出 版 说 明

为满足广大中学生学习数学和中学数学教师教学的需要，我们邀请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了这套中学数学：《代数解题引导》，《几何解题引导》，《三角解题引导》，《解析几何解题引导》和《国际数学竞赛试题讲解》。

希望这套书和广大读者见面以后，能听到来自读者的热情的批评和建议，以便我们进一步修订，使其日臻完善。

一九八〇年三月

前　言

本书是对第一届到第十八届国际中学生数学竞赛试题的分析与解答．按《国际数学竞赛试题讲解（Ⅰ）》的体例要求，由江仁俊、戚应璪、蔡训武、梁法驯、樊恺等同志合作编写．江仁俊同志负责审．

试题总的看来，知识面较宽，难度较大，综合性较强，技巧性较高，灵活、新颖而且具有趣味性．除少数试题之外，多数试题对数学基础知识的要求较高，内容不仅包括初等数学的各个方面，还涉及到高等数学的一些分支．但利用我国中学生熟悉的数学知识来解，多数题仍能解出，而且还可借以提高分析推理、空间想象、抽象思维以及灵活运用所学知识的能力．

本书和《国际数学竞赛试题讲解Ⅰ》一样，每道试题都分"分析"、"解答"和"附注"三个部分阐述．解答部分除选择了国内外有关资料上的解（证）法外，为了开拓解题思路，我们还充实了一些自己的解（证）法；分析和附注完全是一种尝试，是为了使读者具体窥视出国际数学竞赛的水平，掌握解题思路，了解与试题有关的问题，总结某些带规律性的方法和技巧．

由于我们水平有限，书中定有不妥和错误之处，请同志们批评指正．

编　者

1979年12月

目　录

第一届国际中学生数学竞赛试题分析与解答

1959 年在罗马尼亚举行

第　一　题 （波兰命题）

证明：分数$\dfrac{21n+4}{14n+3}$对任何自然数 n 皆不可约.

【分析】 显然，对任何自然数 n，关于 n 的一次式 $21n+4$、$14n-3$ 皆为正整数，并且 $21n+4>14n+3$，从而$\dfrac{21n+4}{14n+3}$表示一系列的假分数.

欲证分数$\dfrac{21n+4}{14n+3}$不可约，即证 $21n+4$ 与 $14n+3$ 互素，也就是证其最大公约数

$$(21n+4,\ 14n+3)=1.$$

而两正数是否互素的判别，最大公约数的求法，又可直接利用辗转相除法实现，因此得知本题的一般证法.

此外，如下述的证法三，先设其最大公约数为 d，再证 $d=1$ 亦可.

〈证法一〉 对$\dfrac{21n+4}{14n+3}$作辗转相除法如下：

$$\begin{array}{r|cc|l}
1 & 21n+4 & 14n+3 & 2 \\
 & 14n+3 & 14n+2 & \\
\hline
 & 7n+1 & 1 &
\end{array}$$

由此可知，最后的余数为1，即

$$(21n+4,\ 14n+3)=1,$$

所以分数$\frac{21n+4}{14n+3}$对任何自然数n皆不可约。

〈证法二〉 假设$\frac{21n+4}{14n+3}$可约，则因

$$\frac{21n+4}{14n+3}=1+\frac{7n+1}{14n+3},$$

故$\frac{7n+1}{14n+3}$可约，从而它的倒数$\frac{14n+3}{7n+1}$可约.

类似地，又化假分数$\frac{14n+3}{7n+1}$为带分数：

$$\frac{14n+3}{7n+1}=2+\frac{1}{7n+1},$$

于是$\frac{1}{7n+1}$亦必可约．但对任何自然数n，真分数$\frac{1}{7n+1}$显然皆不可约，因此导致矛盾．证毕.

〈证法三〉 设$21n+4$与$14n+3$的最大公约数为d，则

$$21n+4=pd; \tag{1}$$

$$14n+3=qd, \tag{2}$$

其中p、q皆为正整数.

由(1)、(2)消去n并整理，得

$$(3q-2p)d=1. \tag{3}$$

由于p、q皆为正整数，所以$3q-2p$为整数．因此，要(3)成立，必须正整数$d=1$．证毕.

【附注】 1．辗转相除法又称欧几里德(Euclid)演算法，是求最大公约数的一个切实可行的办法．证法二在形式上采用了反证，但实质上，是将证法一中辗转相除的过程分段进

行表述．因此，这一类问题，一般都可用辗转相除法解决．

2．记号$(f、g)$表示两个正整数f与g的最大公约数；“f、g互素”与“$(f、g)=1$”等价．对于两个以上的数，记法相同，比如三个数12、18、24的最大公约数是6，即

$$(12，18，24)=6.$$

关于最小公倍数，常以方括号记之．例如12、18、24三个数的最小公倍数是72，即

$$[12，18，24]=72.$$

第　二　题　(罗马尼亚命题)

对于x的哪些实数值，下列等式成立：

a）$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$；

b）$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$；

c）$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$，

这里根式仅表算术根．

【分析】 由题设知，$x\geqslant\frac{1}{2}$是研究问题的前提，否则，二次根号下将出现负值．

在$x\geqslant\frac{1}{2}$的许可值范围内，可以对函数

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$$

进行讨论得到答案，或按根式方程求解．

由于函数表达式是含有两层根号的复合二次根式，首先考虑化简函数式是必要的．

〈解答〉 将等式左边用y表示，因$x\geqslant\frac{1}{2}$，故可作如下

变形：

$$y=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{(\sqrt{2x-1})^2+2\sqrt{2x-1}+1}\right.$$

$$\left.+\sqrt{(\sqrt{2x-1})^2-2\sqrt{2x-1}+1}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[(\sqrt{2x-1}+1)+|\sqrt{2x-1}-1|\right].$$

为去绝对值符号，下面分两种情况讨论。

第一，若$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，则有：

$$1\leqslant 2x\leqslant 2,\quad 0\leqslant 2x-1\leqslant 1,\quad 0\leqslant\sqrt{2x-1}\leqslant 1.$$

此时

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[(\sqrt{2x-1}+1)+(1-\sqrt{2x-1})\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2=\sqrt{2}.$$

第二，若$x>1$，则有：

$$2x>2,\quad 2x-1>1,\quad \sqrt{2x-1}>1.$$

此时

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[(\sqrt{2x-1}+1)+\sqrt{2x-1}-1\right]$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}.$$

总之，我们得到：

a）当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$时，等式成立；

b) 因为在 $x\geqslant\frac{1}{2}$的定义域内，函数 y 的值不小于$\sqrt{2}$，故对 x 的任何实数值，等式都不能成立；

c) 当 $x>1$ 时，原等式变为：

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}=2,$$

解之，得 $x=\frac{3}{2}$．也就是说，当 $x=\frac{3}{2}$时，等式成立．

【附注】 1．对这道题，我国的中学生是比较熟悉的．但要注意的是：对于

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\ (a\geqslant 0);\\-a\ (a<0),\end{cases}$$

特别是在 a 本身的符号未确定的情况下，应该进行讨论，分别写出结果．

2．在化简形如$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$的复合根式，考虑$A\pm\sqrt{B}$能否配成完全平方时，用"拼凑法"观察较为简捷：

第一，$\sqrt{B}$变成$\sqrt{B'}$的 2 倍；

第二，A 变成 A_1 与 A_2 的和，并且 A_1 与 A_2 的积恰好等于 B'．

本题中的函数式 $x\pm\sqrt{2x-1}$，就是通过拼凑而配成完全平方的．

第 三 题 （匈牙利命题）

设 $\cos x$（实数）满足二次方程

$$a\cos^2x+b\cos x+c=0,$$

其中 a、b、c 是实数，求 $\cos 2x$ 所满足的一个二次方程．在 $a=4$、$b=2$ 和 $c=-1$ 的情况下，将此二方程进行比较．

【分析】 因为 $\cos x$ 与 $\cos 2x$ 之间存在着关系式（即余弦倍角公式）

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$

即

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x,$$

故易将题设方程中的 $\cos x$ 用 $\cos 2x$ 表示，变形整理，即可求得所求方程．显然，它的系数也含有 a、b 和 c．

此外，利用根与系数间的关系，也可求出所求的方程．

最后，在指定的情况下，比较两个方程在“结构”上的异同点．

〈解法一〉 将题设方程变形：

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0, \tag{1}$$

$$a\cos^2 x + c = -b\cos x, \tag{2}$$

$(2)^2 \times 4$，并整理得：

$$a^2(2\cos^2 x)^2 + (4ac - 2b^2)\cdot 2\cos^2 x + 4c^2 = 0. \tag{3}$$

将 $2\cos^2 x = \cos 2x + 1$ 代入(3)，得：

$$a^2(\cos 2x + 1)^2 + (4ac - 2b^2)(\cos 2x + 1) + 4c^2 = 0,$$

$$a^2\cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2)\cos 2x + a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2 = 0. \tag{4}$$

显然，(4)是要求的 $\cos 2x$ 所满足的一个二次方程．

将 $a = 4$、$b = 2$ 和 $c = -1$ 代入(1)，得

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0; \tag{5}$$

代入(4)，得

$$4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0. \tag{6}$$

(5)与(6)比较易知：在该种情况下，它们都是系数完全相同的一元二次方程；不过一个是以 $\cos x$ 为元，另一个则以

$\cos 2x$ 为元.

〈解法二〉 根据韦达定理，题设方程两根有如下关系：

$$\cos x_1+\cos x_2=-\frac{b}{a};\ \cos x_1\cos x_2=\frac{c}{a}.$$

$$\begin{aligned}\cos 2x_1+\cos 2x_2&=2(\cos^2 x_1+\cos^2 x_2-1)\\&=2[(\cos x_1+\cos x_2)^2-2\cos x_1\cdot\cos x_2-1]\\&=2\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}-1\right]\\&=\frac{-(2a^2+4ac-2b^2)}{a^2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2x_1\cdot\cos 2x_2&=(2\cos^2 x_1-1)(2\cos^2 x_2-1)\\&=4(\cos x_1\cdot\cos x_2)^2-2(\cos^2 x_1+\cos^2 x_2)+1\\&=4\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}\right]+1\\&=\frac{a^2+4ac-2b^2+4c^2}{a^2}.\end{aligned}$$

因此，要求的 $\cos 2x$ 所满足的二次方程为：

$$a^2\cos^2 2x+(2a^2+4ac-2b^2)\cos 2x+a^2+4ac-2b^2+4c^2=0.$$

关于题设方程与所求方程的比较，同解法一.

【附注】 1. 如应用求根公式于题设二次方程，可求 $\cos x_i\,(i=1,2)$；再用余弦二倍角公式，求出相应的 $\cos 2x_i$ 的值；最后展开

$$(\cos 2x-\cos 2x_1)(\cos 2x-\cos 2x_2)=0$$

的左边，并以 $\cos 2x$ 为元进行整理，亦可得到所求的二次方程.

2. 解答本题虽较容易，但它运用了有关代数与三角的基础知识，有一定的综合性，中学生平时练习这类题是必要的。例如把题中的“$\cos x$”换为“$\sin x$”，情况将怎样？请读者考虑。

第　四　题 （匈牙利命题）

试作一直角三角形，其斜边 c 给定，且使 c 边上的中线为二直角边的几何中项。

【分析】 求作的是一直角三角形，因斜边 c 已知，故问题在于确定第三顶（即直角顶）点 c。

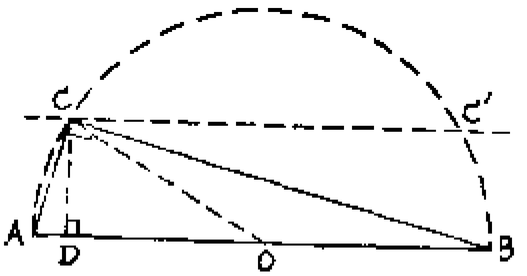


图 1—1

本题解法不止一种，这里着重分析一种作法。

设图已成，即 $Rt\triangle ABC$ 符合要求（如图 1—1 所示），易知 C 点在以 AB $(=c)$ 为直径的$\odot O$ 的圆周上。为进一步弄清 C 点的确切位置，作斜边 AB 上的中线 $OC\left(=\frac{c}{2}\right)$ 和高 CD，则

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = AC\cdot BC,\quad AC\cdot BC = c\cdot CD.$$

所以 $CD=\frac{c}{4}$，即 C 点又在平行于 AB 并与 AB 相距 $\frac{c}{4}$ 的直线 CC' 上。因此，直角三角形的直角顶点就是$\odot O$ 与直线 CC' 的交点。

〈解法一〉 由上面的分析得到如下的作法（图 1—2）：

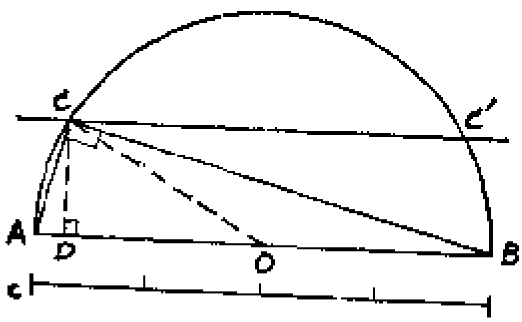


图 1—2

1) 作线段 $\overline{AB}=c$ (已知的);

2) 以 $\overline{AB}$ 为直径作 $\odot O$;

3) 作直线 $CC' \parallel AB$, 使 CC' 与 AB 的距离为 $\frac{c}{4}$, CC' 与 $\odot O$ 交于 C、C';

4) 连 AC、BC(或 AC'、BC'), 则 ΔABC(或 $\Delta ABC'$)即为所求.

事实上, 由 1)、2), ΔABC 显然是斜边为 c 的直角三角形; 剩下来的,只需证明"$Rt\Delta ABC$斜边上的中线为二直角边的几何中项"即可.

连 OC, 则 $OC=\frac{AB}{2}=\frac{c}{2}$; 又过 C 作 $CD\perp AB$, D 为垂足, 则由 3) 知 $CD=\frac{c}{4}$. 于是, 我们有:

$$OC^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2=\frac{c}{4}\cdot c=CD\cdot AB=AC\cdot BC.$$

对作图无误的证明至此结束.

〈解法二〉 用代数法作图. 在 $Rt\Delta ABC$ 中, 斜边 $AB=c$, 斜边上的中线 $OC=\frac{c}{2}$ 为已知, 设 $AC=t$, $BC=u$ (图 1—3). 则有

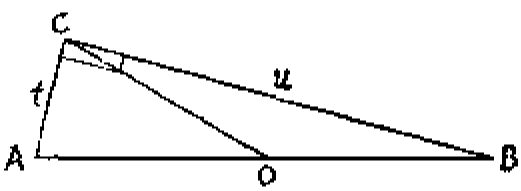


图 1—3

$$\begin{cases} tu=\left(\frac{c}{2}\right)^2; & (1) \\ t^2+u^2=c^2. & (2) \end{cases}$$

(1)·2 + (2)：$(t+u)^2=\frac{3}{2}c^2$；两边开平方取正值，得

$$t+u=\frac{\sqrt{6}}{2}c. \tag{3}$$

(1)、(3)联立，t、u分别是下列一元二次方程的两个根：

$$x^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}c\right)x+\left(\frac{c}{2}\right)^2=0. \tag{4}$$

显然，(4)有二正实根．因此问题归结为一元二次方程(4)的根的作图，而这是完全可能的(作法见后面附注)．

如果由(1)、(3)，具体算出

$$t(\text{或}\ u)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}c=c\cos15^\circ,$$

$$u(\text{或}\ t)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}c=c\sin15^\circ,$$

也可先利用代数法，直接作出线段$\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}c$；或者根据角的特别值作出15°角或75°角，从而最后完成斜边为c的直角三角形的作图．

【附注】 1．作图题视题中对于所求图形位置的要求不同而分为两大类：

第一类，如果求作的图形必须作在指定的位置，则称这类作图为定位作图．例如“过已知直线外一已知点作已知直线的平行线”就是定位作图．

第二类，如果对于所求图形的位置没有硬性的限制，这种作图叫活位作图．例如，“在定圆中作内接正方形”、“已知边长作正三角形”等都是活位作图．

按一定方法把作图题所求图形作出的过程，叫做解作图题．凡定位作图，能作出多少个适合条件的图形，就说有多

少个“解”；在活位作图里，若适合条件的图形彼此合同（通俗地说就是全等），则不论能作出多少个都称为一“解”，不合同的才算不同的解．无论哪类作图，当所求图形不存在时，便说这个作图题“无解”．

由此可知，本题作图属活位作图；不仅有解，而且适合条件的图形彼此合同，故为一解．

2．关于一元二次方程的根的作图问题．

设

$$x^2-px+qr=0 \tag{5}$$

（p、q、$r>0$，且 $p^2\geqslant 4qr$）的两根为 x_1 和 x_2，则

$$x_1+x_2=p;\quad x_1x_2=qr.$$

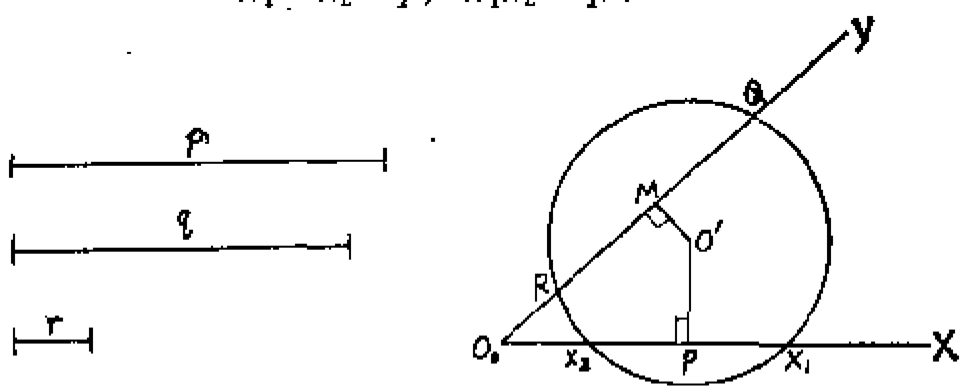


图 1—4

1）自平面上任一点 O_0 引二射线 O_0X 与 O_0Y（图1—4）；

2）在 O_0X 上截 $\overline{O_0P}=\frac{1}{2}p$，在 O_0Y 上截取 $\overline{O_0Q}=q$、$\overline{O_0R}=r$；

3）过 P 引 O_0X 的垂线 PO'，作 QR 的中垂线 MO'，O' 为此二线的交点；

4）以 O' 为圆心，$O'Q(=O'R)$ 为半径作 $\odot O'$，设 $\odot O'$ 与 O_0X 交于 X_1 与 X_2 两点，则 $\overline{O_0X_1}$、$\overline{O_0X_2}$ 即为所求的两

根.

这是因为根据作法，我们有：

$$\overline{O_0X_1}+\overline{O_0X_2}=2\overline{O_0P}=2\cdot\frac{1}{2}p=p;$$

$$\overline{O_0X_1}\cdot\overline{O_0X_2}=\overline{O_0Q}\cdot\overline{O_0R}=qr.$$

将(5)与(4)比较，易知：

$$p=\frac{\sqrt{6}}{2}c;\ q=r=\frac{c}{2}.$$

对于 $p=\frac{\sqrt{6}}{2}c$ 来说，根据勾股定理或比例中项，显然可以作出该线段；对于$q=r=\frac{c}{2}$来说，只不过 Q、R、M 三点重合罢了，所作出的图 1—4 仍然有效.

3. 上面所列举的解法，都与作出某线段有关，如斜边上的高、两条直角边等等. 现在，我们再介绍"通过确定某角的大小来解决作图问题"，当然，这就要涉及到三角知识了.

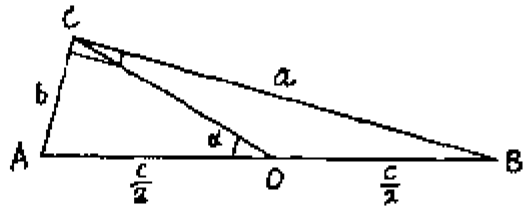


图 1—5

设所求的 $Rt\Delta ABC$ 已作出(图 1—5)，则有(式中 S 记相应图形的面积)：

$$S_{\Delta OAC}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$$

$$=\frac{1}{4}ab=\frac{c^2}{16}.$$

又因

$$S_{\Delta OAC}=\frac{1}{2}OA\cdot OC\cdot\sin\alpha=\frac{c^2}{8}\sin\alpha,$$

所以

$$\frac{c^2}{8}\sin\alpha=\frac{c^2}{16},\ \sin\alpha=\frac{1}{2},\ \alpha=30^\circ(\text{或 }150^\circ).$$

由此得到下述作法：

1) 作角 $\alpha=30^\circ$(或 150°)；

2) 以 α 为顶角，$\frac{c}{2}$为腰作等腰ΔAOC(或 ΔBOC)；

3) 延长 AO 至 B(或 BO 至 A)，使 $BO=AO$;

4) 连 BC(或 AC)，则 ΔABC 即为所求.

事实上，由作法易知：

$$\angle ACO=75^\circ,\ \angle BCO=15^\circ,$$

因而

$$\angle ACB=\angle ACO+\angle BCO=75^\circ+15^\circ=90^\circ;$$

又斜边 $AB=AO+OB=c$；并且

$$ab=2S_{\triangle ABC}=2(2S_{\triangle OAC})=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}\sin30^\circ$$

$$=\frac{c^2}{4}=\left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

于是，证明了作图的正确性.

第 五 题 (罗马尼亚命题)

在一平面内的线段 AB 上，任选一内点 M，然后，在直线 AB 的同一侧，分别以 AM 和 MB 为边作正方形 $AMCD$ 和 $MBEF$. 这两正方形的外接圆依次为 $\odot P$ 和 $\odot Q$，它们除相交于点 M 外，还在另一点 N 相交.

a) 证明：直线 AF 和 BC 都通过点 N；

b) 证明：不论线段 AB 上的点 M 怎样选取，直线 MN 总通过一固定点 R；

c) 当点 M 在线段 AB 上变动时，确定线段 PQ 的中点的轨迹.

【分析】 本题只涉及到直线和圆，要证明“线过点”或“点在线上”的问题，以及轨迹的探求，用解析几何的方法（当然，也可以用纯几何的方法，如下述的解法二）解决既便于思考，又易于入手．在解题思路的分析过程中，用符号“$\Longrightarrow$”表示“由左端可推知右端”这一事实．

由题意，线段 AB 为已知，建立以 A 为原点、射线 AB 为横轴正向的坐标系较为适当．于是，点 A、B 的坐标均为已知，点 M 的坐标可设为 $(m,0)$，其中 m 为参变数．

a) 由点 A、B、M 的坐标 $\Longrightarrow$ 点 P、Q 的坐标

$\Longrightarrow \odot P$、$\odot Q$ 的方程

$\Longrightarrow$ 点 N 的坐标．

再由点 A、B、M 的坐标 $\Longrightarrow$ 直线 AF、BC 的方程．

将点 N 的坐标分别代入直线 AF、BC 的方程中验算，即知直线 AF、BC 都通过点 N．

b) 由 $\odot P$ 和 $\odot Q$ 的方程，消去二次项，即得直线 MN 的方程．因为这个方程的系数含有 m，如按 m 集项整理，则可观察出固定点 R 的坐标．

c) 由点 P、Q 的坐标，算出线段 PQ 的中点的坐标，易知这个中点的坐标含有参变数 m，从中可以推知所求的轨迹．

〈解法一〉 建立平面直角坐标系如图1—6．$A(0,\ 0)$、$B(b,\ 0)$ 为已知，设点 M 的坐标为 $(m,0)$，参变数坐标 m 随点 M 在 AB 上变动而在 0 与 b 之间变化．

a) 因为 $AMCD$ 和 $MBEF$ 都是正方形，所以它们中心的坐标依次为 $P\left(\frac{m}{2},\ \frac{m}{2}\right)$ 和 $Q\left(\frac{b+m}{2},\ \frac{b-m}{2}\right)$．于是，$\odot P$ 和 $\odot Q$ 的方程分别为：

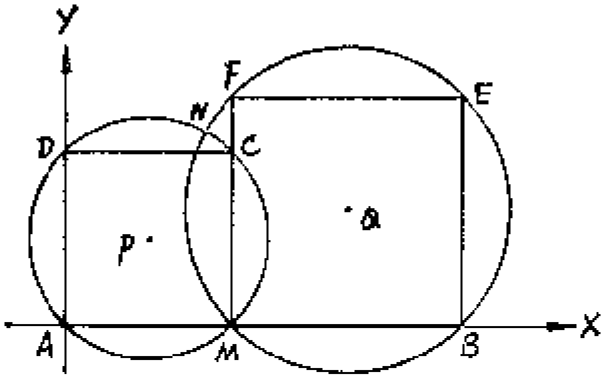


图 1—6

$$\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{m}{2}\right)^2=\frac{m^2}{2},$$

即

$$x^2+y^2-mx-my=0; \tag{1}$$

$$\left(x-\frac{b+m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b-m}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(b-m)^2,$$

即

$$x^2+y^2-(b+m)x-(b-m)y+bm=0. \tag{2}$$

(1) − (2)，得

$$bx+(b-2m)y-bm=0. \tag{3}$$

易知(3)为通过两圆交点的直线 MN 的方程.

由(3)解出 x 用 y 表示，并将结果代入(1)，整理后得到

$$(2b^2-4bm+4m^2)y^2-2bm(b-m)y=0,$$

解此方程，得

$$y_1=0;\quad y_2=\frac{bm(b-m)}{b^2-2bm+2m^2}.$$

将 y 的值代入(3)，求得 x 的对应值：

$$x_1=m;\quad x_2=\frac{bm^2}{b^2-2bm+2m^2}.$$

这里，(x_1, y_1)为点 M 的坐标，而(x_2, y_2)则是点 N 的坐标.

又通过 $A(o,o)$、$F(m,b-m)$两点的直线方程为

$$(b-m)x-my=0; \tag{4}$$

通过 $B(b,o)$、$C(m,n)$两点的直线方程为

$$mx+(b-m)y-bm=0. \tag{5}$$

容易验算，$(x_2、y_2)$既满足(4)，又满足(5)，所以直线 AF 和 BC 都通过点 N.

b) 将直线 MN 的方程(3)按 m 集项整理，得

$$m(2y+b)=b(x+y). \tag{6}$$

因为 b 是不等于零(否则 A 与 B 重合)的给定常数，故当

$$2y+b=x+y=0 \tag{7}$$

时，对 m 的任意实数值(6)皆成立.

由(7)，得 $x=\frac{b}{2}$，$y=-\frac{b}{2}$，这就是固定点 R 的坐标(见图 1—7). 所以，不论线段 AB 上的点 M 怎样选取，直线 MN 总通过一固定点 $R(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2})$.

c) 根据 $P(\frac{m}{2}, \frac{m}{2})$和 $Q(\frac{b+m}{2}, \frac{b-m}{2})$，可求出 PQ 中点的坐标：

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{b+m}{2}\right)=\frac{b+2m}{4};$$

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{b-m}{2}\right)=\frac{b}{4}.$$

由此可知，当 m 在 0 至 b 的区间内变化时，PQ 中点的轨迹是：

在点$\left(\frac{b}{4},\ \frac{b}{4}\right)$至$\left(\frac{3b}{4},\ \frac{b}{4}\right)$之间变动的线段，线段的两个端点是轨迹的极限点；此线段平行于 AB，与 AB 相距 $\frac{b}{4}$，长为$\frac{b}{2}$(如图 1—7 所示)。

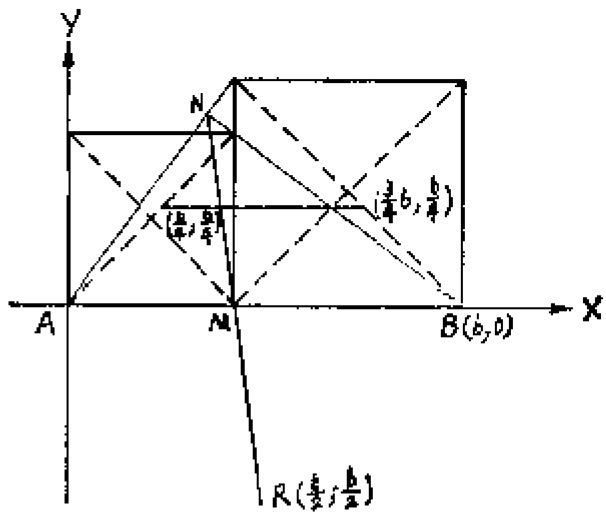


图 1—7

〈**解法二**〉 这里用纯几何的方法解决.

a）假定直线 AF 和 BC 相交于点 N'，如图 1—8 所示. 在 $Rt\triangle AMF$ 与 $Rt\triangle CMB$ 中：

$\because$ $AM = CM, MF = MB$,

$\therefore$ $Rt\triangle AMF \cong Rt\triangle CMB$.

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$.

$\therefore$ B、M、N'、F 四点共$\odot Q'$.

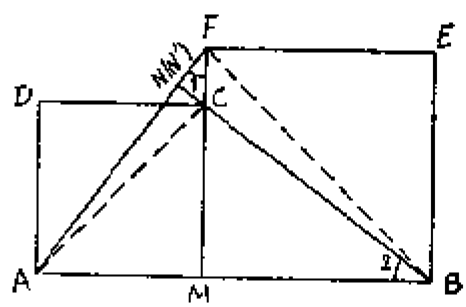


图 1—8

连 BF，则由 $\angle BMF = 90°$ 知 $\odot Q'$ 的直径为 BF，因而 $\odot Q'$ 即正方形 $MBEF$ 的外接圆 $\odot Q$，所以点 N' 在$\odot Q$ 上.

同理可证，点 N' 也在$\odot P$ 上. 故 N' 是除交点 M 外，

$\odot P$ 与 $\odot Q$ 的另一交点，因而 N' 与 N 重合．这就证明了直线 AF 和 BC 都通过点 N．

b) 由 a) 已证 知 $\angle ANB = 90^\circ$（图 1—8），故点 N 在以已知线段 AB 为直径的定圆上，设此圆为 $\odot O$．

又连 AC，则 $\angle ANM = \angle ACM = 45^\circ$，因而 $\angle BNM = 45^\circ$，即 MN 平分 $\angle ANB$．所以，直线 MN 必通过 $\odot O$ 在 AB 另一侧的半圆弧的中点 R（见图 1—9）．

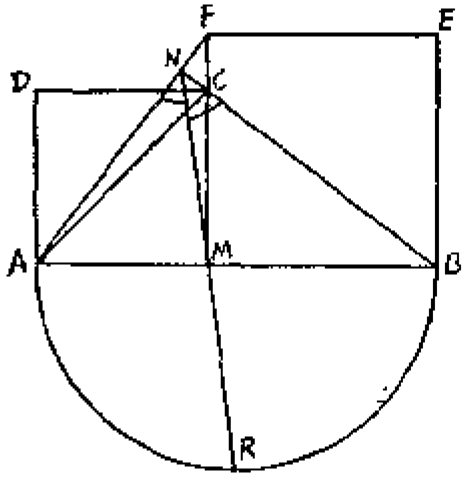


图 1—9

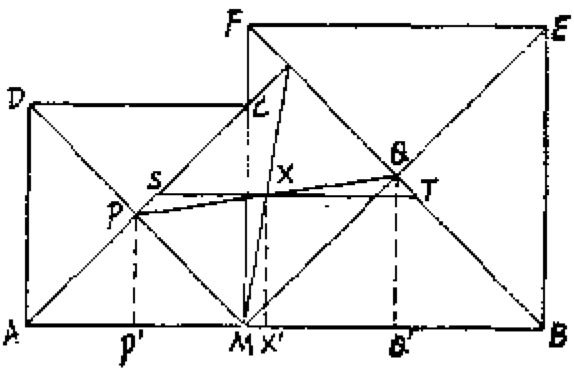


图 1—10

c) 设 X 是合于条件的点，在 AB 上分别作出 P、X、Q 的射影（图 1—10），则在直角梯形 $PP'Q'Q$ 中，有

$$XX' = \frac{1}{2}(\overline{PP'} + \overline{QQ'}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{AD}}{2} + \frac{\overline{BE}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\overline{AB}$$

为定值．

过点 X 作 $ST \parallel AB$，分别与直线 AC、BF 交于 S、T，则线段 ST 即为所求的轨迹（充要性证明从略）．这里，当 X 与端点 S（或 T）重合时，正方形 $AMCD$（或 $MBEF$）退缩为

点 A(或 B).

【附注】 1. 在解法一中，证明问题 b) 时，先将

$$bx + (b-2m)y - bm = 0 \tag{3}$$

变形，按 m 集项整理为

$$m(2y+b) = b(x+y) \tag{6}$$

从而很快获得解答.

若不如此处理，由 (3) 就不便回答“x、y 为何实数时，对 m 的任意实数值 (3) 皆成立”这一问题. 可见，将 (3) 按 m 集项变形是一个解题技巧，应灵活运用.

2. 关于“同一法”的简介.

在解法二中，对于问题 a)，是将要证的“直线 AF 和 BC 都通过点 N”，变为“AF 与 BC 的交点 N' 与 N 重合”进行推证的，这就是同一法. 此法有时颇有用处，当欲证某图形具有某种特性而不易直接证明时，使用此法往往可以克服这个困难.

我们知道，任何命题都有和它等效的命题. 因此，要证某个命题真确，可先斟酌一下，或直接从原题入手，或间接从它的等效命题着眼. 由于这两方面的不同，证明的方法便分为直接的与间接的两种.

有的命题，往往不易甚或不能从原题直接证明，这时不妨改为证明它的等效命题成立，结果也能间接地达到目的. 这样的证明方法，叫做间接证法.

间接证法又分为反证法和同一法两种. 在同一法则（对于两个互逆命题，当知其一成立时，立即知道另一也成立，这个道理叫做同一法则）下证明原定理的逆命题成立的一种方法，叫做同一法. 具体的做法是作出一个具有所说的特性

的图形，然后证明所作的与题说的原是一个东西.

3. 在解法二中，采用了同一法对有关问题进行了证明，但具体的做法细节是各种各样的，例如下面的证明又是一种．这就是说，本问题的证明，使用间接证法中的同一法比较方便.

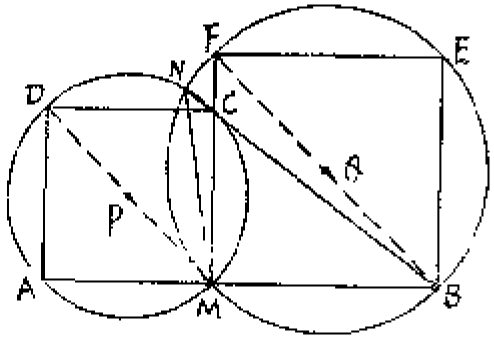


图 1—11

连 MPD、MN、BC、CN、BQF（图 1—11）．在圆 P 内，有

$$\angle MNC=\angle MDC=45^\circ;$$

在$\odot Q$内，有

$$\angle MNB=\angle MFB=45^\circ.$$

所以$\angle MNC=\angle MNB$，因此 NC 与 NB 为同一条直线．也就是说，直线 BC 通过点 N.

同理，直线 AF 也通过点 N．问题 a）至此证毕.

下面，再利用同一法来证明问题 b）.

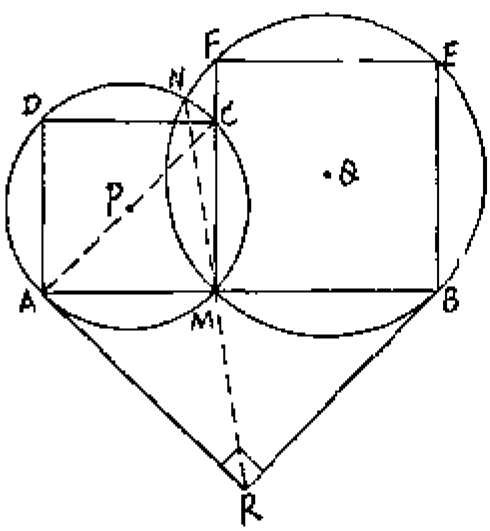


图 1—12

在直线 AB 的另一侧（即两个正方形的异侧），以 AB 为斜边作等腰直角三角形 ABR（图 1—12），且连 APC，则有

$$\angle RAC=\angle RAB+\angle BAC$$
$$=45^\circ+45^\circ=90^\circ.$$

因此，PA 切$\odot P$ 于 A．同理，RB 切圆 Q 于B.

连 RM，并延长 RM 与$\odot P$交于 N_P，与$\odot Q$ 交于 N_Q．这样

就有

$$RA^2 = RM \cdot RN_P,\quad RB^2 = RM \cdot RN_Q.$$

但因 $RA = RB$，故 $RM \cdot RN_P = RM \cdot RN_Q$，即

$$RN_P = RN_Q.$$

这就是说，N_P 与 N_Q 是同一点，即直线 RM 经过圆 P 与圆 Q 的另一交点 N。换言之，动直线 MN 总通过一固定点 R。

第　六　题 (捷克斯洛伐克命题)

平面 P 与 Q 相交于直线 g。又在平面 P 与 Q 内分别给出不在直线 g 上的两点 A 和 C。求作一个以 AB 和 CD 为两底的等腰梯形 $ABCD$，使之能作一内切圆，并要求点 B 在平面 P 内，点 D 在平面 Q 内。

【分析】 这是一个空间作图题。我们知道，立几问题一般都转化为平几问题，逐步给以解决。要完成作图，先要考虑作出梯形 $ABCD$ 所在的平面 AC，然后在平面 AC 内(图1—13)，再考虑能容内切圆的等腰梯形的作图。

如何作出平面 AC？因直线 $AB /\!/$ 直线 CD，且它们分别是平面 AC 与平面 P、平面 Q 的交线，所以有：

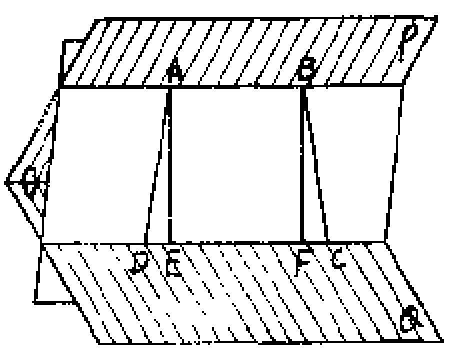


图 1—13

直线 $AB /\!/$ 直线 $g /\!/$ 直线 CD。

因此，在平面 P 内，过点 A 作直线 AB 平行于直线 g；在平面 Q 内，过点 C 作直线 CD 平行于直线 g；最后，过二平行线 AB 与 CD 即作出平面 AC。

在平面 AC 内，假定符合条件的等腰梯形 $ABCD$ 已作出，且不妨设 $\overline{AB}<\overline{CD}$，则有

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}=2\overline{AD}. \qquad (1)$$

为了确定点 D，过点 A 作 $AE\perp CD$，E 为垂足（见图1—13），因 A、C 为已知点，故 $\overline{AE}$、$\overline{CE}$ 为定线段，又过 B 作 $BF\perp CD$，F 为垂足，则 $\overline{DE}=\overline{CF}$，$\overline{AB}=\overline{EF}$. 于是，有

$$\begin{aligned}\overline{AB}+\overline{CD}&=\overline{EF}+(\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{CF})\\&=2(\overline{EF}+\overline{CF})\\&=2\overline{CE}. \qquad (2)\end{aligned}$$

比较(1)、(2)，知 $\overline{AD}=\overline{CE}$. 因此点 D 可定，整个梯形可作.

〈解答〉 由上述分析得到如下作法(图1—13)：

1）分别在平面 P 及平面 Q 内，过点 A 作直线 $AB\parallel$ 直线 g，过点 C 作直线 $CD\parallel$ 直线 g；

2）过两平行直线 AB 和 CD 作平面 AC；

3）在平面 AC 内，过点 A 作直线 $AE\perp CD$ 于 E 点；

4）以 A 为圆心，$\overline{CE}$ 为半径，在平面 AC 内作弧，交直线 CD 于点 D，使 D 位于 CE 的延长线上；

5）在射线 AB 上，截 $\overline{AB}=\overline{CE}-\overline{DE}$；

6）在平面 AC 内，连结 AD 与 BC，则平面四边形 $ABCD$ 符合所求.

我们来证明这一事实(图1—13)：

由作法易知，点 B 和点 D 分别在平面 P 和平面 Q 内，且 $AB\parallel CD$，故平面四边形 $ABCD$ 为梯形.

在平面 AC 上，过点 B 作 $BF\perp CD$ 于 F 点，则 $\overline{AB}=$

$\overline{EF}$，$\overline{AE}=\overline{BF}$．于是，有

$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{BF}^2+\overline{CF}^2}=\sqrt{\overline{AE}^2+(\overline{CE}-\overline{EF})^2}$$
$$=\sqrt{\overline{AE}^2+(\overline{CE}-\overline{AB})^2}$$
$$=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{DE}^2}\ (\text{由作法 5) 知 } \overline{CE}-\overline{AB}=\overline{DE})$$
$$=\overline{AD}.$$

因此，梯形 $ABCD$ 是等腰梯形．

又因为

$$\overline{AD}+\overline{BC}=2\cdot\overline{AD}=2\cdot\overline{CE}=\overline{CE}+(\overline{EF}+\overline{CF})$$
$$=\overline{CE}+(\overline{AB}+\overline{DE})=\overline{AB}+(\overline{CE}+\overline{DE})$$
$$=\overline{AB}+\overline{CD},$$

所以等腰梯形 $ABCD$ 必有一内切圆．事实上，以等腰梯形 $ABCD$ 的对称轴夹于两底间的线段为直径作圆，就是它的内切圆．

上面，对作图无误进行了论证．这里再对作图进行讨论，由作法 4）知，以点 A 为圆心，$\overline{CE}$ 为半径，在平面 AC 内作弧时有且仅有如下三种情况发生：

第一种情况，当 $\overline{CE}>\overline{AE}$，弧线与直线 CD 有两个交点 D 和 D'，此时，不仅有解，且有两解，即两个全等的等腰梯形 $ABCD$ 和 $AB'CD'$（图 1—14）．

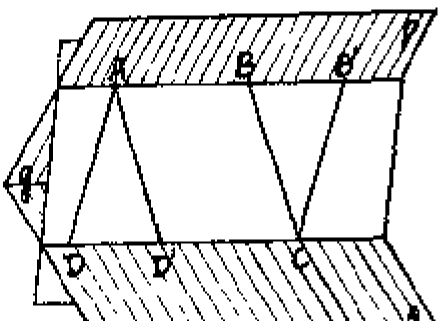


图 1—14

第二种情况，当 $\overline{CE}=\overline{AE}$，弧线与直线 CD 相切．此时，只有一解，即 AD 与 AE 重合，梯形变为正方形．

第三种情况，当 $\overline{CE}<\overline{AE}$，弧线与直线 CD 相离．此时无解．

【附注】 1．本题属定位作图，凡能作出多少个适合条件的图形，不论全等与否，就说有多少个“解”，这点与活位作图不同（参看第一题的附注）．

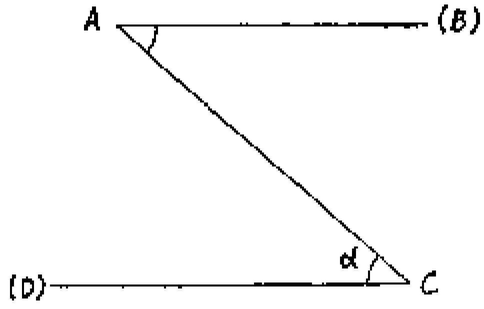


图 1—15

2．根据题给条件，A、C 都是定点，射线 $A(B)$，$C(D)$ 都有确定方向，因而角 α（如图 1—15）也是确定的，所以作图能否完成，也是取决于角 α 的大小的．事实上，易知：

根据角 α 小于、等于、大于 $45°$，分三种情况进行讨论，其结果与上述一致．

第二届国际中学生
数学竞赛试题分析与解答

1960年在罗马尼亚举行

第　一　题 (保加利亚命题)

试求所有能被 11 整除的三位数，且除得之商等于被除数中各数字的平方和.

【分析】 要求出一个整数，只要求出整数的各个数位上的数字即可. 我们知道，凡三位数都可写成

$$Z=a\cdot 10^2+b\cdot 10+c$$

的形式，其中 a 为非零一位数字，b、c 都是 0 至 9 中的数字.

因为 $11\mid Z$，故由

$$\frac{a\cdot 10^2+b\cdot 10+c}{11}=9a+b+\frac{a-b+c}{11}$$

知 $11\mid a-b+c$. 但据上述，a、b、c 都是一位数字，所以

$$-8\leqslant a-b-c\leqslant 18.$$

因而有且仅有：

$$a-b+c=0 \text{ 或 } a-b+c=11.$$

又由“商等于被除数中各数字的平方和”，得

$$\frac{a\cdot 10^2+b\cdot 10+c}{11}=a^2+b^2+c^2.$$

因此，问题转化为求二次不定方程的(正)整数解.

〈解答〉 设所求的三位数为

$$Z=a\cdot 10^2+b\cdot 10+c,$$

整数 a、b、c 满足条件.

$$1\leqslant a\leqslant 9,\quad 0\leqslant b\leqslant 9,\quad 0\leqslant c\leqslant 9.$$

因 $11\mid Z$，故 $11\mid a-b+c$. 由于

$$-8\leqslant a-b+c\leqslant 18,$$

所以

$$a-b+c=0; \tag{1}$$

或

$$a-b+c=11. \tag{2}$$

另一方面，a、b、c 又必须满足方程

$$a\cdot 10^2+b\cdot 10+c=11(a^2+b^2+c^2). \tag{3}$$

为求数字 a、b、c，下面分两种情况进行.

第一种情况，(1)与(3)联立:

由(1)，

$$b=a+c. \tag{4}$$

(4)代入(3)，得:

$$100a+10a+10c+c=11(2a^2+2ac+2c^2),$$

$$10a+c=2(a^2+ac+c^2). \tag{5}$$

将(5)按文字 a 整理，得

$$a^2+(c-5)a+c^2-\frac{c}{2}=0. \tag{6}$$

由(6)解出 a 以 c 表示:

$$a=\frac{1}{2}(5-c\pm\sqrt{25-8c-3c^2}). \tag{7}$$

因由(5)知，$2(a^2+ac+c^2)$ 是偶数，即 $10a+c$ 是偶数，

从而 c 必为偶数，故 c 为 0、2、4、6、8.

将 c 的值代入(7)中验算，只有 $c=0$ 为可能，此时 $a=5$（a 的另一值为零，显然与题不合），$b=5$. 故所求三位数为 $Z=550$.

第二种情况，(2)与(3)联立：

由(2)，

$$b=a+c-11. \tag{8}$$

(8)代入(3)，得

$$100a+10(a+c-11)+c=11[a^2+(a+c-11)^2+c^2],$$

$$10a+c=131+2(a^2+c^2+ac-11a-11c). \tag{9}$$

将(9)按文字 a 整理，得

$$a^2+(c-16)a+c^2-\frac{23c}{2}+\frac{131}{2}=0. \tag{10}$$

由(10)解出 a 以 c 表示：

$$a=\frac{1}{2}(16-c\pm\sqrt{-6+14c-3c^2}). \tag{11}$$

因由(9)知，$131+2(a^2+c^2+ac-11a-11c)$ 是奇数，即 $10a+c$ 是奇数，从而 c 必为奇数，故 c 为 1、3、5、7、9.

将 c 的值代入(11)中验算，只有 $c=3$ 为可能，此时 $a=8$（a 的另一值为 5，但与题不合，因由(8)知此时 $b=5+3-11<0$），$b=0$. 故所求三位数为 $Z=803$.

总之，本题的答案是 550 和 803，这两数显然都满足问题的要求.

【附注】 1. 题中涉及到的方程组

$$\begin{cases}100a+10b+c=11(a^2+b^2+c^2),\\ a-b+c=0\ （或\ a-b+c=11）\end{cases}$$

有两个方程，三个未知数，一般来说，存在无数组解；又如

师

$$36x+83y=1 \qquad (12)$$

是一个方程，含有两个未知数，也存在无数组解.

一般地，人们将未知数的个数多于独立方程式的个数的方程(组)，叫做不定方程.

虽然不定方程的解一般是不定的，但若与实际问题联系起来，或者对未知数作出某些限制，则它的解也就确定了，以至能具体求出解来（求不定方程的整数解的问题，属于数学中一个古老而重要的分支——数论的内容）.

例如，在本题中，由于a、b、c不仅为整数，而且

$$1\leqslant a\leqslant 9,\ 0\leqslant b\leqslant 9,\ 0\leqslant c\leqslant 9,$$

故解为确定的(5，5，0)和(8，0，3)两组；又如把二元一次不定方程(12)的未知数限制在整数集合内，则其解就只有一组(30，－13).

2. 整数集合对加、减、乘运算封闭，即任二整数之和、差、积仍为整数. 但在一般情况下，二整数相除所得之商往往不是整数，即整数集合对除法运算不能自封.

只有在一定的条件下，整数a除以整数b($\neq 0$)的商才为整数. 这种情况称a被b整除，或b整除a，并用记号

$$b\mid a$$

表示；否则，称a不能被b整除，或b不整除a，并用记号

$$b\nmid a$$

表示. 例如，$3\mid 6$，$(-5)\mid 20$；$2\nmid 3$，$(-3)\nmid 5$等等.

什么叫数论？概括地说，数论是研究整数的性质的一门学科. 研究“在什么情况下，才有$b\mid a$”这个问题，就是研究整数的整除性. 它是数论的重要基础和组成部分.

3. 关于整数的整除性简介.

这里介绍几个简单性质，它在有关问题中，是判别能否整除的常用的重要依据.

我们知道，任一 n 位整数 Z 都可以表示为：

$$\begin{aligned} Z &= a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_2 a_1 a_0 \\ &= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots \\ &\quad + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0, \end{aligned}$$

其中 $a_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 皆为 0 至 9 中的数字.

1）若整数的个位数字能被 2 或 5 整除，则此数必能被 2 或 5 整除；反之亦真.

2）若整数的十位与个位数字所共同组成的二位数能被 4 或 25 整除，则此数必能被 4 或 25 整除；反之亦真.

事实上，将 n 位整数 Z 写作如下形式：

$$\begin{aligned} Z &= a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_2 a_1 a_0 \\ &= (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10^2) \\ &\quad + (a_1 \cdot 10 + a_0), \end{aligned}$$

即
$$Z = 25N + a_1 a_0. \tag{13}$$

其中 N 为整数，$a_1 a_0$ 是由十位与个位数字所组成的二位数.

由 (13) 易知，若 $25 \mid a_1 a_0$，则必有 $25 \mid Z$；反之，若 $25 \mid Z$，则也有 $25 \mid a_1 a_0$.

关于其它情况，同理可证.

3）若整数的各位数字之和能被 3 或 9 整除，则此数必能被 3 或 9 整除；反之亦真.

为证明 3)，将 n 位整数 Z 改写成下述形式：

$$\begin{aligned} Z &= a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_2 a_1 a_0 \\ &= a_n (9+1)^n + a_{n-1} (9+1)^{n-1} + a_{n-2} (9+1)^{n-2} + \cdots \\ &\quad + a_2 (9+1)^2 + a_1 (9+1) + a_0, \end{aligned}$$

即 $$Z=9N+(a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1+a_0), \quad (14)$$
其中 N 为整数.

由(14)显然可知，若 3 或 9 能整除

$$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1+a_0,$$

则 3 或 9 必能整除 Z；反之，若 3 或 9 能整除 Z，则 3 或 9 也能整除

$$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1+a_0.$$

4）若整数中的奇位数字和与偶位数字和之差能被 11 整除，则此数必能被 11 整除；反之亦真.

为证明 4)，将 Z 改写成下述形式：

$$\begin{aligned}
Z &= a_n a_{n-1} a_{n-2}\cdots a_2 a_1 a_0 \\
&= a_n(11-1)^n + a_{n-1}(11-1)^{n-1} + a_{n-2}(11-1)^{n-2} \\
&\quad + \cdots + a_2(11-1)^2 + a_1(11-1) + a_0 \\
&= a_n[11N_n + (-1)^n] + a_{n-1}[11N_{n-1} + (-1)^{n-1}] \\
&\quad + a_{n-2}[11N_{n-2} + (-1)^{n-2}] + \cdots \\
&\quad + a_2[11N_2 + (-1)^2] + a_1(11-1) + a_0,
\end{aligned}$$

即

$$Z=11N+[(a_0+a_2+a_4+\cdots)-(a_1+a_3+a_5+\cdots)], \quad (15)$$

其中 N、N_i 皆为整数，圆括号内加至何项，视 n 的奇偶而定，比如：

当 n 为奇数时，则

$$a_0+a_2+a_4+\cdots=a_0-a_2+a_4+\cdots+a_{n-1},$$

$$a_1+a_3+a_5+\cdots=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_n;$$

当 n 为偶数时，则

$$a_0+a_2+a_4+\cdots=a_0+a_2+a_4+\cdots+a_n,$$

$$a_1+a_3+a_5+\cdots=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{n-1}.$$

由(15)显然可知，若

$$11 \mid [(a_0+a_2+a_4+\cdots)-(a_1+a_3+a_5+\cdots)],$$

则必有 $11 \mid Z$；反之，若 $11 \mid Z$，则也有

$$11 \mid [(a_0+a_2+a_4+\cdots)-(a_1+a_3+a_5+\cdots)].$$

性质 4)至此证毕.

本题所求的是能被 11 整除的三位数

$$Z=a\cdot 10^2+b\cdot 10+c,$$

因而有 $11 \mid a-b+c$，即 $11 \mid (a+c)-b$. 显然，这是性质 4)当 $n=2$ 时的特殊情况.

第 二 题 （匈牙利命题）

对于 x 的哪些值，下列不等式成立：

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9.$$

【分析】 本题就是求解不等式. 题中不等式左端，既含有平方根号，又是分式，因而下列条件是不等式成立的前提：

$x \geqslant -\frac{1}{2}$，否则 $\sqrt{1+2x}$ 在实数集内无意义；

$x \neq 0$，否则左端分母为零，分式无意义.

在此允许值范围内，对不等式作同解变形，最后得到不等式的解.

〈解答〉 不等式左端

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}=\left(\frac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2$$

$$=\left[\frac{2x(1+\sqrt{1+2x})}{(1-\sqrt{1+2x})(1+\sqrt{1+2x})}\right]^2$$

$$=\left(\frac{2x(1+\sqrt{1+2x})}{1-(1+2x)}\right)^2$$
$$=(1+\sqrt{1+2x})^2$$
$$=2+2x+2\sqrt{1+2x}.$$

在 $x\geqslant-\frac{1}{2}$，且 $x\neq0$ 的条件下，原不等式同解地变为：

$$2+2x+2\sqrt{1+2x}<2x+9,$$
$$2\sqrt{1+2x}<7.$$

因 $\sqrt{1+2x}\geqslant0$，故可将上式两端分别平方，并解之得

$$x<\frac{45}{8}=5.625.$$

结合考虑 $x\geqslant-\frac{1}{2}$，且 $x\neq0$ 的条件，我们得到不等式的解，亦即本题的答案：

对于 $-0.5\leqslant x<0$，或 $0<x<5.625$，原不等式成立.

【附注】 1. 这题比较简单，我们的中学生解答本题，一般来说，不会有大的困难. 但仍应引起注意的是：

将不等式施行平方时，应先考虑两端符号的正负，否则，将不能决定不等号的方向. 这与等式相比，就有所不同.

解 $2\sqrt{1+2x}<7$ 得 $x<5.625$ 后，不能以此作为原不等式的解. 因将原不等式同解变形为 $2\sqrt{1+2x}<7$，是在“$x\geqslant-\frac{1}{2}$，且 $x\neq0$”这一条件下进行的，故最后答案应为使

$$x<5.625、x\geqslant-0.5、x\neq0$$

三者同时满足的数的集合，也就是它们的交集.

2. 将分式 $\frac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}$ 变为整式 $1+\sqrt{1+2x}$，是借助于“有理化”达到的. 这是一个解题技巧，有时要有理化分母，

有时却要有理化分子，应视具体情况灵活选择.

第 三 题 （罗马尼亚命题）

已知一个直角三角形 ABC，其斜边 BC 被分为 n 等分，n 是奇数．α 表示 A 点对包含斜边中点在内的那一等分线段的视角．a 为斜边，h 为斜边上的高，求证：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

【分析】 因为 n 是奇数，所以斜边上居于中间的那一等分，也只有这一等分包含斜边的中点．设 AD 是 $Rt\triangle ABC$ 斜边 BC 上的高，AO 是中线(图 2—1)．由于视角 α 所在的三角形为 EAF，一般不是直角三角形，因而不便从中求出 $\operatorname{tg}\alpha$ 的表达式．

为此，引进角 β 和 γ，则有

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\beta-\gamma).$$

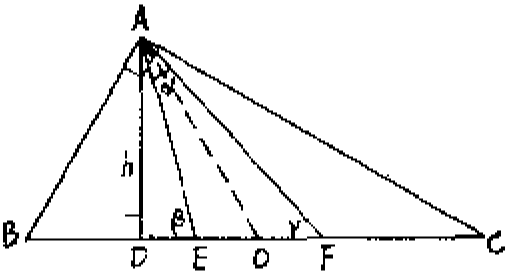


图 2—1

展开 $\operatorname{tg}(\beta-\gamma)$，用 $\operatorname{tg}\beta$ 和 $\operatorname{tg}\gamma$ 表示．因为 β 是 $Rt\triangle ADE$ 的一个锐角，γ 是 $Rt\triangle ADF$ 的一个锐角，所以 $\operatorname{tg}\beta$、$\operatorname{tg}\gamma$ 都可用 a、h、n 表出．这就是说，$\operatorname{tg}\alpha$ 可以用 a、h、n 表出．下面，就沿着这一思路，展开对本题的证明．

〈**证法一**〉 自 A 作 $AD\perp BC$ 于 D．EF 为包含 BC 中点 O 在内的那一等分线段．连 AE、AO、AF，我们有

$$AO=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a,\ EF=\frac{a}{n},\ \angle EAF=\alpha,\ AD=h.$$

设$\angle AED=\beta$，$\angle AFD=\gamma$，则 $\alpha=\beta-\gamma$. 所以，

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\beta-\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\gamma}{1+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}. \tag{1}$$

在 $Rt\triangle AOD$ 中，

$$OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}-h^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4h^2}.$$

又因 $OE=\frac{EF}{2}=\frac{a}{2n}$，故

$$DE=OD-OE=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4h^2}-\frac{a}{2n}$$

$$=\frac{1}{2n}(n\sqrt{a^2-4h^2}-a);$$

$$DF=OD+OF=OD+OE$$

$$=\frac{1}{2n}(n\sqrt{a^2-4h^2}+a).$$

在 $Rt\triangle ADE$ 中：

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{h}{DE}=\frac{2nh}{n\sqrt{a^2-4h^2}-a}; \tag{2}$$

在 $Rt\triangle ADF$ 中：

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{h}{DF}=\frac{2nh}{n\sqrt{a^2-4h^2}+a}. \tag{3}$$

将(2)、(3)代入(1)，得

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\dfrac{2nh}{n\sqrt{a^2-4h^2}-a}-\dfrac{2nh}{n\sqrt{a^2-4h^2}+a}}{1+\dfrac{2nh}{n\sqrt{a^2-4h^2}-a}\cdot\dfrac{2nh}{n\sqrt{a^2-4h^2}+a}}$$

$$=\frac{4anh}{(n^2-1)a^2}=\frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

证毕.

〈证法二〉 如图 2—2，设$\angle DAE=\beta$，则 β 是 $Rt\triangle ADE$

的一个锐角，$\alpha+\beta$ 是 $Rt\triangle ADF$ 的一个锐角. 又令 $DE=x$，得：

$$\mathrm{tg}\beta=\frac{x}{h}; \tag{4}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{DF}{h}$$

$$=\frac{DE+EF}{h}=\frac{x+\frac{a}{n}}{h}$$

$$=\frac{nx+a}{nh},$$

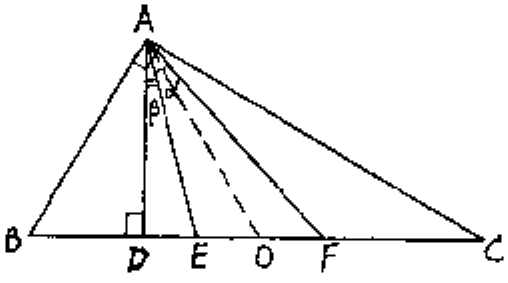


图 2—2

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}=\frac{nx+a}{nh}. \tag{5}$$

由(5)解出 $\mathrm{tg}\alpha$：

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{nx+a-nh\mathrm{tg}\beta}{nh+(nx+a)\mathrm{tg}\beta}. \tag{6}$$

(4)代入(6)，消去 $\mathrm{tg}\beta$：

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{nx+a-nx}{nh+(nx+a)\frac{x}{h}}=\frac{ah}{nh^2+ax+nx^2}. \tag{7}$$

此外，根据 $AD^2=BD\cdot CD$，又得

$$h^2=(BE-DE)(CE+DE)$$

$$=\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{a}{n}-x\right)\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{a}{n}+\frac{a}{n}+x\right),$$

$$h^2=\frac{n^2-1}{4n^2}a^2-\frac{ax}{n}-x^2. \tag{8}$$

(8)代入(7)：

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{ah}{n\left(\frac{n^2-1}{4n^2}a^2-\frac{ax}{n}-x^2\right)+ax+nx^2}$$

$$=\frac{ah}{\frac{n^2-1}{4n}a^2}=\frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

证毕.

【附注】 1. 本题综合运用了几何与三角的有关知识,且有一定的计算量. 虽有一定的难度,但未超出我国中学生所学数学内容,是练习培养解题能力的好题.

2. 上面列举了两种证法,但解题的关键在于:首先明确 α 所在的三角形,一般不是直角三角形,不能方便地表示出 $\operatorname{tg}\alpha$;引进新角,寻找直角三角形,列出若干关系,消元变形,导出结果.

第 四 题 (匈牙利命题)

已知三角形一条边上的高 h_b,以及另一条边上的高 h_a 与中线 m_a,求作此三角形.

【分析】 假设 $\triangle ABC$ 就是所求作的三角形,AC 边上的高 $BE=h_b$,以及 BC 边上的高 $AD=h_a$ 与中线 $AM=m_a$(图 2—3). 显然,$Rt\triangle ADM$ 可作出,因为一直角边 h_a 与斜边 m_a 为已知.

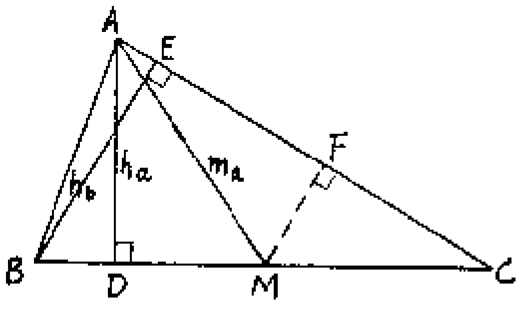


图 2—3

为了利用已知条件 h_b,自 M 作 $MF\perp AC$ 于 F,因 M 为 BC 的中点,所以

$$\overline{MF} \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}\overline{BE}=\frac{h_b}{2}.$$

从而 $Rt\triangle AFM$ 可作,理由仍为一直角边 $\frac{h_b}{2}$ 与斜边 m_a 为已

知.

由此易知，C 为 AF 与 DM 的延长线的交点；最后一点的确定，是延长 MD 至 B，使 $\overline{BM}=\overline{CM}$，即得符合要求的 B 点.

〈解答〉 根据上述分析，得如下作法(图 2—4)：

1) 作 $Rt\triangle ADM$，使直角边 $AD=h_a$，斜边 $AM=m_a$；

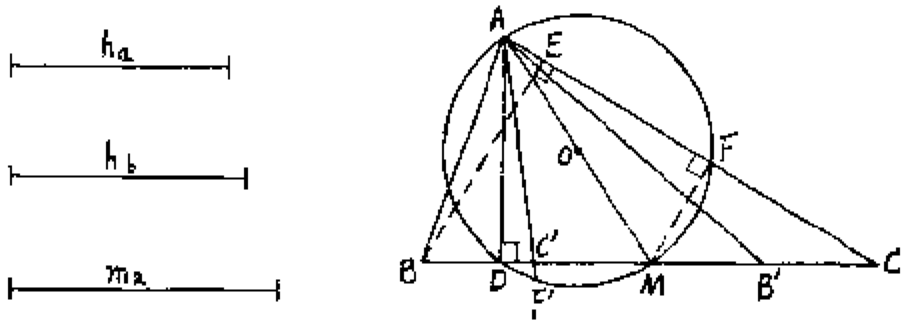


图 2—4

2) 以 AM 为直径作 $\odot O$；

3) 以点 M 为圆心，$\frac{h_b}{2}$为半径作弧，分别交 $\odot O$ 于 $F(F')$；

4) 连 $AF(AF')$，并延长与直线 DM 交于 $C(C')$；

5) 延长 $CM(C'M)$ 至 $B(B')$，使 $\overline{BM}=\overline{CM}$ ($\overline{B'M}=\overline{C'M}$)，并连 $AB(AB')$，则$\triangle ABC$ ($\triangle AB'C'$)即为所求.

为证明作图的正确性，过 B 作 $BE\perp AC$ 于 E，并连 MF，则 $\overline{MF} \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}\overline{BE}$.

$$\because \quad \overline{MF}=\frac{h_b}{2},$$

$$\therefore \quad \overline{BE}=2\overline{MF}=2\cdot\frac{h_b}{2}=h_b.$$

至于$\triangle ABC$ 的 BC 边上的高 $AD=h_a$，中线 $AM=m_a$，

则是显然的，所以$\triangle ABC$符合所求．同理可知，$\triangle AB'C'$亦符合所求．

此外，由作法知，当$m_a>h_a$，且$h_b<2m_a$时，图形确定可作．本题为活位作图，又$\triangle ABC$与$\triangle AB'C'$一般不全等，故有两解．

【附注】 两种常用的作图方法简介．

第一种，轨迹交点法：

利用轨迹来解作图题，是经常用的一种重要的作图方法．如果解决一个作图题归结起来是要确定某一点的位置，那么可以暂时放弃这点所应满足的条件之一，于是满足其余条件的点便因其位置不定而形成一个轨迹，这个轨迹往往是我们所熟知的；得了这个轨迹之后，再调换一个条件如法施行，我们将另得到一个轨迹．所求点既然满足所有条件，必然兼在得到的两个轨迹上，可见它应是这两个轨迹的交点．所以只要有方法作出那两个轨迹，问题便解决了．象这样利用轨迹的交点来解决作图题的方法，叫做轨迹交点法．

我们知道，任何几何图形都不能离开点，轨迹交点法在作图中应用最广，凡属作图，几乎没有不用到它的．以本题作图为例，在作直角$\triangle ADM$的过程中，就要使用轨迹交点法；在作出$Rt\triangle ADM$后，为定C点，先定F点，而F点就是$\odot O$与$\odot M$的交点．

第二种，三角形奠基法：

三角形是最简单的多边形，在很少的条件下，只要这些条件适当，即可把它作出来．有些作图题，若是先作成所求图形中的某个三角形，往往便奠定了全部图形的基础，由此一步一步地，就可以陆续作出其余部分了．这样的三角形，

有奠基的作用，因而称奠基三角形．利用奠基三角形作为基础来解作图题，叫做三角形奠基法．

这个方法在作图中的应用也很广泛，许多问题常借助于它获得解决．例如本题作图就使用了三角形奠基法，先作出奠基三角形，即直角$\triangle ADM$；在此基础上，陆续作出其余部分，最后完成$\triangle ABC$（$\triangle AB'C'$）的作图．

第　五　题　（捷克斯洛伐克命题）

给定一个立方体 $ABCD-A'B'C'D'$．

a）设 X 为线段 AC 上的任意点，Y 为线段 $B'D'$ 上的任意点，试求线段 XY 中点的轨迹．

b）Z 为线段 XY 的内点，且满足条件：

$$\overline{ZY}=2\overline{XY},$$

求 Z 点的轨迹．

【分析】 先探求轨迹，后给以证明．为叙述上的方便，我们约定，用“$Z=A$”表示“动点 X 运动至 A”这一个事实，其余类推．

对于问题a)，为探求轨迹，先找出符合条件的若干个特殊点．比如，立方体的中心显然符合条件，因而轨迹通过中心．又如（图 2—5），在立方体各相应的面上，分别连 AD'、AB'、CB'、CD'，其中点依次为 E、F、G、H（即立方体各侧面正方形的中心），于是有下述情况发生：

$$\text{当 } X=A\begin{cases} Y=D' \text{ 时，则 } \overline{XY} \text{ 的中点 } Z=E\text{，即轨迹通过点 } E\text{，}\\ Y=B' \text{ 时，则 } \overline{XY} \text{ 的中点 } Z=F\text{，即轨迹通过点 } F\text{；}\end{cases}$$

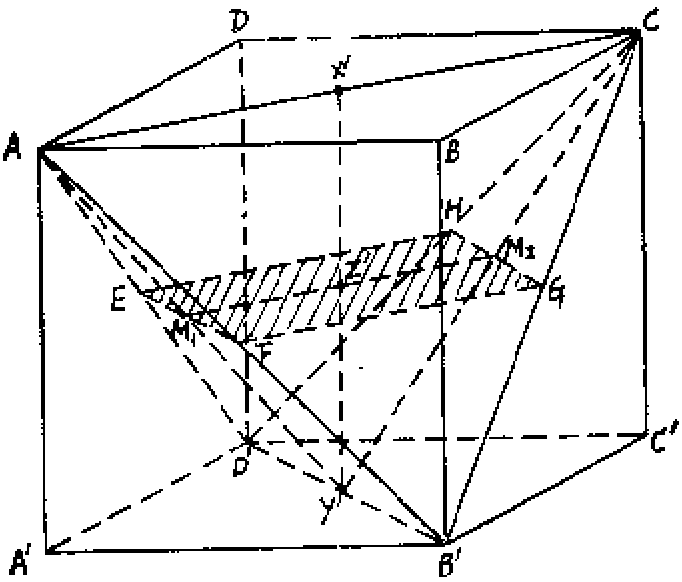


图 2—5

$$
\text{当 } X=C\begin{cases} Y=B' \text{ 时，则 } \overline{XY} \text{ 的中点 } Z=G\text{，即轨迹通过点 } G\text{，}\\ Y=D' \text{ 时，则 } \overline{XY} \text{ 的中点 } Z=H\text{，即轨迹通过点 } H. \end{cases}
$$

其次，在立方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 的内接正四面体 $AB'CD'$（每条棱长都等于立方体的正方形面内的对角线长）的各个面内，分别连 EF、FG、GH、HE. 根据“三角形中位线定理”，不仅有

$$\overline{EF}\ \underline{\parallel}\ \frac{1}{2}\overline{B'D'}\ \underline{\parallel}\ \overline{GH},$$

而且有

$$\overline{FG}\ \underline{\parallel}\ \frac{1}{2}\overline{AC}\ \underline{\parallel}\ \overline{HE}.$$

这就是说，正四面体的截面 $EFGH$，平行于立方体的上下两底，它不仅是一平行四边形，而且为菱形，边长等于立方体棱长的$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

第三，菱形 $EFGH$ 还是个正方形．事实上，菱形的两邻边 EF、FG 分别平行于 $B'D'$、AC，而 $B'D'$ 与 AC 成异面垂直，所以 $EF\perp FG$.

综上所述，a)的轨迹，是以立方体各侧面正方形的中心为顶点，在立方体内的正方形面 $EFGH$（包括边界在内）.

对于问题 b)，可以类似地探求出轨迹的图形.

〈解答〉 a) 在上述的分析中，已作出轨迹的图形是正方形面 $EFGH$，这里，从两方面证明它的正确性.

① 先证完备性．即证：

设 X' 为 $\overline{AC}$ 上任意点，Y' 为 $\overline{B'D'}$ 上任意点，且 Z' 为 $\overline{X'Y'}$ 的中点；则点 Z' 在面 $EFGH$ 内.

为此，连 AY'、CY'，分别与线段 $\overline{EF}$、$\overline{GH}$ 交于点 M_1、M_2，则 M_1、M_2 分别是线段 $\overline{EF}$、$\overline{GH}$ 的中点.

又 $\overline{AY'}$、$\overline{CY'}$、$\overline{AC}$ 及 $\overline{X'Y'}$ 位于同一平面 $AY'C$ 内，

$$\overline{AM_1}:\overline{M_1Y'}=\overline{X'Z'}:\overline{Z'Y'}=\overline{CM_2}:\overline{M_2Y'}=1:1.$$

因此，点 Z' 必在线段 $\overline{M_1M_2}$ 上．而线段 $\overline{M_1M_2}$ 在面 $EFGH$ 内，所以点 Z' 也在面 $EFGH$ 内.

② 再证纯粹性．即证：

设 Z' 是面 $EFGH$ 内任意点，过线 AC 与点 Z' 作面 $AY'C$，分别与面 $AB'D'$、面 $CB'D'$、面 $EFGH$、$\overline{B'D'}$ 交于 $\overline{AY'}$、$\overline{CY'}$、$\overline{M_1M_2}$、点 Y'．又在面 $AY'C$ 内，连 $\overline{Y'Z'}$，并延之与 $\overline{AC}$ 交于点 X'，则 Z' 是 $\overline{X'Y'}$ 的中点.

事实上：

$$\overline{X'Z'}:\overline{Z'Y'}=\overline{AM_1}:\overline{M_1Y'}=\overline{AE}:\overline{ED'}=1:1,$$

由此，Z' 必是 $\overline{X'Y'}$ 的中点.

问题 a)的证明至此结束.

b）此小题的解答，从轨迹的探求到证明（这里从略）都与问题 a）类似.

满足条件 $\overline{ZY}=2\overline{XZ}$ 的点 Z 的轨迹是：

立方体内接正四面体 $AB'CD'$ 的一个截面（包括边界在内），它与立方体的两底平行，并为矩形；

该矩形截面的高度为立方体棱长的 $\frac{2}{3}$，且两邻边长分别为立方体棱长的 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 和 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

【附注】 1. 通过分析，用立体几何知识解答本题，并不十分困难. 还可以看到，问题能够推广，比如：满足条件

$$\overline{ZY}=k\overline{XZ}$$

（k 为实数）的点 Z 的轨迹怎样？请读者考虑.

2. 关于"轨迹"知识简介.

以点为元素的集合，叫做点集. 点的性质决定于点与点之间的相互位置，点的位置不同，其性质必不完全相同. 具有某种性质的点，也叫合乎某条件的点. 几何图形都可看做由点构成，因而点集又常叫图形.

1）轨迹的定义.

在一定场合下，合乎某条件的点集，叫做合乎某条件的轨迹.

从"轨迹"的定义来看，也可直观地解释为：某点或某线按某条件移动所经过的路线就是该点的轨迹.

在有关轨迹的命题中，对于轨迹的形状、位置或大小（指有大小可言的）等情况，指明全部或一部分的，称为轨迹定理；一概不提的，则称轨迹问题.

如本题就是一个轨迹问题，因为对截面 $EFGH$ 以及它

的形状、位置和大小等一概未提.

2）轨迹命题的证明.

欲证轨迹定理"合乎某条件的 P 点的轨迹是图形 F"成立，必须做到以下两步：

第一，任取合乎某条件的一点 P，证它在图形 F 上（或改证图形 F 外的任一点 Q 不合某条件）；

第二，在图形 F 上任取一点 P'，证它合乎某条件（或改证任一不合某条件的 Q' 点不在图形 F 上）.

上述两步是证明轨迹命题必不可少的两方面. 前者称轨迹的完备性，保证了没有一个合乎条件的点不在图形 F 上（否则，就可能漏掉某些合条件的点，因而得到的是"残缺的轨迹"）；后者称轨迹的纯粹性，保证了图形 F 上的点没有一个是不合条件的（否则，就难免混进一些杂点，因而得到"有瑕的轨迹"）.

从命题的观点看，完备性和纯粹性并立，正是表示着互逆的两个命题同时真确. 我们知道，互逆的两个命题一般未必是同时成立的，所以必须有确凿的根据证明了完备性和纯粹性，才能认为这个轨迹命题可靠.

例如本题，当探求出轨迹图形是矩形截面 $EFGH$，并且得知它的位置和大小后，还要从两方面证明，就是这个道理.

3）轨迹的探求.

轨迹问题的难处，一般不在于证明，两方面证明不过是多费一点功夫罢了. 由于一般轨迹问题往往不说出轨迹是什么，如本题那样，因而首要的任务是探求轨迹. 这是解决轨迹问题过程中最重要的一环，也是不易掌握的一环.

解决这一环的直接、有效的方法，一般是：按题设条件作出一定数量的轨迹的点，然后就其布列情况，变化形势，连以线条，则轨迹的形状，可得见其大概．这种作图过程，叫做描迹．它往往可以启发人们的思路，指出解决问题的途径．

轨迹上每每有个别的点特别显著，要留心描出．有关这类的特殊点，可以看作轨迹上的“静点”，其它一般的点则视为“动点”．当我们把一些静点掌握之后，其它动点往往就因此被烘托出来，于是轨迹的大概形势，就差不多了然于胸了．如本题在探求时，就先作出“静点”E、F、G、H 等，然后再从按条件变动的角度，逐步推测出轨迹．这叫做“动中求静，以静窥动”，是探求轨迹的一个极重要的法则，掌握了它，许多问题便都能迎刃而解．

第　六　题（保加利亚命题）

已知一直圆锥的内切球，这个球的外切直圆柱的一个底面，与圆锥底面位于同一平面内．V_1 表圆锥体积，V_2 表圆柱体积．

a）证明：等式 $V_1=V_2$ 不可能成立；

b）确定使 $V_1=kV_2$ 成立的最小 R 值，并对这种情况作出圆锥轴截面的顶角．

【分析】 将 V_1、V_2 分别用各自的“元素”（指圆半径与高）表示：

$$V_{锥}=V_1=\frac{1}{3}\pi r_1^2h_1,$$

$$V_{柱}=V_2=\pi r_2^2h_2.$$

因圆柱外切于球，故

$$h_2 = 2r_2;$$

又据

$Rt\triangle AOE \backsim Rt\triangle ACD$,

可得比例式 $OE:CD=OA:CA$（图 2—6），这是 r_1、r_2、h_1、h_2 四个元素间的关系式.因此，我们得到关于四个元素的两个独立方程式，可以从中解出两个，用另外两个表示.

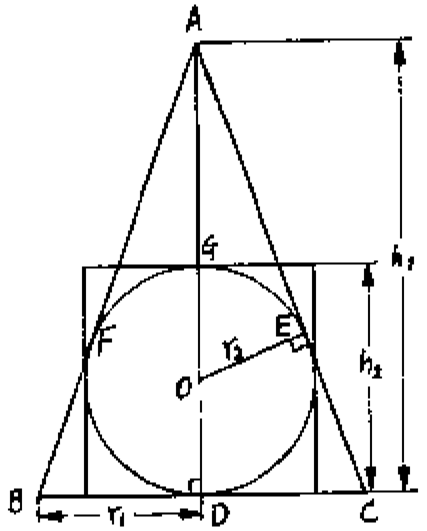


图 2—6

如果令 $V_1=V_2$，易知这是关于两个元素的齐次方程．由此说明方程无实数解，便证得问题a)．

如果令 $V_1=kV_2$，则方程的系数中含有参数 k．由方程有实数解，知 k 必在某范围内，从而得 k 的最小值，使问题 b) 获得解决.

〈解答〉 作轴截面 ABC，如图 2—6 所示，AD 为轴，$\overline{OE}$ 是圆锥内切球 O 的半径．设

$$\overline{CD}=r_1,\ \overline{OE}=r_2,\ \overline{AD}=h_1,\ \overline{GD}=h_2=2r_2.$$

则得：
$$\begin{cases} V_{锥}=V_1=\dfrac{1}{3}\pi r_1^2 h_1; \\ V_{柱}=V_2=\pi r_2^2 h_2=2\pi r_2^3. \end{cases} \tag{1}$$

又由 $Rt\triangle AOE \backsim Rt\triangle ACD$，得：

$$OE:CD=OA:CA,$$

$$r_2:r_1=(h_1-r_2):\sqrt{r_1^2+h_1^2},$$

$$r_1(h_1-r_2)=r_2\sqrt{r_1^2+h_1^2}.$$

$$r_1^2(h_1-r_2)^2=r_2^2(r_1^2-h_1^2),$$

$$h_1^2r_1^2-2h_1r_2r_1^2=h_1^2r_2^2.$$

因 $h_1\neq 0$，故可用 h_1 除之，得：

$$h_1r_1^2-2r_2r_1^2=h_1r_2^2,\quad r_1^2(h_1-2r_2)=h_1r_2^2,$$

$$r_1^2=\frac{h_1r_2^2}{h_1-2r_2}\ (h_1>2r_2,\quad h_1-2r_2\neq 0). \tag{2}$$

a) 假定 $V_1=V_2$ 成立，则由(1)得：

$$\frac{1}{3}\pi r_1^2h_1=2\pi r_2^3. \tag{3}$$

(2)代入(3)，得：

$$\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{h_1^2r_2^2}{h_1-2r_2}=2\pi r_2^3,$$

$$h_1^2-6r_2h_1+12r_2^2=0.$$

因 $r_2\neq 0$，故可用 r_2 除之，得

$$\left(\frac{h_1}{r_2}\right)^2-6\left(\frac{h_1}{r_2}\right)+12=0. \tag{4}$$

显然，(4)之判别式 $(-6)^2-4\times 12=-12$ 为负，因此 $V_1=V_2$ 不可能。

b) 如果 $V_1=kV_2$，则得

$$\left(\frac{h_1}{r_2}\right)^2-6k\left(\frac{h_1}{r_2}\right)+12k=0. \tag{5}$$

(5)有实解的充要条件是：

$$(-6k)^2-4\times 12k=36k^2-48k\geqslant 0,$$

$$k\geqslant\frac{4}{3}\quad 或\quad k\leqslant 0.$$

但 $k\leqslant 0$ 不合题意，所以使 $V_1=kV_2$ 成立的最小(实数)值

$$k=\frac{4}{3}. \tag{6}$$

为作圆锥轴截面顶角，(6)代入(5)，得：

$$\left(\frac{h_1}{r_2}\right)^2-8\left(\frac{h_1}{r_2}\right)+16=0, \frac{h_1}{r_2}=4,$$

$$h_1=4r_2.$$

这就是说，圆锥的高是内切球半径的四倍.由此得作法(证明从略)：

1) 作 $\overline{AD}=h_1$(见图 2—6)；

2) 在 $\overline{AD}$ 上，自 D 截取 $\overline{DO}=r_2=\frac{h_1}{4}$；

3) 以 O 为圆心、$r_2\left(=\frac{h_1}{4}\right)$为半径作 $\odot O$；

4) 以 AO 中点为圆心，AO 的一半为半径画弧，分别交$\odot O$ 于 E 和 F 两点；

5) 连 EA 和 FA，则$\angle EAF$ 就是所求的圆锥轴截面的顶角.

【附注】 1. 如直接从几何体的等积变换，证明 $V_1\neq V_2$，特别是求使 $V_1=kV_2$ 的最小 k 值，势不可能. 这里，要借助代数知识，将几何问题转化为研究方程有无解的代数问题.我们应从中汲取这样思考或研究问题的方法.

2. 在解答中，我们是从关系

$$r_2:r_1=(h_1-r_2):\sqrt{r_1^2+h_1^2}$$

中，解出 r_1，用 h_1、r_2 表示的. 如果解出 h_1 或 r_2，也未尝不可. 比如，解出 h_1，用 r_1、r_2 表示，得

$$h_1=\frac{2r_2r_1^2}{r_1^2-r_2^2}\,(r_1\neq r_2).$$

将 h_1 代入 $V_1=V_2$ 中，并整理，得关于 r_1、r_2 的 4 次齐次方程：

$$r_1^4-3r_1^2r_2^2+3r_2^4=0.$$

除以 $r_2^4(\neq 0)$，得关于$\frac{r_1}{r_2}$的双二次方程：

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4-3\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2+3=0.$$

由此同样可知$\frac{r_1}{r_2}$无实值(因判别式小于零)． 并且，照此做下去，也可以求出使 $V_1=kV_2$ 的最小 k 值为 $\frac{4}{3}$.

不过，这对于作图不便．事实上，根据 h_1 是 r_2 的 4 倍进行作图，比根据 r_1 与 r_2 之间的比的关系要好．利用前者可以很快作出圆锥轴截面的顶角，如解答中所陈述的那样．

第 七 题 (德意志民主共和国命题)

已知一等腰梯形的两底为 a 和 b，高为 h.

a) 在梯形的对称轴上求作点 P，使得它对两腰的视角为直角．

b) 求 P 点到两底边的距离．

c) 在什么条件下能作出 P 点(讨论可能的情况)？

【分析】 因等腰梯形是轴对称图形，故只需考虑点 P 对一腰的视角即可．对称轴上的点对腰的视角一般不为直角，只有特殊点才行．怎样的点与一腰两端的连线成直角呢？易知，这是以腰为直径的圆上的点．因而求作的点 P，就是对称轴与以腰为直径的圆的交点(图 2—7)．

由梯形两底与高的长度，根据作出的点 P 的特殊位置，容易算出所求距离．同时，也不难对作图进行讨论．

〈解法一〉 a) 如图 2—7，$\overline{AD}=a$ 与 $\overline{BC}=b$ 分别为等腰

梯形 $ABCD$ 的上下两底，EF 为对称轴，高 $\overline{EF}=h$. 以腰 AB 为直径作 $\odot O$，与 EF 交于 P_1、P_2 两点，这两点即为所求.

首先，点 P_1 在对称轴 EF 上；其次，连 AP_1、BP_1，则 $AP_1\perp BP_1$. 所以，点 P_1、P_2 确为所求. 同理，点 P_2 也符合所求.

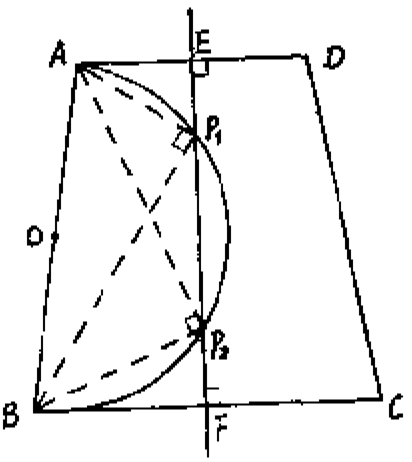


图 2—7

b) 为求符合条件的点 P（P_1 或 P_2）到两底边的距离，设 $\overline{PE}=x$. 则 $PF=h-x$，由勾股定理，有

$$\overline{AB}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{AE}^2+\overline{PE}^2+\overline{BF}^2+\overline{PF}^2$$

$$=\left(\frac{a}{2}\right)^2+x^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+(h-x)^2; \qquad (1)$$

另一方面，

$$\overline{AB}^2=h^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2. \qquad (2)$$

由 (1)、(2)，得：

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+x^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+(h-x)^2=h^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

$$x^2-hx+\frac{ab}{4}=0. \qquad (3)$$

解 (3)，得：

$$x_1=\frac{h+\sqrt{h^2-ab}}{2}, \qquad x_2=\frac{h-\sqrt{h^2-ab}}{2}. \qquad (4)$$

显然，若 x_1（或 x_2）表 $\overline{PE}$ 的长，则 x_2（或 x_1）表 $\overline{PF}$ 的长.

c) 由(4)知：

当 $h^2>ab$ 时，作图有两解，即在对称轴上有两点符合要求；

当 $h^2=ab$ 时，作图有一解，即在对称轴上仅有一点符合要求，且此点为 $\overline{EF}$ 的中点；

当 $h^2<ab$ 时，作图无解，即在对称轴上没有任何点符合要求。

〈解法二〉 这里，介绍导出方程(3)的另一种方法，其余部分同解法一。

设符合条件的 P(P_1 或 P_2)点到上下两底的距离分别为 $\overline{PE}=x_1$，$\overline{PF}=x_2$，则

$$x_1+x_2=h. \tag{5}$$

在 $Rt\triangle AEP$ 与 $Rt\triangle PFB$ 中(图 2—8)：

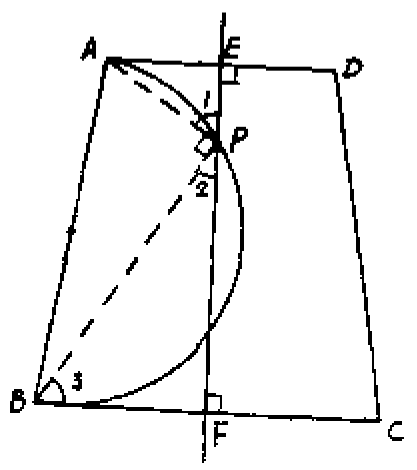


图 2—8

$\because$ $\angle 1+\angle 2=\angle R$,

$\angle 2+\angle 3=\angle R$,

$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$.

$\therefore$ $Rt\triangle AEP\backsim Rt\triangle PFB$.

因此，得

$$\overline{PE}:\overline{BF}=\overline{AE}:\overline{PF},$$

即 $$x_1:\frac{b}{2}=\frac{a}{2}:x_2,$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{ab}{4}. \tag{6}$$

由(5)、(6)知，x_1、x_2 是下列一元二次方程的两个根：

$$x^2-hx+\frac{ab}{4}=0,$$

此方程与(3)完全一致。

【附注】 这题比较简单．也可根据 $\odot O$ 与直线 EF 有无交点，判断作图是否可能，不难知道，其结论（有两交点的即两解；有一交点的即一解；无交点的即无解）与上述解答一致．但这样讨论，从表面看，似与已知条件无关，故应直接从所给 a、b 与 h 之间的关系，进行讨论为好．

第三届国际中学生数学竞赛试题分析与解答

1961 年在匈牙利举行

第 一 题（匈牙利命题）

解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=a; \\ x^2+y^2+z^2=b^2; \\ xy=z^2. \end{cases}$$

这里 a、b 为给定的实数．并指出：当方程组有不相等的正数解时，参数 a、b 应满足的条件．

【分析】 关于 n 个未知数的高次方程组，在一般情况下，有 n 个方程．假设这 n 个方程分别是 p_1、p_2、……、p_n 次的，则按照常规的解法消去其他未知数得到的一元方程，在通常情况下，应该是 $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$ 次的．按照这个结论，本题按常规方法消元，将会得到

$$1 \cdot 2 \cdot 2 = 4.$$

即关于某一个未知数的四次方程，它的一般解法和讨论，已超出中学教材的范围．这就迫使人们按照题设的特定条件来寻找特殊解法．

本题的特定条件是什么呢？概括起来说是以下两点：

第一 有一个方程是一次的，很容易通过代入法消去 z

而得到关于 x、y 的二元方程组；

第二 方程组关于 x、y 是对称的，即 x、y 互换，方程不变.

因此，在消元、降次的过程中，应该充分利用这些特点.

另外，还应该注意题设的要求：不相等的正数解，即 x、y、z 均正且不相等．这一点要求我们在讨论中谨慎从事．这里，也包含两层意思：其一，要注意 x、y、z 之间的相互关系，不能只讨论某一个未知数．这正是运用中学所学知识而又高于中学一般水平的地方；其次，讨论中要充分注意方程与题设要求的相互制约性，把握这一点．通常是使解法和讨论简化的关键所在.

〈解法一〉

$$\begin{cases} x+y+z=a; & (1)\\ x^2+y^2+z^2=b^2; & (2)\\ xy=z^2. & (3)\end{cases}$$

由(1)，得 $$z=a-(x+y), \tag{4}$$

从而得

$$\begin{cases} x^2+y^2+[a-(x+y)]^2=b^2;\\ xy=[a-(x+y)]^2.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2(x+y)^2-2a(x+y)-2xy=b^2-a^2; & (5)\\ xy=a^2-2a(x+y)+(x+y)^2. & (6)\end{cases}$$

消去 xy，则得

$$2a(x+y)=a^2+b^2 \tag{7}$$

此时，若 $a=0$，且 $b=0$，结合原方程组讨论，易得 $x=y=z=0$，为在此条件下方程组之唯一解.

若 $a=0$，而 $b\neq 0$，则方程(7)无解，从而原方程组亦无解.

若 $a\neq 0$，则由(7)得

$$x+y=\frac{a^2+b^2}{2a}, \tag{8}$$

代入(6)，得

$$xy=\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{4a^2}=\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2} \tag{9}$$

联立(8)、(9)，根据根与系数的关系可知，x、y 为二次方程

$$t^2-\frac{a^2+b^2}{2a}\cdot t+\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2}=0$$

之二根.

解之，得

$$x=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a},$$

$$y=\frac{a^2+b^2\mp\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a}.$$

当判别式 $\triangle=10a^2b^2-3a^4-3b^4\geqslant 0$ 时，即

$$\frac{1}{3}\leqslant\frac{a^2}{b^2}\leqslant 3$$

时，x、y 有实解. 此时

$$z=a-(x+y)=\frac{a^2-b^2}{2a}.$$

综合上述讨论，可知原方程组的解的情况如下：

1) $a=0$，$b\neq 0$ 时，无解；

2) $a=0$，$b=0$ 时，有唯一组解：

$$x=y=z=0;$$

3) $a\neq0$，$b\neq0$ 时，有两组解：

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{a^2+b^2+\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a},\\ y_1=\dfrac{a^2+b^2-\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a},\\ z_1=\dfrac{a^2-b^2}{2a};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=\dfrac{a^2+b^2-\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a},\\ y_2=\dfrac{a^2+b^2+\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a},\\ z_2=\dfrac{a^2-b^2}{2a}.\end{cases}$$

这里，当 $\Delta=10a^2b^2-3a^4-3b^4\geqslant0$、即$\dfrac{1}{3}\leqslant\dfrac{a^2}{b^2}\leqslant3$ 时，两解均为实数。而当 $\Delta<0$，即$\dfrac{a^2}{b^2}<\dfrac{1}{3}$(但 $a\neq0$)、或$\dfrac{a^2}{b^2}>3$ 时，x、y 则为虚数.

