=-5(2^K-4\cdot 3^K)+7(2^K-5\cdot 3^K)$$
$$=2\cdot 2^K+20\cdot 3^K-35\cdot 3^K=2^{K+1}-5\cdot 3^{K+1}.$$

21. 设 $R_n(m)$ 表正整数解的组数，则：

$n=1$ 时，$x_1=m$，故 $R_1(m)=1$；

$n=2$ 时，$x_1+x_2=m$，由于 x_1 可取 1, 2, …, $m-1$，故有解组

(1, $m-1$)，(2, $m-2$)，…，($m-1$, 1)，即

$R_2(m)=m-1$；

$n=3$ 时，$x_1+x_2+x_3=m$，由于 x_3 可取 1, 2, …, $m-2$，故

$$R_3(m)=R_2(m-1)+R_2(m-2)+\cdots+R_2(2)$$
$$=(m-2)+(m-3)+\cdots+1=\frac{(m-1)(m-2)}{2}=C_{m-1}^2;\ \cdots.$$

可见 $R_n(m)=C_{m-1}^{n-1}$. 事实上，

设 $R_K(m)=C_{m-1}^{K-1}$，则

$$R_{K+1}(m)=C_{m-2}^{K-1}+C_{m-3}^{K-1}+\cdots+C_{K-1}^{K-1}=C_{m-1}^{K}.$$

22. 当 $n=1$ 时，显然 $a_1^2=a_1^2$.

设 $n=K$ 时，

$$(a_1+a_2+\cdots+a_K)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_K^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_1a_K+a_2a_3+a_2a_4+\cdots+a_2a_K+\cdots+a_{K-1}a_K)$$ 成立；

则 $n=K+1$ 时，有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_K+a_{K+1})^2$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_K)^2+2(a_1+a_2+\cdots+a_K)a_{K+1}+a_{K+1}^2$$

$$=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_K^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_1a_K+a_2a_3+a_2a_4+\cdots$$

$$+a_2a_K+\cdots+a_{K-1}a_K)+2(a_1a_{K+1}+a_2a_{K+1}+\cdots$$

$$+a_Ka_{K+1})+a_{K+1}^2$$

$$=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_K^2+a_{K+1}^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_1a_K$$

$$+a_1a_{K+1}+a_2a_3+a_2a_4+\cdots+a_2a_K+a_2a_{K+1}+\cdots$$

$$+a_{K-1}a_K+a_{K-1}a_{K+1}+a_Ka_{K+1}).$$

23. 当 $n=1$ 时，$a_1=a_1$ 显然成立.

设 $n=K$ 时，$a_K=a_1+(K-1)d$ 成立，则

$$a_{K+1}=a_K+d=a_1+(K-1)d+d=a_1+Kd$$

$$=a_1+(\overline{K+1}-1)d.$$

24. 设连续三整数为 $(n-1)$，n，$(n+1)$，则 $n=2$ 时，有

$$(1^3+2^3+3^3)\div 9=4.$$

设 $n=K$ 时，$[(K-1)^3+K^3+(K+1)^3]\div 9=C$（整数）.

则 $n=K+1$ 时，有

$$[K^3+(K+1)^3+(K+2)^3]\div 9$$

$$=[K^3+(K+1)^3+(\overline{K-1}+3)^3]\div 9$$

$$=[K^3+(K+1)^3+(K-1)^3+9(K-1)^2+27(K-1)+27]\div 9$$

$$=C+(K-1)^2+3(K-1)+3$$

为整数.

注 第二步亦可如下推证：

$$\{[K^3+(K+1)^3+(K+2)^3]-[(K-1)^3+K^3$$

$$+(K+1)^3]\}\div 9$$

$$=\{(K+2)^3-(K-1)^3\}\div 9$$

$$=\{(K+2-K+1)[(K+2)^2+(K-1)(K+2)$$

$$+(K-1)^2]\}\div 9$$

$$=\{3K^2+3K+3\}\div 3=K^2+K+1.$$

25. 提示

$$11^{K+1+2}+12^{2(K+1)+1}=11\cdot(11^{K+2})+12^{2}\cdot(12^{2K+1})$$

$$=11\cdot(11^{K+2})+(11+133)\cdot 12^{2K+1}$$

$$=11(11^{K+2}+12^{2K+1})+133(12^{2K+1}).$$

26. 当 $n=1$ 时，由于

$$5^{6+5}+7^{6+5}=5^{11}+7^{13}=48828125+96889010407$$

$$=96937838532$$

的数码和

$$9+6+9+3+7+8+3+8+5+3+2=63$$

能被 9 除尽，故该数能为 9 所整除.

设 $n=K$ 时，$5^{6K+5}+7^{6K+7}$ 能被 9 整除.

