出 版 说 明

为了满足广大中学生学习数学和中学数学教师教学参考的需要，我们邀请湖北省暨武汉市数学会组织编写了这套《中学数学》：《代数解题引导》、《初等几何解题引导》、《解析几何解题引导》、《三角解题引导》和《国际数学竞赛试题讲解》（Ⅰ、Ⅱ）。

今后，我们将组织力量继续编写适合中学生课外学习和中学教师教学参考的读物．希望这套书和广大读者见面以后，能听到各方面的热情批评和建议，以便我们进一步修订，使其日臻完善。

一九八〇年四月

目　　录

第一章　三角函数及其基本性质

一、概　　述

衡量角度的大小，通常除用度、分、秒表示的六十分制外，还有弧度制等．弧度制是置角的顶点于圆心，以所张的单位圆弧长表示角度．弧度的单位叫径．

直角三角形中，三条边的六种比与锐角的变化一一对应；坐标系中，置角的顶点于原点，始边于正X轴，取逆时针方向为正向，终边上任一点的横坐标、纵坐标及该点到原点的距离，这三者的六种比与角的变化相对应，角变比值变，角定比值定，因此，这些比值为角的函数．通常具体表达如下：

	直角三角形表达的锐角三角函数	坐标系表达的任意角三角函数
正　　弦	$\sin A=\frac{a}{c}$	$\sin\alpha=\frac{y}{r}$
余　　弦	$\cos A=\frac{b}{c}$	$\cos\alpha=\frac{x}{r}$
正　　切	$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}$	$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$
余　　切	$\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}$	$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$

续 表

	直角三角形表达的锐角三角函数	坐标系表达的任意角三角函数
正 割	$\sec A=\frac{c}{b}$	$\sec\alpha=\frac{r}{x}$
余 割	$\csc A=\frac{c}{a}$	$\csc\alpha=\frac{r}{y}$

此外，也常用单位圆的三角函数线进行表达．锐角三角函数有表可查，但其定义域限于锐角．锐角三角函数可看作任意角三角函数的特例．

根据三角函数的定义可得

1．三角函数的符号，依终边所在的象限而定．

$f(\alpha)$ \ α	第Ⅰ象限	第Ⅱ象限	第Ⅲ象限	第Ⅳ象限
$\sin\alpha$ $\csc\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$ $\sec\alpha$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}\alpha$ $\operatorname{ctg}\alpha$	+	−	+	−

2．同角三角函数间有如下关系：

倒数关系：

$$\sin\alpha\csc\alpha=1;\quad \cos\alpha\sec\alpha=1;\quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1.$$

商的关系：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

平方关系：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\qquad 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha;$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha.$$

3. 诱导公式反映了 $k\cdot 90^\circ\pm\alpha$ (k 为整数) 与 α 的三角函数间的关系. 当 k 为偶数时，等于 α 的同名三角函数，加上把α看作锐角时，原角所在象限内原函数的符号；当 k 为奇数时，等于 α 的相应的余函数，加上把α看作锐角时，原角所在象限内的原函数的符号. 即通常所说的“奇变偶不变，符号看象限”. 借助这，任意角三角函数皆可化作相应的锐角三角函数，查表求值. 如

$$\operatorname{tg}930^\circ=\operatorname{tg}(10\times 90^\circ+30^\circ)=\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sin(-1485^\circ)=-\sin 1485^\circ=-\sin(17\times 90^\circ-45^\circ)$$

$$=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

几何图形的直观，有助于函数性质的了解. 三角函数 $y=\sin x$； $y=\cos x$； $y=\operatorname{tg}x$； $y=\operatorname{ctg}x$ 的图象及性质如下：

1. 图　象

$y=\sin x$

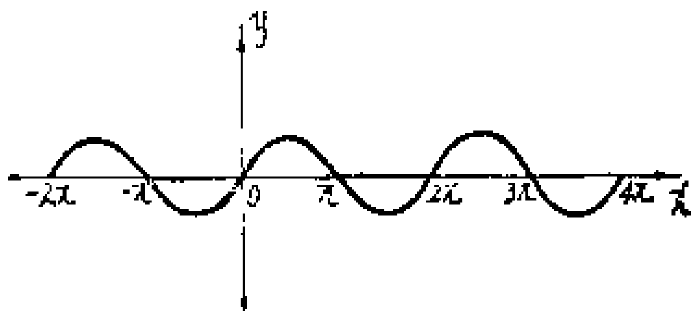

图 1—1

$y = \cos x$

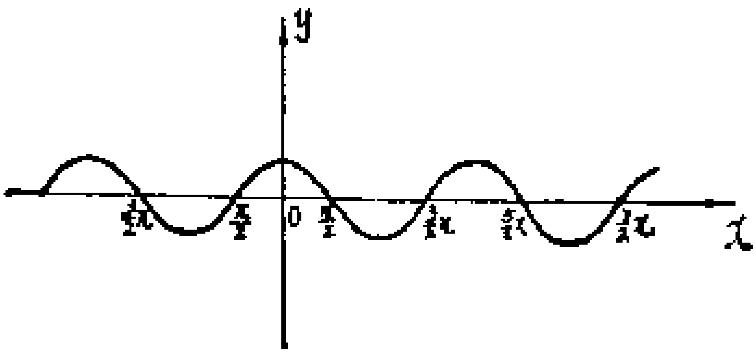

图 1—2

$y = \mathrm{tg}x$

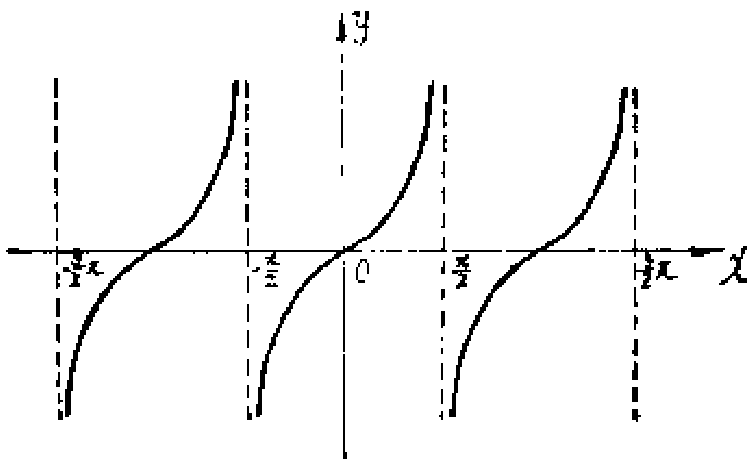

图 1—3

$y = \mathrm{ctg}x$

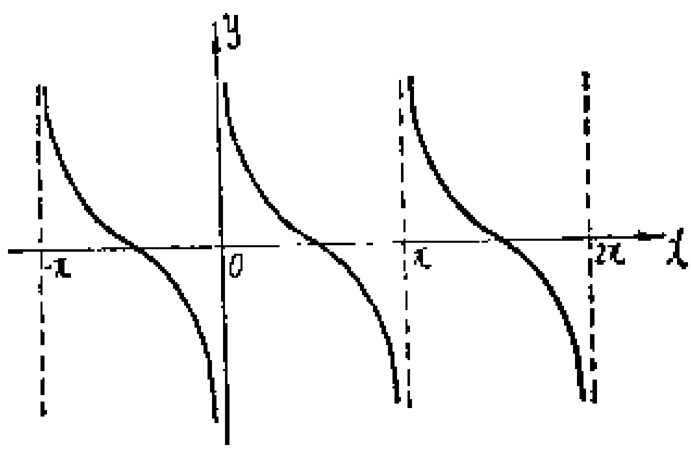

图 1—4

2. **基本性质**

	定义域	值域	增减性		奇偶性	周期性
			递增区间	递减区间		
$y=\sin x$	全体实数	$-1\leqslant y\leqslant 1$	$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$	$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$	奇函数	2π
$y=\cos x$	全体实数	$-1\leqslant y\leqslant 1$	$(2k-1)\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi$	$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$	偶函数	2π
$y=\operatorname{tg} x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$（k 为整数）	全体实数	$k\pi-\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$		奇函数	π
$y=\operatorname{ctg} x$	$x\neq k\pi$（k 为整数）	全体实数		$k\pi<x<(k+1)\pi$	奇函数	π