下面讨论方程组有不等的正数解时，a、b 应满足的条件.

由方程(1)有

$$x+y+z=a>0; \tag{10}$$

由 $z>0$，有 $a^2-b^2>0$； (11)

由 $x\neq y$，有 $\Delta>0$，即

$$\frac{1}{3}<\frac{a^2}{b^2}<3. \tag{12}$$

联立(10)、(11)、(12)，解不等式组，得

$$1<\frac{a}{|b|}<\sqrt{3},$$

即

$$0<|b|<a<\sqrt{3}\,|b|$$

为满足问题要求的条件．事实上：

由于 $\triangle>0$，则因 $-\dfrac{a^2+b^2}{2a}<0$，$\dfrac{(a^2-b^2)^2}{4a^2}>0$，因此

方程

$$t^2-\frac{(a^2+b^2)}{2a}t+\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2}=0$$

有不等二正根．亦即此时 $x\neq y$，且 x、y 均正．

又若 $x=z$，则

$$a^2+b^2\pm\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}=2a^2-2b^2.$$

由此，得：

$$10a^2b^2-3a^4-3b^4=a^4-9a^2b^2+9b^4,$$

$$4a^4-19a^2b^2+12b^4=0,$$

$$a^2=4b^2 \text{ 或 } a^2=\frac{3}{4}b^2.$$

显然，这与 $|b|<a<\sqrt{3}\,|b|$ 矛盾，故 $x\neq z$

同理可证 $y\neq z$.

于是，方程组有不等的正数解的条件为

$$|b|<a<\sqrt{3}\,b.$$

〈解法二〉 根据方程(3)，有

$$(x+y)^2=x^2+2z^2+y^2=(x^2+y^2+z^2)+z^2,$$

再由方程(1)和(2)，得

$$(a-z)^2=b^2+z^2.$$

若 $a=0$，$b\neq 0$，方程组无解；

若 $a=0$，$b=0$，方程组有唯一解

$$x=y=z=0;$$

若 $a\neq 0$，由(4)得

$$z=\frac{a^2-b^2}{2a},$$

故有：

$$\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2=x\left(a-x-\frac{a^2-b^2}{2a}\right),$$

$$x^2-\frac{a^2+b^2}{2a}\cdot x+\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2=0.$$

从而得

$$x_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a},$$

$$y_{1,2}=\frac{a^2+b^2\mp\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a}.$$

经检验知 (x_1, y_1, z)，(x_2, y_2, z) 均为方程组之解．当

$$\triangle=\left(\frac{a^2+b^2}{2a}\right)^2-4\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4a^2}[10a^2b^2-3a^4-3b^4]\geqslant 0,$$

即 $\frac{1}{3}\leqslant\frac{a^2}{b^2}\leqslant 3$ 时，这两组解均为实数．

讨论同解法一．

〈解法三〉

$$(1)^2-(2):$$

$$2xy-2yz+2zx=a^2-b^2.$$

(3)代入(4)：

$$2z^2+2yz+2zx=a^2-b^2,$$

$$2z(x+y+z)=a^2-b^2,$$

即

$$2az=a^2-b^2.$$

以下同解法二．

【附注】1．上面介绍的三种解法，入手虽不相同，但思路都不外乎我们在分析中所介绍的抓住问题本身的特点，设法消去 z 或消去 x、y．读者不妨再想想其他解法．

2．上述三种解法，都涉及 a 是否可以为 0 的讨论，这是一元一次方程讨论的一般规律．但在具体解题过程中，初学者每每忽略这一点，导致讨论的不够全面，有时甚至引入错误的结论．

3．在讨论不等的正数解的过程中，仅从三个不等式组得到 $|b|<a<\sqrt{3}|b|$，并不足以说明条件的充分性．正如解法一的讨论所示．这个结论只等价于 $z>0$ 及 $x\neq y$．至于 x、y 为正及 x、y 与 z 互不相等，则必须另外论证．

第　二　题（波兰命题）

已知三角形的边长 a、b、c 及其面积 S，求证：

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S.$$

并指出：等号何时成立？

【分析】 注意到三角形的面积 S 是可以用 a、b、c 来表示的，因此本题实质是求多元函数的极值问题，即

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{S}\geqslant 4\sqrt{3}.$$

这里，右边是三正数之和．因此，容易联想到重要的不等式：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}.$$

这里，a_1、a_2，…，a_n 均为正数．

另外，由于 a、b、c 及 S 均可用三角形的外接圆半径以及内角的三角函数表示．因此，问题也可以转化为三角函数

极值问题.

〈**证法一**〉 由海仑—秦九韶公式

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

得

$$4S=\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

由于三角形两边之和大于第三边，则根号内各因式均正. 因此：

$$4S\leqslant\sqrt{(a+b+c)\left[\frac{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)}{3}\right]^3}$$

$$=\sqrt{(a+b+c)\cdot\frac{(a+b+c)^3}{27}}=\frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3a^2+3b^2+3c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{3\sqrt{3}}$$

$$\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}},$$

故得

$$a^2+b^2+c^2\geqslant4\sqrt{3}S.$$

这里，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

〈**证法二**〉 由正弦定理及面积公式，易得

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C.$$

这里，R 为三角形的外接圆半径，而 A、B、C 顺次为边 a、b、c 的对角. 于是，

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{S}=\frac{\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C}{2\sin A\sin B\sin C}$$

$$\geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{\sin^2 A \cdot \sin^2 B \sin^2 C}{\sin^3 A \sin^3 B \sin^3 C}}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C}}.$$

设 $y = \sin A \sin B \sin C$

$$= \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]\sin C$$

$$\leqslant \frac{1}{2}[1+\cos C]\sin C.$$

则

$$y^2 \leqslant \frac{1}{4}(1+\cos C)^2 \sin^2 C$$

$$= \frac{1}{4}(1+\cos C)^3(1-\cos C)$$

$$= \frac{1}{3\cdot 4}(1+\cos C)^3(3-3\cos C)$$

$$\leqslant \frac{1}{12}\cdot\left[\frac{3(1+\cos C)+(3-3\cos C)}{4}\right]^4$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4.$$

即 $y \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$. 等号当 $A=B$ 及 $1+\cos C = 3-3\cos C$ 时，亦即

$$A = B = C = \frac{\pi}{3}$$

时成立.

因此

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{S} \geqslant \frac{3}{2\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{8}}} = 4\sqrt{3},$$

即

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S.$$

其中等号当且仅当 $A=B=C$，即 $a=b=c$ 时成立.

〈证法三〉 由余弦定理，得

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)+(c^2+a^2-b^2)\\&=2ab\cos C+2bc\cos A+2ca\cos B.\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}&=\frac{2ab\cos C}{4S}+\frac{2bc\cos A}{4S}+\frac{2ca\cos B}{4S}\\&=\frac{2ab\cos C}{2ab\sin C}+\frac{2bc\cos A}{2bc\sin A}+\frac{2ca\cos B}{2ca\sin B}\\&=\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B.\end{aligned}$$

设 $\begin{aligned}y&=\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B\\&=-\operatorname{ctg}(A+B)+\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B\\&=-\frac{\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B-1}{\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B}+\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B,\end{aligned}$

去分母并化简，得

$$\operatorname{ctg}^2A+(\operatorname{ctg} B-y)\operatorname{ctg} A+(\operatorname{ctg}^2B-y\operatorname{ctg} B+1)=0.$$

由于 $\operatorname{ctg} A$ 为实数，所以方程成立的必要条件是判别式

$$\begin{aligned}\triangle&=(\operatorname{ctg} B-y)^2-4(\operatorname{ctg}^2B-y\operatorname{ctg} B+1)\\&=-3\operatorname{ctg}^2B+2y\operatorname{ctg} B+(y^2-4)\geqslant 0.\end{aligned}$$

这是一个关于 $\operatorname{ctg} B$ 的二次三项式，它的二次项系数 $-3<0$，如果要求它的值不小于 0，则 $\operatorname{ctg} B$ 之值必介于这二次三项式的两根之间，亦即这二次三项式有二实根．于是又有

$$(2y)^2-4(-3)(y^2-4)$$

$$=16y^2-48\geqslant 0.$$

注意到 $y=\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C>0$，取正值得

$$y\geqslant\sqrt{3},$$

其中等号当 $\operatorname{ctg}B=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 和 $\operatorname{ctg}A=\frac{\operatorname{ctg}B-y}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，即

$$A=B=C=\frac{\pi}{3}$$

时成立.

所以 $\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}\geqslant\sqrt{3}$，即 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}$. 其中等号成立的充要条件是

$$A=B=C=\frac{\pi}{3}.$$

【附注】 1. 上面介绍的三种方法，形式上虽然变化很大，但它们共同的特点是：综合应用初等数学知识. 从前两种证法来说，都用到了"若干个正数的算术平均数不小于其几何平均数"这一重要命题. 在用来求极值时，这个命题也常被引伸为以下两个推论：

1) 诸正数之和为一定值，则当它们相等时，其积有极大值；

2) 诸正数之积为一定值，则当它们相等时，其和有极小值.

这样，在具体解题时，就要设法凑成定值. 证法二中，之所以既将 y 转化为 y^2，又将式中的 $(1-\cos C)$ 变为 $(3-3\cos C)$，就是为了使乘积

$$(1+\cos C)^3(3-3\cos C)$$

中诸因式之和：

$$(1+\cos C)+(1+\cos C)+(1+\cos C)+(3-3\cos C)=6$$

为一定值之故.

2. 证法二介绍了在 $A+B+C=\pi$ 的条件下求极值的一类重要方法，它的基本特点是：通过关系式

$$\cos(A-B)\leqslant 1,$$

将多元函数转化为一元函数，然后运用代数方法来求极值.

3. 证法三介绍了初等代数中求极值的另一类重要方法：运用判别式法. 值得注意的是对于方程

$$\operatorname{ctg}^2 A+(\operatorname{ctg} B-y)\operatorname{ctg} A+(\operatorname{ctg}^2 B-y\operatorname{ctg} B+1)=0$$

而言，如果把它看成关于 $\operatorname{ctg} A$ 的一元二次方程，则系数中仍然含有变数 B. 因此判别式 $\triangle\geqslant 0$ 仅仅是 $\operatorname{ctg} A$ 为实数的必要条件(证明从略). 有的同志以为它仍然是充要条件，那是一个概念上的错误.

4. 证法二中运用算术平均与几何平均的不等式,将函数式由和的形式转化为积的形式，这个不等变换是一个值得注意的解题技巧，有一系列这样的问题需要用上这个变形. 例如：

已知两个三角形的三边和面积分别为：a、b、c、$\triangle$ 和 a_1、b_1、c_1、$\triangle_1$，试证

$$a^2\cdot a_1^2+b^2\cdot b_1^2+c^2\cdot c_1^2\geqslant 16\triangle\triangle_1.$$

(中国科学技术大学少年班 1979 年武汉考区入学考试复试试题)现证明如下：

$$a^2a_1^2+b^2b_1^2+c^2c_1^2\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2a_1^2b_1^2c_1^2}$$

$$=12\triangle\triangle_1\sqrt[3]{\frac{1}{(\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C)(\sin A_1\cdot\sin B_1\cdot\sin C_1)}}$$

$$\geqslant 12\triangle\triangle_1\sqrt[3]{\frac{8}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{8}{3\sqrt{3}}}$$

$$=12\triangle\triangle_1\cdot\frac{4}{3}=16\triangle\triangle_1,$$

即

$$a^2a_1^2+b^2b_1^2+c^2c_1^2\geqslant 16\triangle\triangle_1.$$

等号当 $a=b=c$ 且 $a_1=b_1=c_1$ 时成立.

本题如果不通过这个变换，证明就要困难一些. 因为得不到 $\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$ 及 $\sin A_1\cdot\sin B_1\cdot\sin C_1$，就不便于求极值.

第 三 题 (保加利亚命题)

解方程 $\cos^n x-\sin^n x=1$，这里，n 表示任意给定的自然数.

【分析】 本题形式虽然简单，但实际上超出了一般三角方程的解法. 这是因为对于三角函数的高次幂，一般是用下列的方法来处理：

1) 分解因式；

2) 利用倍角公式降次：如 $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$，$\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)$等；

3) 利用复数：

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha.$$

但这些方法在此都用不上，因而只有另找新的途径.

从特殊到一般是人们认识客观事物常用的方法. 为方便计，不妨分别取 $n=1$，2，3，4，……作具体的观察. 在这

种条件下，是有可能通过三角变换把问题归结为一般的方程的.

对于 $n=1$，有

$$\cos x-\sin x=1;$$

对于 $n=2$，有

$$\cos^2 x-\sin^2 x=1;$$

……，…….

经过具体计算，当 $n=2$ 及 4 时，所得方程有相同的解：$x=k\pi$（k 为整数）.

这种情况是偶然的还是必然的呢？我们看到，对于 $n=6$，也有同样的结果. 这就促使我们想到，对于本题，可能需要分 n 为奇数和偶数来讨论.

〈**解法一**〉 1）当 n 为偶数时，命 $n=2m$（m 为自然数），此时，原方程变形为

$$\cos^{2m} x=1+\sin^{2m} x.$$

由于 $\cos^{2m} x\leqslant 1\leqslant 1+\sin^{2m} x$，只能有

$$\sin x=0，且 \cos x=1,$$

所以

$$x=k\pi\ （k 为整数）.$$

2）当 n 为奇数时，可分 x 在第一、二、三、四象限进行讨论：

当 x 在第一象限时，有

$$0\leqslant\cos^n x\leqslant 1,\quad 0\leqslant\sin^n x\leqslant 1.$$

类似 1）中的讨论，得

$$\cos^n x=1，且 \sin^n x=0.$$

故

$$x=2k\pi.$$

当 x 在第二象限时，有

$$-1\leqslant\cos^n x\leqslant 0,\quad 0\leqslant\sin^n x\leqslant 1,$$

于是

$$-1\leqslant -\sin^n x\leqslant 0.$$

这样，$|\cos^n x-\sin^n x|$ 不小于 1，所以此时原方程无解.

当 x 在第三象限时，有

$$-1\leqslant\cos^n x\leqslant 0,\quad -1\leqslant\sin^n x\leqslant 0.$$

于是 $-\sin^n x=\sin^n(-x)\geqslant 0$；$-\cos^n x\geqslant 0$，此时可得

$$\sin^n(-x)=1-\cos^n x\geqslant 1.$$

显然，只有 $\cos^n x=0$，且 $\sin^n(-x)=1$. 所以

$$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}.$$

当 x 在第四象限时，有

$$0\leqslant\cos^n x\leqslant 1,\quad -1\leqslant\sin^n x\leqslant 0,$$

于是

$$0\leqslant -\sin^n x\leqslant 1.$$

令 $x=-x'$，则 x' 在第一象限，且

$$\cos^n x'=\cos^n x,\quad \sin^n x'=-\sin^n x.$$

于是，原方程变形为

$$\cos^n x'+\sin^n x'=1.$$

显然，若 $x_1'=2k\pi$， 及 $x_2'=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，则有

$$x_1=2k\pi,\qquad 及\ x_2=2k\pi-\frac{\pi}{2}.$$

若 $x'\neq 2k\pi$ 且 $x'\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，则

$$\cos x' + \sin x' > 1.$$

又据 $\cos^2 x' + \sin^2 x' = 1$，故当 $n>2$ 时，有

$$\begin{aligned}
&1-(\cos^n x' + \sin^n x')\\
&= \cos^2 x' + \sin^2 x' - (\cos^n x' + \sin^n x')\\
&= \cos^2 x'(1-\cos^{n-2} x') + \sin^2 x'(1-\sin^{n-2} x')\\
&> 0.
\end{aligned}$$

即当 $n>2$ 时，

$$\cos^n x' + \sin^n x' < 1.$$

亦即方程 $\cos^n x' + \sin^n x' = 1$ 除

$$x_1' = 2k\pi \quad 及 \quad x_2' = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

外无解.

因此，在第四象限，原方程之解为

$$x = 2k\pi, \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}.$$

综合上述可知，原方程之解为：

1）当 n 为偶数时，$x = k\pi$；

2）当 n 为奇数时，$x_1 = 2k\pi$，$x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$. 这里 k 均为整数.

〈解法二〉 1）n 为偶数时，与解法一同.

2）n 为奇数时，则因 $|\sin^n x| \leqslant 1$，所以

$$\cos^n x = 1 + \sin^n x \geqslant 0;$$

同理，由 $|\cos^n x| \leqslant 1$，有

$$\sin^n x = \cos^n x - 1 \leqslant 0.$$

从而得

$$1 = \cos^n x - \sin^n x$$

$$=\cos^n x+(-\sin x)^n,$$

即

$$1=|\cos x|^n+|\sin x|^n.$$

若 x 是$\frac{\pi}{2}$的整数倍，注意到 $\sin x\leqslant 0$， $\cos x\geqslant 0$， 则只有

$$x=2k\pi \text{ 或 } x=2k\pi-\frac{\pi}{2},$$

这里，k 为整数.

若 x 不是$\frac{\pi}{2}$的整数倍，则

$$|\sin x|<1,\quad |\cos x|<1.$$

由此，当 $n>2$ 时，有

$$\sin^2 x-|\sin x|^n=\sin^2 x(1-|\sin x|^{n-2})>0,$$

即

$$|\sin x|^n<(\sin x)^2.$$

同理，$|\cos x|^n<(\cos x)^2$.

因此

$$|\sin x|^n+|\cos x|^n<\cos^2 x+\sin^2 x=1.$$

又当 $n=1$ 时，

$$|\cos x|^n+|\sin x|^n>1,$$

故当 x 不是$\frac{\pi}{2}$的整数倍时，方程无解.

综合上述讨论，并代入原方程检验，可知原方程之解为：

当 n 为偶数时， $x_1=k\pi$；

当 n 为奇数时， $x=2k\pi$， $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$， 这里， k 为整数.

〈解法三〉　1）n 为偶数时，同解法一。

2）n 为奇数时，由于

$$\cos^n x = 1 - \sin^n x \geqslant 0,$$

$$\sin^n x = \cos^n x - 1 \leqslant 0,$$

则

$$\cos x \geqslant 0,\quad \sin x \leqslant 0.$$

由此，x 只能在第四象限．

现设 $x = -x'$，则 x' 在第一象限，而原方程变形为

$$\cos^n x' + \sin^n x' = 1 \tag{1}$$

当 $x' = 2k\pi$ 或 $x' = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时，方程(1)显然成立；

若 $x' \neq 2k\pi$ 且 $x' \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$，则对于任意自然数 $n_1 > n_2$，有

$$(\cos^{n_1} x' + \sin^{n_1} x') - (\cos^{n_2} x' + \sin^{n_2} x')$$

$$= \cos^{n_2} x'(\cos^{n_1 - n_2} x' - 1) + \sin^{n_2} x'(\sin^{n_1 - n_2} x' - 1) < 0$$

这就是说，在上述条件下，对于任意确定的角 x'，函数 $\cos^n x' + \sin^n x'$ 关于变数 n 是递减的．

已知 $n = 2$ 时，$\cos^2 x' + \sin^2 x' = 1$；则当 $n \neq 2$ 时，

$$\cos^n x' + \sin^n x' \neq 1.$$

即除开 $x' = 2k\pi$，$x' = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 外，在第一象限内，方程(1)无其他的解．

从而可以判定，对于原方程而言，在第四象限内，除开 $x = 2k\pi$，$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ 外，亦无其他的解．这里 k 均为整数．

综合上述讨论，所得结论将与前两种解法一致．

【附注】 1. 对于以任意自然数 n 为指数的三角方程，由于三角函数变化的规律性，按照 n 的不同取值把自然数分成若干个子集来进行讨论，是比较常见的方法. 这里，难点不在于观察得出某几个特殊的解，而在于论断每一种具体情况有解或无解. 下面，我们给出另两个例题，供读者进一步去探索：

1） 解方程 $\mathrm{tg}^n x+\mathrm{ctg}^n x=2$，这里 n 为任意给定的自然数.

2） 解方程 $\sin^p x+\sec^q x=\cos^p x+\operatorname{cosec}^q x$，这里 p、q 同号，且同为奇数或偶数.

2. 本题介绍的三种解法，应该注意其一脉相承之处，即解法一是常规的一般讨论方法，它抓住三角函数的基本性质，分象限逐步加以讨论. 这正说明了难题不过是一些基础知识的综合与灵活应用. 因此，要提高解题能力，必需在基本功上狠下功夫.

解法二、三则是解法一的提高和改进. 其要点在当 n 为奇数时，通过判定 $\cos^n x$、$\sin^n x$ 的符号来限制 x 的所在象限；最后把问题归结到第一象限来讨论. 这样就避免了解法一那样全面讨论. 这一点告诉我们，即使在一个问题解决之后，也有必要精益求精，使认识进一步深化.

3. 解法三的讨论，利用了在 $x'\neq 2k\pi$，且 $x'\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 的条件下，$\cos^n x'+\sin^n x'$ 在第一象限内关于变数 n 的递减性. 这个讨论，对于熟悉指数函数性质的读者，也可以采用以下的方法讨论：

由于 $0<\sin x'<1$，$0<\cos x'<1$，则

$$\sin^n x', \quad \cos^n x'$$

都是减函数，从而 $\cos^n x' + \sin^n x'$ 也是减函数.

这里，也可以说明综合运用所学知识的必要性.

第 四 题 （德意志民主共和国命题）

给出 $\triangle P_1P_2P_3$ 及其内部任一点 P，直线 P_1P、P_2P、P_3P 分别交对边于点 Q_1、Q_2、Q_3. 证明：

$$\overline{P_1P}:\overline{PQ_1},\ \overline{P_2P}:\overline{PQ_2},\ \overline{P_3P}:\overline{PQ_3}$$

三者之中，至少有一个不大于 2，也至少有一个不小于 2.

【分析】 我们知道，三角形的重心 S 分中线为两段成 2:1 之比，如图 3—1.

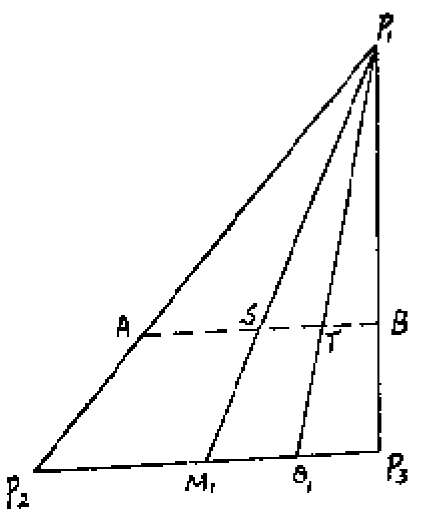


图 3—1

过 S 作 $AB \parallel P_2P_3$，顺次交 P_1P_2、P_1P_3 于 A、B. 则 AB 分 $\triangle P_1P_2P_3$ 成两部分：$\triangle P_1AB$ 与梯形 AP_2P_3B.

设 P_1Q_1 与 AB 交于 T，则

$$\frac{\overline{P_1T}}{\overline{TQ_1}} = \frac{\overline{P_1S}}{\overline{SM_1}} = \frac{2}{1}.$$

当点 P 在 $\triangle P_1AB$ 内部时，有 $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PQ_1}} < \dfrac{\overline{P_1T}}{\overline{TQ}} = \dfrac{2}{1}$，

当点 P 在梯形 AP_2P_3B 内部时，有

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PQ_1}} > \frac{\overline{P_1T}}{\overline{TQ_1}} = \frac{2}{1}.$$

所以，抓住重心 S 进行分析对比，是本题解法的关键所在.

〈证法一〉 设 $\overline{P_1M_1}$、$\overline{P_2M_2}$、$\overline{P_3M_3}$ 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的三条中线，它们分 $\triangle P_1P_2P_3$ 为 6 个小三角形，S 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的重心(图 3—2)．

若点 P 与点 S 重合，则 Q_i 与 M_i $(i=1, 2, 3)$ 重合，此时显然有

$$\overline{P_1P}:\overline{PM_1}=\overline{P_2P}:\overline{PM_2}=\overline{P_3P}:\overline{PM_3}=2:1,$$

故命题得证．

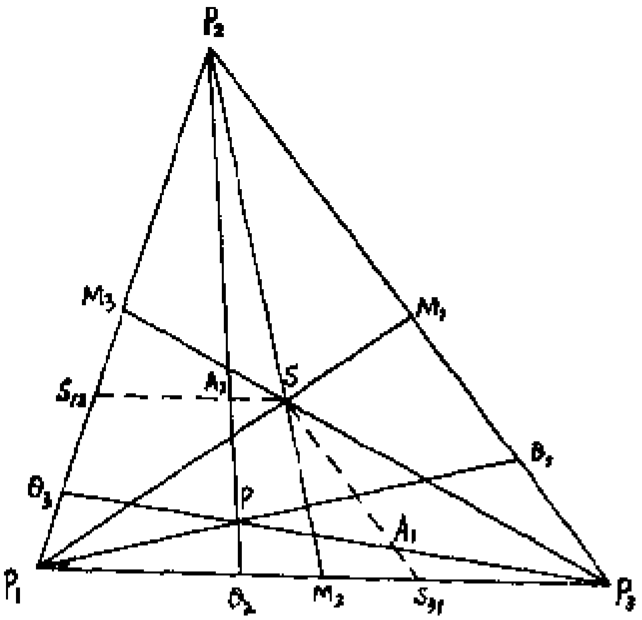


图 3—2

若点 P 与点 S 不重合，则点 P 在一个小三角形的内部或一边上．不失一般性，设这个三角形为 P_1SM_2．我们将边 $\overline{P_2P_1}$、$\overline{P_1P_3}$ 都分为 2:1，设其分点依次为 S_{12}、S_{31}，并分别连 SS_{12}、SS_{31}，则显然有：

$$SS_{12} /\!/ P_1P_3,\quad SS_{31} /\!/ P_2P_3.$$

又 $\triangle P_1SM_2$ 包含在梯形 $P_1S_{12}SM_2$ 内，故直线 P_2Q_2 交 SS_{12} 于点 P_2 和 P 之间的一点 A_2．由此有

$$\overline{P_1P}:\overline{PQ_1}\geqslant\overline{P_2A_2}:\overline{A_2Q_2}=2:1.$$

类似的，$\triangle P_1SM_2$ 包含在 $\triangle P_1SS_{31}$ 内，直线 P_1P 交直线 SS_{31} 于点 P 和 Q_1 之间的一点 A_1．由此有

$$\overline{P_1P}:\overline{PQ_1}\leqslant\overline{P_1A_1}:\overline{A_1Q_1}=2:1.$$

从而命题得证．

〈证法二〉 自 P 作 $PG\perp P_1P_3$ 于 G，作 $P_2G_2\perp P_1P_3$ 于

G_2，则

$$\frac{\overline{PQ_2}}{\overline{P_2Q_2}}=\frac{\overline{PG}}{\overline{P_2G_2}}$$

$$=\frac{S_{\triangle PP_1P_3}}{S_{\triangle P_1P_2P_3}}.$$

同理可证：

$$\frac{\overline{PQ_3}}{\overline{P_3Q_3}}=\frac{S_{\triangle PP_1P_2}}{S_{\triangle P_1P_2P_3}},$$

$$\frac{\overline{PQ_1}}{\overline{P_1Q_1}}=\frac{S_{\triangle PP_2P_3}}{S_{\triangle P_1P_2P_3}}.$$

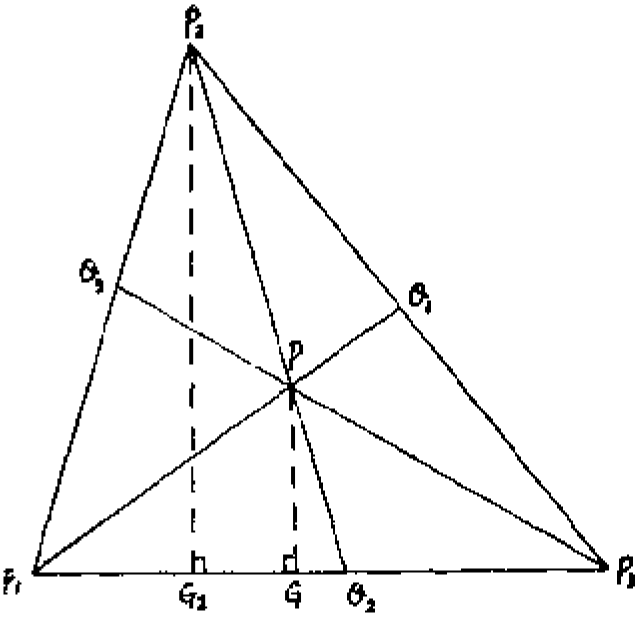


图 3—3

由此，得

$$\frac{\overline{PQ_1}}{\overline{P_1Q_1}}+\frac{\overline{PQ_2}}{\overline{P_2Q_2}}+\frac{\overline{PQ_3}}{\overline{P_3Q_3}}$$
$$=\frac{S_{\triangle PP_2P_3}+S_{\triangle PP_1P_2}+S_{\triangle PP_1P_3}}{S_{\triangle P_1P_2P_3}}=1.$$

因此，根据抽屉原则，在$\frac{\overline{PQ_1}}{\overline{P_1Q_1}}$、$\frac{\overline{PQ_2}}{\overline{P_2Q_2}}$、$\frac{\overline{PQ_3}}{\overline{P_3Q_3}}$中至少有一个不大于$\frac{1}{3}$. 不妨设之为$\frac{\overline{PQ_2}}{\overline{P_2Q_2}}\leqslant\frac{1}{3}$,

于是，$\frac{\overline{PQ_2}}{\overline{P_2P}}\leqslant\frac{1}{2}$，从而得$\frac{\overline{P_2P}}{\overline{PQ_2}}\geqslant 2$.

同理可知，题设的三个比中，至少还有一个比不大于2.

【附注】 1. 本题的两种证法反映了两种截然不同的思路. 关于证法一在分析中已作了必要的说明，它是从重心这一特殊点出发来论证动线段的比值的.

2. 证法二则走的另外一条路，它的前一半是一个传统的几何题：

过 $\triangle ABC$ 中任一点 P，连 AP、BP、CP 顺次与对边交于 Q_1、Q_2、Q_3，则

$$\frac{PQ_1}{PA}+\frac{PQ_2}{PB}+\frac{PQ_3}{PC}=1.$$

对于熟悉抽屉原则的同志，凭借这个基础，作进一步的引伸，就不算太难了．

3．这个问题也很容易由二维推广到三维．即：

设 P 为四面体 $ABCD$ 内任意一点，分别连 AP、BP、CP、DP，顺次与所对的面 BCD、CDA、DAB、ABC 交于点 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4，求证

$$\overline{PQ_1}:\overline{AP}，\ \overline{PQ_2}:\overline{BP}，\ \overline{PQ_3}:\overline{CP}，\ \overline{PQ_4}:\overline{DP}$$

这四个比中，至少有一个不大于 3，也至少有一个不小于 $\frac{1}{3}$．

对于学过立体几何的同志，不妨动手试试看．

第　五　题（捷克斯洛伐克命题）

已知：$\triangle ABC$ 的边 $\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$．点 M 是边 $\overline{BC}$ 的中点，$\angle AMB=\delta<90°$．

求作：$\triangle ABC$．证明：当且仅当

$$b\ \mathrm{tg}\frac{\delta}{2}\leqslant c<b$$

时，问题有解．并指出：等号何时成立．

【分析】 从综合几何来看，这是一个有关三角形的几何作图问题．一般地说，讨论是在作法的基础上派生的．因此，重点应该是解决怎样作出这个三角形的问题，亦即要研究怎样把题设条件转化为已知的可作的基础三角形．

下面给出有关作图的具体分析．

若$\triangle ABC$已作出，如图3—4所示，延长AM至D，使

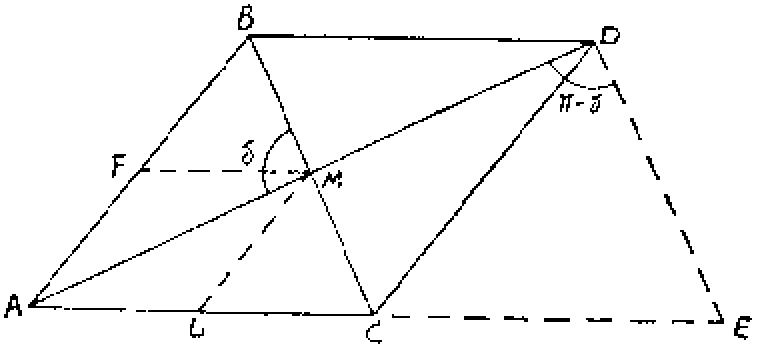


图 3—4

$$\overline{AM}=\overline{MD};$$

联结BD、CD，得平行四边形$ABDC$.
这样，问题就转化为"已知两邻边之长及对角线的夹角，求作平行四边形".

注意到平行四边形的特点，应用下列方法之一，都可以得到基础三角形.

1）平行移动BC到DE，得到$\triangle ADE$．易知：

$$\begin{aligned}\angle ADE&=\pi-(\angle DAE+\angle AED)\\&=\pi-(\angle DAE+\angle BCA)=\pi-\delta;\end{aligned}$$

$$\overline{AE}=2\overline{AC}=2b;\quad \overline{CD}=\overline{AB}=c.$$

于是，问题归结为"已知底边、顶角和底边上的中线作$\triangle ADE$".

2）作$\triangle ABD$的中位线$\overline{FM}$．则在$\triangle ABM$中，有$\overline{AB}=c$，$\overline{FM}=\dfrac{1}{2}b$，$\angle AMB=\delta$．仍然是已知底边、顶角和底边上的中线作基础三角形$ABM$的问题.

3）类似地，还可以作$\triangle ABC$的中位线$\overline{LM}$．根据$\overline{AC}$

$=b$，$\overline{LM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}c$．$\angle AMC=\pi-\delta$，先作基础三角形 ACM，再完成要求的 $\triangle ABC$ 的作图．

上述三种作法基本一致，下面只给出其中一种解答．

〈解答〉 先解决作图问题．作法如下(图 3—5)：

1) 作线段 $\overline{AC}=b$；

2) 以 $\overline{AC}$ 为弦，作含圆周角 $\pi-\delta$ 的容角弧 $\overset{\frown}{AMC}$；

3) 以 $\overline{AC}$ 的中点 L 为圆心，$\frac{c}{2}$ 为半径画圆与 $\overset{\frown}{AMC}$ 交于点 M；

4) 连 CM，并延长至 B，使 $\overline{MB}=\overline{MC}$；

5) 连 AB，则 $\triangle ABC$ 即为所求．

易证，能如此作出的 $\triangle ABC$，是完全满足已知条件的．

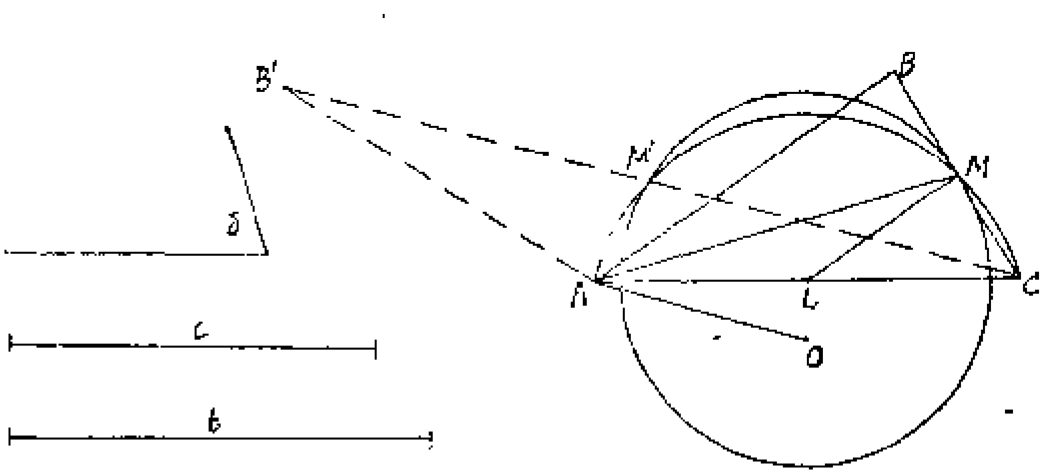


图 3—5

下面再证明本题有解的充要条件是 $b\,\mathrm{tg}\frac{\delta}{2}\leqslant c<b$．

显然，当且仅当圆 L 与 $\overset{\frown}{AMC}$ 有公共点时，问题有解．

设 $\overset{\frown}{AMC}$ 的圆心为O,如图 3—6 所示. 因为$\delta<90°$,所以点 O 和 $\overset{\frown}{AMC}$ 在弦 $\overline{AC}$ 的异侧.

作半径 $OH\perp AC$, 则 OH 平分弧 $\overset{\frown}{AMC}$ 和 $\overline{AC}$.

设圆 O 的半径为 R, 则在 $\triangle OLM$ 中:

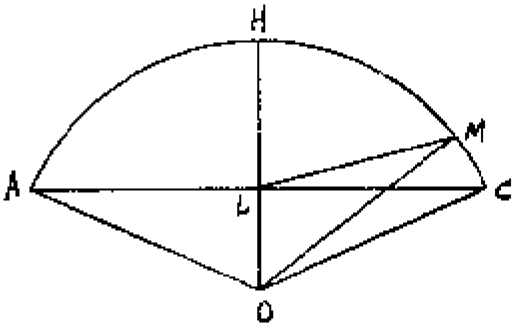


图 3—6

$$R=\overline{OM}\leqslant\overline{OL}+\overline{LM}=R-\overline{HL}+\frac{c}{2}.$$

注意到 $HL=\frac{b}{2}\text{tg}\frac{\delta}{2}$, 即得

$$\frac{b}{2}\text{tg}\frac{\delta}{2}\leqslant\frac{c}{2}.\quad\left(\because\frac{c}{2}-HL\geqslant0\right)$$

亦即

$$b\,\text{tg}\frac{\delta}{2}\leqslant c.$$

再研究 $\triangle MAC$ 和 $\triangle MAB$ (在图 3—5 中连 AM), 它们有一公共边 $\overline{AM}$, 且 $\overline{MB}=\overline{MC}$, 又 $\angle BMA<90°<\angle CMA$, 故有

$$b=\overline{AC}>\overline{AB}=c$$

所以, 条件 $b\,\text{tg}\frac{\delta}{2}\leqslant c<b$ 是必要的. 下面再证明这条件也是充分的:

若 $LM=\frac{c}{2}<\frac{b}{2}=LA$, 则点 C 在圆 L 外;

若 $LH=\frac{b}{2}\text{tg}\frac{\delta}{2}<\frac{c}{2}$, 则点 H 在圆 L 内.

所以 $\overset{\frown}{AMC}$ 和圆 L 必在 C 和 H 之间的弧上某点 M 相交．关于 OH 对称的另一交点 M'，则在 $\overset{\frown}{AH}$ 上．本题虽属于活位作图（关于定位作图与活位作图的简介，参见第一届第四题附注 1），但 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AB'C$ 一般不全等，如图 3—5 所示，故本题一般有两解：$\triangle ABC$ 和 $\triangle AB'C$．

因此，只要满足条件

$$b\,\mathrm{tg}\frac{\delta}{2}\leqslant c<b,$$

则点 M 存在，亦即 $\triangle ABC$ 是可作的．于是，条件的充分性得证．

下面再讨论两种特殊情形：

1）当 $LH=\frac{c}{2}$ 时，$\overset{\frown}{AMC}$ 和圆 L 相切，即点 M 和 H 重合，$\triangle AMC$ 是等腰三角形．

注意到 AM 是 BC 边上的中线，且 $AM=\frac{1}{2}BC$，则 $\angle BAC=90^\circ$，$\triangle ABC$ 是直角三角形．

2）当 $b=c$ 时，则点 M 与 A 或 C 重合，从而点 B 重合于 C 或 A．我们得到一个退化的三角形，即线段 AC．

【附注】 1．作图题的讨论，总是出现在作法上不能唯一确定之处，对于初学者而言，这一点的确是比较难以掌握的．本题先给出了结论：$b\,\mathrm{tg}\frac{\delta}{2}\leqslant c<b$，这是有意给出提示，降低难度．其实，只要注意到圆 L 与 $\overset{\frown}{AMC}$ 不一定相交，那末，讨论必须从这儿开始，就是十分明显的了．

2．本题的讨论，也可以从两圆相交的充要条件入手，现扼要说明如下：

注意到，前面已知$c<b$，而 L 为 AC 的中点；又

$$OA=\frac{b}{2}\operatorname{cosec}\angle AOL=\frac{b}{2}\operatorname{cosec}\delta>\frac{c}{2},$$

所以 L 为圆 AMC 的内点．因此，它们相交的充要条件是：

$$OA-LM\leqslant OL=\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\delta,$$

即
$$\frac{b}{2}\operatorname{cosec}\delta-\frac{c}{2}\leqslant\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\delta.$$

等号当它们相内切时成立．

由此立即得到

$$b(\operatorname{cosec}\delta-\operatorname{ctg}\delta)\leqslant c,$$

即
$$\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\leqslant c<b.$$

第　六　题（罗马尼亚命题）

已知一个平面 E 及其同侧不共线的三点 A、B、C，并且平面 E 不平行于这三点所确定的平面．在平面 E 内任取三点 A'、B'、C'，用 L、M、N 分别表示线段 $\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$ 的中点，而用 G 表示三角形 LMN 的重心(如 LMN 不能构成三角形时，则相应的 A'、B'、C' 不属考虑之列)．当点 A'、B'、C' 在平面 E 上任意移动时，求点 G 的轨迹．

【分析】 从综合几何来看，本题的确比较困难．这是因为题中条件动点太多、空间图形的线条复杂，难于想象，因而不易发现其规律性，怎样克服这个难点呢？仍然是一句老话：从特殊到一般，通过特殊位置来观察 G 点运动的规律

性.

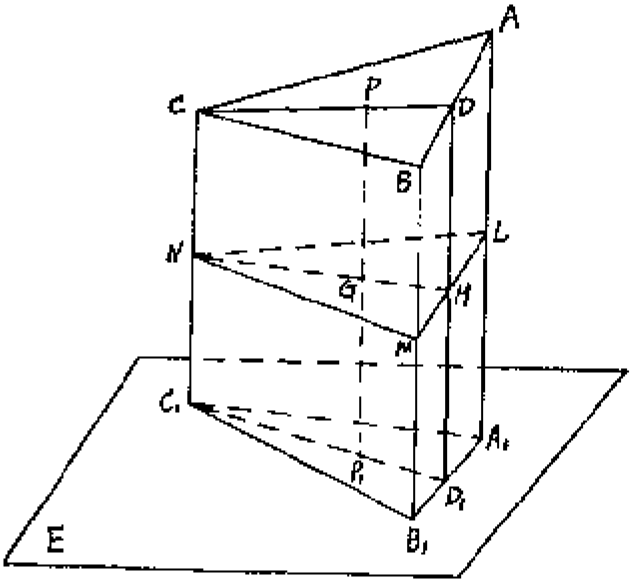


图 3—7

首先，考察最特殊的情况：$\overline{AA_1}$、$\overline{BB_1}$、$\overline{CC_1}$ 同时垂直于平面 E（图 3—7），设 $\overline{CD}$、$\overline{NH}$、$\overline{C_1D_1}$ 分别为 $\triangle ABC$、$\triangle LMN$、$\triangle A_1B_1C_1$ 的中线，则易证：$DD_1 \parallel AA_1 \parallel CC_1$，且 H 为 $\overline{DD_1}$ 的中点.

于是，CC_1D_1D 为梯形，而 P、P_1 分别内分 $\overline{CD}$ 及 $\overline{C_1D_1}$ 成定比 2:1. 则 $PP_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$.

又因 $\overline{NG}:\overline{GH}=2:1$，且点 G 在平面 CC_1D_1D 上，故点 G 在 PP_1 上. 这样，根据平行线的性质，易证 G 为 $\overline{PP_1}$ 的中点.

其次，让我们作进一步的观察，上述证明，其实与线段垂直或不垂直于平面 E 无关，只要

$$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$$

都可以证明 G 为 $\overline{PP_1}$ 的中点. 即点 G 在过 $\overline{PP_1}$ 的中点而平行于平面 E 的平面上.

第三，现在，我们可能想到上述平面就是所求轨迹. 但这样，必须证明：上述结论对于 AA_1B_1B 等为空间四边形时，仍然成立. 从平面图形到空间图形这一变化，使原有的梯形性质等，都不能应用，这就应该重新考虑空间四边形的特性：空间四边形对边中点的连线交于一点且相互平分. 注

意到题设条件正是有一系列线段的中点，怎样应用这个特性，正成为求 G 点轨迹的关键所在．下面的解法一就是从这里得到启示的．

〈解法一〉 作 $\triangle ABC$ 的中线 $\overline{CD}$、P、Q 顺次为 $\overline{CD}$ 之三等分点；对应的作 $\triangle A'B'C'$ 的中线 $\overline{C'D'}$，P'、Q' 顺次为 $\overline{C'D'}$ 的三等分点．为明确计，我们约定：P、P' 分别为 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 的重心(如图 3—8)．

这样，在空间四边形 $AA'B'B$ 中，D、L、D'、M 顺次为其四边中点，因而 $DLD'M$ 为平行四边形，故可设对角线 $\overline{DD'}$ 与 $\overline{LM}$ 相互平分于 H 点．

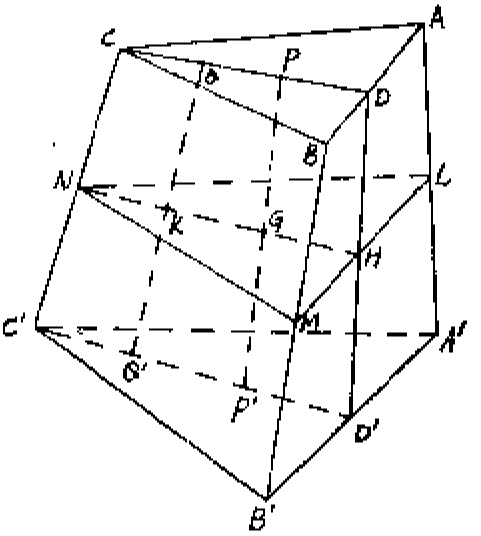


图 3—8

同理，在空间四边形 $DD'Q'Q$ 中，取 $\overline{QQ'}$ 之中点 K，又 H、P、P' 顺次为 $\overline{DD'}$、$\overline{DQ}$、$\overline{D'Q'}$ 之中点，故 $\overline{HK}$ 与 $\overline{PP'}$ 相互平分于 G'．

类似可设：在空间四边形中，$\overline{G'N}$ 与 $\overline{QQ'}$ 相互平分于 K' 点．

但 $\overline{QQ'}$ 的中点是唯一的，故 K' 与 K 重合，由此 N、K、G' 三点共线．又已知 H、G'、K 三点共线，而过 K、G' 的直线是唯一的，故 N、K、G'、H 四点共线．注意到 $\overline{NK}=\overline{KG'}=\overline{G'H}$，则 G' 为 $\triangle LMN$ 的重心，故 G 与 G' 重合，即 G 为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的重心连线 $\overline{PP'}$ 的中点．

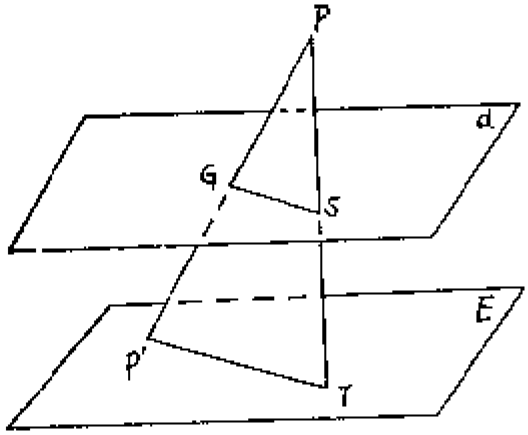


图 3—9

过$\triangle ABC$的重心P，作直线$PT\perp$平面E于T点，设S为$\overline{PT}$的中点，过S作平行于平面E的平面α. 显然，点G必在平面α上(图 3—9).

下面我们再证明：平面α上的任一点满足题设条件(参看图 3—8).

设G为平面α上任一点，连结PG，并延长与平面E交于P'. 平面PTG与平面α、平面E的交线顺次为SG与TP'，因此$SG \parallel TP'$. 而S为$\overline{PT}$之中点，故G为$\overline{PP'}$之中点.

再在平面E上任取两点A'、B'. 连结AA'、BB'，并分别取L、M、D'依次为$\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{A'B'}$的中点，则$\overline{DD'}$、$\overline{LM}$相互平分于H.

连结$D'P'$，并延长之至C'，使$\overline{D'C'}=3\overline{D'P'}$. 连结$CC'$，取$\overline{CC'}$的中点$N$. 那末，$G$必是$\triangle LMN$的重心.

事实上，取$\overline{C'P'}$的中点Q'，取$\overline{QQ'}$的中点K连结NG与KH，则在空间四边形$CC'P'P$中，$\overline{NG}$与$\overline{QQ'}$相互平分，故NG过QQ'的中点K，即N、K、G三点共线，且$\overline{NK}=\overline{KG}$. 同理，在空间四边形$QQ'D'D$中，$\overline{KH}$与$\overline{PP'}$相互平分，故$KH$过$PP'$之中点$G$，即$K$、$G$、$H$三点共线，且$\overline{KG}=\overline{GH}$. 由此可知，$N$、$K$、$G$、$H$四点共线，且$\overline{NK}=\overline{KG}=\overline{GH}$. 故$G$为$\triangle LMN$的重心.

综上所述，平面 α 确为点 G 的轨迹.

〈解法二〉 由于 A'、B'、C' 是平面 E 上的动点. 对应的 $\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$ 的中点 L、M、N 也依一定规律而运动. 为此，我们先研究 L、M 和 N 的轨迹.

事实上，类似于上面解法一中所说，通过 P 点作 PT 垂直平面 E 于 T 点. 从而找到平面 α，不难判定：

过 A 作直线 $AT_a \perp$ 平面 E 于 T_a 点. 过 $\overline{AT_a}$ 的中点 L_1 作平面 $X \parallel$ 平面 E，则平面 X 即为 L 点的轨迹；

过 B 作直线 $BT_b \perp$ 平面 E 于 T_b 点, 过 $\overline{AT_b}$ 的中点 M_1 作平面 $Y \parallel$ 平面 E，则平面 Y 即为 M 点的轨迹.

过 C 作直线 $CT_c \perp$ 平面 E 于 T_c, 过 CT_c 的中点 N_1 作平面 $Z \parallel$ 平面 E，则平面 Z 即为 N 点的轨迹.

类似的，还可以进一步判断. 线段 $\overline{LM}$ 的中点 H 的轨迹是：平面 X 与平面 Y 的中平行面 W (如图 3—10).

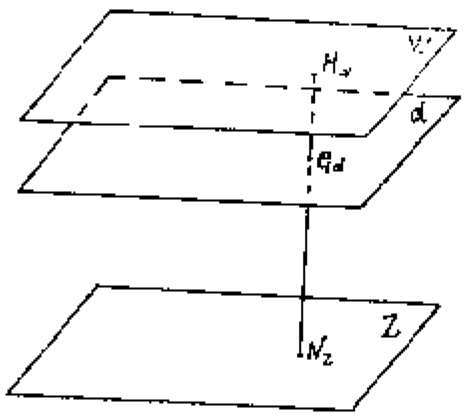


图 3—10

注意到，不论点 H、C 分别在平面 W 和 Z 上的位置如何，点 G 恒满足条件

$$\frac{\overline{HG}}{\overline{GN}}=\frac{1}{2}.$$

因此，G 必在到平面 W 的距离与到平面 Z 的距离之比 $\dfrac{\overline{H_WG_\alpha}}{\overline{G_\alpha N_Z}}=\dfrac{1}{2}$ 的平面 α 上. 显然，平面 $\alpha \parallel$ 平面 $W \parallel$ 平面 Z.

下面我们证明：平面 α 上任意一点 G 满足题设条件.

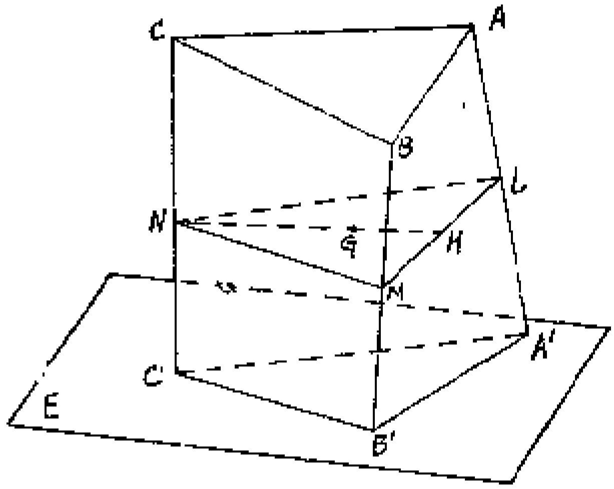


图 3—11

如图 3—11，在平面 Z 上任取一点 N，连结 NG 与平面 W 交于 H 点，则 $\dfrac{\overline{HG}}{\overline{GN}}=\dfrac{1}{2}$.

过 H 任意引直线与平面 X 及平面 Y 分别交于 L 及 M. 由于平面 W 是平面 X 和平面 Y 的中平行面，则必有

$$\overline{LH}=\overline{HM}.$$

由此，$\overline{NH}$ 为 $\triangle LMN$ 的中线，G 为 $\triangle LMN$ 的重心.

又分别连结 AL，BM，CN 并延长之与平面 E 顺次交于点 A_1、B_1、C_1，据解法一的证明，易知 L、M、N 分别为 $\overline{AA_1}$、$\overline{BB_1}$、$\overline{CC_1}$ 的中点.

因此，G 合于题设条件，亦即平面 α 为所求轨迹.

〈**解法三**〉 如图 3—12 所示，以平面 E 上任意一点 O 为原点，平面 E 上两条相互垂直的直线 OX、OY 为 X 轴、Y 轴，垂直于平面 E 的直线 OZ 为 Z 轴，建立直角坐标系.

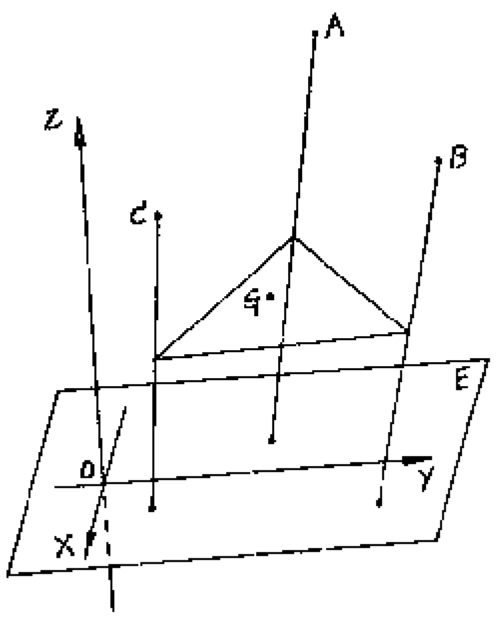


图 3—12

若点 A、B、C 的坐标为：

$A(x_1,\ y_1,\ 2a)$，$B(x_2,\ y_2,\ 2b)$；$C(x_3,\ y_3,\ 2c)$；
点 A'、B'、C' 的坐标为：

$A'(x_1',\ y_1',\ 0)$，$B'(x_2',\ y_2',\ 0)$，$C'(x_3',\ y_3',\ 0)$.

则线段 $\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$ 的中点 L、M、N 的坐标为：

$$L\left(\frac{x_1+x_1'}{2},\ \frac{y_1+y_1'}{2},\ a\right),\ M\left(\frac{x_2+x_2'}{2},\ \frac{y_2+y_2'}{2},\ b\right),$$

$$N\left(\frac{x_3+x_3'}{2},\ \frac{y_3+y_3'}{2},\ c\right).$$

由此，$\triangle LMN$ 的重心 G 的坐标为

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_1'+x_2'+x_3'}{6},\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_1'+y_2'+y_3'}{6},\right.$$

$$\left.\frac{a+b+c}{3}\right).$$

这就是说，点 G 在平面

$$\alpha:\ Z=\frac{a+b+c}{3}$$

上．这里，平面 α 平行于平面 E，与点 A、B、C 位于平面 E 的同侧．且与两平面 α 与 E 的距离为 $\frac{a+b+c}{3}$.

下面，我们再证明平面 α 上的任一点属于几何轨迹：

在平面 α 上任取一点 $G\left(\bar{x},\ \bar{y},\ \frac{a+b+c}{3}\right)$，在平面 E 上任取两点 $A'(x_1',\ y_1',\ 0)$，$B'(x_2',\ y_2',\ 0)$，并由关系式

$$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_1'+x_2'+x_3'}{6},\\[2mm]\bar{y}=\dfrac{y_1+y_2+y_3+y_1'+y_2'+y_3'}{6}\end{cases}$$

解出 x_3'、y_3'. 从而在平面 E 上确定点 $C'(x_3',\ y_3',\ 0)$.

那末，重复前面的计算，不难证明，点 G 即为 $\triangle LMN$

的重心．这里，点 L、M、N 分别是 $\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$ 的中点．

所以，平面 α 为点 G 的轨迹．

【附注】 1．解法一的难点在于证明 N、K'、G'、H 四点共线．由于不便于直接论证，题中才采用了同一法．应用同一法的关键在于结论的唯一性，比如题中就用到了：$\overline{QQ'}$ 的中点是唯一的，以及过点 K、G' 的直线的唯一性，来确定其它各点的位置．关于同一法的简介，请读者参看第一届第五题附注 2．

2．解法二其实是建立在这样一个引理的基础上的：

将端点分别在两已知平行平面上的线段分于定比 $k>0$ 的点的轨迹，是介于这两个已知平面间，且与此二平面平行的一双平行平面．它们中的每一个到这二已知平面的距离分别为 $\frac{d}{1+k}$ 与 $\frac{kd}{1+k}$．这里 d 表两已知平面间的距离．

当 $k=1$ 时，则此二平面重合为中平行面．

本题中平面 α 之所以是唯一的，就是由于重心这个条件的制约，定比只能是

$$\frac{\overline{HG}}{\overline{GN}}=\frac{1}{2}$$

之故．

3．空间解析几何是现行中学数学教学大纲所没有规定的内容，但其有关的基础知识与平面解析几何是有机的对应着的．如：

距离公式

$$d=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}\;;$$

定比分点公式

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

等等．除了由二维推广到三维外，基本上是一致的．但二者之间也存在着明显的差异，如一次方程，在平面解析几何中表示直线($ax+by=c$)，但在空间解析却表示平面了．

本题解法三仅仅用到了空间点的坐标、定比分点及平面方程等基础知识．希望了解得更多一些的读者，请参看有关专著．

第四届国际中学生数学竞赛试题分析与解答

1962 年在捷克斯洛伐克举行

第　一　题（波兰命题）

求适合下列条件的最小自然数 n：

1）在十进制中表示时，其个位数字为 6；

2）如把这个数的个位数字 6 去掉，并在余下的数字之前添上数字 6，则所得的数是原数 n 的 4 倍。

【分析】注意到题中条件：1）数 n 的个位数码是已知的；2）数 n 的个位数码需移动位置而成新数，因此要设法恰当地表示数 n，使之便于表示个位数码移动后所得的新数。

决定数 n 的要素有三：个位数码 6；除个位数码以外的其他所有数码——这些数码之间的相对位置是不变的；数 n 的位数。

如果设数 n 是 y 位数，且 $n=10x+6$，则所设的就是除个位数码 6 之外，各位数码所构成的多位数为 x。这时，将个位数码 6 移到最高位时，所得新数为 $6\cdot10^{y-1}+x$，这就是下面解法一的关键所在。

也可以采用不同构思得到不同的表示法，但思路大体上还是比较一致的，详见解法二。

〈解法一〉　以 $n=10x+6$ 表示所求的自然数，其中 x 是

自然数；另外，设 y 为数 n 的位数，依题意，有

$$4(10x+6)=6\cdot10^{y-1}+x.$$

化简之，得

$$13x=2(10^{y-1}-4). \qquad (1)$$

因 x 为自然数，则 $2(10^{y-1}-4)$ 能被 13 整除，即 $10^{y-1}-4$ 能被 13 整除．但形如 $10^{y-1}-4$ 的数就是：6，96，996，9996，……其中能够被 13 整除的，通过试算后发现，最小的一个是 99996，它可以表为 13×7692．因此，得 $y-1=5$，即 $y=6$，代入方程(1)，得到

$$x=15384.$$

故所求的最小自然数 n 是 153846.

〈解法二〉　设数 n 为 k 位数．则将 6 移到第一位，并去掉数字 6 时，所得新数为：

$$6\cdot10^{k-1}+\frac{n-6}{10}.$$

因此，
$$6\cdot10^{k-1}+\frac{n-6}{10}=4n,$$

化简得：
$$39n=6(10^k-1),$$

$$n=\frac{2(10^k-1)}{13}. \qquad (2)$$

由(2)知 10^k-1 能被 13 所整除．但

$$10-1,\ 10^2-1,\ 10^3-1,\ 10^4-1,\ 10^5-1$$

都不是 13 的倍数；而 $10^6-1=999999=76923\times13$，所以满足条件的最小 k 值为 6，因此

$$n=153846.$$

【附注】　10^k-4、10^k-1 被 13 整除时，k 的最小值为 6 不是偶然的，这正是由于 13 的循环节为 6 的缘故；另外值得

注意的是，对于每一个质数作被除数时，它的一个循环节的各位数码之间的相对位置也是确定的．以 13 为例，它的循环节只能是 153846、615384、461538、846153、384615、538461 中之一．懂得这一点，就可以类似地编出有关命题，例如：

求满足下列条件的最小整数 n：

i）n 的个位数为 4；

ii）如果把个位数码 4 去掉，并在余下的数字前添上 4，则所得的新数是原数 n 的 $\frac{3}{4}$．

第　二　题（匈牙利命题）

确定适合不等式 $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$ 的所有实数 x．

【分析】 一般地说，无理不等式的解法与无理方程是类似的，都是在有理化之后求解．但不等式中定义域的变化比较复杂，因此难度较解无理方程为大．这里对本题提供了两种不同的解法：解法一是先求解之后再进行讨论和验算；解法二则是扣准不等式的定义域，将原不等式转化为与之等价的有理不等式组求解．对比之下，哪一种更为方便一些呢？读者不妨亲自实践一下．

〈**解法一**〉 设 x 是这不等式的任一实数解．首先，将原不等式变形为：

$$\sqrt{3-x}>\frac{1}{2}+\sqrt{x+1}.$$

因为不等式的两边均正，我们将它两边平方，并进一步化简得到．

$$\frac{7}{4}-2x>\sqrt{x+1},$$

再次平方、整理，最后得到不等式：

$$64x^2-128x+33>0,$$

即 $$(8x-8+\sqrt{31})(8x-8-\sqrt{31})>0.$$

因此，得到两个可能的解集：

$$x<1-\frac{1}{8}\sqrt{31} \tag{1}$$

或 $$x>1+\frac{1}{8}\sqrt{31}. \tag{2}$$

现在我们进行验根：

由不等式(1)，得：

$$3-x>2+\frac{1}{8}\sqrt{31}>0$$

和 $$x+1<2-\frac{1}{8}\sqrt{31}. \tag{3}$$

要使 $\sqrt{x+1}$ 是实数，必须满足条件 $x+1\geqslant0$，从而得 $x\geqslant-1$. 因此，变数 x 必须满足不等式

$$-1\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{8}\sqrt{31}. \tag{4}$$

容易通过取平方来验证下面的等式的正确性：

$$\sqrt{2+\frac{1}{8}\sqrt{31}}-\sqrt{2-\frac{1}{8}\sqrt{31}}=\frac{1}{2} \tag{5}$$

于是，由不等式(3)，得

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\sqrt{2+\frac{1}{8}\sqrt{31}}-\sqrt{2-\frac{1}{8}\sqrt{31}}.$$

从而据(5)可知原不等式成立：

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}.$$

由不等式(2)，得：

$$\sqrt{3-x}<\sqrt{2-\frac{1}{8}\sqrt{31}}$$

和 $$\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}+\sqrt{2+\frac{1}{8}\sqrt{31}}.$$

此时，如果原不等式成立，则应有

$$\sqrt{3-x}>\sqrt{x+1}+\frac{1}{2},$$

从而有 $$\sqrt{2-\frac{1}{8}\sqrt{31}}>\frac{1}{2}+\sqrt{2+\frac{1}{8}\sqrt{31}}.$$

这显然与方程(5)矛盾，故(3)不是原不等式的解.

因此，已知不等式的所有解由不等式(4)表示.

〈**解法二**〉 原不等式的左端为两个算术根之差，根据根式定义，易得：

$$-1\leqslant x\leqslant 3. \tag{6}$$

因原不等式的右端 $\frac{1}{2}>0$，则应有左端

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>0.$$

解之得 $$x<1. \tag{7}$$

在同时满足(6)、(7)（即 $-1\leqslant x<1$）的前提下，化简原不等式，得：

$$4(3-x)>1+4\sqrt{x+1}+4x+4,$$

$$7-8x>4\sqrt{x+1}. \tag{8}$$

注意到 $$7-8x>0 \quad 即 \quad x<\frac{7}{8}. \tag{9}$$

在条件(9)之下，再化简不等式(8)，得：

$$49-112x+64x^2>16x+16,$$

$$64x^2-128x+33>0.$$

因此， $x>\dfrac{8+\sqrt{31}}{8}$ 或 $x<\dfrac{8-\sqrt{31}}{8}$ (10)

综合 (6)、(7)、(9)、(10) 的讨论，可知不等式之解为

$$-1\leqslant x<\frac{8-\sqrt{31}}{8}.$$

【附注】 1. 因为复数集不存在大小的规定，故不等式只能在实数集上求解，因而对于偶次根式，当然只能取算术根.

2. 不等式的讨论较之等式要难，应用也比较广泛. 在结合其他超越函数来讨论时，难度就更大一些. 但这对于提高分析能力和逻辑表达能力则是十分有益的，因此是一类值得重视的基本训练.

第 三 题（捷克斯洛伐克命题）

已知一个立方体 $ABCD—A'B'C'D'$（$ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 分别是上底面和下底面，且 $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$）. 点 X 按方向 $ABCDA$ 沿正方形 $ABCD$ 的边作匀速运动，点 Y 按方向 $B'C'CBB'$ 以同等速度沿正方形 $B'C'CB$ 的边作匀速运动，且 X、Y 分别由起点 A、B' 同时开始运动，试确定并画出线段 $\overline{XY}$ 中点 Z 的轨迹.

【分析】 设 δ 是过棱 $\overline{AA'}$ 的中点 A_0 面平行于两底面的平面，截立方体所成截面为正方形 $A_0B_0C_0D_0$（如图 4—1）；另外，Z_1、Z_2 分别为线段 $\overline{A_0B_0}$ 和 $\overline{B_0C_0}$ 的中点，下面就各种不同情况分别进行讨论：

情形 I　当点 X 在线段 $\overline{AB}$ 上运动时，点 Y 以同样的速度在线段 $B'C'$ 上运动. 线段 $\overline{XY}$ 的中点 Z 必在中平行平面 δ 上，由此易证 Z 一定也是 $\overline{X'Y'}$ 的中点，这里线段 $\overline{X'Y'}$ 表示线段 $\overline{XY}$ 在平面 δ 的正投影.

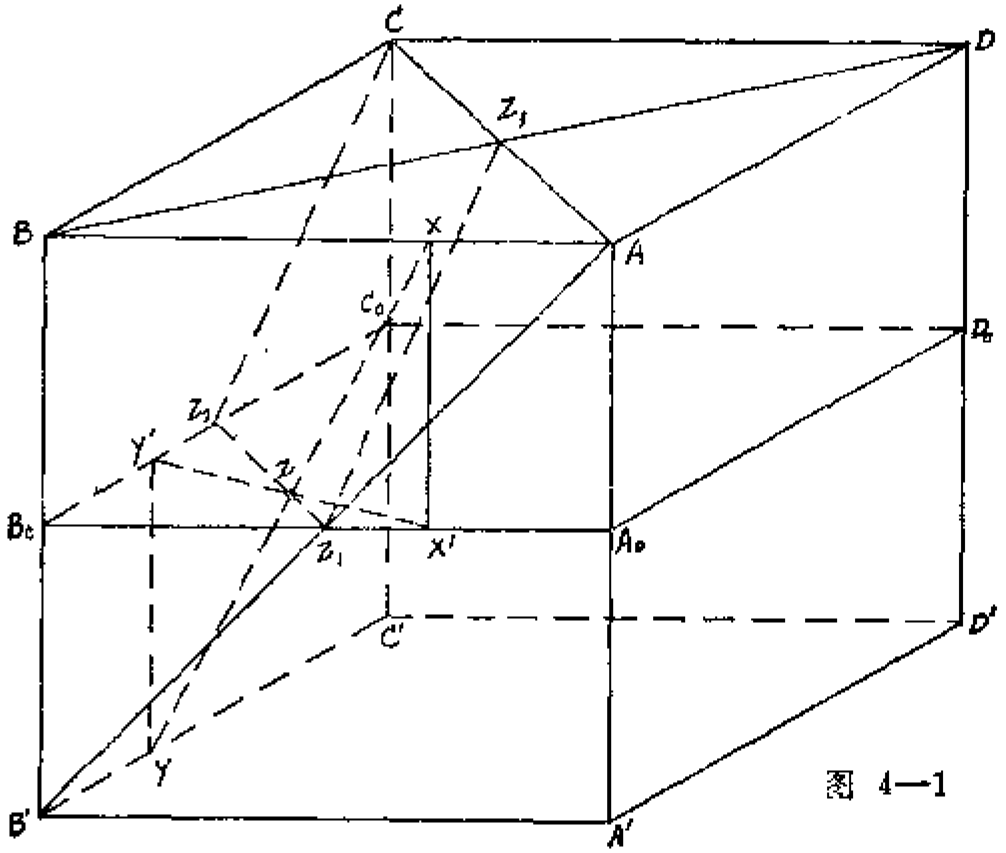


图 4—1

在这种情形下，中点 Z 的几何轨迹，显然是线段 $\overline{Z_1Z_2}$.

事实上(参见图 4—2)，注意到 $\overline{Z_2Y'}=\overline{Z_1X'}$，过 Y' 作 $\overline{Y'T}\parallel\overline{Z_1X'}$，而且与 $\overline{Z_1Z_2}$ 交于 T 点，易证 $\overline{Y'T}=\overline{Y'Z_2}=\overline{Z_1X'}$. 从而 $Y'Z_1X'T$ 为平行四边形，二对角线 $\overline{X'Y'}$、$\overline{Z_1T}$ 互相平分于 Z，即 $\overline{X'Y'}$ 的中点 Z 在 $\overline{Z_1Z_2}$ 上.

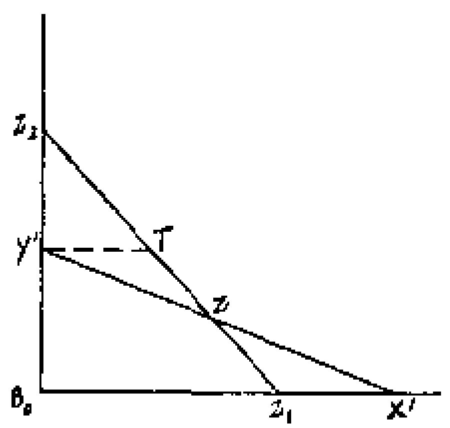


图 4—2

情形Ⅱ　当 X 点在线段 $\overline{BC}$ 上，同时 Y 点在线段 $\overline{C'C}$ 上运动时，线段 $\overline{XY}$ 总是平行于正方形 $BB'C'C$ 的对角线 $\overline{BC'}$. 在这种情形下，中点 Z 的几何轨迹

显然是线段$\overline{Z_2C}$.

情形Ⅲ　当X点在线段$\overline{CD}$上，并且Y点同时在线段$\overline{CB}$上运动时，线段$\overline{XY}$总是平行于正方形$ABCD$的对角线$\overline{BD}$，并且动点Z在线段$\overline{CZ_3}$上，这里Z_3是正方形$ABCD$的对角线$\overline{BD}$的中点.

情形Ⅳ　当点X沿线段$\overline{DA}$返回到A点，并且点Y同时沿线段$\overline{BB'}$返回到B'点，此时与情形Ⅰ完全类似. 只要交换立方体中有关的棱，即将$\overline{DA}$看成$\overline{AB}$，$\overline{BB'}$看成$\overline{B'C'}$，立即可以得到Z_3对应于Z_1，Z_1对应于Z_2. 亦即此时Z点的轨迹为线段$\overline{Z_3Z_1}$.

注意到$\overline{Z_1Z_2}=\overline{Z_2C}=\overline{CZ_3}=\overline{Z_3Z_1}$（因为这四条线段中的每一条都平行于已知立方体的某一个面的对角线，且长度等于该对角线的一半），可知所求线段$\overline{XY}$中点的轨迹是菱形$Z_1Z_2CZ_3$的周界.

〈解法一〉　由于上述分析已够清楚，故具体解法从略.

下面，按照轨迹问题的严格要求，给出本题的另一解法.

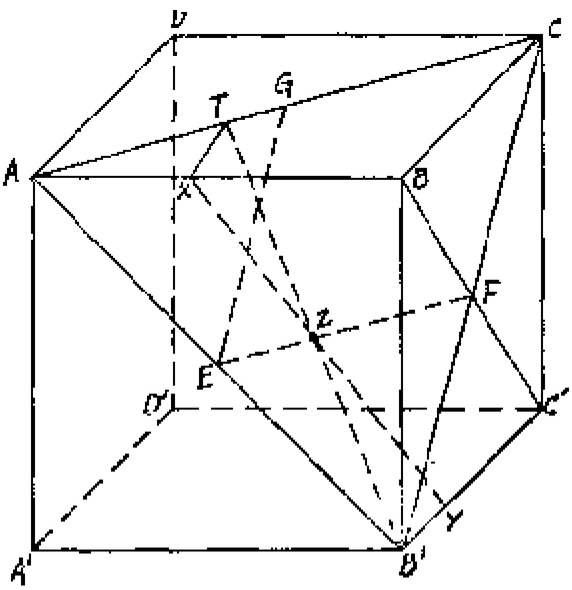


图 4—3

〈解法二〉　如图4—3所示，设Z、F、G顺次为正方形$A'B'BA$、$B'C'CB$、$ABCD$的中心，则菱形$EFCG$的周界即为动线段$\overline{XY}$的中点Z的轨迹. 现在证明如下：

条件必要　如果点Z是动线段$\overline{XY}$的中点，则可以区别为以下两种情况：

i) X、Y分别在某一个定角的两边上，不失其一般性，设X从B到C，而Y同时由C'到C，由于X、Y的速度相等，故其中点Z是一簇平行于$\overline{BC'}$的线段的中点，显然它必在$\overline{CF}$上。

ii) X、Y分别在两条异面直线上，不失其一般性，设X从A到B，而Y同时由B'到C'，由于X、Y的速度相等，则$\overline{AX}=\overline{B'Y}$.

若Z为$\overline{XY}$的中点，连接$B'Z$并延长与上底面AC相交于T点，连XT，则平面XY与平面AC的交线是XT. 因$B'C' \parallel$平面AC，则$B'C' \parallel XT$. 于是$\triangle ZB'Y \cong \triangle ZTX$，而$\overline{XT}=\overline{B'Y}=\overline{AX}$. 又$XT \parallel BC$，则$\triangle AXT$为等腰直角三角形，$\angle TAX=\frac{\pi}{4}$，即$T$在$\overline{AC}$上.

此时就$\triangle B'CT$看，根据三角形中位线的性质，不难证明：$FZ \parallel CT$，$EZ \parallel CA$；$FE \parallel CA$. 基于平行的唯一性，显然Z在$\overline{EF}$上.

综合 i)、ii) 可知，动线段$\overline{XY}$之中点必在菱形$EFCG$的周界上.

条件充分　若点Z在菱形$EFCG$的周界上，同样可以分为上述两种情况：

对于 i)，即Z在$\overline{CF}$或$\overline{CG}$上，过Z作$XY \parallel BC'$（或BD），而与$\overline{BC}$及$\overline{CC'}$（或$\overline{CD}$及$\overline{BC}$）分别相交于X及Y. 根据相似形的有关性质，不难证明：Z为$\overline{XY}$的中点，且$\overline{BX}=\overline{C'Y}$（或$\overline{CX}=\overline{CY}$）. 因此，合于所设条件.

对于 iii)，即 Z 在 $\overline{EF}$ 或 $\overline{EG}$ 上，不失其一般性，设 Z 在 $\overline{EF}$ 上，连接 $B'Z$ 延长之，与平面 AC 交于 T，显然 T 在 $\overline{AC}$ 上，过 T 作 $TX \parallel CB$，交 AB 于 X．则 $TX \parallel C'B'$（平行的传递性）．

在平面 $TXB'C'$ 上，连接 XZ，延长后交 $\overline{B'C'}$ 于 Y 点．此时，在 $\triangle B'CA$ 中，由于 F 是 $\overline{B'C}$ 的中点，而 $EF \parallel AC$，则 Z 为 $\overline{B'T}$ 的中点．由此可知 $\triangle ZTX \cong \triangle ZB'Y$，从而得 $\overline{TX} \perp\!\!\!\!= \overline{B'Y}$，且 Z 为 $\overline{XY}$ 之中点．又 $TX \parallel BC$，则 $\angle XTA = \angle TAX = \frac{\pi}{4}$．因此有 $\overline{TX} = \overline{AX}$，即 $\overline{AX} = \overline{BY}$，亦合于所设条件．

综合上述可知，如果 Z 是菱形 $EFCG$ 的周界上任一点，则 Z 点必然是符合条件的动线段 $\overline{XY}$ 的中点．从而命题得证．

【附注】 1．与前面第二届第五题、第三届第六题等一样，本题也是难度较大的空间轨迹．但本题的轨迹为几条线段，如用方程表示，则在空间解析几何中，一条直线要用两个方程表示（即两个平面的交线），因而过程反而复杂一些．

2．探求轨迹的过程，本题也可以采用下面的方法：直接观察 X、Y 处于正六面体有关顶点位置时，线段 $\overline{XY}$ 的中点 Z 在什么位置．这样，立即可以得所求得该菱形的四个顶点．

3．本题的分析部分实际上提出了另外一条思路．根据分析的推理过程，也可以给出另一种证法，请读者考虑．

第　四　题（罗马尼亚命题）

解方程
$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

【分析】 本题是一般的三角方程．使用余弦倍角公式降次是值得重视的基本训练．如果不这样办，而将 $\cos 2x$、$\cos 3x$ 都化为 $\cos x$ 来解，就会出现关于 $\cos x$ 的高次方程，使难度加大．

〈解答〉 应用下列公式：

$$2\cos^2 x=1+\cos 2x,$$
$$2\cos^2 2x=1+\cos 4x,$$

通过代换和化简，由已知方程

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$$

得到

$$\cos 2x+\cos 4x+2\cos^2 3x=0. \qquad (1)$$

将(1) 的左边前两项化积，得

$$2\cos 3x\cos x+2\cos^2 3x=0,$$

即

$$2\cos 3x(\cos x+\cos 3x)=0.$$

用和差化积的方法对 $\cos x+\cos 3x$ 变形，又得到

$$4\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x=0. \qquad (2)$$

方程(2)的解为

$$x_1=\pm 90^\circ+k\cdot 360^\circ;\quad 2x_2=\pm 90^\circ+k\cdot 360^\circ;$$
$$3x_3=\pm 90^\circ+k\cdot 360^\circ.$$

即

$$x_1=\pm 90^\circ+k\cdot 360^\circ;\quad x_2=\pm 45^\circ+k\cdot 180^\circ;$$
$$x_3=\pm 30^\circ+k\cdot 120^\circ.$$

这里 k 为整数．

经过验算，所有这些解都满足原方程（至于原方程无他解，则是显然的）．

【附注】 本题当然还有其他解法．比如，将原方程作下列变形：

$$\cos^2 x+\cos^2 2x-\sin^2 3x=0,$$

$$\cos^2 2x+(\cos x+\sin 3x)(\cos x-\sin 3x)=0,$$

$$\cos^2 2x+\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin 3x\right]\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right.$$

$$\left.-\sin 3x\right]=0,$$

$$\cos^2 2x+2\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0.$$

$$\cos^2 2x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=0,$$

$$\cos 2x(\cos 2x+\cos 4x)=0,$$

从而得到与(2)一致的方程

$$2\cos 2x\cos x\cos 3x=0.$$

但这类解法，从实质上看，都是利用倍角公式、和积互换公式等，属于同一类型的解法．对于其他的解法，建议读者自己再实践一下．

第 五 题（保加利亚命题）

在圆周 K 上给定三个不同点 A、B 和 C，试在圆周 K 上作出第四点 D（只用圆规直尺），使在所得的四边形 $ABCD$ 中能有一个内切圆．

【分析】 这是一道常见的尺规作图题，本题的关键在于掌握圆外切四边形的性质：对边之和相等．把握住这点之后，不论是从轨迹交截入手，还是从三角计算入手，都是比较方便的．在当前中学数学中，几何作图作了适当精简的情况下，后一种解法似乎更值得注意，因为它从一个侧面揭示了综合运用几何与三角知识的途径．

〈解法一〉 对于所求的有内切圆的四边形 $ABCD$，有：

$$\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD}. \qquad (1)$$

不失其一般性，设 $\overline{BC}\geqslant\overline{AB}$. 下面分两种情况讨论：

若 $\overline{AB}=\overline{BC}$，则由(1)有$\overline{AD}=\overline{CD}$. 因此，$B$、$D$ 都在 $\overline{AC}$ 的中垂线上，而 $ABCD$ 为一筝形. 显然，它能够外接于一个圆，如图 4—4 所示，作法比较简单，证明也较容易，因而从略.

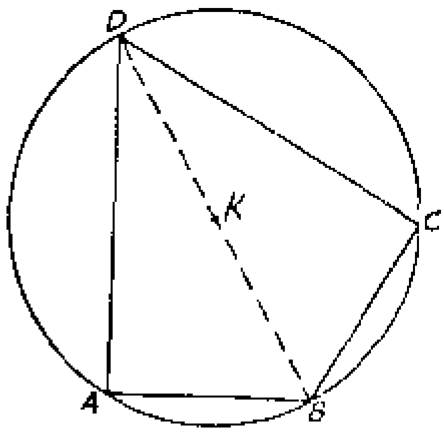


图 4—4

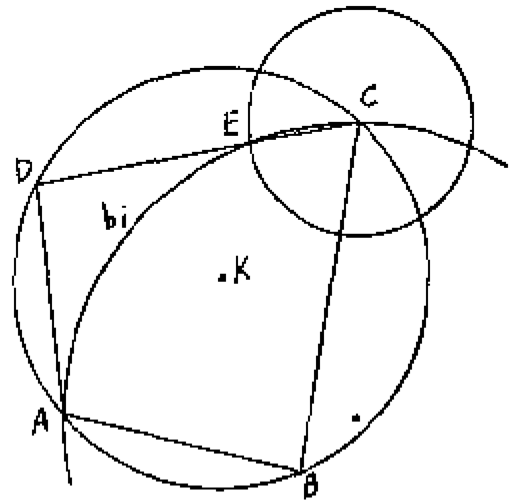


图 4—5

若 $BC>AB$，则 $\overline{CD}-\overline{AD}=\overline{BC}-\overline{AB}$ 为一定值. 因此，所求的顶点 D，一方面在一个圆上；另一方面在以 A、C 为焦点，实轴长为 $\overline{BC}-\overline{AB}$的双曲线上. 因此，可以通过欧氏几何方法作图，求出这两条曲线的公共点的位置，其具体作法如下：

注意到：以 C 为圆心，$\overline{BC}-\overline{AB}$ 为半径画弧与 $\overline{CD}$ 交于 E（设 $\overline{CD}$ 已作出），则$\triangle ADE$ 为等腰三角形，$\overline{AD}=\overline{DE}$，从而

$$\angle AEC=\pi-\angle AED=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\angle ADE\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\angle ADE=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(\pi-\angle ABC)$$
$$=\pi-\frac{1}{2}\angle ABC.$$

为一定值，故 E 点又在以 $\overline{AC}$ 为弦、所含圆周角为定角 $\pi-\frac{1}{2}\angle ABC$ 的容角弧上.

因此，连 AC，以 $\overline{AC}$ 为弦、在与点 B 相异的一例，作容角弧 $\widehat{Ab_1C}$，使所容圆周角等于$\left(\pi-\frac{1}{2}\angle ABC\right)$；又以 C 为圆心，$\overline{BC}-\overline{AB}$ 为半径画圆与 $\widehat{Ab_1C}$交于 E；连接 CE 并延长之，交圆 K 于 D，则 D 点即为所求(图 4—5)．

事实上，由于$\angle ADC+\angle ABC=\pi$，又由作图知$\angle AEC=\pi-\frac{1}{2}\angle ABC$，则

$$\angle AED=\pi-\angle AEC=\frac{1}{2}\angle ABC.$$

又在$\triangle ADE$ 中，有

$$\angle DAE=\pi-\angle ADC-\angle AED$$
$$=\pi-(\pi-\angle ABC)-\frac{1}{2}\angle ABC$$
$$=\frac{1}{2}\angle ABC$$

于是 $\angle AED=\angle DAE$，即 $AD=DE$，因而有

$$\overline{CD}-\overline{AD}=\overline{CE}.$$

在作法中，又有 $\overline{BC}-\overline{AB}=\overline{CE}$，因此：

$$\overline{CD}-\overline{AD}=\overline{BC}-AB,$$
$$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}.$$

所以四边形 $ABCD$ 有内切圆，合于所设条件.

下面转入对作图的讨论：

由于$\pi-\frac{1}{2}\angle ABC>\pi-\angle ABC$，$\widehat{Ab_1C}$在圆$K$内(公共点为$A$和$C$)；又当$\overline{CE}<\overline{AC}$，即

$$BC-\overline{AB}<\overline{AC}$$

时，圆C与$\widehat{Ab_1C}$有且仅有一交点E. 但对圆K上任意一组点A、B、C，不等式$\overline{BC}-\overline{AB}<\overline{AC}$总是成立的，因此本题恒有一解.

〈**解法二**〉 若D点已求出，由于四边形$ABCD$有内切圆，则

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}. \tag{1}$$

为方便计，连AC，取圆K之半径为R，$\angle ABC=\beta$，$\angle ACB=\alpha$，$\angle BAC=\gamma$，以上均为定值；并且不妨约定$\alpha\geqslant\gamma$.

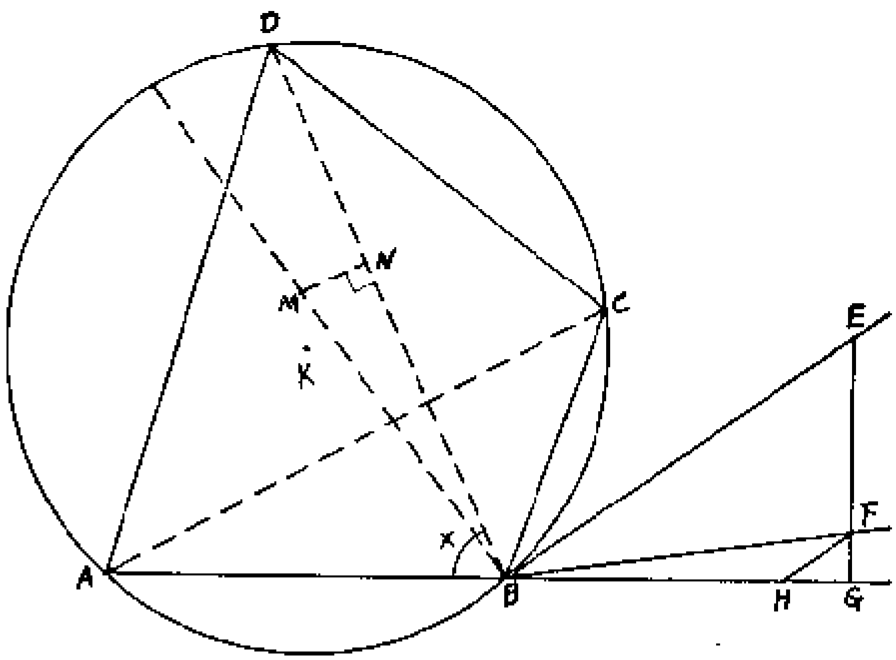


图 4—6

又连BD(图 4—6)，设$\angle ABD=x$，则$\angle DBC=\beta-x$.

于是，由(1)得：

$$2R[\sin\alpha+\sin(\beta-x)]=2R[\sin\gamma+\sin x],$$

$$\sin x-\sin(\beta-x)=\sin\alpha-\sin\gamma,$$

$$2\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{2x-\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\gamma}{2},$$

$$\sin\frac{2x-\beta}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}, \tag{2}$$

注意到 $ABCD$ 内接于圆 K，$\beta+(\alpha+\gamma)=\pi$，故有：

$$\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\gamma}{2}、\cos\frac{\beta}{2}=\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

因而由(2)得：

$$\sin\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}, \tag{3}$$

这里 $\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\gamma}{2}$、$\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}$ 均为已知角的三角函数值，所以 $\sin\left(x-\frac{\beta}{2}\right)$ 可以作出.

作法如下：

1）作 $\angle ABC$ 的外角 $\angle CBG$ 的平分线 BE，又在 $\angle EBG$ 的内部作 $\angle EBF=\angle CAB=\gamma$；

2）过 BE 上任一点 E 作 $EF\perp BG$ 于 G，且与 BF 相交于 F，又过 F 作 $FH\parallel EB$ 与 BG 相交于 H；

3）作 $\angle ABC$ 的平分线 BM，取 $\overline{BM}=\overline{BF}$，又在 $\angle CBM$ 的内部作 $Rt\triangle BMN$，使 $\angle MNB=\frac{\pi}{2}$，$\overline{MN}=\overline{HG}$；

4）延长 BN 与圆 K 交于 D，分别连 CD 与 AD，则 $ABCD$ 即为所求的四边形(图 4—6)．

现在对作图进行证明.

① 由作法知，

$$\angle EBG=\frac{1}{2}\angle CBG=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma),$$

$$\angle FBG=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)-\gamma=\frac{1}{2}(\alpha-\gamma),$$

于是 $$\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{\overline{BG}}{\overline{EG}},\qquad \sin\frac{\alpha-\gamma}{2}=\frac{\overline{FG}}{\overline{BF}}.$$

② 在 $Rt\triangle BGE$ 中，显然有$\frac{\overline{FG}}{\overline{EG}}=\frac{\overline{HG}}{\overline{BG}}$(平行截割定理)，故$\overline{HG}=\frac{\overline{FG}\cdot\overline{BG}}{\overline{EG}}$. 于是，由(3)得：

$$\sin\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}$$

$$=\frac{\overline{BG}}{\overline{EG}}\cdot\frac{\overline{FG}}{\overline{BF}}=\frac{\frac{\overline{BG}\cdot\overline{FG}}{\overline{EG}}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{HG}}{\overline{BF}}.$$

③ 在 $Rt\triangle BMN$ 中：

$$\sin\angle MBN=\frac{\overline{MN}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{HG}}{\overline{BF}}=\sin\left(x-\frac{\beta}{2}\right),$$

则 $$\angle MBN=x-\frac{\beta}{2},$$

从而有 $\angle ABN=\left(x-\frac{\beta}{2}\right)+\frac{\beta}{2}=x$, $\angle DBC=\beta-x$.

④ 注意到由(1)推得(2)，又由(2)导出(3)，在这些三角函数式的恒等变形中的每一步都是可逆的，因此不难推出：

$$2R[\sin\alpha+\sin(\beta-x)]=2R[\sin\gamma+\sin x],$$

$$2R\sin\alpha+2R\sin\angle DBC=2R\sin\gamma+2R\sin\angle ABD.$$

这样，$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AC}+\overline{BD}$，即 $ABCD$ 有内切圆；又已知 D 点在圆 K 上，所以四边形 $ABCD$ 合于所设条件.

下面转至对作图的讨论.

因为$\frac{BG}{BF}<1$，$\frac{FG}{EG}<1$，所以

$$\sin\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{BG}{EG}\cdot\frac{FG}{BF}=\frac{BG}{BF}\cdot\frac{FG}{EG}<1.$$

因此 $x-\frac{\beta}{2}$是唯一存在的，故本题恒有一解.

【附注】 1. 这里所介绍的两种解法，思路大不相同；但从基本出发点看，都用上了圆外切四边形的性质：圆外切四边形的对边之和相等. 此外，顺便说一下，这个定理的逆定理也是成立的.

关于这个原定理的证明并不难，但逆定理的证明则比较困难一些. 有兴趣的话，读者不妨动手证一下试试看.

2. 第二种解法没有讨论 $AB=BC$ 的情况，这是因为开始时就已经约定 $\alpha\geqslant\gamma$，也就是把相等的情况概括在内了.