则 $n=K+1$ 时，有：

$$5^{6K+6+5}+7^{6K+6+7}=5^{6K+5}\cdot 5^{6}+7^{6K+7}\cdot 7^{6}$$

$$=5^{6K+5}(15625)+7^{6K+7}(117649)$$

$$=5^{6K+5}(117649-102024)+7^{6K+7}(117649)$$

$$=117649(5^{6K+5}+7^{6K+7})+5^{6K+5}(-102024).$$

由于 $5^{6K+5}+7^{6K+7}$ 能被 9 整除，而 102024 的各位数码之和：

$$1+0+2+0+2+4=9,$$

故 102024 能被 9 整除，所以 $5^{6(K+1)+5}+7^{6(K+1)+7}$ 能被 9 所整除.

27. 令 $n=K+1$，则 $n^{n-1}-1$ 变作

$$(K+1)^{K}-1=(K^{K}+C_{K}^{1}\cdot K^{K-1}+C_{K}^{2}K^{K-2}+\cdots$$

$$+C_{K}^{K-1}K+1)-1$$

$$=K^{K}+K\cdot K^{K-1}+\frac{K(K-1)}{2!}K^{K-2}+\cdots+K\cdot K,$$

能否被 $(K+1-1)^{2}=K^{2}$ 所整除？显然，无论 $K=1$、$K=r$ 或 $K=r+1$ 结论恒成立.

28. 当 $n=1$ 时，

$$\frac{1}{2}+\cos x=\frac{1}{2}(1+2\cos x)=\frac{1+\cos x-2\cos^{2}x}{2(1-\cos x)}$$

$$=\frac{\cos x-\cos 2x}{2(1-\cos x)}=\frac{-\left(-2\sin\frac{2+1}{2}x\sin\frac{2-1}{2}x\right)}{2^2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{3}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

等式成立.

设 $n=K-1$ 时,

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos(K-1)x$$

$$=\frac{\cos(K-1)x-\cos Kx}{2(1-\cos x)}$$

$$=\frac{\sin\frac{2(K-1)+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$$ 成立，则由

$$\frac{\sin\frac{2K+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{\sin\frac{2(K-1)+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{2K+1}{2}x-\sin\frac{2K-1}{2}x\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\cos Kx\sin\frac{x}{2}\right)=\cos Kx$$

移项得证.

29. 提示

$$\frac{(K+1)\cos Kx-K\cos(K+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$-\frac{K\cos(K-1)x-(K-1)\cos Kx-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\left[(K+1)\cos Kx-K\cos(K+1)x-1\right.$$

$$\left.-K\cos(K-1)x+(K-1)\cos Kx+1\right)$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\left[2K\cos Kx-K\cos(K+1)x-K\cos(K-1)x\right]$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\left[2K\cos Kx-K(2\cos Kx\cos x)\right]$$

$$=\frac{K\cos Kx}{2\sin^2\frac{x}{2}}(1-\cos x)$$

$$=\frac{K\cos Kx}{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$=K\cos Kx.$$

移项得证.

30. 当 $n=1$ 时，左端 $=\cos\alpha$，

右端 $=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha}=\cos\alpha$，故等式成立.

设　$n=K-1$ 时 $\cos\alpha\cos2\alpha\cdots\cos2^{K-2}\alpha$

$=\dfrac{\sin2^{K-1}\alpha}{2^{K-1}\sin\alpha}$成立，则由

$$\frac{\sin^1 2^K\alpha}{2^K\sin\alpha}\div\frac{\sin2^{K-1}\alpha}{2^{K-1}\sin\alpha}=\frac{\sin2^K\alpha}{2\sin2^{K-1}\alpha}$$

$$=\frac{1}{2\sin2^{K-1}\alpha}(2\sin2^{K-1}\alpha\cdot\cos2^{K-1}\alpha)=\cos2^{K-1}\alpha,$$

即

$$\frac{\sin 2^K\alpha}{2^K\sin\alpha}=\cos 2^{K-1}\alpha\cdot\frac{\sin 2^{K-1}\alpha}{2^{K-1}\sin\alpha}$$

$$=\cos 2^{K-1}\alpha\cdot(\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cdots\cos 2^{K-2}\alpha).$$

31．提示

$$\frac{1}{2^K}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^K}-\operatorname{ctg}\alpha-\left(\frac{1}{2^{K-1}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{K-1}}-\operatorname{ctg}\alpha\right)$$

$$=\frac{1}{2^K}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^K}-2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{K-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2^K}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^K}-\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2^{K-1}}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^K}}\right)$$

$$=\frac{1}{2^K}\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^K}}=\frac{1}{2^K}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^K}.$$