二、例　　题

本章例题除涉及三角函数求值、化简、恒等式论证、运用诱导公式等外，并注意了一些综合问题．如：带附加条件的三角等式的证明；三角函数不等式的证明；消去法；三角函数求极值等．

1．已知 $\operatorname{tg}\alpha=m$，求 $\sin\alpha$．

〔**分析**〕 由于 m 是文字，需就 $m=0$，$m>0$，$m<0$ 分别进行讨论．

〔**解**〕 当 $m=0$ 时，$\alpha=k\pi\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$，故

$$\sin\alpha=0.$$

当 $m>0$ 时，置顶点于原点，始边在 x 轴正向的角 α，其终边在一、三象限．故当此终边在第一象限时

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha}=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2},$$

在第三象限时

$$\sin\alpha=-\frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}.$$

当 $m<0$ 时，α 的终边在二、四象限．故当 α 终边在第二象限时

$$\sin\alpha=-\frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2},$$

在第四象限时

$$\sin\alpha=\frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}.$$

2．已知 $\sin\theta=\dfrac{a-b}{a+b}$ $(0<a<b)$，求 $\sqrt{\operatorname{ctg}^2\theta-\cos^2\theta}$ 的值．

〔分析〕 本题除涉及已知某三角函数值求其它三角函数值外，还牵涉根式，因此还须注意算术根．

〔解〕 因 $0<a<b$，所以

$$\sin\theta=\frac{a-b}{a+b}<0,\ \text{从而有}$$

$$\sqrt{\operatorname{ctg}^2\theta-\cos^2\theta}=\sqrt{\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}}=\frac{\cos^2\theta}{-\sin\theta}=\sin\theta-\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}=-\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

3．已知 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{60}{169}$，且 $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值．

〔分析〕 根据已知条件和恒等式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，运用韦达定理，可求出 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值．因

$$1\pm 2\sin\alpha\cos\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2,$$

故在 $\sin\alpha+\cos\alpha$、$\sin\alpha-\cos\alpha$、$\sin\alpha\cos\alpha$ 三个式子中，已知其中某一个式子的值，则其余二式的值不难求出．因此，本题以先求出 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 及 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值为宜．

〔解〕 由 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{60}{169}$得

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{289}{169},$$

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{169}.$$

又已知 $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\sin\alpha>\cos\alpha>0$，所以

$$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{17}{13},\\[2mm] \sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{7}{13},\end{cases}$$

解之即得 $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$，$\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$．

4．已知 $\sin\alpha=a\sin\beta$，$\operatorname{tg}\alpha=b\operatorname{tg}\beta$，求 $\cos\alpha$ 和 $\sin\beta$ 的值(这里 a，b 满足条件 $|b|\geqslant|a|>1$ 或 $|b|\leqslant|a|<1$)．

〔分析〕 由两等式消去 β，便得到一个只含有 α 的三角函数的等式，从而可求出 $\cos\alpha$ 的值；若消去 α，便可求出 $\sin\beta$ 的值．

〔解〕 由 $\sin\alpha=a\sin\beta$，$\operatorname{tg}\alpha=b\operatorname{tg}\beta$ 得

$$\csc\beta=\frac{a}{\sin\alpha},\quad \operatorname{ctg}\beta=\frac{b}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

而

$$\csc^2\beta-\operatorname{ctg}^2\beta=1,$$

所以

$$\left(\frac{a}{\sin\alpha}\right)^2-\left(\frac{b}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2=1,$$

$$a^2-b^2\cos^2\alpha=\sin^2\alpha,$$

$$(b^2-1)\cos^2\alpha=a^2-1,$$

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{a^2-1}{b^2-1}}.$$

用同样的方法可求得

$$\sin\beta=\pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2-1}}.$$

$\sin\beta$ 的值还可以由 $\sin\beta=\frac{1}{a}\sin\alpha$ 求出：

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{a^2-1}{b^2-1}=\frac{b^2-a^2}{b^2-1},$$

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2-1}},$$

$$\sin\beta=\pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2-1}}.$$

5. 化简 $\left(\sqrt{\frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi}}-\sqrt{\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}}\right.$

$\left.-\sqrt{\frac{1+\cos\phi}{1-\cos\phi}}\right)$.

〔解〕 原式 $=\left(\sqrt{\frac{(1-\sin\phi)^2}{1-\sin^2\phi}}-\sqrt{\frac{(1+\sin\phi)^2}{1-\sin^2\phi}}\right)\cdot$

$$\left(\sqrt{\frac{(1-\cos\phi)^2}{1-\cos^2\phi}}-\sqrt{\frac{(1+\cos\phi)^2}{1-\cos^2\phi}}\right)$$

$$=\frac{(1-\sin\phi)-(1+\sin\phi)}{\sqrt{\cos^2\phi}}\cdot$$

$$\frac{(1-\cos\phi)-(1+\cos\phi)}{\sqrt{\sin^2\phi}}$$

$$=\frac{-2\sin\phi}{|\cos\phi|}\cdot\frac{-2\cos\phi}{|\sin\phi|}$$

$$=\frac{4\sin\phi\cos\phi}{|\cos\phi||\sin\phi|}=\frac{4\sin 2\phi}{|\sin 2\phi|}$$

$$=\begin{cases}4, & \text{当}\quad k\pi<\phi<k\pi+\frac{\pi}{2}\text{时}\\ -4, & \text{当}\quad k\pi+\frac{\pi}{2}<\phi<(k+1)\pi\text{时}\ (k\text{ 为整数})\end{cases}$$

6. 求证 $\dfrac{1+\sec x+\operatorname{tg} x}{1+\sec x-\operatorname{tg} x}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$.

〔**分析**〕 关于三角恒等式的论证，不仅要善于对同角三角函数间进行相互转化，而且还要注意 1 与三角函数间的相互转化.

〔**证**〕 $\dfrac{1+\sec x+\operatorname{tg} x}{1+\sec x-\operatorname{tg} x}=\dfrac{\sec^2 x-\operatorname{tg}^2 x+\sec x+\operatorname{tg} x}{1+\sec x-\operatorname{tg} x}$

$$=\frac{(\sec x+\operatorname{tg} x)(\sec x-\operatorname{tg} x+1)}{1+\sec x-\operatorname{tg} x},$$

$$=\sec x+\operatorname{tg} x=\frac{1+\sin x}{\cos x}.$$

7. 求证 $\dfrac{2(\cos\theta-\sin\theta)}{1+\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$.