第　六　题（德意志民主共和国命题）

已知一个等腰圆 ABC，R 是它的外接圆半径，r 是内切圆半径，证明：这两圆圆心间的距离

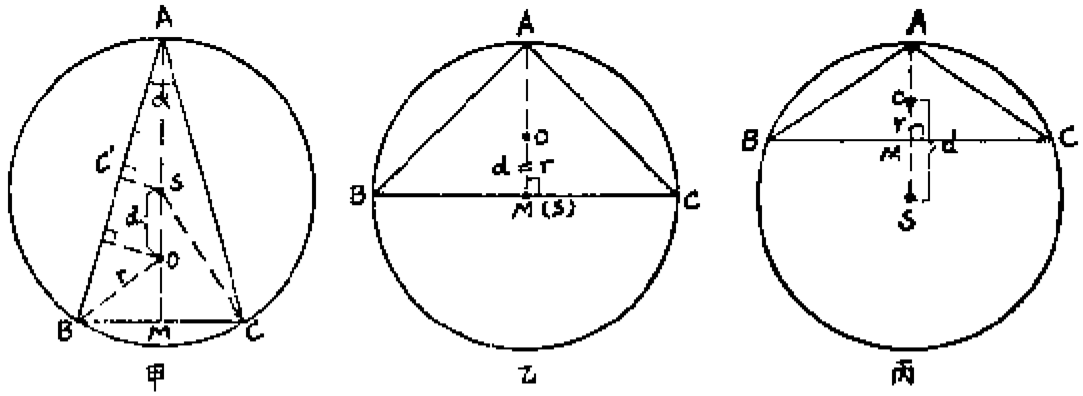
$$d=\sqrt{R(R-2r)}$$

【分析】 本题的结论对于任意三角形都成立. 但那样，思路就显得曲折一些，见证法三与四. 把问题的条件强化为等腰三角形，思路就清晰多了. 这时，由于等腰三角形底边上的高就是顶角的平分线，这样，外心、内心都在底边的高线上，由此容易得到

$$d=|r-R\cos\alpha|$$

于是，问题就转化为三角函数式的恒等变形了.

这里值得提出的，下面在解法一中，对要证的等式，是先分别就顶角$\lesseqgtr 90°$加以讨论，然后证得的．这一点是十分重要的．因为三角形有关元素的数量关系对于锐角三角形和钝角三角形并不一定是完全一致的．例如，H为重心，R为外接圆半径，则当顶角$A \leqslant 90°$时，$AH = 2R\cos A$；当$A > 90°$时，$AH = -2R\cos A$．不注意这一点，就有可能导致论证上的错误．



甲　　乙　　丙

图 4—7

〈证法一〉　设$\triangle ABC$是底边为BC的等腰三角形，则其外心S、内心O都在底边之高AM或其延长线上（图4—7）．

取顶角$\angle BAC = \alpha$，若角α是锐角，则外心S在$\triangle ABC$之内，距底边$\overline{BC}$为$R\cos\alpha$个长度单位，在这种情形下得到的距离$d = \overline{SO} = |r - R\cos\alpha|$（图4—7甲）；

若角α是直角，则外心S和垂足M重合，此时$d = r = |r - R\cos\alpha$（图4—7乙）；

若角α是钝角，则外心S在$\triangle ABC$之外，它与底边的

距离是 $R\cos(\pi-\alpha)=-R\cos\alpha$，所以也有 $d=\overline{SO}=r-R\cos\alpha=|r-R\cos\alpha|$（图 4—7 丙）。

因此，在所有情形下都有

$$d=|r-R\cos\alpha| \tag{1}$$

现在我们设法用 R 和 r 来表示 $\cos\alpha$，注意到在所有的情形下，有

$$\overline{BM}=R\sin\alpha; \tag{2}$$

此外，在△BMO 中，因为

$$\angle OBM=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=45^\circ-\frac{\alpha}{4},$$

则 $\angle BOM=90^\circ-\angle OBM=45^\circ+\frac{\alpha}{4}$，从而有

$$\overline{BM}=r\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right). \tag{3}$$

由 (2) 及 (3) 得到

$$R\sin\alpha=r\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)$$

$$=r\cdot\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}=r\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}}$$

$$=r\cdot\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}\right)}.$$

即：

$$R\sin\alpha=r\cdot\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$2R\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}=r\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

注意到 $\cos^2\frac{\alpha}{2}=1-\sin^2\frac{\alpha}{2}$，并用正数 $1+\sin\frac{\alpha}{2}$ 去除，得

$$2R\sin^2\frac{\alpha}{2}-2R\sin\frac{\alpha}{2}+r=0. \tag{4}$$

又由 $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$，得：

$$-R\cos\alpha=-R+2R\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$2R\sin^2\frac{\alpha}{2}=R-R\cos\alpha. \tag{5}$$

但由 (4) 得： $$2R\sin^2\frac{\alpha}{2}=2R\sin\frac{\alpha}{2}-r. \tag{6}$$

由 (5) 与 (6)，得：

$$R-R\cos\alpha=2R\sin\frac{\alpha}{2}-r,$$

$$r-R\cos\alpha=R\left(2\sin\frac{\alpha}{2}-1\right). \tag{7}$$

将 (7) 代入 (1)，得：

$$d=\left|R\left(2\sin\frac{\alpha}{2}-1\right)\right|.$$

两边分别平方，得：

$$d^2=R^2\left[4\sin^2\frac{\alpha}{2}-4\sin\frac{\alpha}{2}+1\right],$$

$$d^2=R^2+\left[4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-4R^2\sin\frac{\alpha}{2}\right]. \tag{8}$$

将 (6) 代入 (8)，得

$$d^2=R^2+\left[2R\left(2R\sin\frac{\alpha}{2}-r\right)-4R^2\sin\frac{\alpha}{2}\right]$$
$$=R^2-2Rr,$$

所以

$$d=\sqrt{R^2-2Rr}=\sqrt{R(R-2r)}.$$

〈证法二〉 注意到对于任意等腰△ABC（∠A为顶角）恒有：

$$d=|r-R\cos A|,\quad \sin\frac{A}{2}=\cos B,\quad \cos\frac{A}{2}=\sin B.$$

又 $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=4R\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}$，故

$$\begin{aligned}
d&=\sqrt{(r-R\cos A)^2}\\
&=\sqrt{16R^2\sin^2\frac{A}{2}\sin^4\frac{B}{2}-8R^2\sin\frac{A}{2}\cos A\sin^2\frac{B}{2}+R^2\cos^2 A}\\
&=\sqrt{16R^2\sin^2\frac{A}{2}\sin^4\frac{B}{2}-8R^2\sin\frac{A}{2}\cos A\sin^2\frac{B}{2}+R^2(1-\sin^2 A)}\\
&=\sqrt{R^2-R^2\left(8\sin\frac{A}{2}\cos A\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2 A-16\sin^2\frac{A}{2}\sin^4\frac{B}{2}\right)},
\end{aligned}$$

其中 $8\sin\frac{A}{2}\cos A\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2 A-16\sin^2\frac{A}{2}\sin^4\frac{B}{2}$

$$\begin{aligned}
&=4\sin\frac{A}{2}\left[2\cos A\sin^2\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}-4\sin\frac{A}{2}\sin^4\frac{B}{2}\right]\\
&=4\sin\frac{A}{2}\left[2\cos A\sin^2\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin^2 B-4\sin\frac{A}{2}\sin^4\frac{B}{2}\right]\\
&=4\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\left[2\cos A+4\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}-4\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\right]\\
&=4\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\left[2\cos A+4\sin\frac{A}{2}\cos B\right]\\
&=4\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\left[2\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)+4\sin^2\frac{A}{2}\right]\\
&=8\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}.
\end{aligned}$$

因此 $$d=\sqrt{R^2-R^2\cdot 8\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}}$$

$$=\sqrt{R^2-2R\cdot 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\sqrt{R^2-2Rr}=\sqrt{R(R-2r)}.$$

事实上，本题的结论对于任意三角形都是成立的，下面再给出两种一般性证法.

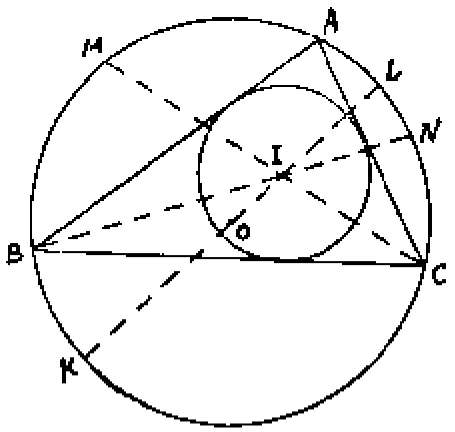


图 4—8

〈证法三〉 如图 4—8 所示，O 和 I 分别是 $\triangle ABC$ 外接圆和内切圆的圆心，连直线 OI，交 $\odot O$ 于 K、L 两点；又连接 CI、BI，并延长之，分别交 $\odot O$ 于 M、N 两点. 则

$$\overline{KI}\cdot\overline{IL}=\overline{CI}\cdot\overline{IM}. \qquad (9)$$

一方面，有

$$\overline{KI}\cdot\overline{IL}=(\overline{KO}+\overline{OI})\cdot(\overline{OL}-\overline{OI})=(R+d)(R-d)=R^2-d^2. \qquad (10)$$

另又作 $ID\perp BC$ 于 D，于是有

$$\overline{CI}=\frac{\overline{ID}}{\sin\angle ICB}=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}.$$

连 BM，在$\triangle MIB$ 中：

$$\angle MIB=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{NC})\text{的度数，}$$

$$\angle MBI=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{MA}+\overset{\frown}{AN})\text{的度数.}$$

因 $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{MA}$、$\overset{\frown}{NC}=\overset{\frown}{AN}$，故$\angle MIB=\angle MBI$，由此

$$\overline{IM}=\overline{BM}=2R\cdot\sin\angle BCM=2R\sin\frac{C}{2}.$$

于是 $$\overline{CI}\cdot\overline{IM}=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}\cdot 2R\sin\frac{C}{2}=2Rr. \qquad (11)$$

最后，将(10)与(11)代入(9)，得

$$R^2-d^2=2Rr,$$

所以

$$d=\sqrt{R(R-2r)}.$$

〈**证法四**〉 设$\triangle ABC$的外心和内心分别为O与I，连直线AI交圆O于P，过P引直径PQ，并连BQ、BP（图4—9）。

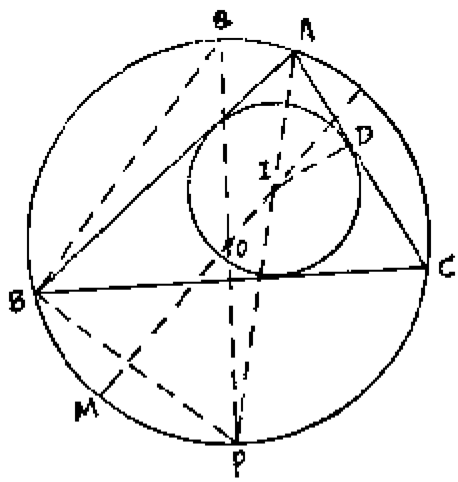


图 4—9

又设内切圆I切AC于D，连ID，显然，$ID=r$，且

$$ID\perp AC.$$

在$Rt\triangle PBQ$与$Rt\triangle IDA$中，由于

$$\angle BQP=\angle DAI=\frac{1}{2}\angle BAC,$$

故得 $$\triangle PBQ\sim\triangle IDA.$$

从而有 $$PQ:IA=PB:ID,$$

即 $$2Rr=IA\cdot PB.$$

又在$\triangle PBI$中，注意到

$$\angle PBI=\angle PIB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BAC),$$

则 $$PB=PI,$$

从而有 $$2Rr=IA\cdot IP.$$

又过I引直径　MN，则有

$$IA \cdot IP = IM \cdot IN = (R+d)(R-d).$$

于是 $$2Rr = R^2 - d^2,$$

所以 $$d = \sqrt{R(R-2r)}.$$

【附注】 1．本题的四种证法，说明了以下的一个特点：即应用图形的特点，侧重于综合几何法，则所需转化的技巧性也愈高，没有一定的平面几何基础，不易找到解题的途径；反之，借助于几何与三角的综合，将线元素转化为角元素，则“形”的关系可以通过“数”的关系反映出来，但这就要具备比较熟练的三角函数恒等变形的能力，且计算过程往往比较复杂．因此，在解题中怎样选用恰当的方法必需充分注意．

2．对于旁切圆，也有与本题类似的命题：

在$\triangle ABC$中，若A角所对的旁切圆心为I_a，半径为r_a；外接圆心为O，半径为R；且$RI_a = d$．则

$$d^2 = R^2 + 2Rr_a.$$

第 七 题（苏联命题）

a）如果四面体$S—ABC$具有以下性质：存在切于棱SA、SB、SC、AB、BC、CA或它们的延长线的五个球，证明这个四面体是正四面体；

b）反之，对于每个正四面体，都存在这样的五个球．

【分析】 这是一个典型的四面体切球问题．

本来，四面体切球问题（或外接球问题）与三角形的切圆问题（或外接圆问题）是相类似的，例如：

任意三角形有也只有一个外接圆；对应的，任意四面体有也只有一个外接球．

任意三角形有也只有一个内切圆；对应的，任意四面体

有也只有一个内切球.

任意三角形于其三边的外侧各存在唯一的旁切圆，共有三个旁切圆；对应的，任意四面体于其四个面的外侧，各存在一个旁切球，共有四个旁切球.

但本题却揭示了矛盾的特殊性——切于棱的球. 在平面几何中没有与此相当的性质. 它的特殊性主要表现在以下几方面：

i) 这一类球与四面体的四条棱所在直线都只有一个公共点；

ii) 这些球被四面体的面所截得的球小圆正好是这个面的内切圆或旁切圆，且相邻两个面上的球小圆必切其公共棱于同一点.

特点 ii) 导致这样一个结论：如果一个四面体同时有内切于棱的球和旁切于棱的球，那末这个四面体至少有三个面的内切圆和一个旁切圆切于同一点.

事实上，如图 4—10 所示，四面体 $S—ABC$ 有内切于各棱的球，且有关于面 ABC 的旁切于棱的球.

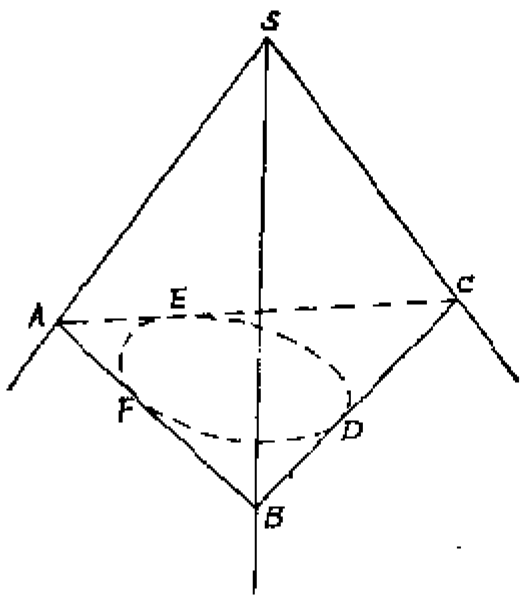


图 4—10

那末，内切于棱的球被 $\triangle ABC$ 截得的球小圆是 $\triangle ABC$ 的内切圆，设切点为 D、E 及 F；又在面 ABC 外侧旁切于棱的球被 $\triangle ABC$ 截得的球小圆亦为 $\triangle ABC$ 之内切圆. 其切点亦只能为

D、E 及 F.

现在从内切于棱的球来看，它在面 SBC 上截得的球小圆是$\triangle SBC$ 的内切圆，显然它在 BC 上的切点也只是 D 点.

同样，从位于$\triangle ABC$ 外侧的旁切于棱的球来看，它在面 SBC 上截得的球小圆是$\triangle SBC$、BC 边上的旁切圆，它与 BC 也只能切于 D点.

这样就证明了面SBC 上$\triangle SBC$ 的内切圆与 BC 边上的旁切圆切于同一点 D.

类似地可以证明面 SCA 及 SAB 上的内切圆分别与相应的旁切圆切于同一点.

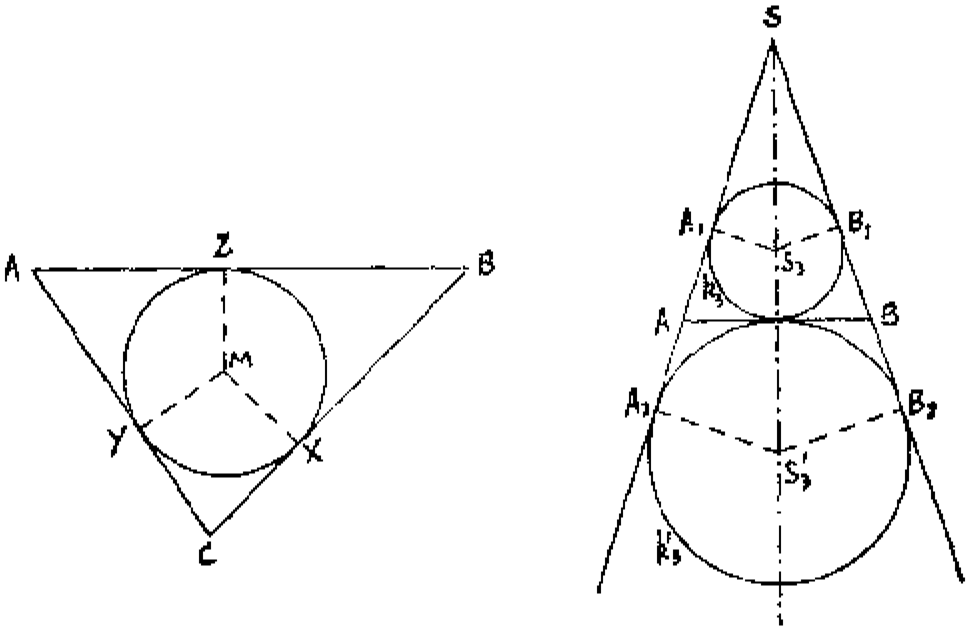
明确了这一点之后，问题就很自然的转到什么样的三角形才能保证其内切圆与旁切圆有一个公共切点呢?

因此，本题的关键就在于确定切点的基本特点，抓住了这一点，也就抓住了证明本题的钥匙.

〈**证法一**〉 a）首先确定球面和四面体 $S—ABC$ 的棱或其延长线在怎样的点相切? 不失其一般性，就平面 ABC 来考察，所设的五个球面与平面 ABC 分别交于某个圆，这些圆对于$\triangle ABC$ 或为内切，或为旁切.

① 我们首先假定球面 k 和平面 ABC 在圆 k 相交，这个圆是$\triangle ABC$ 的内切圆(图 4—11 甲)，这个球面 k 和平面 SAB 或者在一个内切于$\triangle SAB$ 的圆 k_3 相交；或者在一个关于 $\overline{AB}$ 边的三角形 SAB 的旁切圆 k'_3 相交(图 4—11 乙).

在第一种情形下，球面 k 和平面 SBC 在一个圆相交，这个圆在$\triangle SBC$ 的边 $\overline{SB}$ 和 $\overline{BC}$ 的内点相切. 因此，它也是$\triangle SBC$ 的内切圆，并且它和 $\overline{SC}$ 边也是在内点相切. 所以球面 k 和这四面体的所有棱都在内点相切. 我们把这个球面记



甲　　　　乙

图 4—11

为 k_0，并且称之为内切于各棱的球．

在第二种情形下，球面 k 和平面 SBC 相交于另一个圆，这个圆和 $\overline{BC}$ 边切于内点，而和 $\overline{SB}$ 边切于其延长线上一点，因此这个圆是三角形 SBC 中关于 $\overline{BC}$ 边的旁切圆，从而它和另一边 $\overline{SC}$ 也相切于其延长线上．我们把这个球记为 k_s，并称它为旁切于棱的球．

② 球面 k 和平面 ABC 在圆 k_1 相交，且设圆 k_1 是在 $\triangle ABC$ 中关于 $\overline{BC}$ 边的旁切圆．注意到此时球面与 AB 有公共点（切点），因此它和平面 SAB 相交于一个圆．显然这个圆是 $\triangle SAB$ 中关于 $\overline{SB}$ 边的旁切圆．这样，由于球 k 与棱 $\overline{BC}$、$\overline{SB}$ 相切于其内点，则球面 k 与平面 SBC 的交线圆，是三角形 SBC 的内切圆．因此，这种情形返回到情形 a），在这里顶点 S、A、B、C 的顺序被换为 A、B、C、S．通过

类似的方法变换顶点顺序，不难看出，所设的五个球，只能是一个内切于棱的球，和四个旁切于棱的球.

下面，我们来证明：具有上述性质的四面体 $S—ABC$ 是正四面体.

球面 k_0 在点 A_1、B_1、C_1 依次和直线 SA、SB 和 SC 相切；球面 k_s 依次在点 A_2、B_2、C_2 和这些直线相切. 两个球面和平面 ABC 相交于 $\triangle ABC$ 的内切圆 k，两个球面和棱 AB、BC、CA 依次在 Z、X、Y 点相切.

对应于同一个球面的切线性质有：

$$\overline{AA_1}=\overline{AA_2}=\overline{AZ}=\overline{AY};$$
$$\overline{BB_1}=\overline{BB_2}=\overline{BZ}=\overline{BX};$$
$$\overline{CC_1}=\overline{CC_2}=\overline{CX}=\overline{CY}. \qquad (1)$$

同样地，还有

$$\overline{SA_1}=\overline{SB_1}=\overline{SC_1}$$

和

$$\overline{SA_2}=\overline{SB_2}=\overline{SC_2}. \qquad (2)$$

现在有

$$\overline{SA_2}=\overline{SA_1}+\overline{AA_1}+\overline{AA_2};$$
$$\overline{SB_2}=\overline{SB_1}+\overline{BB_1}+\overline{BB_2};$$
$$\overline{SC_2}=\overline{SC_1}+\overline{CC_1}+\overline{CC_2},$$

因此，由(1)和(2)有

$$\overline{AA_1}=\overline{BB_1}=\overline{CC_1}. \qquad (3)$$

又有

$$SA=\overline{SA_1}+\overline{AA_1};$$
$$\overline{SB}=\overline{SB_1}+\overline{BB_1};$$
$$\overline{SC}=\overline{SC_1}+\overline{CC_1},$$

所以根据(2)和(3)有

$$\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}. \qquad (4)$$

通过交换顶点，我们由(4)断定，由所给的四面体的任何一个顶点出发的所有的棱的长度都相等，由此可以得到四面体 $S—ABC$ 的所有的棱长度相等. 因此这四面体是正四面体，于是问题 a) 得证.

b) 设 $S—ABC$，是一个正四面体，M 点同时是等边三角形 ABC 的内心和外心(图 4—12). 将平面 SAB 通过两次绕直线 SM 旋转，每次转 $120°$，分别得到平面 SBC 和 SAC. 我们再用 k_3 来记三角形 SAB 的内切圆，它的圆心为 S_3，另用 k'_3 来记关于 AB 边的 $\triangle SAB$ 的旁切圆，且它的圆心为 S'_3. 因为平面 SAB 包含直线 AB，而 AB 垂直于直线 CM，同时还垂直于 SM，也就是平面 SAB 垂直平面 SCM. 因此通过点 S_3 且与平面 SAB 垂直的直线交直线 SM 于一点 O_0. 相应地，通过点 S'_3 且和平面 SAB 垂直的直线交直线 SM 于点 O_s. 但球心为 O_0 的球面 k_0(以 O_0Z 为半径)必包含圆 k_3，且与 $\triangle SAB$ 的三边相切(因为从 O_0 到圆 k_3 上任一点的距离都等于 O_0Z，且 $O_0Z\perp AB$)；同理，球面 k_0 也包含 $\triangle SBC$、$\triangle SCA$ 的内切圆且和这些三角形的各边相切. 因此，球面 k_0 是所作的五个球面之一.

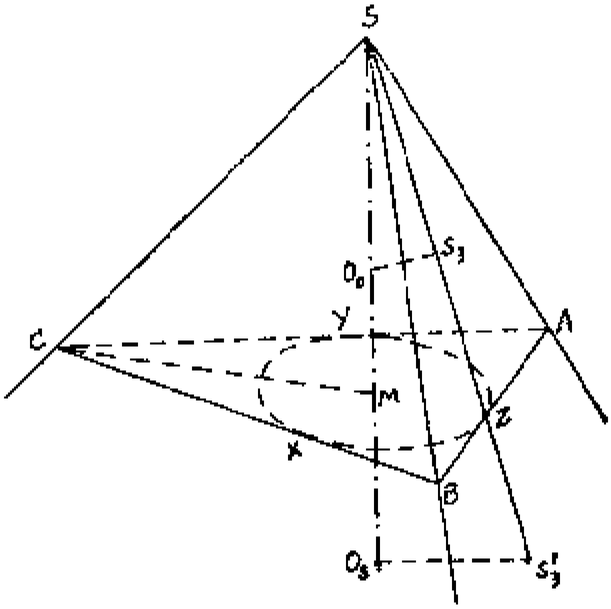


图 4—12

类似地可以证明，球心为 O_S 的球面 k_S 包含圆 k'_3，它也

包含$\triangle SBC$和SCA的旁切圆，因此球面k_S是所作的五个球面的第二个．

如果依次用点A、B、C来代替点S，那么可以得到另外的三个旁切于棱的球．于是，问题 b) 得证．

〈证法二〉 为证问题 a)，先证以下三条引理．

引理一 三角形的内切圆与其一边上的旁切圆如果有相同的切点，则这三角形的其他两边相等．

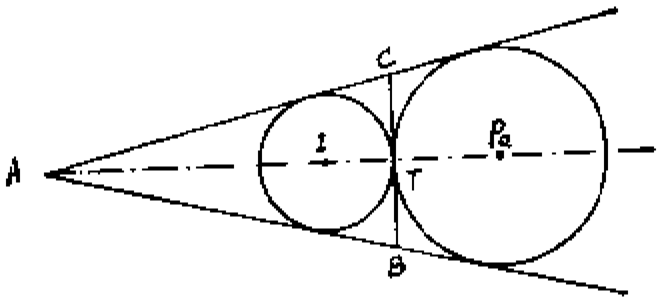


图 4—13

证 如图 4—13，若$\triangle ABC$的内切圆I、与BC边上的旁切圆P_a有公共切点T，则因$IT\perp BC$，$P_aT\perp BC$，从而T必在连心线AIP_a上，亦即$AT\perp BC$．注意到AT是$\angle BAC$的平分线，显然有$AB=AC$．

引理二 三棱锥$S—ABC$如果同时存在内切于棱的球和关于$\triangle ABC$(底面)的旁切于棱的球，则关于三边AB、BC、CA必有相同的切点．

证 设内切于棱的球心为O，旁切于棱的球心为P_S．注意到球O内切于棱，则它与线段AB、BC、CA必都有切点，设之为X、Y、Z(图 4—14)．但球面与平面ABC的交

线为圆，设之为圆 I，显然圆 I 与 AB、BC、CA 不能有另外的公共点（否则球 O 将与诸棱不相切），因此圆 I 为 $\triangle ABC$ 的内切圆.

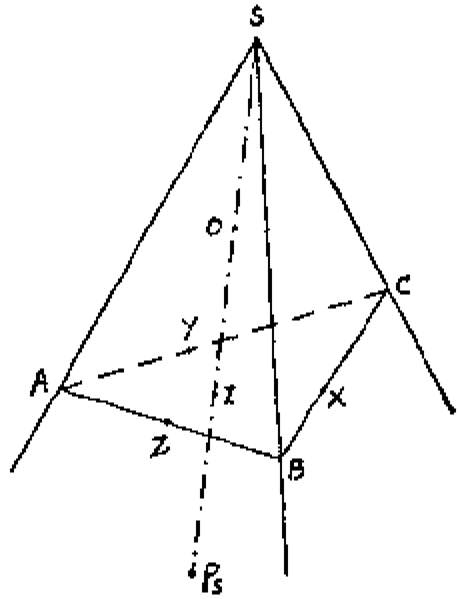


图 4—14

类似地，考察旁切于棱的球 P_S，注意到球心 P_S 在三面角 $S—ABC$ 的内部，而三边 AB、BC、CA 的延长线都在三面角 $S—ABC$ 的外部，显然球 P_S 不能与三边相切于其延长线上，亦即球 P_S 必分别与线段 AB、BC、CA 切于内点. 因此，球 P_S 与平面 ABC 的交线也只能是 $\triangle ABC$ 的内切圆. 但是三角形的内切圆是唯一的，因而其切点就只能是点 X、Y、Z. 故这两球在这三棱上有相同的切点.

引理三　三棱锥 $S—ABC$ 如果同时存在内切于棱的球 O 和旁切于棱（关于底面 ABC 的）球 P_S，则三侧棱 $\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}$.

证　从平面 SAB 来看，内切于棱的球 O 与它的交线是 $\triangle SAB$ 的内切圆，旁切于棱的球 P_S 与它的交线是 $\triangle SAB$ 关于边 AB 的旁切圆. 据引理一可知

$$\overline{SA}=\overline{SB}.$$

同理可证　$\overline{SB}=\overline{BC}$. 所以

$$\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}.$$

现在来证明本题 a). 事实上，已知它存在五个切于棱的球，显然它们只能是一个切于棱的球和四个关于平面 ABC、

SAB、SBC、SCA 的旁切于棱的球.

因此，就三棱锥 $S—ABC$ 来看，据引理一有

$$\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC};$$

就三棱锥 $A—SBC$ 来看，有

$$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{SA};$$

又就三棱锥 $B—SCA$ 来看，有

$$\overline{SB}=\overline{AB}=\overline{BC},$$

于是有 $\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$，因此，这四面体是正四面体，从而题 a) 得证.

下面，为证问题 b)，先提出两条引理.

引理四　若平面外一点到这平面上若干线段或其延长线的距离相等，则这点在这平面上的射影到这些线段或其延长线的距离也相等. 它的逆命题也成立.

引理五　从一角的顶点，引该角所在平面的交线，若此线与该角两边成等角，则此线上任意一点到该角两边等距.

现在考察正四面体 $S—ABC$，如图 4—15 所示. 过 S 点作直线 $SH\perp$ 平面 ABC 于 H 点，显然，点 H 是正三角形 ABC 的中心. 因此，根据引理四、五可得：

i) SH 上任一点到$\triangle ABC$ 的三边离距相等；

ii) SH 上任一点到三棱 SA、SB、SC 距离相等.

又过 A 点作直线 $AH_1\perp$ 平面 SBC 于 H_1 点，由于

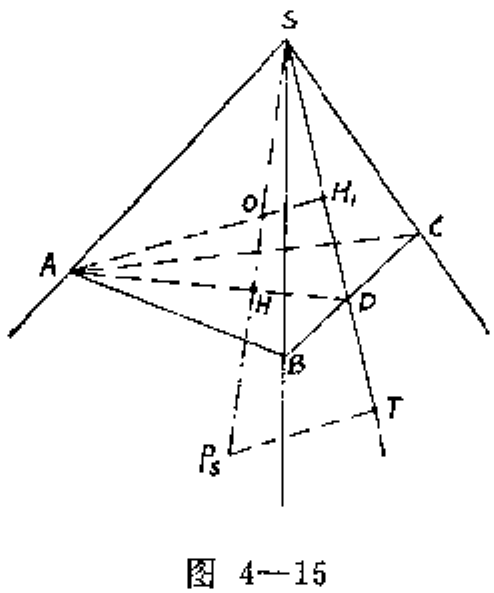


图 4—15

$\overline{AH}$、$\overline{SH_1}$的延长线都过BC的中点D，则$\overline{AH_1}$、$\overline{SH}$为$\triangle SAD$之二高，它们必交于垂心O. 根据上面结论，易证O点到正四面体六条棱的距离都等于$\overline{OD}$，故以O为心，$\overline{OD}$为半径之球即为所求的内切于棱之球.

注意到SD是$\angle BSC$的平分线，故关于$\overline{BC}$的旁切圆心T在$\overline{SD}$的延长线上. 在平面SAD上，过T作$TP_s \parallel H_1O$，与$\overline{SH}$之延长线交于P_S点，由于$OH_1 \perp$平面SBC，则$P_ST \perp$平面SBC. 而T点到$\overline{BC}$及$\overline{SB}$、$\overline{SC}$之延长线距离相等（都等于$\overline{TD}$），则据引理四，P_S点到$\overline{BC}$及$\overline{SB}$、$\overline{SC}$的延长线距离也相等；又由于P_S点在直线SH上，由此可证P_S到线段$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、CA及到棱$\overline{SA}$、$\overline{SB}$、$\overline{SC}$的延长线距离都相等(即都等于$\overline{P_SD}$)．因此，以P_S为心，P_SD为半径的球是这四面体的一个关于$\triangle ABC$为底面的旁切于棱的球.

同理，分别考察正四面体$A—SBC$、$B—SCA$和$C—SAB$，还可以依次得到关于底面SBC、SCA和SAB的另三个旁切于棱的球.

故对于正四面体，一定存在五个切于棱的球. 至此，本题证毕.

【附注】 本题构思的确比较复杂，其原因在于条件与结论之间，关系不甚明显. 而且退缩到二维，在平面三角形中，又没有相对应的情况. 这一切说明，这是立体几何中所独有的特殊矛盾，反映于本题就是：对于四面体的同一条棱而言，旁切球与内切球有相同的切点. 抓住这个主要矛盾，问题就比较容易解决了. 上述两种解法虽然出入很大，详略不同，但基本上都是从这一点出发的.

第五届国际中学生
数学竞赛试题分析与解答

1963 年在波兰举行

第 一 题（捷克斯洛伐克命题）

求所有能使等式 $\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$ 成立的 x 的实数值，其中 p 是一个实参数.

【分析】 这是一个含有参数 p 的无理方程. 与一般的无理方程的解法一样，不外设法把它变形成关于未知数 x 的有理方程，再解这个有理方程. 但是，在确定这个有理方程是否有解，以及所得的解是否原方程的增根时，必须根据参数 p 的不同取值进行讨论.

〈解答〉 $\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x.$ (1)

移项，得

$$2\sqrt{x^2-1}=x-\sqrt{x^2-p};$$

两边平方并化简，得

$$2x^2+(p-4)=-2x\sqrt{x^2-p},$$

再平方并化简，得

$$4(4-2p)x^2=(4-p)^2. \tag{2}$$

当 $p=2$ 时，方程(2)没有解，因而(1)无解；

当 $p=4$ 时，方程(2)有解 $x=0$，但这个解不满足方程(1).

当 $p\neq 2$ 且 $p\neq 4$ 时，由方程(2)，必有：

$$4-2p>0,\quad p<2.$$

又由方程(1)，x 必须是非负数，故由方程(2)可得

$$x=\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}. \tag{3}$$

下面进行验根：

将(3)分别代入 $\sqrt{x^2-p}$ 和 $\sqrt{x^2-1}$，得

$$\sqrt{x^2-p}=\frac{|3p-4|}{2\sqrt{4-2p}};\qquad \sqrt{x^2-1}=\frac{|p|}{2\sqrt{4-2p}}.$$

因此，只对满足

$$|3p-4|+2|p|=4-p \tag{4}$$

的参数 p，解(3)才满足方程(1)。

我们在三个不同区间来解方程(4)：

a) $p\leqslant 0$； b) $0<p\leqslant\frac{4}{3}$； c) $\frac{4}{3}<p<2$.

在情形 a)，方程(4)化为

$$-3p+4-2p=4-p,$$

它只有一个解 $p=0$；

在情形b)，方程(4)化为

$$-3p+4+2p=4-p,$$

区间 $0<p\leqslant\frac{4}{3}$ 中的每一个值 p 都满足它；

在情形 c)，方程(4)化为

$$3p-4+2p=4-p,$$

这在区间 $\frac{4}{3}<p<2$ 中无解(至于 $p=\frac{4}{3}$ 已包括在前述情形中)。

这就是说，当且仅当$0\leqslant p\leqslant\frac{4}{3}$时，原方程的解是

$$x=\frac{(4-p)}{2\sqrt{4-2p}}.$$

【附注】 方程(4)是绝对值符号内含有未知数的方程．对于这种方程，一般都是根据实数的绝对值的定义

$$|a|=\begin{cases}a, & (a>0)\\ 0, & (a=0)\\ -a, & (a<0)\end{cases}$$

化为不带绝对值符号的方程来解．

而在方程(4)中：

$$|3p-4|=\begin{cases}3p-4, & \left(p>\frac{4}{3}\right)\\ -3p+4; & \left(p\leqslant\frac{4}{3}\right)\end{cases}$$

$$|p|=\begin{cases}p, & (p>0)\\ -p. & (p\leqslant 0)\end{cases}$$

所以我们分为下面三个区间讨论：

$$p\leqslant 0;\ 0<p\leqslant\frac{4}{3};\quad p>\frac{4}{3}.$$

这样，方程(4)就去掉了绝对值符号，化为了一般的一元一次方程．

第　二　题（苏联命题）

在空间已知一直角的一边通过一已知点A，而另一边与已知线段$\overline{BC}$至少有一公共点，求该直角顶点的轨迹．

【分析】 一般性寓于特殊性之中．为了认识一般的规律，

往往可以把问题特殊化，通过分析特殊情况来寻找一般的规律(参看第二届第五题附注 2)。

对于本题，我们可以先限于一个平面内作考察．如图 5—1 所示，平面上直角 AXY 的一边过定点 A，另一边与定线段 $\overline{BC}$ 交于点 Y．为了探求动点 X 在这个平面的轨迹的范围，我们把问题又进一步特殊化：固定直角的一边 XA 的方向，即假定 X 在过定点 A 的某一直线 p 上运动．此时，动点 X 的轨迹是 p 上的一线段，其端点 B'、C' 分别为自 B、C 向 p 所作垂线的垂足．为了回到本来的问题，我们再把上述结论逐步推向一般：

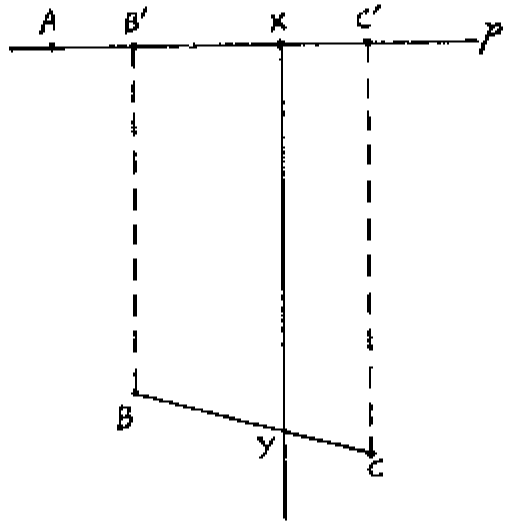


图 5—1

1) 直线 p 在平面内绕定点 A 旋转时，点 B'、C' 分别画出怎样的一条曲线？线段 $\overline{B'C'}$ 扫过怎样的一个范围？

2) 直线 p 如果是在空间内绕定点 A 旋转，结果又将是怎样的？

由此即可探求出动点 X 在空间的轨迹．

〈解法一〉 设轨迹为 M，我们首先在一个平面内作考察．如图 5—2，p 是过点 A的某一直线，过线段 $\overline{BC}$ 上的任一点 Y 作 p 的垂线，交 p 于 X，则点 X 属于所求的轨迹 M．显然，对于固定的直线 p，所有的点 X 的轨迹构成一线段 $\overline{B'C'}$，其端点 B'、C' 分别为自 B、C 向 p 所作垂线的垂

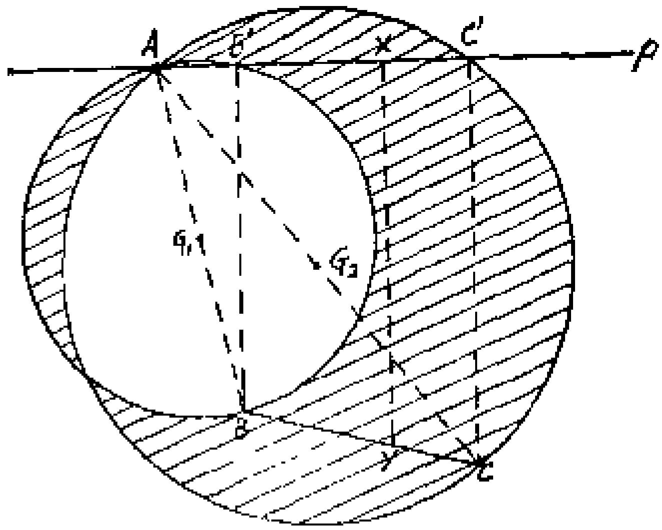


图 5—2

足．当直线 p 变动时，B' 和 C' 的轨迹是分别以 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 为直径的圆 G_1、G_2（当点 A 和 B 或 C 重合时，则变成一点 A），点 X 的轨迹 M 是这两个圆周G_1、G_2，以及在一个圆的外部，同时又在另一个圆的内部的平面部分，即图 5—2 中的阴影部分．

上面的结论不难推广到空间的情形：

事实上，如果我们分别过 B、C 对所有的过点 A 的直线 p 作相应的垂直平面，那末交点的轨迹分别构成以 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 为直径的球面 K_1、K_2(当 A 和 B 或 C 重合时，则变成一点 A)．由此，所求几何轨迹 M 是两个球面 K_1、K_2，以及在一个球面的外部，同时又在另一个球面的内部的空间部分．

〈**解法二**〉 仍然先限于一个平面内作考察．对于线段 $\overline{BC}$ 上的某一固定点 Y，显然点X 的轨迹构成一个以 AY 为直径的圆 G．当点Y 从点 B 运动至点C时，则圆心 G 在$\triangle ABC$的中位线 $\overline{G_1G_2}$ 上从点G_1 运动至点 G_2，直径从 $|AB|$ 连续变化至 $|AC|$．

不难证明，这些圆均属于以 AA' 为公共根轴的同轴圆系．这里，A' 是自 A 向直线 BC 所作垂线的垂足（图 5—3）．由此推知，点 X 的轨迹 M 是圆周 G_1、G_2，以及在一个圆的外部，同时又在另一个圆的内部的平面部分．

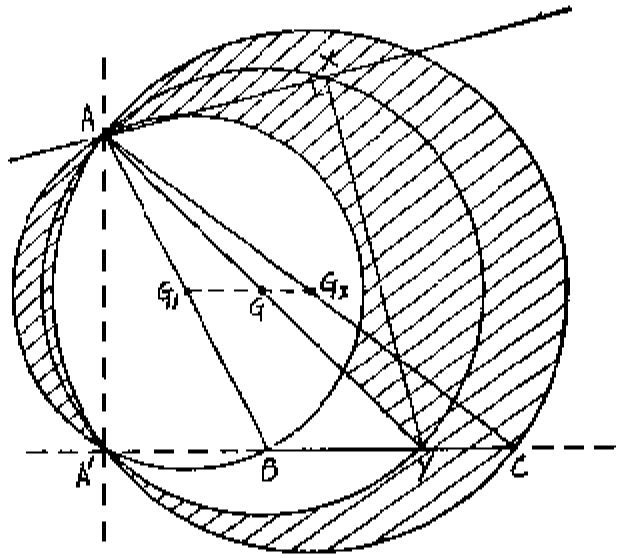


图 5—3

与解法一相同，上述结果不难类推到三维空间中去．

【附注】1．在现行中学教材中出现的轨迹，一般是一条线、几条线或其中的一部分．但根据轨迹的"符合某个条件 C 的所有点的集合 F，叫做符合某个条件 C 的点的轨迹"这一定义，点的轨迹也可以是孤立的点，如与不在同一直线上的三个点等距离的点的轨迹，就是以这三个点为顶点的三角形的外心；点的轨迹也可以是平面（或空间）或其一部分，如本题中所求的点的轨迹就是空间的一部分．

2．根据轨迹的定义，符合某个条件 C 的点的轨迹 F 应满足：

1）图形 F 上所有各点，都符合某个条件 C；（轨迹的纯粹性）

2）符合某个条件 C 的所有各点，都在图形 F 上．（轨迹的完备性）

至于前面的解答，实质上是写出了关键的一步，即轨迹

探求部分．而轨迹的证明，尚须按上面两条去作．例如，对于解法一的平面内的情形可以这样证明：

纯粹性：设 X 是属于轨迹 M 的任意一点．连 AX，设直线 AX 除点 A 外还分别交圆 G_1、G_2 于 B'、C'（特殊情况时 B'、C' 两点中可能有一点与 A 重合）．再连 $B'B$、$C'C$．注意到 $B'B\perp AX$，$C'C\perp AX$，且点 X 是线段 $\overline{B'C'}$ 上的一点，所以如果过 X 作 $XY\perp AX$，XY 将至少交线段 $\overline{BC}$ 于某一点Y．这就是说，点 X 是一边通过点 A，另一边与线段 $\overline{BC}$ 至少有一公共点 Y 的某直角 AXY 的顶点，因而符合轨迹条件．

完备性：设点 X' 是一边通过点 A，另一边与线段 $\overline{BC}$ 至少有一公共点 Y' 的某直角 $AX'Y'$的顶点，且直线 AX' 除点 A 外还分别交圆 G_1、G_2 于 B'、C'（特殊情况时 B'、C' 两点中可能有一点与点 A 重合）．再连 $B'B$、$C'C$．注意到 $B'B\parallel X'Y'\parallel C'C$，且 Y' 是线段 $\overline{BC}$ 上的一点，所以 X'是线段 $\overline{B'C'}$ 上的一点．而线段 $\overline{B'C'}$ 上的点都属于轨迹 M，因而点 X' 也属于轨迹 M．

至于空间中的情形，可以作出类似的证明．

第　三　题（匈牙利命题）

在一个凸 n 边形中各个角都相等，a_1，a_2，a_3，…，a_n 依次为各边的长度，且满足不等式

$$a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_n.$$

证明：$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n$．

【分析】 本题要求证明：符合题设条件的凸 n 边形，一定是一个正 n 边形．

我们不妨按$P_1 \to P_2 \to \cdots \to P_n$的顺序试画一个凸$n$边形$P_1P_2\cdots P_n$(图5-4中$n=6$)，使其各角相等($n=6$时可以算出各角都应是120°)，而各边$\overline{P_iP_{i+1}}=a_i$ ($i=1, 2, \cdots, n$)，且依次减小．结果发现，所画出的折线类似如螺旋一般向里折转，终至P_{n+1}与P_1接不起来．也就是说，这样的凸n边形是画不出来的．

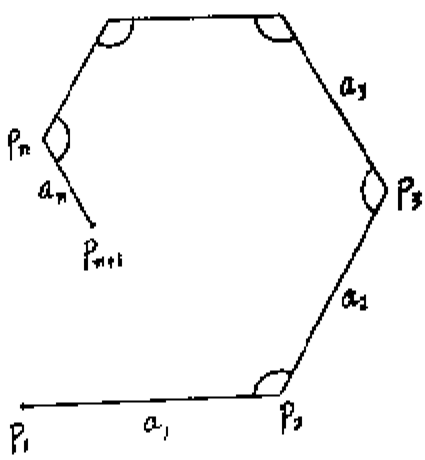


图 5—4

由此启示我们，可以采用这样的证题途径：证明如果有某一个$a_i > a_{i+1}$成立，则折线$P_1P_2\cdots P_{n+1}$的终端P_{n+1}将不可能回到始端P_1的位置．

为此，我们以正多边形的外接圆为基础，来描述P_i的位置．即以$\overline{P_iP_{i+1}}$为边，向内侧作正多边形H_i以及它的外接圆K_i(图5—5中只画出了H_1、K_1以及H_n、K_n)，那末P_i及P_{i+1}在圆K_i上．再顺次分析圆K_1、K_2、…、K_n的关系，便可作出圆K_n在圆K_1内(特殊情况时也有可能在P_n内切)的结论．于是，点P_{n+1}不可能在圆K_1上，但点P_{n+1}与点P_1应重合为一点，这样便导致了矛盾．

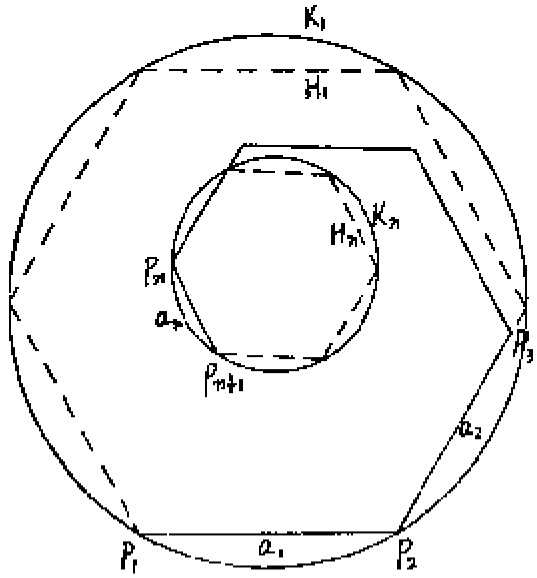


图 5—5

当然，为了作出圆 K_i，也不必实际先作出相应的正 n 边形 H_i. 事实上，只要注意到 $\angle P_iS_iP_{i+1}=\dfrac{360^\circ}{n}$（$S_i$ 是圆 K_i 的圆心），圆 K_i 即可作出，在下面的"证明"中，就是这样处理的.

〈**证明**〉 设 $P_1P_2\cdots P_n$ 是已知的凸 n 边形，这里 $\overline{P_iP_{i+1}}=a_i$（$i=1, 2, \cdots n$；$P_{n+1}$ 与 P_1 重合）.

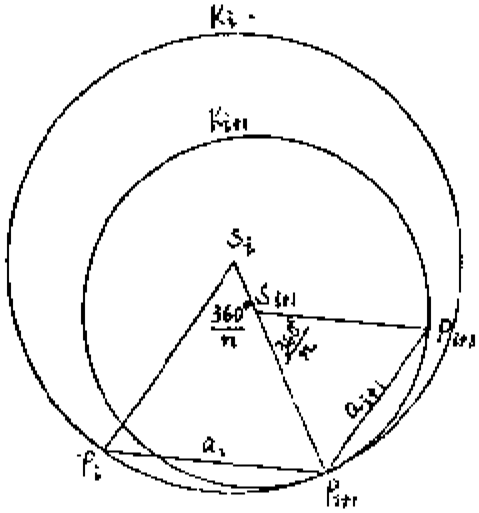


图 5—6

我们在 $P_1P_2\cdots P_n$ 所在的平面上，以 $\overline{P_iP_{i+1}}$ 为基础，向凸 n 边形内作一个这样的等腰 $\triangle P_iP_{i+1}S_i$，使顶角 $P_iS_iP_{i+1}=\dfrac{360^\circ}{n}$. 然后，再以 S_i 为圆心，$\overline{S_iP_i}$ 为半径作圆 K_i.

现在我们考察圆 K_i 和 K_{i+1}（见图 5—6）的关系：

由于

$$\angle S_iP_{i+1}P_i=\angle S_{i+1}P_{i+1}P_{i+2}=\frac{1}{2}\left(180^\circ-\frac{360^\circ}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n-2)\cdot180^\circ}{n},$$

而 $\angle P_iP_{i+1}P_{i+2}=\dfrac{(n-2)\cdot180^\circ}{n}$（注意到 $P_1P_2\cdots P_n$ 的各角相等），故 S_{i+1} 在 $\overline{S_iP_{i+1}}$ 上.

若 $a_i=a_{i+1}$，即 $\overline{P_iP_{i+1}}=\overline{P_{i+1}P_{i+2}}$，那末圆心 S_i 和 S_{i+1} 重合，因此圆 K_i 和圆 K_{i+1} 也重合.

若 $a_i>a_{i+1}$，那末点 S_{i+1} 位于 S_i 和 P_{i+1} 之间，因此圆

K_i 和圆 K_{i+1} 在点 P_{i+1} 内切，圆 K_{i+1} 在圆 K_i 内部(除切点 P_{i+1} 外).

这样，若有某一个 $a_i>a_{i+1}$ 成立，由 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 便可推知，圆 K_n(由边 $\overline{P_nP_1}$ 作出的)在圆 K_1 内部，且与圆 K_1 至多只一个公共点 P_n(仅在 $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}>a_n$，即圆 K_{n-1} 与圆 K_1 重合时才有可能)，而点 P_1 在圆 K_1 内. 但圆 K_1 是由边 $\overline{P_1P_2}$ 作出的，故点 P_1 又必须在圆 K_1 上. 然而，这是不可能的.

由此，只能得到 $a_1=a_2=\cdots=a_n$，于是问题得证.

【附注】 1. 我们知道，在三角形中，如果各内角相等，那末各边长必定相等，因而必定是正三角形.

但是，对于一般的凸 $n(n\geqslant4)$ 边形，不能仅由各内角相等，就断定这个凸 n 边形就是正 n 边形. 例如，矩形的各内角相等，但由此就不能推出矩形的长和宽相等. 也就是说，各内角相等的四边形不一定是正四边形(正方形).

对于各内角相等的凸 $n(n\geqslant4)$ 边形，必须再对边长附加一定的条件(如本题附加的"相邻的边长满足 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_n$")，才可以断定它是正 n 边形.

2. 本题如按前面"分析"中那样顺次分析正 n 边形 H_1、H_2、…、H_n 的关系，可以类似地证得结论.

第　四　题(苏联命题)

求所有能使等式

$$x_5+x_2=yx_1,\qquad x_1+x_3=yx_2,$$
$$x_2+x_4=yx_3,\qquad x_3+x_5=yx_4,$$
$$x_4+x_1=yx_5$$

成立的 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 的值，这里 y 是一个参数.

【分析】 这是一个系数里含有参数 y 的一次方程组，与一般的一次方程组一样，不外还是用代入法或加减法逐步消元来解. 但研究方程组的解的情况（唯一组解，无穷多组解或无解）时，则必须根据参数 y 的不同取值进行讨论.

〈解答〉 从原方程组的第 1，4，5 方程中消去 x_5，得

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = y(x_1 - x_4), \\ x_1 + x_4 = y(yx_1 - x_2), \\ x_1 + x_3 = yx_2, \\ x_2 + x_4 = yx_3. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} yx_1 - x_2 + x_3 - yx_4 = 0, \\ (1 - y^2)x_1 + yx_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 = yx_2, \\ x_2 + x_4 = yx_3. \end{cases} \tag{1}$$

再由方程组(1)的第 1，2，4 方程中消去 x_4，得

$$\begin{cases} yx_1 - x_2 + x_3 - y^2x_3 + yx_2 = 0, \\ (1 - y^2)x_1 + yx_2 + yx_3 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_3 = yx_2. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} yx_1 + (y - 1)x_2 + (1 - y^2)x_3 = 0, \\ (1 - y^2)x_1 + (y - 1)x_2 + yx_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = yx_2. \end{cases} \tag{2}$$

最后，在(2)中消去 x_3，并经过适当变形，得

$$\begin{cases} (y^2 + y - 1)x_1 + (-y^3 + 2y - 1)x_2 = 0, \\ (1 - y - y^2)x_1 + (y^2 + y - 1)x_2 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

但因 $-y^3 + 2y - 1 = (y^2 + y - 1)(1 - y)$，故(3)变形为：

$$\begin{cases}(y^2+y-1)(x_1-yx_2+x_2)=0,\\(y^2+y-1)(x_2-x_1)=0.\end{cases}\tag{4}$$

下面分几种情况讨论：

第一种情况：若 $y^2+y-1\neq 0$，即 $y\neq\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$，则由方程组(4)可得

$$x_1=x_2,\quad 和\ x_1(2-y)=0.$$

a) 若 $y\neq 2$，此时有

$$x_1=x_2=0,\quad 且有\ x_3=x_4=x_5=0.$$

b) 若 $y=2$，此时仍有

$$x_2=x_1,\quad 且有\ x_3=x_1,\ x_4=x_1,\ x_5=x_1.$$

这里，x_1 是任何数.

第二种情况：若 $y^2+y-1=0$，即 $y=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$. 则 x_1 和 x_2 显然可为任何数，且 x_3、x_4 和 x_5 根据下列关系式确定：

$$\begin{cases}x_3=yx_2-x_1,\\x_4=yx_3-x_2=(y^2-1)x_2-yx_1,\\x_5=yx_1-x_2.\end{cases}$$

【附注】 象本题这样的常数项全为零的一次方程组，又称为齐次线性方程组. 显然，齐次线性方程组总是有解的，因为(0, 0, …, 0)就是一个解，它称为零解. 对于齐次线性方程组，我们关心的问题常常是，它除去零解以外还有没有其它解，或者说它有没有非零解.

从这样一个观点出发，本题的解答可归纳为下述两种情况：

1. 当 $y \neq 2$, $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$时，方程组只存在一个零解；

2. 当 $y = 2$, $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$时，方程组除了存在零解以外，还存在无穷多个非零解：

1) $y = 2$：$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \alpha$（$\alpha$是任何数）.

2) $y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$：

$$\begin{cases} x_1 = \beta, \\ x_2 = \gamma, \\ x_3 = y\gamma - \beta, \\ x_4 = (y^2 - 1)\gamma - y\beta, \\ x_5 = y\beta - \gamma \end{cases}$$

（β、γ 是任何数）.

第　五　题（德意志民主共和国命题）

证明：$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

【分析】 这是一个角为等差数列的（符号交错的）三角级数求和问题．解决这类问题，一般还是采用把每项拆成两项的差，然后抵消中间各项的方法，如下述证法一．

另外，也可以借助于复数求这类三角级数的和，如下述证法二．

〈证法一〉 $2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right)$

$$= \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{\pi}{14} - \cos\frac{5\pi}{14} - \cos\frac{3\pi}{14}$$

$$+\cos\frac{7\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}$$

$$=\cos\frac{\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{2}=\cos\frac{\pi}{14}(\neq 0),$$

因此，$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\dfrac{\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{1}{2}$.

〈证法二〉 $x^7-1=0$ 的七个根为

1，$\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}$， …，

$\cos\frac{12\pi}{7}+i\sin\frac{12\pi}{7}$.

由韦达定理，上面七个根的和为 0．于是，得

$$1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cdots+\cos\frac{12\pi}{7}=0.$$

又因 $\cos\frac{2\pi}{7}=\cos\frac{2\pi}{7}$， $\cos\frac{4\pi}{7}=-\cos\frac{3\pi}{7}$,

$\cos\frac{6\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}$;

$\cos\frac{8\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}$， $\cos\frac{10\pi}{7}=-\cos\frac{3\pi}{7}$,

$\cos\frac{12\pi}{7}=\cos\frac{2\pi}{7}$,

所以 $2\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)=1$.

由此，得到 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

【附注】 一般来说，对于级数

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots$$

$$+\cos[\alpha+(n-1)\beta], \tag{1}$$

可以把每项都乘以 $2\sin\frac{\beta}{2}$，即

$$2\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}=\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right),$$

$$2\cos(\alpha+\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right),$$

$$2\cos(\alpha+2\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\sin\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\cos[\alpha+(n-1)\beta]\sin\frac{\beta}{2}$$

$$=\sin\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right)-\sin\left(\alpha+\frac{2n-3}{2}\beta\right).$$

把上述各式相加，即可求得级数(1)的和.

但是，对于符号交错的级数

$$\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)-\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\cos[\alpha+(n-1)\beta], \tag{2}$$

如果把每项都乘以 $2\sin\frac{\beta}{2}$，则由于符号关系，中间各项不能抵消。这时，可以把各项都改乘以 $2\cos\frac{\beta}{2}$，即：

$$2\cos\alpha\cos\frac{\beta}{2}=\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right),$$

$$-2\cos(\alpha+\beta)\cos\frac{\beta}{2}=-\cos\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right),$$

$$2\cos(\alpha+2\beta)\cos\frac{\beta}{2}=\cos\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right),$$

$$-2\cos(\alpha+3\beta)\cos\frac{\beta}{2}=-\cos\left(\alpha+\frac{7\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right),$$

…………

再把上述各式相加，即可求得级数(2)的和．

本题属于上述的第二种类型．但是，所证式的左边也可化为

$$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7},$$

因此也可归并于第一种类型．

另外，需要指出，上述解法均适用于求角为等差数列的正弦级数的和．

第　六　题（匈牙利命题）

五个学生 A、B、C、D、E 参加一场比赛．某人猜测比赛结果的名次顺序是 A、B、C、D、E，但其未猜中任何一个学生的名次，也没有猜中任何一对名次相邻的学生（即两个名次紧挨着的学生）的名次顺序．另一人猜测比赛后的顺序是 D、A、E、C、B，结果猜中了两个学生的名次，同时还猜中了两对名次相邻的学生的名次顺序．问实际比赛结果如何？

【分析】 题中的问题是要把 A、B、C、D、E 的顺序作一排列，使这个排列恰好符合两个猜测者所猜测的情况．但是，我们知道 A、B、C、D、E 的排列可作 $P_5=120$（种）．罗列所有各种情形，再一一作鉴别，当然也可以，然而毕竟失之太繁．

如果从第二个人的猜测出发，在五个元素（如 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5）的全排列中，固定两个元素的位置（对应于猜中了的两个名次），其他三个元素的位置全部重新排列，看在何种情况下恰好能保持其中有两对相邻元素仍取原来的顺序

(对应于猜中了两对名次相邻的学生的名次顺序)．那末这样需考虑的可能情形只有$C_5^2=10$(种)．从下面的解答可以看到，其中符合上述要求的可能情形只能是

$$DA***; \quad ***CB.$$

当然，这种方法在本质上仍然属于筛选．但是，一次筛去的不是一个，而是一批．事实上，经过这样的筛选以后，所需研究的排列便只剩下了 $2\times p_3=12$(种)．再根据两个猜测者所猜测的情况，对这 12 种排列一一加以筛选，就是实际可行的了．

〈解法一〉 设有五个元素的全排列：

$$x_1x_2x_3x_4x_5.$$

我们使其中的两个元素的位置不变，其他三个元素的位置全部重新排列，并观察其中有无两对相邻的元素仍取原来排列中相邻的元素所取的顺序：

$$x_1x_2;\quad x_2x_3;\quad x_3x_4;\quad x_4x_5.$$

容易验证，若按下列形式排列，不存在两对相邻的元素同时取上列的顺序：

$$x_1*x_3**;\qquad x_1**x_4*;$$
$$x_1***x_5;\qquad *x_2x_3**;$$
$$*x_2*x_4*;\qquad *x_2**x_5;$$
$$**x_3x_4*;\qquad **x_3*x_5.$$

于是，仅有下面两种排列，就是开头两个或最后两个元素位置不变的排列，可能存在某两对相邻的元素同时取前列的顺序：

$$x_1x_2***;\quad ***x_4x_5.$$

根据上面的结论，由第二个人猜测的结果分析，实际比

赛结果只可能是：

$$DA***;\quad ***CB.$$

第一种情形有下述可能性：

$$DACBE;\ DACEB;$$
$$DABCE;\ DABEC;$$
$$DAEBC;\ DAECB.$$

通过和第一个人的猜测比较，第1，2，3，4，5种都是不可能的；第6种就是第二个人的猜测，同样是不可能的.

第二种情形有下述可能性：

$$ADECB;\quad AEDCB;$$
$$DAECB;\quad DEACB;$$
$$EADCB;\quad EDACB.$$

与前种情形的分析一样，第1，2，3，4种都是不可能的；第5种与第二个人的猜测比较，只有一对相邻元素 CB 的顺序相同，同样是不可能的.

由此，只剩下第6种排列，即 E、D、A、C、B. 容易验证，它恰好是问题的解.

〈解法二〉 从第二个人的猜测可推知，被猜中的两个名次必定是相邻的，否则将至多猜中一对名次顺序. 因此只要从相邻的 D、A；A、E；E、C 和 C、B 四对名次顺序出发去考虑.

我们先考虑中间的两对 A、E 和 E、C. 如果其中任何一对在正确的位置上，例如 A、E 这对：

$$D、Ⓐ、Ⓔ、C、B,$$

其中有圈的假定是猜中的. 此时，A 在 D 后，C 在 E 后，B 在 C 后都不符合条件，否则将不止猜中了两个名次. 同

样，假定 E、C 是猜中的，也有这样的结论．所以，这两对都不是猜中的．

其次，考虑 D、A 这对：

$$Ⓓ、Ⓐ、E、C、B.$$

其中 A 在 D 后，B 在 C 后符合顺序关系，而且只有一种调法如下：

$$Ⓓ、Ⓐ、C、B、E.$$

这样又不符合 C 不在第三位上的条件，所以 D、A 这对也不是猜中的．

最后，考虑 C、B 这对：

$$D、A、E、Ⓒ、Ⓑ.$$

1）B 在 C 后，又 E 在 A 后符合顺序关系，但经过调动后，则得

$$A、E、D、Ⓒ、Ⓑ,$$

又不能符合 A 不在第一位上的条件，所以这不是正确的答案．

2）B 在 C 后，又 A 在 D 后也符合顺序关系，经过调动后，则得

$$E、D、A、Ⓒ、Ⓑ.$$

这样的排列就完全符合条件了．

【附注】 1．解答本题并不需要很多数学基础知识，但却要有较强的逻辑推理能力．这里，一是需要把各种情况分类处理，二是需要分析各种情况是否与题设条件相容（即不矛盾）．另外，还需要用准确的数学语言把思想表达清楚．这些都是学习数学时不可缺少的训练．

2．解答本题这种有条件的排列问题，筛选是基本的方

法，而把各种情况分类处理则是关键.

由于本题的条件不仅涉及到两个元素的正确位置，而且还涉及到两对相邻元素的正确顺序，所以采用了固定两个元素的位置作为一类的分类方法. 不言而喻，如果题设条件改变了，分类方法也得作相应的改变. 例如：

五个学生 A、B、C、D、E 参加一场比赛，五个人对比赛结果进行了猜测，每个人猜测两个：

甲猜：$2-B$，$3-A$；

乙猜：$2-D$，$4-E$；

丙猜：$1-E$，$5-C$；

丁猜：$3-D$，$4-C$；

戊猜：$2-A$，$5-B$.

结果每个人恰好猜对了一个，并且每个名次都有一个人猜对. 问实际比赛结果如何？

根据这个问题的题设条件，我们就可以采用这样的方法：按每个名次分类逐一筛选，即逐一确定某一名次只能是谁，不能是谁. 读者不妨试一试，这只要把五个人的猜测列个表：

	1	2	3	4	5
甲		B	Ⓐ		
乙		Ⓓ		E	
丙	Ⓔ				C
丁			D	Ⓒ	
戊		A			Ⓑ

就不难通过分析确定正确的名次顺序是：

E、D、A、C、B.

第六届国际中学生
数学竞赛试题分析与解答

1964年在苏联举行

第 一 题 (捷克斯洛伐克命题)

a) 确定所有的正整数 n，使得 2^n-1 能被 7 整除；

b) 证明：对于所有的正整数 n，2^n+1 不能被 7 整除．

【分析】 显然，只需找出 2^n 被 7 除所得余数的规律就可以了．为此，我们从特例出发，列表观察：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	…
2^n 除以 7 的余数	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	…

由上表，可以看出下面的规律(用同余式表出，其中 m 为非负整数)：

$$2^{3m}\equiv 1 \pmod 7, \tag{1}$$

以及

$$2^{3m+1}\equiv 2 \pmod 7, \tag{2}$$

$$2^{3m+2}\equiv 4 \pmod 7. \tag{3}$$

这里，(2)、(3)可以看作(1)的推论．至于(1)，只要注意到 $2^3\equiv 1 \pmod 7$，即可得证．

〈解法一〉 a) 因 $2^3\equiv 1 \pmod 7$，故有

$$2^{3m}\equiv 1^n \pmod 7,\quad 2^{3m}\equiv 1 \pmod 7.$$

这里 m 是非负整数．由此得：

$$2^{3m}\cdot 2\equiv 1\cdot 2 \pmod 7,\quad 2^{3m+1}\equiv 2 \pmod 7;$$

$$2^{3m}\cdot 2^2\equiv 1\cdot 2^2 \pmod 7,\quad 2^{3m+2}\equiv 4 \pmod 7.$$

于是

$$2^{3m}-1\equiv 0 \pmod 7,$$

$$2^{3m+1}-1\equiv 1 \pmod 7,$$

$$2^{3m+2}-1\equiv 3 \pmod 7.$$

我们知道，任何一个正整数 n，都可以表示为 $3m$、$3m+1$ 或 $3m+2$（m 是非负整数）的形式之一．因此，当且仅当 $n=3m$，即 n 是 3 的倍数时，2^n-1 能被 7 整除．

b）由 a），我们有

$$2^{3m}\equiv 1 \pmod 7,\quad 2^{3m+1}\equiv 2 \pmod 7,$$

$$2^{3m+2}\equiv 4 \pmod 7,$$

所以 $2^{3m}+1\equiv 2 \pmod 7$，$2^{3m+1}+1\equiv 3 \pmod 7$，

$$2^{3m+2}+1\equiv 5 \pmod 7.$$

因此，对于所有的正整数 n，2^n+1 都不能被 7 整除．

〈解法二〉 a）若 m 是正整数或零，则

$$\begin{aligned}2^{3m}&=(2^3)^m=(7+1)^m\\&=7^m+C_m^1\cdot 7^{m-1}+C_m^2\cdot 7^{m-2}+\cdots+C_m^{m-1}\cdot 7+1\\&=7M_0+1.\ (M_0\text{ 是非负整数})\end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned}2^{3m+1}&=2\cdot 2^{3m}=2(7M_0+1)\\&=7M_1+2;\ (M_1\text{ 是非负整数})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2^{3m+2}&=4\cdot 2^{3m}=4(7M_0+1)\\&=7M_2+4.\ (M_2\text{ 是非负整数})\end{aligned}$$

所以 $$2^n-1=\begin{cases}7M_0, & 当\ n=3m\ 时;\\ 7M_1+1, & 当\ n=3m+1\ 时;\\ 7M_2+3, & 当\ n=3m+2\ 时.\end{cases}$$

故当且仅当 n 是 3 的倍数时，2^n-1 能被 7 整除.

b) 因为

$$2^n+1=\begin{cases}7M_0+2, & 当\ n=3m\ 时;\\ 7M_1+3, & 当\ n=3m+1\ 时;\\ 7M_2+5, & 当\ n=3m+2\ 时,\end{cases}$$

所以对于所有的正整数 n，2^n+1 都不能被 7 整除.

【附注】 1. 从上面的解答可以看出，如果把题中幂的底数 2 以及除数 7 改为别的自然数 a 与 k，只要找到 a^n 被 k 除所得余数的规律，据此即可编制出类似的题目.

2. 解法一里用到了同余的概念和有关性质，请参见第十六届第三题的附注；解法二则避免用"数论"的专门知识，是根据二项式定理，通过"展开弃项"的办法加以解决的（见《国际数学竞赛试题讲解 I》第二十届第一题附注 2）.

第 二 题 （匈牙利命题）

若 a、b、c 表示一个三角形的三边长，求证：

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$$

【分析】 这是一个字母表示几何元素的不等式证明题. 当然，我们可以按一般代数不等式的证明一样进行分析，但是要注意恰当地利用题中几何元素所具有的几何性质.

我们知道，a、b、c 构成一个三角形的充要条件是：

$$a>0,\ b>0,\ c>0; \tag{1}$$

$$b+c>a; \tag{2}$$

$$c+a>b; \tag{3}$$

$$a+b>c. \tag{4}$$

一方面，可以由上面的条件直接证明题设不等式(如"证法二")．另一方面，也可以考虑用简单的等价条件去替换上述条件：

首先，如果 a、b、c 之间有大小顺序 $a\geqslant b\geqslant c$（这样假定不影响结论的一般性），那末(3)、(4)就必然成立，因而可以去掉．

其次，如果再进一步假定 $a=b+m, c=b-n$，那末(1)、(2)又可以化为下面的条件：

$$b>0, \quad m\geqslant 0, \quad n\geqslant 0; \tag{1'}$$

$$m+n<b. \tag{2'}$$

下面的证法一就是从(1′)、(2′)出发证明的．

〈证法一〉 不失一般性，设 $a\geqslant b\geqslant c$，且 $a=b+m$，$c=b-n$，这里 $m\geqslant 0$，$n\geqslant 0$．因而只需证：

$$(b+m)^2(b-m-n)+b^2(b+m-n)+(b-n)^2\cdot(b+m+n)\leqslant 3(b+m)\cdot b(b-n),$$

或
$$b(m^2+mn+n^2)+(m+n)(m^2-n^2)\geqslant 0.$$

若 $m\geqslant n$，上面的不等式显然成立；

若 $m\leqslant n$，由 $a-c<b$ 或 $m+n<b$，得

$$(n^2-m^2)[b-(m+n)]+b(2m^2+mn)\geqslant 0,$$

$$b(2m^2+mn)+b(n^2-m^2)-(m+n)(n^2-m^2)\geqslant 0,$$

$$b(m^2+mn+n^2)+(m+n)(m^2-n^2)\geqslant 0.$$

所以 $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$

〈证法二〉 因 $(a-b)^2\geqslant 0$，$(b-c)^2\geqslant 0$，$(c-a)^2\geqslant 0$，且

$$a+b-c>0, \quad b+c-a>0, \quad c+a-b>0,$$

故得 $$(a-b)^2(a+b-c)\geqslant 0,$$
$$(b-c)^2(b+c-a)\geqslant 0,$$
$$(c-a)^2(c+a-b)\geqslant 0.$$

把上面三个不等式相加，并展开加以整理，可得
$$6abc-2a^2(b+c-a)-2b^2(c+a-b)-2c^2(a+b-c)\geqslant 0.$$
由此，即可得
$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$$

【附注】 1. 由正弦定理 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$（这里 A、B、C 分别为边 a、b、c 的对角，R 为三角形外接圆的半径)，题设不等式还可以化为三角不等式
$$\begin{aligned}&\sin^2 A(\sin B+\sin C-\sin A)+\sin^2 B(\sin C+\sin A-\sin B)\\&\quad+\sin^2 C(\sin A+\sin B-\sin C)\\&\leqslant 3\sin A\sin B\sin C,\end{aligned}$$
其中 $A+B+C=\pi$. 这样，又可以利用三角知识来证本题.

一般来说，只要式中关于边长 a、b、c 是齐次的，上述转化总是可能的. 关于这方面的例子很多，请读者举例.

2. 本题的不等式对任何正数 a、b、c 都是成立的，读者不妨证一证看.

第 三 题 （南斯拉夫命题）

在边长为 a、b、c 的三角形 ABC 中，作一个内切圆，并平行于各边作这个圆的切线，再在这些切线从原三角形截出的三个新三角形中作内切圆. 试求这四个圆的面积的和.

【分析】 由于本题要求计算的结果用 a、b、c 表示，因此这里必须设法把图 6—1 中 $\triangle ABC$、$\triangle AB_1C_1$、$\triangle A_2BC_2$、$\triangle A_3B_3C$ 的内切圆半径 r、r_1、r_2、r_3 都用 a、b、c 来表示. 但是，我们知道

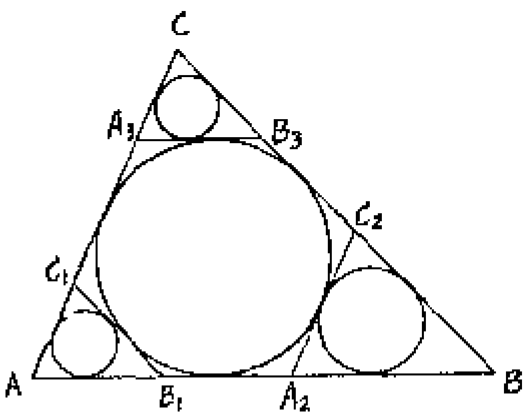


图 6—1

$$r=\frac{\triangle}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$\left(s=\dfrac{a+b+c}{2}\right.$，$\triangle$表三角形面积)，所以问题就化为求 $\dfrac{r_1}{r}$、$\dfrac{r_2}{r}$和$\dfrac{r_3}{r}$.

注意到 $\triangle A_3B_3C\backsim\triangle ABC$，可知$\dfrac{r_3}{r}$等于两三角形中对应线段的长度之比. 由于 $\triangle A_3B_3C$ 的边长不易用 a、b、c 表示，而其高等于 h_c-2r，其中 h_c（即 $\triangle ABC$ 的 c 边上的高）与 r 又都易于用 a、b、c 表示，因此我们就使$\dfrac{r_3}{r}$等于两三角形对应高之比，并由此来求 r_3. 然后，用类似的方法求出 r_1、r_2. 这样，就不难求得各个圆的面积了.

〈解法一〉 如图 6—1，用 h_a、h_b、h_c 分别表示 a、b、c 边上的高，用 r、r_1、r_2、r_3 分别表示 $\triangle ABC$、$\triangle AB_1C_1$、$\triangle A_2BC_2$、$\triangle A_3B_3C$ 的内切圆半径，并用 $\triangle$ 和 s 分别表示 $\triangle ABC$ 的面积和半周长.

$$\because\quad \triangle A_3B_3C\backsim\triangle ABC,$$

$$\therefore \quad (h_c-2r):h_c=r_3:r.$$

$$\therefore \quad r_3=\frac{(h_c-2r)r}{h_c}.$$

同理

$$r_1=\frac{(h_a-2r)r}{h_a}, \quad r_2=\frac{(h_b-2r)r}{h_b}.$$

于是，所求四个圆的面积和为：

$$\begin{aligned}
&\pi r^2+\pi r_1{}^2+\pi r_2{}^2+\pi r_3{}^2\\
&=\pi r^2\left[1+\left(\frac{h_a-2r}{h_a}\right)^2+\left(\frac{h_b-2r}{h_b}\right)^2+\left(\frac{h_c-2r}{h_c}\right)^2\right]\\
&=\pi r^2\left[4-4r\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)+4r^2\left(\frac{1}{h_a{}^2}+\frac{1}{h_b{}^2}+\frac{1}{h_c{}^2}\right)\right]\\
&=4\pi r^2\left[1-\frac{\varDelta}{s}\left(\frac{a}{2\varDelta}+\frac{b}{2\varDelta}+\frac{c}{2\varDelta}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\varDelta^2}{s^2}\left(\frac{a^2}{4\varDelta^2}+\frac{b^2}{4\varDelta^2}+\frac{c^2}{4\varDelta^2}\right)\right]\\
&=\frac{4\pi\varDelta^2}{s^2}\left(1-\frac{a+b+c}{2s}+\frac{a^2+b^2+c^2}{4s^2}\right)\\
&=\frac{4\pi\varDelta^2}{4s^4}(a^2+b^2+c^2)\\
&=\frac{\pi(s-a)(s-b)(s-c)(a^2+b^2+c^2)}{s^3}.
\end{aligned}$$

〈解法二〉 用$\varDelta$、s，$\varDelta_1$、s_1，$\varDelta_2$、s_2，$\varDelta_3$、s_3分别表示$\triangle ABC$，$\triangle AB_1C_1$，$\triangle A_2BC_2$，$\triangle A_3B_3C$的面积和半周长.

$$\because \quad \triangle A_3B_3C\backsim\triangle ABC,$$

$$\therefore \quad \frac{\varDelta_3}{\varDelta}=\frac{s_3{}^2}{s^2}, \quad \varDelta_3=\frac{s_3{}^2\cdot\varDelta}{s^2}.$$

由此，$\triangle A_3B_3C$的内切圆面积为

$$\frac{\pi\Delta_3^2}{s_3^2}=\frac{\pi\cdot\frac{s_3^4\cdot\Delta^2}{s^4}}{s_3^2}=\frac{\pi\Delta^2}{s^4}\cdot s_3^2.$$

同理，$\triangle AB_1C_1$ 和 $\triangle A_2BC_2$ 的内切圆面积分别为$\frac{\pi\Delta^2}{s^4}\cdot s_1^2$ 和 $\frac{\pi\Delta^2}{s^4}\cdot s_2^2$.

再注意到 $s_1=s-a$，$s_2=s-b$，$s_3=s-c$，可得题设四个圆的面积和为

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi\Delta^2}{s^2}+\frac{\pi\Delta^2}{s^4}\cdot s_1^2+\frac{\pi\Delta^2}{s^4}\cdot s_2^2+\frac{\pi\Delta^2}{s^4}\cdot s_3^2\\
&=\frac{\pi\Delta^2}{s^4}(s^2+s_1^2+s_2^2+s_3^2)\\
&=\frac{\pi\Delta^2}{s^4}[s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2]\\
&=\frac{\pi\Delta^2}{s^4}(a^2+b^2+c^2)\\
&=\frac{\pi(s-a)(s-b)(s-c)(a^2+b^2+c^2)}{s^3}.
\end{aligned}$$

【附注】 由于三角形的内切圆面积可以用三角形的面积Δ及半周长 s 表示，而相似三角形的面积比又等于周长比的平方，因此也可不必引用三角形的高及内切圆的半径这些元素，而直接根据面积和周长求解．这是“解法二”与“解法一”的不同之处．

第 四 题 （匈牙利命题）

17 个科学家中的每一个和其余科学家都通信．在他们的通信中仅仅讨论三个题目；而任两个科学家之间仅仅讨论一个题目．证明：其中至少有三个科学家，他们互相通信中讨

论的是同一个题目.

【分析】 本题可以直接应用"抽屉原则"分析(对此，请参看《国际数学竞赛试题讲解 I》第二十届第六题的附注). 但是，整个思路有三个层次，需得使用两次"抽屉原则"，因此要注意其中各细节分析的严密逻辑性.

〈证明〉 我们看其中一人与其余 16 人的通信情况：因为仅涉及三个题目(设为 A、B、C 三题)，所以至少有一题(不妨设是 A 题)是和不少于 6 人讨论的，否则每题至多与 5 人讨论，则三题至多只与 15 人讨论，这是矛盾.

再看这 6 人的情况：如果其中有 2 人是讨论 A 题，则问题得证；如果这 6 人中任何二人都不讨论 A 题，则这 6 人仅讨论 B、C 两题. 由此，其中一人在与其余 5 人的通信中，至少有一题(不妨设是 B 题)是和不少于 3 人讨论的，否则每题至多与 2 人讨论，则两题至多只与 4 人讨论，这是矛盾.

最后看这 3 人的情况：如果其中有 2 人是讨论 B 题，则问题得证；如果任何二人都不讨论 B 题，则这 3 人仅讨论 C 题，同样问题得证.

【附注】 已如前述，本题可剖分为三个层次：

1) 17 个科学家讨论三个题目；

2) 6 个科学家讨论两个题目；

3) 3 个科学家讨论一个题目.

如果掌握了规律，本题不难向上再增添一个层次. 事实上，只要由 $16\times4+1=65$，即知从"66 个科学家讨论四个题目"始，用抽屉原则之后，就可化为"17 个科学家讨论三个题目"的情况. 于是，题目就成为：

"66 个科学家中的每一个和其余科学家都通信. 在他们

的通信中仅仅讨论四个题目，而任两个科学家之间仅仅讨论一个题目．证明：其中至少有三个科学家，他们互相通信中讨论的是同一个题目．”

能不能把这个题目变为五个、六个或更多个层次呢？读者不妨试试看．

第　五　题　（罗马尼亚命题）

在平面上给出五个点，连接这些点的直线互不平行，互不垂直，也不重合．过每一点作两两连接其余四点的所有直线的垂线．若不计原来给定的五点，这些垂线彼此间的交点最多能有多少个？

【分析】 显然，按“两点决定一直线”和“过一点仅能作直线的一条垂线”算出所有垂线的数目（$5\cdot C_4^2=30$），以及按“两直线最多能决定一交点”算出这些垂线可能有的交点的数目（$C_{30}^2=435$），都是不困难的．但是，按题设条件，虽然前者算出的数目是准确的，而后者算出的数目却超过了实际可能的数目．这是由于：

1）这些垂线中有相互平行的，它们并无交点，不应计算；

2）有三条或三条以上垂线交于一点的情况，计算中有重复，应予除去．

但以上所说的不应计算的以及计算中肯定有重复的数目都容易算出，所以上述解题途径仍是切实可行的．

〈解答〉 设给定的点是 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5．它们之间的连线有 $C_5^2=10$（条）．这些连线构成的三角形有 $C_5^3=10$（个）．通过每一个点 P_i（$i=1,2,3,4,5$）作不通过该点连线的垂线，总共有 $5\cdot C_4^2=30$（条）．

若 30 条是两两互不平行的直线，它们之间的交点（不计重合）有 $C_{30}^2=435$(个).

但是任意一条连线，都作有 3 条垂线，而它们相互平行，并不相交，故从总数中必须除去 $10\cdot C_3^2=30$(个) 交点．又在各连线所构成的 10 个三角形中，垂直于三条边的垂线若作为三角形的高则相交于一点，因此从总数中又必须除去 $10\cdot(C_3^2-1)=20$(个)交点．此外，考虑到 30 条垂线有部分交点和 P_i 重合，而在每一点 P_i 恰有 $C_4^2=6$(条)垂线相交，所以从总数中还必须除去 $5\cdot C_6^2=75$(个)交点.

于是，所有垂线彼此间的交点(除去 P_i)最多有：

$$435-30-20-75=310(\text{个}).$$

【附注】 在上面的解答中，对于有些细节的叙述省略了．例如，对于那 30 条垂线，除了我们说的三种情况以外，还有没有必然平行的情况？还有没有不少于三条垂线必然相交于一点的情况？如果有，那末这些垂线的交点的个数(除去P_i)将不可能达到 310.

另外，我们的结论是："这些垂线的交点(除去P_i)最多有 310 个"．但交点的个数能不能少于 310 个呢？

关于这些问题，读者不难根据题设条件作出判断.

第　六　题 （波兰命题）

给定一个四面体 $ABCD$，连结顶点 D 与底面 $\triangle ABC$ 的重心 D_1，通过 $\triangle ABC$ 的三个顶点作平行于 DD_1 的直线与该顶点相对的侧面所在的平面分别交于点 A_1、B_1、C_1．证明：四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 的体积是四面体 $ABCD$ 的体积的三倍．如果 D_1 是$\triangle ABC$ 内任一点，结论是否仍然正确？

【分析】 本题需分两种情况讨论：D_1 是 $\triangle ABC$ 的重心的情况，D_1 是 $\triangle ABC$ 内任一点的情况.

在第一种情况时，利用 D_1 是$\triangle ABC$ 的重心这一性质，容易推得 $\overline{A_1A}=\overline{B_1B}=\overline{C_1C}=3\overline{DD_1}$，从而推得面 $A_1B_1C_1$ // 面ABC，并由此进而推得$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$，以及 D_1 到面 $A_1B_1C_1$ 的距离等于 D 到面 ABC 的距离的 3 倍，因此可证得 $V_{A_1B_1C_1D_1}=3\cdot V_{ABCD}$(图6—2)。

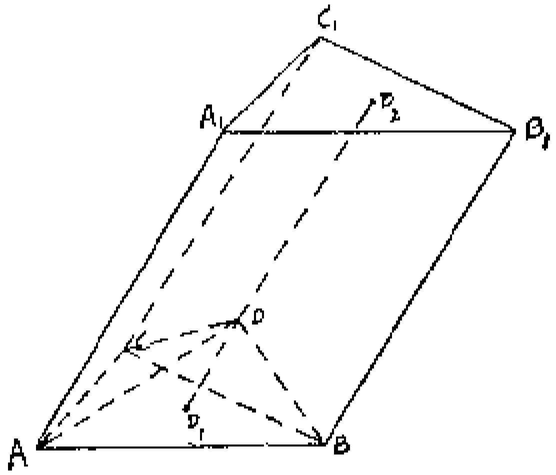


图 6—2

至于在第二种情况时，则可能 A_1A、B_1B、C_1C 三者不相等，从而面 $A_1B_1C_1$ 与面 ABC 也不平行，那末此时还会有 $V_{A_1B_1C_1D_1}=3\cdot V_{ABCD}$ 吗？为了探讨这个问题，下面进一步分析第一种情况，寻找其中关键性的条件，并试图把不影响结论的条件减弱：

延长 $\overline{D_1D}$ 交面 $A_1B_1C_1$ 于点 D_2 （见图 6—2）．在第一种情况时，显然有 $\overline{D_2D_1}=3\overline{DD_1}$．而在此式成立时（不论 D_1 是否 $\triangle ABC$ 的重心)，有 $V_{ABCD_2}=3\cdot V_{ABCD}$，再通过等积变换又可证得 $V_{A_1B_1C_1D_1}=V_{ABCD_2}$，从而得 $V_{A_1B_1C_1D_1}=3\cdot V_{AbCD}$；反之， 由 $V_{A_1B_1C_1D_1}=3\cdot V_{ABCD}$，也可推得此式．这就是说，$\overline{D_2D_1}=3\overline{DD_1}$ 才是使 $V_{A_1B_1C_1D_1}=3\cdot V_{ABCD}$ 成立的充要条件．所以，在第二种情况时，我们应着力研究如果 D_1 点是 $\triangle ABC$ 内的任一点时是否仍有 $\overline{D_2D_1}=3\overline{DD_1}$ 存在？如果存在，我们

就可以肯定结论仍然正确；如果不存在，也可以据此否定这个答案.

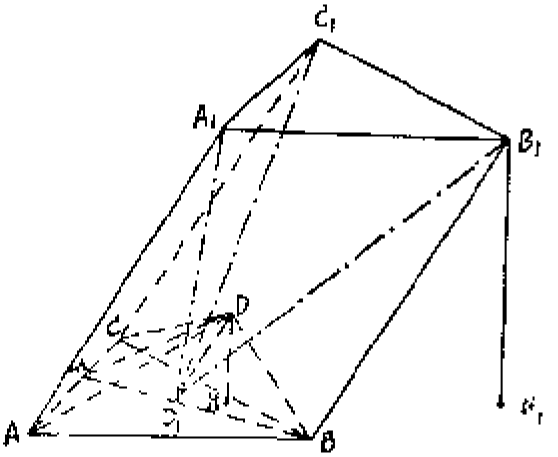


图 6—3

〈解答〉 1) 先就 D_1 是△ ABC 的重心的情况进行证明（图6—3）.

设M是AC的中点，则因直线 D_1D // 直线 BB_1，且点 B 在 MD_1 的延长线上，故 $\overline{BB_1}$ 也在平面 MD_1D 上. 而 MD 是平面 MD_1D 和平面 ADC 的交线，因此点 B_1 在直线 MD 上. 由此

$$\overline{B_1B}:\overline{DD_1}=\overline{BM}:\overline{D_1M}=3:1.$$

所以 $$\overline{B_1B}=3\overline{DD_1}.$$

同理 $$\overline{A_1A}=\overline{C_1C}=3\overline{DD_1}.$$

又直线 A_1A // B_1B // C_1C，于是点 A_1、B_1 和 C_1 到面 ABC 的距离也相等，所以面 $A_1B_1C_1$ // 面 ABC. 由此可得

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC.$$

设由 D 到面 ABC 的垂线的垂足为 H，由 B_1 到面 ABC 的垂线的垂足为 H_1.

$$\because \quad \triangle BH_1B_1 \backsim \triangle D_1HD,$$

$$\therefore \quad \overline{B_1H_1}:\overline{DH}=\overline{B_1B}:\overline{DD_1}=3:1.$$

但 $\overline{B_1H_1}$ 是四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 关于底面 $A_1B_1C_1$ 上的高，$\overline{DH}$ 是四面体 $ABCD$ 关于底面 ABC 上的高，故有体积关系：

$$V_{A_1B_1C_1D_1}=3\cdot V_{ABCD}.$$

2）若点 D_1 是 $\triangle ABC$ 内的任一点，下面我们研究结论是否仍然成立.

在平面 ABC 内，设 AD_1 交 BC 于 A'，CD_1 交 AB 于 C'. 与 1）一样，可证 A'、D 和 A_1 三点共线，C'、D 和 C_1 三点共线（图 6—4）.

设过两直线 AA_1 和 BB_1 的平面为 π，则 π 和面 BCD 的交线是 BA_1.

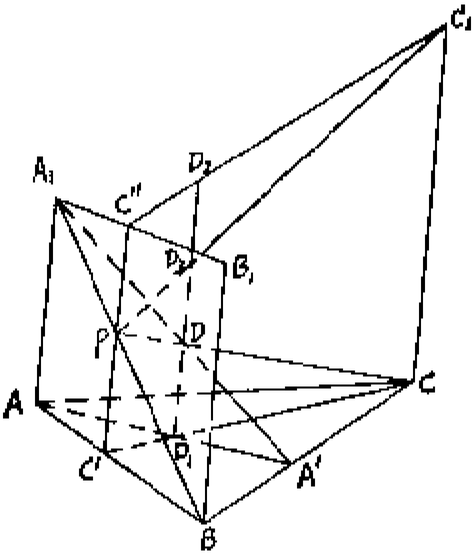


图 6—4

由于直线 DC 不平行于 π，故有一交点，设为 P，则点 P 在 $\overline{BA_1}$ 上，且 $\overline{DD_1}\parallel\overline{PC'}$.

又 A、P 和 B_1 都在面 ACD 上，故点 A、P 和 B_1 共线（面 ACD 和 π 的交线）.

设 $C'P$ 和 A_1B_1 交于点 C''，D_1D 和 $C''C_1$ 交于点 D_2，D_1D_2 和 C_1P 交于点 D_3.

在梯形 ABB_1A_1 中，点 P 是它的对角线的交点，再由 $\overline{C'C''}\parallel\overline{AA_1}$，有 $\overline{C'P}=\overline{PC''}$. 由此在梯形 $C'CC_1C''$ 中，再注意到 C'、D 和 C_1 共线，即不难推得 $\overline{D_1D}=\overline{DD_3}=\overline{D_3D_2}$. 故 $\overline{D_2D_1}=3\overline{DD_1}$.

由此可推知 $V_{A_1B_1C_1D_1}=3\cdot V_{ABCD}$ 仍然成立.

事实上，由 $\overline{D_2D_1}=3\overline{DD_1}$，可得

$$V_{ABCD_2}=3\cdot V_{ABCD}.$$

又四面体 $ABCD_2$ 的体积等于三个四面体 ABD_1D_2、BCD_1D_2 和 CAD_1D_2 的体积之和，四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 的体积等于三个四面体 $A_1B_1D_2D_1$，$B_1C_1D_2D_1$ 和 $C_1A_1D_2D_1$ 的体积之和．而在四面体 ABD_1D_2 和 $A_1B_1D_2D_1$ 中，面积 $S_{\triangle AD_1D_2}$ 等于 $S_{\triangle A_1D_2D_1}$，且 B 点到平面 AD_1D_2 的距离等于 B_1 点到平面 $A_1D_2D_1$ 的距离，故

$$V_{ABD_1D_2}=V_{A_1B_1D_2D_1}.$$

同理 $V_{BCD_1D_2}=V_{B_1C_1D_2D_1}$，$V_{CAD_1D_2}=V_{C_1A_1D_2D_1}$.

由此 $V_{A_1B_1C_1D_1}=V_{ABCD_2}$，

故得 $V_{A_1B_1C_1D_1}=3\cdot V_{ABCD}$.