82．提示

$$arc\operatorname{tg}2+arc\operatorname{tg}\frac{3}{2}+\cdots+arc\operatorname{tg}\frac{K+1}{K}-K\,arc\operatorname{tg}1$$

$$-\left[arc\operatorname{tg}2+arc\operatorname{tg}\frac{3}{2}+\cdots+arc\operatorname{tg}\frac{K}{K-1}-(K-1)\,arc\operatorname{tg}1\right]$$

$$=arc\operatorname{tg}\frac{K+1}{K}-arc\operatorname{tg}1=arc\operatorname{tg}\cdot\operatorname{tg}\left(arc\operatorname{tg}\frac{K+1}{K}\right.$$

$$\left.-arc\operatorname{tg}1\right)=arc\operatorname{tg}\cdot\frac{\frac{K+1}{K}-1}{1+\frac{K+1}{K}\cdot 1}$$

$$=arc\operatorname{tg}\frac{1}{2K+1}=arc\operatorname{ctg}(2K+1)$$

33．提示

$$\frac{(K+1)\sin Kx-K\sin(K+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{K\sin(K-1)x-(K-1)\sin Kx}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}(2K\sin Kx-K\sin(K+1)x-K\sin(K-1)x)$$

$$=\frac{K}{4\sin^2\frac{x}{2}}(2\sin Kx-2\cos x\sin Kx)$$

$$=\frac{K\sin Kx}{2\sin^2\frac{x}{2}}(1-\cos x)=K\sin Kx.$$

34. 提示

$$\frac{\sin(K+1)x}{\cos^K x\sin x}-\frac{\sin Kx}{\cos^{K-1}x\sin x}$$

$$=\frac{1}{\cos^K x\sin x}(\sin(K+1)x-\cos x\sin Kx)$$

$$=\frac{1}{\cos^K x\sin x}(\sin x\cos Kx)$$

$$=\frac{\cos Kx}{\cos^K x}.$$

35. 提示

$$\frac{2^{K+1}\left[\cos\frac{(K+1)\pi}{6}+i\sin\frac{(K+1)\pi}{6}\right]}{2^K\left(\cos\frac{K\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$=\frac{2}{\cos\frac{K\pi}{6}+i\sin\frac{K\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{K\pi}{6}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sin\frac{K\pi}{6}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{K\pi}{6}+i\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{K\pi}{6}\right)$$

$$=\sqrt{3}+i.$$

36. 提示

$$\frac{\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x}{\cos nx+i\sin nx}=\frac{1}{\cos nx+i\sin nx}\cdot$$

$$(\cos nx\cos x-\sin nx\sin x+i\sin nx\cos x$$

$$+i\sin x\cos nx)=\cos x+i\sin x.$$

37. 设若从 $2n$ 个数 1，2，……$2n$ 中可以取出这样一组 $n+1$ 个数，其中任意一个都除不尽另外的任何一个，并将这一组数的全体记作 $Mn+1$，那么就可以证明：从 $2n-2$ 个数 1，2，……，$2n-2$中，可以取出 n 个数来，仍然是其中任意一个都除不尽另外的任何一个．于是，对于 M_{n+1} 来说，有四种可能的情形发生：

① M_{n+1} 不包含 $2n-1$，也不包含 $2n$；

② M_{n+1} 包含 $2n-1$，但不包含 $2n$；

③ M_{n+1} 包含 $2n$，但不包含 $2n-1$；

④ M_{n+1} 包含 $2n-1$，也包含 $2n$.

第①种情形：由 M_{n+1} 中任意除掉一个数，剩下 n 个数，其中每一个都不比 $2n-2$ 大，并且这些数中的任何一个都不能被其余的任一个除尽；

第②种情形：由 M_{n+1} 中除掉 $2n-1$ 这个数，剩下 n 个数，其中每一个都不比 $2n-2$ 大，并且这 n 个数中的任何一个都不能被其余的任一个除尽；

第③种情形：首先注意到，M_{n+1} 一定不包含 n 这个数，因为不然的话，M_{n+1} 中就有这样两个数($2n$ 与 n)，其中一个可以被另外的一个除尽，由 M_{n+1} 中除掉 $2n$ 这个数，剩下 n 个数，其中每一个都不比 $2n-2$ 大，并且这 n 个数中的任何一个都不能被其余的任一个除尽；

第④种情况：由 M_{n+1} 中除去 $2n$ 这个数，仍然得到和上面一样的结果.

由 M_{n+1} 中除掉 $2n-1$ 和 $2n$ 这两个数，剩下的 $n-1$ 个数的全体我们用 M_{n-1} 表示．再把 n 这一个数添到 M_{n-1} 里去，得到 n 个数，其中任意一个都不大于 $2n-2$，我们要来指明，这 n 个数当中没有可

以被另外的任意一个除尽.