〔**证**〕 $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$$=\frac{\cos\theta+\cos^2\theta-\sin\theta-\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{(\cos\theta-\sin\theta)(1+\sin\theta+\cos\theta)}{1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{2(\cos\theta-\sin\theta)(1+\sin\theta+\cos\theta)}{2+2(\sin\theta+\cos\theta)+2\sin\theta\cos\theta}\ \text{〔注〕}$$

$$=\frac{2(\cos\theta-\sin\theta)(1+\sin\theta+\cos\theta)}{1+2(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta+\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{2(\cos\theta-\sin\theta)(1+\sin\theta+\cos\theta)}{(1+\sin\theta+\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{2(\cos\theta-\sin\theta)}{1+\sin\theta+\cos\theta}.$$

〔注〕 此时将分子、分母同乘以2，一方面可使分子出现2，另一方面可将分母化为$(1+\sin\theta+\cos\theta)^2$.

8. 已知 $\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin x}-\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}x}\right)^2=\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta$，求证$\cos x=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$.

〔分析〕 要证 $\cos x=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$，即要证 $\operatorname{tg}\alpha\cos x-\operatorname{tg}\beta=0$，亦即要证$(\operatorname{tg}\alpha\cos x-\operatorname{tg}\beta)^2=0$.

〔证〕 依已知条件有

$$\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\sin^2x}+\frac{\operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}^2x}-\frac{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\sin x\operatorname{tg}x}=\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta,$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha(\csc^2x-1)+\operatorname{tg}^2\beta(\operatorname{ctg}^2x+1)$$
$$-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos x\csc^2x=0,$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2x+\operatorname{tg}^2\beta\csc^2x-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos x\csc^2x=0,$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2x+\operatorname{tg}^2\beta-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos x=0,$$

$$(\operatorname{tg}\alpha\cos x-\operatorname{tg}\beta)^2=0,$$

即 $$\operatorname{tg}\alpha\cos x-\operatorname{tg}\beta=0$$

所以

$$\cos x=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

9. 已知$\frac{\sin^4x}{a}+\frac{\cos^4x}{b}=\frac{1}{a+b}$，

求证$\frac{\sin^8x}{a^3}+\frac{\cos^8x}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}$.

〔证〕 将已知等式两边同乘以$a+b$，得

$$\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{b}{a}\sin^4 x+\frac{a}{b}\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2,$$

$$b^2\sin^4 x-2ab\sin^2 x\cos^2 x+a^2\cos^4 x=0,$$

$$b\sin^2 x=a\cos^2 x,$$

$$\frac{\sin^2 x}{a}=\frac{\cos^2 x}{b}.$$

设 $\frac{\sin^2 x}{a}=\frac{\cos^2 x}{b}=\lambda$〔注〕，代入原等式之中，得

$$\lambda=\frac{1}{a+b}.$$

所以

$$\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\sin^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{a}\right)^3+\cos^2 x\left(\frac{\cos^2 x}{b}\right)^3$$

$$=\sin^2 x\cdot\lambda^3+\cos^2 x\cdot\lambda^3$$

$$=\lambda^3=\frac{1}{(a+b)^3}.$$

〔注〕 这里设其比值等于 λ，可简化后面的计算．数学中，当几个比值相等时，常这样处理．

10．设 k 是 4 的倍数加 1 的自然数，若以 $\cos x$ 表示 $\cos kx$ 时，有 $\cos kx=f(\cos x)$，则 $\sin kx=f(\sin x)$．

〔证〕 由于 $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，设 $k=4n+1$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，则有

$$f(\sin x)=f\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$$

$$=\cos k\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$=\cos\left[(4n+1)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$$

$$=\cos\left[2n\pi+\frac{\pi}{2}-(4n+1)x\right]$$

$$=\sin(4n+1)x$$
$$=\sin kx.$$

11. 若 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，求证 $\cos(\sin\theta)>\sin(\cos\theta)$.

〔分析〕 为便于比较大小，将不等式两边化为同名三角函数.

因 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{2}-\sin\theta$ 和 $\sin\theta$ 都是锐角，原不等式与

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin\theta\right)>\sin(\cos\theta)$$

等价，故本证明转化为

$$\frac{\pi}{2}-\sin\theta>\cos\theta,$$

即

$$\sin\theta+\cos\theta<\frac{\pi}{2}.$$

〔证〕 因 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，故有

$$\sin\theta\geqslant0,\ \cos\theta\geqslant0,$$

$$\begin{aligned}(\sin\theta+\cos\theta)^2&=1+2\sin\theta\cos\theta\\&\leqslant1+\sin^2\theta+\cos^2\theta\\&=2,\end{aligned}$$

所以

$$\sin\theta+\cos\theta\leqslant\sqrt{2}<\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{2}-\sin\theta>\cos\theta.$$

而$\frac{\pi}{2}-\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 都是锐角，依正弦函数在第一象限单调递增，有

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin\theta\right)>\sin(\cos\theta),$$

所以

$$\cos(\sin\theta)>\sin(\cos\theta).$$

12．求函数 $y=\frac{4}{9-4\sin^2\theta-4\cos\theta}$ 的极值.

〔解〕 $y=\frac{4}{9-4\sin^2\theta-4\cos\theta}$

$$=\frac{4}{4\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2+4}$$

$$=\frac{1}{\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2+1}.$$

故当 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，即 $\theta=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 时，$\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2+1$ 取极小值 1，因此 y 取极大值 1；当 $\cos\theta=-1$，即 $\theta=(2k+1)\pi$ 时，$\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2+1$ 取极大值 $\frac{13}{4}$，因此 y 取极小值 $\frac{4}{13}$.

13．设 $a>b>0$，求证 $\frac{a\sin x+b}{a\sin x-b}$ 不能介于 $\frac{a-b}{a+b}$ 和 $\frac{a+b}{a-b}$ 之间.

〔分析〕 设 $y=\frac{a\sin x+b}{a\sin x-b}$，问题就是求此函数的值域. 解出 $\sin x$，根据 $|\sin x|\leqslant1$，便可求出 y 的取值范围.

〔证〕 设 $y=\frac{a\sin x+b}{a\sin x-b}$，则

$$\sin x=\frac{b(y+1)}{a(y-1)}.$$

但

$$-1\leqslant\sin x\leqslant1,$$

所以

$$-1\leqslant\frac{b(y+1)}{a(y-1)}\leqslant 1.$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{b(y+1)}{a(y-1)}\leqslant 1 & ①\\[2mm] \dfrac{b(y+1)}{a(y-1)}\geqslant -1 & ②\end{cases}$$

由 $a>b>0$ 知

$$\frac{a+b}{a-b}>1,\qquad \frac{a-b}{a+b}<1.$$

所以①的解是

$$y<1\ \text{或}\ y\geqslant\frac{a+b}{a-b},$$

②的解是

$$y>1\ \text{或}\ y\leqslant\frac{a-b}{a+b}.$$

因此，不等式

$$-1\leqslant\frac{b(y+1)}{a(y-1)}\leqslant 1$$

的解是

$$y\leqslant\frac{a-b}{a+b}\ \text{或}\ y\geqslant\frac{a+b}{a-b}.$$

即 $y=\dfrac{a\sin x+b}{a\sin x-b}$的值不能介于$\dfrac{a-b}{a+b}$和$\dfrac{a+b}{a-b}$之间.