【附注】 一般来说，如果有“$A\Rightarrow B$”，那末 A 是 B 成立的充分条件；如果有“$\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$”，那末 A 是 B 成立的必要条件．值得注意的是，如果 A 是 B 成立的充分而非必要的条件，那末虽能由 A 推出 B；就是把 A 替换为另外的条件 A'，同样可能推出 B.

例如，对于实数 a、b，由 $a>0$，$b>0$，可以得到 $ab>0$；但是由 $a<0$，$b<0$，仍然可以得到 $ab>0$．这就表明，$a>0$ 和 $b>0$，是 $ab>0$ 的充分条件；但它不是必要的，能够用别的条件 ($a<0$ 和 $b<0$) 替换．显然，a 和 b 同号才是 $ab>0$ 的充要条件．

至于本题，从上面的解答可以看到，“D_1 为 $\triangle ABC$ 的重心”对于结论的成立也不是必要的，它可以替换为“D_1 为 $\triangle ABC$ 内的任一点”．

由于第一种情况包括在第二种情况之中，因此作为本题的“解答”，只写出第二种情况的证明就可以了．

第七届国际中学生数学竞赛试题分析与解答

1965年在德意志民主共和国举行

第 一 题 (南斯拉夫命题)

求出区间 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 中所有能使不等式

$$2\cos x\leqslant\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|\leqslant\sqrt{2}$$

成立的实数值 x.

【分析】 求解根号或绝对值符号内含有未知数的不等式，通常的解法是：将根式有理化，将含绝对值符号的式子转化为不含绝对值符号的式子，然后进行求解. 因此，本题的关键是想办法将式子

$$\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|$$

有理化，并去掉绝对值符号. 我们注意到，根号下的式子可以由三角公式配成完全平方式，可以从里层向外层进行，由

$$1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2,$$

$$1-\sin 2x=(\sin x-\cos x)^2,$$

得

$$\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|$$

$$=\left|\,|\sin x+\cos x|-|\sin x-\cos x|\,\right|. \qquad (1)$$

这是一个含有双重绝对值符号的式子，先去掉内层的绝对值符号，这里所用的办法是将区间 $[0,2\pi]$ 划分为若干个小区间，使得内层绝对值符号内的式子 $\sin x+\cos x$ 和 $\sin x$

$-\cos x$ 在这些小区间上的值，同时保持不变号．于是得到

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}$，$\frac{7\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时，

$$|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}|=2|\sin x|,$$

这时，原不等式变为

$$2\cos x\leqslant 2|\sin x|\leqslant\sqrt{2}. \tag{2}$$

当 $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{4}$ 时，

$$|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}|=2|\cos x|,$$

这时原不等式变为

$$2\cos x\leqslant 2|\cos x|\leqslant\sqrt{2}. \tag{3}$$

解不等式(2)和(3)，就得到所求的结果．

另一种想法是从外层向里层进行．进一步观察、分析关键式子 $|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}|$ 发现，绝对值符号里的第一个根式的最大值为 $\sqrt{2}$；第二个根式的最小值为 0．因此，有不等式

$$|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}|\leqslant\sqrt{2}$$

对 $[0, 2\pi]$ 中的任何 x 值都成立，所以，本题实际上只需解不等式

$$2\cos x\leqslant|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}|. \tag{4}$$

而(4)式对 $\cos x\leqslant 0$ 的 x 值，即 $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 均成立．

于是，最后剩下的问题就是：求出当 $\cos x>0$ 时，不等式(4)的解．这时，不等式(4)的两边都是正值，用平方的方法进行有理化，就容易求出所需的结果．

〈解法一〉 设 $|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}|=2y$，

于是原不等式变为

$$\cos x \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{5}$$

我们知道

$$\begin{aligned} 2y &= \left|\sqrt{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x}\right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}\right| \\ &= \Big|\,|\sin x + \cos x| - |\sin x - \cos x|\,\Big|, \end{aligned}$$

借助于单位圆，可以看出：

当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}$，$\frac{7\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2\pi$ 时，有

$$y = |\sin x|,$$

这时(5)变为

$$\cos x \leqslant |\sin x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2},$$

解这个不等式得：$\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}$；

当 $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}$ 时，有

$$y = |\cos x|$$

这时(5)变为

$$\cos x \leqslant |\cos x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

解这个不等式得：

$$\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} \text{和} \frac{5\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}.$$

合起来就得到原不等式的解为：

$$\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}.$$

〈解法二〉 原不等式可以写成不等式组

$$\begin{cases} 2\cos x \leqslant \left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|, & (6) \\ \left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqslant \sqrt{2}. & (7) \end{cases}$$

先考察不等式组中的第一个不等式(6)，由于它的右边是非负的，故对 $\cos x \leqslant 0$ 的一切 x 值都适合，因之 $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$. 现在只需讨论 $\cos x > 0$ 时不等式(6)的解. 此时该不等式的两边都是正值，两边平方得：

$$4\cos^2 x \leqslant 2-2\sqrt{\cos^2 2x},$$

$$|\cos 2x| \leqslant 1-2\cos^2 x=-\cos 2x.$$

此不等式当 $\cos 2x \leqslant 0$ 时满足，解为

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{3\pi}{2}+2k\pi,$$

即 $$\frac{\pi}{4}+k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}+k\pi. \quad (k=0,\ 1)$$

当 $\cos 2x \geqslant 0$ 时，x 可取值为：

$$\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{4} \text{ 或 } \frac{6\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}.$$

结合 $\cos x \leqslant 0$ 的 x 值，故不等式(6)的解为：

$$\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{2}.$$

而不等式组中的第二个不等式(7)，对任何 x 值都适合.

故原不等式的解为 $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}$.

【附注】 1. 解法一应用了将根式化为含绝对值符号的式子的有理化方法，这种变形是同解的，但是还需要进一步处理含绝对值符号的式子，特别是它只有在根号下的式子可以化为完全平方式时才便于应用，因此，局限性较大.

此外，在解法一中还应用了分割区间的方法，将含有绝对值符号的式子化为不含有绝对值符号的式子，然后进行求解．在解绝对值符号内含有未知数的不等式或方程中，这种方法应用比较广泛．但是应该注意区间的分法，假若表达式中含有若干个绝对值符号，例如表达式 $|\sin x+\cos x|-|\sin x-\cos x|$ 就是含有两个绝对值符号，这时，所分割成的小区间，应该是使得在绝对值符号内的各个式子，在所分成的每个区间上都同时恰好不变号．

2．解法二是用平方的方法将根式有理化和去掉绝对值符号的，这种方法虽然往往会增加表达式的幂次，为求解带来一定的困难；但是假若象解法二那样仔细分析式子变形的同解性问题，效果也还比较好，所以用得比较广泛．

第　二　题 （波兰命题）

已知方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0.\end{cases}$$

其系数满足下列条件：*a*）　a_{11}，a_{22}，a_{33} 是正数；*b*）　所有其他系数都是负数；*c*）　每个方程中系数之和是正数．证明：$x_1=x_2=x_3=0$ 是已知方程组的唯一解．

【分析】　显然，$x_1=x_2=x_3=0$ 是方程组的解．要证明它是唯一解，有两种想法：一种是证明任何非零数组 (x_1, x_2, x_3)，即其中至少有一个 $x_i\neq 0$，都不是方程组的解；另一种是证明这个齐次方程组的系数行列式不等于零．

如何证明任何非零数组 (x_1, x_2, x_3) 都不是这个方程组

的解呢？我们可以这样来考虑问题：

不妨假定 $x_1\neq 0$，这时，只要能证明方程组中至少有一个方程不成立，问题就解决了．为此考察表达式

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \tag{1}$$

由假定及题给已知条件 $a)$，$b)$，$c)$，这时只知道 $a_{11}x_1\neq 0$，而整个(1)式无法判定是否不等于零．同样，其他两个方程左边的表达式也不知道是否不等于零．

根据关于系数的三个已知条件，假若将 x_1，x_2，x_3 有序化，即假定 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3$，则利用 a_{12}，a_{13} 都是负数的条件，就立即得到

$$a_{12}x_1\leqslant a_{12}x_2 \text{ 和 } a_{13}x_1\leqslant a_{13}x_3,$$

因此就有

$$\begin{aligned}&a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\geqslant a_{11}x_1+a_{12}x_1+a_{13}x_1\\&=(a_{11}+a_{12}+a_{13})x_1\end{aligned} \tag{2}$$

若 $x_1>0$，则由(2)就立即知道方程组中的第一个方程不成立；

若 $x_1<0$，则不等式(2)右边为负数，因此，由它不能判定第一个方程不成立．但这时根据假定有 $x_3\leqslant x_2\leqslant x_1<0$，所以 $-x_3\geqslant -x_2>-x_1>0$，由此对方程组中的第三个方程进行类似的分析，亦知道它不成立．

至于第二种想法，只要注意到在将系数行列式展开以后，用加入适当项的办法，利用已知条件，就容易证明系数行列式的值大于零．

〈证法一〉 $x_1=x_2=x_3=0$ 显然是原方程组的一组解．假定这方程组另有一组非零解 (x_1, x_2, x_3)，则其中至少有一个 $x_i\neq 0$．据此，我们来考察以下两种情形：

1） x_i 中有一个数是正的：

在这种情形下，不失一般性，可以假定：

$$x_1>0,\quad x_1\geqslant x_2\geqslant x_3.$$

由于 $a_{12}<0$ 及 $a_{13}<0$，可得：

$$a_{12}x_1\leqslant a_{12}x_2,\quad 和\ a_{13}x_1\leqslant a_{13}x_3.$$

于是 $\quad a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\geqslant a_{11}x_1+a_{12}x_1+a_{13}x_1.$

根据假定及已知条件

$$x_1>0\ 及\ a_{11}+a_{12}+a_{13}>0,$$

得

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\geqslant a_{11}x_1+a_{12}x_1+a_{13}x_1$$
$$=(a_{11}+a_{12}+a_{13})x_1>0.$$

又因假定 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 为方程组的解．所以

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,$$

这与上面得到的不等式相矛盾．因此，情形 1）是不可能的．

2） x_i 中有一个是负数：

在这种情形，不失一般性，可以假定：

$$x_1<0,\quad x_1\leqslant x_2\leqslant x_3.$$

类似上面的讨论，得

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3$$
$$=-[a_{11}(-x_1)+a_{12}(-x_2)+a_{13}(-x_3)]<0.$$

同样是矛盾的．因此情形 2）亦不可能．

由上面两种情形得到 $x_1=x_2=x_3=0$ 是所给方程组的唯一解．

〈证法二〉 计算原方程组的系数行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\
&\quad - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{33} \\
&\quad + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{22}a_{32}a_{13} + a_{23}a_{32}a_{13} \\
&\quad + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{32}a_{12}a_{23} + a_{33}a_{12}a_{23} \\
&\quad - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{32}a_{23} - a_{13}a_{32}a_{23} \\
&\quad - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{22}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{12}a_{33} \\
&\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{22}a_{13} - a_{33}a_{22}a_{13} \\
&= (a_{11}+a_{12}+a_{13})a_{22}a_{33} + (a_{21}+a_{22}+a_{23})a_{32}a_{13} \\
&\quad + (a_{31}+a_{32}+a_{33})a_{12}a_{23} - (a_{11}+a_{12}+a_{13})a_{32}a_{23} \\
&\quad - (a_{21}+a_{22}+a_{23})a_{12}a_{33} - (a_{31}+a_{32}+a_{33})a_{22}a_{13}.
\end{aligned}
$$

上面最后一道式子的六项中，除开第四项

$$-(a_{11}+a_{12}+a_{13})\cdot a_{32}a_{23}$$

为负数外，其余五项均为正数．现在把其中的第一项与第四项放在一起来考察，得

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}+a_{12}+a_{13})a_{22}a_{33} - (a_{11}+a_{12}+a_{13})a_{32}a_{23} \\
&= (a_{11}+a_{12}+a_{13})(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) \\
&= (a_{11}+a_{12}+a_{13})[a_{22}a_{33} + a_{23}a_{33} - a_{32}a_{23} - a_{23}a_{33}] \\
&= (a_{11}+a_{12}+a_{13})[a_{33}(a_{22}+a_{23}) - a_{23}(a_{32}+a_{33})]
\end{aligned}
$$

利用已知条件 $c)$，有：

$$a_{11}+a_{12}+a_{13}>0;$$

$$a_{22}+a_{23}>-a_{21}>0; \qquad -(a_{32}+a_{33})<a_{31}<0.$$

由此可知 $D>0$，即原方程组有唯一解

$$x_1=x_2=x_3=0.$$

【附注】 1．证法一在证明唯一性时，是采用证明原命题“是方程组的解，必有 $x_1=x_2=x_3=0$”的逆否命题“任何非

零数组都不是方程组的解”成立的方法．我们知道原命题是和它的逆否命题等价的，即它们同真同假．因此，命题之间的关系在数学上的作用很大，它给命题的证明开辟了一条广阔的道路．

另外，在证法一中，我们还用了“任意有限多个数可以重新按一定规则排列，而又不会失去将要得出的结论的一般性”这一显明的事实，将三个数 x_1，x_2，x_3 重新按大小排列，使本来是杂乱无章的一般情况化为和它等价的按大小排列的特殊情况来考虑，这样就为进一步解决问题提供了良好的条件，同时它往往也可以使证明过程的叙述清晰明了（参看第九届第五题）．这种“有序化”的思想方法，无论是在初数、高数中，都经常用到．

2、证法二应用了高等代数中的克来姆定理的一个特例：含 n 个未知数的 n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=0. \end{cases}$$

若它的系数行列式 $D\neq0$，那么这个方程组有而且只有零解：

$$x_1=0,\ x_2=0,\ \cdots,\ x_n=0.$$

它的证明大体想法是这样的：利用行列式的性质，将原方程组化为等价的方程组

$$\begin{cases} Dx_1=0, \\ Dx_2=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Dx_n=0. \end{cases}$$

因此，由 $D\neq 0$ 就立即可以知道，方程组有而且只有零解．详细证明可参看一般的“高等代数”书籍．

3．题目中的已知条件 a）是多余的（当然，给出了这一条件，解题时既好想些，也好做些），实际上，它可以由条件 b）和 c）直接推出．

4．本题可以推广到 n 个未知数 n 个方程的类似情形．这时，用证法一比较简单；若用证法二，计算就比较复杂．

第 三 题 （捷克斯洛伐克命题）

已知一个四面体 $ABCD$，棱 AB 长为 a，棱 CD 长为 b．异面直线 AB 与 CD 之间的距离为 d，所成角为 δ．这四面体被平行于棱 AB 与 CD 的平面 γ 截成两部分．如果 AB、CD 到平面 γ 的距离之比是 k，试求这两部分的体积之比．

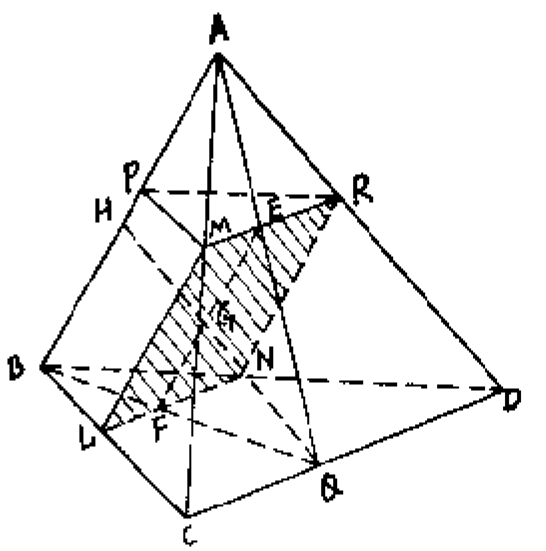


图 7—1

【分析】 这是一道关于多面体体积计算的问题．如图 7—1，设平面 γ 分四面体 $ABCD$ 所成的两部分为 $MLNRAB$ 和 $MLNRCD$，它们的体积分别记为 V_1 和 V_2．则

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_1}{V_{ABCD}-V_1} \qquad (*)$$

因此，要求出这两部分的体积之比，实际上就只需要求出 V_1 来．多面体 $MNLRAB$ 是一个关于柱、锥的“组合体”，

要求出它的体积，我们可以用分割的办法，将它化为容易计算体积的三棱柱和三棱锥（即四面体）．在图 7—1 中，过 MR 作平面 MRP 平行于平面 BCD，截四面体 $ABCD$ 的截口为 $\triangle MRP$．于是

$$V_1 = V_{三棱柱PMR-BLN} + V_{四面体APMR}$$

注意到四面体 $ABCD \backsim$ 四面体 $APMR$，所以我们容易用 k 和 V_{ABCD} 表示出 V_{APMR}．又四面体 $APMR$ 与三棱柱 $PMR\text{-}BLN$ 有相同的底面，且它们的侧棱 AP，PB 对底面的倾角相等，因此可以求得：

$$V_{PMR-BLM} : V_{APMR} = \frac{3}{k}.$$

从而也可以用 k 和 V_{ABCD} 来表示出 $V_{PMR-BLN}$ 的值来． 由所得的结果就可以算出(*)式中的比值．

亦可根据积分学中关于利用横断面面积计算体积的方法来求出 V_1：

设平面 γ 和直线 AB 的距离为 y．显然，截口四边形 $MLNR$ 是平行四边形，且 $\angle RML = \delta$．它的面积

$$S(y) = \overline{ML} \cdot \overline{MR} \cdot \sin\delta.$$

于是，$\quad V_1 = \int_0^y S(x)\,dx.$

因此，求出 $\overline{ML}$ 和 $\overline{MR}$，计算这个积分就得到 V_1，再由(*)式就可以算出比值．

〈**解法一**〉 如图 7—1 所示．由于 $\overline{AB} \parallel$ 平面 γ，所以 $\overline{AB} \parallel \overline{ML} \parallel \overline{RN}$．同理 $\overline{CD} \parallel \overline{MR} \parallel \overline{LN}$．即平面 γ 截四面体 $ABCD$ 的截口为平行四边形 $MLNR$．

又设 $\overline{HQ}$ 为异面直线 AB 与 CD 的公垂线， 它与平面

γ交于点 G，则 $\dfrac{\overline{HG}}{\overline{GQ}}=k$.

过两相交直线 AB 与 HQ 作平面 ABQ，它与平面 BCD、平面 ACD 及 γ 的交线依次为 BQ、AQ 和 EF，显然：

$$\overline{EF}\parallel\overline{AB},\quad \frac{\overline{BF}}{\overline{FQ}}=\frac{\overline{HG}}{\overline{GQ}}=k.$$

过 MR 作平面 $MRP\parallel$平面 BCD，所得的截口为 $\triangle MRP$. 由"平行线截得比例线段"定理，得：

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{PM}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BL}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{BQ}}=\frac{k}{1+k}$$

及

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=k.$$

因为四面体 $ABCD$ 与四面体 $APMR$ 相似，所以

$$V_{APMR}:V_{ABCD}=\overline{PM}^3:\overline{BC}^3=\left(\frac{\overline{PM}}{\overline{BC}}\right)^3=\frac{k^3}{(1+k)^3},$$

即

$$V_{APMR}=\frac{k^3}{(1+k)^3}V_{ABCD}.$$

又因四面体 $APMR$ 与三棱柱 PMR-BLN 有相同的底面 PMR. 且侧棱 AP, PB 对于底面所成的倾角相等，记这个倾角为 α，则四面体 $APMR$ 的高为 $\overline{PB}\sin\alpha$，三棱柱 PMR-BLN 的高为 $\overline{AP}\cdot\sin\alpha$. 因而

$$V_{三棱柱}:V_{APMR}=\overline{PB}\sin\alpha:\frac{1}{3}\overline{AP}\sin\alpha=\frac{3\overline{PB}}{\overline{AP}}$$

$$=\frac{3}{k},$$

所以

$$V_{三棱柱}=\frac{3}{k}V_{APMR}=\frac{3k^2}{(1+k)^3}V_{ABCD}.$$

于是，平面 γ 截四面体 $ABCD$ 所得的两个多面体 $MLNRAB$

和 $MLNRCD$ 的体积分别为：

$$V_1 = V_{三棱柱} + V_{APMR} = \frac{k^3+3k^2}{(1+k)^3} V_{ABCD};$$

$$V_2 = V_{ABCD} - V_1 = \frac{3k+1}{(1+k)^3} V_{ABCD}.$$

故 $$\frac{V_1}{V_2} = \frac{k^3+3k^2}{3k+1} = \frac{k^2(k+3)}{3k+1}.$$

〈**解法二**〉 设平面 γ 和直线 AB 之间的距离为 y，平面 γ 和四面体 $ABCD$ 的截口是平行四边形 $MLNR$（图7—2）：

这是由于，$ML \parallel AB$，$RN \parallel AB$，所以有 $ML \parallel RN$，并且 $NL \parallel CD$，$MR \parallel CD$，故有 $NL \parallel MR$.

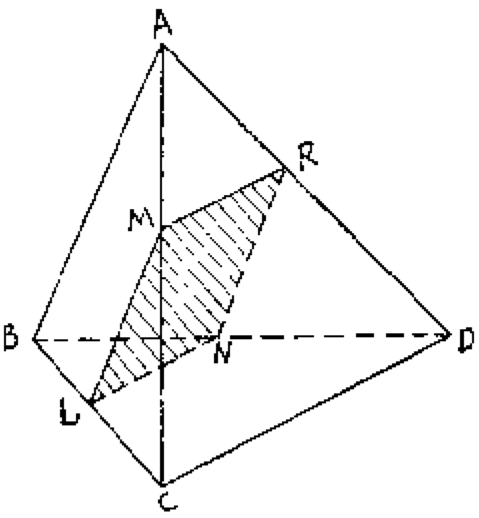


图 7—2

由"平行线截得比例线段"定理，得：

$$\overline{ML} : a = y : d,$$

$$\overline{ML} = \frac{ay}{d};$$

$$\overline{MR} : b = (d-y) : d,$$

$$\overline{MR} = \frac{b(d-y)}{d}.$$

因为平行四边形 $MLNR$ 的两边 ML 和 MR 之间的夹角为 δ，所以这平行四边形的面积为

$$s(y) = \overline{ML} \cdot MR \sin\delta = \frac{ay}{d} \cdot \frac{b(d-y)}{d} \sin\delta;$$

相应的，对于和直线 AB 的距离为 x 的平行于 γ 的平面所确定的平行四边形的面积为

$$s(x) = \frac{ax}{d} \cdot \frac{b(d-x)}{d} \sin\delta.$$

因此，利用横断面的面积计算体积的公式，得到平面 γ 所截的一部分多面体 $MLNRAB$ 的体积

$$\begin{aligned}V_1&=\int_O^y s(x)\,dx\\&=\int_O^y \frac{ax}{d}\cdot\frac{b(d-x)}{d}\sin\delta\,dx\\&=\int_O^y\left(\frac{ab}{d}x-\frac{ab}{d^2}x^2\right)\sin\delta\,dx\\&=\left(\frac{aby^2}{2d}-\frac{aby^3}{3d^2}\right)\sin\delta\\&=\frac{aby^2}{6d^2}(3d-2y)\sin\delta.\qquad(1)\end{aligned}$$

若在(1)中令 $y=d$，我们就得到四面体 $ABCD$ 的体积为

$$V_{ABCD}=\frac{abd}{6}\sin\delta.\qquad(2)$$

由(1)和(2)就得到平面 γ 截四面体 $ABCD$ 所得另一部分多面体 $MLNRCD$ 的体积

$$\begin{aligned}V_2&=V_{ABCD}-V_1\\&=\frac{abd}{6}\sin\delta-\frac{aby^2}{6d^2}(3d-2y)\sin\delta\\&=\frac{ab}{6}\left[d-\frac{y^2}{d^2}(3d-2y)\right]\sin\delta.\end{aligned}$$

由已知条件 $\frac{y}{d-y}=k$，即 $d=y\cdot\frac{k+1}{k}$，于是得：

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{aby^2}{6d^2}(3d-2y)\sin\delta}{\frac{ab}{6}\left[d-\frac{y^2}{d^2}(3d-2y)\right]\sin\delta}$$

$$=\frac{y^2(3d-2y)}{d^3-y^2(3d-2y)}$$

$$=\frac{k^3+3k^2}{3k+1}=\frac{k^2(k+3)}{3k+1}.$$

【附注】1. 解法一是初等的，只用到初等几何的知识．它的主要思想是作一辅助平面，把较复杂的多面体切割为容易求体积的三棱柱和四面体．这种用分割来将“不规则”转化为“规则”，将“繁”化“简”的思想方法，不但可以用来求不规则图形的面积、体积，而且在数学中有着广泛的应用．

解法二是直接利用横断面面积计算体积的积分公式

$$V=\int_a^b s(x)\,dx,$$

关于这个公式的详细推导过程，可以参看一般的“数学分析”书籍中的有关定积分的应用部分．

2. 在上面两种解法中，我们看到，四面体 $ABCD$ 被平行于棱 AB 和 CD 的平面 γ 截成两部分，这两部分的体积虽然都与四面体 $ABCD$ 及直线 AB、CD 分别到平面 γ 的距离之比 k 有关，但两体积之比只与 k 有关，而和四面体 $ABCD$ 的形状、大小无关．这就是说，如果把题中的 a、b、d 和 δ 当作已知量，则是多余的．

3. 请读者考察平面上的类似问题：$\triangle ABC$ 被平行于底边 BC 的直线 l 截成两部分，若 A 和 BC 到直线 l 的距离之比为 k．则这两部分的面积之比等于什么？

第 四 题 （苏联命题）

求出所有的四元实数组 (x_1, x_2, x_3, x_4)，使其中任一

个数与其他三个数之积的和都等于2．

【分析】 由题设条件容易得到四元实数组$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$所满足的方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2x_3x_4=2, & (1)\\ x_2+x_3x_4x_1=2, & (2)\\ x_3+x_4x_1x_2=2, & (3)\\ x_4+x_1x_2x_3=2. & (4)\end{cases}$$

这是一个四元非线性的方程组．在一般情形下，这类方程组的求解是比较复杂的．容易看到，本题是一个较特殊的四元非线性方程组，它可以用熟知的消元法，通过消元、降次来求解．

显然，方程组的解$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$中，必然不可能有一个$x_i=0$；所以，由(1)和(2)通过消去x_3x_4，就立即得到关于两个元x_1，x_2的方程

$$|x_1-1|=|x_2-1|.$$

再注意到原方程组的四个元x_1，x_2，x_3，x_4，当交换位置后，方程组不变．于是就得到方程

$$|x_1-1|=|x_2-1|=|x_3-1|=|x_4-1|.$$

这是含四个未知数的绝对值方程，用划分区间的方法，分五种情形就可以化为普通的一次方程来求解，将结果再代回原方程组，就得到问题的解．

原方程组也可以直接利用几次消元、降次，转化为和它等价的几个方程组，然后再分别求解．

〈解法一〉 根据题意，四元数组$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$满足方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2x_3x_4 = 2, & (1) \\ x_2 + x_3x_4x_1 = 2, & (2) \\ x_3 + x_4x_1x_2 = 2, & (3) \\ x_4 + x_1x_2x_3 = 2. & (4) \end{cases}$$

易知，对所有的 $i=1$，2，3，4，都有 $x_i \neq 0$. 因为若 $x_1=0$，那么由(2)，(3)和(4)得

$$x_2 = x_3 = x_4 = 2,$$

这就和(1)矛盾.

现在由(1)可以得

$$x_3x_4 = \frac{2-x_1}{x_2},$$

同时由(2)可以得

$$x_3x_4 = \frac{2-x_2}{x_1}.$$

因此，得：

$$\frac{2-x_1}{x_2} = \frac{2-x_2}{x_1}, \text{或} (x_1-1)^2 = (x_2-1)^2,$$

即
$$|x_1-1| = |x_2-1|.$$

由于方程组(1)—(4)关于四个变数 x_1，x_2，x_3，x_4 是对称的，因此通过循环交换未知数，得到

$$|x_1-1| = |x_2-1| = |x_3-1| = |x_4-1|. \qquad (5)$$

对于(5)，分下述几种不同情形来解：

1) 对所有的 x_i，有 $x_i \geqslant 1$；

2) 其中只有三个 x_i，有 $x_i \geqslant 1$；

3) 其中只有两个 x_i，有 $x_i \geqslant 1$；

4) 其中只有一个 x_i，有 $x_i \geqslant 1$；

5) 对所有的 x_i，有 $x_i < 1$.

1) 在这种情形下，由(5)可以得到

$$x_1=x_2=x_3=x_4,$$

代入(1)得

$$x_1+x_1^3=2,$$

即
$$(x_1-1)(x_1^2+x_1+2)=0.$$

但因 $x_1^2+x_1+2=\left(x_1+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$，故得

$$x_1=1 \text{ 和 } x_2=x_3=x_4=1.$$

它满足方程(1)—(4)，于是我们得到方程组的第一组解：

$$(1,\ 1,\ 1,\ 1).$$

2) 在这种情形下，不妨假定

$$x_1<1,\ x_2\geqslant 1,\ x_3\geqslant 1,\ x_4\geqslant 1.$$

由(5)得 $-x_1+1=x_2-1=x_3-1=x_4-1$，所以

$$x_2=x_3=x_4, \text{ 和 } x_1=2-x_2.$$

代入方程(2)得

$$(2-x_2)+x_2^3=2,$$

即
$$x_2(x_2^2-1)=0.$$

注意到 $x_i\neq 0\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 及 $x_2\geqslant 1$，则得 $x_2=1$.
由此 $x_1=2-x_2=1$，这与假定 $x_1<1$ 矛盾.
即此时方程组无解.

3) 在这种情形下，不妨假定

$$x_1<1,\ x_2<1,\ x_3\geqslant 1,\ x_4\geqslant 1.$$

由(5)得 $-x_1+1=-x_2+1=x_3-1=x_4-1$，所以

$$x_1=x_2 \text{ 和 } x_3=x_4=2-x_1,$$

代入方程(3) 得

$$(2-x_1)+x_1^2(2-x_1)=2,$$

即 $$x_1(x_1-1)^2=0.$$

由于 $x_i\neq 0(i=1, 2, 3, 4)$，因此 $x_1=1$，这也与假定 $x_1<1$ 矛盾．所以在这种情形下方程组也无解．

4) 在这种情形下，不妨假定

$$x_1<1,\ x_2<1,\ x_3<1,\ x_4\geqslant 1.$$

于是，由(5) 得：

$$-x_1+1=-x_2+1=-x_3+1=x_4-1,$$

所以 $$x_1=x_2=x_3,\ 和\ x_4=2-x_1,$$

代入方程(4)得

$$(2-x_1)+x_1^3=2,$$

即 $$x_1(x_1^2-1)=0.$$

因为 $x_i\neq 0(i=1, 2, 3, 4)$ 及 $x_1<1$，所以得 $x_1=-1$.

于是： $x_1=x_2=x_3=-1$，和 $x_4=2-x_1=3$.

因为它满足方程(1)—(4)，我们又得到方程组的一组解：

$$(-1,\ -1,\ -1,\ 3).$$

通过循环交换未知数，进一步又可得以下三组解：

$(-1, -1, 3, -1)$，$(-1, 3, -1, -1)$ 和

$(3, -1, -1, -1)$.

5) 在这种情形下，由方程(5)得

$$-x_1+1=-x_2+1=-x_3+1=-x_4+1,$$

即 $$x_1=x_2=x_3=x_4.$$

这和第 1) 种情形一样得 $x_1=1$，但与假定 $x_1<1$ 相矛盾．即此时方程组也没有解．

故满足题目要求的所有四元实数组是：

$(1, 1, 1, 1)$，$(-1, -1, -1, 3)$，

$(-1, -1, 3, -1)$，$(-1, 3, -1, -1)$ 和

(3, −1, −1, −1).

〈解法二〉 根据题意，得方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2x_3x_4 = 2, & (1) \\ x_2 + x_3x_4x_1 = 2, & (2) \\ x_3 + x_4x_1x_2 = 2, & (3) \\ x_4 + x_1x_2x_3 = 2. & (4) \end{cases}$$

(1) − (2) 得 $(x_1 - x_2)(x_3x_4 - 1) = 0$. 于是原方程组与下列两个方程组（Ⅰ）和（Ⅱ）同解：

$$(\text{I})\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, & (5) \\ x_1 + x_2x_3x_4 = 2, & (1) \\ x_3 + x_1x_1x_2 = 2, & (3) \\ x_4 + x_1x_2x_3 = 2; & (4) \end{cases}$$

$$(\text{II})\begin{cases} x_3x_4 - 1 = 0, & (6) \\ x_1 + x_2x_3x_4 = 2, & (1) \\ x_3 + x_4x_1x_2 = 2, & (3) \\ x_4 + x_1x_2x_3 = 2. & (4) \end{cases}$$

解（Ⅰ）

由 (5)，方程组（Ⅰ）变为

$$\begin{cases} x_1 + x_1x_3x_4 = 2, & (7) \\ x_3 + x_1^2x_4 = 2, & (8) \\ x_4 + x_1^2x_3 = 2. & (9) \end{cases}$$

(8) − (9) 得 $(x_3 - x_4)(x_1^2 - 1) = 0$，于是方程组（Ⅰ）又与下列方程组（Ⅰ′）和（Ⅰ″）同解：

$$(\text{I}')\begin{cases} x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_1x_3x_4 = 2, \\ x_3 + x_1^2x_4 = 2; \end{cases} \qquad (\text{I}'')\begin{cases} x_1^2 - 1 = 0, \\ x_1 + x_1x_3x_4 = 2, \\ x_3 + x_1^2x_4 = 2. \end{cases}$$

解方程组（Ⅰ′），得到原方程组的一组解：

$$(1,\ 1,\ 1,\ 1).$$

解方程组（Ⅰ″），当 $x_1=1$ 时，所得的一组解与上面得到的解相同；当 $x=-1$ 时，则方程组（Ⅰ″）变为

$$\begin{cases} x_3x_4=-3, \\ x_3+x_4=2. \end{cases}$$

由此得到原方程组的另外两组解：

$$(-1,\ -1,\ -1,\ 3),\ (-1,\ -1,\ 3,\ -1).$$

解（Ⅱ）

由(6)，方程组（Ⅱ）变为

$$\begin{cases} x_1+x_2=2, & (10) \\ x_3+x_1x_2\cdot\dfrac{1}{x_3}=2, & (11) \\ \dfrac{1}{x_3}+x_1x_2x_3=2. & (12) \end{cases}$$

(11) - (12) 得 $\left(x_3-\dfrac{1}{x_3}\right)(x_1x_2-1)=0$，于是方程组（Ⅱ）又与下列方程组（Ⅱ′）和（Ⅱ″）同解：

$$(\text{Ⅱ}')\begin{cases} x_3^2=1, \\ x_1+x_2=2, \\ x_3+x_1x_2\cdot\dfrac{1}{x_3}=2; \end{cases} \qquad (\text{Ⅱ}'')\begin{cases} x_1x_2=1, \\ x_1+x_2=2, \\ x_3+x_1x_2\cdot\dfrac{1}{x_3}=2. \end{cases}$$

解方程组（Ⅱ′）：当 $x_3=1$ 时，则方程组（Ⅱ′）变为

$$\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1\cdot x_2=1. \end{cases}$$

由此得到原方程组的一组解仍为(1，1，1，1)；

当 $x_3=-1$ 时，则方程组（Ⅱ′）变为

$$\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1\cdot x_2=-3. \end{cases}$$

由此得到原方程组的另外两组解：

$(-1,\ 3,\ -1,\ -1)$，$(3,\ -1,\ -1,\ -1)$.

解方程组（Ⅱ″）：当 $x_1x_2=1$ 时，方程组（Ⅱ″）变为

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{1}{x_1}=2, \\ x_3+\dfrac{1}{x_3}=2. \end{cases}$$

由此得到原方程的一组解仍为$(1,\ 1,\ 1,\ 1)$.

显然，若四元实数组 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ 满足原方程组，则对于所有的 $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$，都有 $x_i\neq 0$.

综合上述讨论，原方程组共有五组不同的实数解：

$(1,\ 1,\ 1,\ 1)$，$(-1,\ -1,\ -1,\ 3)$，

$(-1,\ -1,\ 3,\ -1)$，$(-1,\ 3,\ -1,\ -1)$和

$(3,\ -1,\ -1,\ -1)$.

【附注】 1．解法一是利用所给方程组的特点，先将它化为一次的含绝对值的方程，最后分为五种情形来求解；解法二是常规的方法．两种解法的形式虽然不大相同，但基本思想是一样的，实质上都是通过消元、降次，将方程组化为若干个简单的方程组或方程来求解.

值得提醒的是，在求解过程中，不但要注意每一个方程变形的同解性，同时还应注意方程组之间的同解性．例如，（Ⅰ）的解集等于（Ⅰ′）的解集与（Ⅰ″）的解集的并集；而不是只等于（Ⅰ′）的解集，也不是只等于（Ⅰ″）的解集.

2．请读者考虑三元实数组的情形，结果如何？试研究

本题是否可以推广到 $n(>4)$ 元实数组的情形.

第 五 题 (罗马尼亚命题)

在 $\triangle OAB$ 中，$\angle AOB=\alpha(<90^\circ)$，从 $\triangle OAB$ 中的任意一点 M（异于 O）引 OA 的垂线 MP，OB 的垂线 MQ，P、Q 是垂足. H 是 $\triangle OPQ$ 的垂心. 当点 M 在：a) 线段 AB 上；b) 三角形 OAB 内部移动时，求点 H 的轨迹.

【分析】 a) 当点 M 在线段 AB 上面时，可以先考察两个最特殊的情形（图 7—3）：

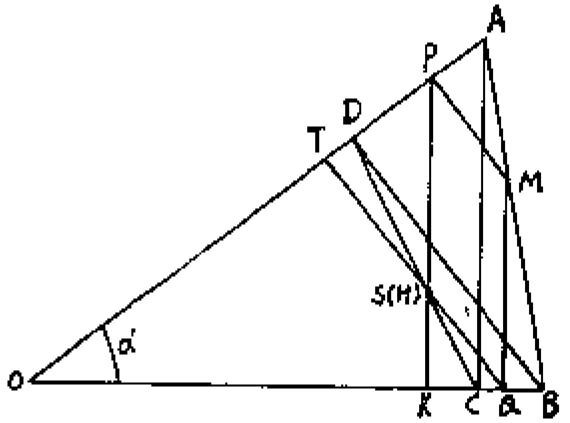


图 7—3

当 M 点与 B 点重合时，作 $BD\perp OA$，$\triangle OBD$ 的垂心 H 与垂足 D 重合；

当 M 点与 A 点重合时，作 $AC\perp OB$，$\triangle OAC$ 的垂心 H 与垂足 C 重合.

由此可知，垂心 H 的轨迹必通过 C、D 两点. 假若我们再在 $\overline{AB}$ 上随意多选几个点，并找出其所对应的垂心 H 的位置，则不难发现，H 的轨迹可能就是线段 CD.

要证明 H 的轨迹是线段 CD，根据轨迹的完备性与纯粹性，就要证明下面两个方面：i) 合乎条件的点 H 在线段 CD 上；ii) 线段 CD 上的点，必是 $\overline{AB}$ 上某一点 M 所对应的垂心 H. 证明时，可以用平面几何的证法，也可以用解析法.

平面几何证法，应用门涅劳斯（见附注 1）定理和熟知的

“平行线截得比例线段”定理就可以证得 H 点在线段 CD 上；然后由作图知道，线段 AB 上的点 M 和线段 CD 上的点 H 是一一对应．从而就证明了 H 点的轨迹就是线段 CD．

解析法的证明，如图 7—5 所适当选取的坐标系， 由题设条件建立 AB 和 CD 的直线方程，于是就可以证明 H 点的坐标必满足 CD 的直线方程；反之，CD 上的点 H 所对应的点 M 的坐标必满足 AB 的直线方程．从而就证明了 H 点的轨迹就是线段 CD．

问题 a) 的解决其实已给解决 b) 问题“搭了桥”．由于 $\triangle ABC$ 内部的点可以看成由其内部平行于 AB 边的动线段移动而成，而每条这样的线段上的 M 点所对应的 H 点的轨迹，必然是 $\triangle OCD$ 中的一条线段；反之，$\triangle OCD$ 中的任意一条线段上的点 H，它所对应的 M 点也必是 $\triangle OAB$ 中的一条线段．因此，当 M 点在 $\triangle OAB$ 内部变动时，它所对应的 H 点的轨迹就是 $\triangle OCD$ 的内部．

另一种证法是：由于 $\triangle OAB$ 内部的点，可以看成 $\angle AOB$ 和 $\angle ABO$ 的公共部分，而 $\triangle OCD$ 的内部可以看成 $\angle AOB$ 和 $\angle DCO$ 的公共部分，因此只要证明：当 M 点在 $\angle AOB$ 内部运动时，H 点亦在 $\angle AOB$ 内部运动，而且当 M 点在 $\angle ABO$ 内部运动时，H 点必在 $\angle DCO$ 内部运动；反之亦成立．这样，也可以知道 M 点在 $\triangle OAB$ 内部运动时，它所对应的 H 点的轨迹也是 $\triangle OCD$ 的内部．

〈证法一〉 设 $\triangle OAB$ 是已知三角形，M 是 AB 边上一点．P 和 Q 分别是由 M 点到 OA 和 OB 的垂线的垂足，C 和 D 分别是由 A 到 OB 和由 B 到 OA 的垂线的垂足，K 是由 P 到 OB 的垂线的垂足，S 是 KP 和 CD 的交点，连接

QS，延长 QS 与 OA 相交于点 T（如图 7—3）。

可以证明，对于 AB 上任一点 M，恒有 $QT\perp OA$，并且 S 即 H，是 $\triangle OPQ$ 中所作的高的交点.

事实上，因为 KP 交 $\triangle OCD$ 的边或其延长线于点 K、S 和 P. 根据门涅劳斯定理，有

$$\frac{\overline{DS}\cdot\overline{CK}\cdot\overline{OP}}{\overline{SC}\cdot\overline{KO}\cdot\overline{PD}}=1,$$

于是
$$\frac{\overline{DS}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{KO}}{\overline{CK}}\cdot\frac{\overline{PD}}{\overline{OP}}.$$

又根据"平行线截得比例线段"定理，有

$$\frac{\overline{KO}}{\overline{CK}}=\frac{\overline{OP}}{\overline{PA}},$$

所以
$$\frac{\overline{DS}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{OP}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PD}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{PD}}{\overline{PA}}.$$

类似地，由 $\frac{\overline{PD}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{BM}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}}$，可得

$$\frac{\overline{DS}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}}.$$

由此，在 $\triangle BCD$ 中不难得到 $QS\parallel BD$，亦即 $QT\parallel BD$. 从而 $QT\perp OA$，即 $\overline{QT}$ 是 $\triangle OPQ$ 的高. 于是 S 为高 PK 和 $\overline{QT}$ 之交点，S 与 H 重合，故垂心 H 在线段 CD 上.

从作图知道，线段 AB 上每一点 M 仅作出线段 CD 上的一点 H；另一方面，线段 CD 上的每一点也仅对应于线段 AB 上的一点. 即线段 AB 的点集和线段 CD 的点集之间存在着一一对应关系.

综上所述，所求的点 H 的几何轨迹是线段 CD.

b) 若 M 是 $\triangle OAB$ 的一个内点，过 M 作 $A'B' \parallel AB$，且分别交 OA、OB 于 A'、B'（图 7—4）．又设 C'、D' 分别是由 A' 到 OB 和由 B' 到 OA 的垂线的垂足．于是问题就变成上述的情形 a）．

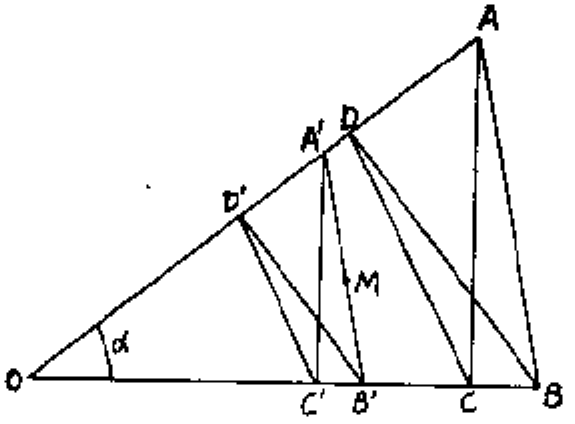


图 7—4

通过作图，线段 $A'B'$ 的一个内点只能作出线段 $C'D'$ 的一个内点；另一方面，线段 $C'D'$ 的每一个内点也只对应于线段 $A'B'$ 的一个内点，即线段 $A'B'$ 的内点的集合和线段 $C'D'$ 的内点的集合之间存在着一一对应关系．现在考察和 AB 平行的线段 $A'B'$ 的集合，其中 A' 和 B' 分别是线段 OA 和 OB 的内点，于是这集合与平行于 CD 的线段 $C'D'$ 的集合之间存在着一一对应关系，其中 C' 和 D' 分别是线段 OC 和 OD 的内点，也就是 $\triangle OAB$ 内点的集合与 $\triangle OCD$ 内点的集合之间存在着一一对应关系（根据我们的作图，两个不同的线段 $C'D'$ 和 $C''D''$ 也对应两个不同的线段 $A'B'$ 和 $A''B''$）．

所以，在这种情形下，所求的点 H 的几何轨迹是 $\triangle OCD$ 的内部．

〈**证法二**〉 如图 7—5 所建立的直角坐标系，设 $\triangle AOB$ 是锐角三角形（当 $\angle OAB$ 或 $\angle ABO$ 为直角或钝角时，证明完全类似），$|OA|=a$，$|OB|=b$，作 $AC\perp OB$，$BD\perp OA$，连结 CD，那么 A、B、C、D 各点的坐标分别为：

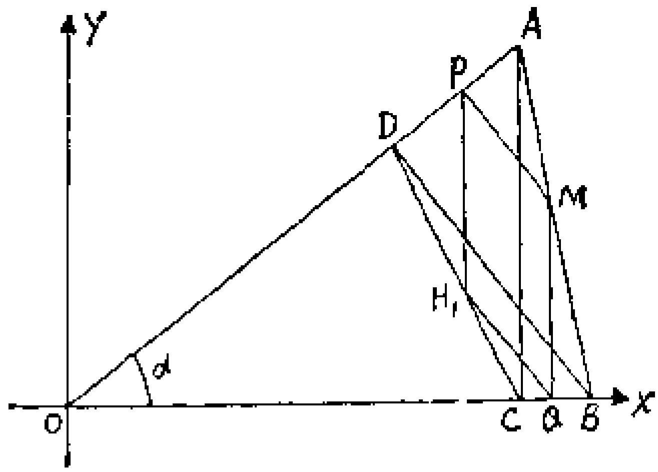


图 7—5

$A(a\cos\alpha,\ a\sin\alpha)$，$B(b,\ 0)$，

$C(a\cos\alpha,\ 0)$，$D(b\cos^2\alpha,\ b\sin\alpha\cos\alpha)$.

直线 OA 的方程为 $y=x\operatorname{tg}\alpha$, (1)

直线 AB 的方程为

$$y=\frac{a\sin\alpha}{a\cos\alpha-b}x-\frac{ab\sin\alpha}{a\cos\alpha-b}, \tag{2}$$

直线 CD 的方程为

$$y=\frac{b\sin\alpha}{b\cos\alpha-a}x-\frac{ab\sin\alpha\cos\alpha}{b\cos\alpha-a}. \tag{3}$$

a) 当 M 点在 $\overline{AB}$ 上运动时，H 的轨迹为 $\overline{CD}$.

事实上，设 M 点的坐标为 $(x_0,\ y_0)$，则 Q 点的坐标为 $(x_0,\ 0)$. 直线 MP 的方程为

$$y-y_0=-(x-x_0)\operatorname{ctg}\alpha. \tag{4}$$

解(1)和(4)的联立的方程组，并利用 M 点在 $\overline{AB}$ 上的条件，即

$$y_0=\frac{a\sin\alpha}{a\cos\alpha-b}x_0-\frac{ab\sin\alpha}{a\cos\alpha-b},$$

得 P 点的横坐标为

$$\frac{a\cos\alpha-b\cos^2\alpha}{a\cos\alpha-b}x_0-\frac{ab\sin^2\alpha\cos\alpha}{a\cos\alpha-b}.$$

所以，直线 PH 的方程为

$$x=\frac{a\cos\alpha-b\cos^2\alpha}{a\cos\alpha-b}x_0-\frac{ab\sin^2\alpha\cos\alpha}{a\cos\alpha-b},\tag{5}$$

直线 QH 的方程为

$$y=-(x-x_0)\operatorname{ctg}\alpha.\tag{6}$$

解(5)和(6)联立的方程组，得

$$y=\frac{b\sin\alpha}{b\cos\alpha-a}x-\frac{ab\sin\alpha\cos\alpha}{b\cos\alpha-a},$$

而这正是 CD 的方程，由此可知 H 点在线段 CD 上。

反之，在 $\overline{CD}$ 上任取一点 $H_1(x_1, y_1)$，如图 7—5，得到 M 点，类似上面的方法亦可证得 M 点在线段 AB 上。

b）首先来证明，当 M 点在 $\angle AOB$ 内运动时，H 点也在 $\angle AOB$ 内运动。

事实上，由于 M 点在 $\angle AOB$ 内，其坐标 (x_0, y_0) 必满足

$$0\leqslant y_0\leqslant x_0\operatorname{tg}\alpha,\tag{7}$$

容易求得 P 点的横坐标为 $y_0\sin\alpha\cos\alpha+x_0\cos^2\alpha$，所以 PH 的方程为

$$x=y_0\sin\alpha\cos\alpha+x_0\cos^2\alpha.\tag{8}$$

解(6)和(8)联立的方程组，并利用条件(7)，得

$$0\leqslant y\leqslant x\operatorname{tg}\alpha,$$

由此可知 H 点也在 $\angle AOB$ 内运动。

下面再来证明，当 M 点在 $\angle ABO$ 内运动时，H 点在 $\angle DCO$ 内运动。

事实上，点 $M(x_0, y_0)$ 的坐标满足

$$0 \leqslant y_0 \leqslant \frac{a\sin\alpha}{a\cos\alpha - b}x_0 - \frac{ab\sin\alpha}{a\cos\alpha - b}, \tag{9}$$

解(6)和(8)联立的方程组，并利用条件(9)，得

$$y < \frac{b\sin\alpha}{b\cos\alpha - a}x - \frac{ab\sin\alpha\cos\alpha}{b\cos\alpha - a}. \tag{10}$$

因为 H 是 $\triangle OPQ$ 的垂心，所以它的纵坐标总满足

$$y \geqslant 0. \tag{11}$$

由(10)、(11)知道 H 点在 $\angle DCO$ 内.

反之，在 $\angle DCO$ 内任取一点 H，类似的可以证明它所对应的点 M 在 $\angle ABO$ 内.

由于 $\angle AOB$ 和 $\angle ABO$ 的公共部分是 $\triangle OAB$，$\angle AOB$ 和 $\angle DCO$ 的公共部分是 $\triangle OCD$. 于是我们就证明了当 M 点在 $\triangle OAB$ 内部运动时，H 点的几何轨迹是 $\triangle OCD$ 的内部.

【附注】 1. 门涅劳斯（Menelaus，是希腊数学家兼天文学家）定理：

设 K、S、P 分别是 $\triangle COD$ 三边 CO、CD、OD 或其延长线上的点（图 7—6），则它们共线的必要且充分条件是：

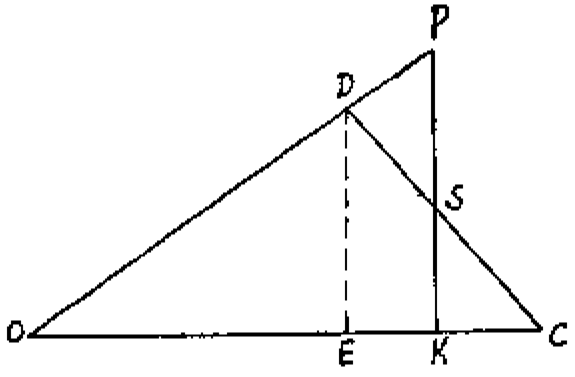


图 7—6

$$\frac{\overline{DS}}{\overline{SC}} \cdot \frac{\overline{CK}}{\overline{KO}} \cdot \frac{\overline{OP}}{\overline{PD}} = 1. \tag{11}$$

现对此定理证明如下：

首先，假定 K、S、P 共线. 过 D 作 $DE \parallel PK$，交

CO 于 E，则

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{KO}}{\overline{KE}},\quad \frac{\overline{DS}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{KE}}{\overline{CK}}.$$

故 $$\frac{\overline{DS}}{\overline{SC}}\cdot\frac{\overline{CK}}{\overline{KO}}\cdot\frac{\overline{OP}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{KE}}{\overline{CK}}\cdot\frac{\overline{CK}}{\overline{KO}}\cdot\frac{\overline{KO}}{\overline{KE}}=1.$$

其次，假定(11)成立．显然 $\frac{\overline{OP}}{\overline{PD}}\neq 1$，从而由(11)得

$$\frac{\overline{CK}}{\overline{KO}}\neq\frac{\overline{SC}}{\overline{DS}},$$

故连线 KS 必与 OD 相交，命交点为 P'．根据上面的证明，应有

$$\frac{\overline{DS}}{\overline{SC}}\cdot\frac{\overline{CK}}{\overline{KO}}\cdot\frac{\overline{OP'}}{\overline{P'D}}=1. \tag{12}$$

比较(11)和(12)，得

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{P'D}}=\frac{\overline{OP}}{\overline{PD}},$$

于是有：$\frac{\overline{OP'}-\overline{P'D}}{\overline{P'D}}=\frac{\overline{OP}-\overline{PD}}{\overline{PD}}$，$\frac{\overline{OD}}{\overline{P'D}}=\frac{\overline{OD}}{\overline{PD}}$，

可见 P' 与 P 重合．这就证明了 K、S、P 三点共线．

上述定理，对共线点问题的证明很有用处．例如，在证法一中(图 7—3)，作 $ST\perp OA$，垂足为 T，连结 QS，则容易证明 $\frac{\overline{CS}}{\overline{SD}}\cdot\frac{\overline{DT}}{\overline{TO}}\cdot\frac{\overline{OQ}}{\overline{QC}}=1$．于是由门涅劳斯定理知，$Q$、$S$、$T$ 三点共线， 从而 $QT\perp OA$， 即 $\overline{QT}$ 是 $\triangle OPQ$ 的高，故 S 与 H 两点重合，这样亦可证得垂心 H 在线段 CD 上．

2. 题目中的条件 $\angle AOB=\alpha(<90°)$，可以作如下推广：

1) $\alpha=90°$ 时，当 M 点在 $\overline{AB}$ 上和 $\triangle OAB$ 内运动时，

显然 H 点的几何轨迹都是一点 O；

2) $90^{\circ}<\alpha<180^{\circ}$ 时，类似的可以证明：当 M 点在 $\overset{\frown}{AB}$ 上和 $\triangle OAB$ 内运动时，H 点的几何轨迹是在 $\triangle OAB$ 外面的 $\triangle OCD$.

第 六 题 (波兰命题)

在平面上有 $n(\geqslant 3)$ 个点，设其中任意两点的距离的最大值为 d. 我们称距离为 d 的两点间的连线段为该点集的直径. 证明：直径的数目至多 n 条.

【分析】 首先必须弄清点集的直径这一概念. 我们知道，平面上两个点之间恰有一条相连线段，因此，由两个点组成的点集有且仅有一条直径. 设平面上有 $n(\geqslant 3)$ 个点，则它任意两个点之间的连线段总共有 C_n^2 条，而其中至少有一条最长的，其长度记为 d. 两点间的连线段，凡长度为 d 者就称为点集的一条直径. 由此可见，直径实质上刻画了平面点集分布的最大幅度.

显然，平面上 $n(\geqslant 3)$ 个点所组成的点集至少有一条直径. 本题所要解决的是直径数目的上界问题，证明直径至多只有 n 条.

要解决这个问题，可以从特例出发，比如 $n=3$ 的情形，然后对一般结论用数学归纳法证明. 为此，首先来考察 $n=3$ 的情形：

如图 7—7，假定 AB 为这三点组成的点集的直径，分别以 A 和 B 为圆心，点集直径 d 为半径画两个圆弧，交点为 P 和 Q. 根据点集直径的概念，第三个点 C 显然不可能分布在两圆的公共部分（包括边界的阴影部分）的外边.

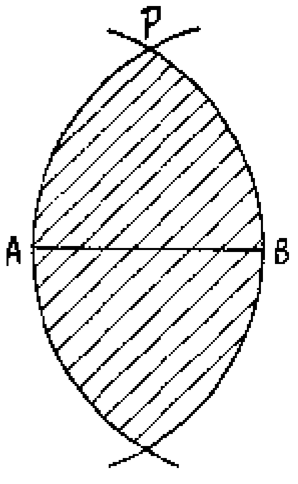


图 7—7

并且，i）若C点在内部，则点集A、B、C只有一条直径AB；ii）若C点在边界圆弧上（不和P或Q重合），则点集A、B、C只有两条直径；iii）若C点和P或Q重合，则点集A、B、C有三条直径，这时ABC组成正三角形．因此，当$n=3$时命题成立．

按照数学归纳法的步骤，要从假定平面上K个点的点集至多有K条直径的结论成立，推出$K+1$个点的点集至多有$K+1$条直径。

我们看到，若能证明任何$K+1$个点的点集中至少有一个点，由它至多只能引出一条直径，那么，除去这点以后所剩的K个点的集合，由归纳假定至多有K条直径，因此，这$K+1$个点的点集总共至多有$K+1$条直径，于是问题就解决了．但是，从上面$n=3$的第 iii）种情形知道，还可能点集中的每一个点都能引出两条直径，而这时$K+1$个点总共也只有$\frac{2(K+1)}{2}=K+1$条直径．如果还有其他情况，我们就无法肯定$K+1$个点的点集至多有$K+1$条直径了．因此，必须排除其他情况，即必须证明：

平面上任何$K+1$个点的点集，或者其中至少有一个点，由它至多能引出一条直径；或者从其中每一点至多能引出两条直径．不可能有其他情形．

上面这一结论，容易从反面证明，于是问题就得到解决．

〈证明〉 先证明一个引理：对于平面上 $n(\geqslant 3)$ 个点所组成的点集，只有两种可能情形：或者是在点集中至少存在一个这样的点，从这点至多能引出一条直径；或者从其中每一点至多能引出两条直径．

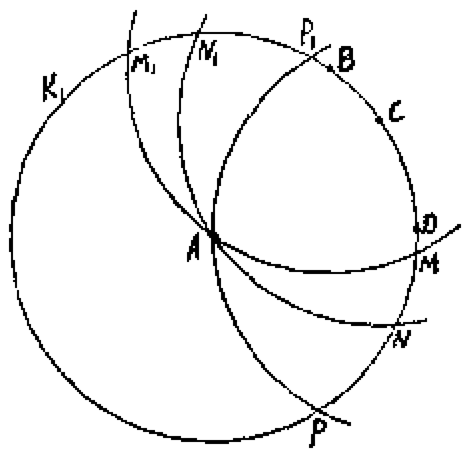


图 7—8

假设由该点集的一点 A 出发，引出了三条直径 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$、和 $\overline{AD}$（如图 7—8）．显然 B、C 和 D 三点都在以 A 为中心，d 为半径的圆 K_1 上．不失一般性，设 C 为 $\widehat{BD}$ 的内点，则该点集的所有其他的点只能在圆 K_1 上或者在 K_1 内．又线段 $\overline{BC}$、$\overline{BD}$ 和 $\overline{CD}$ 至多等于 d，所以 $\widehat{BCD}<\frac{\pi}{3}$．现在我们分别以 B、C 和 D 为圆心，以 d 为半径画弧 $\widehat{MAM_1}$，$\widehat{NAN_1}$ 和 $\widehat{PAP_1}$，于是就可以进一步断定，该点集的所有其他的点只能位于由弧 $\widehat{MP_1}$，$\widehat{AP_1}$ 和 $\widehat{AM}$ 所围成的曲边三角形之内或其周界上．

又由 C 点引出的该点集的所有直径，它的另一端点只能在 $\widehat{NAN_1}$ 上，但此时除点 A 之外，$\widehat{NAN_1}$ 的一切点均在曲边三角形 MAP_1 的外部，所以 $\overline{CA}$ 是由 C 引出的唯一直径．

下面，我们用数学归纳法证明本题．

当 $n=3$ 时，命题显然成立；

假定对 K 个点（自然数 $K\geqslant 3$）命题是成立的，则对 $K+1$ 个点命题亦成立．

事实上，我们来考察由 $K+1$ 个点组成的点集 A_1，A_2，

…, A_{K+1}，由证明的引理知道，它只有两种可能情形：

若其中有一点，不妨设为 A_1，由这点至多能引出一条直径，那么余下的由 A_2，A_3，…，A_{K+1} 等 K 个点所组成的点集，根据归纳假定，它至多能引 K 条直径．因而加上由 A_1 引出的直径，至多 $K+1$ 条（这里我们把点集 A_1, A_2, …, A_{K+1} 中所有不是由 A_1 引出的直径看成为点集 A_2, A_3, …, A_{K+1} 的直径）．

若其中不存在这样的点，那么由每一个点 $A_i(1\leqslant i\leqslant K+1)$ 至多能引出两条直径．于是，属于该点集的直径数至多为

$$N=\frac{2(K+1)}{2}=K+1(\text{条})．$$

综上所述，命题得证．

【附注】 1．这是本届比较困难的一道题目．首先是因为在初等数学中，我们只知道圆的直径，而对点集的直径概念很陌生；另外解答这道题，虽然只涉及到数学归纳法和一点圆弧知识，但它需要较强的分析问题的能力，否则就很难一步一步将问题最后归结为证明引理．发现和证明引理的结论是本题的关键．因此，它不失为训练和提高学生分析问题、解决问题能力的好题．

2．由本题证明的结论，我们得到平面上有限点集的一个重要性质：若该点集由 n（$\geqslant 2$）个点组成，则它的直径数目 N 满足不等式

$$1\leqslant N\leqslant n．$$

请读者想想看：

数轴上的有限点集的直径数目有多少？

对于空间中的类似问题，结果如何？

第八届国际中学生数学竞赛试题分析与解答

1966 年在保加利亚举行

第 一 题 (苏联命题)

在一次中学数学竞赛中共出了 A、B、C 三道试题. 在所有 25 个参加的学生中, 每个学生至少解出其中一道题. 未解出试题 A 的学生中, 解出 B 题的人数等于解出 C 题的人数的两倍. 解出 A 题的学生中, 只能解出 A 题的学生人数, 比除了解出 A 题之外, 同时还解出其它问题的人数多 1. 另外, 只解出一道题的学生中, 有一半人未解出试题 A. 问有多少学生只解出试题 B?

【分析】 这是一道关于代数方程组的应用题, 通过设未知数: X_A、X_B、X_C、X_{AB}、X_{AC}、X_{BC}和 X_{ABC} 是这样的学生数, 他们解决、而且只解决附标所表示的试题, 根据题意就可以列出方程组

$$\begin{cases} X_A + X_B + X_C - X_{AB} + X_{AC} + X_{BC} + X_{ABC} = 25, \\ X_B - 2X_C - X_{BC} = 0, \\ -X_A + X_{AB} + X_{AC} + X_{ABC} = -1, \\ X_A - X_B - X_C = 0. \end{cases}$$

这是一个含有 7 个未知数 4 个方程的线性方程组. 问题要求出它的非负整数解中的 X_B.

通过消元，将 X_B 用含有另外一个未知数的表达式表示出来，得到

$$X_B=\frac{26-X_C}{4} \text{和} X_B=\frac{52+X_{BC}}{9}.$$

由这两个式子就可以估算出 X_B 的上界和下界，从而求得 $X_B=6$. 再代回原方程去验算，就可知道它是问题的解答.

〈解答〉 设 X_A、X_B、X_C、X_{AB}、X_{AC}、X_{BC} 和 X_{ABC} 是这样的学生数，它们解出、而且只解出附标所表示的试题. 由题意列出下面的四个方程：

$$\begin{cases} X_A+X_B+X_C+X_{AB}+X_{AC}+X_{BC}+X_{ABC}=25, & (1)\\ X_B-2X_C-X_{BC}=0, & (2)\\ -X_A+X_{AB}+X_{AC}+X_{ABC}=-1, & (3)\\ X_A-X_B-X_C=0. & (4) \end{cases}$$

我们的目的是要求出上述方程组的非负整数解.

由(1)－(3)，得

$$2X_A+X_B+X_C+X_{BC}=26. \qquad (5)$$

(5)＋(2)－2(4)，得：

$$4X_B+X_C=26, \quad X_B=\frac{26-X_C}{4} \qquad (6)$$

或
$$X_C=26-4X_B. \qquad (7)$$

将(7)代入(2)消去 X_C，又得

$$X_{BC}-9X_B+52=0, \ X_B=\frac{52+X_{BC}}{9}. \qquad (8)$$

因为 $X_C\geqslant0$，$X_{BC}\geqslant0$，所以由(6)和(8)分别得

$$X_B\leqslant\frac{26}{4}=6\frac{1}{2}, \ X_B\geqslant\frac{52}{9}=5\frac{7}{9}.$$

而 $5\frac{7}{9}$ 与 $6\frac{1}{2}$ 之间的整数只有 6，因此只可能有 $X_B=6$.

将 $X_B=6$ 代回原方程组，通过计算求得方程组的一组解是：

$$X_A=8,\ X_B=6,\ X_C=2,\ X_{AB}=3,\ X_{AC}=2,$$
$$X_{BC}=2,\ X_{ABC}=2,$$

即 6 是方程组的非负整数解中的 X_B 的值，符合题意.

所以，有 6 个学生只解出试题 B.

【附注】 1. 一般情况下，含有 7 个未知数，而方程只有 4 个的线性方程组，由于未知数的个数多于方程的个数，所以有无穷多组解. 但由题意，学生人数不超过 25，所以本题的方程组的非负整数解只可能有有限多组.

2. 由题意知 $0\leqslant X_B\leqslant 25$，这个范围当然太宽，我们要一一验算其中的整数是否符合题目要求就很费事. 本题解法的主要思想是用消元法先将 X_B 求出，（当然这样求出的 X_B 是依赖于另外一些未知数的），然后再估出 X_B 的尽可能小的界. 解法的细节当然不止一种. 例如，在求得

$$4X_B+X_C=26$$

或

$$X_B=\frac{26-X_C}{4}$$

后，由第二式就可估出 $X_B\leqslant 6$；再由原方程组中的一个方程

$$X_B-2X_C-X_{BC}=0,$$

估得

$$2X_C\leqslant X_B\leqslant 6.$$

于是，由第一式就立即得到：$X_C=2$，$X_B=6$.

3. 在本题的解答过程中，当求得 $X_B=6$ 时，只能说明它可能是一个解，更不能肯定它是方程组非负整数解中的 X_B 的值. 所以，必须将 $X_B=6$ 代回原方程组，求出所有其它未知数的值，若都是非负整数，才是题目所要求的解. 这一过

程不可漏掉.

第 二 题 （匈牙利命题）

设一个三角形 ABC 的边长分别为 a、b、c，其相对的角为 α、β、γ，且满足条件 $a+b=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta)$，求证该三角形是等腰的.

【分析】 要证明ΔABC是等腰三角形，容易看出：就是要根据题目给出的条件

$$a+b=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta),$$

证明 $\alpha=\beta$ 或 $a=b$.

利用正弦定理$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$和三角形三内角和的定理，可以把上式变为只含有 α 和 β 的方程，由这方程就可以证得 $\alpha=\beta$.

亦可以利用关系式

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2},$$

将题目给出的条件化为关于 a、b、α、β 的方程，然后由这方程证明 $a=b$ 或 $\alpha=\beta$.

〈证法一〉 对于三角形 ABC 的三内角，有

$$0<\alpha,\ \beta,\ \gamma<\pi,\ 且\ \alpha+\beta+\gamma=\pi; \qquad (1)$$

又由

$$a+b=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta) \qquad (2)$$

知，α 和 β 必不等于$\frac{\pi}{2}$.

根据正弦定理$a=b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$，由 (1) 又得

$$\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

代入(2)，得到

$$\sin\alpha+\sin\beta=\mathrm{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}\right).$$

因 $0<\alpha$，$\beta<\pi$，即 $\alpha-\beta\neq\pi$，所以

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta},$$

因此

$$(\sin\alpha+\sin\beta)^2=(\cos\alpha+\cos\beta)\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}\right),$$

即 $$2\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin^2\beta+\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\sin^2\alpha.$$

将上式变形，得：

$$2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\beta\cos\beta=\cos^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta,$$

$$(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)^2=0,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=0.$$

所以 $\alpha=\beta$，即 ΔABC 是等腰三角形.

〈证法二〉 因 α，β，γ 是 ΔABC 的内角，所以

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi,$$

因此 $$\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}=\mathrm{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

代入关系式(2)得

$$a+b=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(a\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+b\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right).$$

移项、去分母，得

$$a\left(\cos\alpha\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta-\sin\alpha\cos\beta\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$=b\left(\sin\beta\cos\alpha\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\alpha\cos\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

或 $$a\cos\beta\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)=b\cos\alpha\sin\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

即 $$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}(a\cos\beta-b\sin\alpha)=0.$$

由此知 $\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=0$，因而得 $\alpha=\beta$；或者

$a\cos\beta-b\cos\alpha=0$，即 $a\cos\beta=b\cos\alpha$. 两边平方，得

$$a^2\cos^2\beta=b^2\cos^2\alpha.$$

再由正弦定理知 $a\sin\beta=b\sin\alpha$，又将此式两边平方后和上式相加，就得到：

$$a^2=b^2，\text{即 } a=b.$$

所以ΔABC是等腰三角形.

【附注】 1. 这是一道平面几何与三角的综合题. 在证明中，利用三角形三内角和的定理使含有三角形三个内角的关系式化简为仅含两个内角的关系式，从而达到减元的目的. 这种方法，在进行关于三角形三内角的三角函数式的变形中，常常用到. 本题虽然不难，但涉及到正弦定理和其它一些三角函数式的基本恒等变形的知识，因而不失为学生练习的好题.

2．我们容易验证，在ΔABC中，当$\alpha=\beta$时，关系式(2)

$$a+b=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta)$$

成立．于是，和本题证明的结论合在一起就得到：在ΔABC中，当且仅当关系式(2)成立时，有$\alpha=\beta$．

由此还可以进一步得到：ΔABC是等边三角形的必要充分条件是关系式

$$a+b=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta)$$

和 $$b+c=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(b\operatorname{tg}\beta+c\operatorname{tg}\gamma)$$

同时成立．

第 三 题 (保加利亚命题)

试证：正四面体的外接球的中心到四面体的四个顶点距离之和，小于空间中其他任一点到这四个顶点的距离之和．

【分析】 这是一个立体几何问题，空间中的正四面体和平面上的正三角形相"类似"，所以我们先来考察平面上的类似问题：

正三角形ABC的外接圆的中心O到三个顶点距离之和，小于平面上其他任一点到这三个顶点距离之和（图8—1）．

假若我们作正三角形ABC的外接正三角形$A'B'C'$，它的三边分别平行于ΔABC的三边．连结OA、OB、OC，

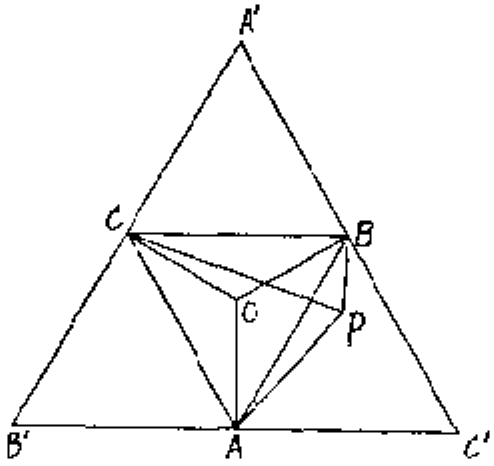


图8—1

容易知道，$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、OC恰好是中心O到正三角形$A'B'C'$三边的距离.

设P为$\Delta A'B'C'$内的任一点，利用面积关系式

$$\Delta OA'B'\text{面积}+\Delta OA'C'\text{面积}+\Delta OB'C'\text{面积}=\Delta A'B'C'\text{面积}.$$

就可以知道，P点到$\Delta A'B'C'$各边的距离之和总是等于$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$. 而线段$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$不全垂直于$\Delta A'B'C'$的各对应边,所以$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$必然大于$P$点到$\Delta A'B'C'$各边距离之和，因此

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}>\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}.$$

若P点在$\Delta A'B'C'$的外部，显然这不等式更成立.

将上述证明方法“移植”到空间中去，就可以证明本题.

〈证明〉 为了简化问题的证明过程，先证明两个引理.

<u>引理1</u> 由正四面体$A'B'C'D'$内的任意一点P，到该四面体各个面的垂线的长之和，等于这四面体的高h.

<u>证</u> 如图8—，因为四个小四面体$A'B'C'P$, $A'B'D'P$, $A'C'D'P$和$B'C'D'P$的体积之和等于四面体$A'B'C'D'$的体积. 而四个小四面体的底面积都相等，记为G，它们的高分别等于由P点到四面体$A'B'C'D'$各面的垂线长h_1、h_2、h_3和h_4. 设h为四面体$A'B'C'D'$的高，则由

$$\frac{1}{3}Gh_1+\frac{1}{3}Gh_2+\frac{1}{3}Gh_3+\frac{1}{3}Gh_4=\frac{1}{3}Gh,$$

得 $$h_1+h_2+h_3+h_4=h.$$

当 P 点在正四面体 $A'B'C'D'$ 的边界面时，引理 1 显然成立.

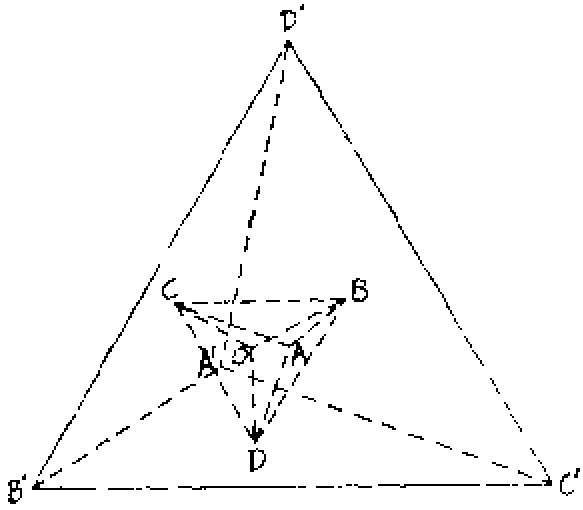


图 8—2

引理 2　若 P 点在正四面体 $A'B'C'D'$ 的外部，则有

$$h_1+h_2+h_3+h_4>h.$$

证　四面体 $A'B'C'D'$ 的底面积和四面体 $A'B'C'P$，$A'B'D'P$，$A'C'D'P$，$B'C'D'P$ 的底面积都等于 G. 但所讲的后面的四个四面体体积之和显然大于四面体 $A'B'C'D'$ 的体积，即

$$\frac{1}{3}Gh_1+\frac{1}{3}Gh_2+\frac{1}{3}Gh_3+\frac{1}{3}Gh_4>\frac{1}{3}Gh,$$

所以
$$h_1+h_2+h_3+h_4>h.$$

两个引理至此全部证毕.

现在来证明本题的结论.

作四面体 $A'B'C'D'$ 外接于已知的正四面体 $ABCD$，且四面体 $A'B'C'D'$ 和四面体 $ABCD$ 对应的面互相平行，点 A、B、C、D 分别在 $A'B'C'D'$ 的面上.

显然，这两个四面体是相似的，所以 $A'B'C'D'$ 也是一个正四面体.

四面体 $ABCD$ 的各高线相交于一点，这一点和该四面体的外接球的球心 O 重合. 线段 $\overline{OA}$，$\overline{OB}$，$\overline{OC}$ 和 $\overline{OD}$ 是 O 点到四面体 $A'B'C'D'$ 各面的距离. 根据引理 1，它们的和应等于四面体 $A'B'C'D'$ 的高，即

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=h.$$

我们再来考察，在四面体 $A'B'C'D'$ 内或面上的任意一点 P(除 O 点外)，因为线段$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$、$\overline{PD}$ 都分别不比由 P 点到四面体 $A'B'C'D'$ 的相应的边界面的垂线短，而 P 点到四面体 $A'B'C'D'$的各面的垂线长之和等于 h，所以有

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}>\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}.$$

根据引理 2，对于四面体 $A'B'C'D'$ 外的任意一点 P，上述不等式更成立. 证毕.

【附注】 1. 一般立体问题，往往比平面上类似的问题复杂，因此，通常可以先考察平面上的类似问题，由此发现有用的结果和方法，然后再应用到需要解决的问题上去. 这是一种常用的解题方法，我们称为类比法.

2. 本题的证明方法，关键在于想到作一个辅助的外接正四面体 $A'B'C'D'$，从面使问题发生转化. 其实，在初中平面几何中，证明三角形三条高相交于一点时，已作过类似的辅助图形.

第 四 题 (南斯拉夫命题)

求证：对任一自然数 n 和任一实数 x ($x\neq\frac{N\pi}{2^k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$；N 是任一整数)，有

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2^n x.$$

【分析】 要证明的等式左边是级数

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x} \qquad (1)$$

的前 n 项之和，如何求这个和？可以应用"拆项"的方法．这个方法就是：首先设法找出这样一个数列$\{b_n\}$，使得级数(1)的通项 $a_k=\frac{1}{\sin 2^k x}$ 可以表示为

$$a_k=b_k-b_{k-1}. \tag{2}$$

然后在(2)式中令 $k=1,2,\cdots,n$，将所得的表达式分别代入(1)式中，正负项相消，就可求出它的和，即

$$\begin{aligned}a_1+a_2+\cdots+a_n&=b_1-b_0+b_2-b_1+\cdots+b_n-b_{n-1}\\&=b_n-b_0.\end{aligned} \tag{3}$$

数列$\{b_n\}$一般是不大好求的．但我们把需要证明的等式的右边和(3)式的右边比较，容易发现 b_n 的形式可能为

$$b_n=-\operatorname{ctg}2^n\cdot x.$$

将它代入(2)中，于是问题就变成验证等式

$$\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg}2^{n-1}\cdot x-\operatorname{ctg}2^n x$$

成立，而这用三角函数式的恒等变形可以解决．

〈证明〉 显然，对于任一实数 $\alpha\left(\alpha\neq\frac{N\pi}{2}\right.$；$N$ 是任一整数)，下式成立

$$\operatorname{ctg}2\alpha+\frac{1}{\sin 2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha+1}{\sin 2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha,$$

即

$$\frac{1}{\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha. \tag{4}$$

注意到 $2^k x\neq N\pi\ (k=0,1,2,\cdots,N)$，于是在(4)中作代换 $\alpha=2^{k-1}x$，得

$$\frac{1}{\sin 2^k x}=\alpha\operatorname{tg}2^{k-1}x-\operatorname{ctg}2^k x. \tag{5}$$

在(5)中，分别令 $k=1,2,\cdots,n$，得

$$\frac{1}{\sin 2x}=\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2x,$$

$$\frac{1}{\sin 4x}=\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}4x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg}2^{n-1}x-\operatorname{ctg}2^n x.$$

将上面各等式相加，就得到

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2^n x.$$

【附注】 1. 本题的证明关键是运用数列的拆项求和法，这一求和法的原则很容易理解，但困难的是如何求得数列$\{b_n\}$，使得已知数列的通项

$$a_n=b_n-bn-1.$$

这是一个简单的差分方程，求它的解b_n的过程，有点类似于积分法．希望进一步了解这些知识的读者，可以参看有关“有限差分计算”的书籍．

2. 本题是要证明和

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}$$

等于已知的表达式$\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2^n x$，因此，也可以说求和是“定向”的．在类似情况下，若要用到拆项求和法来证明问题，注意和的表达式对求出b_n将会有很大启发．一般的，若问题单纯要求出级数的和，而预先不知道和是什么，这时问题就难多了．

用拆项求和法来求某些级数的和，在中学数学中见得不多，但在高等数学的级数理论中经常碰到．因此，可以作为

中学数学课外活动的内容.

第 五 题 (捷克斯洛伐克命题)

解方程组

$$\begin{cases}|a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4=1,\\|a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4=1,\\|a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_4|x_4=1,\\|a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3=1.\end{cases}$$

其中a_1、a_2、a_3、a_4是已知的两两不相等的实数.

【分析】 这是一个四元一次方程组，它的系数都含有绝对值，并且容易看出有如下的特性：当下标 i 换为 k 和 k 换为 i 时，原方程组不变. 因此，我们可以首先考察系数之间的一种特殊情形，例如$a_1>a_2>a_3>a_4$，求出方程组的解，然后再通过交换下标，就可以得到其他情形方程组的解.

当 $a_1>a_2>a_3>a_4$ 时，容易将方程组的系数的绝对值去掉，得到一个不含绝对值的四元一次方程组，应用消元法就容易求出它的解来.

〈解答〉 当交换下标 i 为 k 和 k 为 i 时，原方程组不变，所以可设 $a_1>a_2>a_3>a_4$. 于是原方程组变为：

$$\begin{cases}(a_1-a_2)x_2+(a_1-a_3)x_3+(a_1-a_4)x_4=1, & (1)\\(a_1-a_2)x_1+(a_2-a_3)x_3+(a_2-a_4)x_4=1, & (2)\\(a_1-a_3)x_1+(a_2-a_3)x_2+(a_3-a_4)x_4=1, & (3)\\(a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_3-a_4)x_3=1. & (4)\end{cases}$$

(1) − (2)，得

$$(a_1-a_2)(x_2+x_3+x_4-x_1)=0, \tag{5}$$

(2) − (3)，得

$$(a_2-a_3)(-x_1-x_2+x_3+x_4)=0, \tag{6}$$

(3) − (4)，得

$$(a_3-a_4)(-x_1-x_2-x_3+x_4)=0. \tag{7}$$

根据题设条件，当 $i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j$，所以(5)、(6)、(7)可分别变形为：

$$x_2+x_3+x_4=x_1; \tag{8}$$

$$-x_2+x_3+x_4=x_1; \tag{9}$$

$$-x_2-x_3+x_4=x_1. \tag{10}$$

由(8)、(9)、(10)得

$$x_2=x_3=0,\quad x_1=x_4. \tag{11}$$

因为 $a_1\neq a_4$，所以从(1)和(11)得：

$$x_1=x_4=\frac{1}{a_1-a_4},\quad x_2=x_3=0.$$

方程(1)和(11)与方程组(1)—(4)是等价的．于是，对于 $a_1>a_2>a_3>a_4$ 的情形，原方程组有唯一的一组解：

$$x_1=x_4=\frac{1}{a_1-a_4},\quad x_2=x_3=0.$$

对于 a_i 之间的其他大小关系，若 $i, j, l,\ n=1, 2, 3, 4$，且 $a_i>a_j>a_l>a_n$．则

$$x_j=x_l=0,\qquad x_i=x_n=\frac{1}{a_i-a_n}.$$

【附注】 1．本题的解亦可用行列式来计算．但无论用那一种方法，若不注意利用所给方程组的特性，即交换下标(包括变数与系数)方程组不变，设法去掉系数的绝对值符号来进行求解，则最后得到解的表达式就比较复杂，并且不容易看出解与系数之间的简单关系．

2. 本题可以推广到n个未知数n个方程的方程组情形，解法类似. 对于系数的大小关系为$a_1>a_2>\cdots>a_n$时，得到的解为：

$$x_1=x_n=\frac{1}{a_1-a_n}, \quad x_2=x_3=\cdots=x_{n-1}=0.$$

对于a_i之间的其他大小关系，可以通过相应交换下标得到.

第 六 题 （波兰命题）

在ΔABC的三边AB，BC和CA上，分别有和顶点不重合的任意三点M,K和L. 试证：$\Delta LAM,\Delta MBK$和ΔKCL中至少有一个三角形的面积不大于ΔABC的面积的$\frac{1}{4}$.

【分析】 显然，无法证明具体那一个三角形的面积不大于ΔABC的面积的$\frac{1}{4}$. 因此我们来考察ΔLAM，ΔMBK和ΔKCL的面积的乘积与ΔABC的面积的大小关系. 假若我们能够证明不等式

$$S_{\Delta LAM}\cdot S_{\Delta MBK}\cdot S_{\Delta KCL}\leqslant\left(\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}\right)^3 \qquad (*)$$

成立，那么就立即知道，它们之中至少有一个三角形的面积不大于ΔABC的面积的$\frac{1}{4}$. 因若不然，

$$S_{\Delta LAM}>\frac{1}{4}S_{\Delta ABC},$$

$$S_{\Delta MBK}>\frac{1}{4}S_{\Delta ABC},$$

$$S_{\Delta KCL}>\frac{1}{4}S_{\Delta ABC},$$

必有 $$S_{\triangle LAM}\cdot S_{\triangle MBK}\cdot S_{\triangle KCL}>\left(\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}\right)^3$$

要证明不等式(*)成立，我们可以借助于三角形的边和角将ΔLAM，ΔMBK，ΔKCL和ΔABC的面积分别表示出来，然后比较

$$S_{\triangle LAM}\cdot S_{\triangle MBK}\cdot S_{\triangle KCL}\text{和}S_{\triangle ABC}$$

之间的大小．通过证明完全类似的三个简单的代数不等式，就可以得到不等式(*)．

〈证明〉 记$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CA}=c$，$\overline{KC}=k$，$\overline{LA}=l$，$\overline{MB}=m$，$\angle CAB=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$\angle BCA=\gamma$，并且它们满足：

$$0<k<a,\ 0<l<b,\ 0<m<c;\ 0<\alpha,\beta,\gamma<\pi.$$

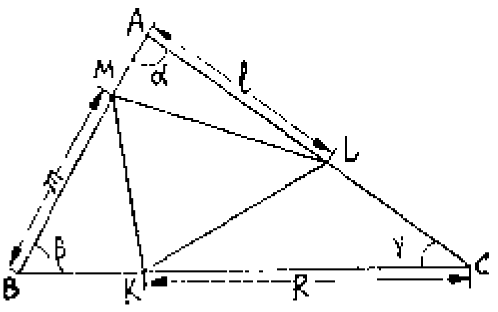


图 8—3

则对于各个三角形的面积有：

$$S_{\triangle LAM}=\frac{l}{2}(c-m)\sin\alpha,\quad(1)$$

$$S_{\triangle MBK}=\frac{m}{2}(a-k)\sin\beta,\quad(2)$$

$$S_{\triangle KCL}=\frac{k}{2}(b-l)\sin\gamma,\quad(3)$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma.\quad(4)$$

由(4)，得

$$(S_{\triangle ABC})^3=\frac{1}{8}a^2b^2c^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.\quad(5)$$

由(1)、(2)、(3)和(5)，得

$$\frac{S_{\triangle LAM}\cdot S_{\triangle MBK}\cdot S_{\triangle KCL}}{(S_{\triangle ABC})^3}=\frac{mkl(c-m)(a-k)(b-l)}{a^2b^2c^2}.\quad(6)$$

显然有 $m^2-cm+\frac{c^2}{4}=\left(m-\frac{c}{2}\right)^2\geqslant 0$,

即 $$m(c-m)\leqslant\frac{c^2}{4};$$

而 $$c>m,$$

所以 $$0<(c-m)m\leqslant\frac{c^2}{4}. \tag{7}$$

类似地可以得到：

$$0<(b-l)l\leqslant\frac{b^2}{4}. \tag{8}$$

$$0<(a-k)k\leqslant\frac{a^2}{4}. \tag{9}$$

(7)×(8)×(9)，得

$$mkl(c-m)(b-l)(a-k)\leqslant\frac{a^2b^2c^2}{4^3}.$$

于是由(6)就得到

$$S_{\triangle LAM}\cdot S_{\triangle MBK}\cdot S_{\triangle KCL}\leqslant\left(\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}\right)^3. \tag{10}$$

根据"分析"中所讲到的，由(10)即知：ΔLAM、ΔMBK、ΔKCL 中，至少有一个三角形的面积不大于 ΔABC 的面积的$\frac{1}{4}$.

【附注】 1. 本题证明方法，关键是应用一种更一般的"抽屉原则"(关于"抽屉原则"的简介，请读者参看《国际数学竞赛试题讲解Ⅰ》第二十届第六题的附注)：

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 b 都是正数，若

$$a_1\cdot a_2\cdots a_n\leqslant b^n, \tag{11}$$

则其中至少有一个 a_i，满足条件 $a_i\leqslant b$.

这个原则也很明显，可以用反证法来证明：

如果 $a_1>b$，$a_2>b$，…，$a_n>b$，
则将这些不等式相乘起来就得

$$a_1\cdot a_2\cdots a_n>b^n.$$

但这和(11)相矛盾.

若将不等式(11)中的"≤"换为"≥"，那么有什么结果？读者想想看.

2. 类似上面的，还有另一种形式的"抽屉原则"：若

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant nb, \tag{12}$$

则其中至少有一个 a_i，满足条件 $a_i\leqslant b$.

是否可以用(12)来证明本题呢？回答是肯定的，但必须分下面两种情形来证明：

i) 当 $\overline{BK}\leqslant\overline{KC}$，$\overline{CL}\leqslant\overline{LA}$，$\overline{AM}\leqslant\overline{MB}$ 时，不等式

$$S_{\triangle LAM}+S_{\triangle MBK}+S_{\triangle KCL}\leqslant 3\cdot\left(\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}\right) \tag{13}$$

成立.（当 $\overline{BK}\geqslant\overline{KC}$，$\overline{CL}\geqslant\overline{LA}$，$\overline{AM}\geqslant\overline{MB}$ 时证明类似.）

事实上，当 M，K，L 分别为 ΔABC 三边的中点时，有

$$S_{\triangle LMK}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}.$$

如果 M，K，L 不是 ΔABC 三边的中点，则由假设条件知道，$\overline{LK}$ 不平行于 $\overline{AB}$（参看图 8—3），且 $\overline{AB}$ 上的点愈向 B 点移动，它到 $\overline{LK}$ 的距离就愈小. 因此，当固定 $\overline{LK}$ 时，把 M 点向 $\overline{AB}$ 的中点移动，这时 ΔLMK 的面积不可能增加. 同样，把 L，K 都作相同的移动，最后使 M，K，L 都变到各边中点，所得的三角形的面积将不大于 ΔLMK 的面积，因此

$$S_{\triangle LMK}\geqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}.$$

由此就可以得到(13). 再根据本段开头所讲的,就知道,在这种情形下, ΔLAM, ΔMBK, ΔKCL 中, 至少有一个三角形的面积不大于 ΔABC 的面积的 $\frac{1}{4}$.

ii) 若点 M, K, L 不满足 i) 中的条件,不妨设 $\overline{BK} \geqslant \overline{KC}$, 而 $\overline{CL} \leqslant \overline{LA}$, $\overline{AM} \leqslant \overline{MB}$. 这时容易证明$\Delta KCL$ 的面积不大于 ΔABC 的面积的$\frac{1}{4}$.

综合以上两种情形的证明, 就得到本题的结论.

应该注意, 由本题所证明的不等式

$$S_{\triangle LAM} \cdot S_{\triangle MBK} \cdot S_{\triangle KCL} \leqslant \left(\frac{1}{4} S_{\triangle ABC}\right)^3,$$

还可以进一步将得到的结论加强为：或者所有的三个三角形的面积都等于$\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$; 或者它们之中至少有一个三角形的面积小于$\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$. 为什么？请读者想想看.

第九届国际中学生数学竞赛试题分析与解答

1967年在南斯拉夫举行

第　一　题 （捷克斯洛伐克命题）

在平行四边形 $ABCD$ 中，ΔABD 是锐角三角形，$\overline{AB}=a$，$\overline{AD}=1$，$\angle BAD=\alpha$，证明：以顶点 A、B、C、D 为圆心，作半径为 1 的四个圆 K_A、K_B、K_C、K_D，当且仅当

$$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

时，覆盖该平行四边形.