在 M_{n+1} 中不可能有两个数，其中一个可以被另外的一个除尽。因此知道在 M_{n-1} 中也是如此. 余下来要证的只是，在 M_{n-1} 中添入了 n 以后，这个性质仍然保留.

对此，只要注意以下的事实：① M_{n-1} 中的任意一个数都不能被 n 除尽；② 凡不能被 M_{n-1} 中的任意一个数除尽.

第①点是由于 M_{n-1} 中所包含的数都不大于 $2n-2$；

第②点是由于 $2n$ 这个数不能被 M_{n-1} 中的任何一个数除尽.

因此，如果我们假设命题对于 $2n$ 个数 $1, 2, \cdots 2n$ 是不真确的，则对于 $2(n-1)$ 个数 $1, 2, \cdots, 2n-2$ 也是不真确的. 由这里就知道，如果命题对于 $2(n-1)$ 个数 $1, 2\cdots, 2n-2$ 是真确的，则对于 $2n$ 个数 $1, 2, \cdots\cdots 2n$ 也是真确的.

对于两个数 1，2 命题是真确的，因此知道，当 n 是任意一个自然数时，命题对于 $2n$ 个数 $1, 2, \cdots\cdots 2n$ 是真确的.

注 在上述的证明过程中，用到了数学归纳法，此外，这个问题还有下面的简单解法：由 $2n$ 个数 $1, 2, \cdots 2n$ 中任意取出 $n+1$ 个数. 这 $n+1$ 个数的全体记作 M_{n+1}.

M_{n+1} 中的每一个偶数可以写成一个 2 的正整数次幂和一个奇数的乘积. 这些奇数和 M_{n+1} 中原有的奇数合并起来的全体记作 $\overline{M}_{n+1}$. $\overline{M}_{n+1}$ 中一共包含 $n+1$ 个奇数，其中每一个都小于 $2n$.

因为小于 $2n$ 的正奇数总共只有 n 个，所以在 $\overline{M}_{n+1}$ 中至少有两个数相同. 这两个相同的数就以 k 来代表.

从这个结果就知道，在 M_{n+1} 中至少有这样两个数，$2^S k$ 与 $2^t k$。其中，显然有一个可以被另外的一个除尽. 证毕.

38. 当一条直线 AB 将平面 M 分成两部分 P_1 与 P_2，将 P_1 涂成白色，而将 P_2 涂成黑色，就满足问题的要求，故对于 $n=1$ 时，命题是正确的.

设命题对于 $n=k$ 是正确的，即 k 条直线将平面分成的各区域已

依问题的要求涂色. 设第 $K+1$ 条直线 CD 将整个平面 M 分成两部份 Q_1 与 Q_2，并将 Q_1 中之每一区域保持原来的颜色不变；在 Q_2 中每一区域，则将白色改涂成黑色，黑色改涂成白色.

现在设 0_1 与 0_2 是画过 CD 线之后的任意两个相邻区域，则 0_1 与 0_2 的位置必合于下列两种情形之一：

① 0_1 与 0_2 分在 CD 线的两边；

② 0_1 与 0_2 同在 CD 线的一边.

第①种情形：

若 0_1 与 0_2 在画过原来 k 条直线之后，还没有画直线 CD 的时候，是构成一个区域的，因而被涂成同一种颜色. 现在其中属于 Q_1 的部分保持原来的颜色，而属于 Q_2 的部分已改变了颜色. 这就是说，此时 0_1 与 0_2 是已被涂成不同的颜色.

若 0_1 与 0_2 同在 Q_1 内，则它们所涂颜色不变因而符合要求；若它们同在 Q_2 内，则它们每一个原涂的颜色都已改变.

总之，对于上述两种情形，相邻的区域 0_1 与 0_2 现在都已涂成不同的颜色了. 证毕.

后　记

本书是为适应广大中学生学习数学的进一步要求和中学数学教师教学参考的需要而编写的，无论深度和广度都不同于目前在教学上所使用的习题集，也不同于专门汇集难题的册子。编写过程中我们曾广泛地参阅过专题性的小册子，其愿望是想有益于读者在概念上的巩固和方法、技巧上的提高。

参加本书编写的同志较多，这里不一一列举。其中第一至第六章由陈传理、黄范畴、张宪松编写；第七章由任德麟、罗祖安编写；第八章由江志编写；第九章与附录由杨挥编写。前六章由陈森林、杨挥等审阅；后三章由江仁俊、陈传理等审阅。

限于水平，疏忽、不妥之处，请批评指正。

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝代数解题引导
作者＝杨挥　　陈传理等编
页数＝５２６
ＳＳ号＝１１１３９０３３
出版日期＝１９８０年１１月第１版

前言
目录
目录