14. 求函数 $y=\sin 3x+\mathrm{tg}\dfrac{2x}{5}$ 的周期.

〔解〕

$\sin 3x$ 的周期是$\dfrac{2\pi}{3}$， $\mathrm{tg}\dfrac{2x}{5}$的周期是$\dfrac{5\pi}{2}$， 而$\dfrac{2}{3}$和$\dfrac{5}{2}$

的最小公倍数是10，因此 $y=\sin 3x+\mathrm{tg}\frac{2x}{5}$ 的周期是 10π.

〔附注〕 几个分数的最小公倍数，我们约定为各分数的分子的最小公倍数为分子、各分母的最大公约数为分母的分数.

15. 设 A、B、C 是三角形的三个内角，且 $\lg\sin A=0$，$\sin B$、$\sin C$ 是方程

$$4x^2-2(\sqrt{3}+1)x+k=0 \qquad ①$$

的两个根，求 k 的值和 A、B、C 的度数.

〔解〕 依 $\lg\sin A=0$ 有

$$\sin A=1,\quad A=90^\circ,\quad B+C=90^\circ.$$

所以

$$\sin C=\sin(90^\circ-B)=\cos B.$$

又因为 $\sin B$、$\cos B$ 是方程①的二根，故有

$$\sin B+\cos B=\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \qquad ②$$

$$\sin B\cos B=\frac{k}{4}. \qquad ③$$

由②得 $\sin B\cos B=\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以 $k=\sqrt{3}$.

原方程就是

$$4x^2-2(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0.$$

解之，得 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故直角三角形 ABC 的两个锐角为 30° 和 60°.

16. 设 $\frac{\sin\theta}{x}=\frac{\cos\theta}{y}$，$\frac{\cos^2\theta}{x^2}+\frac{\sin^2\theta}{y^2}=\frac{10}{3(x^2+y^2)}$，求 x、y 之间的关系.

〔分析〕 问题在于消去 θ. 为此采用代入法.

〔解〕 由 $\frac{\sin\theta}{x}=\frac{\cos\theta}{y}$ 得 $\mathrm{tg}\,\theta=\frac{x}{y}$.

所以

$$\sin^2\theta=\frac{x^2}{x^2+y^2},\qquad \cos^2\theta=\frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

代入第二式，并化简得

$$\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}=\frac{10}{3}.$$

即

$$3x^4-10x^2y^2+3y^4=0,$$

$$(3x^2-y^2)(x^2-3y^2)=0.$$

所以

$$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}y \text{ 或 } x=\pm\sqrt{3}\,y.$$

17. 消去下式中的 θ 和 ϕ

$$\begin{cases} a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=m\,(\text{这里 } a\neq m) & ①\\ b\sin^2\phi+a\cos^2\phi=n\,(\text{这里 } b\neq n) & ②\\ a\,\mathrm{tg}\,\theta=b\,\mathrm{tg}\,\phi & ③\end{cases}$$

〔**分析**〕 由①解出 $\mathrm{tg}\,\theta$，由②解出 $\mathrm{tg}\,\phi$，代入③，便可消去 θ 和 ϕ.

〔**解**〕 由①，得

$$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=m(\sin^2\theta+\cos^2\theta),$$

$$(a-m)\sin^2\theta=(m-b)\cos^2\theta,$$

若 $a\neq m$，则

$$\mathrm{tg}^2\,\theta=\frac{m-b}{a-m}.$$

同理，由②，若 $b\neq n$，则

$$\mathrm{tg}^2\,\phi=\frac{n-a}{b-n}.$$

代入③，则得

$$a^2 \cdot \frac{m-b}{a-m} = b^2 \cdot \frac{n-a}{b-n}.$$

当 $a \neq b$ 时，若再行化简可得

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

18. 已知 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，求证 $a^2+b^2=1$.

〔证〕 因 $|a|\leqslant 1, |b|\leqslant 1$，故可令 $a=\sin\alpha$（α 为锐角），代入已知等式，得

$$\sin\alpha\sqrt{1-b^2}+b\cos\alpha=1,$$

$$\sin^2\alpha-b^2\sin^2\alpha=1-2b\cos\alpha+b^2\cos^2\alpha,$$

$$b^2-2b\cos\alpha+\cos^2\alpha=0,$$

$$b=\cos\alpha.$$

所以

$$a^2+b^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

三、习　　题

1. 已知 $\sec\alpha=m$，求 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\alpha$ 的值.

2. 试用 $\operatorname{ctg}x$ 表示 $U(x)=\csc x\sqrt{\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}-\sqrt{2}}$.

3. 已知 $\sin\alpha=\frac{a}{b}$，求 $\frac{\sec\alpha-b\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha+b\operatorname{tg}\alpha}$ 的值.

4. 已知 $5\operatorname{tg}x+\sec x=5$，求 $\cos x$ 的值.

5. 已知 $0<x<\frac{\pi}{4}$，且 $\lg\operatorname{tg}x-\lg\sin x=\lg\cos x-\lg\operatorname{ctg}x+2\lg 3-\frac{3}{2}\lg 2$，求 $\cos x-\sin x$ 的值.

6. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$，求 $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$，$\sin^4\alpha+$

$\cos^4\alpha$，$\sin^5\alpha+\cos^5\alpha$ 的值.

7. 已知 $\sec\alpha+\csc\alpha=a$，求证 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1+\sqrt{a^2+1}}{a^2}$.

8. 已知 $2\operatorname{tg}\alpha+3\sin\beta=7$，$\operatorname{tg}\alpha-6\sin\beta=1$，求 $\sin\alpha$ 及 $\sin\beta$.

9. 已知 $\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha=m$，$\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha=n$，求证：

(1) $\cos\alpha=\dfrac{m-n}{m+n}$；

(2) $(m^2-n^2)^2=16\,mn$.

10. 化简下列各式：

(1) $\dfrac{\sec\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}+\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$；

(2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$；

(3) $(1-\operatorname{ctg}\alpha+\csc\alpha)(1-\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha)$；

(4) $\sin^2\alpha\operatorname{tg}\alpha+\cos^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$；

(5) $\dfrac{1+\sin\alpha+\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$；

(6) $\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+1\right)\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}-1\right)(\csc\alpha+1)(1-\sin\alpha)$；

(7) $\sin^2 62^\circ+\operatorname{tg}54^\circ\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}36^\circ+\sin^2 28^\circ$；

(8) $\sin(30^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)\sec(60^\circ-\alpha)$；

(9)

$$\frac{\sin^2(\alpha-2\pi)+\cos^2(2\pi-\alpha)+\sec(2\pi-\alpha)\sec(\pi-\alpha)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos^2(\pi+\alpha)+\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}；$$

(10) $\sin\left(\dfrac{4n+1}{4}\pi+\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{4n-1}{4}\pi-\alpha\right)$.