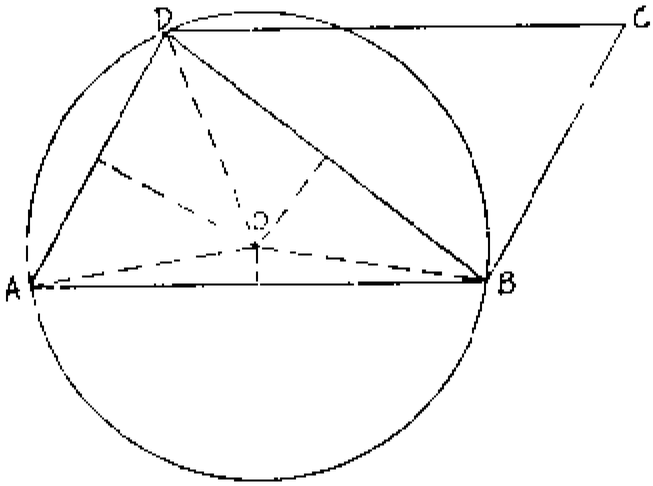


图 9—1

【分析】 由于任何一个平行四边形 $ABCD$ 都可以如图 9—1 所示的分成两个锐角三角形，并且，若三个半径为 1 的

圆 K_A、K_B、K_D 覆盖 ΔABD，那么由于中心对称性，圆 K_B、K_C、K_D 也覆盖 ΔBCD．因此，关于平行四边形 $ABCD$ 的覆盖问题就转化为关于锐角 ΔABD 的覆盖问题．

我们知道，锐角三角形 ABD 的外接圆的圆心 O 必在该三角形内，设外接圆的半径为 R，则 ΔABD 内的任一点 P 必和三角形的某一个顶点的距离不超过 O 点和顶点的距离 R．因此，若 $R\leqslant 1$，则 O 点被三个半径为 1 的圆 K_A、K_B、K_D 覆盖，因而 ΔABD 也被这三个圆覆盖；反之，若 $R>1$ 时，三个圆 K_A、K_B、K_D 都覆盖不住 O 点．这就说明，当且仅当 $R\leqslant 1$ 时，锐角 ΔABD 被圆 K_A、K_B、K_D 覆盖．

于是，问题就变为求证：在 $\overline{AD}=1$，$\overline{AB}=a$ 的锐角 ΔABD 中，当且仅当 $R\leqslant 1$ 时，

$$a\leqslant \cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha.$$

利用正弦定理和余弦定理，我们就可以证得这一结论．

另一种想法是：由于平行四边形 $ABCD$ 可以看作线段 $\overline{AD}$ 平行移动一定的距离 a 而成，因而圆 K_B、K_C 可以看作圆 K_A、K_D 沿着平行四边形的 AB 边和 DC 边平行移动距离 a 得到．如图 9—2 甲中，在 AB 和 DC 之间，而且又平行于它们的任一直线 l 和圆 K_A、K_D 有四个交点，最左边和最右边的交点分别记为 M 和 N．我们看到，对应于不同的直线 l，就得到不同的线段 $\overline{MN}$，而且它们当中必有最短的线段，如图 9—2 甲中的 $\overline{M_0N_0}$（或 $\overline{M_0'N_0'}$）．显然，当且仅当圆 K_A、K_D 平移的距离 a 不大于 M_0N_0 时，平行四边形 $ABCD$ 被圆 K_A、K_B、K_C、K_D 覆盖．

当 $\alpha\geqslant 60^\circ$ 时，M_0N_0 在平行线 AB 和 CD 之间，或在它们之上，这时容易求得

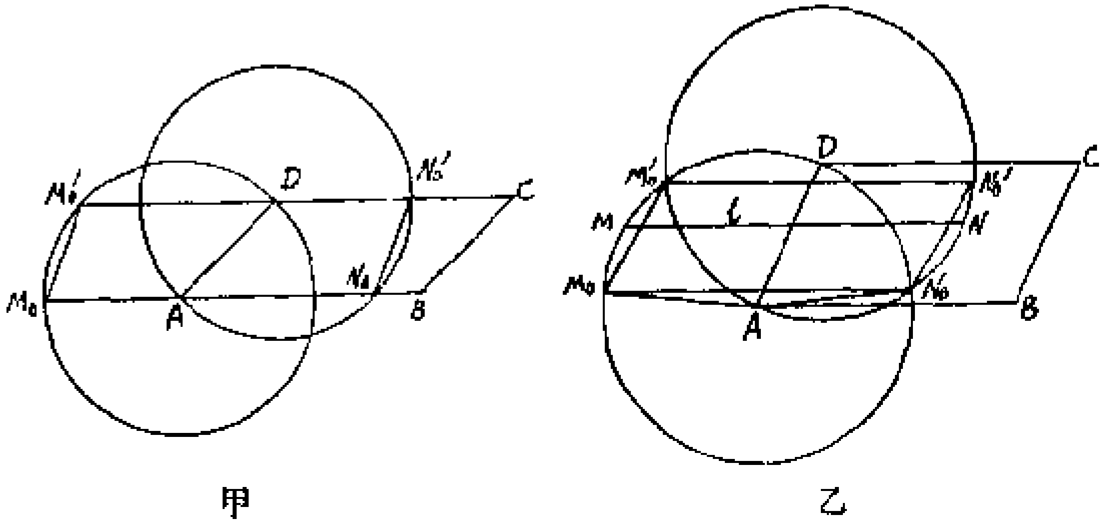


图 9—2

$$M_0N_0 = \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha.$$

因此，在这种情况下，当且仅当

$$a \leqslant \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$$

时，平行四边形 $ABCD$ 被圆 K_A、K_B、K_C、K_D 覆盖；

当 $\alpha < 60°$ 时，情况较为复杂．这时 M_0N_0 在平行线 AB 或 CD 上，容易求得

$$M_0N_0 = 1 + 2\cos\alpha \geqslant 1 + 2\cos 60° = 2$$
$$\geqslant 2\cos(60° - \alpha) = \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha.$$

因此，当 $a \leqslant \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$ 时，平行四边形 $ABCD$ 被圆 K_A、K_B、K_C、K_D 覆盖；反之，若平行四边形 $ABCD$ 被这四个圆覆盖，再加上题设的条件——ΔABD 是锐角三角形，我们就可以求得 $a < \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$.

这就是说，在 ΔABD 是锐角三角形的条件下，当且仅当

$$a \leqslant \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$$

时，圆 K_A、K_B、K_C、K_D 覆盖平行四边形 $ABCD$.

〈证法一〉　如图 9—1，作锐角 ΔABD 的外接圆，显然，

它的圆心 O 必在 ΔABD 中，且点 C 必在圆 O 的外面．首先来证：当且仅当圆 O 的半径 $R\leqslant 1$ 时，平行四边形 $ABCD$ 能被圆 K_A、K_B、K_C、K_D 所覆盖．

事实上，当 $R\leqslant 1$ 时，在图 9—1 中，连接 AO、BO、DO，并过 O 作各边的垂线，把 ΔABD 分成六个直角三角形，ΔABD 中任一点 P 必在某一直角三角形中，它与相应顶点的距离 $R\leqslant 1$，故证得 ΔABD 能被 K_A、K_B、K_D 所覆盖．同理可证，ΔBCD 能被 K_B、K_C、K_D 所覆盖．反之，若 $R=\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OD}>1$，此时 K_A、K_B、K_D 不能盖住点 O．

因此，我们只要证明：当且仅当

$$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

时，$R\leqslant 1$ 即可．事实上，由正弦定理

$$2R=\frac{\overline{BD}}{\sin\alpha},$$

由余弦定理

$$\overline{BD}=\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha},$$

所以得到

$$R=\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}\,/2\sin\alpha.$$

由 $R\leqslant 1$ 解得

$$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha\leqslant a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha;$$

又因 $\overline{AD}=1$，$a=\overline{AB}>\overline{AD}\cos\alpha=\cos\alpha$，故左边不等式恒成立，即从

$$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

亦可推知 $R\leqslant 1$．所以 $R\leqslant 1$ 等价于

$$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha.$$

〈证法二〉 圆 K_B、K_C 可以看作是从圆 K_A、K_D 的位置

向右平行移动距离 a 得到．如图 9—2 乙，在 AB 与 DC 之间且平行于它们的直线 l 交 K_A、K_D 的“外缘”于 M、N．不同的直线 l 截得不同的线段 MN，其中必有最短的，如线段 $\overline{M_0N_0}$（或 $\overline{M_0'N_0'}$）．显然，当且仅当平移的距离 a 不大于 M_0N_0 时，K_A、K_B、K_C、K_D 才能覆盖平行四边形 $ABCD$.

当 $\alpha>60°$ 时，K_A、K_D 的交点在 AB 与 DC 之间．如图 9—2 甲，$M_0N_0N_0'M_0'$ 是平行四边形，故 $\overline{M_0N_0}$（或 $\overline{M_0'N_0'}$）是 $\overline{MN}$ 中的最短者．因

$$\angle M_0N_0A=\angle N_0AB=\alpha-60°,$$

故

$$M_0N_0=2\cos(\alpha-60°)=\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha;$$

当 $\alpha=60°$ 时，K_A、K_D 的交点在 AB 或 DC 上，同样可知 $\overline{M_0N_0}$（或 $\overline{M_0'N_0'}$）是 MN 中的最短者，这时，

$$M_0N_0=2=\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha.$$

所以，当 $\alpha\geqslant60°$ 时，当且仅当

$$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha,$$

平行四边形 $ABCD$ 被圆 K_A、K_B、K_C、K_D 覆盖.

当 $\alpha<60°$时，圆 K_A、K_D 的交点在 AB 与 CD 之外，这时 $\overline{MN}$ 中之最短者为延长 BA、CD 在 K_A、K_D 内所截得的线段 $\overline{M_0N_0}$（或 $\overline{M_0'N_0'}$），因

$$\angle M_0'DA=\angle N_0AD=\alpha,$$

故 $$\overline{M_0N_0}=1+2\cos\alpha\geqslant1+2\cos60°=2.$$

而 $$2\geqslant2\cos(60°-\alpha)=\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha,$$

所以 $$\overline{M_0N_0}\geqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha.$$

因此，当 $a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$ 时，$a\leqslant M_0N_0$，故平行四

边形 $ABCD$ 被圆 K_A、K_B、K_C、K_D 覆盖；

若平行四边形 $ABCD$ 被 K_A、K_B、K_C、K_D 覆盖．根据题设 ΔABD 是锐角三角形．所以 $\angle ADB<90°$，因此 $\angle ABD>30°$，从而

$$\operatorname{ctg}\angle ABD=\frac{a-\cos\alpha}{\sin\alpha}<\sqrt{3},$$

故 $$a<\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha.$$

于是，问题得证．

【附注】 1．当题目中的 ΔABD 是直角三角形时，结论仍然成立．但当ΔABD 是钝角三角形时，条件 $a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$ 只是圆 K_A、K_B、K_C、K_D 覆盖平行四边形 $ABCD$ 的充分条件，而不能保证是必要条件了．

2．证法一中，条件 $R\leqslant 1$ 等价于条件

$$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha,$$

亦可以用下面的证法：由于 $\overline{AD}=1$，所以条件 $R\leqslant 1$ 与条件 $\angle AOD\geqslant 60°$ 等价(因为ΔAOD 中，$\overline{AO}=\overline{DO}$，而最大边对最大角)．又根据圆周角定理，条件$\angle AOD\geqslant 60°$等价于$\angle ABD\geqslant 30°$，而

$$\operatorname{ctg}\angle ABD=\frac{a-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

所以条件 $\angle ABD\geqslant 30°$ 与条件

$$\frac{a-\cos\alpha}{\sin\alpha}<\sqrt{3}\text{ 等价．}$$

3．证法一中，我们将关于平行四边形的覆盖问题变换为关于锐角三角形的覆盖问题，将“繁”化为“简”，从而解决问题．证法二是从变化的思想去分析和解决问题，掌握这种思想方法，对将来进一步学习高等数学是必不可少的．关于覆

盖问题，一般都比较困难，并且也还没有见到一般性的解法.

第 二 题 (波兰命题)

已知某四面体中，有且仅有一条棱长大于1. 求证：它的体积$V\leqslant\frac{1}{8}$.

【分析】 如图9—3，设四面体$ABCD$的棱$AB>1$，其它的棱长不超过1.

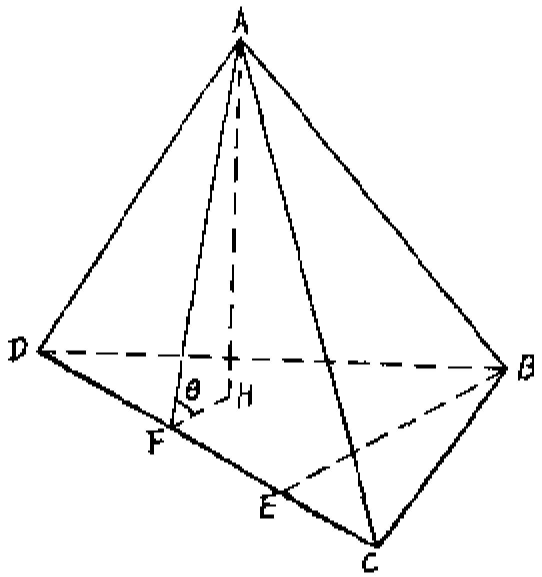


图 9—3

为了求出四面体$ABCD$的体积，我们由A点作该四面体的高$\overline{AH}$，再分别作ΔACD和ΔBCD的高$\overline{AF}$和$\overline{BE}$. 则

$$V=\frac{1}{3}\overline{AH}\cdot S_{\Delta BCD}$$

$$=\frac{1}{3}\overline{AF}\sin\theta\cdot S_{\Delta BCD} \quad (1)$$

其中θ为平面ACD与平面BCD的夹角. 于是，问题变成求(1)右边当$CD\leqslant 1$时的最大值.

由(1)，得

$$V\leqslant\frac{1}{3}\overline{AF}\sin\theta\cdot S_{\Delta BCD}=\frac{1}{6}\overline{AF}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{BE},$$

右边的三个变量是互相依赖的，将它化成一个变量的函数，就容易求得它的最大值.

本题也可以从(1)式出发，分$AF\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$和$AF>\frac{\sqrt{3}}{2}$

两种情形，直接估出$V\leqslant\frac{1}{8}$.

〈**证法一**〉 如图9—3，在四面体$ABCD$中，棱$AB>1$，其它棱长不超过1，由A作该四面体的高$\overline{AH}$，点H为垂足；再分别作ΔACD和ΔBCD的高$\overline{AF}$和$\overline{BE}$，垂足依次为点F和E；连FH，则$\angle AFH$为二面角$A—CD—B$的平面角，并用Q记之.

令$\overline{CD}=x(\leqslant 1)$，先证$\Delta ACD$的高$\overline{AF}$和$\Delta BCD$的高$\overline{BE}$都不超过$\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$.

事实上，在ΔACD中，$\overline{CF}$和$\overline{DF}$中必有一条$\geqslant\frac{x}{2}$，不妨设$\overline{CF}\geqslant\frac{x}{2}$. 在直角三角形$AFC$中：

$$\overline{AF}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CF}^2}\leqslant\sqrt{1-\frac{x^2}{4}},$$

同理可证

$$\overline{BE}\leqslant\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}.$$

又该四面体的高

$$\overline{AH}=\overline{AF}\sin\theta\leqslant\overline{AF}\leqslant\sqrt{1-\frac{x^2}{4}},$$

于是，四面体$ABCD$的体积

$$V=\frac{1}{3}\overline{AH}\cdot S_{\Delta BCD}\leqslant\frac{1}{3}\overline{AF}\cdot\frac{\overline{CD}}{2}\cdot\overline{BE}$$

$$\leqslant\frac{x}{6}\times\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{2}\right)\frac{x}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right).$$

由$x\leqslant 1$，得$1+\frac{x}{2}\leqslant\frac{3}{2}$. 又根据关于算术平均与几何平均

的著名不等式，得

$$\sqrt{\frac{x}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)}\leqslant\frac{\frac{x}{2}+\left(1-\frac{x}{2}\right)}{2}=\frac{1}{2}.$$

因此，四面体 $ABCD$ 的体积 $V\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

〈证法二〉 如图 9—3，四面体 $ABCD$ 的体积

$$V=\frac{1}{3}\overline{AH}\cdot S_{\triangle BCD}=\frac{1}{3}\cdot\overline{AF}\cdot\sin\theta\cdot S_{\triangle BCD}.$$

1）当 $\overline{AF}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，由于在每边长不超过 1 的三角形中，以每边长为 1 的等边三角形的面积最大，所以

$$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{BE}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4},$$

故 $$V=\frac{1}{3}\overline{AF}\cdot\sin\theta\cdot S_{\triangle BCD}\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{8};$$

2）当 $AF>\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，注意到 $S_{\triangle ACD}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$,

而 $\overline{AF}>\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\overline{CD}<1$.

又因在每边长不超过 1 的同底三角形中，以腰长为 1 的等腰三角形的面积最大，高也最大，因此只需考虑当

$$\overline{CD}<1,\ \overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=1$$

时，该四面体的体积是否超过 $\frac{1}{8}$.

设 $\angle ACD=\alpha>60°$，则

$$\overline{AF}=\sin\alpha,\quad \overline{CD}=2\cos\alpha,$$

$$S_{\triangle ACD}=S_{\triangle BCD}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$$

所以 $$V=\frac{1}{3}AF\cdot\sin\theta\cdot S_{\triangle PCD}\leqslant\frac{1}{3}\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$=\frac{1}{6}\sin2\alpha\sin\alpha=\frac{1}{12}(\cos\alpha-\cos3\alpha)$$

$$<\frac{1}{12}(\cos60^\circ-\cos180^\circ)\quad(因\ 180^\circ<3\alpha<270^\circ)$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{8}.$$

综合上述两种情形的证明即得 $V\leqslant\frac{1}{8}$.

【附注】 1. 本题所求得 V 的界值 $\frac{1}{8}$，对仅恰有一条棱长大于 1 的四面体来说是最好的，即不能再将它改善得更小了。事实上，在四面体中，如果

$$\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=1,$$

平面 ACD 与平面 BCD 垂直，这时 $\overline{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}>1$, 它的体积就等于 $\frac{1}{8}$.

2. 证法一中，表达式 $\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{2}\right)x\left(1-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{24}x(4-x^2)$ 当 $0<x\leqslant1$ 的最大值，亦可以用下述方法来求：

$$x(4-x^2)=3-(1-x)-2(1-x)^2-x(1-x)^2\leqslant3,$$

当 $x=1$ 时，右边表达式的值等于 3，故

$$\frac{1}{24}x(4-x^2)\leqslant\frac{1}{8}.$$

3. 本题要证得上述最好的界值 $\frac{1}{8}$，关键在于用公式

$$V=\frac{1}{3}\cdot高\cdot底面积$$

来估算四面体的体积时，高必须是由大于1的棱 AB 的端点 A 或 B 向相对面作垂线而得到，底面必须是三边不超过1的三角形．否则只能估得

$$V\leqslant\frac{2}{9\sqrt{3}}\left(>\frac{1}{8}\right),$$

很难得到 $V\leqslant\frac{1}{8}$ 的结果．

4．请读者考虑本题的特例：平面上恰有一边大于1的三角形，它的面积的最好的界值是多少？

第　三　题（英国命题）

已知 k、m、n 都是正整数，而且 $m+k+1$ 是大于 $n+1$ 的质数，并记 $C_s=S(S+1)$．试证：乘积

$$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$$

被乘积 $C_1C_2\cdots C_n$ 整除．

【分析】 首先看到，若乘积 $(C_{m+1}-k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$ 有一个因子为零，即有一正整数 i，使 $m+i=k$，则结论显然成立；若乘积中有正、有负，则因为 i 是连续取1到 n 中的所有自然数，故其中必有一个因子为零，结论亦显然成立；因此，剩下来只需对所有的因子都同号的情形来证明结论成立．

对于所有因子都是正的情形，$m+1>k$，即 $m\geqslant k$．这时将已知条件 $C_s=S(S+1)$ 代入被除式和除式，就可得到

$$\frac{(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)}{C_1C_2\cdots C_n}$$

$$=\frac{(m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n)}{n!}\cdot$$

$$\cdot \frac{(m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)}{(n+1)!}$$

$$= I_1 \cdot I_2,$$

于是问题就变成证明 I_1 和 I_2 是整数．利用二项展开式定理，并注意 $m+k+1$ 是大于 $n-1$ 的素数，就可以证明这一结论．

对于所有因子都是负数的情形，由于两整数间的整除关系与它们本身的符号无关，所以结论仍然成立．

〈证明〉 乘积 $(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$ 只可能有两种情形，或者等于零(这时结论显然成立)；或者所有因子有相同的符号．先假定所有的因子都是正数，由已知条件，有

$$C_p - C_q = p(p+1) - q(q+1) = (p-q)(p+q+1),$$

所以

$$\begin{aligned}
&(C_{m+1}-C_k)\cdot(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)\\
&=(m+1-k)(m+1+k+1)(m+2-k)\\
&\quad(m+2+k+1)\cdots(m+n-k)(m+n+k+1)\\
&=\frac{(m-n-k)!}{(m-k)!}\cdot\frac{(m+n+k+1)!}{(m+k+1)!}.
\end{aligned}$$

又由于 $C_1 \cdot C_2 \cdots C_n = n!\,(n+1)!$，因此

$$\begin{aligned}
&\frac{(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)}{C_1C_2\cdots C_n}\\
&=\frac{(m+n-k)!}{(m-k)!\,n!}\cdot\frac{(m+n+k+1)!}{(m+k+1)!\,(n+1)!}\\
&=I_1\cdot I_2.
\end{aligned}$$

现在来证明 I_1、I_2 都是整数．

$$I_1 = \frac{(m+n-k)!}{[(m+n-k)-n]!\,n!} = C^n_{m+n-k}$$

是二项展开式的系数，故必为整数；

$$I_2=\frac{(m+n-k+1)!}{(n+1)!(m+k)!}\cdot\frac{1}{m+k+1}$$

$$=C_{m+n+k+1}^{n+1}\cdot\frac{1}{m+k+1}$$

第一项是二项展开式的系数，故为整数，并且这个整数能被 $m+k+1$ 整除．事实上 $m+k+1$ 是 $(m+n+k+1)!$ 中的一个因子．又因 $m+k+1$ 是大于 $n+1$ 的素数，所以在 $(m+k)!$，$(n+1)!$ 中必然不包含 $m+k+1$ 这个因子．故 $C_{m+n+k+1}^{n+1}$ 被 $m+k+1$ 整除，从而证明了 I_2 亦是一整数．

当乘积 $(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$ 的所有因子都是负数时，类似的可以证明它亦能被 $C_1C_2\cdots C_n$ 整除．

【附注】 1．在证明中，我们也可以不在开始时就将乘积 $(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$ 分为等于零；全为正；全为负三种情况来讨论，而是在计算到

$$\frac{(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)}{C_1C_2\cdots C_n}$$

$$=\frac{(m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n)}{n!}$$

$$\cdot\frac{(m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)}{(n+1)!}$$

时，再分那三种情况来讨论．但应该注意，阶乘 $(m-k)!$ 和 $(m+n-k)!$ 中的数都是自然数，所以只有分三种情况以后，才便于引用阶乘的记号．

2．题目中的被除式和除式，初看起来很复杂，但将已知条件代入以后，经整理就显出比较有规律，并且容易看出和二项展开式定理有密切关系．解题的关键是两次运用二项展

开式定理．由此看到，二项展开式定理是解决整除性问题的一个有力的工具．

3 试题中的"C_s"表示 S 与 $S+1$ 这样两个相邻的自然数之积，而证明过程中所用的"C_{m+n-k}^n"，则表示由 $m+n-k$ 个元素中每次取 n 个元素的所有可能的组合数（这也是我国表示组合数的常用的记号），两者不应混淆．

第 四 题 （意大利命题）

已知两个锐角三角形 $A_0B_0C_0$ 和 $A'B'C'$．求作一个三角形 ABC，使它符合下列条件：

$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似（A、B、C 依次与 A'、B'、C' 相对应）；

$\triangle ABC$ 外接于 $\triangle A_0B_0C_0$，且具有最大的面积．

【分析】 我们逐个来分析求作的三角形 ABC 应满足的条件．要求 $\triangle ABC$ 外接于$\triangle A_0B_0C_0$，这是容易办到的；进一步要求 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$ 也不困难，由相似三角形的判定定理，只需使$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$．如图9—4，可以将 $\triangle A_0B_0C_0$ 的边 $\overline{A_0C_0}$ 和 $\overline{A_0B_0}$ 作弦，向外作圆弧，圆心分别为 M_1、M_2，使弦 A_0C_0 和 A_0B_0 所对的圆周角分别等于 $\angle B'$ 和$\angle C'$．则过 A_0 点任作一直线 l 分别交两个圆弧于点 B 和 C，就

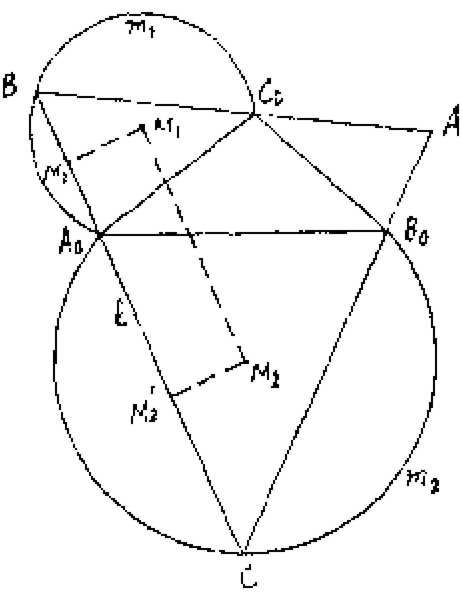


图 9—4

得到$\triangle ABC$ 的两个顶点，第三个顶点 A 就不难确定．所得的

三角形 ABC 显然就符合上述两个条件.

由于过 A_0 点的直线 l 是任意作的,所以只满足这两个条件的三角形有无数个. 剩下来的问题是如何选择恰当的直线 l, 再使得 ΔABC 具有最大面积. 利用相似三角形面积之比等于其对应边的平方之比, 问题就变为选择这样的直线 l, 使线段 $\overline{BC}$ 为最长. 对于过 A_0 点的任意直线 l, 由点 M_1、M_2 分别作它们的垂线, 相应的垂足为 M_1'、M_2', 显然 $M_1'M_2'=\frac{1}{2}BC$. 注意到 M_1M_1' 总是平行于 M_2M_2'. 而它们之间的距离是 $\overline{M_1'M_2'}$, 所以总有 $\overline{M_1'M_2'}\leqslant\overline{M_1M_2}$. 当直线 l 平行于 M_1M_2 时, 才有 $\overline{M_1'M_2'}=\overline{M_1M_2}$. 因此, 使得 BC 为最长的直线 l 必需平行于 M_1M_2. 于是就可以作出满足题目全部要求的 ΔABC.

〈解答〉 首先作出符合题目要求的三角形.

1) 记 $\alpha=\angle B'A'C'$, $\beta=\angle C'B'A'$, $\gamma=\angle A'C'B'$. 在 A_0C_0 和 A_0B_0 上分别作等腰三角形 $A_0C_0M_1$ 和 $A_0B_0M_2$, 使 $\overline{A_0M_1}=\overline{C_0M_1}$ 和 $\overline{AM_2}=\overline{B_0M_2}$; 且使它们的底角

$$\angle M_1A_0C_0=90^\circ-\beta,\quad \angle M_2A_0B_0=90^\circ-\gamma.$$

以 M_1 和 M_2 分别为圆心, M_1A_0 和 M_2A 分别为半径依次作圆弧 m_1 和 m_2(参见图 9—4).

2) 连 M_1M_2, 并过 A_0 点作直线 l 平行于 M_1M_2, 分别与圆弧 m_1 和 m_2 交于点 B 和 C; 分别连线段 BC_0 和 CB_0, 并延长后相交于一点 A, 则 ΔABC 就是所求作的三角形.

由上述作法, ΔABC 显然外接于 $\Delta A_0B_0C_0$;

又因 $\angle M_1A_0C_0=90^\circ-\beta$, $\angle M_2A_0B=90^\circ-\gamma$,

所以 $\angle A_0BC_0=\beta$, $\angle A_0CB_0=\gamma$,

因此 $\Delta ABC\backsim\Delta A'B'C'$; 设 M_1' 和 M_2' 是由 M_1 和 M_2 到 BC

边的垂线的垂足，则有$\overline{BC}=2\overline{M_1'M_2'}$，而$\overline{M_1'M_2'}\leqslant\overline{M_1M_2}$（当$BC\parallel M_1M_2$时取等号，此时$\overline{M_1'M_2'}$取最大值$\overline{M_1M_2}$），根据作法$BC\parallel M_1M_2$，故$\overline{BC}$取最大值$\overline{BC}=2\overline{M_1M_2}$．又因相似三角形面积之比等于其对应边的平方之比，所ΔABC的面积为最大．

【附注】 1．在本题解答过程中，我们先将要求作的三角形所满足的条件分步满足：

第 1）步，根据"外接于$\Delta A_0B_0C_0$并与$\Delta A'B'C'$相似"这一条件，确定轨迹——两个圆弧m_1和m_2；

第 2）步，根据"具有最大面积"这一条件，确定一条轨迹——平行于M_1M_2的直线．

最后利用这两部分轨迹的交点求出要作的图形．运用这种思考方法，解决一般几何作图问题是相当普遍的（参看第二届第四题附注）．

2．利用了"相似三角形面积之比等于对应边平方之比"这一定理解决本题的难点，可见研究关于面积的问题，有时利用它可将问题转化为线段的比例问题，从而达到目的．

3．由于满足作图条件的圆弧m_1和m_2分别都是唯一的，而过A_0点平行于M_1M_2的直线也只有一条，并且两相交直线BC_0与CB_0的交点A也只有一个，所以满足题目要求的ΔABC也是唯一的．关于这部分作图题的讨论（有且只有一解），我们补遗于此．

4．几何作图在中学几何课中只占次要的地位，但应该看到，通过正确的几何作图，可以使同学了解和掌握图形的性

质，为进一步学习打下良好的基础，因此不应该忽视几何作图。

第 五 题 （苏联命题）

考察数列$\{C_n\}$：

$$C_1=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8;$$
$$C_2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_8^2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_n=a_1^n+a_2^n+a_3^n+\cdots+a_8^n;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

a_1、a_2、a_3、$\cdots$、a_8都是实数，其中至少有一个异于零。假定已知该数列中有无穷多项为零，试求出所有使$C_n=0$的n。

【分析】 由已知条件，实数$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_8$中至少有一个不为0，因此，显然数列中的偶数项C_{2m}都是正数。于是等于0的项只可能在奇数项里出现，但到底是部分奇数项为0，或者是全部奇数项都为0呢？

要解决这个问题，我们就得再从第二个已知条件来进行分析。由于数列$\{C_n\}$中有无穷多项为0，因此，不妨设某充分大的项$C_{2m-1}=0$，即

$$a_1^{2m+1}+a_2^{2m+1}+a_3^{2m+1}+\cdots+a_8^{2m-1}=0. \qquad (1)$$

(1)式的左边既等于0，所以$a_i(i=1,2,\cdots8)$中必有一部分为正；另一部分为负。我们注意到，对于充分大的项数$2m+1$，(1)式左边的值主要是由绝对值最大的项来决定，所以要使左边等于0，最大正数和最小负数的绝对值必定相等，这就是说，$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_8$中必有两个绝对值最大且相等，而

符号恰相反的数．将这两个数拿走，再对余下的数进行类似的分析下去，我们就知道 a_1、a_2、a_3、…、a_8 中必然是一对一对绝对值相等而符号相反，从而必有数列$\{C_n\}$的全部奇数项都等于 0．

〈证明〉 i）根据题设，不失一般性，我们可以对数 a_i 作如下限制：$a_i=0$ 或$|a_i|>1\ (i=1,2,\cdots,8)$，且其中至少有一个$|a_i|>1$．

若 $|a_i|\leqslant 1\ (i=1,2,\cdots,8)$，我们对所有的 a_i 同乘以因子 $\gamma\neq 0$，使得对所有的 $a_i\neq 0$，有$|\gamma a_i|>1$，然后都相加起来，考察

$$C'_k=\sum_{i=1}^{8}(\gamma a_i)^k=\gamma^k C_k.$$

由于$\gamma\neq 0$，所以 C'_k 当且仅当 $C_k=0$ 时才为零，于是只需考察数列$\{C'_k\}$就可得到同样的结果．

ii）显然，对于所有的自然数 m，有 $C_{2m}>0$．因为 $a_i^{2m}\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,8)$，且至少有一个 $a_i^{2m}>0$，所以 $C_{2m}=\sum\limits_{i=1}^{8}a_i^{2m}>0$．因此，我们将只限于考察其中 n 为奇数的各项．

iii）由 i），不妨设

$$|a_1|\geqslant|a_2|\geqslant\cdots\geqslant|a_8|,\ \text{且}|a_1|>1.\qquad(2)$$

我们考察

$$\lim_{n\to\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}a_1^n\cdot\left[1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n+\cdots+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_8}{a_1}\right)^n\right].\qquad(3)$$

当$|a_2|<|a_1|$时，由于(2)有$|a_i|<|a_1|\ (i=2,3,4,\cdots,8)$，因而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^n = 0\,(i=2,3,4,\cdots 8).$$

也就是 $\lim\limits_{n\to\infty} C_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_1^n=\infty$，因此必有这样的 N 存在，使得对于所有的 $n>N$，有 $C_n\neq 0$. 但这表示不能有无穷多个 $C_n=0$，与题设矛盾. 由此得 $|a_2|=|a_1|$. 并且由 (2) 可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^n (i=2,3,\cdots 8)$$

可能趋于极限 $+1$, -1 或零.

iv) 由于数列 $\{C_n\}$ 中存在无穷多个 $C_n=0$，因此在表达式 (3) 的方括号中至少有一个极限值为 -1，即在 $a_2, a_3, \cdots a_8$ 中有一个 a_j，使得 $-a_j=a_1$，这样由于 a_1、a_j 有同次幂，当 n 为奇数时，有

$$a_1^n+a_j^n=0.$$

在 $a_i(i=1, 2,3,\cdots 8)$ 中并不一定只有一对 a_1 与 $a_j(a_1=-a_j)$. 用完全类似的方法，将余下的 a_i 中绝对值最大的当作前面讨论时的 a_1，一定又可以找到另一对 a_x、a_y，使得 $a_x=-a_y$. 再继续两次，我们就得到结果：a_i 中有四对，每对中的两个数绝对值相等，符号相反.

因此，当且仅当 n 为奇数时，$C_n=0$.

【附注】 1. 本题和通常有关数列的问题不同，型式新颖，想法也比较活. 解答过程要用到高等数学中变量极限的知识，要从变化过程中去分析、比较数量之间的大小关系. 因此，这是一道增进中学生的高等数学的初步知识、开拓解题思路的好题.

2. 在证明过程中的第 iii) 步，我们其实用到指数函数 a^n 的下述性质：

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0, \quad (a<1)$$

它的证明并不困难，读者可参看华罗庚的《高等数学引论》第一卷第一分册第 93 页.

3．本题中的数列$\{C_n\}$，可以推广为更一般的$C_n=a_1^n+a_2^n+\cdots+a_s^n$的情形，其中 s 是大于 1 的自然数，$a_1,a_2,\cdots a_s$ 为实数，且其中至少有一个不为零．证明方法和结果完全一样.

第　六　题（匈牙利命题）

运动会开了 n 天$(n>1)$，发出 m 个奖牌．第一天发出 1 个，加上余下的 $m-1$ 个奖牌的$\frac{1}{7}$；第二天发出 2 个，加上余下的奖牌的$\frac{1}{7}$；如此继续下去，最后第 n 天，恰好发出余下的 n 个奖牌．问运动会共开了几天？共发了多少个奖牌？

【分析】　设第 k 天发出的奖牌数为 $V(k)$，则

$V(1)=1+\frac{1}{7}(m-1)$，

$V(2)=2+\frac{1}{7}[m-V(1)-2]=\frac{6}{7}[1+V(1)]$，

…………

$V(k)=k+\frac{1}{7}[m-V(k-1)-k]=\frac{6}{7}[1+V(k-1)]$，

…………

$V(n)=n$.

根据题意，得

$$m=\sum_{k=1}^{n} V(k). \tag{1}$$

因此，假若能将(1)式右边级数的和求出来（这个和的表达式，容易看出是关于 m 和 n 的某个初等函数），于是问题就变为求方程(1)的正整数解．如何求出和 $\sum\limits_{k=1}^{n} V(k)$？我们可以逐个将上面 $V(k)$ 的表达式代入和式 $\sum\limits_{k=1}^{n} V(k)$，然后直接运用等比数列求和的方法就可求得．

另一种想法是从第 k 天后剩下的奖牌数来分析问题．设第 k 天后剩下的奖牌数为 $S(k)$ 个，则由于第 k 天发出的奖牌数为

$$k+\frac{1}{7}[S(k-1)-k],$$

所以
$$S(k)=S(k-1)-k-\frac{1}{7}[S(k-1)-k],$$

即
$$S(k-1)=k+\frac{7}{6}S(k).$$

根据这一递推关系，就可求得

$$\begin{aligned} m&=1+\frac{7}{6}S(1)=1+\frac{7}{6}\left[2+\frac{7}{6}S(2)\right]=\cdots\\ &=1+2\cdot\frac{7}{6}+3\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{2}+\cdots+n\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\\ &\quad+\left(\frac{6}{7}\right)^{n}\cdot S(n). \end{aligned}$$

注意到 $S(n)=0$，将上式右边级数的和求出来，同样得到一个关于 m、n 的方程，再求这个方程的正整数解就可得到结果．

〈**解法一**〉　设第 k 天发出的奖牌数为 $V(k)$，则

$$V(1) = 1 + \frac{1}{7}(m-1),$$

$$V(2) = 2 + \frac{1}{7}[m - V(1) - 2] = \frac{6}{7}[1 + V(1)],$$

....

$$V(k) = k + \frac{1}{7}[m - V(k-1) - k] = \frac{6}{7}[1 + V(k-1)]$$

$$= \left(\frac{6}{7}\right)^{k-1} V(1) + \left(\frac{6}{7}\right)^{k-1} + \left(\frac{6}{7}\right)^{k-2} + \cdots + \frac{6}{7},$$

....

$$V(n) = \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} V(1) + \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} + \left(\frac{6}{7}\right)^{n-2} + \cdots + \frac{6}{7}.$$

将上面 n 个等式相加，得

$$m = \sum_{k=1}^{n} V(k) = \left[\frac{6}{7} + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\right] V(1)$$

$$+ \left[\frac{6}{7} + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\right] + \left[\frac{6}{7} + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \cdots\right.$$

$$\left. + \left(\frac{6}{7}\right)^{n-2}\right] + \cdots + \left[\frac{6}{7} + \left(\frac{6}{7}\right)^2\right] + \frac{6}{7}$$

$$= (6+m)\left[1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n\right] + 6\left[1 - \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\right] + \cdots + 6\left(1 - \frac{6}{7}\right)$$

$$= 6n - 6\left[\frac{6}{7} + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{6}{7}\right)^n\right] + m - m\left(\frac{6}{7}\right)^n$$

$$= 6n - 6^2\left[1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n\right] + m - m\left(\frac{6}{7}\right)^n,$$

经整理，得
$$m = \frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}} + 36. \tag{2}$$

对于 $n>1$ 显然有：

$$|n-6| < 6^{n-1} \text{ 和 } (7^n,\ 6^{n-1}) = 1. \tag{3}$$

由(2)和(3)，再根据 m 和 n 是正整数，就得到 $n=6$，从而得 $m=36$.

因此，运动会共开了 6 天，共发出 36 个奖牌，在这六天中每天都正好发出 6 个奖牌.

〈解法二〉 设运动会开了 k 天之后，还剩 $S(k)$ 个奖牌，则因第 k 天发出的奖牌数为

$$k+\frac{1}{7}[S(k-1)-k]=\frac{1}{7}S(k-1)+\frac{6}{7}k,$$

所以 $$S(k)=S(k-1)-\left[\frac{1}{7}S(k-1)+\frac{6}{7}k\right],$$

即 $$S(k-1)=k+\frac{7}{6}S(k).$$

利用这个递推关系式，得

$$m=1+\frac{7}{6}\cdot S(1)=1+\frac{7}{6}\left[2+\frac{7}{6}\cdot S(2)\right]$$

$$=1+2\cdot\frac{7}{6}+\left(\frac{7}{6}\right)^2\cdot S(2)=1+2\cdot\frac{7}{6}$$

$$+\left(\frac{7}{6}\right)^2\left[3+\frac{7}{6}\cdot S(3)\right]$$

$$=1+2\cdot\frac{7}{6}+3\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^2+\left(\frac{7}{6}\right)^3\cdot S(3)=\cdots$$

$$=1+2\cdot\frac{6}{7}+3\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}$$

$$+\left(\frac{7}{6}\right)^n S(n).$$

因 $S(n)=0$，故得

$$m=1+2\cdot\frac{7}{6}+3\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}. \tag{4}$$

(4) $\times\frac{7}{6}$，得

$$\frac{7}{6}m=\frac{7}{6}+2\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^2+3\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^3+\cdots+n\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^n \tag{5}$$

(4)－(5)，得

$$m-\frac{7}{6}m=1+\frac{7}{6}+\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}-n\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^n$$

即
$$-\frac{m}{6}=\frac{\left(\frac{7}{6}\right)^n-1}{\frac{7}{6}-1}-n\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^n=\left(\frac{7}{6}\right)^n\cdot(6-n)-6$$

经整理，就得到

$$m=\frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}}+36.$$

以下和解法一相同，求得这方程的正整数解为：

$$n=6,\ m=36.$$

【附注】 1．解法一的想法是直接顺着题目的意思来的，想法比较自然，但从第一天发出的奖牌数累加到第 n 天发出的奖牌数计算过程比较复杂，不过它只涉及到中学数学中的等比数列求和的知识．

2．解法二是从事物的另一面来考虑的，即从第 k 天还剩下来的奖牌数来考虑问题．我们看到这种解法计算量比较少，不过它涉及到级数

$$1+2\cdot\left(\frac{7}{6}\right)+3\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}$$

的求和问题．这个级数的各项中，有一个因子成等比数列，其系数成等差数列，这种数列叫做混合数列．它的求和方法和等比数列的求和方法很类似．不同的仅是乘以公比然后相减这一计算过程需要进行两次，而等比数列求和只需进行一次．

关于混合数列的进一步知识，可参看华罗庚的《从杨辉三角谈起》一书。

3　在求方程

$$m = \frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}} + 36 \tag{2}$$

的正整数解时，我们利用了不等式

$$\frac{|n-6|}{6^{n-1}} < 1 \tag{6}$$

对任何自然数 $n>1$ 都成立的结论，它可以用数学归纳法证明如下：

当 $n=2, 3, 4, 5, 6, 7$ 时，容易验证不等式(6)成立。

假设不等式(6)对某个 $n(>7)$ 成立，则因

$$\frac{n-6}{6^{n-1}} - \frac{(n+1)-6}{6^n} > 0$$

所以更有

$$\frac{(n+1)-6}{6^n} < 1.$$

即不等式(6)对 $n+1$ 亦成立，因此，对任何自然数 $n>1$，不等式(6)都成立。

类似地容易证明更一般的不等式

$$\frac{|n-p|}{p^{n-1}} < 1,$$

其中 n、p 是大于1的整数。利用这个更一般的不等式，本题中的 $\frac{1}{7}$ 可以推广为多少分之一？请读者考虑。

第十届国际中学生数学竞赛试题分析与解答

1968 年在苏联举行

第 一 题 (罗马尼亚命题)

试证，只存在一个满足下述条件的三角形：其各边的长是三个连续的自然数，且其一个角等于另一角的二倍.

【分析】 如能找出一个且仅能找出一个符合题目要求的三角形，则命题得证.

如何找这样的三角形呢？用反推的方法.

假定三角形 ABC 满足本题条件，则因三角形 ABC 三边的长是三个连续的自然数，故不妨设 $\overline{AB}=n$，$\overline{AC}=n-1$，$\overline{BC}=n+1$ ($n>1$，是自然数)；又三角形 ABC 的三个角中，有一个角是另一角的二倍，若其中一个角为 α，则另二个角分别为 2α，$\pi-3\alpha$，此处 $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$，而且关于这些内角的位置，有且只有三种可能性 (图 10-1)：

a) $\angle C=\pi-3\alpha$，$\angle B=\alpha$，$\angle A=2\alpha$；

b) $\angle A=\pi-3\alpha$，$\angle B=\alpha$，$\angle C=2\alpha$；

c) $\angle B=\pi-3\alpha$，$\angle C=\alpha$，$\angle A=2\alpha$.

下面，如果能把 n 具体求出，n 定了，三角形的另二边也定了，这样问题也就解决了.

由于三角形 ABC 是一任意三角形，求其边长的问题是解任意三角形的问题，需要用正弦定理或余弦定理．但因

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\pi-3\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}&=\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}\\&=\frac{2\cos^2\alpha\sin\alpha+(2\cos^2\alpha-1)\sin\alpha}{\sin\alpha}\\&=\frac{4\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha}\\&=\left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\right)^2-1,\end{aligned}$$

故由此将三角形内角的正弦之比化成三角形边长之比，在 a)、b)、c) 三种情况下分别解关于 n 的一元二次方程，求出 n，这样就找到了符合题设条件的三角形．在下面的证明过程中，我们还将看到所求的 n 只有一个值满足题设条件，于是命题的唯一性也得到证明．

下面，就按上述分析的思路来证明这一命题．

〈证明〉 设边长 $\overline{AB}=n$，$\overline{AC}=n-1$，$\overline{BC}=n+1$ $(n>1$，为自然数$)$ 的三角形 ABC 满足本题条件．

于是此三角形的三内角分别为 α，2α，$\pi-3\alpha$，其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$．

关于这些内角的位置有如下三种可能：

根据

$$\frac{\sin(\pi-3\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

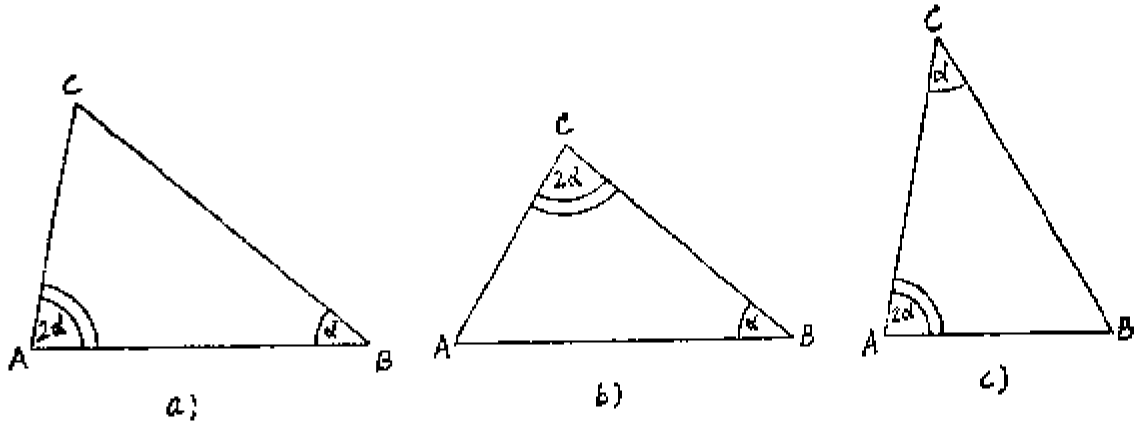


图 10—1

$$=\frac{2\cos^2\alpha\sin\alpha+(2\cos^2\alpha-1)\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{4\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha}=\left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\right)^2-1,$$

在 $a)$，$b)$，$c)$ 三种情况下分别得出下列关于 n 的方程：

$a)$　因为 $\frac{\sin(\pi-3\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{n}{n-1}$，$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{n+1}{n-1}$，所以

$$\frac{n}{n-1}=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2-1,\ n^2-5n=0.$$

由此得出 $n=5$ ($n=0$ 不合题意)，因而：

$$n-1=4,\ n+1=6$$

$b)$　因为 $\frac{\sin(\pi-3\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{n+1}{n-1}$，$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{n}{n-1}$，所以

$$\frac{n+1}{n-1}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^2-1,\ n^2-2n=0.$$

由此解得自然数 $n=2$，因而 $n-1=1$，$n+1=3$. 显然，这时三角形为一线段，因而问题无解.

$c)$　同理，我们有：

$$\frac{n-1}{n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2-1,\ n^2-3n-1=0.$$

因此方程无整数解，故此时问题无解.

综上所述，具有给定性质的三角形有且只有一个，其各边的长分别是 4，5 和 6.

下面再加以验证，说明边长为 4，5 和 6 的三角形确为所求.

根据余弦定理：

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\angle ABC;$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle CAB.$$

将 $a=4$，$b=5$，$c=6$ 代入，得：

$$\cos\angle ABC=\frac{3}{4};$$

$$\cos\angle CAB=\frac{1}{8}=2\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=2\cos^2\angle ABC-1$$
$$=\cos(2\angle ABC).$$

因此有下列混合组成立：

$$\begin{cases}0<\angle ABC<\dfrac{\pi}{2};\\ 0<\angle CAB<\dfrac{\pi}{2};\\ \angle CAB=2\angle ABC.\end{cases}$$

于是本命题得证.

【附注】 1. 此题是要证明具有某种性质的三角形的唯一存在. 对此类问题，用纯几何的办法解决，有时是困难的. 这里我们依据三角的有关知识，采用解任意三角形的办法，从已知条件出发，列出方程，通过解方程找出一个三角

形满足题设条件，这样就证明了三角形的存在．这种方法是在证明三角形或有关其他几何图形的存在时所常常采用的、行之有效的方法．

2．按题目的要求来说，只要把三角形找出来就行了．而在本题的证明过程中，最后对找出的三角形还加以验证．这就进一步说明所找的三角形的确满足题设的要求，从而使命题的证明更加完整、严谨．

第　二　题（捷克斯洛伐克命题）

已知数 x 是十进制数，并且它的各位数字的乘积为 $P(x)$．试求：满足 $P(x)=x^2-10x-22$ 的所有的正整数 x．

【分析】 首先弄清题意．由题设，数 x 是一个十进制数，因此，组成数 x 的各位数字(也叫数码)都只能是 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 这十个数字中的某一个．易见数字 9 是这些数字中最大的．例如，若设 x 是一个十进制的一位数，则 $x\leqslant 9$．

又 $P(x)$ 是十进制数 x 的各位数字的乘积．例如，若 $x=12567$，则 $P(x)=P(12567)=1\cdot 2\cdot 5\cdot 6\cdot 7=420$．

而且 $P(x)$ 还有如下的规律：

若 x 是一个十进制的一位数，则 $P(x)=x\leqslant 9$；

若 x 是一个十进制的二位数，则 $P(x)\leqslant 9^2$；

………………

若 x 是一个十进制的 n（自然数）位数，则 $P(x)\leqslant 9^n$．

由十进制数的特点知：最小的二位数为 10；最小的三位数为 $100=10^2$；……最小的 n 位数为 10^{n-1}．

所以若 x 是一个十进制的 n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ 位数则

有 $x \geqslant 10^{n-1}$.

根据本题的要求，数 x 还需满足方程

$$P(x)=x^2-10x-22.$$

由此可知所求之正整数 x 应满足下列关系式：

$$P(x)=x^2-10x-22 \leqslant 9^n \quad 且\ x \geqslant 10^{n-1}.$$

要将这样的正整数 x 全部求出，可分 $n=1$，$n=2$ 和 $n>2$ 三种情况，对上述二式进行讨论：

当 $n=1$ 时，满足本题条件的正整数 x 不存在；

当 $n=2$ 时，可得 $x=12$ 满足本题条件；

当 $n>2$ 时，满足本题条件的正整数 x 也不存在.

所以本题只有一解 $x=12$.

〈解答〉 假定自然数 x 满足本题条件，且 n 为十进制数 x 的位数，因此有：

$$P(x) \leqslant 9^n \quad 且 x \geqslant 10^{n-1} (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots).$$

Ⅰ） 若 $n=1$，则有：

$$P(x)=x,\ x^2-11x-22=0.$$

这个二次方程没有整数解.

Ⅱ） 若 $n=2$，则有：

$$x^2-10x-22=P(x) \leqslant 9^2=81,$$

$$x^2-10x-22+47 \leqslant 81+47,$$

$$x^2-10x+25 \leqslant 128,$$

$$|x-5| \leqslant \sqrt{128} < 12.$$

又因 $x \geqslant 10^{2-1}=10$，故有

$$10 \leqslant x \leqslant 16.$$

但这时数 x 必须满足

$$P(x)+47=x^2-10x+25=(x-5)^2,$$

所以只有数 $x=12$ 满足此条件；同时容易验证，此数也满足本题所给的方程

$$P(x)=x^2-10x-22.$$

Ⅲ） 若 $n>2$，这时应有：

$$0<10^{n-1}-5\leqslant x-5,$$

$$(10^{n-1}-5)^2\leqslant(x-5)^2.$$

所以 $P(x)=x^2-10x-22=(x-5)^2-47\geqslant(10^{n-1}-5)^2-47$，

$$P(x)\geqslant(10^{n-1}-5)^2-47=10^{2n-2}-10^n-22.$$

由 $10^n\geqslant10^3=1000$ 和 $10^{n-2}-2\geqslant8$，得

$$10^n(10^{n-2}-2)=10^{2n-2}-2\cdot10^n\geqslant8000.$$

因此 $P(x)\geqslant10^{2n-2}-10^n-22=10^{2n-2}-2\cdot10^n+10^n-22$

$$\geqslant8000+10^n-22>10^n.$$

但这和不等式 $P(x)\leqslant9^n$ 矛盾.

综上所述，本题只有一解 $x=12$.

【附注】 1. 本题涉及进位制的问题，因此，在考虑解答时，充分运用进位制的特点，如在十进制中，利用最小的 n（n 为自然数）位数是 10^{n-1}，最大的 n 位数是 10^n-1 等特点是很自然的.

2. 解答本题的关键是：在讨论 $n=2$ 的情况时，将问题转化为解二次不等式的问题；在讨论 $n>2$ 时，又把十进制数的特点与不等式的性质很好地结合起来，从而使解题过程大大简化.

第 三 题 （保加利亚命题）

已知关于变量 x_1，x_2，x_3，…，x_n 的下列方程组：

$$ax_1^2+bx_1+c=x_2,$$

$$ax_2^2+bx_2+c=x_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+c=x_n,$$

$$ax_n^2+bx_n+c=x_1,$$

其中 a，b、c 是实数，且 $a\neq0$，并设 $\triangle=(b-1)^2-4ac$。试证：在实数域中，此方程组

$a)$ 当 $\triangle<0$ 时，无解；

$b)$ 当 $\triangle=0$ 时，有唯一解；

$c)$ 当 $\triangle>0$ 时，有多于一组的解．

【分析】 此题是解方程组的问题，而且方程组中的每个方程左边都是二次三项式．如果 $x_1=x_2=\cdots=x_n=y$，这时每个方程都变为 $ay^2+(b-1)y+c=0$，这个一元二次方程的判别式恰好是 $\triangle=(b-1)^2-4ac$，因而

$$y_{1,2}=\frac{1-b\pm\sqrt{\triangle}}{2a}.$$

容易判断当 $\triangle<0$ 时，无实解；当 $\triangle=0$ 时，只有唯一解；而当 $\triangle>0$ 时，有两组解．

以上是在 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 都相等时的结果．下面，我们如果能证明：当 $\triangle\leqslant0$ 时，上述方程组不存在别的实解，则问题就解决了．

为此目的，将方程组的所有方程相加，并利用"平方中项"和"算术中项"的定理，就使问题变为讨论关于新变量（见后面的证明）的一元二次方程的解的问题，由此不难得出当 $\triangle\leqslant0$ 时，原方程组不存在别的解．这也就是说，只存在当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时的三种情况，而这恰好是我们所要证的．

〈证明〉 首先我们考虑 $x_1=x_2=\cdots=x_n=y$ 形式的实数

解，此时只需解下列方程即可：

$$ay^2+(b-1)y-c=0.$$

解之，得

$$y=\frac{1-b\pm\sqrt{\triangle}}{2a}.$$

故当 $\triangle<0$ 时，不存在满足 $x_i=y$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的解；当 $\triangle=0$ 时，有一组满足 $x_i=y$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的解；当 $\triangle>0$ 时，有两组满足 $x_i=y$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的解。

至此，问题 c) 得到证明．现在我们只需证明在 $\triangle\leqslant 0$ 时，原方程组不存在任何别的解．

为此，将所有方程相加，并记 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=X$，于是得到方程

$$a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+(b-1)X+nc=0. \qquad (1)$$

根据"平方中项"和"算术中项"的定理，有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n}=\frac{X^2}{n},$$

这里，等号只在 $x_i=y$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时成立．现在不考虑取等号的情况，只考虑取不等号的情况．因此，我们假定

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\frac{X^2}{n}+K\quad(K>0),$$

于是方程 (1) 变为

$$X^2+\frac{n}{a}(b-1)X+\frac{n^2c}{a}+nK=0. \qquad (2)$$

解 (2)，得

$$X=\frac{1-b\pm\sqrt{\triangle-\frac{4a^2}{n}K}}{\frac{2a}{n}}.$$

因$\frac{4a^2}{n}K>0$，故当 $\triangle\leqslant 0$ 时，$\triangle-\frac{4a^2}{n}K<0$. 这就是说，当 $\triangle\leqslant 0$ 时，方程 (2) 无实数解，所以 x_1，x_2，…，x_n 也无实数解，a)、b) 由此得到证明. 证毕.

【附注】 1. 此题的方程组是 n 元二次方程组，内容和解法比较新颖，我国中学生很少遇到. 方程组中方程的个数不是具体的数，而是以任意自然数，这对启发学生的分析和思维的能力，为今后学习高等数学都是有好处的.

2. 解多元的二次方程总是想法化成解一元二次方程，而一元二次方程的解法及根的讨论中学生是很熟悉的，因而此题在证明过程中首先考虑 $x_i=y$ ($i=1, 2, \cdots, n$) 这种特殊情况的解是很自然的，也是有道理的.

3. 当 $\triangle\leqslant 0$ 时，证明原方程组不存在别的解的方法，仍然是想法把问题转化为解一元二次方程的问题. 如何转化呢？这里的技巧性处置在于：利用"平方中项"和"算术中项"的定理，将等式变为不等式；再由不等式的一边加上某一常数，又将不等式变为等式；作变量代换后，使多元化为单元，最后变成了解关于新变量的一元二次方程，使问题得到简捷而完满的解决. 特别是我们在分析和解决问题时，要学会运用这种由"等"变"不等"，再由"不等"变"等"的辩证法.

4. 此种解法并不是唯一的，但比较简单，问题是在证明

的过程中，用到了关于若干个数的平方中项和算术中项的定理，我国中学数学内容中，对于这一重要的不等式，在两个数或三个数的情况下介绍过．由于这个结论的用处广，在教学过程中适当推广（证明并不难）一下这个定理肯定是有益的．

第　四　题（波兰命题）

求证：对于每一个四面体，都存在这样一个顶点．从这个顶点出发的三条棱作为三边可以构成一个三角形．

【分析】 这是个立体几何题，只要反复运用关于“三角形的任意两边之和大于第三边”的不等式，即可比较容易地证出．

〈证明〉 我们考察任意一个四面体 $ABCD$（图10-2），用 a，b，c，d，e，f 分别表示棱 BC，AC，AB，AD，BD，CD 的长度．

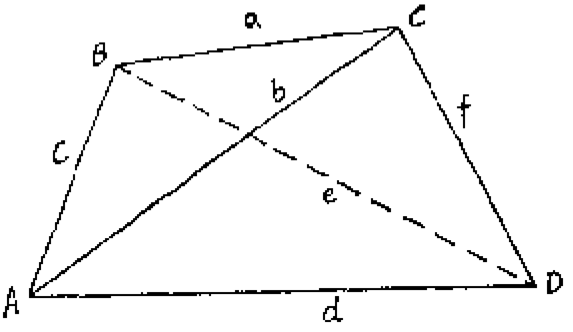


图 10—2

不失一般性，假定棱 AD 的长度 d 是这些棱长中最长的一个，因此有

$$d+e>f,$$
$$d+b>c,$$
$$d+f>e,$$
$$d+c>b \qquad (1)$$

对于三角形 ABD 和三角形 ADC，有不等式

$$c+e>d,\ b+f>d.$$

因此，

$$b+c+e+f>2d.$$

所以，$b+c>d$ 和 $e+f>d$ 中至少有一个成立．

故根据 (1) 中的 $d+b>c$，$d+c>b$ 和上面的 $b+c>d$ 知，从 A 点出发的三条棱 AB、AC，AD 可以构成一个三角形．

【附注】 根据 (1) 中的 $d+e>f$，$d+f>e$ 和上面的 $e+f>d$ 亦知，从 D 点出发的三条棱 DA、DC、DB 可以构成另一个三角形．

第　五　题　(德意志民主共和国命题)

已知 a 为正实数，而 f 是定义在全体实数上的实函数，且对于每一个实数 x 满足条件：

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}.$$

$a)$　试证明：f 是周期函数，即存在这样的实数 $b>0$，使得 $f(x+b)=f(x)$ 对每一个 x 都成立．

$b)$　对于 $a=1$ 的情况，给出这种函数的一个例子，且此 $f\neq$ 常数．

【分析】 这是有关周期函数的一个问题．解决本题 $a)$ 的关键，在于找出使得 $f(x+b)=f(x)$ 成立的实数 $b>0$．

因为对于每一实数 x，都有

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}\quad(a>0),$$

故有

$$f[(x+a)+a]=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2}$$

(这里 $x+a$ 也是一实数)．

对根号下的函数式子，运用已知条件变形，容易得到

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|.$$

而 $f(x)=f[(x-a)+a]=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-a)-[f(x-a)]^2}$

$\geqslant\frac{1}{2}$，所以

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|$$

$$=f(x)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=f(x).$$

这样，$b=2a$ 已找出，所以 f 为周期函数就肯定无疑了.

至于本题之 b)．当 $a=1$ 时，找出满足条件的周期函数的例子就不会困难了.

因为 f 的周期是 $b=2a$ (a 为正实数)，那么当 $a=1$ 时，所要找的函数 $f(x)$ 的周期是 $b=2$.

在中学教材里大量见到的周期函数是三角函数，因此不难找一个满足上述条件的三角函数 $f(x)$.

例如函数 $f(x)=\frac{1}{2}\left(1+\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|\right)$ 的周期就是2．事实上：

$$f(x+2)=\frac{1}{2}\left(1+\left|\cos\frac{\pi(x+2)}{2}\right|\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\left|\cos\left(\frac{\pi x}{2}+\pi\right)\right|\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|\right)$$

$$=f(x).$$

下面，只要证明上述函数 $f(x)$ 满足下述条件即可

$$f(x+1)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}.$$

〈证明〉 a) 根据题设条件，有：

$$\begin{aligned}
f(x+2a) &= f[(x+a)+a] \\
&= \frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2} \\
&= \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}} \\
&\quad \overline{-\left(\frac{1}{4}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}+f(x)-[f(x)]^2\right)} \\
&= \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+[f(x)]^2} \\
&= \frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|.
\end{aligned}$$

由于

$$f(x)=f[(x-a)+a]=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-a)-[f(x-a)]^2}$$

$\geqslant\frac{1}{2}$，所以

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=f(x)-\frac{1}{2}.$$

于是得到

$$\begin{aligned}
f(x+2a) &= \frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}+f(x)-\frac{1}{2} \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

这样，a) 得证，此时正实数 $b=2a$.

b) 当 $a=1$ 时，下列周期函数是满足题目要求的一个

具体例子：

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1+\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|\right)，\text{周期 } b=2.$$

事实上，此函数 $f(x)\neq$ 常数；并有：

$$\begin{aligned}
f(x+1)&=\frac{1}{2}\left(1+\left|\cos\frac{\pi(x+1)}{2}\right|\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\left|\cos\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right|\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi x}{2}}\right)\\
&=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1+\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|}{2}\cdot\frac{1-\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|}{2}}\\
&=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)\cdot(1-f(x))}\\
&=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}.
\end{aligned}$$

【附注】 1. 此题的解答过程中紧紧扣住周期函数的定义这一基本概念，自始至终利用已给函数方程的条件，可见“紧扣基本概念”、“运用已知条件”这两者在解答任何数学问题时都是重要的。

2. 作为题目要求的函数的例子的存在不是唯一的，下列周期函数也是一例：

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1+\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\right).$$

对此，请读者自已验证。

第 六 题 (英国命题)

假定$[x]$是不超过x的最大整数，对于任意的正整数n，试计算下列和：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right].$$

【分析】 首先要理解$[x]$是不超过x的最大整数的意思．例如，设$x=5.3$，则$[x]=[5.3]=5$．不超过5.3的整数虽然还有4，3，2，1，等等，但$[x]=[5.3]=5$是表示不超过5.3的整数中的最大的一个．

根据本题的条件，$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$表示不超过$\frac{n+2^k}{2^{k+1}}$的最大整数．为了方便起见，不妨令

$$C_k=\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right],$$

则C_k就是具有下列性质的整数m中的最大的：

$$m\leqslant\frac{n+2^k}{2^{k+1}}.$$

于是有关系式：

$$2^{k+1}m-2^k\leqslant n,$$

即
$$2^k(2m-1)\leqslant n.$$

上述不等式说明了n与k的关系．为了找其规律，我们不妨任意取定一个正整数n，如令$n=12$，由$2^k(2m-1)\leqslant n=12$，看看有何规律．易见：

当$k=0$时，由$2^0(2m-1)\leqslant 12$知正整数m可取1，2，3，4，5，6，则有一数列

$1\cdot2^0=1$，$3\cdot2^0=3$，$5\cdot2^0=5$，$7\cdot2^0=7$，$9\cdot2^0=9$，

$11\cdot 2^0=11$；

当 $k=1$ 时，由 $2^1(2m-1)\leqslant 12$ 知正整数 m 可取 1，2，3，则有一数列

$$1\cdot 2^1=2,\ 3\cdot 2^1=6,\ 5\cdot 2^1=10;$$

当 $k=2$ 时，由 $2^2\cdot(2m-1)\leqslant 12$ 知正整数 m 可取 1，2，则有一数列

$$1\cdot 2^2=4,\ 3\cdot 2^2=12;$$

当 $k=3$ 时，由 $2^3(2m-1)\leqslant 12$ 知正整数 m 只能取 1，则仅有一数

$$1\cdot 2^3=8.$$

但 $2^4=16>12$，即 $k=4$ 时，不满足 $2^4(2m-1)\leqslant 12$，所以 $k\neq 4$. 这时，可认为当 $2^k>n$ 时，有 $C_k=0$（见附注）.

由以上分析知，取定 $n=12$ 时，K 只能取 0，1，2，3；且由 $k=0$ 知 m 只能取 1，2，3，4，5，6，其中最大的为 6，故 $C_0=6$. 同理：

由 $k=1$ 知 m 只能取 1，2，3，故 $C_1=3$.

由 $k=2$ 知 m 只能取 1，2，故 $C_2=2$.

由 $k=3$ 知 m 只能取 1，故 $C_3=1$.

由 $k\geqslant 4$，有 $C_k=0$.

同时，由 k 所得到的数列的全部元素的总和恰好是 12，而且 1，2，3，…，12 中的每一个正整数都唯一地包含在某一个 k（$k=0$，1，2，3）的数列中. C_k 则是对于某一个 k 的数列的项数. 对这一特定的 $n=12$ 来说，恰好有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{12+2^k}{2^{k+1}}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}C_k=12.$$

根据上述分析的思路，不难计算所求和为 n（n 为任意

自然数)：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^k}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}C_k=n.$$

〈解答〉 根据假定可设

$$C_k=\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right],$$

则 C_k 是满足下列不等式的整数 m 中的最大者

$$m\leqslant\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \text{或} 2^{k+1}m-2^k=2^k(2m-1)\leqslant n,$$

其中 n 是任意的正整数.

现在考察数列

$$\{2^k(2m-1)\}.\ (1\leqslant m\leqslant C_k) \tag{1}$$

显然 (1) 中 (从 2^k, $3\cdot2^k$, $5\cdot2^k$, …开始) 正好包含能被 2^k 整除，而不能被 2^{k+1} 整除，并且不大于 n 的所有正整数.

因为每个正整数恰好含有一个 2 的最高幂作为因子，即是说，每一个正整数都可以唯一地表示为 $2^k(2m-1)$ 的形式 ($k=0$, 1, 2, …). 例如：

$$1=1\cdot2^0,\ 2=1\cdot2^1,\ 3=3\cdot2^0,$$

$$4=1\cdot2^2,\ 5=5\cdot2^0,\ 6=3\cdot2^1,\ \cdots \tag{2}$$

所以 1, 2, 3, …, n 中的每个数都对应一个 k, 也只对应一个 k ($k=0$, 1, 2, …). 如由 (2) 知：3 对应 $k=0$, 6 对应 $k=1$, 12 对应 $k=2$, ……而且都唯一地包含在某一个 k ($k=0$, 1, 2, …) 的数列 (1) 中，C_k 则是对于某一个 k 的数列 (1) 的项数，当 $2^k>n$ 时，有 $C_k=0$.

因此，n 是数列 (1) 对于 $k=0$, 1, 2, …的所有项数的总和，故有

$$n=\sum_{k=0}^{\infty}C_k=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right].$$

这就是说，所求之和为 n.

【附注】 1. 这是一个关于数论方面的问题，但用到数论的知识不多，解答比较困难. 关键在于采用由特殊推到一般的办法，从 n 为一取定的正整数出发，根据已知条件，找出具体规律，再推至一般. 这是常用的解题方法，希望读者细心体会.

2. 本题是求无限和，但根据题设得到的为一不等式 $2^k(2m-1)\leqslant n$；当任一正整数 n 取定后，解出适合此不等式的 k 又是有限的. 为了一致起见，在解答时，作了如下补充规定，即：

当 $2^k>n$ 时，规定 $C_k=0$.

这就是说，当 $2^k>n$ 时，没有不超过 $\frac{n+2^k}{2^{k+1}}$ 的最大整数，即

$$C_k=\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=0.$$

例如，当 $n=12$ 时，我们可以理解为：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{12+2^k}{2^{k+1}}\right]=\sum_{k=0}^{3}C_k+\sum_{k=4}^{\infty}C_k=12+0=12.$$

显然，这丝毫没有改变题意.

第十一届国际中学生
数学竞赛试题分析与解答

1969年在罗马尼亚举行

第　一　题 （德意志民主共和国命题）

求证，有无穷多个自然数 a 具有下列性质：没有一个自然数 n 使得数 $Z=n^4+a$ 是质数.

【分析】 本题可以换个说法，即求证存在无穷多个自然数 a 满足下列条件：对于所有的自然数 n 使得数 $Z=n^4+a$ 不是质数．这也就是能求得无穷多个自然数 a，使数 $Z=n^4+a$ 是合数(对所有的自然数 n)．为此，只要能证明数 n^4+a 能分解成两个大于1的因于的乘积，问题就解决了.

要使 Z 能分解成两个大于1的因子的乘积，可考虑 a 为形如 $4k^4$ 的自然数，因这时通过配方可得到：

$$n^4+4k^4=[(n+k)^2+k^2][(n-k)^2+k^2].$$

只要这里的自然数 $k\neq1$，其中两个方括号里的数都是大于1的自然数，故 n^4+4k^4 就是一个合数了(对所有的自然数 n).

由于 k 可取大于1的一切自然数，故 $a=4k^2$ 也能取得无穷多个自然数了，本题要求就全部达到了.

易见，当 $k=1$ 时，则

$$n^4+4=(n^2+2)^2-4n^2$$

$$= (n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$$
$$= [(n+1)^2+1][(n-1)^2+1].$$

这时，在 $n=1$ 的情形下，$n^4+4=5$ 是一质数，所以 K 不能为 1．

〈证明〉 设 $a=4k^4$，且 k 是大于 1 的自然数，于是有：

$$Z=n^4+a=n^4+4k^4=(n^2+2k^2)^2-4n^2k^2$$
$$=(n^2+2k^2+2nk)(n^2+2k^2-2nk)$$
$$=[(n+k)^2+k^2][(n-k)^2+k^2]. \qquad (1)$$

由于 $k>1$，故对一切自然数 n，有：

$$(n+k)^2>0, \quad (n-k)^2\geqslant 0;$$

因而 $$(n+k)^2+k^2>1, \quad (n-k)^2+k^2>1.$$

这就是说，(1)的两个方括号中都是大于 1 的自然数．从而当 $a=4K^4$ 和 $K>1$ 时，数

$$Z=n^4+a$$

对于所有的自然数 n 是合数．

又由于有无穷多个大于 1 的自然数 k．因此也就得到无穷多个自然数 $a=4k^4$，使得对于一切自然数 n，数 $Z=n^4+a$ 都不是质数，从而本命题得证．

【附注】 1．本题是有关数论的一个题，解题过程中只用到了质数(素数)，合数及自然数等基本概念．证明的关键在于：取 a 为形如 $4k^4$(自然数 $k>1$)的自然数，再将 n^4+4k^4 配方，进行因式分解．

2．本题中 n 的指数还可以推广到 $4i\,(i=1, 2, 3, \cdots)$ 的情况，即本题的结论对数 $Z=n^{4i}+a\,(i=1, 2, 3, \cdots)$ 也是正确的．事实上，只需作 $n^i=N$ 这一代换，则

$$Z=n^{4i}+a=N^4+a$$

就变为本题的“模式”.

第　二　题　（匈牙利命题）

设 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n 是实常数，x 是实变量，且

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{1}{2}\cos(a_2+x)+\frac{1}{2^2}\cos(a_3+x)$$

$$+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x).$$

如果 $f(x_1)=f(x_2)=0$，则恒有

$$x_2-x_1=m\pi$$

(m 为整数)成立.

【分析】 因为所给的函数 $f(x)$ 是任意有限和的形式. 为了便于研究和讨论问题，首先可将函数 $f(x)$ 化成更简单的形式，这里应用加法定理可以得到

$$f(x)=\cos x\left(\cos a_1+\frac{1}{2}\cos a_2+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos a_n\right)$$

$$-\sin x\left(\sin a_1+\frac{1}{2}\sin a_2+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\sin a_n\right).$$

为方便起见，令

$$\cos a_1+\frac{1}{2}\cos a_2+\frac{1}{2^2}\cos a_3+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos a_n=A,$$

$$\sin a_1+\frac{1}{2}\sin a_2+\frac{1}{2^2}\sin a_3+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\sin a_n=B,$$

显然 A、B 均为常数，从而有

$$f(x)=A\cdot\cos x-B\sin x.$$

要使本题恒有 $x_2-x_1=m\pi$ (m 为整数)成立，必须 $f(x)$ 不恒为零. 否则，若 $f(x)$ 恒为零，即

$$f(x)=A\cdot\cos x-B\cdot\sin x\equiv 0$$

对使 $f(x)$ 有定义的一切实数 x 都成立，则有

$$A=B=0,$$

特别有

$$f(x_2-x_1)=A\cdot\cos(x_2-x_1)-B\cdot\sin(x_2-x_1)=0.$$

这样，x_2-x_1 就有可能不为 $m\pi$.

所以首先必须证明函数 $f(x)$ 不恒等于零，而这一点是可以办到的. 因为一定存在某个实数 x_0，使得 $\cos(a_1+x_0)=1$. 例如：若 $a_1=\frac{\pi}{6}$，则取 $x_0=-\frac{\pi}{6}$，就有 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos 0=1$；

又因 $\cos(a_i+x_0)\geqslant -1$ $(i=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$，故有

$$\cos(a_1+x_0)+\frac{1}{2}\cos(a_2+x_0)+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x_0)$$

$$\geqslant 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\cdots-\frac{1}{2^{n-1}}=1-\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}>0.$$

即 $f(x_0)\neq 0$. 这就是说，$f(x)$ 不恒为零.

在 $f(x)$ 不恒为零的基础上，就可以保证 A 和 B 不能同时为零，即 $A^2+B^2\neq 0$.

根据已知条件 $f(x_1)=f(x_2)=0$，有

$$A\cdot\cos x_i-B\sin x_i=0 \quad (i=1,\ 2).$$

用 $\sqrt{A^2+B^2}$ 除上式两边，得

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x_i-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x_i=0 \quad (i=1,2).$$

引入辅助角 y，即得

$$\cos(x_i+y)=0 \quad (i=1,2).$$

由此易知：

$$x_1+y=\frac{\pi}{2}+m_1\pi; \qquad x_2+y=\frac{\pi}{2}+m_2\pi$$

（此处 m_1, m_2 均为整数）.

两式相减，命题即得证明：

$$x_2 - x_1 = m\pi \quad (m = m_2 - m_1 \text{ 也是整数}).$$

〈证明〉 首先证明函数 $f(x)$ 不恒为零．事实上，存在一个实数 x_0，使得 $\cos(a_1 + x_0) = 1$，再由

$$\cos(a_i + x_0) \geqslant -1 \quad (i = 2, 3, \cdots, n),$$

得 $$\frac{1}{2}\cos(a_2 + x_0) + \frac{1}{2^2}\cos(a_3 + x_0) + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x_0)$$

$$\geqslant -\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{2^{n-1}} \geqslant -\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = -1 + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

因此，

$$f(x_0) = \cos(a_1 + x_0) + \left(-1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} > 0,$$

即 $f(x_0) \neq 0$．也就是说，$f(x)$ 不恒为零．

其次，应用加法定理可得：

$$f(x) = \cos x \cos a_1 + \frac{1}{2}\cos x \cos a_2 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos x \cos a_n$$

$$- \sin x \sin a_1 - \frac{1}{2}\sin x \sin a_2 - \cdots - \frac{1}{2^{n-1}}\sin x \sin a_n$$

$$= \cos x\left(\cos a_1 + \frac{1}{2}\cos a_2 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos a_n\right)$$

$$- \sin x\left(\sin a_1 + \frac{1}{2}\sin a_2 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\sin a_n\right).$$

又令 $$\cos a_1 + \frac{1}{2}\cos a_2 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos a_n = A,$$

$$\sin a_1 + \frac{1}{2}\sin a_2 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\sin a_n = B.$$

因为 a_1，a_2，a_3，…，a_n 为实常数，所以 A 和 B 也是实常数．于是得

$$f(x) = A\cos x - B\sin x \tag{1}$$

由于 $f(x)$ 不恒为零，故 A，B 不同时为零，即

$$A^2+B^2>0.$$

用 $\sqrt{A^2+B^2}$ 除(1)式两边，得

$$\frac{f(x)}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x \qquad (2)$$

因 $\left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|\leqslant 1,\left|\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|\leqslant 1,$

且 $\frac{A^2}{A^2+B^2}+\frac{B^2}{A^2+B^2}=1$. 成立，

所以可选择一实数 y，使得

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos y \quad 和 \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sin y. \qquad (3)$$

(3)代入(2)，得：

$$\cos y\cos x-\sin y\sin x=\frac{f(x)}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (4)$$

根据题设 $f(x_1)=f(x_2)=0$，故由(4)又得：

$$\cos y\cos x_1-\sin y\sin x_1=0;$$

$$\cos y\cos x_2-\sin y\sin x_2=0.$$

即
$$\cos(x_i+y)=0 \quad (i=1,\ 2).$$

因此，

$$x_1+y=\frac{\pi}{2}+m_1\pi; \qquad (5)$$

$$x_2+y=\frac{\pi}{2}+m_2\pi, \qquad (6)$$

此处 m_1，m_2 是整数.

(6) − (5)，得

$$x_2-x_1=(m_2-m_1)\pi=m\pi,$$

其中 $m=m_2-m_1$ 是一整数. 证毕.

【附注】 1．本题函数是三角级数的有限和的形式，根据题设条件，知道两个特殊的函数值等于零，要证明相应的二个自变量之差恒为 $m\pi$．解题的基本思路是想法分别求出 x_1，x_2 的通值，然后做差，问题就解决了．为此，先用加法定理，展开三角级数的各项，再重新组合、集项，将函数 $f(x)$ 的形式进一步化简，这对证明此题是非常重要的．

2．在本题的证明过程中，首先要证明函数 $f(x)$ 不恒为零是必不可少的．因只有证明了这一点，才能保证 A、B 不同时为零，因而 $A^2+B^2\neq 0$，使引入辅助角成为可能，这就能具体地求出 x_1 与 x_2 的值．

第 三 题 (波兰命题)

设四面体的 K 条边的长度均为 a，其余 $6-K$ 条边的长度均为 1，试对 $K=1,2,3,4,5$ 的情况确定四面体存在的充分必要条件．即确定 a 必须满足的条件．

【分析】 此题解法比较简单，但要注意讨论的全面性，不要有遗漏．可按 $K=1$，$K=5$，$K=2$，$K=4$ 和 $K=3$ 的情况依次进行讨论．

根据题设条件，当 $K=1$ 时，就是四面体只有一条边的长为 a，其余 5 条边的长均为 1．因 $K=5$ 正好与 $K=1$ 的情形相反，所以 $K=5$ 的情况可以从 $K=1$ 的情形导出，只需将边长 a 与 1 互换就行了．

同样，$K=2$ 的情形与 $K=4$ 的情形也正好相反，只需把边长 a 与 1 互换就行了．

在讨论过程中，运用“三角形的两边之和大于第三边”的不等式，勾股定理及有关不等式的性质，即能获得正确解答．

〈解答〉 下面按 $K=1$，$K=5$，$K=2$，$K=4$ 和 $K=3$ 的情形依次进行讨论．

1） $K=1$ 的情形：

如果存在一个四面体 $ABCD$（图 11—1）具有题设的性质．不失一般性，可设 $\overline{AB}=a$，$\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}=1$，易由“三角形两边之和大于第三边”的不等式推得 $a<2$．

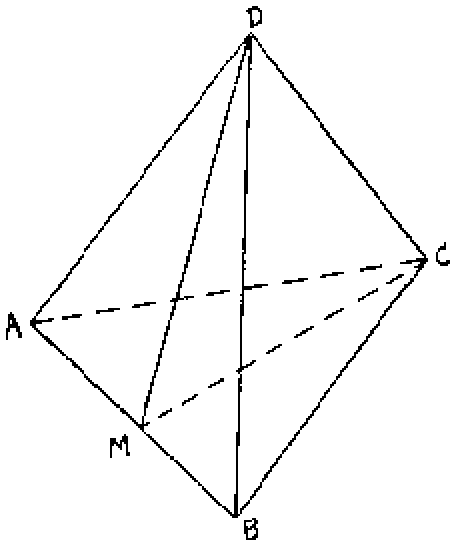


图 11—1

又设 M 是 $\overline{AB}$ 的中点，并连 CM、DM，则

$$\overline{CM}=\overline{DM}=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}.$$

在三角形 CMD 中，由于

$$\overline{CM}+\overline{DM}>CD,$$

所以有：
$$2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}>1,\ 4-a^2>1,\ a^2<3.$$

于是我们得到了四面体 $ABCD$ 存在的必要条件是

$$a<\sqrt{3}. \tag{1}$$

反之，若满足条件(1)，则有下列诸不等式成立：

$$\overline{CM}+\overline{DM}>\overline{CD},\quad \overline{CM}+\overline{CD}>\overline{DM},$$
$$\overline{DM}+\overline{CD}>\overline{CM}.$$

因此，存在一个三角形 CMD，具有上述给定的边长．从而在以 A，B，C 三点（不共线）所决定的平面之外还存在一点 D，使得 $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}=1$．所以条件 $a<\sqrt{3}$ 也是四面体 $ABCD$ 存在的充分条件．

2) $K=5$ 的情形：

这种情形可以归结为 $K=1$ 的情形，只需将边长 a 和 1 互相对换就行了．由此，我们得到四面体 $ABCD$ 存在的充分必要条件是

$$\frac{1}{a}<\sqrt{3}, \quad 即 \quad a>\frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{2}$$

3) $K=2$ 的情形：

此时又要分下列两种情况讨论：

第一种情况：长度为 a 的两条棱在同一个三角形中．

不妨设 $\overline{AC}=\overline{BC}=a$，$\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}=1$，则由三角形的不等式得 $2a>1$，即 $a>\frac{1}{2}$.

又设 M 为 $\overline{AB}$ 的中点，如图 11—1 所示，则有

$$\overline{CD}+\overline{DM}>\overline{CM}. 即 \quad 1+\frac{\sqrt{3}}{2}>\sqrt{a^2-\frac{1}{4}},$$

$$1+\sqrt{3}+\frac{3}{4}>a^2-\frac{1}{4}, \qquad a^2<2+\sqrt{3},$$

$$a<\sqrt{2+\sqrt{3}}. \tag{3}$$

但另一方面还有

$$\overline{DM}+\overline{CM}>\overline{CD}, 即 \quad \frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}>1,$$

$$\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}>1-\frac{\sqrt{3}}{2}>0, \qquad a^2>2-\sqrt{3}>0,$$

$$a>\sqrt{2-\sqrt{3}} \tag{4}$$

由 (3) 和 (4) 得到必要条件：

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}<a<\sqrt{2+\sqrt{3}} \tag{5}$$

反之，若满足条件 (5)，那末就存在一个三角形 CMD，从而也就存在一个四面体 $ABCD$．所以条件 (5) 也是这第一

种情况的充分条件.

第二种情况：长度为 a 的两条棱不在同一个三角形中.

不妨设 $\overline{AB}=\overline{CD}=a$，$\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{BD}=1$（见图 11—1），则由三角形的不等式得 $a<2$. 又因

$$\overline{CM}=\overline{DM}=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}},\qquad \overline{CD}=a,$$

故得：
$$2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}>a,\ 4-a^2>a^2,\ 2a^2<4,$$

$$a<\sqrt{2}. \tag{6}$$

在此情况下，条件(6)也是充分的，因为这时总可以作出一个具有本题所要求的四面体.

综合(5)与(6)得到：在 $K=2$ 时，四面体 $ABCD$ 存在的充要条件是

$$a<\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}). \tag{7}$$

4) $K=4$ 时的情形：

这种情形也可以归结为 $K=2$ 的情形，只需将边长 a 与 1 互相对换就行了，由此，我们得到四面体 $ABCD$ 存在的充分必要条件是

$$\frac{1}{a}<\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

即
$$a>\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}). \tag{8}$$

5) $K=3$ 的情形：

此时又要分下列两种情况讨论：

第一种情况：长度为 a 的三条边通过同一个顶点.

不妨设 $\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}=a$，$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}=1$，如图

11—2 所示．又设 S 是等边 $\triangle ABC$ 的中心，并连 AS，则有

$$\overline{SD}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AS}^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}.$$

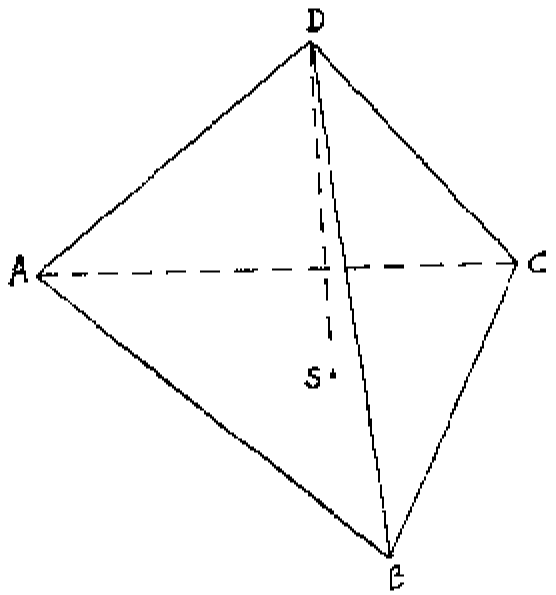


图 11—2

所以，只要满足条件

$$a>\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad (9)$$

四面体 $ABCD$ 总是存在的．

第二种情况：长度为 a 的三条边在一个三角形中．

不妨设 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=a$，$\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}=1$，类似第一种情况（见图 11—2），可得

$$SD=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}.$$

所以，只要满足条件

$$a<\sqrt{3}, \qquad (10)$$

四面体 $ABCD$ 总是存在的．

因为 (9) 和 (10) 所分别确定的两个集合的并集是实数集，所以在 $K=3$ 时，在一切可能的情况下，对于所有的正实数 a，满足本题所要求性质的四面体 $ABCD$ 总是存在的．

综上所述，具有本题所要求性质的四面体存在的充分必要条件分别为：

在 $K=1$ 时：$0<a<\sqrt{3}$；

在 $K=2$ 时：$0<a<\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$；

在 $K=3$ 时：$a>0$；

在 $K=4$ 时：$a>\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$；

在 $K=5$ 时：$a>\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【附注】 1. 这一立体几何问题涉及到“三角形的不等式”，勾股定理，不共线三点唯一决定一个平面等基础知识，还要不等式组的知识，确有一定的综合性；此外，还要有较高的分析问题和空间想象能力，才能正确地解答本题.

2. 在 $K=3$ 时，对于第一种情况(其他情况类似)，先作出边长为 1 的正$\triangle ABC$；再过$\triangle ABC$ 的中心 S 作直线 $SD\perp$ 平面 ABC；又在直线 SD 上，自 S 截取 $\overline{SD}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$，则 D 即为所求四面体 $ABCD$ 的第四个顶点. 因此，在 $K=3$ 时，符合条件的四面体总是存在的.

第 四 题 (荷兰命题)

设 Y 是以线段 AB 为直径的半圆弧，C 是 Y 弧上异于 A 与 B 的点，D 是从 C 到 AB 上的垂线的垂足. 设 Y_1，Y_2，Y_3 是以 AB 为公切线的三个圆，其中 Y_1 是三角形 ABC 的内切圆，而 Y_2 与 Y_3 二者都和 CD 及 Y 相切.

求证：圆 Y_1，Y_2，Y_3 有第二条公切线.

【分析】 如图 11—3，由题设知 AB 是圆 Y_1，Y_2，Y_3 的公切线，需要证明圆 Y_1，Y_2，Y_3 还有第二条公切线，显然只需证明三个圆的圆心 M_1，M_2，M_3 在一直线上. 因此时根据对称性，与直线 AB 关于圆的连心线对称的那条直线就是所求的圆 Y_1，Y_2，Y_3 的第二条公切线.

要证点 M_1，M_2，M_3 在一直线上，只需证 M_1 是线段

M_2M_3 的中点即可．事实上：

在直角三角形 OM_2N_2 中，因

$$M_2N_2 = r_2,\ \ OM_2 = \frac{C}{2} - r_2,$$

$$N_2O = N_2D + DB - OB = r_2 + q - \frac{C}{2},$$

故由勾股定理易见得 $r_2 = a - q$.

同理，由直角三角形 ON_3M_3 可得 $r_3 = b - p$

根据从内切圆的切点到三角形顶点间距离的定理及 $CT_1 = r_1 = M_1T_1$ 可知

$$r_1 = \frac{1}{2}(a + b - c),$$

这是因为：

$$2CT_1 + 2T_1A + 2T_2B = a + b + c,$$

$$CT_1 = \frac{1}{2}(a + b + c) - (T_1A + T_2B)$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c) - C = S - C.$$

从而四边形 $CT_1M_1T_2$ 为正方形，所以 $CT_1 = T_1M_1 = r_1$，故

$$r_1 = S - C = \frac{1}{2}(a + b + c) - C = \frac{a + b + c - 2c}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(a + b - c).$$

r_1，r_2，r_3 分别求出后，就不难推得：

$$\frac{1}{2}(M_2N_2 + M_3N_3) = M_1N_1,$$

$$\frac{1}{2}(BN_2 + BN_3) = BN_1, BN_2 - BN_1 = BN_1 - BN_3,$$

$$N_1N_2 = N_1N_3.$$

由此推知：M_1, M_2, M_3 共线，并且 M_1 为线段 M_2M_3 的中点。

下面就根据这一思路来证明本题。

〈证明〉　如图 11—3，设 M_i 与 r_i 分别是圆 $Y_i(i=1,2,3)$ 的圆心与半径，N_i 为 M_i 在 AB 上的投影，O 为圆 Y 的圆心。为方便计，令：

$$BC=a,\ CA=b,\ AB=c,$$
$$AD=p,\ DB=q=c-p.$$

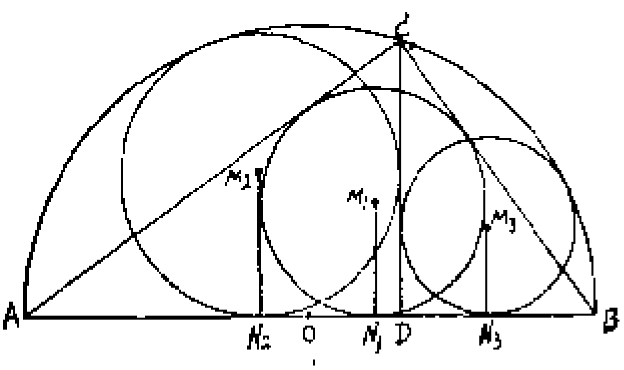


图 11—3

不失一般性，设 N_2 位于线段 AD 上。首先计算 r_2 和 r_3。

N_2 是 AB 与圆 Y_2 相切的切点，又连 OM_2，则在直角三角形 OM_2N_2 中，有：

$$M_2N_2=r_2,\ OM_2=\frac{c}{2}-r_2,$$

$$N_2O=N_2D+DB-OB=r_2+q-\frac{c}{2}.$$

因圆 Y_2 与半圆 Y（半径为$\frac{c}{2}$）及直径 AB 内切，所以

$$OM_2=\frac{c}{2}-r_2.$$

从而由勾股定理得：

$$\left(r_2+q-\frac{c}{2}\right)^2+r_2^2=\left(\frac{c}{2}-r_2\right)^2$$

$$(r_2+q)^2-cq-cr_2+\frac{c^2}{4}+r_2^2=\frac{c^2}{4}-cr_2+r_2^2,$$

$$(r_2+q)^2-cq=0,$$

$$(r_2+q)^2=cq.$$

又由于直角边 a 是斜边 c 及该直角边在斜边上射影 q 的比例中项，即

$$a^2=cq.$$

并且 $r_2+q>0$，$a>0$，所以

$$r_2+q=a,$$

即
$$r_2=a-q. \tag{1}$$

同理，连 OM_3，则在直角三角形 ON_3M_3 中，有

$$r_3=b-p \tag{2}$$

再求圆 Y_1 的半径 r_1. 设圆 Y_1 分别与 AC、BC 切于点 T_1、T_2，连 M_1T_1，M_1T_2，根据从内切圆的切点到三角形顶点间距离的关系式 $CT_1=S-c$，有

$$r_1=S-c=\frac{1}{2}(a+b-c)$$

此处 $S=\frac{1}{2}(a-b+c)$.

由(1)及(2)可得：

$$\frac{1}{2}(M_2N_2+M_3N_3)=\frac{1}{2}(r_2+r_3)=\frac{1}{2}(a-q+b-p)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b-c)=r_1=M_1N_1. \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}(BN_2+BN_3)=\frac{1}{2}(q+r_2+q-r_3)$$

$$=\frac{1}{2}(2q+a-q-b+p)$$

$$=\frac{1}{2}(a+c-b)=S-b=BN_1,$$

即 $$BN_2-BN_1=BN_1-BN_3,\quad N_1N_2=N_1N_3, \tag{4}$$

所以 N_1 是 N_2N_3 之中点.

根据(3)、(4)，四点 M_3、M_2、N_2、N_3 是一直角梯形的四个顶点，M_1N_1 是它的中位线. 由此可知，M_1 是线段 M_2M_3 之中点. 于是，点 M_1，M_2，M_3 在同一直线上.

从而，与直线 AB 关于连心线 M_2M_3 对称的直线同样相切于圆 Y_1，Y_2，Y_3. 这就是说，圆 Y_1，Y_2，Y_3 除了公切线 AB 外，还有第二条公切线.

【附注】 这一平面几何题的证明方法很值得学习. 要证圆 Y_1，Y_2，Y_3 还有第二条公切线. 一般来说，另外找出一条就行了. 但找的方法各有不同. 本题是利用图形的对称性来达到目的，将要证的问题转化为证三圆心共线，并通过计算知道 M_1 是线段 M_2M_3 的中点，这就使得问题变得简单好解了. 这种利用图形的对称性的解题方法是值得我们借鉴的.

第　五　题 (蒙古命题)

在一平面上已给 n 个点，其中 $n>4$，且无三点共线. 求证：至少能找到 C^2_{n-3} 个凸四边形，其顶点为已给的点.

【分析】 采用从特殊到一般的思路，因为 $n>4$，故可先从 $n=5$ 开始讨论，检验一下在 $n=5$ 的情况下，命题是否正确.

由于 $C_{5-3}^{2}=1$，所以在 $n=5$ 时，只要证明至少存在一个凸四边形就行了．此时，无非有三种情况需要研究：

1）五个点是凸五边形的顶点；

2）五点中四点是凸四边形的顶点；

3）有三点 A，B，C 构成三角形，而其他两点 D, E 在三角形内部(图 11—4)．易知 1) 与 2) 命题都对．对于 3)，不难证明四边形 $BCED$ 是凸四边形，故命题也真．

总之，在 $n=5$ 时，本命题成立．

在此基础上，如果能证明对任意给定的 n 个点($n>4$)，命题为真，问题就解决了．

假如给定的 n 个点组成一个点集，那么我们每次从 n 个点中取出五个点组成一个子集，这是从 n 个元素中，每次取出五个元素的组合问题．易知，按这种取法，我们可得到 C_n^5 个不同的子集，每个子集由五个点组成．上面已证，在每个子集中必有四点构成一个凸四边形．另一方面，同一个四边形最多能属于 $n-4$ 个不同的五点子集合．例如 $n=6$，有六个点，分别标记为 1，2，3，4，5，6．不失一般性，把 1，2，3，4 看作组成一个四边形，则它最多属于子集 {1，2，3，4，5} 和 {1，2，3，4，6}，此时

$$n-4=6-4=2.$$

因此，一般地说，所有这些凸四边形的总数不小于

$$f(n)=\frac{1}{n-4}C_n^5.$$

现在只需证明对于 $n>5$，有

$$f(n)=\frac{1}{n-4}C_n^5 \geqslant C_{n-3}^{2}=g(n)$$

成立．

下面我们用两种方法来证明本命题．

〈证法一〉 首先证明 $n=5$ 时，本命题成立．

因为 $C_{5-3}^{2}=1$，故只要证明至少存在一个凸四边形就行了．对此，分三种情况讨论：

1）五个点是凸五边形的五个顶点．这时，五个点中的任意四个点都可以构成一个凸四边形，命题真；

2）五个点中的四个点是一凸四边形的顶点，不论题设的第五个点的位置如何命题显然也对；

3）三点 A，B，C 构成一三角形，且其他两点 D，E 在三角形里面．由题设，D，E 不是三角形 ABC 的任何一个顶点，故可设直线 DE 分别交三角形 ABC 的两边 AB 和 AC 于 P 和 Q(图 11—4)．

因为对角线 BE 和 CD 在四边形 $BCED$ 的内部，所以四边形 $BCED$ 是一凸四边形．

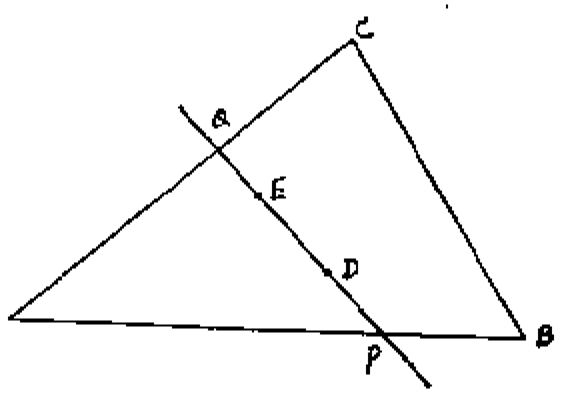


图 11—4

总之，对于平面上任意五个点，若其中没有任何三点共线，则至少有一个以给定的点为顶点的凸四边形．

现在给出任意 n 个点($n>4$)，可构成 C_n^5 个不同的子集，每个子集由五个点所组成．如上所证，在每一个子集中必有四点构成一凸四边形；反之，同一个四边形至多属于 $n-4$ 个不同的五个点的子集合．因此，所有这些凸四边形的总数

不小于(即大于或等于)

$$f(n)=\frac{1}{n-4}C_n^5.$$

令 $g(n)=C_{n-3}^2$，则

当 $n=5$ 时，有 $f(5)=g(5)=1$；

当 $n=6$ 时，有 $f(6)=g(6)=3$；

当 $n\geqslant 7$ 时，有

$$\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot 2}{120\cdot(n-3)(n-4)}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{60(n-4)}=\frac{1}{60}\cdot\frac{n^3-3n^2+2n}{n-4}$$

$$=\frac{1}{60}\left(n^2+n+6+\frac{24}{n-4}\right)$$

$$=\frac{1}{60}[n(n+1)+6]+\frac{2}{5(n-4)}$$

$$>\frac{n(n+1)+6}{60}\geqslant\frac{62}{60}>1,$$

从而
$$f(n)>g(n).$$

故对于所有大于 4 的 n，有下列关系式成立：

$$f(n)=\frac{1}{n-4}C_n^5\geqslant g(n)=C_{n-3}^2.$$

所以，至少能找到 C_{n-3}^2 个凸四边形，其顶点为已给的 n 个点.

〈证法二〉 首先证明如下引理.

<u>引理</u> 四点 A，B，C，D 中的任意三点都不在一直线上，若 D 点在$\angle ABC$ 的内部，且又在$\triangle ABC$ 的外部(图 11

—5)，则四边形 $ABCD$ 为凸四边形.

证　由于 D 在 $\angle ABC$ 的内部，则 C、D 必在直线 AB 之同侧；同理，A、D 在直线 BC 的同侧.

又 D 在 $\triangle ABC$ 的外部，连 AD、CD，则 $\angle BAD > \angle BAC$，即 B、C 在直线 AD 之同侧；同理，A、B 在直线 CD 的同侧.

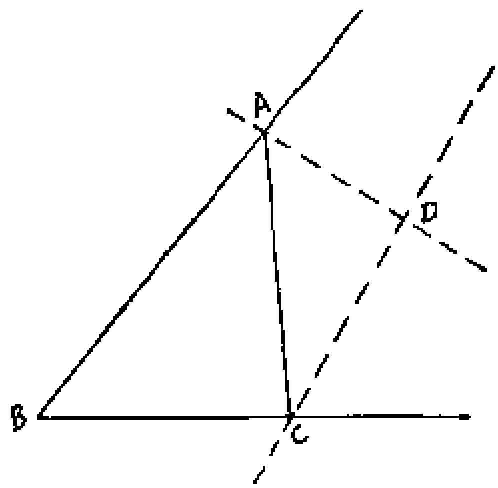


图 11—5

因此，$ABCDA$ 为封闭凸折线，故 $ABCD$ 为凸四边形. 引理至此证毕.

现在证明本题.

首先，在 n 个点中找出两点，不妨设为 A、B，使其余的 $n-2$ 个点都在直线 AB 的同侧. 这件事是完全可以办到的.

事实上，分别过这 n 点任意作彼此平行的 n 条直线，其中必有靠最外的一条（因 n 为有限的一个具体自然数），设为 l_1. 若 l_1 上有所设的两点，则条件已经满足. 若 l_1 只过一点 B，则由 B 出发，连结其余的 $n-1$ 个点作 $n-1$ 条射线，这些射线与 l_1 所成的角必有一个最小的，设为 α. 于是角 α 的另一边（设为 l_2）所经过的两点就是所求的两点.

其次，上述诸射线与 l_2 所成角也必然有一个最大的，设为 β. 由于所有 $n-2$ 个点都在 AB 的同侧，因此，可以规定 $\beta < \pi$. 不妨设角 β 的另一边经过另一点 C. 此时，其余 $n-3$ 个点必都在 $\angle ABC$ 的内部.

于是，我们在余下的 $n-3$ 个点中，任意取两点 D, E，并分别连结 AD，AE，BD，BE，CD，CE，如图 11—6 所示．由于这 n 个点中无三点共线，则 $\angle EAB \neq \angle DAB$，不失一般性，设 $\angle DAB > \angle EAB$，易见，D 是居于 $\triangle ABE$，$\triangle CBE$ 之外．又 BE 分 $\angle ABC$ 为两部分，故 D 必属于 $\angle ABE$ 或 $\angle CBE$ 其中之一．不妨设 D 为 $\angle ABE$ 的内点．

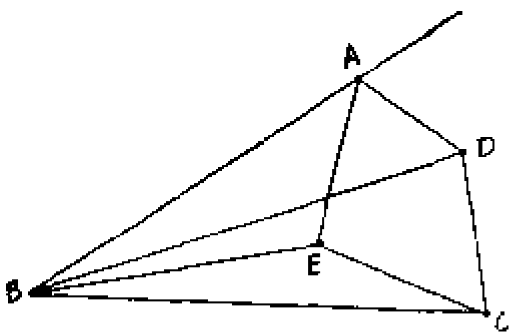


图 11—6

由此，根据上述引理知，$ABED$ 为凸四边形．

由于每次选取的两点不全相同，因此每次所得之凸四边形也不相同．而这样选取两点的方法只有 C_{n-3}^2 种，所以，以这 n 个点为顶点的凸四边形至少有 C_{n-3}^2 个．

【附注】 1．在分析和证明过程中我们使用了组合数的记号，比如 C_{n-3}^2，但也有用 $\binom{n-3}{2}$ 的，其实二者表示同一个意思：即从 $n-3$ 个元素中每次取出 2 个元素的组合数．符号 $\binom{n-3}{2}$ 在国际上常用；而我们国内则多采用符号 C_{n-3}^2．

2．在本题中，若 $n>6$，则求证的结论可以加强．即命题可以改为：

在一平面上已给 n 个点，其中 $n>6$，且无三点共线．求证：至少能找到 $\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}$ 个凸四边形，其顶点为已给的点．

因当 $n\geqslant 7$ 时，有 $f(n)>g(n)$，所以，上述结论的正确性是肯定无疑的.

第 六 题 （苏联命题）

试证：对满足 $x_1>0$，$x_2>0$，$x_1y_1-z_1^2>0$，$x_2y_2-z_2^2>0$ 的实数 x_1，y_1，x_2，y_2，z_1，z_2，下列不等式

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqslant\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}$$

成立．并进一步阐明不等式取等号的充分必要条件.

【分析】 此题可以从左证到右，这时需根据题设条件，先把所要求证的不等式的左边分母变形，然后估值．变形时，应将左式的分母用右式的分母 $x_1y_1-z_1^2$ 和 $x_2y_2-z_2^2$ 来表示，以便证得本题.

〈证明〉 为了计算的方便，令

$$D_1=x_1y_1-z_1^2>0,\quad D_2=x_2y_2-z_2^2>0$$

则有 $$x_1y_1=D_1+z_1^2,\quad x_2y_2=D_2+z_2^2.$$

这时，对于题中不等式左边的分母，有

$$\begin{aligned}
&(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2\\
&=D_1+D_2+x_1y_2+x_2y_1-2z_1z_2\\
&=D_1+D_2+\frac{x_1}{x_2}x_2y_2+\frac{x_2}{x_1}x_1y_1-2z_1z_2\\
&=D_1+D_2+\frac{x_1}{x_2}(D_2+z_2^2)+\frac{x_2}{x_1}(D_1+z_1^2)\\
&\quad-2z_1z_2\\
&=D_1+D_2+\left(\frac{x_1}{x_2}D_2+\frac{x_2}{x_1}D_1-2\sqrt{D_1D_2}\right)\\
&\quad+2\sqrt{D_1D_2}+\left(\frac{x_1}{x_2}z_2^2+\frac{x_2}{x_1}z_1^2-2z_1z_2\right)
\end{aligned}$$

$$= \left(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}D_2}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}D_1}\right)^2$$

$$+\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}z_2-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}z_1\right)^2$$

$$\geqslant (\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2}) \tag{1}$$

从而推得

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqslant\frac{8}{(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})^2}. \tag{2}$$

又因$\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2}\geqslant 2\sqrt[4]{D_1D_2}$，以及$\frac{1}{D_1}+\frac{1}{D_2}\geqslant\frac{2}{\sqrt{D_1D_2}}$，

所以

$$\frac{8}{(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})^2}\leqslant\frac{2}{\sqrt{D_1D_2}}\leqslant\frac{1}{D_1}+\frac{1}{D_2}. \tag{3}$$

由(2)和(3)得

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqslant\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

显然，(1)中的等号仅在

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}\cdot D_2}=\sqrt{\frac{x_2}{x_1}\cdot D_1}，\quad 即\quad x_1\sqrt{D_2}=x_2\sqrt{D_1}; \tag{4}$$

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\cdot z_2=\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\cdot z_1,\quad 即\quad x_1z_1=x_2z_2 \tag{5}$$

时成立；又(3)中的等号仅在

$$D_1=D_2 \tag{6}$$

时成立.

因此，由(4)，(5)，(6)知，所给不等式中的等号仅在

$$D_1=D_2,\ x_1=x_2,\ 和\ z_1=z_2,$$

亦即
$$x_1=x_2,\ y_1=y_2,\ 和\ z_1=z_2 \tag{7}$$

时才成立.

条件(7)就是所求证的不等式中取等号的充分必要条件.

【附注】 在估计题中所给不等式的左边的分母的值时，作了一些比较复杂的变形，其目的是为了配成三个完全平方．这样就便于估值．在变形的过程中，利用了经常用到的两个基本而且是重要的不等式：

$$a^2+b^2\geqslant 2ab \text{ 和 } \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant\frac{2}{ab}.$$

第一个不等式的证明非常简单：因为对任意二实数 a 和 b，都有：

$$(a-b)^2\geqslant 0,\ a^2+b^2-2ab\geqslant 0,\ a^2+b^2\geqslant 2ab.$$

利用第一个不等式容易推得第二个不等式：

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\geqslant\frac{2ab}{a^2b^2}=\frac{2}{ab}\ (a\neq 0,\ b\neq 0).$$

所以题设中给出

$$D_1=x_1y_1-z_1^2>0 \text{ 及 } D_2=x_2y_2-z_2^2>0$$

是重要的，否则 $\frac{1}{D_1}+\frac{1}{D_2}\geqslant\frac{2}{\sqrt{D_1D_2}}$ 就不成立了.

第十二届国际中学生数学竞赛试题分析与解答

1970 年在匈牙利举行

第 一 题（波兰命题）

设 M 是三角形 ABC 的 AB 边上的任一内点，r_1，r_2，r 分别是三角形 AMC，BMC，ABC 的内切圆半径；ρ_1，ρ_2，ρ 分别是这些三角形在 $\angle ACB$ 内部旁切圆半径．试证：

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}=\frac{r}{\rho}.$$

【分析】 这一平面几何题的图形比较复杂，但因为题设中给了三角形的内切圆与旁切圆的半径，这样就可以利用三角函数的有关知识来解此题．下面我们就按三角的解法加以分析．

要证 $\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}=\frac{r}{\rho}$，显然，只需分别把这些比值具体求出即可．为此，设三角形 ABC 的内切圆切 AB 边于 P 点（图12—1），则有

$$AB=AP+BP=r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+r\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=r\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right).$$

又在 $\angle ACB$ 的内部的 $\triangle ABC$ 的旁切圆是与 AB 边相切的，此旁切圆的圆心就是 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的外角平分线的交点，而且外角平分线与内角平分线是互相垂直的．因此，类

似上面的讨论，有

$$AB=\rho\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)+\rho\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)=\rho\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right).$$

所以

$$\frac{r}{\rho}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}=\frac{\dfrac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}.$$

同理，可以求得$\frac{r_1}{\rho_1}$与$\frac{r_2}{\rho_2}$的表达式. 由此就能证明本题.

〈证明〉 设 $\angle ABC=\beta$， $\angle BCA=\gamma$， $\angle CAB=\alpha$， $\angle AMC=\delta$. 由于$\triangle ABC$的内切圆的圆心R是其内角平分线的交点，若设三角形ABC的内切圆切AB于P点，连AR、PR、BR（如图12—1所示）则$\angle APR=\angle BPR=\frac{\pi}{2}$，且有

$$AB=AP+BP=\gamma\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\gamma\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

$$=\gamma\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right).\tag{1}$$

另外，由于内角的平分线和外角的平分线互相垂直，所以根据题设条件，可类似于(1)的讨论得到：

$$AB=\rho\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

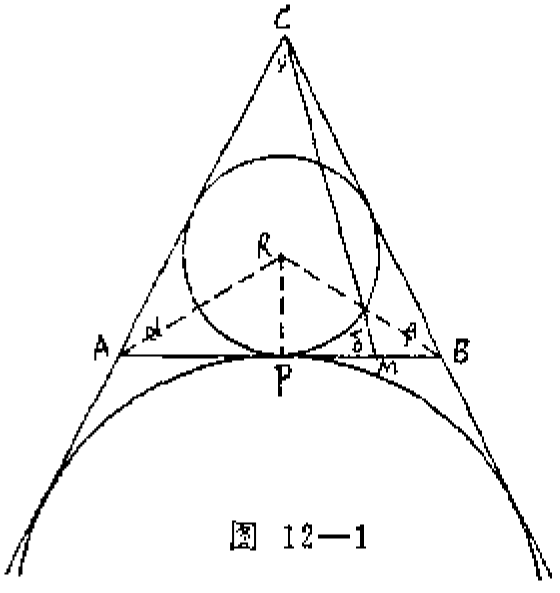


图 12—1

$$+\rho\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)$$

$$=\rho\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right).\tag{2}$$

由(1)、(2)，得：

$$r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$$

$$=\rho\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right),$$

$$\frac{r}{\rho}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.\tag{3}$$

同理，相应地对另外两个三角形也可分别得到：

$$\frac{r_1}{\rho_1}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\delta}{2},\tag{4}$$

$$\frac{r_2}{\rho_2}=\operatorname{tg}\frac{\pi-\delta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.\tag{5}$$

(4)×(5)，并根据(3)，得：

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r}{\rho}.$$

证毕.

【附注】 本题综合运用了几何与三角的有关基础知识．证明的关键，在于利用一些直角三角形，将$\frac{r}{\rho}$、$\frac{r_1}{\rho_1}$、$\frac{r_2}{\rho_2}$三个比分别用相应的三角形的内角的正、余切表达式表出，是几何问题的三角解法的好题.

第 二 题（罗马尼亚命题）

已给自然数 a，b，n，$a>1$，$b>1$，$n>1$. A_{n-1} 和 A_n 是以 a 为基数的数系中的数（即 a 进制中的数），B_{n-1} 和 B_n 是以 b 为基数的数系中的数（即 b 进制中的数）. A_{n-1}，A_n，B_{n-1}，B_n 可表示为以下的形式：

$$A_{n-1}=x_{n-1}x_{n-2}\cdots\cdots x_0,\quad A_n=x_nx_{n-1}\cdots\cdots x_0$$

（按 a 进制写出）；

$$B_{n-1}=x_{n-1}x_{n-2}\cdots\cdots x_0,\quad B_n=x_nx_{n-1}\cdots\cdots x_0$$

（按 b 进制写出）. 此处 $x_n\neq0$，$x_{n-1}\neq0$

试证明：若 $a>b$，则 $\dfrac{A_{n-1}}{A_n}<\dfrac{B_{n-1}}{B_n}$.

【分析】 首先要把数 A_{n-1}、B_{n-1} 的表示法搞清楚. 在 a 进位制中，数

$$\begin{aligned}A_{n-1}&=x_{n-1}x_{n-2}\cdots\cdots x_0\\&=x_0+x_1a+x_2a^2+\cdots\cdots+x_{n-1}a^{n-1};\end{aligned}$$

在 b 进位制中，数

$$\begin{aligned}B_{n-1}&=x_{n-1}x_{n-2}\cdots\cdots x_0\\&=x_0+x_1b+x_2b^2+\cdots\cdots+x_{n-1}b^{n-1}.\end{aligned}$$

例如：若 $a=10$，则 A_{n-1} 就是十进制数，故有

$$A_{n-1}=x_0+x_1\cdot10+x_2\cdot10^2+\cdots\cdots+x_{n-1}\cdot10^{n-1}$$

（此处 x_i 可取数码 0，1，2，……9 中的任一个）；

若 $a=2$，则 B_{n-1} 就是二进制数，故有

$$B_{n-1}=x_0+x_1\cdot2+x_2\cdot2^2+\cdots\cdots+x_{n-1}\cdot2^{n-1}$$

（此处 x_i 只可取数码 0 或 1）.

按本题要求，为了证$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$成立（$a>b$时），可采用比较法，只需要证，当$a>b$时，$\frac{B_{n-1}}{B_n}-\frac{A_{n-1}}{A_n}>0$即可。

〈证法一〉 引入辅助函数，设$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$，其中

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x_k\cdot x^k,\qquad q(x)=p(x)+x_n\cdot x^n.$$

因而有

$$\begin{aligned}p(a)&=\sum_{k=0}^{n-1}x_k\cdot a^k=x_0+x_1a+x_2a^2+\cdots\cdots+x_{n-1}a^{n-1}\\&=x_{n-1}x_{n-2}\cdots\cdots x_1x_0\\&=A_{n-1}\ (\text{按 }a\text{ 进制写出}),\\q(a)&=p(a)+x_n\cdot a^n\\&=x_0+x_1a+\cdots\cdots+x_{n-1}a^{n-1}+x_n\cdot a^n\\&=x_nx_{n-1}\cdots\cdots x_1x_0\\&=A_n\ (\text{按 }a\text{ 进制写出}),\end{aligned}$$

所以 $$f(a)=\frac{A_{n-1}}{A_n},$$

同理有 $$f(b)=\frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

因此，当$a>b$时，要证$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$成立就等价于证明$f(a)<f(b)$成立，也就是只需证明函数$y=f(x)$严格递减即可。

对$f(x)$求导数，得：

$$f'(x)=\frac{p'q-pq'}{q^2}=\frac{p'(p+x_nx^n)-p(p'+n\cdot x_n\cdot x^{n-1})}{q^2}$$

$$=\frac{x_n\cdot x^{n-1}[(x_1+2x_2x+\cdots\cdots+(n-1)x_{n-1}x^{n-2})\cdot x-p^n]}{q^2}$$

$$=\frac{x_n\cdot x^{n-1}[x_1x(1-n)+x_2x^2(2-n)+\cdots\cdots+(n-1-n)x_{n-1}x^{n-1}-nx_0]}{q^2}$$

$$=\frac{x_n\cdot x^{n-1}\left[\sum_{k=1}^{n-1}x^kx_k(k-n)-nx_0\right]}{q^2}.$$

由于

$$x>0,\ x_n>0,\ n>1,\ x_k\geqslant 0,$$

$$(k-n)<0\quad(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots),\ n-1>0,\ q^2>0$$

因此，只要有一个 $x_k>0\ (0\leqslant k\leqslant n-1)$，就有

$$f'(x)<0.$$

这就是说，对于 $x>0$，有 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 是严格递减函数。

所以当 $a>b$ 时，$f(a)<f(b)$ 成立，即

$$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$$

成立。

〈证法二〉 因为

$$\begin{aligned}&(x_{n-1}a^{-1}+x_{n-2}a^{-2}+\cdots+x_0a^{-n})\\&\qquad-(x_{n-1}b^{-1}+x_{n-2}b^{-2}+\cdots+x_0b^{-n})\\&=x_{n-1}(a^{-1}-b^{-1})+x_{n-2}(a^{-2}-b^{-2})\\&\qquad+\cdots+x_0(a^{-n}-b^{-n})<0,\end{aligned}$$

所以

$$x_{n-1}a^{-1}+x_{n-2}a^{-2}+\cdots+x_0a^{-n}<x_{n-1}b^{-1}+\cdots+x_0b^{-n}.$$

于是，

$$\frac{x_{n-1}a^{n-1}+x_{n-2}a^{n-2}+\cdots+x_0}{a^n}<\frac{x_{n-1}b^{n-1}+\cdots+x_0}{b^n},$$

即
$$\frac{A_{n-1}}{a^n}<\frac{B_{n-1}}{b^n}.$$

由此变形，得：

$$\frac{x_n a^n}{A_{n-1}}>\frac{x_n b^n}{B_{n-1}},\quad 1+\frac{x_n a^n}{A_{n-1}}>1+\frac{x_n b^n}{B_{n-1}},$$

$$\frac{A_{n-1}+x_n a^n}{A_{n-1}}>\frac{B_{n-1}+x_n b^n}{B_{n-1}},$$

$$\frac{A_n}{A_{n-1}}>\frac{B_n}{B_{n-1}}.$$

所以 $\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$，证毕.

〈证法三〉 先用数学归纳法证一个引理：对于任意自然数 n，有

$$a^n B_n-b^n A_n>0\quad(a>b).$$

事实上，当 $n=1$ 时，$n-1=0$，则 $x_1>0$，$x_0>0$，且

$$\begin{aligned}a^1B_1-b^1A_1&=a(x_1b+x_0)-b(x_1a+x_0)\\&=x_0(a-b)>0\quad(\because a>b),\end{aligned}$$

引理成立.

假定当 $n=k$ 时引理成立，即：

$$a^kB_k-b^kA_k>0,\ a^kB_k>b^kA_k.$$

因为 $a>b$，所以有：

$$a^{k+1}B_k>b^{k+1}A_k,\ a^{k+1}B_k-b^{k+1}A_k>0.$$

于是当 $n=k+1$ 时，有：

$$\begin{aligned}a^{k+1}B_{k+1}-b^{k+1}A_{k+1}&=a^{k+1}(b^{k+1}x_{k+1}+B_k)-b^{k+1}(a^{k+1}x_{k+1}+A_k)\\&=a^{k+1}B_k-b^{k+1}A_k>0,\end{aligned}$$

引理仍成立．至此引理证毕．

于是，

$$\frac{B_{n-1}}{B_n}-\frac{A_{n-1}}{A_n}=\frac{1}{A_nB_n}[A_nB_{n-1}-A_{n-1}B_n]$$

$$=\frac{1}{A_nB_n}[A_n(B_n-b^nx_n)-(A_n-a^nx_n)B_n]$$

$$=\frac{x_n}{A_nB_n}(a^nB_n-b^nA_n)>0.$$

所以
$$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

【附注】 进位制是一基础知识，特别是在学习和掌握现代科学技术电子计算机是必不可少的基础．现在对一般进位制作一简单介绍．

在生产劳动和日常生活中，我们最常用最熟悉的就是十进制数，它的数值部分都是用十个不同的数字符号 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 来表示的，这些数学符号叫做数码．

任意一个十进制整数 $S(\geqslant 0)$ 都可以表示为：

$$S=k_n(10)^n+k_{n-1}(10)^{n-1}+\cdots+k_1(10)^1+k_0(10)^0$$

$$=\sum_{i=0}^{n}k_i(10)^i,$$

其中 k_i 可以取 0、1、2、…、9 这十个数码中的任一个，n 为正整数．例如：

$$1979=1\times 10^3+9\times 10^2+7\times 10+9\times 10^0.$$

十进制的小数可以表为

$$S=k_n(10)^n+k_{n-1}(10)^{n-1}+\cdots+k_1(10)^1+k_0(10)^0$$

$$+k_{-1}(10)^{-1}+\cdots+k_{-m}(10)^{-m}=\sum_{i=n}^{-m}k_i(10)^i$$

其中 m、n 为正整数，例如：

$$1980.1=1\times10^3+9\times10^2+8\times10^1+0\times10^0+1\times10^{-1}.$$

电子计算机又常用另一种进位制——二进位制．二进制数每个数位只可能取两个不同的数码“0”和“1”，而且是“逢二进一”的（前述的十进制数是“逢十进一”的）．

一般地，任意一个二进制数 S 都可以表成

$$S=k_n2^n+k_{n-1}2^{n-1}+\cdots+k_02^0+k_{-1}2^{-1}+\cdots+k_{-m}2^{-m}$$

$$=\sum_{i=-m}^{n}k_i2^i.$$

其中 k_i 只能取 0 或 1，具体由 S 决定．m、n 为正整数．例如：

$$11011.101=1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-1}$$
$$+0\times2^{-2}+1\times2^{-3}.$$

十进制的“十”，二进制的“二”叫做进位制的基数．所以十(二)进制的数也叫“以 10(2) 为基数的数系中的数”．

一般地说，正整数 J 表示进位制基数，一个 J 进位制数 S 都可以表示为

$$S=\sum_{i=-m}^{n}k_iJ^i,\qquad(1)$$

其中 k_i 可以是 0，1，2，…，$(J-1)$ 中的任一个数码，m、n 为正整数．例如：

$J=10$，(1)就是十进制数的表示形式；

$J=2$，(1)就是二进制数的表示形式；

$J=8$，(1)就是八进制数的表示形式．

从以上分析看出，进位制有两个共同的特点：

1．每一进位制数都有一个固定的基数 J．它的每一数

位都可能取 J 个不同的数码，而且是“逢 J 进一”的，即每一位计满 J 就向前面相邻的高位进一；又是“借一当 J”的，即每一位向前面相邻的高位借一时应当 J 个.

2．进位制的数都能写成形如（1）的展开式，它的每一位数码 k_i 对应于一个固定的值 J^i，J^i 称为 k_i 的“权”；相应地，(1)也称为进位制数按权的展开式.

例如：二进制数 101.01，自左至右，每一位数字对应的权分别为 2^2，2^1，2^0，2^{-1}，2^{-2}.

另外，不同的进位制之间还可以互相转换．下面我们仅以一例说明十进制数与二进制数之间互相转换的原理和方法.

比如，将十进制数 725 化成二进制数时，我们可先设

$$(725)_{\text{十}}=(k_nk_{n-1}\cdots\cdots k_0)_{\text{二}}, \tag{2}$$

其中括号的右下标，表示括号内的数是按什么样的进位制写出的.

现在问题就在于决定 k_n，k_{n-1}，……，k_0 的数值，因为是二进制，故这些数值只能是 0 或 1．我们将用“各个击破”的办法，逐个地确定 k_n，k_{n-1}，……，k_0 的数值.

由于任何一个二进制数都可以写成按权的展开式，因此(2)可写成：

$$\begin{aligned}(725)_{\text{十}}&=(k_nk_{n-1}\cdots\cdots k_0)_{\text{二}}\\&=k_n2^n+k_{n-1}2^{n-1}+\cdots\cdots+k_12^1+k_02^0\\&=2(k_n2^{n-1}+\cdots\cdots+k_1)+k_0.\end{aligned}$$

上式两边同时除以 2，得到

$$\frac{725}{2}=362+\frac{1}{2}=(k_n2^{n-1}+\cdots\cdots+k_1)+\frac{k_0}{2}. \tag{3}$$

比较(3)式两边，知$k_0=1$，这正好是$\frac{725}{2}$的余数.

再将(3)式写成：

$$\frac{725}{2}-\frac{k_0}{2}=2(k_n2^{n-2}+\cdots\cdots+k_2)+k_1,$$

$$\frac{725-1}{2}=362=2(k_n2^{n-2}+\cdots\cdots+k_2)+k_1.$$

类似的，将上式两边除以 2，可知k_1为$\frac{362}{2}$的余数，即$k_1=0$.

照此办法继续做下去，就可将其余的数码全部确定下来．现将整个过程与结果计算如下：

$$\begin{array}{r|r l}
2 & 725 & \text{余数}=1=k_0, \\
2 & 362 & \text{余数}=0=k_1, \\
2 & 181 & \text{余数}=1=k_2, \\
2 & 90 & \text{余数}=0=k_3, \\
2 & 45 & \text{余数}=1=k_4. \\
2 & 22 & \text{余数}=0=k_5, \\
2 & 11 & \text{余数}=1=k_6. \\
2 & 5 & \text{余数}=1=k_7. \\
2 & 2 & \text{余数}=0=k_8. \\
2 & 1 & \text{余数}=1=k_9. \\
 & 0 &
\end{array}$$

所以，转换的结果为：

$$(725)_{十}=(k_nk_{n-1}\cdots\cdots k_0)=(1011010101)_{二}.$$

第 三 题（瑞典命题）

设$\{a_n\}$是满足

$$1=a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\cdots \tag{1}$$

的实数序列；而$\{b_n\}$是由下式定义的实序列

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots). \tag{2}$$

求证：

a）对于所有的 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$，$0\leqslant b_n<2$ 成立.

b）对于在 $0\leqslant c<2$ 中的任意 c，存在具有性质(1)的序列 $\{a_n\}$，使得由它构成的序列 (2) 中有无穷多个下标 n 满足

$$b_n>c. \tag{3}$$

【分析】 本题 a) 的证明比较容易．因由题设知 $\{a_n\}$ 是递增的实数序列(至少不减)，且 $a_0=1$，所以 b_n 的每一加数是非负的，故 $b_n\geqslant 0$；又通过计算不难得到 $b_n<2$（对所有的 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$）.

对 b) 的证明，只要对任意的 $c\,(0\leqslant c<2)$ 能找到一个具有性质 (1) 的序列 $\{a_n\}$，且使由它构成的序列 (2) 中有无穷多个下标 n 满足 $b_n>c$ 即可.

为找这样的序列 $\{a_n\}$，我们试图用简单的等比实序列来实现．考虑到 (2) 式中的根号，可设

$$a_k=a^{-2k}\quad(k=0, 1, 2, \cdots\cdots).$$

易见当选取 $0<a<1$ 时，上述实数 a_k 组成的实数列 $\{a_n\}$ 确实满足性质 (1)．因为在 0，1 之间的实数 a 很多，那么选取怎样的 a 才能使由序列 $\{a_k=a^{-2k}\}$ 构成的序列 (2) 有无穷多个下标 n 满足 $b_n>c$ 呢？

我们假设上述条件已满足，看 a 应满足什么条件？即是说，若找到了 N，对于 $n>N$，有

$$b_n>c,$$

由此找出 a 应满足的条件，而且这样的 a 确实在 0 与 1 之间．这样题目所要求的两个条件都被满足，故命题得证．下面我们就按上述的思路来证明命题的正确性.

〈证明〉 a) 由于 $1=a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\cdots$，所以

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$ 中的

每一个加数都是非负的，故 $b_n\geqslant 0$；又对任意自然数 n，有：

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}+\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}+\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)<2.$$

问题 a) 得证.

b) 设 c 已给出，且 $0\leqslant c<2$.

需要找到一个序列 $\{a_n\}$，它满足性质 (1) 并由它构成的序列 $\{b_n\}$ 满足性质 (3). 为此目的，我们尝试从简单的等比实序列来实现. 现令

$$a_k=a^{-2k}=\frac{1}{a^{2k}}\quad(k=0,1,2,\cdots\cdots),$$

易见当选取 $0<a<1$ 时，序列 $\{a_n\}$ $(n=0,1,2,\cdots\cdots)$ 满足 (1).

假设找到这样的 N，对于所有的 $n>N$，有：

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a^{-2(k-1)}}{a^{-2k}}\right)\frac{1}{\sqrt{a^{-2k}}}=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a^{-2k}\cdot a^2}{a^{-2k}}\right)\frac{1}{\frac{1}{a^k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(1-a^2)a^k=(1-a^2)(a^1+a^2+\cdots\cdots+a^n)$$

$$=a(1+a)(1-a^n)\geqslant a(1+a)(1-a^N)>c,$$

即 $$a^N<1-\frac{c}{a(1+a)}. \tag{4}$$

为了使(4)成立，(4)式右边必须为一正数，因此 a 必须满足

$$0<a<1 \text{ 和 } a(1+a)>c. \tag{5}$$

此时，对于 $0<a<1$ 的实序列 $\{a_n\}$，有一个确定的自然数 N，使得(4)被满足．我们能继续推导出 N，使得对于 $n>N$，有 $b_n>c$.

下面进一步说明，满足条件(5)的数 a 的存在：

因为我们可以选取 $\sqrt{\frac{c}{2}}<a<1$．由于 $0\leqslant c<2$，所以

$$0\leqslant\sqrt{\frac{c}{2}}<1,$$

故数 a 满足(5)的第一个条件：$0<a<1$；

又由于

$$c<2a^2=a(2a)=a(a+a)<a(1+a),$$

所以数 a 又满足(5)的第二个条件．问题 b) 得证.

【附注】 本题是一个无穷数列的问题，证题的关键和技巧，第一问 a) 在于对 b_n 作根式变形和不等量代换；第二问 b) 在于取 $a_k=a^{-2k}(0<a<1)$ 这一代换，通过中学生已学过的等比数列来实现．此外，尽早熟悉“无穷”的概念和极限思想，对进一步学习高等数学也是有益的.

第 四 题（捷克斯洛伐克命题）

试确定具有下列性质的所有正整数 n：

从集合 $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ 中可以分出两个不相交的非空子集，使得一个子集的所有元素之积等于另一个子集所有元素之积.

【分析】 题目中的集合的元素是正整数. 因为所要求的是具有题设性质的正整数 n，而且要找出所有的 n，如果一个一个去找，显然不是好办法. 这里不妨从问题的反面入手，假定数 n 满足题设条件，看看有何结果，然后再进一步讨论，以解答本题.

〈解答〉 假定存在自然数 n 满足所指出的性质，即：

集合 $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ 能够分成两个非空的不相交的子集，其中一个子集的所有元素之积等于另一个子集的所有元素之积.

则必然存在质数 p，能整除

$$n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5$$

这六个连续自然数中的至少两个数. 因此，这样的质数 p 只能是 2、3 或 5.

但是，数 $n+1$，$n+2$，$n+3$，$n+4$ 仅有质因子 2 和 3，而在这四个连续数中恰好只有两个是奇数，这两个奇数决不可能有质因子 2，只可能有质因子 3，所以这两个奇数必须是 3 的整数次幂. 然而，这是不可能的，因为差

$$3^k - 3^m \quad (k>1,\ m>1)$$

决不可能等于 2.

以上矛盾，说明满足题设条件的正整数 n 不存在.

【附注】 1. 关于集合的有关知识，参见《国际数学竞赛试题讲解(Ⅰ)》第十九届第六题附注3.

2. 题目明确指出，要求满足所给条件的正整数 n，而我的结果却不存在这样的 n，使人感到不好理解. 如果换一个提法，即"试证满足下列条件……的正整数 n 不存在"，这样就好理解些，而且也容易想到用反证法. 由此可见，有的问题，例如本题，从反面入手，或采用反证使解答过程简炼，请读者注意体会这一点.

第　五　题（保加利亚命题）

在四面体 $ABCD$ 中，角 BDC 是直角. 过 D 作平面 ABC 的垂线，垂足 S 是三角形 ABC 三高的交点.

试证：
$$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})^2\leqslant 6(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2),$$
且确定什么样的四面体不等式取等号？

【分析】 从要证的结论出发，根据角 BDC 是直角这一已知条件，由勾股定理就有：$\overline{BD}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2$. 如果能够证明另外的二个角 ADB 和 ADC 也都是直角，则又可得

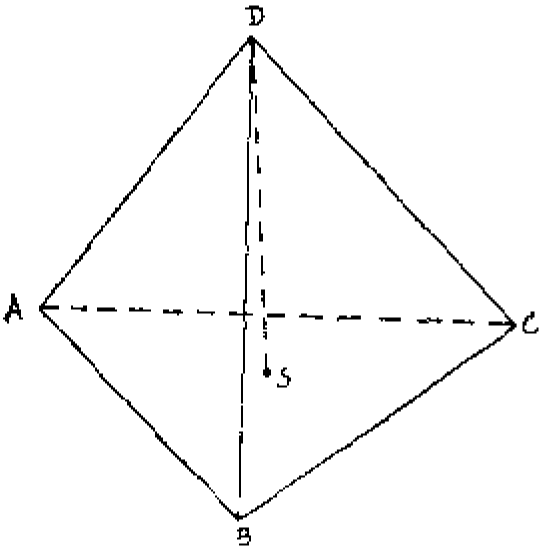


图 12—2

$$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2$$
和 $$\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2.$$
上述三式相加，得：
$$2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2)$$
$$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$
$$6(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2)$$
$$=3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2).$$

这样，所要求证的不等

式就等价于下列不等式

$$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})^2\leqslant 3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2),$$

亦即不等式

$$\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}}{3}\leqslant\sqrt{\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2}{3}}.$$

此式就是关于算术平均和平方(二次幂)平均的著名不等式，式中等号只有在 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$ 时成立.

因此，当四面体 $ABCD$ 中的三角形 ABC 为等边三角形时，所需证的不等式才取等号．这种情况还可用作图方法作出.

由以上分析知道，解决此题之关键在于证明角 ADB 和角 ADC 都是直角.

因为题设告诉了我们，过 D 作平面 ABC 的垂线，垂足 S 恰是三角形 ABC 的三高的交点，因而采用向量内积(见附注)的方法来证明角 ADB 和角 ADC 为直角是比较方便的.

〈证明〉 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 依次是以 S 为坐标原点，A，B，C 和 D 为终点的向量.

根据题设和垂直的两向量内积等于零的定理，可得：

$$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})=0; \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0,\ \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0,\ \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0; \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=0. \qquad (3)$$

展开(1)的左端，并将(3)代入(1)，得

$$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}^2=0; \qquad (4)$$

由(2)，得
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}. \qquad (5)$$

由(4)和(5)，得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}^2=0,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}^2=0. \qquad (6)$$

再由(3)和(6)，得

$$(a-d)\cdot(b-d)=0,\quad (a-d)\cdot(c-d)=0. \tag{7}$$

故由(7)知，角 ADB 和 ADC 都是直角.

又由题设知角 BDC 是直角，故在三个直角三角形中，分别根据勾股定理，得如下三式：

$$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2,\quad \overline{BD}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2,$$
$$\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2.$$

上述三式相加，得

$$2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2)=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2. \tag{8}$$

根据算术平均和平方平均的不等式，有

$$\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}}{3}\leqslant\sqrt{\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2}{3}},$$

因而得不等式

$$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})^2\leqslant 3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2). \tag{9}$$

将(8)代入(9)，即得

$$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})^2\leqslant 6(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2). \tag{10}$$

此外，由(9)式知，只有当 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$ 时，(9)式才取等号，故只有此时，(10)式才取等号. 因此，本题在 $\angle BDC=\frac{\pi}{2}$ 的条件下，当三角形 ABC 是等边三角形时，关于四面体的所求证的不等式才取等号. 这种情形可用几何作图方法作出.

过等边三角形 ABC 的三高交点 S 作三角形 ABC 所在平面的垂线，并取垂线长

$$\overline{SD}=\frac{a}{\sqrt{6}}=h \quad (其中 a=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}).$$

显然，此时有

$$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2$$
$$=2\left(h^2+\frac{a^2}{3}\right)=2\left(\frac{a^2}{6}+\frac{a^2}{3}\right)=a^2.$$

所以

$$\angle ADB=\angle BDC=\angle ADC=\frac{\pi}{2}.$$

证毕.

【附注】 本题证明过程中使用了向量这一工具．为了更好地了解本题的解法和以后学习的需要，这里把与本题有关的向量的一些基础知识简单介绍如下．

1．向量的概念与向量的线性运算

1）向量与它的几何表示：

向量是既有大小又有方向的量．例如，物理学中的力，速度，加速度，电场强度等都是既有大小又有方向的量．

在几何上，我们可以用有向线段表示向量．取起点为 A 终点为 B 的有向线段表示方向和它相同、大小和它相等的向量，记这向量为 $\overrightarrow{AB}$．有时为了简便，只用一个字母或用一粗体字母表示一个向量，如 $\vec{a}$ 或 $\mathbf{a}$(图 12—3)．

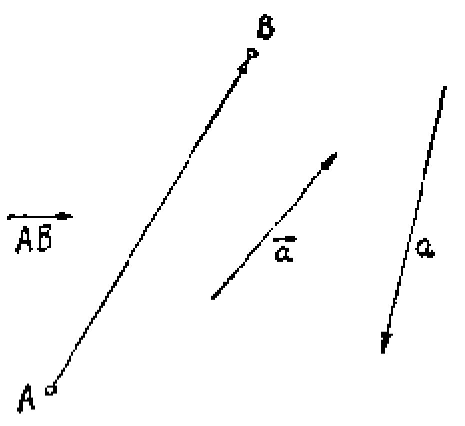


图 12—3

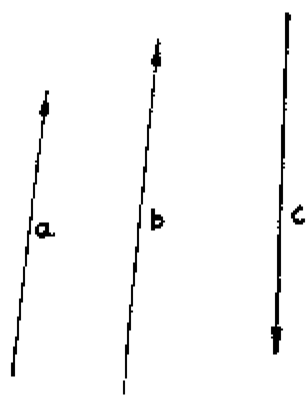


图 12—4

向量的大小就叫做向量的长度（或称向量的模），记作 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\vec{a}|$ 或 $|\mathbf{a}|$. 显然这是一个非负的实数.

两个平行的向量（也叫矢量），它们的方向可以是相同或相反. 图 12—4 中的三向量 a、b、c 相互平行，a 与 b 方向相同，而 a（或 b）与 c 方向相反.

长度是零的向量也就是起点和终点重合的向量叫做零向量，记作 0. 零向量的方向不定.

长度为 1 的向量叫做单位向量.

一个向量的方向通常用与它同向的单位向量表示. 两个向量的夹角就是表示它们的二条有向线段的夹角. 向量 a 与 b 的夹角用 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 或 $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ 表示.

2）向量的加（减）法：

向量的线性运算是指向量的加、减运算以及数乘向量的运算.

加法定义　从一点 O 起，连续作出向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，以 O 为起点 B 为终点的向量 $S=\overrightarrow{OB}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 两个向量的和，这种运算叫做加法（图 12—5），记作：

$$S=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \text{ 或 } \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}.$$

即

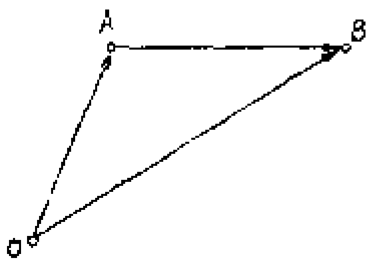


图 12—5

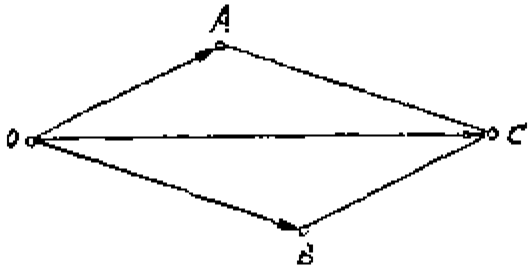


图 12—6

在定义中以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 作为三角形两边求向量和的法则

称为向量加法的三角形法则.

在力学中，求矢量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的和，是以 OA、OB 为两邻边作出平行四边形 $OACB$（图 12—6），那么向量 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. 这种求向量和的法则叫平行四边形法则.

因为我们考虑的是自由矢量，从图中可看到这两种作法不同，但结果一样，只不过三角形法则还特别适用于求两个方向相同和相反的矢量的和而已.

向量的加法满足如下的运算规律：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a};$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c});$$

$$\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a};$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0.$$

在处理力的分解时，要利用加法的逆运算. 已知合力 $\boldsymbol{b}$ 和一个分力 $\boldsymbol{a}$，求另一个分力，这就是要求满足方程

$$\boldsymbol{a}+X=\boldsymbol{b}$$

的向量 X，容易验证

$$X=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

这个向量 X 我们定义为向量 $\boldsymbol{b}$ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的差（$\boldsymbol{b}$ 减 $\boldsymbol{a}$），记为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 于是有

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

这就是说向量 $\boldsymbol{b}$ 减去向量 $\boldsymbol{a}$ 等于向量 $\boldsymbol{b}$ 加上向量 $\boldsymbol{a}$ 的反向量 $-\boldsymbol{a}$.

容易得出求向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的差的作图法. 在同一个起点 O 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，那么以 A 为起点，B 为终点的向量就是所求的差 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（图 12—7）.

下面引进数与向量相乘的概念.

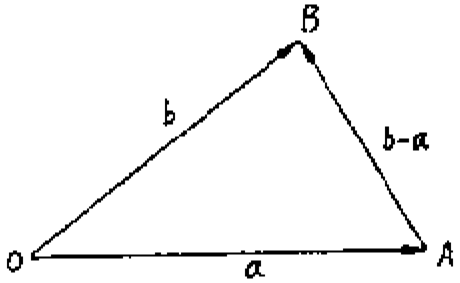


图 12—7

数乘向量定义　向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 相乘的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的长度是

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|;$$

在 $\boldsymbol{a}$ 不为零向量时，它的方向按 $\lambda>0$ 或 $\lambda<0$ 而分别和 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同或相反. 这种运算叫做数乘向量.

向量 $\lambda\boldsymbol{a}$，简单地说，就是把向量 $\boldsymbol{a}$ 伸缩 λ 倍：当 λ 取正时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 λ 取负时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

由定义可知：当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量；当 $\lambda=1$ 时，$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$. 显然，$\boldsymbol{a}$ 的反向量 $-\boldsymbol{a}$ 可以看成 (-1) 和 $\boldsymbol{a}$ 的乘积，即 $-\boldsymbol{a}=(-1)\boldsymbol{a}$.

2. 向量的内积(点积或数积)

内积定义　两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的内积是一个数，记为 $\boldsymbol{ab}$ 或 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$：当此二向量都是非零向量时，这个数等于它们的长度和它们夹角的余弦的乘积，即

$$\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b});$$

当 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 为零向量时，这个数等于零，

即
$$\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

引入投影概念后，就有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot\text{投影}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot\text{投影}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}.$$

两个非零向量的内积是正或负就看它们的夹角是锐角还是钝角. 至于内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 为零的情况，当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都为非零向量时，显然 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 是 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件. 因为此时 $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$

$=\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$. 若 a(或 b)为零向量，我们可以看它和任意向量都垂直，按内积定义，这时对于任意向量 b（或 a）都有 $a\cdot b=0$.

因此，任意两向量 a 和 b 垂直的充要条件是它们的内积 $a\cdot b=0$.

关于向量代数的其他概念这里就不一一介绍了，请读者看有关专著.

从本题的解法可以知道，利用两向量垂直的充要条件，在解决空间几何中的关于线段垂直问题，有时是简单且有效的.

第　六　题（苏联命题）

在一个平面内给定 100 个点，其中没有三点位于一条直线上. 我们作出以这些点为顶点的所有可能的三角形. 试证：

这些三角形最多 70% 是锐角三角形.

【分析】 此题的难度较大，就是先从特殊的情况，例如从 $n=4$、$n=5$ 去具体求出，也不好办. 在 $n=4$ 时，好办一点，因为不在一直线上的三个点可以定一个三角形，这时只能构成 4 个三角形，其中锐角三角形最多只有三个，占总数的 75%. 在 $n=5$ 时，就不好确定最多可以构成多少个锐角三角形. 当 $n=100$ 时，就更无法具体去求.

但根据题目要求证的锐角三角形的数目，小于或等于 70%，实际上是一个不等式的问题，因此可以通过估值来解决.

如何将本问题转化为证明不等式的问题呢？认真思考一下题目的要求，我们可以把这100个点看成平面上的一个点集，任意不在一直线上的三点就能构成一个三角形，但可能是锐角三角形，也可能是钝角三角形．所以这些点中能构成三角形的总数应包括两部分，锐角的和不是锐角的三角形，而本题所关心的是三角形总数与其中锐角三角形数目之比．因此，关键在考虑这个比值，看看有没有规律可寻．为此目的，我们考察：任意给定平面上有限个点的集合，并且先假定由此点集所能构成锐角三角形的个数与其所能构成一切三角形的总数之比不超过某一定数a；然后将此点集增加一个点得到新的点集；再看一看，由新点集所能构成锐角三角形的个数与其所能构成的一切三角形总数之比是否也不超过定数a．如果能证明这一点，再用数学归纳法就可证明本题．

〈证明〉 设$S(M)$和$g(M)$分别表示以平面上有限个点的集合M的诸点构成的锐角三角形的个数和所能构成的三角形的总数，于是：

假定$\frac{S(M)}{g(M)}\leqslant a$（某一正的常数），则有

$$\frac{S(M^*)}{g(M^*)}\leqslant a$$

成立（此处M^*是由M通过增加一个点后所构成的新点集）．下面就证明这一点．

设M^*是由$n+1$个点A_1，A_2，…，A_{n+1}组成，M_i（$i=1$，2，…，$n+1$）是由M^*中除去点A_i后所成的点集，那么有：

$$S(M^*)=\frac{S(M_1)+S(M_2)+\cdots+S(M_{n+1})}{n-2}.$$

和 $$g(M^*)=\frac{g(M_1)+g(M_2)+\cdots+g(M_{n+1})}{n-2}.$$

这是因为：每个三角形在和数 $g(M_1)+g(M_2)+\cdots+g(M_{n+1})$ 中重复计算了 $n-2$ 次，所以要除以 $n-2$.

按照假定，$S(M_i)\leqslant a\cdot g(M_i)$，那么就有：

$$\frac{S(M^*)}{g(M^*)}=\frac{\dfrac{S(M_1)+S(M_2)+\cdots+S(M_{n+1})}{n-2}}{\dfrac{g(M_1)+g(M_2)+\cdots+g(M_{n+1})}{n-2}}$$

$$=\frac{S(M_1)+S(M_2)+\cdots+S(M_{n+1})}{g(M_1)+g(M_2)+\cdots+g(M_{n+1})}$$

$$\leqslant\frac{a[g(M_1)+g(M_2)+\cdots+g(M_{n+1})]}{g(M_1)+g(M_2)+\cdots+g(M_{n+1})}$$

$$=a.$$

即 $$S(M^*)\leqslant a\cdot g(M^*).$$

对于由四个点组成的集合 N，有

$$g(N)=\binom{4}{3}=4 \quad 和 \quad S(N)\leqslant 3.$$

所以 $$\frac{S(N)}{g(N)}\leqslant 0.75.$$

因此，利用上面得到的结论，对五个点的集合 N^*，有

$$\frac{S(N^*)}{g(N^*)}=\frac{S(N^*)}{\binom{5}{3}}=\frac{S(N^*)}{10}\leqslant 0.75.$$

即 $S(N^*)\leqslant 7.5$，亦即 $S(N^*)\leqslant 7$.

于是，由数学归纳法证得本题.

【附注】 此题的解答关键，在于将问题转化为对一个不等式的证明．具体进行时，实质上第一部分证明的是一个引理，利用引理的结论，然后应用数学归纳法就不难得证命题.

第十三届国际中学生数学竞赛试题分析与解答

1971年在捷克斯洛伐克举行

第 一 题 （匈牙利命题）

设 n 是一个大于 2 的自然数．试证：当且仅当 $n=3$ 或 5 时，对于任意实数 a_1，a_2，……，a_n，下面的不等式成立：

$$
\begin{aligned}
&(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots\cdots(a_1-a_n)\\
&+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots\cdots(a_2-a_n)\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots\cdots(a_n-a_{n-1})\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

【分析】 根据题意，我们需要证明：当 $n=3$ 和 $n=5$ 时，题设不等式对任意实数组 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 都是成立的；还需要证明，当 $n=4$ 和 $n\geqslant 6$ 时，题设不等式对任意实数组 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 不总是成立的．关于前者，需要作一般性的证明；至于后者，只需要找到一个反例，即举出对于某一实数组 $(a_1',\ a_2'\cdots,\ a_n')$ 题设不等式不成立就可以了．

〈证法一〉 a） 当 $n=3$ 时，恒有

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)+(a_3-a_1)(a_3-a_2)$$

$$=\frac{1}{2}[(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_1-a_3)^2]\geqslant 0.$$

当 $n=5$ 时，不失一般性，设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant a_4\geqslant a_5$，则

$$a_1-a_2=-(a_2-a_1)\geqslant 0,\quad a_1-a_3\geqslant a_2-a_3\geqslant 0,$$
$$a_1-a_4\geqslant a_2-a_4\geqslant 0,\qquad a_1-a_5\geqslant a_2-a_5\geqslant 0.$$

所以
$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)$$
$$+(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\geqslant 0. \tag{1}$$

类似地，可得.
$$(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)$$
$$+(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)\geqslant 0. \tag{2}$$

又注意到
$$a_3-a_1\leqslant 0,\ a_3-a_2\leqslant 0,\ a_3-a_4\geqslant 0,\ a_3-a_5\geqslant 0,$$
可得
$$(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\geqslant 0. \tag{3}$$

把(1)、(2)、(3)相加，即得题设不等式.

故 $n=3$ 和 $n=5$ 时，题设不等式总是成立的.

b) 当 $n=4$ 时，取 $a_1=-1$，$a_2=a_3=a_4=0$，即知题设不等式不成立.

当 $n\geqslant 6$ 时，取 $3\leqslant i\leqslant n-2$，使 $n-i$ 为奇数(易知这样的 i 是存在的)，且取

$$a_1=a_2=\cdots=a_{i-1}=0,$$
$$a_i=1,$$
$$a_{i+1}=a_{i+2}=\cdots=a_n=2.$$

则不等式的左边等于 $(-1)^{n-i}<0$. 题设不等式不成立.

故 $n\neq 3$ 和 $n\neq 5$ 时，题设不等式不总是成立的.

〈证法二〉 分 n 为偶数和奇数两种情况讨论：

i) 当 $n=2m\,(m\geqslant 2)$ 时：

取 $a_1=-1$，$a_2=a_3=\cdots=a_{2m}=0$，则不等式的左边等于

$(-1)^{2m-1}<0$，题设不等式不成立．

ii）当 $n=2m+1(m\geqslant 1)$ 时：

若 $m=1$、2，即 $n=3$、5 时，由"解法一"知不等式恒成立．

若 $m\geqslant 3$，即 n 为不小于 7 的奇数时，取 $a_1=0$，$a_2=a_3=a_4=1$，$a_5=a_6=\cdots=a_{2m+1}=-1$，则不等式的左边等于 $(-1)^3<0$，题设不等式不成立．

综上所述，题设不等式仅当 $n=3$ 和 $n=5$ 时恒成立．

【附注】 虽然题设 n 是大于 2 的自然数，但 $n=2$ 时，由于

$$(a_1-a_2)+(a_2-a_1)=0,$$

因此不等式显然成立．

这就是说，题设不等式当 $n=2$，3，5 时恒成立，而 n 为不小于 4 的偶数及不小于 7 的奇数时不总是成立的．

第 二 题 （苏联命题）

一个凸多面体 P_1，共有九个顶点为 A_1、A_2、…、A_9．P_i 是将 P_1 通过平移 $A_1\to A_i$ 得到的多面体($i=2$，3，…，9)．试证，P_1、P_2、…、P_9 中至少有两个多面体，它们最少有一个公共内点．

【分析】 如果把 9 本书放到 8 个抽屉里，那末至少有一个抽屉里不少于 2 本书(或者说书发生重叠)．这里使用的是所谓"重叠原则"．

重叠原则还可以处理远比"9 本书放到 8 个抽屉里"这一类问题更为广泛的问题．例如，如果有 9 个形状不可改变，但却可以彼此相交的物体 P_i($i=1$，2，…，9)，其体积记

为$\overline{P_i}$. 现在把它们完全放到一个体积为$\overline{Q}$的容器中去，那末当$\sum \overline{P_i} > \overline{Q}$时，则可断定至少有两个物体彼此相交（或者说彼此重叠）.

回到本题，问题就转化为能否找一个完全容下题设的九个多面体的"容器"，使其体积小于$\sum \overline{P_i} = 9\overline{P_1}$. 而这只要注意到$P_2$、$P_3$、…、$P_9$是如何由$P_1$变换而来的，所说的"容器"就不难找到了.

〈证明〉 以A_1为位似中心，将P_1作位似变换（相似比为2∶1），得多面体P'. 显然，$P_1 \subset P'$.

下面证明$P_i \subset P'$ $(i=2, 3, \cdots, 9)$：

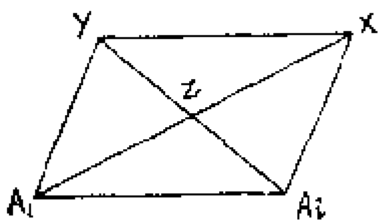


图 13—1

设X是P_i $(i=2, 3, \cdots, 9)$中任意一点，Y是将P_i进行平移$A_i \to A_1$时X所生成的像. 由于$\overline{A_1Y} \perp\!\!\!\!= \overline{A_iX}$，$A_1A_iXY$是平行四边形，故$\overline{A_1X}$和$\overline{A_iY}$有同一个中点$Z$（图 13—1）.

显然，Y在P_1内，并且由于P_1是凸的，$\overline{A_iY}$也在P_1内，故$Z \in P_1$. 由于A_1是位似中心，$\overline{A_1Z} = \overline{ZX}$，故$X \in P'$. 因此，得$P_i \subset P'$.

又关于多面体的体积有关系式

$$\overline{P_1} + \overline{P_2} + \cdots + \overline{P_9} = 9\overline{P_1},$$

$$\overline{P'} = 2^3 \cdot \overline{P_1} = 8\overline{P_1}.$$

于是，根据关于体积的重叠原则，P_1、P_2、…、P_9中至少有两个多面体彼此相交，从而最少有一个公共内点.

【附注】 关于"重叠原则"的名称：

若处理的问题属于把m个元素放到n个位置上（m、n为

自然数，且 $m>n$)，如前面"分析"中所说的把9本书放到8个抽屉里，这时重叠原则通常用一个更形象化的名称——抽屉原则(参看《国际数学竞赛试题讲解(Ⅰ)》)。但若处理的是如本题一类的几何形体相交的问题，仍称重叠原则.

关于一般的体积的重叠原则，可以叙述如下：

空间有一个体积是 V 的几何体，如果我们把 n 个体积分别是 V_1，$V_2\cdots$，V_n 的几何体一一搬到它的内部去，那末当 $V_1+V_2+\cdots+V_n>V$ 时，则至少有两个几何体彼此相交.

第 三 题 (波兰命题)

试证：对于数列 $\{2^n-3\}$，$n=2$，3，4，…，至少有一个无穷子数列存在，其中的项两两互素.

【分析】 本题要求从无穷数列2，3，4，…，n，…中得到一个无穷子数列

$$n_0,\ n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots,\qquad (1)$$

使得数列 $\{2^{n_i}-3\}$ 中的每两项互素.

数列(1)可以用归纳的方法给出，即首先选定 n_0，接着选定 n_1，使得

$$(2^{n_1}-3,\ 2^{n_0}-3)=1;$$

再选定 n_2，使得

$$(2^{n_2}-3,\ 2^{n_i}-3)=1,\ i=0,\ 1;$$

并进而选定 n_3，n_4，…，使得一般地有

$$(2^{n_{k+1}}-3,\ 2^{n_i}-3)=1,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k.$$

为了得到这样的数列(1)，可以借助于数论中的欧拉定理来寻求.

〈证明〉 由欧拉定理(见附注2)，对于每一个整数 $m>1$，

若$(a, m)=1$，则有

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod{m}.$$

这里，$\varphi(m)$是欧拉函数，其值等于数列 0，1，2，…，$m-1$ 中与 m 互素的数的个数。

当 $a=2$，$m=2^n-3$ $(n=3, 4, 5, \cdots)$ 时上式成立。

取 $n_0=3$；

取 $n_1=\varphi(2^{n_0}-3)=\varphi(5)=4$；

……………………

取 $n_{k+1}=\varphi(2^{n_0}-3)\cdot\varphi(2^{n_1}-3)\cdot\cdots\cdot\varphi(2^{n_k}-3)$。

由于 $\varphi(2^{n_j}-3)>1$，$j=0, 1, 2, \cdots$，故有

$$3=n_0<n_1<n_2<n_3<\cdots<n_k<n_{k+1}<\cdots.$$

这样，我们给出了题设数列的一个无穷子数列$\{2^{n_j}-3\}$，$j=0, 1, 2, \cdots$。现在只要能证明

$$(2^{n_{k+1}}-3,\ 2^{n_i}-3)=1,\ i=0, 1, 2, \cdots, k,$$

那末这个无穷子数列即符合题设要求。

事实上，由 $2^{\varphi(2^{n_i}-3)}\equiv 1 \pmod{(2^{n_i}-3)}$，并注意到 $\varphi(2^{n_i}-3)\mid n_{k+1}$，可得：

$$2^{n_{k+1}}\equiv 1 \pmod{(2^{n_i}-3)},$$

$$2^{n_{k+1}}-3\equiv -2 \pmod{(2^{n_i}-3)}.$$

此时，若 t 是 $2^{n_{k+1}}-3$ 和 $2^{n_i}-3$ 的一个公因子，则有 $t\mid 2$。但 $2\nmid 2^{n_i}-3$，故 $t=1$。

这就是说，符合题设要求的无穷子数列是存在的。

【附注】 1. 欧拉(Euler)定理在数论中应用很广。作为这个定理的一个重要推论，是所谓费尔马(Fermat)定理：

若 p 是素数，且$(a, p)=1$，则 $a^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$。

例如，$6^{5-1}\equiv 1 \pmod{5}$，$10^{7-1}\equiv 1 \pmod{7}$。

费尔马定理容易用不超过中学的数学基础知识加以证明：

事实上，设

$$\begin{aligned}
a &= k_1 p + r_1,\\
2a &= k_2 p + r_2, \qquad\qquad (2)\\
&\cdots\cdots\\
(p-1)a &= k_{p-1} p + r_{p-1},
\end{aligned}$$

这里，k_i、r_i 是非负整数，$r_i \leqslant p-1$，$i=1, 2, \cdots, p-1$.

在(2)中，若有 $r_n = r_m (n \neq m)$，那末

$$(n-m)a = (k_n - k_m)p$$

能被 p 整除．而 $|n-m| < p$，$(a, p)=1$，这是不可能的．

因此，在(2)中所有的余数 r_1、r_2、$\cdots$、r_{p-1} 互不相同，是 1，2，$\cdots$，$p-1$ 的一个置换．把(2)中各式相乘，得

$$\begin{aligned}
&(p-1)!\,a^{p-1} = Np + r_1 r_2 \cdots r_{p-1},\\
&(p-1)!\,a^{p-1} = Np + (p-1)!,\\
&(p-1)!\,(a^{p-1}-1) = Np.
\end{aligned}$$

这里，N 是一个非负整数．

这就是说，$a^{p-1}-1$ 可被 p 整除，即 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$．

2．在有的书里，也把欧拉定理叫做费尔马定理。

第 四 题 (荷兰命题)

四面体 $ABCD$ 的所有侧面都是锐角三角形．考察所有的多边形 $XYZTX$，其中 X、Y、Z、T 分别是棱 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 的内点，试证：

1) 若 $\angle DAB + \angle BCD \neq \angle ABC + \angle CDA$，那末不存在

周长最小的多边形 $XYZTX$；

2）若 $\angle DAB+\angle BCD=\angle ABC+\angle CDA$，那末存在无限多个周长最小的多边形 $XYZTX$，其周长为 $2\overline{AC}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$. 这里，$\alpha=\angle BAC+\angle CAD+\angle DAB$.

【分析】 在空间中，有些曲面(如圆柱面、圆锥面)剪开以后能够摊在平面上，叫做可展曲面.

可展曲面上的曲线长度问题往往就在展开面上研究. 如图 13—2， 要求出圆柱面上连结 A 点与 B 点的最短路线的长（图13—2 甲)，就可在其展开面上(图 13—2 乙)量出这两点间的距离而得到.

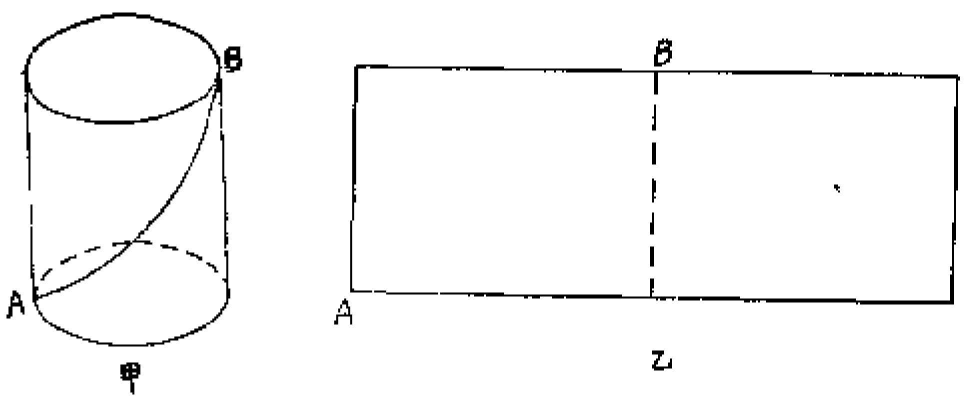


图 13—2

回到本题，注意到多面体的表面是可展的，因而也可以把多边形 $XYZTX$ 化为展开面上的折线，这样讨论起来就方便多了.

〈证明〉 如图 13—3，将四面体 $ABCD$ 展开，A'、A''是 A 的对应点，等等. 其中 $\triangle A'D'B'\cong\triangle A''D''B''$. 多边形 $XYZTX$在展开图中变成折线$T'X'Y'Z'T''$或$X'Y'Z'T''X''$.

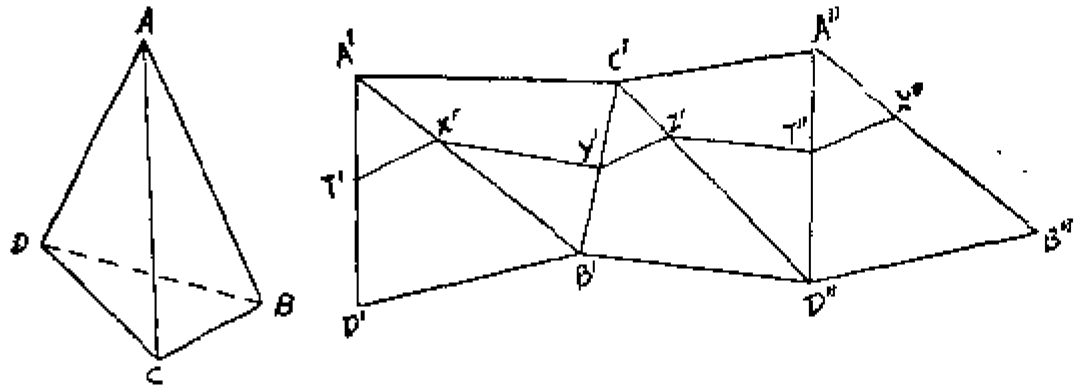


图 13—3

若折线 $T'X'Y'Z'T''$ ($X'Y'Z'T''X''$) 有最小长度，那末

$$X' \in \overline{T'Y'},\ Y' \in \overline{X'Z'},\ Z' \in \overline{Y'T''},\ T'' \in \overline{Z'X''}. \qquad (1)$$

在相反的情况下，我们可以缩短折线 $T'X'Y'Z'T''$ ($X'Y'Z'T''X''$) 的长．例如，当 $X' \overline{\in}\ \overline{T'Y'}$ 时，点 X' 可用线段 $\overline{T'Y'}$ 和 $A'B'$ 的交点来代替(因各面都是锐角三角形，那末 $A'D'B'C'$ 是凸四边形，所以交点是存在的)，此时所得折线的长将小于 $T'X'Y'Z'T''$ 的长．

由(1)成立，可推知 T'、X'、Y'、Z'、T''、X'' 在一直线上．

再由 $\triangle A'T'X' \cong \triangle A''T''X''$，$\angle A'T'X' = \angle A''T''X''$，又可推得

$$A'D'' \parallel A''D''. \qquad (2)$$

这就是说，条件(2)是存在最短折线 $T'X'Y'Z'T''$ 的必要条件．

下面我们将进一步证明：条件(2)同时也是存在无限多个长度为 $2AC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$ 的最短折线 $T'X'Y'Z'T''$ 的充分条件．

事实上，若条件(2)成立，再注意到 $\overline{A'T'} = \overline{A''T''}$，可得

$$\overline{T'X'}+\overline{X'Y'}+\overline{Y'Z'}+\overline{Z'T''}\geqslant\overline{T'T''}=\overline{A'A''}$$

$$=2\overline{A'C'}\cdot\cos\angle C'A'A''=2\overline{A'C'}\cdot\cos\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B'A'C$$

$$-\angle C'A''D'-\angle D'A'B')$$

$$=2\overline{AC}\cdot\sin\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle CAD-\angle DAB)$$

$$=2\overline{AC}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

而分别与 $A'B'$、$B'C'$、$C'D''$ 交于内点 X'、Y'、Z' 的线段 $T'T''$ 是存在的．这是由于只要 $\overline{T'T''}$ 交线段 $\overline{B'C'}$ 于某内点 Y' 时，那末由于 $A'D'B'C'$ 和 $A''C'B'D''$ 都是凸四边形，因而也必将分别交 $\overline{A'B'}$ 和 $\overline{C'D''}$ 于内点 X' 和 Z'．而 $\overline{B'C'}$ 上这样的内点 Y' 是存在的，如凸四边形 $A'B'D''C'$ 的对角线的交点即是(该交点在平行四边形 $A'D'D''A''$ 的对角线 $\overline{A'D''}$ 上，故可作出 $\overline{T'T''}$ 通过它)．

当我们沿 $A'D'$ 平行推移这样的线段 $\overline{T'T''}$，不管推移的距离多么小，都可得到无限多的最短折线‘其长度都为 $2AC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$.

最后，我们尚需证明条件(2)与下面的等式等价：

$$\angle DAB+\angle BCD=\angle ABC+\angle CDA. \qquad (3)$$

为此，设 $D'A'$、$B'A'$、$B'C'$、$D''C'$、$D''A''$ 顺时针旋转到 $T'T''$ 方向的角度分别为 β_1、β_2、β_3、β_4、β_5 (图 13—4)，则

$$\angle DAB=\beta_2-\beta_1,\quad \angle ABC=\beta_2-\beta_3,$$

$$\angle BCD=\beta_4-\beta_3,\quad \angle CDA=\beta_4-\beta_5.$$

若等式(3)成立，由上而一系列等式，可得

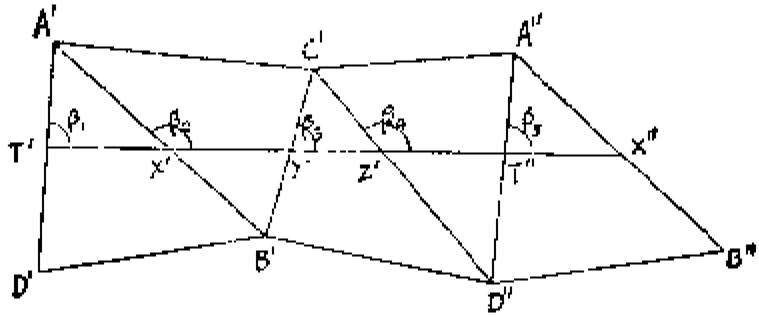


图 13—4

$$\beta_1=\beta_5, \quad A'D' \parallel A''D'';$$

反之，由 $A'D'' \parallel A''D''$. 可得 $\beta_1=\beta_5$，又可推出等式 (3).

故等式(3)与条件(2)等价. 至此，我们完全证明了题中的论断.

【附注】 本题的证明过程似乎很复杂，但所依据的基本原理只是："在所有连结两点的线中，直线段最短."一般来说，对于可展曲面上的"最短线"问题，都可用类似于本题的方法解决.

但是，也有些曲面，不论以什么方式剪开，都不可能无重叠或无破裂地摊在平面上，这就是所谓不可展曲面. 在我们熟悉的曲面中，球面就是一个不可展曲面. 可以证明：球面上连结两点间的最短线一定是通过这两点的大圆弧（指劣弧）. 在大地测量中，就经常用到这个原理.

第 五 题（保加利亚命题）

试证：对任何自然数 m，平面上有无穷多个非空的点集 S（有限集）具有下述性质：对于 S 中的任一点 A，在 S 中恰有 m 个点与 A 的距离为 1.

【分析】 我们从 $m=1$，2 开始，试图给出点集 S 的具体

例子：当 $m=1$ 时，长度为 1 的线段的两个端点的集合满足题设条件；当 $m=2$ 时，边长为 1 的正方形的四个顶点的集合满足题设条件.

当 $m=3$ 时，在棱长为 1 的正方体的八个顶点里，虽然对于其中任一顶点，其他顶点中恰有三个顶点与它的距离为 1，但这些顶点不在一个平面内，因而这些顶点的集合不满足问题的要求.

显然，不能按这样一种方式递推下去而得到 $m=3,4,\cdots$ 时点集 S 的例子. 由此，我们进一步分析 $m=2$ 时的例子，试图找到进一步递推下去的线索：

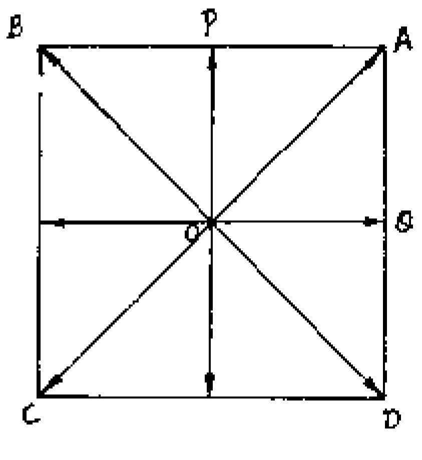


图 13—5

如图 13—5，以单位正方形 $ABCD$ 的中心 O 为起点，则顶点 A、B、C、D 可分别看作是由矢径 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$ 来确定的. 但这四个矢径又可看作是由两个矢径 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$（P、Q 分别是 $\overline{AB}$、$\overline{AD}$ 的中点）得到的：

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ};$$
$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ};$$
$$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ};\quad \overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}.$$

这里，$\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$ 的模都是 $\frac{1}{2}$，且互相垂直. 再深入探讨一下就可发现，要求 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$ 垂直是不必要的. 事实上，只要它们的和矢量与差矢量的模既不等于零（此时确定的四点中将出现两点重合），也不等于 $\frac{1}{2}$（此时不能保证对于一点仅有两点与它的距离为 1），所得到的点集 $\{A, B, C, D\}$ 将

满足题设条件.

不难看出，上面所说的当 $m=2$ 时确定点集 S 的方式，可以类推到 m 为任何正整数时的情况.

〈证明〉 对于给定的 m，我们将给出由 2^m 个点的集合 S.

为此，设在所考察的平面上有矢量 u_1、u_2、…、u_m，能够满足以下条件：

$$|u_i|=\frac{1}{2},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m; \tag{1}$$

$$0\neq|c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_mu_m|\neq\frac{1}{2} \tag{2}$$

其中 $c_i\in\{0,\ 1,\ -1\}$，并且至少有两个 c_i 是异于零的.

这样的矢量集合容易由归纳定义而得到.

事实上，如果我们用

$$u_i=\left(\delta_i,\ \sqrt{\frac{1}{4}-\delta_i^2}\right),\quad 0\leqslant\delta_i\leqslant\frac{1}{2}$$

来定义矢量，则能满足条件(1).

若矢量 u_1、u_2、…、u_k 已满足条件 (1) 和 (2)，固定它们，再定义矢量

$$u_{k+1}=\left(\delta_{k+1},\sqrt{\frac{1}{4}-\delta_{k+1}^2}\right),\quad 0\leqslant\delta_{k+1}\leqslant\frac{1}{2},$$

使对所有的系数 $c_i(1\leqslant i\leqslant k+1)$，这里 $c_i\in\{0,1,\ -1\}$，且其中至少有两个 c_i 异于零，表达式

$$0\neq|c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_ku_k+c_{k+1}u_{k+1}|\neq\frac{1}{2}$$

成立. 由于这里只需满足有限个条件，而参数 δ_{k+1} 却可在

$\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$中自由选择，所以这是办得到的(见附注).

下面，我们用上述矢量集合来定义点集S：

在平面上取任意固定的点M_0（矢径r_0），将点集S的2^m个点用下面矢径确定：

$$r_0+\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_mu_m,$$

其中$\alpha_i\in\{1,\ -1\}$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$.

容易证明，这样定义的点集S满足题目的要求.

首先，这2^m个点是互不相同的，可以用反证法证得. 因若两点重合，则表示它们的矢量之差为零，这与条件(1)或(2)矛盾.

其次，在S中取任意一点A，设它与数组$(\alpha_1',\ \alpha_2',\ \cdots,\ \alpha_m')$对应. 那末在$S$中有这样$m$个点，这些点所对应的数组和$(\alpha_1',\ \alpha_2',\ \cdots,\ \alpha_m')$都恰好只有某一个坐标$\alpha_i'$不同. 由条件(1)，它们与点$A$的距离为

$$|2\alpha_i'u_i|=2|u_i|=1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

而S中的其他任何点，由于所对应的数组与$(\alpha_1',\ \alpha_2',\ \cdots,\ \alpha_m')$至少有两个坐标不同，由条件(2)，它们与点$A$的距离不等于1.

这就是说，我们定义的点集S满足题设要求.

显然，由于点M_0的任意性，这样的点集S我们可以定义无数多个. 证毕.

【附注】 在前面的"证明"中，我们在用归纳的方法定义矢量集合$\{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\cdots,\ \mathbf{u}_n\}$时，曾说到若矢量$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\cdots,\ \mathbf{u}_k$已满足条件(1)、(2)，固定它们，再定义矢量$\mathbf{u}_{k+1}$，使矢量$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_k,\ \mathbf{u}_{k+1}$满足条件(1)、(2)，这是办得到的. 对此，我们

作下述进一步的说明：

设 $v_k=c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_ku_k$. 若 c_1, c_2, $\cdots$, c_k 中仅有一个异于零，则 $|v_k|\neq 0$，但却有 $|v_k|=\frac{1}{2}$；若至少有两个异于零，则

$$0\neq|v_k|\neq\frac{1}{2}.$$

再设 $v_{k+1}=v_k+c_{k+1}u_{k+1}$. 若 $c_{k+1}=0$，则 $v_{k+1}=v_k$. 此时，如果 c_1, c_2, $\cdots$, c_k, c_{k+1} 中至少有两个异于零，那末 c_1, c_2, $\cdots$, c_k 中也至少有两个异于零，故

$$0\neq|v_{k+1}|\neq\frac{1}{2}.$$

若 $c_{k+1}=\pm 1$. 此时，如果 c_1, c_2, $\cdots$, c_k, c_{k+1} 中至少有两个异于零，那末 c_1, c_2, $\cdots$, c_k 中可能至少有两个异于零，但也可能仅有一个异于零. 因此，虽肯定有 $|v_k|\neq 0$，但却可能有 $|v_k|=\frac{1}{2}$. 但只须使 u_{k+1} 与 v_k 不同向(或反向)，且使 u_{k+1} 与 v_k、v_{k+1} 不能(如图 13—6)组成以 v_k 为底的等腰三角形：

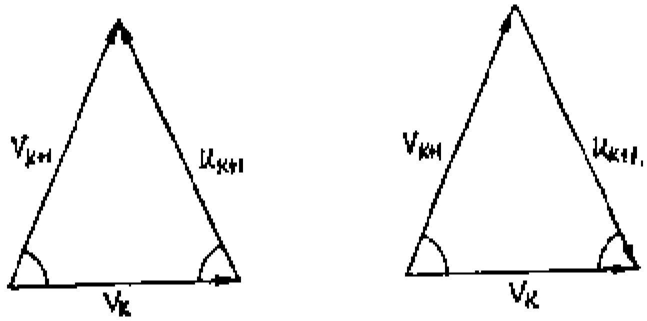


图 13—6

即可使 $0\neq|v_{k+1}|\neq\frac{1}{2}$. 考虑到在固定了 u_1, u_2, $\cdots$, u_k 时，

v_k只可能取有限个不同的方向，而u_{k+1}却可取无限个不同的方向，所以这是办得到的。

第 六 题 (瑞典命题)

$A=(a_{ij})$是一个元素a_{ij}为非负整数的矩阵，其中$i、j=1,2,\cdots,n$. 该矩阵有如下性质：若某一元素$a_{ij}=0$，那末对此$i、j$有

$$a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}+a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}\geqslant n,$$

试证：这个矩阵所有元素的和不小于$0.5n^2$.

【分析】 由题设，A为n阶方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

现在要证明A的所有元素的和S不小于某定值(即$0.5n^2$)，而

$$S=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right),$$

所以在估算S的值时，可以从各行(或列)元素之和所可能取的最小值p出发。

〈证法一〉 用p记所有行与列的元素和中最小的值。

若$p\geqslant\frac{n}{2}$，则A中所有元素的和

$$S\geqslant np\geqslant\frac{1}{2}n^2.$$

若$p<\frac{n}{2}$，不失一般性，假设第一行的和为p，且第一行恰有最前面的q个元素异于零，则$q\leqslant p<\frac{n}{2}$.

此时，由于 $a_{1,q+k}=0\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-q)$，故

$$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}+a_{1,q+k}+a_{2,q+k}+\cdots+a_{n,q+k}\geqslant n,$$

$$a_{1,q+k}+a_{2,q+k}+\cdots+a_{n,q+k}\geqslant n-p.$$

由此，第 $q+1$ 到第 n 列的所有元素的和至少是 $(n-q)\cdot(n-p)$. 而前面 q 列的所有元素的和至少是 pq，故 A 中所有元素的和

$$S\geqslant(n-q)(n-p)+pq=\frac{1}{2}n^2$$

$$+\frac{1}{2}(n-2p)(n-2q)>\frac{1}{2}n^2.$$

〈**证法二**〉　首先，同"证法一"一样，仍用 p 记所有行与列的元素和中最小的值，且不失一般性，设第一行的和为 p，且第一行恰有最前面的 q 个元素异于零.

如果 A 中所有元素的和 $S<\frac{1}{2}n^2=n\cdot\frac{n}{2}$，那末必有 $p<\frac{n}{2}$. 由此，$q\leqslant p<\frac{n}{2}$.

但前面 q 列的所有元素的和至少是 pq，故后面 $n-q$ 列的所有元素的和应小于 $\frac{1}{2}n^2-pq$. 于是，后面 $n-q$ 列元素中，至少有一列(不妨设是 $q+k$ 列，$1\leqslant k\leqslant n-q$)的元素之和

$$a_{1,q+k}+a_{2,q+k}+\cdots+a_{n,q+k}<\frac{\frac{1}{2}n^2-pq}{n-q}.$$

而由 $p<\frac{n}{2}$、$q<\frac{n}{2}$ 可得

$$\frac{1}{2}n^2-pq-(n-q)(n-p)=-\frac{1}{2}n^2+np+nq-2pq$$

$$= -\frac{1}{2}(n-2p)(n-2q) < 0.$$

所以
$$\frac{\frac{1}{2}n^2 - pq}{n-q} < n-p.$$

于是
$$a_{1,q+k} + a_{2,q+k} + \cdots + a_{n,q+k} < n-p,$$

$$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} + a_{1,q+k} + a_{2,q+k} + \cdots + a_{n,q+k} < n.$$

注意到 $a_{1,q+k} = 0$，即知上述结果与题设矛盾。这就是说，$S < \frac{1}{2}n^2$是不可能的。故 $S \geqslant \frac{1}{2}n^2$.

【附注】 一般来说，mn 个数 a_{ij}($i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$)所排成的 m 行 n 列的表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做一个 $m \times n$ 阶矩阵，简写成 $A = (a_{ij})$. 当 $m = n$时，A 又叫做 n 阶方阵.

如果把矩阵 A 的行列互换，所得到的矩阵

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做 A 的转置矩阵.

关于矩阵 A，可以定义如下的初等变换：

1) 互换 A 的两行(或列)；

2) 用一个不为零的数乘 A 的一行(或列)；

3) 用一个数乘 A 的一行(或列)加到另一行(或列)上.

对于本题来说，由于把 A 加以转置，以及对 A 施行第一种初等变换，既不改变 A 中所有元素的和，也不破坏题设的 A 所具有的性质，因此我们可以假设：在所有行与列的元素和中，第一行的元素和最小，且第一行恰有最前面的 q 个元素异于零.

矩阵在初等变换之下，具有一些性质，能使有关问题的解决获得简化. 矩阵是代数学上的一个重要研究对象，应用非常广泛，有关这方面的知识在一般的《高等代数》书中都可找到.

第十四届国际中学生数学竞赛试题分析与解答

1972 年在波兰举行

第　一　题（苏联命题）

给出一个集合，由十个互不相同的十进制的两位正整数组成．试证：这个集合必有两个无共同元素的子集，两子集中各数之和相等．

【分析】 只要该集合的非空真子集的个数多于各非空真子集的元素和所可能取的值的个数，就可以用“抽屉原则”分析．问题是，这样得到的两个元素和相等的子集，可能有共同元素．但是，在这两个子集中都去掉它们的共同元素之后，此时就可得到两个元素和相等的不相交非空子集，从而可证得结论．

〈证明〉 给出的集合 M 的子集一共有 $2^{10}=1024$ 个（见附注）．

除开空集 ϕ 和集合 M 本身（因为 ϕ 和 M 不能满足问题的要求），尚有非空真子集 $1024-2=1022$（个）．

在这 1022 个非空真子集中，元素之和均不大于 $9\times99=891$，即这些非空真子集的元素和所可能取的值的个数不多于 891．所以，在这 1022 个子集中，至少有两个子集，例如 $M_1\subset M$，$M_2\subset M$，它们含有的元素不全相同，但其元素

之和相等.

再令 $N_1=M_1-(M_1\cap M_2)$，$N_2=M_2-(M_1\cap M_2)$，则得到 M 的两个不相交的非空子集 N_1 和 N_2，它们中各元素的和相等.

【附注】 一个给定的集合 M 的所有子集组成的集合，一般称为 M 的幂集，记为 $P(M)$. 即

$$P(M)=\{A \mid A\subseteq M\}.$$

空集 ϕ 和集合 M 本身都是 $P(M)$ 中的元素.

如果 M 是 n 个元素组成的有限集合，则 $P(M)$ 中的元素是：空集 ϕ；各含有 M 中一个元素的 n 个集合；各含有 M 中二个元素的 C_n^2 个集合；各含有 M 中三个元素的 C_n^3 个集合；…；集合 M. 故 $P(M)$ 里元素的总数是

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n$$
$$=(1+1)^n=2^n(\text{个}).$$

对于本题，$n=10$，$P(M)$ 里元素的个数是

$$2^{10}=1024.$$

第　二　题（荷兰命题）

证明：对 $n\geqslant4$，每一个有外接圆的四边形，总可划分成 n 个都有外接圆的四边形.

【分析】 有外接圆的四边形就是对角互补的四边形. 在本题中，要求我们证明每一个这样的四边形，可以划分成 n $(n\geqslant4)$ 个这样的四边形.

下面的想法是很自然的：先证明可划分成 4 个这样的四边形；然后证明其中有一个这样的四边形，又总可划分为 2 个这样的四边形. 于是，依次递推，就可划分成 5 个，6

个，…这样的四边形.

但是，一般的对角互补的四边形，不一定可划分成 2 个这样的四边形(见附注). 不过，对于其中一种特例——等腰梯形，这却是办得到的. 事实上，只要是平行于等腰梯形的底的直线，截得的总是等腰梯形. 所以，不仅把等腰梯形划分为 2 个等腰梯形，就是划分为 3 个，4 个，…等腰梯形，也是办得到的.

于是，我们形成了这样的解题路线：首先把一个对角互补的四边形划分成 4 个这样的四边形，使得其中至少有一个等腰梯形，然后划分这个等腰梯形.

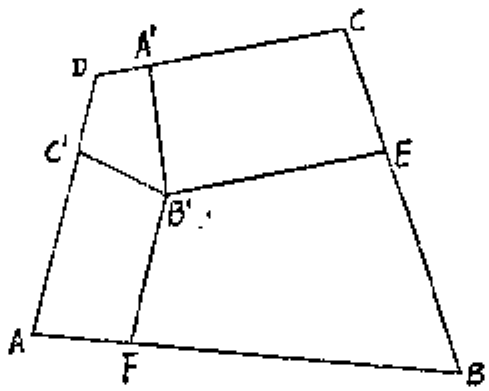


图 14—1

〈证法一〉 我们知道，一个四边形当且仅当它的对角互补时，才有外接圆.

1) $n=4$ 时的情形：

设 $ABCD$ 是所给的四边形. 我们取 CD 的内点 A'，AD 的内点 C'，且作

$$\angle DA'B'=\angle A,$$

$$\angle DC'B'=\angle C.$$

由于 A'、C' 可以取在 D 的任意近邻，因此可以使 $A'B'$、$C'B'$ 的交点 B' 是四边形 $ABCD$ 内的一点，且位于 D 的任意近邻. 于是，过 B' 分别作平行于 DC 和 DA 的直线，可以使它们分别交 BC 和 AB 于内点 E、F. 这样得到的四边形 $A'B'C'D$、$B'ECA'$、$FBEB'$ 和 $AFB'C'$ 就是所求的要分成的四个四边形.