11．求证下列恒等式

(1) $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}$

$=\sin\alpha+\cos\alpha \qquad \left(-\frac{\pi}{4}<\alpha<0\right)$；

(2) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\sec^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\csc^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}$

$=\sin\alpha\cos\alpha$；

(3) $\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x+1=(\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{ctg}^2x-\operatorname{ctg}x+1)$；

(4) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha}$；

(5) $\dfrac{1-\cos A+\sin A}{1+\cos A+\sin A}+\dfrac{1+\cos A+\sin A}{1-\cos A+\sin A}$

$=2\csc A$；

(6) $\sin\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)+\cos\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)=\sec\alpha+\csc\alpha$；

(7) $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=0$；

(8) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\dfrac{1+2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha-1)}$

$=\dfrac{2}{1+\operatorname{tg}\alpha}$；

(9) $1+3\sin^2A\sec^4A+\operatorname{tg}^6A=\sec^6A$；

(10) $\dfrac{1}{\csc\theta-\operatorname{ctg}\theta}-\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$.

12．试证：如果等式

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)$$
$$=(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)$$

成立，则等式两端的值等于$|\sin\alpha|\cdot|\sin\beta|\cdot|\sin\gamma|$.

13．已知$\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$，求证：$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$.

14．已知$\operatorname{tg}^2\alpha=2\operatorname{tg}^2\beta+1$，求证：$\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1$.

15．已知$\sin^2 A\csc^2 B+\cos^2 A\cos^2 C=1$，且$A\neq\frac{\pi}{2}$，求证：$\operatorname{tg}^2 A\cdot\operatorname{ctg}^2 B=\sin^2 C$.

16．已知$\frac{\cos^4 A}{\cos^2 B}+\frac{\sin^4 A}{\sin^2 B}=1$，且$A\neq 0$及$A\neq\frac{\pi}{2}$，求证：$\frac{\cos^4 B}{\cos^2 A}+\frac{\sin^4 B}{\sin^2 A}=1$.

17．已知$\sec^2\theta=\frac{4xy}{(x+y)^2}$，且$x$、$y$为实数，求证：$x=y$.

18．已知$\frac{a}{c}=\sin\theta$，$\frac{b}{c}=\cos\theta$，$(c+b)^{c-b}=(c-b)^{c+b}=a^a$，且$a>0$，$b>0$，$c>b$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，求证：$\lg^2 a=\lg(c+b)\lg(c-b)$.

19．已知x、y、α都是实数，且$x^2+y^2=1$，求证$|x\sin\alpha+y\cos\alpha|\leqslant 1$.

20．设α是第三、四象限的角，且$\sin\alpha=\frac{2m-3}{4-m}$，求$m$的取值范围.

21．设$\sin^2 x+2\sin x\cos x-2\cos^2 x=m$恒有实数解，求$m$的取值范围.

22．求下列函数的极值：

(1) $y=-3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$；

(2) $y=12\sin\theta+4\cos^2\theta$；

(3) $y=\frac{4\csc x+\operatorname{ctg} x}{4\csc x-\operatorname{ctg} x}$；

(4) $y=\frac{\sec^2 x-\operatorname{tg} x}{\sec^2 x+\operatorname{tg} x}$.

23. 周长为 l 的直角三角形，在什么情况下斜边最短？并求之.

24. 求下列函数的周期：

(1) $y=\sin\frac{x}{m}+\cos\frac{x}{n}$；

(2) $y=\operatorname{tg}3\pi x+\operatorname{ctg}2\pi x$.

25. 实数 p、q 要满足怎样的条件，才能使方程 $x^2-px+q=0$ 的两根成为一直角三角形两锐角的正弦.

26. 求证方程 $x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-q)x+q=0$ 的一个根是 1；设这个方程的三个根是一个三角形 ABC 的三内角的正弦 $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$，求 A、B、C 的度数及 q 的值.

27. 试证明能适合方程 $\sin x+\sin^2 x=1$ 的 x 的值必能适合方程 $\cos^2 x+\cos^4 x=1$.

28. 已知 $a\sec x-c\operatorname{tg}x=d$，$b\sec x+d\operatorname{tg}x=c$，且 c，d 不同时为 0，求证：$a^2+b^2=c^2+d^2$.

29. 试由等式组 $\csc x-\sin x=m$，$\sec x-\cos x=n$ 消去 x.

30. 试由等式组 $x=\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{tg}\theta$，$y=\sec\theta-\cos\theta$ 消去 θ.

31. 设 a、b、θ 满足方程组：

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=a & ①\\ \sin\theta-\cos\theta=b & ②\\ \sin^2\theta-\cos^2\theta-\sin\theta=-b^2 & ③\end{cases}$$

求 a、b 的值.

32. 已知

$x_1=\sin\phi_1$

$x_2=\cos\phi_1\sin\phi_2$

$x_3=\cos\phi_1\cos\phi_2\sin\phi_3$

…………

$$x_{n-1}=\cos\phi_1\cos\phi_2\cdots\cos\phi_{n-2}\sin\phi_{n-1}$$
$$x_n=\cos\phi_1\cos\phi_2\cdots\cos\phi_{n-2}\cos\phi_{n-1},$$

求证：$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$。

四、习 题 解 答

1．因 $|\sec\alpha|\geqslant 1$，故 $|m|\geqslant 1$。

当 $m=1$ 时，$\alpha=2k\pi$（k 为整数）

$\sin\alpha=0$；$\cos\alpha=1$；$\operatorname{tg}\alpha=0$。

当 $m=-1$ 时，$\alpha=(2k+1)\pi$（k 为整数）

$\sin\alpha=0$；$\cos\alpha=-1$；$\operatorname{tg}\alpha=0$。

当 $|m|>1$ 时，依题设有

$$\cos\alpha=\frac{1}{m};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}=\pm\sqrt{m^2-1};$$

$$\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{\sqrt{m^2-1}}{m}.$$

若 $m>1$，则 α 在第一或第四象限．α 在第一象限时，取"+"号，α 在第四象限时，取"－"号；若 $m<-1$，则 α 在第二或第三象限．α 在第二象限时，取"－"号，α 在第三象限时，取"+"号。

2．$$U(x)=\frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{2}{1-\cos^2 x}}-\sqrt{2}$$
$$=\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sqrt{2}}{|\sin x|}-\sqrt{2}$$

当 $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ 时

$$U(x)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)=\sqrt{2}\operatorname{ctg}^2 x,$$

当 $(2k+1)\pi<x<2(k+1)\pi$ 时

$$U(x) = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin^2 x} + 1\right) = -\sqrt{2}\,(\mathrm{ctg}^2 x + 2)$$

3. 原式 $= \dfrac{1-a}{1+a}$.

4. $\cos x = -\dfrac{3}{5}$ 或 $\cos x = \dfrac{4}{5}$.

5. 依已知条件有

$$\sin x \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{9},$$

$$(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x$$

$$= 1 - 2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{9} = \frac{a - 4\sqrt{2}}{9}.$$

又已知 $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$，所以

$$\cos x > \sin x > 0,$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{2}}{9}} = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

6. $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{1}{2},$$

$$1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2},$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{1}{4}$$

所以 $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$

$$= (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{8}.$$

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$= 1 - 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{8}.$$

$$\sin^5\alpha+\cos^5\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha$$
$$+\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos^3\alpha+\cos^4\alpha)$$
$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)[(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)$$
$$+(\sin\alpha\cos\alpha)^2-\sin\alpha\cos\alpha\quad(\sin^2\alpha+$$
$$\cos^2\alpha)]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{7}{8}+\left(-\frac{1}{4}\right)^2-\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 1\right]$$
$$=\frac{19\sqrt{2}}{32}.$$

7. $$\sec\alpha+\csc\alpha=a,$$
$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=a,$$
$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha\cos\alpha)^2}=a^2,$$
$$a^2(\sin\alpha\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$a^2(\sin\alpha\cos\alpha)^2-2\sin\alpha\cos\alpha-1=0,$$
所以 $$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\pm\sqrt{4+4a^2}}{2a^2}=\frac{1\pm\sqrt{a^2+1}}{a^2}.$$

8. 解关于 $\operatorname{tg}\alpha$、$\sin\beta$ 的方程组，得
$$\operatorname{tg}\alpha=3,\quad \sin\beta=\frac{1}{3}.$$
由 $\operatorname{tg}\alpha=3$ 得 $\sin\alpha=\pm\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

9. (1) $m+n=2\operatorname{tg}\alpha$, $m-n=2\sin\alpha$

所以 $$\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{m-n}{m+n}.$$

(2) $$(m^2-n^2)^2=[(m+n)(m-n)]^2$$
$$=[2\operatorname{tg}\alpha\cdot 2\sin\alpha]^2$$
$$=16\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$$

$= 16\,\mathrm{tg}^2\alpha(1-\cos^2\alpha)$

$= 16(\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha)$

$= 16(\mathrm{tg}\,\alpha+\sin\alpha)(\mathrm{tg}\,\alpha-\sin\alpha)$

$= 16\,mn.$

10. (1) 原式$=\dfrac{\sec\alpha}{|\sec\alpha|}+\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{|\mathrm{tg}\,\alpha|}$

$$=\begin{cases} 3 & \text{当 } 2k\pi<\alpha<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\text{ 时}\\ -3 & \text{当 } 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<\alpha<(2k+1)\pi\text{ 时}\\ 1 & \text{当 }(2k+1)\pi<\alpha<(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}\text{时}\\ -1 & \text{当 }(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}<\alpha<2(k+1)\pi\text{ 时}\end{cases}$$

(2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$

$=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)+\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$

$=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta$

$=\cos^2\beta+\sin^2\beta$

$=1.$

(3) $(1-\mathrm{ctg}\,\alpha+\csc\alpha)(1-\mathrm{tg}\,\alpha+\sec\alpha)$

$=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha+1}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha+1}{\cos\alpha}$

$=\dfrac{1-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=2.$

(4) $\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha+\cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$

$$=\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}+2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$=\sec\alpha\csc\alpha.$

(5) $$\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha+\cos\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha+1)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$=\sin\alpha+\cos\alpha.$

(6) $\left(\frac{1}{\cos\alpha}+1\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)(\csc\alpha+1)(1-\sin\alpha)$

$=(\sec\alpha+1)(\sec\alpha-1)(\csc\alpha+1)\cdot\sin\alpha(\csc\alpha-1)$

$=\sin\alpha(\sec^2\alpha-1)(\csc^2\alpha-1)$

$=\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\mathrm{ctg}^2\alpha$

$=\sin\alpha.$

(7) $\sin^2 62^\circ+\mathrm{tg}\,54^\circ\,\mathrm{tg}\,45^\circ\,\mathrm{tg}\,36^\circ+\sin^2 28^\circ$

$=\sin^2 62^\circ+\cos^2 62^\circ+\mathrm{tg}\,54^\circ\,\mathrm{ctg}\,54^\circ$

$=2.$

(8) $\sin(30^\circ+\alpha)\,\mathrm{tg}(45^\circ+\alpha)\,\mathrm{tg}(45^\circ-\alpha)\sec(60^\circ-\alpha)$

$=\sin(30^\circ+\alpha)\,\mathrm{tg}(45^\circ+\alpha)\,\mathrm{ctg}(45^\circ+\alpha)\csc(30^\circ+\alpha)$

$=1.$

(9)

$$\frac{\sin^2(\alpha-2\pi)+\cos^2(2\pi-\alpha)+\sec(2\pi-\alpha)\sec(\pi-\alpha)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos^2(\pi+\alpha)+\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sec^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\csc^2\alpha}$$

$$=\frac{-\operatorname{tg}^2\alpha}{-\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha.$$

(10) $\sin\left(\frac{4n+1}{4}\pi+\alpha\right)+\sin\left(\frac{4n-1}{4}\pi-\alpha\right)$

$$=\sin\left[n\pi+\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]+\sin\left[n\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]$$

$$=(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

$$=0.$$

11. (1) 因 $-\frac{\pi}{4}<\alpha<0$，所以

$\cos\alpha>0$，$\sin\alpha<0$，$|\cos\alpha|>|\sin\alpha|$，

$$\sqrt{\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}$$

$$=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$$

$$=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

(2) $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\sec^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\csc^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+1)}{\operatorname{tg}^2\alpha+1+\operatorname{tg}\alpha}-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$=\operatorname{ctg}\alpha-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sec^2\alpha}$$

$=\mathrm{ctg}\,\alpha(1-\cos^2\alpha)$

$=\sin\alpha\cos\alpha.$

(3) $\quad(\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}\,x+1)(\mathrm{ctg}^2x-\mathrm{ctg}\,x+1)$

$=(\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}\,x+1)\cdot\mathrm{ctg}^2x(1-\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}^2x)$

$=\mathrm{ctg}^2x[(\mathrm{tg}^2x+1)^2-\mathrm{tg}^2x]$

$=\mathrm{ctg}^2x(\mathrm{tg}^4x+\mathrm{tg}^2x+1)$

$=\mathrm{tg}^2x+\mathrm{ctg}^2x+1.$

(4) $\quad\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha\sin\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha-\sin\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha\sin\alpha}}=\dfrac{1}{\csc\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha}$

$=\dfrac{\csc^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha}{\csc\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha}=\csc\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha$

$=\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha+\sin\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha\sin\alpha}.$

(5) $\quad\dfrac{1-\cos A+\sin A}{1+\cos A+\sin A}+\dfrac{1+\cos A+\sin A}{1-\cos A+\sin A}$

$=\dfrac{(1+\sin A-\cos A)^2+(1+\sin A+\cos A)^2}{(1+\sin A)^2-\cos^2A}$

$=\dfrac{2[(1+\sin A)^2+\cos^2A]}{1+2\sin A+\sin^2A-\cos^2A}$

$=\dfrac{2(2+2\sin A)}{2\sin A+2\sin^2A}$

$=\dfrac{2}{\sin A}=2\csc A.$

(6) $\quad\sin\alpha(1+\mathrm{tg}\,\alpha)+\cos\alpha(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)$

$=\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha(\mathrm{ctg}\,\alpha+1)+\cos\alpha(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)$

$=(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)(\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha+\cos\alpha)$