事实上，由作法知，四边形 $A'B'C'D$、$FBEB'$ 与给定

的四边形 $ABCD$ 的内角对应相等，因此都是有外接圆的四边形．又

$$\angle CA'B' = \angle DC'B'\angle C;$$
$$\angle AC'B' = \angle DA'B'\angle A.$$

所以四边形 $B'ECA'$、$AFB'C'$ 都是等腰梯形，同样有外接圆．

2）$n\geqslant 5$ 时的情形：

首先，按 1）中的作法，将 $ABCD$ 分成四个对角互补的四边形．

然后，将所得的两个等腰梯形中的一个，用平行于底边的直线分为 $n-3$ 个等腰梯形，于是四边形 $ABCD$ 就被分为 n 个有外接圆的四边形了．

〈证法二〉 首先，与证法一相同，作四边形 $A'B'C'D$，使 $\angle DA'B'=\angle A$，$\angle DC'B'=\angle C$．

再在 $A'B'$ 的延长线上取点 G．由于可以使 B' 位于 D 的任意近邻，因此又可以使 G 是 $ABCD$ 内的一点，且位于 D 的任意近邻．于是，过 G 作平行于 DC 的直线，可以使它分别交 BC 和 AD 于内点 E、F．这样就把给定的四边形 $ABCD$ 分成了四个四边形．

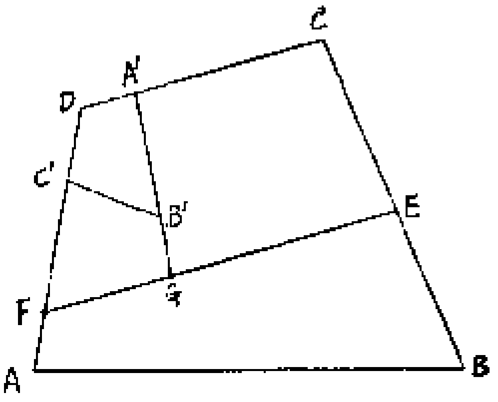


图 14—2

容易证明，四边形 $A'B'C'D$、$C'FGB'$、$ABEF$ 与给定的四边形 $ABCD$ 的内角对应相等，因此都是有外接圆的

四边形．又 $GECA'$ 是等腰梯形，同样有外接圆；另外，它还可用平行于 GE 的直线分为任意个数的等腰梯形．因此，$ABCD$ 可分为 n $(n\geqslant 4)$ 个都有外接圆的四边形．

【附注】 在前面的分析中，我们曾说：把一个对角互补的四边形分为两个这样的四边形，一般是不可能的．这是为什么呢？对此我们作一个简单的说明：

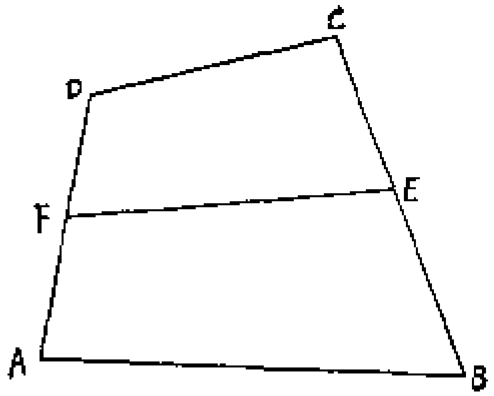


图 14—3

事实上，如果 EF 把给定的四边形 $ABCD$ 分成了两个这样的四边形，那末交点 E、F 一定分别位于一对对边上．不失一般性，设 E、F 分别位于 BC、AD 上．

若四边形 $ABEF$ 对角互补，那末必有 $\angle BEF=\angle C$，从而 $EF\parallel CD$；又若四边形 $FEDC$ 对角互补，那末必有 $\angle CEF=\angle B$，从而 $EF\parallel BA$．这样，就有 $CD\parallel BA$．但是，一般的对角互补的四边形并不一定要有一对对边平行（那时将是等腰梯形）；因此，一般的对角互补的四边形不一定可分为两个这样的四边形．

第 三 题（荷兰命题）

已知 m、n 是任意的非负整数，证明：若规定 $0!=1$，则

$$\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$$

是整数．

【分析】 把所给式记为 $f(m,\ n)$．下面我们固定 m 的取值，仅就 n 的不同取值来讨论：

当 $n=0$ 时，$f(m,\ 0)=C_{2m}^{m}$，表示一个组合数，所以必然是一个整数．

当 $n=1$ 时，容易归结为 $n=0$ 时的情形，即由

$$\frac{(2m)!\,2!}{m!\,(m+1)!}=\frac{4\cdot(2m)!}{m!\,m!}-\frac{[2(m+1)]!}{(m+1)!\,(m+1)!},$$

得 $$f(m,\ 1)=4f(m,\ 0)-f(m+1,\ 0),$$

所以仍为一个整数．

由此，我们自然想到证明这个问题可采用数学归纳法（对于 n），或采用把 $f(m,\ n)$ 的表示式中的 n 逐次递降为 $n-1$，$n-2$，…，直至零的方法．当然，这两种方法在本质上是一致的，只是递推的方向恰好相反．在证法一中我们采用的是后一种方法．

另外，对于本题也可以采用另一种截然不同的证题思路：考虑分母和分子的标准分解式，并证明分母中任一质因数的次数不大于分子中同一质因数的次数．证法二就是这样得到的．

〈证法一〉 记 $f(m,\ n)=\dfrac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$．

$$\because\quad \frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}=\frac{4\cdot(2m)!\,[2(n-1)]!}{m!\,(n-1)!\,(m+n-1)!}$$

$$-\frac{[2(m+1)]!\,[2(n-1)]!}{(m+1)!\,(n-1)!\,(m+n)!},$$

$$\therefore\quad f(m,\ n)=4f(m,\ n-1)-f(m+1,\ n-1).\qquad(1)$$

由 (1) 得 $f(m,\ n)=\sum_{k=0}^{1}c_{k1}\cdot f(m+k,\ n-1)$，这里，$c_{k1}$ 是整数.

继续使用 (1). 由

$$f(m+i,\ n-j)=4f(m+i,\ n-j-1)$$
$$-f(m+i+1,\ n-j-1),$$

此处 $0\leqslant i\leqslant n$，$0\leqslant j\leqslant n-1$，得

$$\begin{aligned} f(m,\ n)&=\sum_{k=0}^{2}c_{k2}\cdot f(m+k,\ n-2)\\ &=\sum_{k=0}^{3}c_{k3}\cdot f(m+k,\ n-3)\\ &=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &=\sum_{k=0}^{n}c_{kn}\cdot f(m+k,\ 0), \end{aligned}$$

这里，c_{k2}，c_{k3}，…，c_{kn} 是整数.

注意到 $f(m+k,\ 0)=C_{2(m+k)}^{m+k}$，是一个整数，即知 $f(m,\ n)$ 也是一个整数.

〈证法二〉 先证明下述引理：

若 $[u]$ 表示不超过 u 的最大整数，则对于 x、$y\geqslant 0$，恒有

$$[2x]+[2y]\geqslant[x+y]. \qquad (2)$$

事实上，若 $x+y<1$，则 $[x+y]=0$，(1) 显然成立.

若 $x+y\geqslant 1$，则 $[x+y-1]\geqslant 0$，仍有

$$[2x]+[2y]\geqslant[2x+2y-1]=[(x+y)+(x+y-1)]$$
$$\geqslant[x+y]+[x+y-1]\geqslant[x+y].$$

由于在 $k!$ 的标准分解式中质因数 p 的次数等于 $\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\left[\frac{k}{p^3}\right]+\cdots$，故欲证 $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ 是整数，只证明

$$\left[\frac{2m}{p^r}\right]+\left[\frac{2n}{p^r}\right]\geqslant\left[\frac{m}{p^r}\right]+\left[\frac{n}{p^r}\right]+\left[\frac{m+n}{p^r}\right].\qquad(3)$$

设 $m=g\cdot p^r+s(0\leqslant s<p^r)$，$n=h\cdot p^r+t(0\leqslant t<p^r)$，则

$$\left[\frac{2m}{p^r}\right]+\left[\frac{2n}{p^r}\right]=2g+2h+\left[\frac{2s}{p^r}\right]+\left[\frac{2t}{p^r}\right],$$

$$\left[\frac{m}{p^r}\right]+\left[\frac{n}{p^r}\right]+\left[\frac{m+n}{p^r}\right]=2g+2h+\left[\frac{s+t}{p^r}\right].$$

但由 (2)，$\left[\frac{2s}{p^r}\right]+\left[\frac{2t}{p^r}\right]\geqslant\left[\frac{s+t}{p^r}\right]$，

由此 (3) 成立，从而 $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ 是整数.

【附注】 1. 为什么在 $k!$ 中含有质因数 p 的次数等于 $\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\left[\frac{k}{p^3}\right]+\cdots$?

这是由于在 1，2，3，…，k 中，为 p 的倍数的数有 $\left[\frac{k}{p}\right]$ 个. 而在这些为 p 的倍数的数中，为 p^2 的倍数的数有 $\left[\frac{k}{p^2}\right]$ 个；在这些为 p^2 的倍数的数中，为 p^3 的倍数的数又有 $\left[\frac{k}{p^3}\right]$ 个，……. 所以，$k!$ 中含有质因数 p 的次数等于 $\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\left[\frac{k}{p^3}\right]+\cdots$. 考虑到 $p^r>k$ 时，$\left[\frac{k}{p^r}\right]=0$，故

上面的和中只有有限项不为零，因而才有意义.

2. 在判断分母、分子中含有阶乘的表示式是否为整数时，往往采用“证法二”的方法. 例如，对于组合数

$$C_m^n=\frac{m!}{n!(m-n)!}\quad(0\leqslant n\leqslant m),$$

由于 $\left[\frac{m}{p^r}\right]=\left[\frac{n}{p^r}+\frac{m-n}{p^r}\right]\geqslant\left[\frac{n}{p^r}\right]+\left[\frac{m-n}{p^r}\right]$,

故可证得 C_m^n 是整数. 而由 C_m^r 的实际意义，我们也知道 C_m^n 确系整数.

读者试用这个方法判断一下，C_{1000}^{50} 能否被 7 整除？

第　四　题（荷兰命题）

确定所有能使

$$\begin{aligned}
&(x_1^2-x_3x_5)(x_2^2-x_3x_5)\leqslant 0,\\
&(x_2^2-x_4x_1)(x_3^2-x_4x_1)\leqslant 0,\\
&(x_3^2-x_5x_2)(x_4^2-x_5x_2)\leqslant 0,\\
&(x_4^2-x_1x_3)(x_5^2-x_1x_3)\leqslant 0,\\
&(x_5^2-x_2x_4)(x_1^2-x_2x_4)\leqslant 0
\end{aligned}$$

成立的 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$，其中 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 是正实数.

【分析】 这是一个五元四次不等式组，难以归结为我们熟知的一元一次不等式、一元二次不等式等基本类型.

为此，我们考虑用观察法求它的解. 这就要注意充分利用这个不等式组的特点（如对于未知数 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 的轮换对称性等），以便一方面得到它的解，另一方面也不遗漏它的解.

〈解答〉 显然，对于不等式组

$$(x_1^2-x_3x_5)(x_2^2-x_3x_5)\leqslant 0, \qquad (1)$$

$$(x_2^2-x_4x_1)(x_3^2-x_4x_1)\leqslant 0, \qquad (2)$$

$$(x_3^2-x_5x_2)(x_4^2-x_5x_2)\leqslant 0, \qquad (3)$$

$$(x_4^2-x_1x_3)(x_5^2-x_1x_3)\leqslant 0, \qquad (4)$$

$$(x_5^2-x_2x_4)(x_1^2-x_2x_4)\leqslant 0, \qquad (5)$$

存在下述解：

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5>0. \qquad (6)$$

另一方面，若不满足 (6)，则关系式

$$x_1\neq x_3,\quad x_3\neq x_5,\quad x_5\neq x_2,\quad x_2\neq x_4,\quad x_4\neq x_1$$

中至少有一个满足.

因为不等式组 (1) 至 (5) 关于置换

$$x_1\to x_2\to x_3\to x_4\to x_5\to x_1$$

是不变的，并且若 $(x_1, x_2, \cdots, x_5)$ 是解，$(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \cdots, x_5^{-1})$ 也总是解，故不失一般性，可以假设 $x_3\neq x_5$，且取 $x_3<x_5$. 我们将由此引出矛盾. 事实上：

1） 若 $x_1\leqslant x_2$. 由 (1) 得

$$x_1\leqslant\sqrt{x_3x_5}<x_5,\quad x_2\geqslant\sqrt{x_3x_5}>x_3.$$

于是，一方面由 $x_5^2>x_5x_3>x_1x_3$，且由 (4)，可推导出

$$x_4^2\leqslant x_1x_3<x_3x_5; \qquad (7)$$

另一方面，由 $x_3^2<x_3x_5<x_2x_5$，且由 (3)，可推导出

$$x_4^2\geqslant x_5x_2>x_5x_3. \qquad (8)$$

显然，(7) 与 (8) 是矛盾的.

2） 若 $x_1>x_2$，那末由 (1) 得

$$x_1\geqslant\sqrt{x_3x_5}>x_3,\quad x_2\leqslant\sqrt{x_3x_5}<x_5.$$

于是，由 (2) 得

$$x_4x_1 \leqslant max(x_2^2,\ x_3^2) \leqslant x_3x_5; \tag{9}$$

由 (5) 得 $$x_2x_4 \geqslant min(x_5^2,\ x_1^2) \geqslant x_3x_5. \tag{10}$$

从而由 (9)、(10) 得 $x_1 \leqslant x_2$. 这和假设矛盾.

因此，当且仅当满足 (6) 时，原不等式组成立.

【附注】 1. 如果方程(或不等式) 只存在明显的、可以观察到的解，往往采用本题的方法求解.

例如，对于方程

$$x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}},$$

就可以用观察法求得它的根 $x=2$，然后证明当 $x>2$ 以及 $x<2$ 时都不可能是方程的根，从而作出结论：方程只有唯一的实根 $x=2$. 但是，如果用去根号的方法来解这个方程，那其繁琐就是可以想象的了!

2. 符号"max (…)"表示括号内最大的那个数；"min (…)"表示括号内最小的那个数.

第 五 题（保加利亚命题）

设 f 和 g 是定义在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的实函数，而且对于所有的 x 和 y 满足方程：

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y).$$

试证：若 $f(x)$ 不恒为零，且 $|f(x)|\leqslant 1$ 对所有 x 都成立，则有 $|g(y)|\leqslant 1$ 对所有 y 都成立.

【分析】 条件 $|f(x)|\leqslant 1$ 表明 $|f(x)|$ 的取值有上界 1，但并不说明 1 就是 $|f(x)|$ 取值的最小上界. 这是因为若 $|f(x)|\leqslant\frac{4}{5}$ 对所有 x 都成立，那仍有 $|f(x)|\leqslant 1$ 对所有 x

都成立. 此时, $\frac{4}{5}$也是$|f(x)|$取值的一个上界. 显然, $|f(x)|$有无穷多个上界.

一般地, 我们把一个实数集 A 的所有上界中最小的一个叫做这个实数集 A 的上确界, 记作 $supA$. 下面可以看到, 由于本题在估计$|g(y)|$的取值的上界时, 必须精确考虑到$|f(x)|$最大取值的可能性, 因而要用到$|f(x)|$的上确界.

〈证明〉 设 $M=sup|f(x)|$, $0<M\leqslant 1$. 假定存在一实数 y_0, 使

$$|g(y_0)|=1+r, \quad r>0.$$

因为对于所有的 x, 有

$$\begin{aligned}2|f(x)|\cdot|g(y_0)|&=|f(x+y_0)+f(x-y_0)|\\&\leqslant|f(x+y_0)|+|f(x-y_0)|\leqslant 2M,\end{aligned}$$

所以有

$$|f(x)|\leqslant\frac{M}{|g(y_0)|}=\frac{M}{1+r}=M-\delta, \quad \delta>0.$$

这和 M 的定义矛盾!

所以, $|g(y)|\leqslant 1$ 对所有的 y 都成立.

【附注】 1. 读者不难发现, 在上面的证明中还存在一个重要的问题: 一个有上界的实数集一定会有上确界吗?

因为一般说来, 在无穷多个实数中并不一定总有最小的数, 而现在说到有上界的实数集, 其上界确有无穷多个, 所以这个问题是需要讨论的. 不过, 下面这个非常基本的定理对这个问题作了完全肯定的回答:

确界存在定理: 凡有上界的非空实数集必有上确界.

这个定理的证明, 可以在一般的《数学分析》的书中找到.

当然，与讨论一个实数集 A 的上确界一样，还可以讨论一个实数集 A 的下确界（记作 $infA$）．不过，这已经离开本题的范围了．

2．本题若把条件中的“$|f(x)|\leqslant 1$”改为“$|f(x)|\leqslant a$, $a>0$”，结论同样成立．

若把题设的方程改为

$$f(x+2y)+f(x-2y)=2f(2x)g(y),$$

结论是否还成立呢？也请读者考虑．

第　六　题（英国命题）

给出四个不重合的互相平行的平面，试证：存在一个正四面体，它的四个顶点分别在这四个平面上．

【分析】 如果把问题化为相应的平面几何问题，就成为：

给出三条不重合的互相平行的直线，试证存在一个正三角形，它的三个顶点分别在这三条直线上．

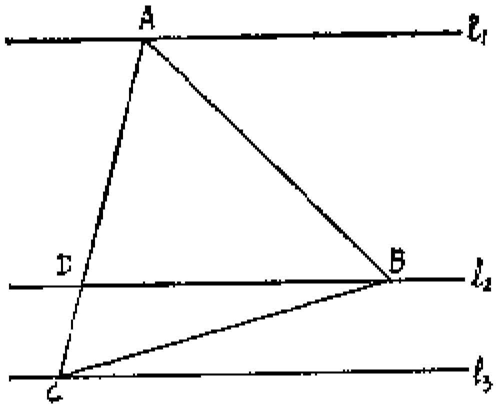


图 14—4

如图 14-4，l_1、l_2、l_3 是三条互相平行的直线，l_1 到 l_2 的距离为 h_1，l_2 到 l_3 的距离为 h_2．若存在（注意：现在还不能肯定存在！）一个正三角形 ABC，其顶点 A、B、C 分别在 l_1、l_2、l_3 上，且 AC 与 l_2 交于 D，那末将有

$$\overline{AD}:\overline{DC}=h_1:h_2.$$

反之，任给一个正三角形 $A'B'C'$，如果在 $A'C'$ 上取内点 D'，使 $A'D':D'C'=h_1:h_2$，

然后过 D'、B' 作直线 l_2'，又过 A'、C' 分别作与 l_2' 平行的直线 l_1'、l_3'，这时得到的将是前述的经过相似变换以后的图形. 由此种图形经过相反的变换又可得到与前述一样的图形，从而可以肯定满足题设要求的正三角形是存在的.

至于回到本题的立体几何问题，只须把上述的二维结果类推至三维，即将"直线"换为"平面"，"正三角形"换为"正四面体"，即可得证.

〈证明〉 设 E_1、E_2、E_3、E_4 是所考察的平面，且 E_2、E_3、E_4 依次位于 E_1 的法线正方向上，平面 E_{i+1} 到 E_i 的距离为 d_i ($i=1, 2, 3$).

任意给定一个正四面体 $P_1'P_2'P_3'P_4'$. 若点 Q_2、Q_3 内分线段 $\overline{P_1'P_4'}$ 成比例 $d_1:d_2:d_3$，R_3 内分线段 $P_2'P_4'$ 成比例 $d_2:d_3$，S_2 内分线段 $P_1'P_3'$ 成比例 $d_1:d_2$，则由

$$\overline{P_4'Q_3}:\overline{P_4'Q_2}=\overline{P_4'R_3}:\overline{P_4'P_2'},$$

根据平行线截得比例线段定理的逆定理知

$$\overline{Q_3R_3} /\!/ \overline{Q_2P_2'}.$$

同理可知

$$\overline{Q_2S_2} /\!/ \overline{Q_3P_3'}.$$

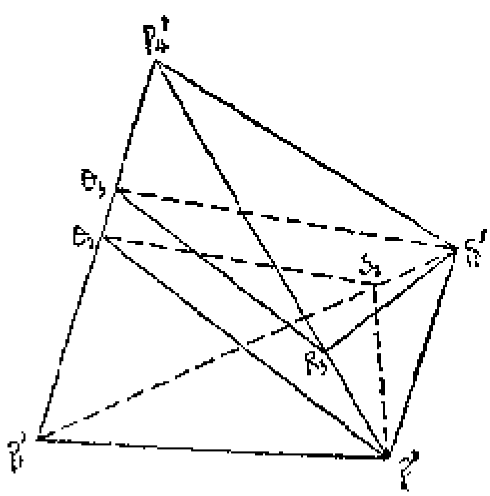


图 14—5

过点 Q_2、P_2'、S_2 和 Q_3、R_3、P_3' 分别作平行平面 E_2' 和 E_3'；又分别过点 P_1' 和 P_4' 作和平面 E_2' 平行的平面 E_1' 和 E_4'.

如图 14-6 所示，若由点 P_4' 到平面 E_1' 的垂线交平面 E_i' 于点 T_i ($i=1, 2, 3$)，则 E_1' 和 E_2'，E_2' 和 E_3' 以及 E_3' 和 E_4' 的距离 t_1，t_2 及 t_3，满足

$$t_1:t_2:t_3=d_1:d_2:d_3.$$

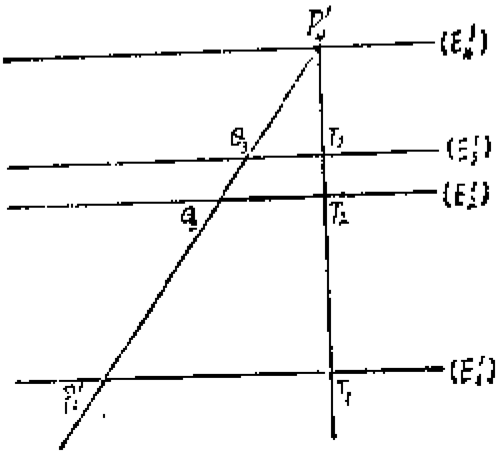


图 14—6

按照上式确定的比例关系，经过相似变换，使平面 E_1'，E_2'，E_3'，E_4' 变为具有给定距离 d_i ($i=1, 2, 3$) 的平面 E_1''，E_2''，E_3''，E_4''。与此同时，$P_1'P_2'P_3'P_4'$ 变为一个新的正四面体 $P_1''P_2''P_3''P_4''$，这里点 P_i'' 在平面 E_i'' ($i=1, 2, 3, 4$) 上。

与此相对应，存在一个正四面体 $P_1P_2P_3P_4$，它的顶点 P_i 在平面 E_i ($i=1, 2, 3, 4$) 上。证毕。

【附注】 对于前面分析中所说到的平面上的情形，还可以用计算的方法来证明这个正三角形的存在。

见图 14-4，读者不难算出，正三角形 ABC 的边长

$$a=\frac{2}{3}\sqrt{3(h_1^2+h_1h_2+h_2^2)}.$$

至于本题的空间中的情形，虽然从理论上说，这个正四面体 $P_1P_2P_3P_4$ 是存在的，因而棱长也是可以计算出来的；但在实际进行时，就不象平面上那样容易了。

第十五届国际中学生数学竞赛试题分析与解答

1973年在苏联举行

第　一　题（捷克斯洛伐克命题）

O是直线g上的一点，$\overrightarrow{OP_1}$、$\overrightarrow{OP_2}$、…、$\overrightarrow{OP_n}$都是单位长度的向量，其中所有点P_i都在通过g的一个平面上，且在g的同一侧．试证：若n是奇数，则有

$$|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_n}|\geqslant 1,$$

这里，$|\overrightarrow{OM}|$表示向量$\overrightarrow{OM}$的长度．

【分析】 我们知道，自然数集与奇数集之间可以建立一一对应关系：

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & \cdots
\end{array}$$

这就是说，奇数集是可数集．

数学归纳法可用于证明任意可数集上的命题．其证题步骤与证自然数集上的命题一样，即

1）验证对“初始元素”a_1命题成立；

2）假设对任意元素a_k命题成立，证明对它的“跟随元素”a_{k+1}命题也成立．

本题可在奇数集上用数学归纳法证明.

〈**证法一**〉 结论对于 $n=1$ 显然正确.

若 $n\geqslant 3$，不失一般性，设向量的终点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 按顺时针方向排列在以 O 为心，1 为半径的半圆周 K 上(图 15-1).

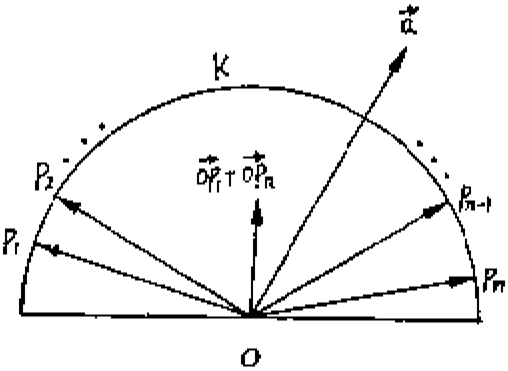


图 15—1

假设结论对小于 n 的奇数 $n-2$ 是正确的，则 $\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\cdots+\overrightarrow{OP_{n-1}}$ 可表示为一个以 O 为起点，长度不小于 1 的向量 $\vec{a}$，它将与半圆 K 交于 P_2 与 P_{n-1} 之间的某点.

又 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_n}$ (异于零向量) 可表示为一个以 O 点为起点，位于角 $(\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_n})$ 的平分线上的向量，因而它将与 $\vec{a}$ 交成一个锐角 (或 $0°$ 的角). 这样，$\vec{a}$ 与 $(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_n})$ 的和向量的长度将不小于 $|\vec{a}|$，故有

$$|\vec{a}+(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_n})|=|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_{n-1}}+\overrightarrow{OP_n}|\geqslant|\vec{a}|\geqslant 1.$$

因此，结论对于任何奇数 n 都正确.

〈**证法二**〉 由证法一可知，只需证明 $n=3$ 时结论正确，即不难用数学归纳法证明对于任何奇数 n 结论都正确.

下面我们用复数证明：

设 $\overrightarrow{OP_1}$、$\overrightarrow{OP_2}$ 和 $\overrightarrow{OP_3}$ 分别对应于复数

$$z_1=\cos\theta_1+i\sin\theta_1,\quad z_2=\cos\theta_2+i\sin\theta_2,$$

$$z_3=\cos\theta_3+i\sin\theta_3,$$

这里，$0\leqslant\theta_3<\theta_2<\theta_1\leqslant\pi$. 则

$$z_1+z_3=(\cos\theta_1+\cos\theta_3)+i(\sin\theta_1+\sin\theta_3)$$

$$=2\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_3}{2}$$

$$+2i\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_3}{2}.$$

由此，$\quad arg(z_1+z_3)=\dfrac{\theta_1+\theta_3}{2}.$

又设 $|z_1+z_3|=r\geqslant 0$，则

$$z_1+z_3=r\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2}+i\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\right).$$

于是：

$$z_1+z_2+z_3$$

$$=\left(r\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2}+\cos\theta_2\right)$$

$$+i\left(r\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}+\sin\theta_2\right);$$

$$|z_1+z_2+z_3|$$

$$=\left[\left(r\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2}+\cos\theta_2\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(r\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}+\sin\theta_2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{1+r^2+2r\cos\frac{\theta_1+\theta_3-2\theta_2}{2}}.$$

但 $\dfrac{\theta_1+\theta_3-2\theta_2}{2}=\dfrac{(\theta_1-\theta_2)-(\theta_2-\theta_3)}{2}$，注意到 $0\leqslant\theta_3<\theta_2<\theta_1\leqslant\pi$，得：

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta_1+\theta_3-2\theta_2}{2}<\frac{\pi}{2},\quad 0<\cos\frac{\theta_1+\theta_3-2\theta_2}{2}\leqslant 1.$$

所以 $\qquad |z_1+z_2+z_3|\geqslant 1.$

亦即 $n=3$ 时结论正确.

【附注】 1. 证法一偏重于几何直观，其中“$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_n}$ 可表示为一个以 O 为起点位于角 $(\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_n})$ 的平分线上的向量”，以及“$\vec{a}$ 与 $(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_n})$ 夹角是锐角时其和向量的长度不小于 $|\vec{a}|$”，都容易由平行四边形的性质得到证明（如图15-2，15-3）.

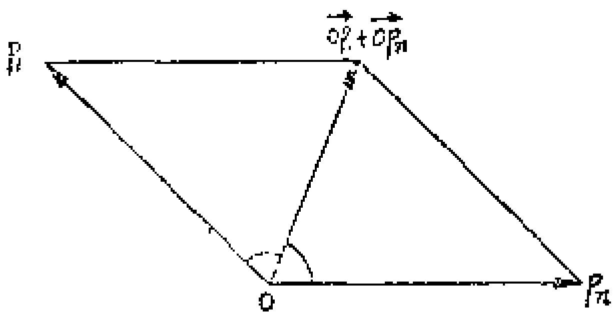


图 15—2

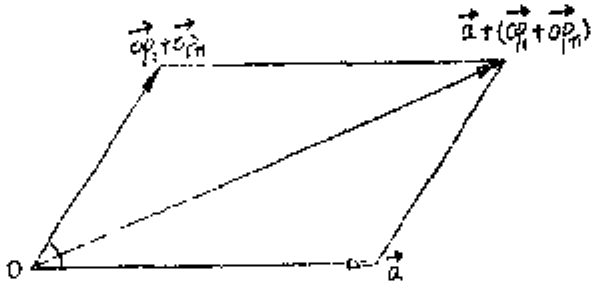


图 15—3

至于在证法二中，则是以复数为工具对有关结论作了“定量”计算.

读者不难看出，两种证法在思路上基本一致，并无本质上的区别.

2. 当 n 为偶数时，结论不一定成立. 这只须看 $n=2$ 时的情形就可以了. 事实上，在两种证法中，都已涉及过这种

情形，例如：在证法一中，已显示出$|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_n}|$可以小于1；在证法二中，也显示出$|z_1+z_3|$可以小于1．这就是说，本题的结论当$n$为偶数时不一定成立．

第　二　题（波兰命题）

试考察，在三维空间里是否有这样一个不全在一个平面上的有限点集M，具有如下性质：对任何两点A、$B\in M$，总有另外两点C、$D\in M$，使得两直线AB和CD平行但不重合．

【分析】　我们首先在二维(平面)里考察这个问题．显然，这样的例子并不难找到：

如图15-4，$ABGH$、$BCFG$和$CDEF$是三个一样大的正方形，P、Q分别是$ABGH$和$CDEF$的中心．容易验证，点集$\{B, C, F, G, P, Q\}$具有题设性质．

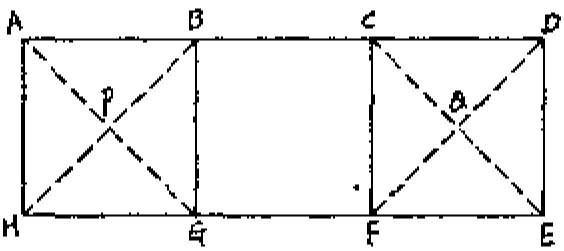


图 15—4

不难看出，上述结果可以类推到三维空间中去．

〈解答〉　具有题设性质的点集M是存在的．这可以通过给出一个简单的例子而得到证实．

依次放置三个同样大小的立方体，使中间的一个立方体相对的两侧面分别与另两个立方体的一个侧面公共．这样，由中间的立方体的8个顶点，和与它相邻的两个立方体的中心，就构成一个具有题设性质的点集(证明从略)．

【附注】 上述10点所组成的点集，是下面例子的特殊情形：

对于偶数 $n\geqslant 4$，设 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$（分别记为 P 和 Q）是全等的具有对称中心的 n 边形，分别位于两个平行平面上，且有 $\overrightarrow{A_iB_i}=\overrightarrow{PQ}$（$i=1, 2, \cdots, n$）．另外，设 R 和 S 是具有 $\overrightarrow{RO}=\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{PQ}$ 的点，这里 O 是线段 $\overline{PQ}$ 的中点．这样，我们得到了关于点 O 对称分布的点集

$$M=\{A_1, A_2, \cdots, A_n; B_1, B_2, \cdots, B_n; R, S\}.$$

若 A、$B\in M$，且线段 AB 不通过点 O．则分别取和 A、B 关于 O 对称的点 C、D，即有两直线 AB 和 CD 平行．

若线段 AB 通过点 O，则有下述两种情况：

1） $\overline{AB}=\overline{RS}$．此时，取点 C 为 A_1，点 D 为 B_1，即有 $AB\parallel CD$．

2） 点 $A\in\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，点 $B\in\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$．此时，取和 A 关于 P 对称的 $A_1A_2\cdots A_n$ 的顶点 A'，则有

$$\overrightarrow{RA'}=\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{PA'}=\overrightarrow{RP}-\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AO}.$$

由此得到

$$RA'\parallel AO, \text{ 即 } RA'\parallel AB.$$

因此，取 C 为 R，D 为 A'，即有 $AB\parallel CD$．

第　三　题（瑞典命题）

若 a、b 是实数，且 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ 至少有一个实根，试计算 a^2+b^2 能取的最小值．

【分析】 题设方程

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0 \tag{1}$$

是一个偶次的倒数方程．注意到这一特点，就可以：

1） 把研究范围归结为只研究方程(1) 至少有一正根的情况；

2） 通过变量代换

$$u=x+\frac{1}{x}$$

把方程(1) 化为二次方程

$$u^2+au+b-2=0. \tag{2}$$

再由 $x>0$ 时，$u=x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$，进一步又把研究范围归结为只研究方程 (2) 至少有一不小于 2 的实根的情况．

而方程(2) 的根可看作二次函数

$$f(u)=u^2+au+b-2$$

的零点．于是，问题又可利用有关函数的性质进行研究（如解法一）．

另外，由二次方程求根公式直接从寻求方程 (2) 的系数应满足的条件入手，也是可行的(如解法二)．

〈**解法一**〉 易知，方程

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0 \tag{1}$$

的每一实根或者是正的，或者是负的．因为对于方程（1）的每一负根 x_0，数 $-x_0$ 是方程

$$x^4-ax^3+bx^2-ax+1=0$$

的正根，而 $(-a)^2+b^2=a^2+b^2$，所以只研究方程 (1) 至少有一正根的情况就可以了．

设 M 是所有数对 (a, b) 的集合，对于这些数对，方程 (1) 至少有一正根．这样，问题就成为求数

$$d=\min_{(a,b)\in M}(a^2+b^2).$$

令 $u=x-\frac{1}{x}$，则方程 (1) 化为

$$u^2+au+b-2=0. \tag{2}$$

若 x_0 是 (1) 的正根，那末

$$u_0=\frac{1}{x_0}+x_0\geqslant 2.$$

反之，对于 (2) 的一个不小于 2 的根 u_0，方程

$$x+\frac{1}{x}=u_0 \text{ 或 } x^2-u_0x+1=0,$$

由于判别式 $D=u_0^2-4\geqslant 0$，也至少有一实根，且为正根.

因此，若 R 是实数对 (a, b) 的集合，这里对于这些实数对，方程 (2) 至少有一个不小于 2 的实根，那末就有

$$d=\min_{(a,b)\in R}(a^2+b^2).$$

对于 $f(u)=u^2+au+b-2$，我们研究两种情形：

1) $f(2)\leqslant 0$ 的情形：

由于 $\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=+\infty$，根据连续函数的性质必有一实数 $u_0\geqslant 2$，使得 $f(u_0)=0$. 而适合条件

$$f(2)=2a+b+2\leqslant 0$$

的点 (a, b)，在直线 $b=-2a-2$ 所分的下半平面 H 内(这里以 a、b 分别为自变量和因变量). 但是，在 H 的所有点中，与原点 O 有最小距离的点，是从点 O 到直线 $b=-2a-2$ 的垂线的垂足 P，因 $\overline{OP}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，故

$$\min_{(a,b)\in H}(a^2+b^2)=\frac{4}{5}.$$

2) $f(2)>0$ 的情形：

由于 $f(u)=\left[u-\left(-\frac{a}{2}\right)\right]^2+\left(b-\frac{a^2}{4}-2\right)$，因此若有一实数 $u_0\geqslant 2$，使得 $f(u_0)=0$，则必有：

$$-\frac{a}{2}>2,\ a<-4.$$

故此时有

$$a^2+b^2\geqslant a^2>16.$$

综上所述，得

$$d=\min_{(a,b)\in M}(a^2+b^2)=\min_{(a,b)\in R}(a^2+b^2)=\min_{(a,b)\in H}(a^2+b^2)$$

$$=\frac{4}{5}.$$

〈解法二〉 由解法一知，只需研究方程

$$u^2+au+b-2=0 \tag{2}$$

至少有一不小于 2 的实根的情况.

为此，应有

$$D=a^2-4b+8\geqslant 0, \tag{3}$$

且 $$\frac{-a+\sqrt{a^2-4b+8}}{2}\geqslant 2. \tag{4}$$

那末 $$\sqrt{a^2-4b+8}\geqslant a+4,$$

$$a^2-4b+8\geqslant (a+4)^2=a^2+8a+16,$$

$$2a+b+2\leqslant 0. \tag{5}$$

反之，若 a、b 满足 (5)，也可推知 a、b 必满足 (3)、(4)，从而方程 (2) 至少有一不小于 2 的实根.

令 $a=\rho\cos\theta$，$b=\rho\sin\theta$ $(\rho\geqslant 0)$，则 (5) 化为

$$2\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+2\leqslant 0,$$

$$\sqrt{5}\rho\cos(\theta-\varphi)\leqslant -2, \qquad (6)$$

这里，$\varphi=arc\,\mathrm{tg}\dfrac{1}{2}$.

显然，满足 (6) 的 ρ 的最小(正)值为$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

又因 $a^2+b^2=\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\rho^2$，故得

$$min(a^2+b^2)=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{4}{5}.$$

【附注】 1. 令 $a=\rho\cos\theta$，$b=\rho\sin\theta$，实际上是把坐标平面 aOb 上的点 (a, b) 用极坐标表示. 而 $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ 是点 (a, b) 的极径，故满足 (6) 的 ρ 的最小 (正) 值就是直线

$$\sqrt{5}\,\rho\cos(\theta-\varphi)=-2$$

下方(包括边界)的所有点的极径的最小值，显然它等于极点 O 与这条直线的距离$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

因此，解法二与解法一并没有本质的不同.

2. 关于连续函数及性质的有关内容，在一般的微积分的书籍中都可找到，这里不再赘述.

第 四 题（南斯拉夫命题）

一个战士想要查遍一个正三角形区域内及边界上有无地雷，他的探测器的有效半径等于正三角形高的一半. 这个战士从三角形的一个顶点开始探测，问他循怎样的探测路线才能使查遍整个区域的路程最短?

【分析】 显然，这个战士不需要走遍整个区域的每个

点．这是由于：他无论走到哪一个点，其可探测的范围将不局限于这点，而是一个以这点为圆心，$\frac{h}{2}$（h 为题设正三角形的高）为半径的圆．但是，这个战士也必须至少走到距另两个顶点有$\frac{h}{2}$的地方，否则将探查不到距出发点最远的两个点．下面，我们正是从估计这个战士必须且只须走到的范围出发，来寻找一条最短路线．

〈解答〉 如图 15-5，设士兵从点 A 出发．为了检查点 C 和 B，士兵必须达到分别以 C 和 B 为中心，以$\frac{h}{2}$为半径的弧上的某点 D 和 E．由于$\overline{BE}=\frac{h}{2}$，所以当路径 $ADEB$ 最短时，ADE 也最短．此时，从 A 到 D 和从 D 到 E 的路径必须是直线段，且 E 必须在线段 DB 上．在这种情形下，为使 $ADEB$ 最短，点 D 必须取在使$\overline{AD}+\overline{DB}$达到最小的位置．此时，必有$\overline{DA}=\overline{DB}$，即点 D 是从 C 到 AB 边的高的中点．

事实上，若取弧上的另一点 D'，我们作 $D'L\perp DB$ 于 L，作 $D'M\perp AD$ 于 M，那么，D' 必在 DL 和 $\angle LDM$ 的平分线之间，从而有

$$\overline{D'L}<\overline{D'M},$$

$$\overline{LD}>\overline{MD};$$

$$\overline{AD'}+\overline{D'B}>\overline{AM}+\overline{LB}=(\overline{AD}+\overline{DB})$$

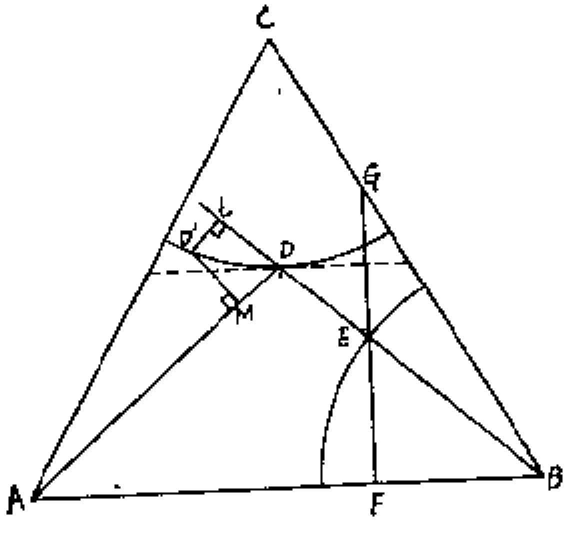


图 15—5

$$+\overline{(LD}-\overline{MD)}>\overline{AD}+\overline{DB}.$$

最后，我们证明：士兵在通过上述路径 ADE 时，可以查遍整个三角形 ABC. 为此，在路径上任意一点作 AB 的垂线，显然这点和垂线与三角形边的交点的距离不大于$\frac{h}{2}$. 由于这些垂线覆盖四边形 $AFGC$，所以四边形 $AFGC$ 将被完全探测到. 另外，点 F、B、G 被以 E 为中心，$\frac{h}{2}$ 为半径的圆所覆盖，所以剩下的三角 FBG 也将被完全探测到.

【附注】 1. 在前面的证明中，关键的一步是证不等式 $AD'+D'B>AD+DB$.

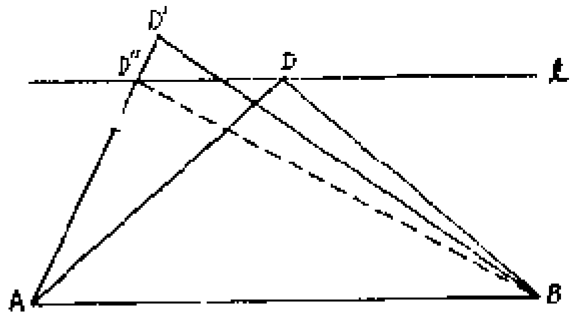


图 15—6

证这个不等式也可以根据下述定理：在同底同高的一切三角形中，以等腰三角形的周长最小.

事实上，如图 15-6，若 l 是过 D 且与 AB 平行的直线（即图 15-5 中过 D 的 $\odot C$ 的切线），AD'与 l 交于 D''，则可得

$$\overline{AD'}+\overline{D'B}=\overline{AD''}+(\overline{D''D'}+\overline{D'B})$$
$$>\overline{AD''}+\overline{D''B}>\overline{AD}+\overline{DB}.$$

另外，这个不等式也可以根据椭圆的性质推出. 为此，以 A、B 为焦点，以 D 为短轴一端点作椭圆. 只要注意到 D' 是这个椭圆外的一点，即不难得到上述的不等式.

2. 上面所说的最短路线不是唯一的. 例如，若把点 D 取在 AC 边上的高的中点，则可得另一最短路线.

第　五　题（波兰命题）

给定一个由形如 $f(x)=ax+b$ 的非常数函数所组成的非空集 G，这里 a、b 是实数，且 $a\neq 0$，x 是实变数．若 G 有如下性质：

1）　若 f、$g\in G$，则 $gof\in G$，其中定义

$$(gof)(x)=g[f(x)];$$

2）　若 $f\in G$，且 $f(x)=ax+b$，那末反函数 f^{-1} 也属于 G，这里

$$f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a};$$

3）　对每一个 $f\in G$，有一个 x_f，使 $f(x_f)=x_f$．证明：总有一个 k，使对所有的 $f\in G$，有

$$f(k)=k.$$

【分析】　集 G 是由满足性质 1)—3) 的函数

$$f(x)=ax+b\,(a\neq 0)$$

为元组成的．其中，性质 1) 说的是集 G 中的元对于运算 "o" 是封闭的；性质 2) 说的是集 G 中的每一个元 f 在 G 中都有一个逆元 f^{-1}；值得注意的是性质 3)，它是说对于集 G 的每一个元 f，都有一个不动点 x_f，使得 $f(x_f)=x_f$．最后要求我们证明，集 G 中所有的元，必定有一公共的不动点 k．

为此，我们假设 x_f 是 $f(x)=ax+b$ 的不动点，即

$$ax_f+b=x_f,$$

那末

$$(a-1)x_f=-b.$$

由上式，若 $a\neq1$，则 $x_f=\dfrac{-b}{a-1}$ 是唯一的不动点；若 $a=1$，且 $b=0$，则任何实数都是不动点．至于在 $a=1$，且 $b\neq0$ 时，由于不存在不动点，将必有 $f\bar{\in}G$．

所以，我们只须证明，当函数 $f(x)=ax+b\quad(a\neq1)$ 满足条件 1)—3) 时，$\dfrac{-b}{a-1}$ 是一个常数．此时，取 $k=\dfrac{-b}{a-1}$，即为集 G 中所有元的公共不动点．

〈证法一〉 显然，$h(x)=x+b$ 只对于 $b=0$ 才具有不动点．由此，对 G 中的每一个 $g(x)=ax+b$，b 可以由 a 唯一确定．事实上，由 G 中的

$$g_1(x)=ax+b_1,\quad g_2(x)=ax+b_2.$$

有 $$g_1^{-1}(g_2\ (x))=\frac{(ax+b_2)-b_1}{a}=x+\frac{b_2-b_1}{a}$$

属于 G．因此，在 G 中，$b_1=b_2$．

为了证明论断中数 k 的存在，只要注意到函数 $h(x)=x+b$，当 $b\neq0$ 时，$h\bar{\in}G$；当 $b=0$ 时，对任何实数 k，恒有 $h(k)=k$，所以只需研究形如

$$f(x)=ax+b(a\neq1)$$

的函数．

设 $f_1(x)=a_1x+b_1(a_1\neq1)$，$f_2(x)=a_2x+b_2(a_2\neq1)$．若 f_1、$f_2\in G$，那么由

$$f_1[f_2(x)]=a_1a_2x+a_1b_2+b_1,$$

$$f_2[f_1(x)]=a_1a_2x+a_2b_1+b_2,$$

得 $$a_1b_2+b_1=a_2b_1+b_2,$$

即 $$\frac{-b_1}{a_1-1}=\frac{-b_2}{a_2-1}.$$

这就是说，对于G中的函数$f(x)=ax+b\ (a\neq 1)$，$\dfrac{-b}{a-1}$是一个常数。

取$k=\dfrac{-b}{a-1}$，注意到

$$f\left(\frac{-b}{a-1}\right)=\frac{-b}{a-1},$$

即知论断中的数k是存在的。

〈证法二〉　首先，我们证明：若f_1、$f_2\in G$，则$f_1 o f_2=f_2 o f_1$，即集中的元对于运算"o"交换律成立。

设$f_1(x)=a_1x+b_1$，$f_2(x)=a_2x+b_2$。那么

$$(f_1 o f_2)(x)=a_1a_2x+a_1b_2+b_1,$$

$$(f_2 o f_1)(x)=a_1a_2x+a_2b_1+b_2.$$

若$f_1 o f_2\neq f_2 o f_1$，则$a_1b_2+b_1\neq a_2b_1+b_2$。

而$(f_1 o f_2)^{-1}(x)=\dfrac{x-a_1b_2-b_1}{a_1a_2}$，于是

$$[(f_1 o f_2)^{-1} o (f_2 o f_1)](x)$$

$$=\frac{a_1a_2x+a_2b_1+b_2-a_1b_2-b_1}{a_1a_2}=x+c,$$

这里$c=\dfrac{a_2b_1+b_2-a_1b_2-b_1}{a_1a_2}\neq 0$。

但对于任何实数x，在$c\neq 0$时，恒有$x+c\neq x$，故$(f_1 o f_2)^{-1} o (f_2 o f_1)\overline{\in} G$。而由性质1)、2)，又应有$(f_1 o f_2)^{-1} o (f_2 o f_1)\in G$。所以，不可能有$f_1 o f_2\neq f_2 o f_1$，从而只能有$f_1 o f_2=f_2 o f_1$，即

$$a_1b_2+b_1=a_2b_1+b_2.$$

若$a_1\neq 1$，$a_2\neq 1$，由上式可得

$$\frac{-b}{a_1-1}=\frac{-b_2}{a_2-1}.$$

这就是说，对于 G 中的函数 $f(x)=ax+b\,(a\neq 1)$，$\frac{-b}{a-1}$ 是一个常数，设为 k. 容易验证 $f(k)=k$.

又如上述，当 $a=1$，且 $b\neq 0$ 时，$f\notin G$；而当 $a=1$，$b=0$ 时，虽然 $f\in G$，但对于任何实数 x，均有 $f(x)=x$.

故所取的 k 对于所有的 $f\in G$，都有 $f(k)=k$，从而结论成立.

【附注】 1. 需要指出，对于函数 f_1、f_2，交换律 $f_1of_2=f_2of_1$ 一般都不成立. 例如：

$$f_1(x)=3x-2,\quad f_2(x)=2x+1.$$

$$\because\quad (f_1of_2)(x)=3(2x+1)-2=6x+1;$$

$$(f_2of_1)(x)=2(3x-2)+1=6x-3.$$

$$\therefore\quad f_1of_2\neq f_2of_1.$$

至于本题的集 G 中的元对于运算“o”交换律成立，那是由 G 的性质，特别是由性质 (3) 推出的.

2. 满足题设条件的集 G，我们可以给出一个相当简单的例子：

$$G'=\{f(x)\mid f(x)=ax,\ a\in R\text{ 且 }a\neq 0\}.$$

容易验证，G' 满足性质 1)—3)，对于运算“o”交换律成立，而且对于所有的 $f\in G'$，有 $f(o)=0$.

第　六　题（瑞典命题）

已知 n 个正数 a_1、a_2、……、a_n 和实数 $q\,(0<q<1)$. 试给出 n 个实数 b_1、b_2、……、b_n，使得

a) 对所有的自然数 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，有 $a_k<b_k$；

b) 对所有的自然数 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$，有

$$q<\frac{b_{k+1}}{b_k}<\frac{1}{q};$$

c) $b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n<\frac{1+q}{1-q}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$.

【分析】 本题要求用已知数 a_1、a_2、……、a_n 和 q 来定义 $b_k(k=1, 2, \cdots\cdots, n)$，使之满足条件 a)—c).

条件 a) 是容易满足的.

条件 b) 等价于(注意：$b_k>a_k>0$)

$$qb_k-b_{k+1}<0 \text{ 与 } qb_{k+1}-b_k<0.$$

所以在定义 b_k 时，要注意使 qb_k 便于与相邻的前、后项作比较.

至于条件 c) 的要求则更高些. 为达到条件 c)，我们在定义 b_k 时，还要注意使 $\sum_{k=1}^{n}b_k$ 便于与 $\sum_{k=1}^{n}a_k$ 作比较.

显然，同时达到条件 a)—c) 是非常困难的. 为此，可以从特例(如 $n=2$)出发，作一些试探. 几经试验，便可知下面的定义是满足条件的：

$$b_1=a_1+a_2q, \quad b_2=a_1q+a_2.$$

由此即不难推广到一般的情形.

〈解答〉 对于 $k=1, 2, \cdots\cdots, n$，我们令

$b_k=a_1q^{k-1}+\cdots\cdots+a_{k-1}q+a_k+a_{k+1}q+\cdots\cdots+a_nq^{n-k}$.

显然，$b_k>a_k$；

其次，对 $k=1, 2, \cdots\cdots, n-1$，有：

$qb_k-b_{k+1}=a_{k+1}(q^2-1)+\cdots\cdots+a_nq^{n-k-1}(q^2-1)<0$,

和

$$qb_{k+1}-b_k=a_1q^{k-1}(q^2-1)+\cdots\cdots+a_k(q^2-1)<0,$$

即
$$q<\frac{b_{k+1}}{b_k}<\frac{1}{q},$$

最后，还有

$$\begin{aligned}
&b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n\\
&=a_1+a_2q+a_3q^2+\cdots\cdots+a_nq^{n-1}\\
&\quad+a_1q+a_2+a_3q+\cdots\cdots+a_nq^{n-2}\\
&\quad+a_1q^2+a_2q+a_3+\cdots\cdots+a_nq^{n-3}\\
&\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad+a_1q^{n-1}+a_2q^{n-2}+a_3q^{n-3}+\cdots\cdots+a_n\\
&<(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n)(1+2q+2q^2\\
&\quad+\cdots\cdots+2q^{n-1})\\
&<(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n)\cdot\frac{1+q}{1-q}.
\end{aligned}$$

因此，我们给出的 n 个实数 b_1，b_2，……，b_n，对题中要求的条件都满足.

【附注】 一般来说，由一组量 x_1，x_2，……，x_k 和一组数 c_1，c_2，……，c_k 所确定的量 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_kx_k$，称为 x_1，x_2，……，x_k 的线性组合.

在上面的解答中，我们令

$$\begin{aligned}
b_k=&q^{k-1}\cdot a_1+\cdots\cdots+q\cdot a_{k-1}+a_k+q\cdot a_{k+1}\\
&+\cdots\cdots+q^{n-k}\cdot a_n,
\end{aligned}$$

实际上是把 $b_k(k=1,2,\cdots\cdots,n)$ 表示为 a_1，a_2，……，a_n 的线性组合，而以 $q^i(i=0,1,\cdots\cdots,n-1)$ 为系数.

要使这样定义的 b_k 达到题设要求，关键是如何利用

$0<q<1$ 这个性质.

为了满足条件 a)，即 $b_k>a_k$，我们令 a_k 的系数为 $q^0=1$；为了满足条件 b)，即 $qb_k-b_{k+1}<0$ 与 $qb_{k+1}-b_k<0$，我们令 a_1 至 a_k 的系数从 q 的 $k-1$ 次幂渐次降至零次幂；令 a_k 至 a_n 的系数从 q 的零次幂渐次升至 $n-k$ 次幂；而这样定义的 b_k 其和 $\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$ 借助于等比数列容易与和 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 作比较，经验证恰好满足条件 c).

当然，正如分析中所说，如果从 n 是任意自然数出发来探索解题途径，肯定是困难的．但是，如果从特例(如 $n=2$)出发作试探，上述解题途径就不难得到了．

第十六届国际中学生数学竞赛试题分析与解答

1974年在德意志民主共和国举行

第一题（美国命题）

现有 A、B、C 三人作下述游戏：

设三张牌上分别写定数字 p、q、r，且满足条件：

$$0<p<q<r.$$

洗牌之后，随意分发给三人，每人一张，并按每人所得牌上的数字付给相等数量的小球．然后，收牌再玩，但各人所得的小球留给游戏者自己保存．这样，洗牌、发牌、付球的游戏至少要作两次．

已知游戏结束时，累计 A 得 20 个、B 得 10 个、C 得 9 个小球，且 B 在最后一次游戏中得到 r 个球，问谁在第一次游戏中得到 q 个球？

【分析】 每一个游戏者在某一次得多少个球的问题，既与那一次三人所得球数和有关；也与他本人在各次所得球数和有关；当然，还与三人在各次所得球数的总和有关．

显然，每一次三人所得球数和都一样，是

$$p+q+r;$$

A、B、C 在各次所得球数和分别为

$$20、10、9;$$

三人在各次所得球数的总和是

$$20+10+9=39.$$

如用 n 表示游戏的次数，则得

$$n(p+q+r)=39.$$

如果知道 n，就可知道 $p+q+r$，现只知 n 为不小于 2 的整数，但 n 到底等于多少？

由于 39 是“n”与“$p+q+r$”这两个整数的积；另一方面，39 又只能表示为“3”与“13”这两个素数的乘积．因此，有如下两种可能情况：

$$n=3,\quad p+q+r=13;$$

$$n=13,\quad p+q+r=3.$$

后一种情况，显然不合题意．于是得知作游戏的次数，以及作一次游戏，三人共得的球数．

下面，再根据“B 在最后一次（即第三次）游戏中得到 r 个球”，且 r 是 p、q、r 三数中最大的一个，可以由后向前逆推，逐步求得问题的答案．

〈**解答**〉 设作游戏 n 次，首先由题意知：

$$n(p+q+r)=39=3\times 13. \tag{1}$$

因为 p、q、r 为互不相等的正整数，故有

$$p+q+r\geqslant 6. \tag{2}$$

综合(1)与(2)，并根据 $n\geqslant 2$，得：

$$n=3,\quad p+q+r=13.$$

再看，由于 $r>p>q$，在最后一次游戏中，B 得 r 个球，是 A、B、C 三人中得球的最多者；而 B 三次共得 10 个球，比 13 个少，所以 B 无论是在第一次或第二次中，都不能得到 r 个或 q 个（否则，B 三次共得的球数就不少于 13 了，与已知

矛盾）．这就说明了 B 在第一、二、三次中所得球数依次为 p、q、r.

最后，由于 C 三次共得 9 个球，比 B 的累计数 10 还少，故 C 没有一次能得到 r 个球（否则，如 C 有一次得 r 个，C 的累计数 9 就不小于 B 的累计数 10，矛盾）．又因 A 得球的累计数为 20 最大，C 的累计数最小，第一次 B 已得 p 个，所以 C 在第一次游戏中必须得到 q 个球.

【附注】 1．根据题意，在游戏中三个人的集合 $\{A, B, C\}$ 与三个正整数的集合 $\{p, q, r\}$ 是成一一对应的．即无论哪一次游戏，一个人不会对应两个整数；反过来，一个整数也不会由两个人对应着．要知道，在解题过程中始终用到这一点.

本题还具有一定的趣味性，如果将"洗牌"、"发牌"、"付球"等项目换成其它内容或别的什么活动，就可以编出另外的游戏题，读者不妨试试看.

2．关于游戏的全面情况.

由上述解答知，B 在一、二、三次得球数依次为 p、q、r，C 在前两次得球数为 q、q，从而 A 在前两次得球数为 r、r.

A 在最后一次得球多少？这有且只有两种可能，一为 p，另一为 q．如为 p，则 A 与 B 两人累计得球数之差为

$$(r+r+p)-(p+p+r)=r-p.$$

另一方面，

$$(r+r+p)-(p+p+r)=20-10=10.$$

因此，$r-p=10$．但根据

$$r>q>p>0 \text{ 和 } p+q+r=13,$$

又知 $r-p$ 不能大于 9，矛盾.

所以 A 在最后一次(即第三次)的得球数不能为 p，而只能是 q.

综上所述，三人在游戏中得球数的各种情况可列表如下：

球数　人 次	A	B	C
一	r	p	q
二	r	p	q
三	q	r	p

由题意，得下列方程组

$$\begin{cases} r+r+q=20; \\ p+p+r=10; \\ q+q+p=9. \end{cases}$$

解此方程组，得知牌上的三数字分别为：

$$p=1,\quad q=4,\quad r=8.$$

第　二　题　(芬兰命题)

设$\triangle ABC$的三内角 A、B 和 C 分别为 α、β 和γ. 试证，在 $\overline{AB}$ 上有一点 D，使 $\overline{CD}$ 为 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BD}$ 的几何中项的充要条件是

$$\sin\alpha\sin\beta\leqslant\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

【分析】 $\overline{CD}$ 为 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BD}$ 的几何中项(或比例中项)，即在 $\overline{AB}$ 上有一点 D，使

$$\overline{CD}^2=\overline{AD}\cdot\overline{BD}. \tag{1}$$

很明显，本题就是要证明(1)与

$$\sin\alpha\sin\beta\leqslant\sin^2\frac{\gamma}{2} \tag{2}$$

等价.

在特殊情况下，容易验证命题成立．比如当$\triangle ABC$ 为直角三角形，角 $C=\gamma=90°$，此时 $\overline{AB}$ 上的 D 点，就是斜边上的高的垂足(图 16—1)．易知，既有(1)成立，也有(2)成立.

在一般情况下，对(1)可作如下剖析：

假如 D 点已定出．延长 CD 与$\triangle ABC$ 的外接圆交于 E 点（图 16—2)，则据“交弦定理”知

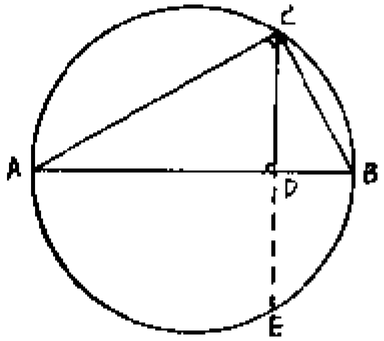


图 16—1

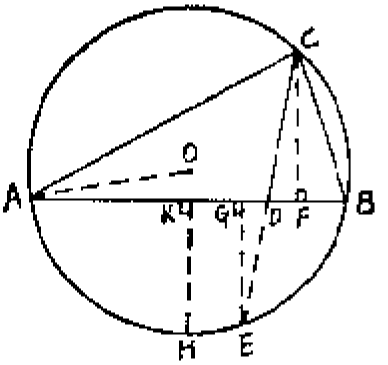


图 16—2

$$\overline{CD}\cdot\overline{ED}=\overline{AD}\cdot\overline{BD}. \tag{3}$$

比较(1)与(3)，得

$$\overline{ED}=\overline{CD}. \tag{4}$$

因此，D点是否存在，决定于$\triangle ABC$的外接圆周上的不含有C点的弧$\overset{\frown}{AEB}$上是否有E点存在，使弦$\overline{CE}$恰好被弦$\overline{AB}$所平分.

分别过C、E作AB的垂线，垂足依次为F、G，则

$$Rt\triangle CDF \cong Rt\triangle EDG.$$

从而$\overline{CF}=\overline{EG}$. 又作弓形$AEB$的高$\overline{HK}$，显然有$\overline{EG}\leqslant\overline{HK}$，即

$$\overline{CF}\leqslant\overline{HK}. \tag{5}$$

这样，满足(1)的D点存在的充要条件是(5)成立. 因此，问题转化为证明(2)与(5)等价，而这利用三角的有关知识就能办到.

〈**证法一**〉 如图16—3所示，作$\triangle ABC$的外接圆O，$OH\perp AB$于K，半径$\overline{OA}=\overline{OH}=R$，作$CF\perp AB$于$F$.

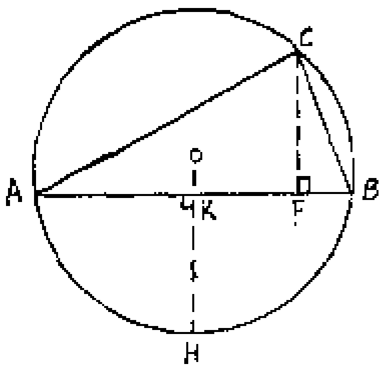


图 16—3

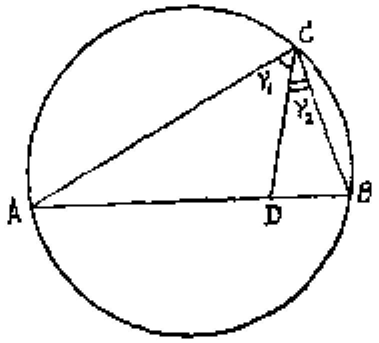


图 16—4

$\because$ $\overline{CF}=\overline{AC}\sin\alpha$,

$\overline{AC}=2R\sin\beta$,

$\therefore$ $\overline{CF}=2R\sin\alpha\sin\beta$. (6)

又 $\overline{HK}=\overline{OH}-\overline{OK}=R-R\cos\angle AOH$

$=R(1-\cos\gamma)$，即

$$\overline{HK}=2R\sin^2\frac{\gamma}{2}. \tag{7}$$

将(6)、(7)代入 $\overline{CF}\leqslant\overline{HK}$ (已在上述分析中证过)中，我们就得到：

$$2R\sin\alpha\sin\beta\leqslant 2R\sin^2\frac{\gamma}{2},$$

$$\sin\alpha\sin\beta\leqslant\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

这就是说，(2)与(5)等价．因此，命题得证．

〈证法二〉 设 D 为 $\overline{AB}$ 上一点，CD 分 γ 为 γ_1 和 γ_2(图16—4)，则由正弦定理，得：

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1}, \tag{8}$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma_2}. \tag{9}$$

(8)×(9)

$$\frac{\overline{CD}^2}{\overline{AD}\cdot\overline{BD}}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma_1\sin\gamma_2}. \tag{10}$$

由(10)易知，$\overline{CD}^2=\overline{AD}\cdot\overline{BD}$ 的充要条件是：

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta&=\sin\gamma_1\sin\gamma_2\\&=\frac{1}{2}[\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\cos(\gamma_1+\gamma_2)]\\&=\frac{1}{2}[\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\cos\gamma],\end{aligned}$$

即 $$\sin\alpha\sin\beta\leqslant\frac{1}{2}(1-\cos\gamma)=\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

【附注】 证法二主要是利用三角知识，如正弦定理、和积互换等．这说明了借助三角知识来解几何问题，有时是很方便的．

点 D 是否存在与满足下列条件的 γ_1、γ_2 是否存在一致：

$$0<\gamma_1<\gamma,\quad 0<\gamma_2<\gamma,\quad \gamma_1+\gamma_2=\gamma.$$

亦即与 $|\gamma_1-\gamma_2|$ 是否存在一致．事实上，由

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\cos\gamma]$$

知 $|\gamma_1-\gamma_2|$ 在 $0°$ 和 $180°$ 之间有确定的解．设

$$|\gamma_1-\gamma_2|=\delta(0\leqslant\delta<\gamma),$$

此时就有 $$\gamma_1=\frac{\gamma+\delta}{2},\quad \gamma_2=\frac{\gamma-\delta}{2}$$

$\left(\frac{\gamma}{2}\leqslant\gamma_1<\gamma,\quad 0\leqslant\gamma_2\leqslant\frac{\gamma}{2}\right)$；或者

$$\gamma_1=\frac{\gamma-\delta}{2},\quad \gamma_2=\frac{\gamma+\delta}{2}$$

$\left(0\leqslant\gamma_1\leqslant\frac{\gamma}{2},\ \frac{\gamma}{2}\leqslant\gamma_2<\gamma\right)$.

第　三　题 （罗马尼亚命题）

试证，对于任何自然数 n，和数

$$\sum_{k=0}^{n}2^{3k}C_{2n+1}^{2k+1}$$

不能被 5 整除．

【分析】 容易验证，开始的几个和数是不能被 5 整除的．由于这是一个关于自然数 n 的命题，因而想到用数学归纳法证明．但对归纳的第二步，不能那么直截了当地容易完成，而要通过组合数的性质

$$C_{r+1}^{s+1}=C_r^{s+1}+C_r^s,$$

将一个数拆成两个数之和，分自然数 n 为奇偶两种情况进行

研究，如下述的证法一.

本题是研究"能否整除"的问题，当然可以运用数论中有关"同余式"的知识解决，见下述的证法二.

〈证法一〉 设

$$x_m=\sum_k 2^{3k}C_m^{2k+1}\ ,\quad y_m=\sum_k 2^{3k}C_m^{2k}.$$

$$(0<2k+1\leqslant m)\qquad (0\leqslant 2k\leqslant m)$$

显然，当 m 为大于 1 的奇数时，x_m 即表题中的和数.

根据组合数的性质公式 $C_r^{s+1}+C_r^s=C_{r+1}^{s+1}$，容易验证

$$\begin{cases} x_m+y_m=x_{m+1}; & (1)\\ 8x_m+y_m=y_{m+1}. & (2)\end{cases}$$

我们有结论：当 m 为奇数时，x_m 不能被 5 整除；而 m 为偶数时，y_m 不能被 5 整除. 对此，用数学归纳法证明如下：

因 $x_1=1$，$x_3=11$，$y_2=9$，故对一切 $m\leqslant 3$，结论成立. 现设某自然数 $i>3$，对一切 $m\leqslant i$，结论成立，则对一切 $m\leqslant i+1$，结论也成立. 事实上，应用 (1)、(2) 若干次后，可得：

$$\begin{aligned} x_{m+3}&=x_{m+2}+y_{m+2}=9x_{m+1}+2y_{m+1}\\ &=5(5x_m+2y_m)+y_m;\\ y_{m+3}&=5(17x_m+5y_m)+3x_m.\end{aligned}$$

由此推得：对于任何自然数 n，和数

$$\sum_{k=0}^{n}2^{3k}C_{2n+1}^{2k+1}$$

不能被 5 整除.

〈证法二〉 用 x 记题中的和数，即

$$x=\sum_{k=0}^{n}2^{3k}C_{2n+1}^{2k+1}=\frac{1}{\sqrt{8}}\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{8})^{2k+1}C_{2n+1}^{2k+1},$$

$$\sqrt{8}\,x=\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{8})^{2k+1}C_{2n+1}^{2k+1}. \tag{1}$$

又令 $$y=\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{8})^{2k}C_{2n+1}^{2k}=\sum_{k=0}^{n}2^{3k}C_{2n+1}^{2k}, \tag{2}$$

则由(1)±(2)，并应用二项式定理，得

$$\begin{aligned}\sqrt{8}\,x+y&=\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{8})^{2k+1}C_{2n+1}^{2k+1}+\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{8})^{2k}C_{2n+1}^{2k}\\&=(\sqrt{8}+1)^{2n+1};\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{8}\,x-y&=\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{8})^{2k+1}C_{2n+1}^{2k+1}-\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{8})^{2k}C_{2n+1}^{2k}\\&=(\sqrt{8}-1)^{2n+1}.\end{aligned} \tag{4}$$

(3)×(4)，得

$$\begin{aligned}8x^2-y^2&=(\sqrt{8}+1)^{2n+1}(\sqrt{8}+1)^{2n+1}\\&=(8-1)^{2n+1}=7^{2n+1}.\end{aligned}$$

因为

$$8\equiv3(mod5),\quad 7\equiv2(mod5),\quad 7^2\equiv-1(mod5),$$

$$7^{2n}\equiv(-1)^n(mod5),\quad 7^{2n+1}\equiv(-1)^n2(mod5);$$

故有对模5的同余式：

$$3x^2-y^2\equiv(-1)^n2(mod5),$$

$$3x^2\equiv y^2+(-1)^n2(mod5). \tag{5}$$

但已知

$$0^2\equiv0(mod5),\quad 1^2\equiv4^2\equiv1(mod5),\quad 2^2\equiv3^2\equiv-1(mod5),$$

因而有

$$y^2 \not\equiv 2 (mod 5) 与 y^2 \not\equiv -2 (mod 5).$$

于是，由(5)知 $3x^2 \not\equiv 0 (mod 5)$．这就是说，对任何自然数 n，和数

$$x=\sum_{k=0}^{n} 2^{3k} C_{2n+1}^{2k+1}$$

不能被 5 整除．

【附注】 1．同余的定义．

“同余”是数论中重要的基本概念．为叙述上的方便，我们约定：a、b、c、d、r、s 等都表示整数，m、n 表示正整数．

如果 $m|a-b$，则称 a、b 对模 m 同余，并记作

$$a \equiv b (mod m).$$

例如 $8 \equiv 3 (mod 5)$，因 $5|8-3$；

$7^2 \equiv -1 (mod 5)$，因 $5|7^2+1$．

2．同余的性质．

这里介绍一些同余的重要性质．

1） $a \equiv a (mod m)$．

2） 若 $a \equiv b (mod m)$，则 $b \equiv a (mod m)$．

3） 若 $a \equiv b (mod m)$，$b \equiv c (mod m)$，则

$a \equiv c (mod m)$．

因 $a \equiv b (mod m)$，故 $a-b=mr$；同理，$b-c=ms$，所以

$$a-c=a-b+b-c=mr+ms=m(r+s).$$

这就是说，$m|a-c$，亦即 $a \equiv c (mod 5)$．

4） 若 $a \equiv b (mod m)$，$c \equiv d (mod m)$，则

$a+c \equiv b+d (mod m)$，$a-c \equiv b-d (mod m)$．

5） 若 $a \equiv b (mod m)$，则 $ac \equiv bc (mod m)$．例如，由

$7^{2n} \equiv (-1)^n (mod 5)$， 可得 $7^{2n+1} \equiv (-1)^n 7 (mod 5)$.

6）若 $a \equiv b (mod\, m)$，$c \equiv d (mod\, m)$，则

$$ac \equiv bd (mod\, m).$$

事实上：

由 $a \equiv b (mod\, m)$ 和 5），得 $ac \equiv bc (mod\, m)$； (6)

由 $c \equiv d (mod\, m)$ 和 5），得 $bc \equiv bd (mod\, m)$. (7)

再由(6)、(7) 和 3），即得 $ac \equiv bd (mod\, m)$.

7）若 $a \equiv b (mod\, m)$，则 $a^n \equiv b^n (mod\, m)$. 例如，由 $7^2 \equiv -1 (mod\, 5)$，可得 $7^{2n} \equiv (-1)^n (mod 5)$.

8）设 a_i，$b_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 都是整数，m 与 n 是正整数，当 $a_i \equiv b_i (mod\, m)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$时，则有

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \cdots + b_n (mod\, m).$$

本题的证法二，就依据了上述的一些结论进行推导的.

第 四 题 (保加利亚命题)

将 8×8 个格子的棋盘，不破坏任何原有的格子，划分为 p 个互不相交的矩形，使满足下列条件：

1）每一矩形都由黑白个数相等的若干个方格子拼成；

2）以 a_i 表第 i 个矩形中白色格子的个数，有

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_i < \cdots < a_p.$$

试确定上述划分能实现的最大 p 值，并对此 p 值，求出相应的所有序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_p.$$

【分析】 显然，8×8 个格子的棋盘共有 64 个格子. 对每一种合乎条件的划分，由于白色格子数与黑色格子数各占一半，故得关系式：

$$a_1+a_2+\cdots+a_p=32.$$

由此可知，问题就是：怎样将"32"这个数分为若干个自然数的和？分的个数最多者是多少？读者先不妨具体地试算一下，比如从"1"开始，加到哪一个自然数止，其和恰好等于"32"：

$$1+2+\cdots=32.$$

这里，我们可利用解不等式或方程式求出 p 的最大值．

〈解法一〉 因为对每一种合乎条件的划分，所得每个矩形的黑、白格子数都各占一半，故必有：

$$a_1+a_2+\cdots+a_p=32. \tag{1}$$

由题给条件知，$\{a_i\}$为单调递增正整数列，因而 $a_i \geqslant i$ $(i=1, 2, \cdots, p)$．于是，

$$a_1+a_2+\cdots+a_p \geqslant 1+2+\cdots+p=\frac{p(1+p)}{2}. \tag{2}$$

由(1)、(2)得不等式

$$\frac{p(1+p)}{2} \leqslant 32. \tag{3}$$

解(3)，得正整数 $p \leqslant 7$．所以，符合问题要求的最大值 $p=7$．

下面，再具体地确定所有的单调递增序列，它由和为 32 的 7 个正整数组成．

我们从自然数 1 开始试算．因为

$$1+2+3+4+5+6+7 \tag{4}$$

等于"28"，与和数"32"相差"4"，故必须将"4"分配到(4)的各项中去，使之仍为单调递增的正整数列，且和为 32.

为此，列出所有可能情况如下：

$$1+2+3+4+5+6+7$$

或这样分配：　　　　　　　　　　+4

或这样分配：　　　　　　　　+1+3

或这样分配：　　　　　　　　+2+2

或这样分配：　　　　　　+1+1+2

或这样分配：　　　　+1+1+1+1

从而得到相应的序列

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11;

b) 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10;

c) 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9;

d) 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9;

e) 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8.

按照白色格子数划分棋盘为 7 个矩形，最多是上述几种可能．在这些情况中，由于条件 1)，a) 不能实现．因为此时必须出现 22 个格子的矩形，但无两个小于或等于 8（按格子数，矩形的长边不能超过 8 格）的正整数之积等于 22，所以在 8×8 个格子的棋盘上，没有这样的矩形．

其它几种划分方法均能实现，b)、c)、d)、e) 划分依次如图 16—5、16—6、16—7、16—8 所示，图中的数字表示矩形中白色格子的个数．因此，b)、c)、d)、e) 等四个序列是所有按要求能找到的序列．

〈解法二〉 设第一个矩形为最小的矩形，含有 a_1 个白色格子；第二个矩形为次小的矩形，含有 a_2 个白色格子；余此类推，第 p 个矩形为最大的矩形，含有 a_p 个白色格子．这样，就有

$$pa_1+(p-1)(a_2-a_1)+(p-2)(a_3-a_2)+\cdots$$
$$+1\cdot(a_p-a_{p-1})=32. \qquad (5)$$

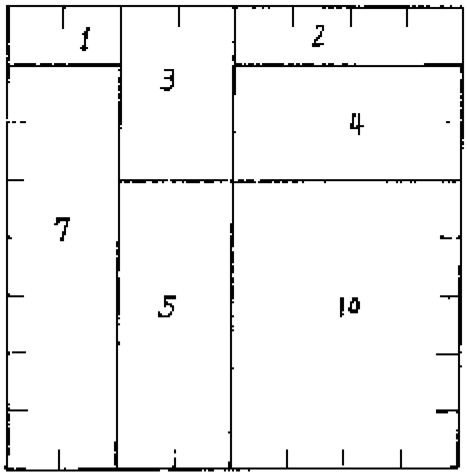


图 16—5

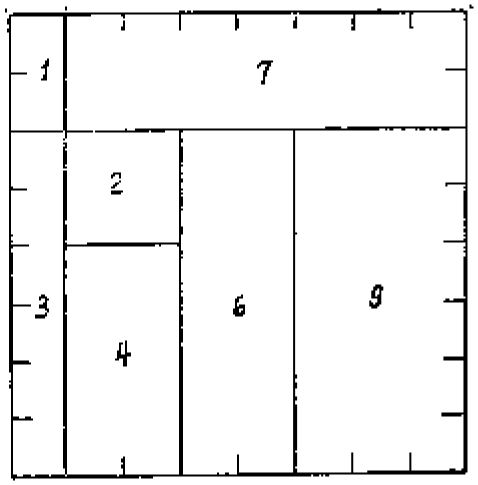


图 16—6

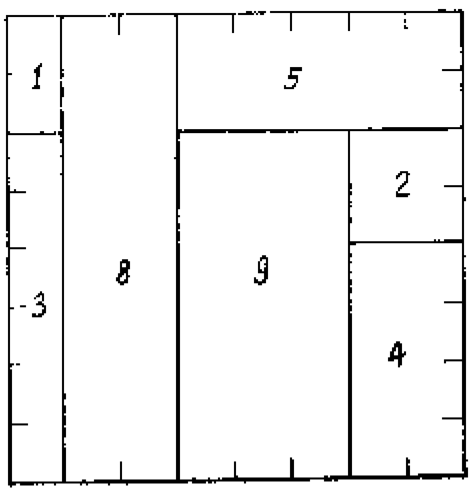


图 16—7

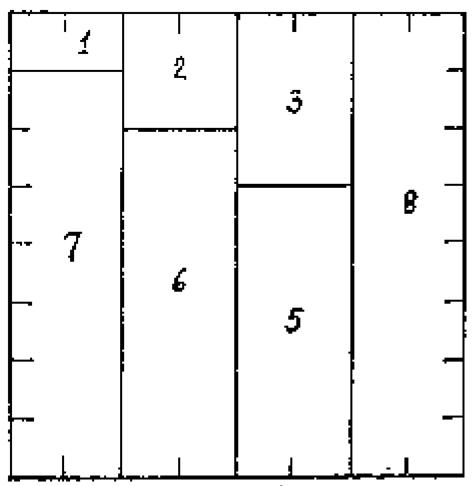


图 16—8

因为划分的矩形个数越多，就要求每个矩形所含白色格子数越少，故当

$$a_1=1,\ a_i-a_{i-1}=1$$

$(i=2,\ 3,\cdots,\ p)$时，p 有最大值．于是，(5) 变为：

$$p+(p-1)+(p-2)+\cdots+1=32,$$

$$\frac{p(p+1)}{2}=32,$$

$$p^2+p-64=0.$$

解之，得 $$p=\frac{-1\pm\sqrt{257}}{2}.$$

因为 p 为正整数，所以符合问题要求的最大值 $p=7$（其余部分同解法一）.

【附注】 1. 题中的"棋盘"是指国际象棋的棋盘. 通常的国际象棋棋盘，是一张 8×8 的方格图，并用黑白两种颜色区别相邻的格子. 棋子在格子中间走，而不是在方格交叉处走. 车和马的走法与中国象棋一样，但马没有所谓阻马步的规定.

2. 仿照本题，我们可以另行编制有关的"棋盘趣味数学题". 如将"8×8"换成"8×9"，怎样解答？结果如何？请读者考虑.

第 五 题 （荷兰命题）

设 a，b，c，d 为任意正实数，求和数

$$s=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}$$

的值域.

【分析】 显然，s 是四个正实变数的函数. 多变量函数一般要比单变量函数复杂，求 s 的值域当然不能"一步登天"，可以分两步进行.

首先，估计 s 的大致范围，比如 s 的上下限怎样？为此，将四个分式

$$\frac{a}{a+b+d},\quad \frac{b}{a+b+c},\quad \frac{c}{b+c+d},\quad \frac{d}{a+c+d}$$

的分子都不变，分母依次加上正数 c、d、a、b，这样，它们

就变成同分母相加，和为1．但因其值缩小了，故有 $s>1$．

类似地，变异分母为同分母、将那四个分式的分母，依次减去 d、c、b、a，则和增大为2．即 $s<2$．

这就是说，s 的值随着 a、b、c、d 的变化而变，但 s 的值小不能到1，更不能比1还小；大不能到2，更不能超过2．

那么，s 的值域是否为 $(1,\ 2)$？这就要再研究"s 能否取到开区间 $(1,\ 2)$ 内的一切值"的问题，见下述的具体解答．

〈解法一〉 由

$$\begin{aligned}
s &= \frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}\\
&> \frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}\\
&\quad+\frac{d}{a+b+c+d}=\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}=1
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
s &= \frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}\\
&< \frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{c+d}\\
&= \frac{a+b}{a+b}+\frac{c+d}{c+d}=1+1=2
\end{aligned}$$

知
$$1<s<2.$$

故 s 的值域包含在开区间 $(1,\ 2)$ 内．

现在说明，对于四个正实变量 a、b、c、d，s 能取到 $(1,\ 2)$ 内的每一个值．为此，令

$$f(a,\ b,\ c,\ d)=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}.$$

设 y 是 $(1, 2)$ 内的任意一确定的值，选取一个正数 δ（图 16—9），使

$$1+\delta<y<2-\delta \tag{1}$$

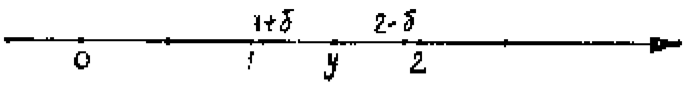


图 16—9

易知 $\delta=\frac{1}{2}\min(2-y, y-1)$，所以

$$0<\delta<\frac{1}{4}.$$

考察关于 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的变元 t 的函数

$$F(t)=f\left[1, \frac{\delta}{4}+t\left(1-\frac{\delta}{4}\right), 1+t\left(\frac{\delta}{4}-1\right), \frac{\delta}{4}\right], \tag{2}$$

显然
$$1>0, \quad \frac{\delta}{4}+t\left(1-\frac{\delta}{4}\right)\geqslant\frac{\delta}{4}>0,$$

$$1+t\left(\frac{\delta}{4}-1\right)=1-t+\frac{\delta}{4}t>0, \quad \frac{\delta}{4}>0.$$

这说明，关于 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的函数 $F(t)$ 所取的值，也是关于四个正实变量 a、b、c、d 的函数 $f(a, b, c, d)$ 所取的值.

由(1)和(2)，有

$$F(0)=f\left(1, \frac{\delta}{4}, 1, \frac{\delta}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{1+\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{4}}+\frac{\frac{\delta}{4}}{1+\frac{\delta}{4}+1}+\frac{1}{\frac{\delta}{4}+1+\frac{\delta}{4}}$$

$$+\frac{\frac{\delta}{4}}{1+1+\frac{\delta}{4}}=\frac{2}{1+\frac{\delta}{2}}+\frac{\frac{\delta}{2}}{2+\frac{\delta}{4}}$$

$$>\frac{2}{1+\frac{\delta}{2}}=\frac{2\left(1-\frac{\delta}{2}\right)}{1-\frac{\delta^2}{4}}>2-\delta>y,$$

以及　$F(1)=f\left(1,\ 1,\ \frac{\delta}{4},\ \frac{\delta}{4}\right)$

$$=\frac{1}{1+1+\frac{\delta}{4}}+\frac{1}{1+1+\frac{\delta}{4}}+\frac{\frac{\delta}{4}}{1+\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{4}}$$

$$+\frac{\frac{\delta}{4}}{1+\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{4}}=\frac{2}{2+\frac{\delta}{4}}+\frac{\frac{\delta}{2}}{1+\frac{\delta}{2}}$$

$$<1+\frac{\delta}{2}<1+\delta<y,$$

所以　　　$F(1)<y<F(0)$.

函数 $F(t)$ 是闭区间[0, 1]上变元 t 的连续函数，它不仅能取大于 y 的值，也能取小于 y 的值，同样也能取值 y. 因而在[0, 1]内至少有一个值 t_0，使 $F(t_0)=y$，亦即

$$f\left[1,\ \frac{\delta}{4}+t_0\left(1-\frac{\delta}{4}\right),\ 1+t_0\left(\frac{\delta}{4}-1\right),\ \frac{\delta}{4}\right]=y.$$

综上所述，当 a、b、c、d 取一切正实数值时，和 s 的值取遍开区间 $(1,\ 2)$ 内的所有实数. 因此，和数 s 的值域为开区间 $(1,\ 2)$.

〈解法二〉 不难看出，和 s 的四个分式的分子和分母，都是关于 a、b、c、d 的一次齐次式. 因此，将 a、b、c、d 分别乘以任何相同的非零数后，s 的值不变. 所以，只考察具有关系

$$a+b+c+d=1$$

的定义域部分，不会缩小和数 s 的值域.

令 $a+c=x>0$, $b+d=y>0$, 且 $x+y=1$, 则和数

$$s_1=\frac{a}{a+b+d}+\frac{c}{b+c+d}=\frac{a}{(a+b+c+d)-c}$$

$$+\frac{c}{(a+b+c+d)-a}=\frac{a}{1-c}+\frac{c}{1-a}$$

$$=\frac{a+c-(a^2+c^2)}{1-(a+c)+ac}=\frac{x-[(a+c)^2-2ac]}{ac+1-x}$$

$$=\frac{2ac+x-x^2}{ac+1-x}.$$

因当 x 固定时，ac 的最大值为 $\frac{x^2}{4}$. 故若此时 (a, c) 取满足条件 $a+c=x$ 的一切正数时，则积 ac 取半开区间 $\left(0, \frac{x^2}{4}\right]$ 内的所有值. 但

$$s_1=\frac{2ac+x-x^2}{ac+1-x}=2+\frac{3x-2-x^2}{ac+1-x}$$

中的分式项为 ac 的函数，且单调变化，所以和数 s_1 的值域为半开区间 $\left(x, \frac{2x}{2-x}\right]$.

同理可得，当 y 固定时，和数 $s_2=\frac{b}{a+b+c}+\frac{d}{a+c+d}$ 的值域为半开区间 $\left(y, \frac{2y}{2-y}\right]$.

因此，和数 $s=s_1+s_2$ 的值域为

$$\left(x+y, \frac{2x}{2-x}+\frac{2y}{2-y}\right] \text{或} \left(1, \frac{4-4xy}{2+xy}\right].$$

现若 (x, y) 取满足条件 $x+y=1$ 的一切正数对时，则通过与上述相仿的讨论，知 $\frac{4-4xy}{2+xy}$ 必取半闭区间 $\left[\frac{4}{3}, 2\right)$ 内

的全部数值．由此可见，和数 s 的值域为开区间(1，2)．

【附注】 1．连续函数是一类重要的函数，在高等数学中，特别是微积分里所研究的函数，主要是连续函数和分段连续函数．什么叫做连续函数呢？从直观上看，可以这么说：如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间上的图象是一条不间断的曲线，则称 $f(x)$ 是这个区间上的连续函数．当然，在某区间上的连续函数，对于该区间内的任意一值，它都有确定的值．解法一中的"函数 $F(t)$ 是闭区间[0，1]上变元 t 的连续函数"就是这个意思．

2．为什么对关于 a、b、c、d 的四元函数 $f(a, b, c, d)$ 的值域，只考察具有关系

$$a+b+c+d=1 \tag{3}$$

(a、b、c、$d>0$)的定义域部分即可？现说明如下：

显然，当 a、b、c、d 在$(0, +\infty)$内各自任意取值时，$a+b+c+d$ 可以取到任何正实数值．

现设 a 取 a_0、b 取 b_0、c 取 c_0、d 取 d_0 时，

$$a_0+b_0+c_0+d_0=\frac{1}{\lambda} \tag{4}$$

其中 a_0、b_0、c_0、d_0 及 λ 皆为正实数．

(4)$\times\lambda$　　$\lambda a_0+\lambda b_0+\lambda c_0+\lambda d_0=1.$　　(5)

比较(3)与(5)即知，将有序四数组(a_0, b_0, c_0, d_0)中的各数，分别乘以 λ 后，即得满足(3)的数组

$$(\lambda a_0, \lambda b_0, \lambda c_0, \lambda d_0).$$

又在解法二中已经指出，和数 $s=f(a, b, c, d)$ 的四个分式的分子和分母，都是关于 a、b、c、d 的一次齐次式．因此，将(a, b, c, d)中各数分别乘以任何相同的非零数

后．s的值不变．

综上所述，满足(3)的定义域就是s的值域．

由此可见，将原为"独立的"四个变量，用关系式(3)给以制约，能使问题方便地得到解决．这一技巧性处置，对于有关齐次式的类似问题，一般都可以运用．

3．题中的s是四元函数，对我国中学生来说，难度较大．对于多元函数的研究，一般说来，或作变量代换，或将某些变量暂时固定，总之，要想办法"变多元为单元"进行．无论是本题的解法一，或是解法二，都贯穿了这一思想方法．这点在研究多元函数的微积分中尤为突出．

如将题中和数换为

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d},$$

或者换为

$$\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}.$$

情况如何？请读者考虑．

第　六　题　(瑞典命题)

设$p(x)$是一整系数非常数多项式，并有$n(p)$个满足等式$[p(k)]^2=1$的整数k．试证$n(p)-deg(p)\leqslant 2$，此处$deg(p)$表示多项式$p(x)$的次数．

【分析】 题中引进了一些"新"记号，应先弄清题意再解答．对此，我们先用具体的多项式来说明．例如：

假设$p(x)=x-2$是一个关于文字x的整系数非常数多项式；

$x-2$ 是一次多项式，即 $deg(p)=1$；

方程 $[x-2]^2=1$ 有 1 与 3 两个整数根，即 $n(p)=2$.

于是，对 $x-2$ 这一具体多项式，就有结论

$$n(p)-deg(p)=2-1=1<2.$$

对结论的一般性的证明，使用反证法比较方便.

当 $deg(p)=1$，则有：

$$deg(p^2)=2,\ n(p)\leqslant 2,$$

$$n(p)-deg(p)\leqslant 2-1=1.$$

即 $n(p)-deg(p)\leqslant 2$ 成立.

当 $deg(p)=2$，则有：

$$deg(p^2)=4,\ n(p)\leqslant 4,$$

$$n(p)-deg(p)\leqslant 4-2=2.$$

即 $n(p)-deg(p)\leqslant 2$ 成立.

综上所述，在反证时，"假定命题不成立". 可以从 $deg(p)$ 等于 3 开始，然后导出矛盾，从而说明命题成立.

〈证明〉 由于 $p(x)$ 不是常数，故有 $deg(p)\geqslant 1$. 而多项式 $[p(x)]^2$ 的次数为 $p(x)$ 的次数的 2 倍，因而

$$deg(p^2)=2deg(p).$$

又按代数基本定理，有 $n(p)\leqslant deg(p^2)$，故有

$$n(p)-deg(p)\leqslant deg(p).$$

这就是说，在 $deg(p)\leqslant 2$ 的情况下，命题显然成立.

现在假定，在 $deg(p)\geqslant 3$ 的情况下，命题不成立，则可设多项式 $p(x)-1$ 和 $p(x)+1$ 各有三个整根，并且它们都是彼此相异的. 在这六个整根中，取最小的一个，并记作 a. 不妨将 a 当作 $p(x)+1$ 的根，这样就有

$$p(x)+1=(x-a)Q(x), \tag{1}$$

此处 $Q(x)$ 是一个整系数多项式.

将(1)两边减去 2，得多项式 $p(x)-1$ 的表示式：

$$p(x)-1=(x-a)Q(x)-2. \tag{2}$$

又设此多项式的三个不同的整根分别为 p、q、r，则由（2）得：

$$(p-a)Q(p)-2=0, \tag{3}$$

$$(q-a)Q(q)-2=0, \tag{4}$$

$$(r-a)Q(r)-2=0, \tag{5}$$

其中 $Q(p)$，$Q(q)$，$Q(r)$ 皆为整数.

由(3)、(4)、(5)可分别得到：

$$p-a\mid 2,\ q-a\mid 2,\ r-a\mid 2.$$

因为 a 比 p、q、r 都小，又正整数 $p-a$、$q-a$、$r-a$ 都是彼此相异的，故其中必至少有一个大于 2．这样一来，大于 2 的整数就能整除 2，矛盾.