$=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

$$=\sec\alpha+\csc\alpha.$$

(7) $$2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1$$

$$=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)$$

$$-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1$$

$$=-(\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)+1$$

$$=-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2+1$$

$$=0.$$

(8) $$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{1+2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha-1)}$$

$$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{1+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$=\frac{2}{1+\operatorname{tg}\alpha}.$$

(9) 将等式 $1+\operatorname{tg}^2A=\sec^2A$ 两边分别3次方，得

$$1+3\operatorname{tg}^2A+3\operatorname{tg}^4A+\operatorname{tg}^6A=\sec^6A,$$

$$1+3\operatorname{tg}^2A(1+\operatorname{tg}^2A)+\operatorname{tg}^6A=\sec^6A,$$

$$1+3\cdot\frac{\sin^2A}{\cos^2A}\cdot\sec^2A+\operatorname{tg}^6A=\sec^6A,$$

即

$$1+3\sin^2A\sec^4A+\operatorname{tg}^6A=\sec^6A.$$

(10) 左边 $=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta-1+\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$$=\operatorname{ctg}\theta,$$

$$右边=\frac{1+\cos\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}=\mathrm{ctg}\,\theta.$$

所以原式成立.

12. 将等式两边同乘以 $(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)$，得

$$\begin{aligned}&[(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)]^2\\&=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma)\\&=\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma.\end{aligned}$$

因为

$$|\cos\alpha|\leqslant 1,\ |\cos\beta|\leqslant 1,\ |\cos\gamma|\leqslant 1,$$

所以

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)\geqslant 0,$$

$$\begin{aligned}&(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)\\&=|\sin\alpha|\cdot|\sin\beta|\cdot|\sin\gamma|.\end{aligned}$$

13. 因 $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$，所以

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)\cos\theta\\&=\sqrt{2}\cos\theta-\cos\theta.\end{aligned}$$

故

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\cos\theta.$$

14. 因 $\mathrm{tg}^2\alpha=2\,\mathrm{tg}^2\beta+1$，所以

$$\begin{aligned}&\mathrm{tg}^2\alpha+1=2(\mathrm{tg}^2\beta+1).\\&\sec^2\alpha=2\sec^2\beta,\\&\cos^2\beta=2\cos^2\alpha,\\&1-\sin^2\beta=2(1-\sin^2\alpha),\\&\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1.\end{aligned}$$

15. 由 $\sin^2 A\csc^2 B+\cos^2 A\cos^2 C=1$ 得

$$\sin^2 A\csc^2 B+\cos^2 A(1-\sin^2 C)=1,$$

$$\sin^2 A\csc^2 B+\cos^2 A-1=\cos^2 A\sin^2 C,$$

$$\sin^2 A\csc^2 B-\sin^2 A=\cos^2 A\sin^2 C,$$

$$\sin^2 A(\csc^2 B-1)=\cos^2 A\sin^2 C,$$

$$\sin^2 A\operatorname{ctg}^2 B=\cos^2 A\sin^2 C,$$

由于 $\cos A\neq 0$，故可将上式两边同除以 $\cos^2 A$，得

$$\operatorname{tg}^2 A\operatorname{ctg}^2 B=\sin^2 C.$$

16. 将已知等式变形为

$$\begin{aligned}
&\cos^4 A\sin^2 B+\sin^4 A\cos^2 B\\
&=(\sin^2 A+\cos^2 A)\sin^2 B\cos^2 B,\\
&(1-\sin^2 A)\cos^2 A\sin^2 B+(1-\cos^2 A)\sin^2 A\cos^2 B\\
&=\sin^2 A\sin^2 B\cos^2 B+\cos^2 A\sin^2 B\cos^2 B,\\
&\cos^2 A\sin^2 B-\sin^2 A\cos^2 A\sin^2 B+\sin^2 A\cos^2 B\\
&\qquad-\sin^2 A\cos^2 A\cos^2 B\\
&=\sin^2 A\sin^2 B\cos^2 B+\cos^2 A\sin^2 B\cos^2 B,\\
&\cos^2 A\sin^2 B(1-\cos^2 B)+\sin^2 A\cos^2 B(1-\sin^2 B)\\
&\qquad-\sin^2 A\cos^2 A(\sin^2 B+\cos^2 B)=0,\\
&\cos^2 A\sin^4 B+\sin^2 A\cos^4 B=\sin^2 A\cos^2 A.
\end{aligned}$$

两边同除以 $\sin^2 A\cos^2 A$，得

$$\frac{\sin^4 B}{\sin^2 A}+\frac{\cos^4 B}{\cos^2 A}=1.$$

17. 因 $\sec^2\theta\geqslant 1$，所以

$$\frac{4xy}{(x+y)^2}\geqslant 1,$$

$$4xy\geqslant x^2+2xy+y^2,$$

$$(x-y)^2\leqslant 0.$$

但

$$(x-y)^2 \geqslant 0,$$

故

$$x-y=0, \quad x=y.$$

18. 由 $(c+b)^{c-b}=a^a$，$(c-b)^{c+b}=a^a$，得

$$a\lg a=(c-b)\lg(c+b), \tag{①}$$

$$a\lg a=(c+b)\lg(c-b). \tag{②}$$

①、②的两边分别相乘，得

$$a^2\lg^2 a=(c^2-b^2)\lg(c+b)\lg(c-b). \tag{③}$$

又因$\dfrac{a}{c}=\sin\theta$，$\dfrac{b}{c}=\cos\theta$，所以

$$a^2=c^2\sin^2\theta, \quad b^2=c^2\cos^2\theta,$$

$$c^2-b^2=c^2-c^2\cos^2\theta=c^2\sin^2\theta=a^2.$$

因此③式可写成

$$a^2\lg^2 a=a^2\lg(c+b)\lg(c-b).$$

故

$$\lg^2 a=\lg(c+b)\lg(c-b).$$

19. 因为 $x^2+y^2=1$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以

$$(x^2+y^2)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=1,$$

$$x^2\sin^2\alpha+y^2\cos^2\alpha+x^2\cos^2\alpha+y^2\sin^2\alpha=1,$$

$$x^2\sin^2\alpha+2xy\sin\alpha\cos\alpha+y^2\cos^2\alpha$$
$$+x^2\cos^2\alpha-2xy\sin\alpha\cos\alpha+y^2\sin^2\alpha=1,$$

$$(x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2+(x\cos\alpha-y\sin\alpha)^2=1.$$

又 x、y、α 都是实数，故有

$$(x\cos\alpha-y\sin\alpha)^2\geqslant 0,$$

$$(x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2\leqslant 1,$$

$$|x\sin\alpha+y\cos\alpha|\leqslant 1.$$

20. 因 α 在第三、四象限，故 $-1<\sin\alpha<0$，所以

$$-1<\frac{2m-3}{4-m}<0.$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{2m-3}{4-m}<0,\\ \dfrac{2m-3}{4-m}>-1.\end{cases}$$

解这个不等式组， 得 $-1<m<\frac{3}{2}$.

21．若 $\sin x=0$，则原方程化为

$$-2\cos^2 x=m,\quad \cos^2 x=-\frac{m}{2}.$$

而这时 $\cos^2 x=1$，所以 $m=-2$.