由此可见，多项式 $p(x)-1$ 和 $p(x)+1$ 中，至少有一个多项式，它的整根的个数小于或等于 2．

也就是说，$p(x)=1$ 和 $p(x)=-1$ 这两个方程中，至少有一个方程，它的整根的个数小于或等于 2．又因为这两个方程中的每一个方程的整根的个数，都小于或等于 $deg(p)$，所以得到要证的不等式：

$$n(p)-deg(p)\leqslant 2.$$

【附注】 1．对数学中的问题，不仅会说，还要将它叙述、书写出来．这里，对本题的证明，再作如下的一般性叙述．

在 $deg(p)\leqslant 2$ 的情况下命题成立，如前所述．现在假定，在 $deg(p)\geqslant 3$ 的情况下，命题不成立，即：

$$n(p)-deg(p)>2,\quad n(p)>deg(p)+2,$$

亦即
$$n(p)\geqslant deg(p)+3. \tag{6}$$

设 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_l\}, Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ 分别是方程

$$p(x)=-1,\quad p(x)=1$$

的解的整数集．则当$x_i\in X$ 时，$p(x_i)=-1\ (i=1,2,\cdots,l)$；当 $y_j\in Y$ 时，$p(y_j)=1\ (j=1, 2,\cdots,m)$．由代数基本定理知，$X$ 与 Y 分离(即无公共元)，且都不空．

因为$l\leqslant deg(p)$ 和 $m\leqslant deg(p)$，又 $l+m=n(p)$，故由(6)知 $l\geqslant3$，$m\geqslant3$．不妨设 x_1 是集合 $X\cup Y$ 中的最小整数，由于 $m\geqslant3$，故至少有一个 $j\ (0\leqslant j\leqslant m)$，使

$$y_j-x_1\geqslant3. \tag{7}$$

注意到所考察的多项式

$$p(x)=a_hx^h+a_{h-1}x^{h-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad h=deg(p)$$

(其中所有系数 a_i 都是整数)由此得：

$$p(x_1)=a_hx_1{}^h+a_{h-1}x_1{}^{h-1}+\cdots+a_1x_1+a_0=-1; \tag{8}$$

$$p(y_j)=a_hy_j{}^h+a_{h-1}x_j{}^{h-1}+\cdots+a_1y_j+a_0=1. \tag{9}$$

(9)－(8)：

$$a_h(y_j{}^h-x_1{}^h)+a_{h-1}(y_j{}^{h-1}-x_1{}^{h-1})+\cdots+a_1(y_j-x_1)=2.$$

由此可见，y_j-x_1 必为 2 的因数，从而推得

$$y_j-x_1\leqslant2. \tag{10}$$

显然，(10)与(7)矛盾．证毕．

2．当且仅当 $deg(p)=2$ 时，不等式取等号，即

$$n(p)-deg(p)=2.$$

事实上，对于 $p(x)=(x-k)^2-3(x-k)+1$，当 k 为任意整数时，都有：

$$p(k)=p(k+3)=1 \text{ 和 } p(k+1)=p(k+2)=-1.$$

这就是说，方程 $p(x)=1$，$p(x)=-1$ 各有两个整根 k 与 $k+3$；$k+1$ 与 $k+2$.

3. 关于"集合"知识，参见《国际数学竞赛试题讲解（Ⅰ）》第十九届第六题附注3．这里，对代数基本定理作如下说明.

定理　任一复系数的 n（自然数）次多项式在复数域中至少有一个根.

这个定理完满地解决了数值系数多项式根（多项式 $f(x)$ 的根与方程 $f(x)=0$ 的根是一致的）的存在问题，因而是我们讨论多项式根的理论基础．由于在十九世纪中叶以前，解方程一直是代数学的中心问题，因此这个定理被称为代数基本定理．现在代数学的发展已经远远超出了解方程这个范围，所以这个名称只能有历史上的意义了.

下面的定理解决了多项式根的数量问题，它是代数基本定理的一个直接结果.

定理　任一复系数的 n（自然数）次多项式在复数域中有且只有 n 个根.

在高等代数里．对代数基本定理的证明有很多种方法，但都比较繁难，而且还要涉及很多别的知识．在复变函数论课程中，这一定理可作为其它定理的一个直接推论而得到证明.

第十七届国际中学生数学竞赛试题分析与解答

1975年在保加利亚举行

第 一 题 （捷克斯洛伐克命题）

已知 x_i，$y_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是实数，且

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots \geqslant x_n; \quad y_1 \geqslant y_2 \geqslant y_3 \geqslant \cdots \geqslant y_n.$$

又 z_1，z_2，$\cdots$，z_n 是 y_1，y_2，$\cdots$，y_n 任意重新排列后所得的数列．试证：

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2.$$

【分析】 这是一类重新排列问题，从具体到抽象，从特殊到一般，对初学者而言，是掌握其规律的基本途径．

当 $n=1$ 时，不存在交换的可能性，显然只有

$$(x_1-y_1)^2=(x_1-z_1)^2.$$

当 $n=2$ 时，交换的可能性是唯一的，即将 $(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2$ 换成 $(x_1-y_2)^2+(x_2-y_1)^2$．注意到这二式中平方项是完全一致的，只须比较 $-2x_1y_1-2x_2y_2$ 与 $-2x_1y_2-2x_2y_1$ 的大小．由于

$$\begin{aligned}&(x_1y_1+x_2y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)\\&=(x_1-x_2)(y_1-y_2)\geqslant 0,\end{aligned}$$

即 $$-2x_1y_1-2x_2y_2 \leqslant -2x_1y_2-2x_2y_1,$$

$$(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2<(x_1-y_2)^2(x_2-y_1)^2.$$

这就是说，重新排列后，

$$(x_1-z_1)^2+(x_1-z_2)^2\geqslant(x_1-y_1)^2+(x-y_2)^2,$$

这里等号包括 $z_1=y_1$、$z_2=y_2$ 的情况.

当 $n=3$ 时，可以有多种不同的交换形式. 如果其中有某一个 $z_i=y_i$，则问题回到了 $n=2$ 的情况；如果不存在一个 $z_i=y_i$，例如，由

$$(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2 \tag{1}$$

交换为 $$(x_1-y_2)^2+(x_2-y_3)^2+(x_3-y_1)^2, \tag{2}$$

注意到 $$(x_3-y_1)^2+(x_2-y_3)^2>(x_2-y_1)^2+(x_3-y_3)^2,$$

从而得到 $$(x_1-y_2)^2+(x_2-y_1)^2+(x_3-y_3)^2. \tag{3}$$

而 (3)<(2)，又已经知道，(1)<(3)，因此有(1)<(2). 这就在 $n=3$ 的情况下，验证了本题的结论.

这样逐层深入，不难看到通过反序交换，可以把 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-z_i)$ 还原到 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)$，就是证法 1 的基本思路.

〈证法一〉 因为 $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2$，故对原题给出的不等式

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2,$$

去掉括号并化简，得到与这不等式等价的不等式

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_iz_i. \tag{4}$$

因为原题只能给出 y_i 的有限多种重新排列，从而(4)的右边只能出现有限多个值，这些值当中总存在一个最大的，

我们证明：

当 $y_i=z_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 成立时，将取得这个最大值。

事实上，对于

$$\sum_{i=1}^{n}x_iz_i=x_1z_1+x_2z_2+\cdots+x_lz_l+\cdots+x_kz_k+\cdots+x_nz_n,$$

若其中存在一对 $x_l>x_k$ 和 $z_l<z_k$，为方便计，我们称之为关于 l，k 的一个反序排列．由于

$$(x_l-x_k)(z_l-z_k)<0,$$

因此有
$$x_lz_l+x_kz_k<x_lz_k+x_kz_l. \tag{5}$$

(5)式意味着，反序排列的两项之代数和，较之将其中 z_l、z_k 交换为非反序后的两项之和为小．

由此可以判定，如果 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iz_i$ 中有两项成反序排列，则其值较之交换 z_l 与 z_k 之后所得的新的排列之值为小．

对于所有的 $(z_l、z_k)$ 而言，满足关系式

$$z_l\geqslant z_k(l<k)$$

的数对总是有限的（即反序排列的数对总是有限的），因此对于 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iz_i$ 中的 $z_i(1\leqslant i\leqslant n)$，总可以通过有限次交换（将反序排列交换为非反序排列）直到与 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ 的顺序完全一致，由于每一次这样的重新排列，它的值都相应增大，因此到 z_i 的顺序与 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 完全一致时，取得它的最大值．

综上所述，(4) 式得证．证毕．

〈证法二〉　当 $n=1$ 时，命题显然成立。

假定当 $n=k$ 时，命题成立。

当 $n=k+1$ 时，我们考查 $\sum\limits_{i=1}^{k+1}(x_i-z_i)^2$，如果其中 $z_{k+1}=y_{k+1}$，则显然有

$$\sum_{i=1}^{k+1}(x_i-z_i)^2=\sum_{i=1}^{k}(x_i-z_i)^2+(x_{k+1}+z_{k+1})^2$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2+(x_{k+1}-y_{k+1})^2=\sum_{i=1}^{k+1}(x_i-y_i)^2;$$

如果其中 $z_{k+1}\neq y_{k+1}$，不失一般性，设 $y_{k+1}=z_t\ (t\neq k+1)$，现在另外构造一个数列 $\{z_i'\}$，使得

$$z_1'=z_1,\quad z_2'=z_2,\quad \cdots,\quad z_t'=z_{k+1},\quad \cdots,\quad z_k'=z_k,$$

于是

$$\sum_{i=1}^{k+1}(x_i-z_i)^2=\sum_{i=1}^{k}(x_i-z_i')^2+(x_{k+1}-z_{k+1})^2$$

$$+(x_t-z_t)^2-(x_t-z_t')^2$$

从而有

$$\sum_{i=1}^{k+1}(x_i-z_i)^2-\sum_{i=1}^{k+1}(x_i-y_i)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(x_i-z_i)^2-\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2+(x_{k+1}-z_{k+1})^2$$

$$+(x_t-z_t)^2-(x_t-z_{k+1})^2-(x_{k+1}-y_{k+1})^2$$

$$\geqslant(x_{k+1}-z_{k+1})^2+(x_t-y_{k+1})^2-(x_t-z_{k+1})^2$$

$$-(x_{k+1}-y_{k+1})^2$$

$$=2(x_tz_{k+1}+x_{k+1}y_{k+1}-x_{k+1}z_{k+1}-x_ty_{k+1})$$

$$=2(x_{k+1}-x_t)(y_{k+1}-z_{k+1})>0.$$

即当 $n=k+1$ 时，命题仍然成立．证毕．

【附注】 1．上面介绍的两种证法，思路基本上是一致的．所不同的是证法二具体用了数学归纳法，证法一虽没有用归纳法，但提到了“反序排列的数对是有限的”，这里实际上是用到了最小数原理．而这个原理与数学归纳法是等价的．

2．证法二中，从 $n=k$ 推广到 $n=k+1$ 时，所用的变换技巧，在不等量的代换中是经常用到的，建议读者注意这一特点．

3．证法一中，重新排列的方法是一种很有用处的方法，对于处理某些有序数集的问题是比较方便的．

第 二 题 (英国命题)

设 a_1，a_2，a_3，$\cdots, a_n, \cdots$是任意一个具有性质 $a_k<a_{k+1}$ $(k\geqslant 1)$的正整数的无穷数列．试证，这数列中有无穷多个 a_m 可以表示为

$$a_m = xa_p + ya_q,$$

这里，x、y 是适当的正整数，且 $p \neq q$．

【分析】 本题的条件是很宽的，我们可以把它适当加强一点．例如取 $x=1$，则得

$$a_m - a_p = y \cdot a_q. \qquad (1)$$

只要 $\quad a_m = y_1 a_q + r$，$a_p = y_2 a_q + r$，

(1) 式必然成立．

这样，只要在数列$\{a_n\}$中找出一个关于 a_p 有相同的余数 r 的无穷子数列，这个子数列的无穷多项 a_m，就是合于条件的了．

由于 $a_{k+1}>a_k$，而 a_k 为正整数，故必存在 $a_p>1$，而大于

a_p 的项也仍然有无穷多．这无穷多个自然数关于 a_p 至多属于 a_p 个不同的剩余类．根据抽屉原则，容易判定至少有无穷多项属于同一个剩余类．

由此不难得出本题的解法．为简明计，在解法中，我们取 $a_p = a_2$（其实，这是可以任意选择的）．

〈证法一〉 根据题设，有 $a_2>1$．

将数列$\{a_n\}$中的所有项，按照以 a_2 为模的不同剩余类分成若干个子数列(属于同一剩余类的各项构成同一个子数列)．根据抽屉法则，这些子数列中，至少有一个是无穷数列（因为以 a_2 为模的不同剩余类的个数是有限的．事实上，假定每个剩余类中的项数也是有限的，那么所有不同的剩余类中的项数同样是有限的，这就和题设$\{a_n\}$是无穷数列矛盾）．

现在来考察这个无穷子数列，由于已知数列$\{a_n\}$是严格递增的，所以在这子数列中一定存在一项最小的 a_p，使得 $a_p>a_2$ 成立．同时还存在无限多个这样的 a_m，使得 $a_m>a_p$．

由于这个子数列的各项属于以 a_2 为模的同一剩余类，因此

$$a_m \equiv a_p \pmod{a_2},$$

亦即 $$a_m - a_p = ya_2 \text{（}y\text{ 为自然数）}.$$

令 $x=1$ 和 $a_q = a_2$ 则得

$$a_m = x\cdot a_p + y\cdot a_q$$

它显然满足题设的要求：x、y 为适当的自然数；因 $a_p>a_2$，则 $p\neq q$；而且使上述等式成立的 a_m 是无限的．

〈证法二〉 注意到 $a_2>1$，以 a_2 去除这数列$\{a_n\}$中的各项 $a_t(t>2)$，分别得到商 Q_t 和余数 r_t，于是有

$$a_t = Q_t\cdot a_2 + r_t \quad (0\leqslant r_t\leqslant a_2-1).$$

现在，我们把每一组余数 r_t 相同的 a_t，作为数列$\{a_n\}$的一个子数列$\{br_t\}$，显然这样的子数列不超过 a_2 个．不难证明，这些子数列中至少有一个是无穷数列．事实上，如果它们都是有穷数列，则数列$\{a_n\}$的项数等于这些数列的项数的总和$+2$，也将是有穷数列而与题设矛盾．

不失其一般性，设这个无穷子数列的余数 $r_t=r$，则属于这个子数列的两项 a_m、$a_p(m>p>2)$满足关系式．

$$a_p=Q_p\cdot a_2+r,\quad a_m=Q_m\cdot a_2+r,$$

从而有

$$a_m-a_p=(Q_m-Q_p)\cdot a_2.$$

注意到数列$\{a_n\}$是严格递增的，因而满足条件 $m>p$ 的 $a_m>a_p$，同时 $Q_m>Q_p$，且这样的 a_m 是无限的．

现在取 $x=1$，$y=Q_m-Q_p$，$a_q=a_2$，则得

$$a_m=x\cdot a_p+y\cdot a_q.$$

由于 $p>2$，则 $p\neq q$，完全符合题设条件，从而命题得证．

【附注】 1．本题是一个初等数论的问题．证法一是用同余理论阐述的．考虑到我国中学数学教学的实际（将题中的"序列"一律称为"数列"也是这个原因），我们又给出了证法二，力求讲解得更通俗一些．但二者的基本思路是一致的．

2．如果一个无穷集分成有限个子集，则这些子集中至少有一个是无穷集．这是抽屉原则的一个基本的性质，证法二中实际上已给了这个命题的证明，希望进一步了解的读者，请参考有关专著．

第三题 （荷兰命题）

在任意$\triangle ABC$的三边上向外作$\triangle BPC$，$\triangle CQA$和$\triangle ARB$，使得

$$\angle PBC=\angle CAQ=45^\circ,\ \angle BCP=\angle QCA=30^\circ,$$
$$\angle ABR=\angle BAR=15^\circ.$$

试证：(1) $QRP=90^\circ$；(2) $\overline{QR}=\overline{RP}$.

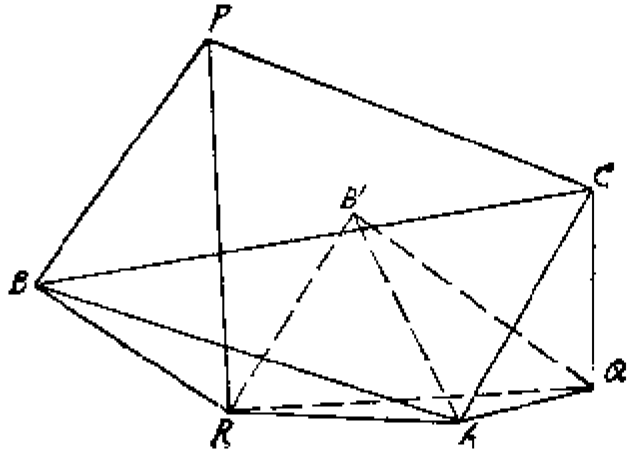


图 17—1

【分析】 这是一个典型的综合几何问题，但思路是比较曲折的．因为 $\overline{PR}$ 与 $\overline{RQ}$ 之间是否相等并不明显．例如，直接看来，它们并不能构成一对全等形的对应边，因此需作进一步的分析．

假如结论成立，过 R 作 $RB'\perp BR$，且取 $\overline{B'R}=\overline{BR}$，显然有$\triangle BPR\cong\triangle B'QR$；反过来说，只要$\triangle BPR\cong\triangle B'QR$，则原结论成立(图 17—1)．

注意到 $\angle ARB'=\angle ARB-\angle BRB'=150^\circ-90^\circ=60^\circ$，

则$\triangle ARB'$ 为正三角形．因此，有：

$$\overline{AB'}=\overline{BR}=\frac{\overline{AB}}{2\cos15^\circ}=2\cdot\overline{AB}\sin15^\circ;$$

$$\overline{AQ}=\frac{\overline{AC}}{\sin\angle AQC}\cdot\sin30^\circ=2\cdot\overline{AC}\sin15^\circ.$$

此时，若假定 $\overline{B'Q}=\overline{BP}=2\overline{BC}\cdot\sin15^\circ$，则有 $\triangle AB'Q$

$\backsim \triangle ABC$，因而 $\angle AB'Q = \angle ABC$，从而有

$$\angle RB'Q = 60° + \angle AB'Q = 60° + \angle ABC = \angle RBP,$$

原命题由此可证.

因此，本题证法一的思路是：

作补助线 $RB' \Rightarrow \triangle AB'Q \backsim \triangle ABC \Rightarrow \triangle RB'Q \cong \triangle RBP$
$\Rightarrow$结论.

〈证法一〉 设$\triangle ABC$的三顶点 A、B、C 所对应的角顺次为 α、β、γ.

在$\angle ARB$内部作 $\angle B'RB = 90°$，且取 $\overline{B'R} = \overline{RB}$，分别连结 AB'、$B'Q$ 及 RQ(图 17—2).

由于$\angle ABR = \angle RAB = 15°$，易证$\triangle AB'R$为正三角形，以及 $\overline{AB'} = 2\overline{AB}\sin 15°$.

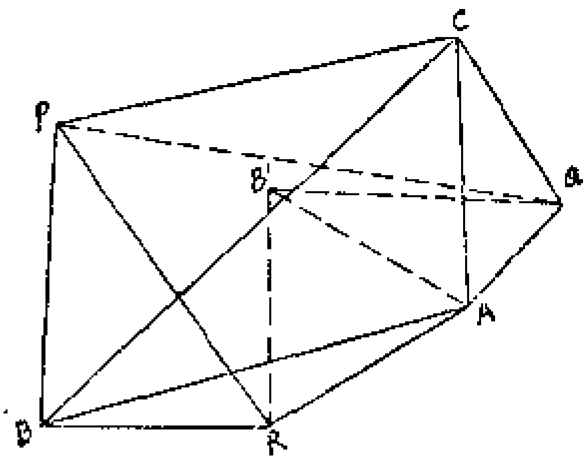


图 17—2

又由于正弦定理，在$\triangle ACQ$、$\triangle BCP$中，分别可得：

$$\overline{AQ} = 2\overline{AC}\sin 15°, \qquad \overline{BP} = 2\overline{BC}\sin 15°.$$

于是$\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = 2\sin 15°$为一定值，且

$$\angle B'AQ = \angle RAQ - \angle B'AR = \angle RAQ - 60°$$

$$= \angle RAQ - 15^\circ - 45^\circ$$
$$= \angle RAQ - \angle RAB - \angle CAQ = \angle BAC,$$

所以 $\triangle AB'Q \backsim \triangle ABC.$

从而有 $\dfrac{\overline{B'Q}}{\overline{BC}} = 2\sin 15^\circ$，即 $\overline{B'Q} = 2\overline{BC}\sin 15^\circ = \overline{BP}$，以及 $\angle AB'Q = \angle ABC$. 这样，有

$$\angle RB'Q = 60^\circ + \angle AB'Q = 15^\circ + \angle ABC + 45^\circ = \angle RBP,$$

所以，我们得知$\triangle RB'Q \cong \triangle RBP$，因此有：

$$\overline{QR} = \overline{RP}；\angle QRB' = \angle PRB.$$

由此进一步得到：

$$\angle QRP = \angle QRB' + \angle B'RP = \angle PRB + \angle B'RP$$
$$= \angle B'RB = 90^\circ.$$

从而命题得证.

〈**证法二**〉 参看图 17—2，设$\triangle ABC$之三边为a，b及c，三边所对之角依次为A、B及C，外接圆半径为R'，由正弦定理，易得：

$$\overline{BP} = 4R'\sin 15^\circ \sin A,$$

$$\overline{CP} = \frac{\sqrt{2}R'\sin A}{\cos 15^\circ} = 4\sqrt{2}R'\sin 15^\circ \sin A,$$

$$\overline{AQ} = 4R'\sin 15^\circ \sin B,$$

$$\overline{CQ} = \frac{\sqrt{2}R'\sin B}{\cos 15^\circ} = 4\sqrt{2}R'\sin 15^\circ \sin B,$$

又 $\overline{AR} = \overline{BR} = 4R'\sin 15^\circ \sin C$

于是，在$\triangle AQR$中，由$\angle QAR = 15^\circ + A + 45^\circ = 60^\circ + A$有

$$\overline{RQ}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AR}\cdot\overline{AQ}\cos(60^\circ + A)$$
$$= 16R'^2\sin^2 15^\circ[\sin^2 C + \sin^2 B$$
$$- 2\sin B\sin C\cos(60^\circ + A)]$$

同理，在$\triangle BPR$中，

$$\overline{PR}^2=16R'^2\sin^2 15^\circ[\sin^2 C+\sin^2 A$$
$$-2\sin A\sin C\cos(60^\circ+B)],$$

但 $\quad 2\sin A\sin C\cos(60^\circ+B)-2\sin B\sin C\cos(60^\circ+A)$

$$=\sin C[\sin(A+B+60^\circ)+\sin(A-B-60^\circ)$$
$$-\sin(B+A-60^\circ)-\sin(B-A-60^\circ)]$$
$$=\sin C\{-\sin[60^\circ-(A-B)]+\sin[60^\circ+(A-B)]\}$$
$$=\sin C[2\cos 60^\circ\cdot\sin(A-B)]=\sin(A+B)\sin(A-B)$$
$$=\sin^2 A-\sin^2 B,$$

因此 $\quad \sin^2 A-2\sin A\sin C\cos(60^\circ+B)$

$$=\sin^2 B-2\sin B\sin C\cos(60^\circ+A),$$

从而有 $\quad \sin^2 C+\sin^2 A-2\sin A\sin C\cos(60^\circ+B)$

$$=\sin^2 C+\sin^2 B-2\sin B\sin C\cos(60^\circ+A),$$

所以 $$\overline{PR}^2=\overline{RQ}^2,\qquad \overline{PR}=\overline{RQ}.$$

又 $$\overline{PR}^2+\overline{RQ}^2=2\overline{PR}^2$$
$$=32R^2\sin^2 15^\circ[\sin^2 C+\sin^2 A$$
$$-2\sin A\sin C\cos(60^\circ+B)],$$

而在$\triangle PCQ$中，

$$\overline{PQ}^2=\overline{CQ}^2+\overline{CP}^2-2\overline{CQ}\cdot\overline{CP}\cos(60^\circ+C)$$
$$=32R'^2\sin^2 15^\circ[\sin^2 A+\sin^2 B$$
$$-2\sin A\sin B\cos(60^\circ+C)],$$

仿上易证 $\quad 2\sin A\sin B\cos(60^\circ+C)-2\sin A\sin C\cos(60^\circ+B)$

$$=\sin^2 B-\sin^2 C,$$

从而得 $\quad \overline{PR}^2+\overline{RQ}^2=\overline{PQ}^2$，所以

$$\angle PRQ=90^\circ.$$

〈证法三〉 将A、B、C、P、Q和R理解为复平面上

的点，点和它对应的复数约定用相同的字母来表示（图 17—3）．不失一般性，假定 $A=-1$ 和 $B=+1$，P_1 和 Q_1 分别是由 P 和 Q 到 CB 和 CA 的垂线的垂足，则有

$$R=-i\,\mathrm{tg}\,15^\circ=-i\sqrt{\frac{1-\cos30^\circ}{1+\cos30^\circ}}=i\,(\sqrt{3}-2). \qquad (1)$$

其次计算 P，由于

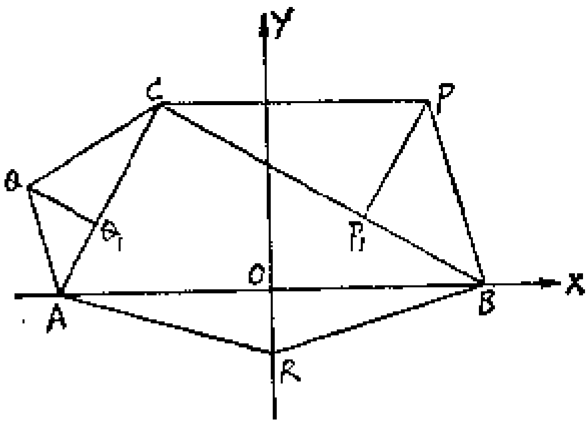


图 17—3

$$\frac{C-P_1}{P_1-B}=\frac{\mathrm{ctg}30^\circ}{\mathrm{ctg}45^\circ}=\sqrt{3},$$

注意到 $$C-P_1=C-B-(P_1-B),$$

从而得到 $$P_1-B=\frac{1}{\sqrt{3}+1}(C-B).$$

又注意到 $P-B=\sqrt{2}\,(P_1-B)[\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ)]$，因 $B=1$，故最后得到

$$P=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)C-\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)+1. \qquad (2)$$

在计算 Q 时，只要注意到利用按正方向旋转 45° 角，并且有 $A=-1$，不难得到．

$$Q=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+i)C+\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+i)-1. \qquad (3)$$

由(1)和(2)，得

$$P-R=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)C+\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}i. \quad (4)$$

由(1)和(3)，得

$$Q-R=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+i)C+\frac{\sqrt{3}-3}{2}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}i. \quad (5)$$

由(4)和(5)，直接可以验证$(P-R)i=Q-R$成立，这意味着模$|P-R|=|Q-R|$，并且$Q-R$是由$P-R$经过旋转90°得出．因此，这就证明了

$$\angle QRP=90^\circ \quad 和 \quad \overline{QR}=\overline{PR}$$

【附注】 1．证法一、二、三分别是以平面几何、三角、代数为主的证法．对于证法二、三来说，从计算入手，思路比较明显，但在三角、代数的有关变形方面，则要求具有比较熟练的技能技巧．

2．由对本题的解答，可知数学知识综合应用的重要性．由于复平面的建立，给用复数处理几何等方面的问题，开辟了广阔的道路．对此有兴趣的读者，可参阅有关的书籍或相应的小册子．

第 四 题 （苏联命题）

已知A是十进制数4444^{4444}的各位数字之和，而B是A的各位数字之和，试计算B的各位数字之和（这里所有的数都是十进制数）．

【分析】 在十进数系中，已知原数而研究其数字和，想到九余数是十分自然的．但由A到C，已经经过3次运算，因此，要计算C的数字和，必须知道C的位数．这样，就得

从 4444^{4444} 的位数估算起.

〈解答〉 首先进行估位，数 10000^{4444} 有 $4\cdot 4444+1=17777$ 个数字，而每个数字最大只能是9，并且 $4444^{4444}<10000^{4444}$，所以有

$$A<17777\cdot 9=159993.$$

现在把 A 记为

$$A=a_5\cdot 10^5+a_4\cdot 10^4+a_3\cdot 10^3+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0\cdot 10^0,$$

这里：$0\leqslant a_i\leqslant 9\quad (i=0,\ 1,\ 2,3,4)$，并且 $a_5\leqslant 1$. 因此，有

$$B\leqslant 1+5\cdot 9=46.$$

又记 $B=b_1\cdot 10+b_0$. 这里：$0\leqslant b_i\leqslant 9\quad (i=0,\ 1)$. 类似可知，对于 B 的数字和 C，有

$$C\leqslant 4+9=13.$$

另一方面，有

$$4444^{4444}\equiv 7^{4444}\pmod 9,$$

$$7^{4444}=7^{4443}\cdot 7\equiv (7^3)^{1481}\cdot 7$$

$$\equiv (342+1)^{1481}\cdot 7\pmod 9,$$

$$7^{4444}\equiv 1^{1481}\cdot 7\equiv 7\pmod 9.$$

由此，$$4444^{4444}\equiv 7\pmod 9.$$

又因一个数与它的数字之和在用9除时，总有相同的余数，于是

$$4444^{4444}\equiv A\equiv B\equiv C\pmod 9.$$

所以 $C\equiv 7\pmod 9$. 由于 $C\leqslant 13$，因此 B 的数字和等于7.

【附注】 估算数字和的问题是初等数论中一类常见的问题. 从中学范畴来说，只有用九余数比较方便. 这是因为在整数运算中具有下列性质：一个整数如果它不是9的倍数，那末，当它被9除时所得的余数，正好等于该数的各位数字

之和被 9 除所得余数．因此，从本题来看，实际上就是要求 4444^{4444} 被 9 除所得余数．不过，在此之前，先得估出 B 及 C 的位数．这样，计算才有根据．下面写出一个类似的例题供读者参考．

设 3^{10000} 的各位数字之和为 A，A 的各位数字之和为 B，B 的各位数字之和为 C，求 C 的值．

第 五 题 （苏联命题）

试证，在半径为 1 的圆周上存在 1975 点，其中任意两点的直线距离都是有理数．

【分析】 直径的两端距离等于 2，因此，存在两点的距离都是有理数是显然的．

现在就半圆来观察，由于 $3^2+4^2=5^2$，则 $\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2=2^2$．因此，存在一个直角三角形 ABC：$AB=2$，$AB=\frac{6}{5}$，$BC=\frac{8}{5}$．即半圆上存在三个符合题目要求的点．

是否存在第四个有理点呢？我们分析这样的点存在的条件，即两个这样的点所张圆周角的正弦必为有理数（据正弦定理）．设 D 介于 B 与 C 之间，且设 BD、CD 所对圆周角分别是 α、β，若要 $\sin(\alpha+\beta)$ 是有理数，注意到

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta,$$

因此，只要 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\sin\alpha$、$\sin\beta$ 都是有理数即可．

由此不难得到证法一，而证法二则是证法一的概括和提高．

〈证法一〉 先引入以下几个引理：

引理 1．单位圆上弦长 l 如果是有理数．则这弦所对圆周角 α 的正弦也是有理数．

命题的正确性是显然的．因为 $l=2\cdot 1\cdot\sin\alpha$．

引理 2．如果两角 α_1、α_2 的正弦、余弦值是有理数，则 $\alpha=\alpha_1\pm\alpha_2$ 的正弦余弦值也是有理数．

事实上，由

$$\sin\alpha=\sin(\alpha_1\pm\alpha_2)=\sin\alpha_1\cos\alpha_2\pm\sin\alpha_2\cos\alpha_1,$$

$$\cos\alpha=\cos(\alpha_1\pm\alpha_2)=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\mp\sin\alpha_1\sin\alpha_2$$

可知，命题的正确性也是显然的．

引理 3．如果 $\alpha\left(\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 的正弦、余弦都是有理数，则一定可以找到一对角 α_1、α_2 满足下列条件：

i） $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$；

ii） $\sin\alpha_1$、$\sin\alpha_2$、$\cos\alpha_1$、$\cos\alpha_2$ 均为有理数．

证　因 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 为有理数，故可设

$$\sin\alpha=\frac{a}{c},\quad \cos\alpha=\frac{b}{c}.$$

这里 a、b、c 为正整数，且 $a^2+b^2=c^2$

根据勾股数的性质，一定存在唯一的两个自然数 m、n，使得：$m^2+n^2=c$、$m^2-n^2=a$、$2mn=b$．

现在选取另一自然 n_1，使得 $n<n_1<m$．于是有：

$$c_1=m^2+n_1^2,\quad a_1=m^2-n_1^2,\quad b_1=2mn_1,$$

满足 $a_1^2+b^2=c_1^2$．因此可得 $\sin\alpha_1=\frac{a_1}{c_1}$，$\cos\alpha_1=\frac{b}{c_1}$，故

$$\sin\alpha_1=\frac{a_1}{c_1}=\frac{m^2-n_1^2}{m^2+n_1^2}<\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}=\sin\alpha,$$

从而得 $\alpha_1<\alpha$．

如果 $m-n=1$，则将关系式改写如下：

$$4m^2+4n^2=4c,\quad 4m^2-4n^2=4a,\quad 8mn=4b,$$

此时，相应的取 $c_1=4m^2+(2n+1)^2$，$a_1=4m^2-(2n+1)^2$，$b_1=4m(2n+1)$，显然，同样的有：

$$\sin\alpha_1=\frac{a_1}{c_1}=\frac{4m^2-(2n+1)^2}{4m^2+(2n+1)^2}<\frac{4m^2-4n^2}{4m^2+4n^2}$$

$$=\frac{4a}{4c}=\sin\alpha,$$

从而有 $\alpha_1<\alpha$；且 $\cos\alpha_1=\dfrac{b_1}{c_1}$ 亦为有理数.

由此 $$\sin(\alpha-\alpha_1)=\sin\alpha\cos\alpha_1-\cos\alpha\sin\alpha_1,$$

$$\cos(\alpha-\alpha_1)=\cos\alpha\cos\alpha_1+\sin\alpha\sin\alpha_1$$

均为有理数.

取 $\alpha_2=\alpha-\alpha_1$ 显然 $\alpha_2<\alpha_1$. 因此 $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$，从而引理3得证.

下面证明本题：

当单位圆周上的点的个数 $h=2$ 时，命题显然成立，因为单位圆的直径两端点的距离为2是有理数，即符合条件，这里 $\sin\alpha=1$，$\cos\alpha=0$ 均为有理数.

假定 $h=k$ 时，结论成立. 为方便计，设存在这样的 k 个点，它们在单位圆周上按顺序排成 $A_i(1\leqslant i\leqslant k)$，且满足下列条件：

(i) 弦 $A_iA_{i+1}(1\leqslant i\leqslant k$、$A_{k+1}$ 与 A_1 重合)所张圆周角顺次为 α_1，α_2，α_3，…，α_k，且 $\sin\alpha_i$、$\cos\alpha_i$ 均为有理数.

根据引理1、2推断，弦 $A_iA_j(1\leqslant i\leqslant k$，但 $i\neq j)$ 必为有理数.

注意到 $h=2$ 时，所取两点为单位圆直径. 因此，至少

有相邻的两点所连之弦 A_mA_n 所对圆周角 $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. 现在按引理 3 作如下划分：

找出一对角 β, γ, 使得 $\beta+\gamma=\alpha$, 且 $\sin\beta, \cos\beta, \sin\gamma$, $\cos\gamma$ 均为有理数.

这样，就可以对应的在 $\overset{\frown}{A_mA_n}$ 上找出一点 A_{k+1}, 将 $\overset{\frown}{A_mA_n}$ 分成两部分 $\overset{\frown}{A_mA_{k+1}}$、$\overset{\frown}{A_{k+1}A_n}$, 且使它们所张圆周角分别为 β 及 γ. 这样，就在单位圆上找到 $k+1$ 个点.

根据引理 1、2，不难证明这 $k+1$ 个点满足题设条件. 这就证明了对于任意自然数 k, 这个命题的结论是肯定的.

亦即单位圆上存在 1975 个点，其中任两点之间的距离均为有理数.

〈解法二〉 M 是单位圆的中心，点 $P_i(i=1,2,\cdots,1975)$ 在圆周上，用 α_i 记 $\angle P_iMP_{i+1}$, 并且约定为正角. $l_{i,i+k}$ 是在同一个半圆上的两点 P_i 和 P_{i+k} 之间的距离，因此

$$l_{i,i+k}=2\cdot\sin\left(\sum_{j=i}^{i+k-1}\frac{\alpha_j}{2}\right). \tag{1}$$

由熟知的加法定理给出：当对于所有的 j, $\sin\frac{\alpha_j}{2}$ 和 $\cos\frac{\alpha_j}{2}$ 是有理数时，(1)式的右边是有理数.

设 r 是一个有理数，则有：

$$\left(\frac{r^2-1}{r^2+1}\right)^2+\left(\frac{2r}{r^2+1}\right)^2=1, \tag{2}$$

和

$$\lim_{r\to\infty}\frac{2r}{r^2-1}=0. \tag{3}$$

因为函数 $y=\sin x$ 是连续的，根据(2)，故对于每一个有理数 r, 都有这样一个角 x, 使得

$$\sin x=\frac{2r}{r^2+1}.$$

由于函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内是严格递增的，所以对于充分小的非负数 $\frac{2r}{r^2+1}=\sin x$ 角 x 是非负的，并且可以任意的小。

这里，同时取 $\cos x=\frac{r^2-1}{r^2+1}$，根据(2)，显然 $\cos x$ 也是一个有理数。

现在选择 $\delta=\sin\frac{\pi}{4000}$，根据上面的讨论，可以肯定存在这样一个 x，满足条件：$0<x<\frac{\pi}{4000}$，并且使得 $\sin x$ 和 $\cos x$ 也都是有理数。

现在，置 $\frac{\alpha_1}{2}=\frac{\alpha_2}{2}=\cdots=\frac{\alpha_{1974}}{2}=x$。

由于 $\sum\limits_{i=1}^{1974}\frac{\alpha_i}{2}=1974\cdot x<\frac{\pi}{2}$，因此，所有的 P_i 都在一个半圆上。并且由于(1)，可知所有的 $l_{i,i+k}$ 都是有理数。

【附注】 1. 本题所给的证法，实际上已给出了更强的结论：即半径为有理数的圆周上，一定存在 n 个点(n 为大于1的自然数)，使得其中任意两点间的距离都是有理数。

2. 证法一中的引理2，虽是显然的，但却值得注意的是，可以用它来处理某些有关类似的问题。

第 六 题 (英国命题)

试决定满足下述条件的多项式 p：

1) p 是关于 x、y 的 n 次齐次多项式，即对于所有实数 t，x，y，有 $p(tx, ty)=t^n p(x, y)$，其中 n 是自然数；

2) 对于所有的实数 a，b，c，有

$$p(a+b, c)+p(b+c, a)+p(c+a, b)=0;$$

3) $p(1, 0)=1$.

【分析】 这里的条件 1) 是齐次多项式的共性，条件 2)、3) 则是本题的个性．怎样利用个性，是解本题的关键所在．

条件 3) 意味着所有满足条件的曲线均过定点，这是比较显然的，因此主要的问题是：怎样利用条件 2)？

解法中有两点是值得特别注意的，其一是令 $a=b=c=x$，从而得到多项式的因式 $x-2y$；以及令 $a=b=x$，$c=-2x$，从而得到多项式的另一因式 $x+y$，这种化一般性条件为具体条件的方法是常用的变换技巧．

其二、是证 $p_1(x, y)=\dfrac{p(x,y)}{x+y}$ 仍然符合条件．这样，实际上蕴含着 $p_k(x, y)=\dfrac{p_{k-1}(x,y)}{x+y}$，仍然符合条件．注意到 n 是已知的自然数，从而这个过程必然是有限的，因此决定了 $p(x, y)$ 的因式

$$(x+y)^k$$

的指数 k 不超过 $n-1$.

解法二是用叠代法来定 $(x+y)^k$ 的，两者的实质也是一致的．

〈**解法一**〉 对于条件 2)，设 $a=b=c=x$，于是有

$$p(2x, x)=0,$$

这就是说，当 $x=2y$ 时多项式之值为零，因而 $p(x, y)$ 有因子 $x-2y$.

类似的，设 $a=b=x\quad c=-2x$，则得

$$\begin{aligned}&p(2x,\ -2x)+p(-x,\ x)+p(-x,\ x)\\=&2^n p(x,\ -x)+2p[-1\cdot x,\ -1(-x)]\\=&2^n p(x,\ -x)+2\cdot(2-1)^n p(x,\ -x)\\=&[2^n+(-1)^n 2]p(x,\ -x)=0.\end{aligned}$$

显然，当 $n\neq1$ 时，有 $p(x,\ -x)=0$，即 $p(x,\ y)$ 有因式 $x+y$.

现在设 $p_1(x,\ y)=\dfrac{p(x,y)}{x+y}$，我们证明：当 $p(x,\ y)$ 满足题设三个条件时，$p_1(x,\ y)$ 也满足这三个条件．事实上：

$$p_1(tx,ty)=\frac{p(tx,ty)}{tx+ty}=\frac{t^n p(x,y)}{t(x+y)}=t^{n-1}p_1(x,y)；$$

$$\begin{aligned}&p_1(a+b,c)+p_1(b+c,a)+p_1(c+a,b)\\=&\frac{p(a+b,c)}{a+b+c}+\frac{p(b+c,a)}{a+b+c}+\frac{p(c+a,b)}{a+b+c}\\=&\frac{1}{a+b+c}[p(a+b,c)+p(b+c,a)+p(c+a,b)]\\=&0,\end{aligned}$$

这里 $a+b+c\neq0$； $p_1(1,0)=\dfrac{p(1,0)}{1+0}=1$．这就证明了 $p_1(x,y)$ 仍有因子 $x-2y$ 及 $x+y$.

一般地说，只要 $p_k(x,\ y)$ 满足三个条件，可以得到 $p_{k+1}(x,y)=\dfrac{p_k(x,y)}{x+y}$ 满足这三个条件，即它们仍有因子 $x-2y$ 及 $x+y$.

由于 n 是已知自然数，故求 $p_{k+1}(x,\ y)$ 的过程必然是有限的，从而可知

$$p(x,y)=(x-2y)(x+y)^{n-1}.$$

〈解法二〉 在条件2)中，令 $a=b=c=x$，则得到 $p(2x,x)=0$. 也就是说，多项式当 $x=2y$ 时，取0值，因此可以表示为

$$p(x, y)=(x-2y)Q_{n-1}(x, y) \tag{1}$$

其中 $Q_{n-1}(x, y)$ 是关于 x, y 的 $n-1$ 次齐次多项式.

在条件2)中，令 $a=b=x$ 和 $c=2y$，则可得到

$$p(x+x,2y)+p(x+2y,x)+p(2y+x,x)=0,$$

即 $$p(2x,2y)=-2p(x+2y,x).$$

并由齐次性，可得：

$$2^n p(x,y)=-2p(x+2y,x),$$

$$2^{n-1}p(x,y)=-p(x+2y,x). \tag{2}$$

将(1)式代入(2)中，得

$$2^{n-1}(x-2y)Q_{n-1}(x,y)$$

$$=-[(x+2y)-2x]Q_{n-1}(x+2y,x)$$

即 $$2^{n-1}(x-2y)Q_{n-1}(x,y)=(x-2y)Q_{n-1}(x+2y,x),$$

从而有 $$2^{n-1}Q_{n-1}(x,y)=Q_{n-1}(x+2y,x). \tag{3}$$

将条件3)代入(1)式，得：

$$p(1,0)=(1-2\cdot 0)Q_{n-1}(1,0),$$

$$Q_{n-1}(1, 0)=1. \tag{4}$$

将 $x=1$ 和 $y=0$ 代入(3)，得

$$2^{n-1}Q_{n-1}(1, 0)=Q_{n-1}(1+2\cdot 0, 1)$$

从而有 $$Q_{n-1}(1, 1)=2^{n-1}. \tag{5}$$

再将 $x=1$，$y=1$ 代入(3)，得

$$2^{n-1}Q_{n-1}(1, 1)=Q_{n-1}(1+2\cdot 1, 1),$$

从而有 $$Q_{n-1}(3, 1)=2^{n-1}\cdot 2^{n-1}=4^{n-1}. \tag{6}$$

继续使用上述的方法，可以得到

$$Q_{n-1}(5,3)=8^{n-1}\quad（以 x=3,\ y=1 代入）；$$
$$Q_{n-1}(11,5)=16^{n-1}\quad（以 x=5,\ y=3 代入）；$$
$$Q_{n-1}(21,11)=32^{n-1}\quad（以 x=11,\ y=5 代入）；$$
…………

现在我们回过头来再考察(3) 式的特点：

它的左端恒有因子 2^{n-1}，而它的右端变数之和总是构成 $2x+2y$. 因此存在无限多个数对（x，y），使得下式成立：

$$(x+y)^{n-1}=Q_{n-1}(x,\ y). \tag{7}$$

因为这里 $Q_{n-1}(x,\ y)$ 是关于 x，y 的多项式，所以关系式 (7) 是恒等式. 因此，以(7)式代入(1)式，则得

$$p(x,y)=(x-2y)(x+y)^{n-1}. \tag{8}$$

容易验证，等式(8) 满足问题提出的全部条件.

【附注】 本题的解法用到多项式一般理论，超出了我国现行中学数学大纲的范围. 但实际上也仅仅用到余式定理，即：

若 $x=a$ 时 $f(a)=0$，则 $x-a$ 是多项式 $f(x)$ 的一个因式：

但它的表达式比较抽象，初学者看起来可能难于理解. 为此，作几点具体的补充说明：

1. 条件 1)是指形如

$$p(x,y)=a_0x^n+a_1x^{n-1}y+a_2x^{n-2}y^2+\cdots+a_ny^n.$$

的多项式. 因此，当以 tx 代 x，ty 代 y 后，显然有

$$\begin{aligned}p(tx,ty)&=a_0(tx)^n+a_1(tx)^{n-1}(ty)+\cdots+a_n(ty)^n\\&=t^n(a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\cdots+a_ny^n)\\&=t^np(x,y).\end{aligned}$$

2．条件 2) 看来很宽．由于它对于一切实数 a，b，c 成立，则在特定条件下也必然成立．题中正好利用某些特定条件来决定多项式的形式．这里，通过余式定理，验证 $p(x,y)$ 含有因式 $(x+y)(x-2y)$ 是不难的，关键在于确定它是否含有其他因式，解法一、二分别用不同的方法解决了这一难点．这种解题技巧是值得注意的．

第十八届国际中学生数学竞赛试题分析与解答

1976 年在奥地利举行

第　一　题 (捷克斯洛伐克命题)

在一个面积为 32 cm^2 的平面凸四边形中，一条对角线与两条对边之和为 16 cm. 试确定另一条对角线所有可能取的长度.

【分析】 假如 $\overline{BA}+\overline{AC}+\overline{CD}=16$，欲求面积为 $32cm^2$ 的四边形 $ABCD$ 的对角线 $\overline{BD}$ (图 18—1)，必须先求出与 $\overline{BD}$ 有关的三角形的某些边和角. 为此，设 $\overline{BA}=b$，$\overline{AC}=a$，$\overline{CD}=c$，则立即可得

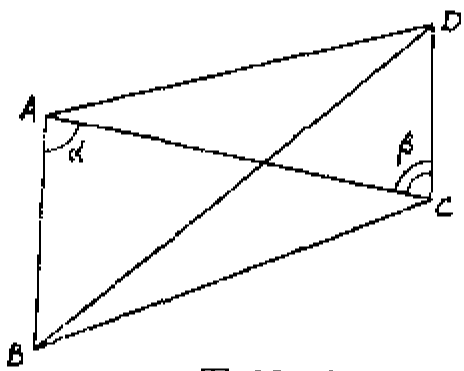


图 18—1

$$a+b+c=16.$$

此外，又可根据已知的面积得出另一个关系式. 四边形 $ABCD$ 被两条对角线分割为许多三角形， 利用什么样的三角形计算四边形的面积合适呢？这里，以利用

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\alpha、\quad S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}ac\sin\beta$$

为好. 于是，得

$$S_{\triangle ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}$$
$$=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}ac\sin\beta=32.$$

这样，就使已知的面积"32"与"a、b、c"发生了关系．根据这些关系式，通过分析比较，先定出有关的边和角，最后即可求出 $\overline{BD}$．

【解法一】 设题中平面凸四边形为 $ABCD$，所求对角线是 $\overline{BD}$．令 $\overline{BA}=b$，$\overline{AC}=a$，$\overline{CD}=c$；$\angle BAC=\alpha$，$\angle ACD=\beta$（图18—2），则得：

$$a+b+c=16; \tag{1}$$

$$S_{\triangle ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD},$$

$$32=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}ac\sin\beta,$$

$$64=a(b\sin\alpha+c\sin\beta). \tag{2}$$

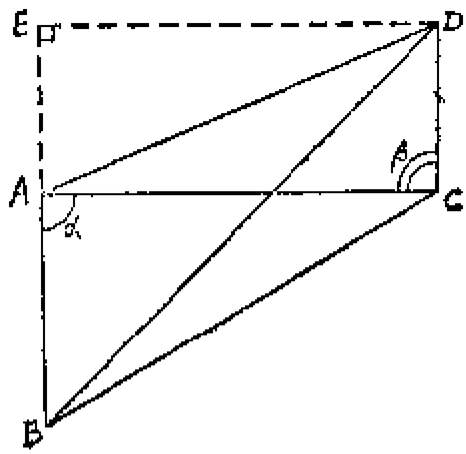


图 18—2

因为 $0<\sin\alpha\leqslant 1$，$0<\sin\beta\leqslant 1$，故由(2)得

$$64\leqslant a(b+c). \tag{3}$$

由(1)得 $b+c=16-a$，代入(3)得：

$$64\leqslant a(16-a),$$

$$a^2-16a+64\leqslant 0,$$

$$(a-8)^2\leqslant 0. \tag{4}$$

但因 $(a-8)^2$ 不能为负，故(4)只能取等号，即(3)只能取等号．据此必有：

$$a=8,\ b+c=8;$$

$\sin\alpha=\sin\beta=1$，$\alpha=\beta=90°$.

为求$\overline{BD}$，延长BA至E，使$\overline{AE}=\overline{CD}$，在$Rt\triangle BDE$中：

$$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BE}^2-\overline{ED}^2}=\sqrt{(\overline{AB}+\overline{AE})^2+\overline{AC}^2}$$
$$=\sqrt{(b+c)^2-a^2}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}\ (cm).$$

【解法二】 用解析法求另一条对角线BD. 为方便计，我们取对角线AC所在直线为x轴，过B（过D亦可）垂直于AC的直线为y轴，建立平面直角坐标系，如图18—3所示.

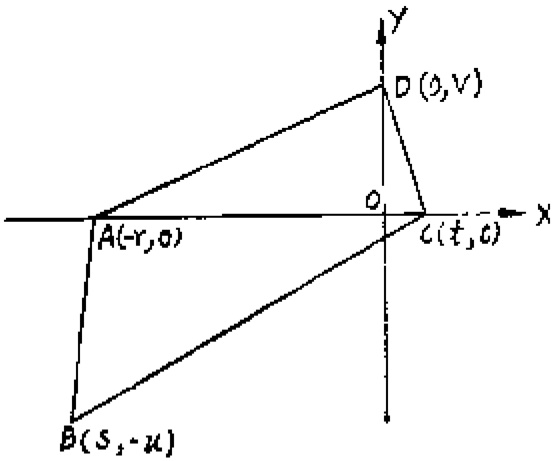


图 18—3

设四边形$ABCD$诸顶点坐标依次为：

$A(-r,\ 0)$，$B(s,\ -u)$，$c(t,\ 0)$，$D(0,\ v)$，其中r，u，t，v皆为非负实数，S为实数. 则由题意得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}(r+t)u+\dfrac{1}{2}(r+t)v=32,\\ \sqrt{(r+s)^2+u^2}+\sqrt{t^2+v^2}+(r+t)=16.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}(r+t)(u+v)=64, & (5)\\ \sqrt{(r+s)^2+u^2}+\sqrt{t^2+v^2}=16-(r+t). & (6)\end{cases}$$

又易知
$$\sqrt{(r+s)^2+u^2}\geqslant u, \quad (7)$$
$$\sqrt{t^2+v^2}\geqslant v. \quad (8)$$

(1)+(8)，并代入(6)得

$$u+v\leqslant 16-(r+t). \tag{9}$$

(9)代入(5)，得：

$$(r+t)[16-(r+t)]\geqslant 64,$$

$$[(r+t)-8]^2\leqslant 0. \tag{10}$$

由于任何实数的平方都是非负数，故(10)只能取等号，因而(7)与(8)也都只能取等号．这样就有

$$\begin{cases} r+t-8=0, \\ r+s=0, \\ t=0. \end{cases}$$

解之得　　　$r=8,\ s=-8,\ t=0.$

将r与t的值代入(5)，得

$$u+v=8.$$

所以另一条对角线的长度为：

$$|BD|=\sqrt{s^2+(u+v)^2}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}\ (cm).$$

【附注】 1．解本题的关键之一，是根据题意列出不等式，至于怎样列出，则是各种各样的．比如解法一的(3)与解法二的(9)等．又如，还可根据若干个正数的几何平均数与算术平均数之间的关系，得到不等式：

$$\overline{AC}\cdot(\overline{AB}+\overline{CD})\leqslant\left(\frac{\overline{AC}+\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\right)^2.$$

2．对于所得到的带有等号的不等式，在题设条件

$$\begin{cases} S_{\triangle ABCD}=32; \\ \overline{AC}+\overline{AB}+\overline{CD}=16 \end{cases}$$

的限制下，都将转化为"等式"这一唯一的情况，从而求出另一条对角线唯一可能取的长度．

然而，这里的"转化"，不论采取上述的何种解法，都要

进行配方，利用"实数的通性"(即任意实数的偶次幂都是非负的实数)方能得以实现．对此，应予充分重视．

第 二 题（芬兰命题）

设 $P_1(x)=x^2-2$，$P_i(x)=P_1[P_{i-1}(x)]$，这里 $i=2, 3, \cdots$．试证，对任意自然数 n，方程 $P_n(x)=x$ 的根全是相异实数．

【分析】 易由

$$P_2(x)=P_1[P_1(x)]=P_1^2(x)-2=(x^2-2)^2-2$$
$$=x^4-4x^2+2,$$
$$P_3(x)=P_1[P_2(x)]=P_2^2(x)-2$$
$$=(x^4-4x^2+2)^2-2=\cdots\cdots$$

等推知，$P_n(x)=x$ 是关于 x 的 2^n 次方程，根据代数基本定理，其实根个数不大于 2^n．

要证明这么多的实根全是相异的，如能事先估计或确定实根所在的范围，则对求出方程的相异实根，无疑是有好处的．

当 $n=1$ 时，我们有：

$$x^2-2=x,\quad x^2-x-2=0,\quad (x+1)(x-2)=0.$$

方程有二相异实根 -1 与 2，其绝对值都不超过 2．由此推测"对任意自然数 n，方程 $P_n(x)=x$的实根 $x\in[-2, 2]$"．因为这是一个关于自然数的命题，可考虑用数学归纳法证明．

然后，作变量代换，此时可令满足方程的实数值

$$x=2\cos t;$$

再利用三角知识来证本题．

〈证明〉 首先证明方程

$$P_n(x)=x \tag{1}$$

的实根的绝对值不大于2，即证命题：

对 $|x|>2$ 的一切实数 x，都有 $P_n(x)\neq x$ 成立．

因为 $|x|>2$，故可令

$$|x|=2+\alpha \quad (\alpha>0).$$

当 $n=1$ 时，

$$P_1(x)=x^2-2=(2+\alpha)^2-2=2+4\alpha+\alpha^2$$
$$>2+\alpha=|x|\geqslant x,$$

有结论 $P_1(x)>|x|(\geqslant x)$，即 $P_1(x)\neq x$ 成立．

设当 $n=k$ 时，$P_k(x)>|x|$ 成立，则可设

$$P_k(x)=|x|+\beta \quad (\beta>0);$$

于是，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}P_{k+1}(x)&=P_1[P_k(x)]=P_k^2(x)-2=(|x|+\beta)^2-2\\&=|x|^2+2\beta|x|+\beta^2-2\\&>|x|^2-2>|x|^2-|x| \quad (|x|>2)\\&=|x|(|x|-1)>|x| \quad (|x|-1>1)\\&\geqslant x.\end{aligned}$$

有结论 $P_{k+1}(x)>|x|(\geqslant x)$，即 $P_{k+1}(x)\neq x$ 成立．

"对任意自然数 n，方程 $P_n(x)=x$ 的实根 $x\in[-2,2]$"正确性的证明至此结束．

因 $|\cos t|\leqslant 1$，故可设

$$x=2\cos t\,(\pi\geqslant t\geqslant 0).$$

于是
$$P_1(x)=(2\cos t)^2-2=2\cos 2t,$$
$$P_2(x)=(2\cos 2t)^2-2=2\cos 2^2t,$$
…………

根据题设的递推公式，再用数学归纳法易证：

$$P_n(x)=2\cos 2^n t.$$

这样，(1)变形为：

$$2\cos 2^n t=2\cos t,$$

$$\cos 2^n t=\cos t. \tag{2}$$

解三角方程(2)，得：

$$2^n t_l=2l\pi+t_l,\quad t_l=\frac{2l\pi}{2^n-1};$$

$$2^n t_m=2m\pi-t_m,\quad t_m=\frac{2m\pi}{2^n+1}$$

(这里 l、m 皆为整数)．考虑到 $\pi\geqslant t\geqslant 0$，故得(1)的两组共 2^n 个实根：

$$x_1=\cos\frac{2l\pi}{2^n-1}\ (l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2^{n-1}-1); \tag{3}$$

$$x_2=\cos\frac{2m\pi}{2^n+1}\ (m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^{n-1}). \tag{4}$$

剩下来的问题就是：证明(3)、(4)所表示的 2^n 个实根彼此相异.

第一，因 $t_0<t_1<\cdots<t_{2^{n-1}-1}$，且在 $[0,\pi]$ 内余弦函数严格递减，故(3)中 2^{n-1} 个实值间彼此相异；同理，(4)中 2^{n-1} 个实值间也彼此相异.

第二，假定在(3)与(4)之间不是彼此相异，则必有整数 l_0 和 m_0 分别满足：

$$0\leqslant l_0\leqslant 2^{n-1}-1 \text{ 和 } 1\leqslant m_0\leqslant 2^{n-1},$$

使
$$\frac{2l_0\pi}{2^n-1}=\frac{2m_0\pi}{2^n+1}$$

于是
$$m_0=\frac{2^n+1}{2^n-1}l_0=l_0+\frac{2l_0}{2^n-1}. \tag{5}$$

因 2^n-1 为奇数，故 $(2,\ 2^n-1)=1$. 又考虑到 l_0、n_0 都是正整数，从而由(5)知：

$$2^n-1\mid l_0. \tag{6}$$

但 $l_0\leqslant 2^{n-1}-1<2^n-1$，与(6)矛盾. 所以(3)与(4)之间的实数值必然也是彼此相异的.

总之，(1) 是关于 x 的 2^n 次代数方程， 只有 2^n 个根，如(3)、(4)所示；并且它们都是彼此相异的实根.

【附注】 1. 如果开始就令 $x=2\cos t$，虽然在题设的递推公式下，由数学归纳法易知

$$P_n(x)=2\cos 2^n t,$$

从而直接证明本题. 但这样作变量代换显得突然，不如先证方程的任意实根的绝对值不超过 2 为好.

2. 借助三角知识解决某些代数问题，不论是代数式的化简变形，等式的证明，或方程的求解等方面，都不乏其例. 变量的变化范围与 $[-1,\ 1]$ 有关，用正、余弦代换；与 $(-\infty,\ +\infty)$ 有关，用正、余切代换；与 $(-\infty,\ -1]$、$[1,\ +\infty)$ 有关，用正、余割代换.

本题为什么不用正弦代换？因为考虑到题给递推式的特点，用余弦作代换，能方便地连续施用余弦二倍角公式.

第 三 题 (荷兰命题)

设有一个能被单位立方体所填满的长方箱子. 如果用体积为 2 个单位的立方体尽可能地放入箱内，使小立方体的棱平行于箱边，所能放入立方体的体积恰好占箱子的容积的 40%，试求这种箱子的容积($\sqrt[3]{2}=1.2599\cdots$).

【分析】 要求箱子的容积，只需求箱子的三度即可. 设

三度分别为 x_1、x_2、x_3，则因箱子能被单位立方体所填满，故三度均为整数．又因体积为 2 的立方体的棱长等于$\sqrt[3]{2}$，故用长为$\sqrt[3]{2}$的线段去度量 x_i，只能量$\left[\dfrac{x_i}{\sqrt[3]{2}}\right]$次，剩下的就比$\sqrt[3]{2}$小(图 18.4)．现令

$$a_i=\left[\frac{x_i}{\sqrt[3]{2}}\right](i=1,\ 2,\ 3),$$

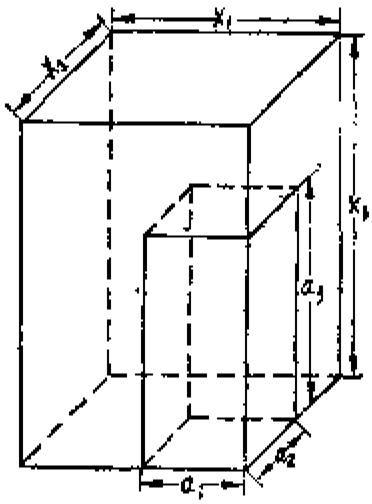


图 18—4

记号$[x]$表示不大于非负数 x 的最大整数，则由题设条件得关系式

$$2\,a_1a_2a_3=x_1x_2x_3\cdot\frac{40}{100}.$$

根据上述关系，通过对各种情况的讨论，即能逐步求出三度．在讨论时，从 x_1、x_2、x_3中最小者开始较为简便．

〈解法一〉 设箱子的三度分别为正整数 x_1、x_2、x_3，且 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3$．又令

$$a_i=\left[\frac{x_i}{\sqrt[3]{2}}\right](i=1,\ 2,\ 3), \tag{1}$$

则由题设条件，得

$$2\,a_1a_2a_3=x_1x_2x_3\cdot\frac{40}{100},$$

$$\frac{a_1a_2a_3}{x_1x_2x_3}=\frac{1}{5}. \tag{2}$$

由 (1) 知 $a_i>x_i-2$，因此，

$$\frac{a_i}{x_i}>\frac{x_i-2}{x_i}=1-\frac{2}{x_i}(i=1,\ 2,\ 3). \tag{3}$$

第一步，先求 x_1. 当 $x_1\geqslant 5$ 时，由(3)得

$$\frac{a_1}{x_1}>1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}.$$

若 $x_1=4$，则由(1)得 $a_1=3$，此时 $\frac{a_1}{x_1}=\frac{3}{4}>\frac{3}{5}$；

若 $x_1=3$，则由(1)得 $a_1=2$，此时 $\frac{a_1}{x_1}=\frac{2}{3}>\frac{3}{5}$.

总之，只要 $x_1\geqslant 3$，就有 $\frac{a_1}{x_1}>\frac{3}{5}$，因而 $\frac{a_2}{x_2}$ 和 $\frac{a_3}{x_3}$ 均大于 $\frac{3}{5}$. 于是

$$\frac{a_1a_2a_3}{x_1x_2x_3}=\frac{a_1}{x_1}\cdot\frac{a_2}{x_2}\cdot\frac{a_3}{x_3}>\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}>\frac{25}{125}=\frac{1}{5},$$

与(2)矛盾，故必须 $x_1<3$. 但显然 $x_1\neq 1$，所以 $x_1=2$，此时由(1)知 $a_1=1$.

第二步，再求 x_2. 同理，当 $x_2\geqslant 6$ 时，有

$$\frac{a_2}{x_2}>1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3},$$

因而 $\frac{a_3}{x_3}$ 也大于 $\frac{2}{3}$. 于是

$$\frac{a_1a_2a_3}{x_1x_2x_3}>\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{18}>\frac{4}{20}=\frac{1}{5},$$

与(2)矛盾，故必须 $x_2<6$，即 x_2 有为 2、3、4、6 四种可能：

i) 若 $x_2=2$，则 $a_2=\left[\frac{x_2}{\sqrt[3]{2}}\right]=1$. 又由(2)知：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a_3}{x_3}=\frac{1}{5},\quad a_3=\frac{4x_3}{5},$$

即 x_3 为 5 的倍数. 现设 $x_3=5k$（k 为自然数）；

当 $k=1$，则 $x_3=5$，$a_3=\frac{4x_3}{5}=4$. 这与由(1)所得

$$a_3=\left[\frac{x_3}{\sqrt[3]{2}}\right]=\left[\frac{5}{\sqrt[3]{2}}\right]=[3.97]=3$$

矛盾；

当 $k\geqslant 2$，则

$$a_3=\frac{4x_3}{5}=4k=5k-k=x_3-k\leqslant x_3-2.$$

这也与由(1)所得 $a_3>x_3-2$ 矛盾.

总之，在这种情况下，满足题意的答案是不存在的.

ii) 若 $x_2=3$，则 $a_2=\left[\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right]=2$，又由(2)知

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{a_3}{x_3}=\frac{1}{5},\quad a_3=\frac{3x_3}{5},$$

即 x_3 为 5 的倍数. 现设 $x_3=5k$(k 为自然数)：

当 $k=1$，则 $x_3=5$，$a_3=3$. 易知，这正好满足题目的要求.

当 $k\geqslant 2$，则

$$a_3=\frac{3x_3}{5}=3k=5k-2k=x_3-2k\leqslant x_3-4.$$

这同样与由(1)所得 $a_3>x_3-2>x_3-4$ 矛盾.

可见，在这种情况下，有且仅有满足题意的答案为：

$$x_1=2,\quad x_2=3,\quad x_3=5.$$

iii) 若 $x_2=4$，则 $a_2=\left[\frac{x_2}{\sqrt[3]{2}}\right]=3$. 又由(2)知：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{a_3}{x_3}=\frac{1}{5},\quad a_3=\frac{8x_3}{15}.$$

于是可令 $x_3=15k$(k 为自然数)：

当 $k=1$，则 $x_3=15$，$a_3=8$，这与由(1)所得

$$a_3=\left[\frac{x_3}{\sqrt[3]{2}}\right]=\left[\frac{15}{\sqrt[3]{2}}\right]=[11.91]=11$$

矛盾；

当 $k\geqslant 2$，则

$$a_3=\frac{8x_3}{15}=8k=15k-7k=x_3-7k\leqslant x_3-14.$$

这与由(1)所得 $a_3>x_3-2>x_3-14$ 矛盾.

总之，在这种情况下，满足题意的答案是不存在的.

iv）若 $x_2=5$，则 $a_2=\left[\frac{x_2}{\sqrt[3]{2}}\right]=3$. 又由(2)知：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{a_3}{x_3}=\frac{1}{5},\quad a_3=\frac{2x_3}{3}.$$

于是可令 $x_3=3k$（k 为自然数）：

当 $k=1$，则 $x_3=3$，$a_3=2$，这已在 ii）中讨论过；

当 $k=2$，则 $x_3=6$，$a_3=4$. 易知，这正好满足题目的要求；

当 $k\geqslant 3$，则

$$a_3=\frac{2x_3}{3}=2k=3k-k=x_3-k\leqslant x_3-3.$$

这与由(1)所得 $a_3>x_3-2>x_3-3$ 矛盾.

综上所述，符合题目要求的箱子的容积是：

$$2\times 3\times 5=30\text{ 或 }2\times 5\times 6=60\text{（体积单位）}.$$

〈解法二〉 设整数 x_1、x_2、x_3 分别表示箱子的三度，并且

$$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3.$$

易知体积为 2 的立方体的棱长为

$$\sqrt[3]{2}=1.2599\cdots>1,$$

因而最小的一度 $x_1\geqslant 2$，且在箱内共可放入

$$\left[\frac{x_1}{\sqrt[3]{2}}\right]\cdot\left[\frac{x_2}{\sqrt[3]{2}}\right]\cdot\left[\frac{x_3}{\sqrt[3]{2}}\right]$$

个体积为 2 的立方体. 由题设条件得:

$$2\left[\frac{x_1}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{x_2}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{x_3}{\sqrt[3]{2}}\right]=x_1x_2x_3\cdot\frac{40}{100},$$

$$\frac{x_1}{\left[\frac{x_1}{\sqrt[3]{2}}\right]}\cdot\frac{x_2}{\left[\frac{x_2}{\sqrt[3]{2}}\right]}\cdot\frac{x_3}{\left[\frac{x_3}{\sqrt[3]{2}}\right]}=5. \qquad (4)$$

为求满足 (4) 的自然数 $x_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$，列出大于 1 的自然数 n 的函数

$$\varphi(n)=n\Big/\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right] \qquad (5)$$

的有关对应值表:

$n=$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
$\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\approx$	1.58	2.38	3.17	3.97	4.76	5.56	6.35	7.14	7.93	8.73	…
$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]=$	1	2	3	3	4	5	6	7	7	8	…
$\varphi(n)=$	2	3/2	4/3	5/3	3/2	7/5	4/3	9/7	10/7	11/8	…

由表知，当 $n\geqslant 7$ 时，$\varphi(n)<\frac{3}{2}$，另一方面，由

$$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]>\frac{n}{\sqrt[3]{2}}-1$$

可以推得:

$$\sqrt[3]{2}\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]>n-\sqrt[3]{2},$$

$$\sqrt[3]{2}>n\Big/\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]-\sqrt[3]{2}\Big/\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right],$$

$$\varphi(n)=n\Big/\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]<\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}\Big/\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]$$

$$=\sqrt[3]{2}\left(1+1\Big/\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]\right).$$

故当 $n\geqslant 8$ 时，$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]\geqslant 6$，因而

$$\varphi(n)<1.26\left(1+\frac{1}{6}\right)=1.46\dot{9}<1.5=\frac{3}{2}.$$

综上所述可知，$\varphi(2)=2$ 是函数的最大值，$\varphi(5)=\frac{5}{3}$ 是次大值；其余的值均不超过 $\frac{3}{2}$.

这样，首先可以确定箱子三度中最小者为 $x_1=2$. 不然的话，若 $x_1>2$，则更有 $x_2>2$，$x_3>2$. 于是，

$$\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\leqslant\left(\frac{5}{3}\right)^3=\frac{125}{27}<5,$$

与(4)矛盾.

由于 $x_1=2$，因而 $\varphi(x_1)=2$，故 $\varphi(x_2)\varphi(x_3)=\frac{5}{2}$. 因此 $\varphi(x_2)$ 与 $\varphi(x_3)$ 中至少有一个大于 $\frac{3}{2}$，这不外乎以下两种可能：

i) $\varphi(x_2)=2$，$\varphi(x_3)=\frac{5}{4}$；

ii) $\varphi(x_2)=\frac{5}{3}$，$\varphi(x_3)=\frac{3}{2}$ （或 $\varphi(x_2)=\frac{3}{2}$，$\varphi(x_3)=\frac{5}{3}$）.

但因 $\varphi(n)>n\Big/\frac{n}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{2}>1.25=\frac{5}{4}$，故 i) 不可

能发生；由 ii），并结合(5)的有关对应值表得：

$$x_2=5\,(\text{或 }3),\quad x_3=6\,(\text{或 }5).$$

所以这种箱子的容积是：

$$2\times5\times6=60\text{ 或 }2\times3\times5=30\text{(体积单位)}.$$

这与解法一所得结果一致.

〈解法三〉 由 $a_i=\left[\dfrac{x_i}{\sqrt[3]{2}}\right]$ $(i=1,\ 2,\ 3)$可得：

$$\sqrt[3]{2}\,a_1<x_1<\sqrt[3]{2}\,(a_1+1); \tag{6}$$

$$\sqrt[3]{2}\,a_2<x_2<\sqrt[3]{2}\,(a_2+1); \tag{7}$$

$$\sqrt[3]{2}\,a_3<x_3<\sqrt[3]{2}\,(a_3+1). \tag{8}$$

(6) × (7) × (8)，得

$$2\,a_1a_2a_3<x_1x_2x_3<2\,(a_1+1)\,(a_2+1)\,(a_3+1),$$

因此，放入体积为 2 的小立方体的体积和 V_a，与箱子体积 V_x 之比为：

$$\frac{2}{5}=\frac{40}{100}=\frac{V_a}{V_x}=\frac{2\,a_1a_2a_3}{x_1x_2x_3}$$

$$>\frac{2\,a_1a_2a_3}{2\,(a_1+1)\,(a_2+1)\,(a_3+1)}$$

$$=\frac{a_1}{a_1+1}\cdot\frac{a_2}{a_2+1}\cdot\frac{a_3}{a_3+1}.$$

又因数列$\left\{\dfrac{a_i}{a_i+1}\right\}$不减，故有

$$\frac{2}{5}=\frac{V_a}{V_x}>\frac{a_1}{a_1+1}\cdot\frac{a_1}{a_1+1}\cdot\frac{a_1}{a_1+1}=\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^3.$$

取 $a_1=2$，有$\left(\dfrac{a_1}{a_1+1}\right)^3=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}<\dfrac{40}{100}$；

取 $a_1=3$，有$\left(\dfrac{a_1}{a_1+1}\right)^3=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}>\dfrac{40}{100}$.

由于$\left\{\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^3\right\}$不减，所以$a_1$只能取1或2。

第一种情况：

当$a_1=1$，由(6)知$x_1=2$，故有

$$\frac{2}{5}=\frac{a_2a_3}{x_2x_3}>\frac{a_2a_3}{\sqrt[3]{2}(a_2+1)\cdot\sqrt[3]{2}(a_3+1)}$$

$$>\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(\frac{a_2}{a_2+1}\right)^2. \tag{9}$$

这里，仅当$a_2\leqslant 3$时(9)成立。

i) 若$a_2=1$，则由(7)知$x_2=2$，故有：

$$\frac{2}{5}=\frac{a_3}{2x_3},\quad x_3=\frac{5}{4}a_3=1.25a_3<\sqrt[3]{2}a_3,$$

与(8)矛盾。

ii) 若$a_2=2$，则由(7)知$x_2=3$，故有：

$$\frac{2}{5}=\frac{2a_3}{3x_3},\quad x_3=\frac{5}{3}a_3.$$

因而由(8)得：

$$\frac{5}{3}a_3-\sqrt[3]{2}a_3<\sqrt[3]{2},$$

$$a_3<\frac{\sqrt[3]{2}}{\frac{5}{3}-\sqrt[3]{2}}\approx 3.09,$$

即a_3可取2或3． 考虑到x_3为整数， 故取$a_2=3$， 从而$x_3=5$。此时得到箱子的容积为：

$$x_1x_2x_3=2\times3\times5=30\text{(体积单位)}.$$

iii) 若$a_2=3$，则由(7)知$x_2=4$或5。

对应于$a_2=3$、$x_2=4$，有$x_3=\frac{15}{8}a_3$，由(8)得：

$$\frac{15}{8}a_3-\sqrt[3]{2}a_3<\sqrt[3]{2},$$

$$a_3<\frac{\sqrt[3]{2}}{\frac{15}{8}-\sqrt[3]{2}}\approx 2.05<3=a_2.$$

这与 $a_2\leqslant a_3$ 矛盾；

对应于 $a_2=3$、$x_2=5$，有 $x_3=\frac{3}{2}a_3$. 由(8)得：

$$\frac{3}{2}a_3-\sqrt[3]{2}a_3<\sqrt[3]{2},$$

$$a_3<\frac{\sqrt[3]{2}}{1.5-\sqrt[3]{2}}\approx 5.25,$$

即 a_3 可取 3、4 或 5. 考虑到 x_3 为整数，故取 $a_3=4$，从而 $x_3=6$. 此时得到箱子的容积为：

$$x_1x_2x_3=2\times5\times6=60\text{(体积单位)}.$$

第二种情况：

当 $a_1=2$，由(6)知 $x_1=3$， 故有 $\frac{2}{5}=\frac{4a_2a_3}{3x_2x_3}$，即

$$\frac{3}{10}=\frac{a_2a_3}{x_2x_3}>\frac{a_2a_3}{\sqrt[3]{4}(a_2+1)(a_3+1)}$$

$$>\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(\frac{a_2}{a_2+1}\right)^2. \tag{10}$$

这里，仅当 $a_2\leqslant2$ 时(10)成立. 但已有 $a_1=2$，所以 a_2 不能取 1，只能取 2.

对于 $a_2=2$. 由(7)得 $x_2=3$. 此时

$$\frac{9}{20}=\frac{a_3}{x_3}>\frac{a_3}{\sqrt[3]{2}(a_3+1)},$$

解出 $a_3<\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\frac{20}{9}-\sqrt[3]{2}}\approx1.31$，即 $a_3=1$. 这显然不可能，因

为 a_3 不应小于 $a_2=2$.

综上所述，箱子的容积为30个体积单位或60个体积单位．这与前两种解法所得的结果一致．

【附注】 1. 上面列举了三种解法，还可再列出局部或细节上有所不同的其他解法，但都有一定的计算量，而且讨论的层次多，过程长，对于本题，哪怕缺乏一点耐心，都将得不到正确的结果．

2. 未知量（x_1、x_2、x_3；a_1、a_2、a_3）虽较多，但紧扣题给条件，始终围绕 $a_i=\left[\dfrac{x_i}{\sqrt[3]{2}}\right]$ 与

$$x_1x_2x_3=5\,a_1a_2a_3,$$

按先小后大的顺序进行讨论，也能逐步排除不可能的取值，最后求出确定的答案．

3. 对于非负数 x，根据 $[x]$ 的规定意义，即知

$$x-1<[x]\leqslant x$$

成立．利用这个关系式，可以去掉符号“[ ]”，便于对有关的式子进行计算或化简变形．

第 四 题（美国命题）

若干个正数之和为1976，试求它们乘积的最大值．

【分析】 因为和为1976的正整数组总是存在的，并且只有有限多组，故所求的最大乘积也必然存在．若通过逐一试算，以求最大积，则计算量大，因而是不可取的．

但是，我们可先进行少量的计算，初步摸出一些规律，然后据此求最大积，则可收事半功倍之效．比如：

$$1+1975=1976,\quad 1\times1975=1975;$$

$2+1974=1976$, $2\times1974=3948$;

$1+2+1973=1976$, $1\times2\times1973=3946$;

$2+3+1971=1976$, $2\times3\times1971=11826$;

$5+1971=1976$, $5\times1971=9855$;

$1+5+1970=1976$, $1\times5\times1970=9850$;

……………………

易知在所列出的积中、第四个“最大”、初步观察不难发现，加数的个数要相对地多一些，各个加数要相对地小一点，并且：

i）凡加数中有1的，不能达到最大值（因为1与任何数之积等于该数本身）；

ii）非最大的加数若大于4，则积相对地要小些.

因此，在求最大值之前，若首先证明上述规律的正确性，则可断定非最大的加数的值只能在2、3、4三个数中选取.这样，就能很快地求出符合条件的最大积.

〈解法一〉 设 $x_i(i=1, 2, \cdots, n\leqslant1976)$ 为正整数，且和

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=1976, \tag{1}$$

则最大的乘积 $\prod_{i=1}^{n} x_i$ 中：

i）任意的非最大的 $x_i\neq1$. 否则，不妨设 $x_1=1$，并将1与另一任意加数，比如 x_2 合并，以 $1+x_2$ 取代1与 x_2 这两个数，易知(1)不变，和仍为1976；而积中因子“$1\cdot x_2$”代之以“$1+x_2$”，显然

$$1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n<(1+x_2)\cdot x_3\cdots x_n.$$

即积增大.

ii）任意的非最大的 $x_i \leqslant 4$. 否则，不妨设 $x_1 > 4$，此时可令

$$x_1 = 2 + \alpha \ (\alpha > 2),$$

易知(1)不变，和仍为 1976；而积中因子 x_1，以

$$2 \cdot \alpha = 2(x_1 - 2) = 2x_1 - 4 = x_1 + (x_1 - 4) > x_1$$

代替，显然

$$(2 + \alpha) x_2 \cdot x_3 \cdots x_n < 2 \cdot \alpha \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n,$$

即积增大.

由 i）、ii）可知，最大积中的因子 x_2 只能在 2 、3 、4 中选取. 但

$$4 = 2 + 2 = 2 \times 2,$$

故"4"可看作两个"2"，因而 x_i 只能在 2 与 3 中选取. 这就是说，最大积为 $2^m \cdot 3^n$ 的形式，其中自然数 m、n 满足条件

$$2m + 3n = 1976. \tag{2}$$

因为三个 2 可用二个 3 代替，和不变，但积

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3 = 9$$

增大，所以 2 的个数 $m = 1$ 或 2 .

但由(2)知 $m \neq 2$，否则 $n = \dfrac{1972}{3} = 657.\dot{3}$ 不是整数. 因而只能是 $m = 1$，此时

$$n = \frac{1976 - 2}{3} = 658,$$

故所求最大的乘积为 2×3^{658}.

〈解法二〉 在确定非最大的任意的 $x_i \leqslant 4$ 时，也可采用下述的反证，其余部分同解法一.

假定 $x_i \nleqslant 4$，则至少存在一个自然数 i，使 $x_i > 4$．对此不等式作如下变形，依次得到：

$$x_i \geqslant 5,\quad x_i > 4.5,\quad 2x_i > 9,\quad 3x_i - 9 > x_i,$$
$$x_i < 3(x_i - 3).$$

这表明，当把 x_i 换成 3 与 $x_i - 3$ 时，和不变，但乘积增大，与 $\prod_{i=1}^{n} x_i$ 为最大的乘积矛盾，因而必有非最大的 $x_i \leqslant 4$.

【附注】 1. 本题将竞赛年号有意地编入，具有一定的趣味．因为和为 1976 的加数是多少个并不知道，且各个加数均为正整数，所以不便直接根据"若干个正数之和一定，当各正数相等时，其积最大"这一定理求最大的乘积．否则，解题过程将很繁长，还要涉及到其它一些知识．

2. 解本题的关键之一，在于证明 (1) 中的各非最大的自然数加数 x_i 满足条件

$$2 \leqslant x_i \leqslant 4.$$

上述的两种解法都说明了这点．

3. 在得知最大积的形式为 $2^m \cdot 3^n$ 后（m、n 均不为零，否则因子中将出现"1"），要根据 (2) 说明只有 $m=1$，对此，还可根据

$$1976 \equiv 2 \pmod 3$$

推知 $m=1$，从而 $n=658$.

第　五　题（荷兰命题）

考察 q 个未知量的 p 个方程（$q=2p$）：

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = 0,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = 0,$$

………………………

$$a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\cdots+a_{pq}x_q=0,$$

其中 $a_{ij}\in\{-1, 0, 1\}$， $i=1, 2, \cdots, p$； $j=1, 2, \cdots, q$．证明：这组方程存在一解$(x_1, x_2, \cdots, x_q)$满足条件

a） 所有的 $x_j(j=1, 2, \cdots, q)$都是整数；

b） 至少有一个 j，使得 $x_j\neq0$；

c） $|x_j|\leqslant q(j=1, 2, \cdots, q)$．

【分析】 在题设的线性齐次方程组中，由于未知数的个数大于方程的个数，一般说来，方程组的解不是唯一的．但题中并不要我们求出确定的解，而是要证明有满足条件 a)、b) 及 c) 的解存在，这是完全可以办到的．

根据 a) 与 c) 的要求先构造一解$(y_1, y_2, \cdots, y_q)$，并且不难确定$(y_1, y_2, \cdots, y_q)$所有可能的个数，其中 y_j 不仅为整数，且 $0\leqslant y_j\leqslant q(j=1, 2, \cdots, q)$；

再据 $a_{ij}\in\{-1, 0, 1\}$，估计出 $(b_1, b_2, \cdots, b_p)$ 的个数，其中

$$b_i=a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\cdots+a_{iq}y_q(i=1, 2, \cdots, p).$$

由 $q=2p$ 这一关系，可以推知前者个数大于由前者所对应的后者个数．这样必至少有两个前者对应一个后者．由此即可得到满足条件的适合方程组的解．

〈证法一〉 首先考察能有多少个不同的 q 元有序数组

$$(y_1, y_2, \cdots, y_q), \tag{1}$$

使得整数 y_j 适合 $0\leqslant y_j\leqslant q(j=1, 2, \cdots, q)$．

由于这样的 y_1 可取 $q+1$ 个不同的值，且对应于 y_1 的 $y_2, \cdots, y_q$ 均分别可取 $q+1$ 个不同的值，因此 (1) 有 $(q+1)^q$ 个．

其次考察能有多少个 p 元有序数组

$$(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_p), \tag{2}$$

其中 $b_i=a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\cdots+a_{iq}y_q(i=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$.

因一切系数 $a_{ij}\in\{-1,\ 0,\ 1\}$，故可设第 i 个方程的系数取 1 的个数为 r_i，则其系数取 -1 的个数应不大于 $q-r_i$，从而

$$(r_i-q)q\leqslant b_i\leqslant r_iq,$$

即 $b_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ 所能取的不同值的个数不多于

$$r_iq-(r_i-q)q+1=q^2+1.$$

由此可知，(2) 不多于 $(q^2+1)^p$ 个.

但因 $q=2p$，所以

$$(q+1)^q=(2p+1)^{2p}=(4p^2+4p+1)^p$$
$$>(4p^2+1)^p=[(2p)^2+1]^p=(q^2+1)^p.$$

这就是说，(1) 的个数大于由 (1) 所对应的 (2) 的个数. 因此，必有两个相异的 (1)，不妨设为

$$(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_q) 与 (y_1',\ y_2',\ \cdots,\ y_q'),$$

对应着同一个 (2)，比如 $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_p)$. 于是，我们有

$$a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\cdots+a_{iq}y_q=a_{i1}y_1'+a_{i2}y_2'+\cdots+a_{iq}y_q'=b_i,$$

即 $a_{i1}(y_1-y_1')+a_{i2}(y_2-y_2')+\cdots+a_{iq}(y_q-y_q')=0$

$(i=1,\ 2,\ \cdots p)$.

令 $x_j=y_j-y_j'(j=1,\ 2,\ \cdots,q)$，则 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_q)$ 显然是方程组的解. 下面，我们验证此组解满足条件 a)、b) 及 c)：

因 $(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_q)$ 与 $(y_1',\ y_2',\ \cdots,\ y_q')$ 为两相异的 q 元有序数组，故至少有一个 j，使 $y_j\neq y_j'$，即

$$y_j-y_j'\neq 0,$$

条件 b）得到满足；

又因对一切可能的 j 值，y_j 与 y_j' 不仅均为整数，且有

$$0\leqslant y_j\leqslant q \text{ 与 } 0\leqslant y_j'\leqslant q,$$

所以 y_j-y_j' 不仅均为整数，且有 $|y_j-y_j'|\leqslant q$，即条件 a）及 c）得到满足．证毕．

〈证法二〉 用 A 表方程组的系数矩阵，$\overline{0}$ 表常数项矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\cdots a_{1q}\\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2q}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{p1}a_{p2}\cdots a_{pq}\end{pmatrix},\quad \overline{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}.\quad \text{又令 } X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_q\end{pmatrix},$$

则原方程组可简写为 $AX=\overline{0}$．

易知，适合 $|x_j|\leqslant p(j=1,2,\cdots,q)$ 的不同的整数向量 X 共有 $(2p+1)^q$ 个．因 $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$，故对这样的向量 X，我们有：

$$|a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{iq}x_q|\leqslant|a_{i1}x_1|+|a_{i2}x_2|+\cdots$$
$$+|a_{iq}x_q|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_q|\leqslant pq.$$

这说明向量 AX 至多有 $(2pq+1)^p$ 个．但

$$(2p+1)^q=(2p+1)^{2p}=(4p^2+4p+1)^p$$
$$>(4p^2+1)^p=(2pq+1)^p,$$

故必有两个相异的向量 X_1 与 X_2，使 $AX_1=AX_2$，

即

$$A(X_1-X_2)=\overline{0}.$$

所以，X_1-X_2 的分量满足条件：

a）因 X_1、X_2 为整数向量，即 X_1-X_2 为整数向量，其分量亦必为整数；

b) 因 $X_1 \neq X_2$，故 $X_1 - X_2 \neq 0$，即至少有一分量不为零；

c) 因 X_1、X_2 的分量依次满足 $|x_{j_1}| \leqslant p$、$|x_{j_2}| \leqslant p$，即

$$|x_j| = |x_{j_1} - x_{j_2}| \leqslant |x_{j_1}| + |x_{j_2}| \leqslant 2p = q.$$

证毕.

【附注】 1. 本题超出了我国中学生目前所学知识的范围. 利用行列式这一工具，可以讨论方程个数与未知数个数相等的线性方程组；对于方程个数与未知数的个数不相等的线性方程组的讨论，用矩阵这一重要的数学工具较为方便. 本题的线性方程组属于后一类型，证法二就是利用向量（"n 元有序数组"就是所谓的 n 维向量）概念、矩阵知识进行推导的.

2. 关于行列式、矩阵等知识，在一般的《高等代数》、《线性代数》书中都可找到，下面所说的就是其中一个重要定理：

在齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

中，如果 $m < n$，那么它必有非零解.

本题就是这个定理的一种特殊情况.

第 六 题 （英国命题）

一个数列 $\{u_n\}$ 定义为：

$$u_0=2,\ u_1=\frac{5}{2},\ u_{n+1}=u_n(u_{n-1}^2-2)-u_1\ (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

试证：对任意自然数 n，

$$[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}.$$

这里，$[x]$表示不超过非负数 x 的最大整数.

【分析】 欲证 $[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$，若先能求出 u_n 的表达式(即 n 的函数)，然后取整，证明等于 $2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$ 即可.

为求 u_n 的表达式，可根据题给条件观察，套用 $2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$ 这一模式变形，由具体归纳成一般而得到. 因为这是一个关于非负整数的命题，故可考虑采用数学归纳法加以证明.

〈解答〉 观察这个数列的前几项，不难得到：

$$u_0=2=2^0+2^{-0}=2^{\frac{2^0-(-1)^0}{3}}+2^{-\frac{2^0-(-1)^0}{3}},$$

$$u_1=2\frac{1}{2}=2^1+2^{-1}=2^{\frac{2^1-(-1)^1}{3}}+2^{-\frac{2^1-(-1)^1}{3}},$$

$$u_2=2\frac{1}{2}=2^1+2^{-1}=2^{\frac{2^2-(-1)^2}{3}}+2^{-\frac{2^2-(-1)^2}{3}},$$

$$u_3=8\frac{1}{8}=2^3+2^{-3}=2^{\frac{2^3-(-1)^3}{3}}+2^{-\frac{2^3-(-1)^3}{3}},$$

$$u_4=32\frac{1}{32}=2^5+2^{-5}=2^{\frac{2^4-(-1)^4}{3}}+2^{-\frac{2^4-(-1)^4}{3}},$$

………………………

由此猜想：对任意的非负整数 n，都有

$$u_n=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}+2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}} \tag{1}$$

成立．下面，我们用数学归纳法证明这一命题．

为简便计，令 $f(n)=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}$． 归纳的第一步已经验明；设对 $n=k-1$ 与 $n=k$（k 为自然数），命题成立，即

$$u_{k-1}=2^{f(k-1)}+2^{-f(k-1)} \text{ 与 } u_k=2^{f(k)}+2^{-f(k)},$$

则据题设的递推公式得：

$$u_{k+1}=(2^{f(k)}+2^{-f(k)})\left[(2^{f(k-1)}+2^{-f(k-1)})^2-2\right]-2\frac{1}{2}$$

$$=2^{f(k)+2f(k-1)}+2^{-[f(k)+2f(k-1)]}+2^{2f(k-1)-f(k)}$$

$$+2^{-[2f(k-1)-f(k)]}-2\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

但因

$$f(k)+2f(k-1)=\frac{2^k-(-1)^k}{3}+2\cdot\frac{2^{k-1}-(-1)^{k-1}}{3}$$

$$=\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}=f(k+1); \qquad (3)$$

$$2f(k-1)-f(k)=2\cdot\frac{2^{k-1}-(-1)^{k-1}}{3}$$

$$-\frac{2^k-(-1)^k}{3}=(-1)^k. \qquad (4)$$

故由(4)得：

$$2^{2f(k-1)-f(k)}+2^{-[2f(k-1)-f(k)]}-2\frac{1}{2}$$

$$=2^{(-1)^k}+2^{-(-1)^k}-2\frac{1}{2}$$

$$=2^{(-1)^k}+2^{(-1)^{k+1}}-\left(2+\frac{1}{2}\right)=0; \qquad (5)$$

又将(3)、(5)代入(2)，得

$$u_{k+1}=2^{f(k+1)}+2^{-f(k+1)}.$$

这就是说，命题对 $n=k+1$ 也成立． 所以(1)对任意的非负整数 n 都成立．

又因对任意自然数 n，

$$f(n)=\frac{2^n-(-1)^n}{3}=\frac{(2+1)(2^{n-1}-2^{n-2}+\cdots)}{3}$$

为正整数，从而 $2^{-f(n)}$ 为 0 到 1 之间的正的纯小数，所以

$$[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$$

对任意自然数 n 成立.

【附注】 1. 题中并未给出数列通项公式的具体表达式(1)，不要将

$$u_{n+1}=u_n(u_{n-1}^2-2)-u_1\ (n=1,\ 2,\ \cdots) \qquad (6)$$

误认为通项公式. 这里只是告诉我们，从第三项开始，数列中的每一项与它的前面紧接着的两项之间的关系. 当知道前两项 u_0 及 u_1 后，即能由(6)依次推出数列中其余的每一项，这样的关系通常叫递推(公)式.

2. 关于本题后一部分的证明，还可以分 n 为奇偶，利用“同余式”进行：

对于 $n\equiv1(mod\ 2)$，有：

$$2^n\equiv2(mod\ 3)\text{与}(-1)^n\equiv2(mod\ 3)；$$

对于 $n\equiv0(mod\ 2)$，有

$$2^n\equiv1(mod\ 3)\text{与}(-1)^n\equiv1(mod\ 3)，$$

故恒有

$$2^n-(-1)^n\equiv0(mod\ 3).$$

所以对任意自然数 n，$\frac{2^n-(-1)^n}{3}$ 恒为正整数，因而正整数

$$2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}>1，\text{且}\ 0<2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}}<1.$$

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝国际数学竞赛试题讲解（II）
作者＝江仁俊　在应瑔　蔡训武　梁法驯　樊恺
页数＝４３３
ＳＳ号＝１００６８５８０
出版日期＝１９８０年０７月第１版