若 $\cos x=0$，则原方程化为

$$\sin^2 x=m.$$

而这时 $\sin^2 x=1$，所以 $m=1$.

若 $\sin x\neq 0$，$\cos x\neq 0$，则原方程可化为

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x-2\cos^2 x=m(\sin^2 x+\cos^2 x).$$

两边同除以 $\cos^2 x$，并整理，得

$$(1-m)\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-(2+m)=0.$$

要使这个方程有实数解，必须其判别式的值非负，即

$$4+4(1-m)(2+m)\geqslant 0,$$

$$m^2+m-3\leqslant 0,$$

$$-\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{13}-1).$$

而 $m=-2$，$m=1$ 都在这个范围内，故 m 的取值范围是

$$-\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{13}-1).$$

22．(1) 当 $2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，即 $x=k\pi-\frac{\pi}{12}$时，

$\sin x=-1$，$y_{极大}=4$；

当 $2x-\dfrac{\pi}{3}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=k\pi+\dfrac{5\pi}{12}$时， $\sin x=1$，$y_{极小}=-2$.

(2) $y=12\sin\theta+4\cos^2\theta=-4\sin^2\theta+12\sin\theta+4=$

$$=-4\left(\sin\theta-\frac{3}{2}\right)^2+13.$$

当 $\sin\theta=1$， 即 $\theta=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$时，$y_{极大}=12$；

当 $\sin\theta=-1$， 即 $\theta=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$时，$y_{极小}=-12$.

(3) $y=\dfrac{4\csc x+\operatorname{ctg} x}{4\csc x-\operatorname{ctg} x}=\dfrac{4+\cos x}{4-\cos x}$， $\cos x=\dfrac{4(y-1)}{y+1}$

由 $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$，得 $y_{极小}=\dfrac{3}{5}$， $y_{极大}=\dfrac{5}{3}$.

(4) $y=\dfrac{\sec^2 x-\operatorname{tg} x}{\sec^2 x+\operatorname{tg} x}=\dfrac{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+1}$.

$$\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+1=y(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+1),$$

$$(y-1)\operatorname{tg}^2 x+(y+1)\operatorname{tg} x+(y-1)=0.$$

因 $\operatorname{tg} x$ 是实数，所以

$$(y+1)^2-4(y-1)^2\geqslant 0,$$

$$(3y-1)(y-3)\leqslant 0,$$

$$\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3.$$

因此，$y_{极小}=\dfrac{1}{3}$，$y_{极大}=3$.

23. 设斜边为 c，一锐角为 α，则有

$$c+c\sin\alpha+c\cos\alpha=l,$$

$$c=\frac{l}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}.$$

由于对任意的 α 均有 $\sin 2\alpha \leqslant 1$，

即有 $$1+\sin 2\alpha=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha\leqslant 2$$

于是 $$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2\leqslant 2,$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2},$$

因 α 为锐角，故当 $\alpha=45^\circ$ 时，$\sin\alpha+\cos\alpha$ 取最大值 $\sqrt{2}$，斜边 c 取最小值 $\frac{l}{1+\sqrt{2}}=(\sqrt{2}-1)l$．即当这个三角形是等腰直角三角形时，斜边最短，等于 $(\sqrt{2}-1)l$．

24．(1) $\sin\frac{x}{m}$ 的周期是 $2m\pi$，$\cos\frac{x}{n}$ 的周期是 $2n\pi$，取 $2m$ 和 $2n$ 的最小公倍数 $2k$，于是 $2k\pi$ 即为 $y=\sin\frac{x}{m}+\cos\frac{x}{n}$ 的周期．

(2) $\operatorname{tg} 3\pi x$ 的周期是 $\frac{\pi}{3\pi}=\frac{1}{3}$，$\operatorname{ctg} 2\pi x$ 的周期是 $\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$，而 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 的最小公倍数是 1．故 $y=\operatorname{tg} 3\pi x+\operatorname{ctg} 2\pi x$ 的周期是 1．

25．方程 $x^2-px+q=0$ 的判别式的值应不小于零，即

$$p^2-4q\geqslant 0. \qquad ①$$

设这直角三角形的一锐角为 α，则另一锐角为 $90^\circ-\alpha$，方程 $x^2-px+q=0$ 的两根便是 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$，依韦达定理有

$$\sin\alpha+\cos\alpha=p, \qquad ②$$

$$\sin\alpha\cos\alpha=q. \qquad ③$$

由②、③消去 α，得

$$p^2-2q-1=0. \qquad ④$$

①、④便是实数 p、q 所要满足的条件．

26．将 $x=1$ 代入原方程，

左边$=1-(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-q)+q=0$.

因此，1是这个方程的根．于是，原方程可化为

$$(x-1)(x^2-\sqrt{2}x-q)=0.$$

设$\sin C=1$，则$C=90^\circ$，$\sin B=\cos A$，$\sin A$、$\cos A$是方程

$$x^2-\sqrt{2}x-q=0$$

的两个根．因此

$$\sin A+\cos A=\sqrt{2}, \qquad ①$$

$$\sin A\cos A=-q. \qquad ②$$

由①得$A=45^\circ$(参看23题解法) 由②及$A=45^\circ$得$q=-\frac{1}{2}$.

所以这个三角形的三个内角是45°、45°、90°，$q=-\frac{1}{2}$.

27．原方程可化为

$$\sin x=1-\sin^2 x,$$

$$\cos^2 x=\sin x.$$

两边平方得

$$\cos^4 x=\sin^2 x$$

$$\cos^4 x=1-\cos^2 x$$

即有

$$\cos^4 x+\cos^2 x=1.$$

28．解关于$\sec x$、$\operatorname{tg} x$的方程组，得

$$\sec x=\frac{c^2+d^2}{ad+bc}, \quad \operatorname{tg} x=\frac{ac-bd}{ad+bc}.$$

由$\sec^2 x-\operatorname{tg}^2 x=1$有

$$\left(\frac{c^2+d^2}{ad+bc}\right)^2-\left(\frac{ac-bd}{ad+bc}\right)^2=1.$$

$$(c^2+d^2)^2=(ac+bc)^2+(ac-bd)^2$$

$$= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

所以

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

29. 将第一个等式两边同乘以 $\sin x$，第二个等式两边同乘以 $\cos x$，得

$$1 - \sin^2 x = m \sin x, \quad 1 - \cos^2 x = n \cos x,$$

$$\cos^2 x = m \sin x, \quad \sin^2 x = n \cos x. \qquad ①$$

所以

$$\cos^2 x \sin^2 x = mn \sin x \cos x,$$

$$\sin x \cos x = mn \qquad ②$$

等式①逐项乘以等式②，约简后得

$$\cos^3 x = m^2 n, \quad \sin^3 x = mn^2.$$

$$\cos^2 x = m\sqrt[3]{mn^2}, \quad \sin^2 x = n\sqrt[3]{m^2 n}.$$

由 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 得

$$m\sqrt[3]{mn^2} + n\sqrt[3]{m^2 n} = 1.$$

30. $x = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta} + \operatorname{tg}\theta = \dfrac{1 + \operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}\theta} = \dfrac{\sec^2\theta}{\operatorname{tg}\theta}$,

$$y = \sec\theta - \frac{1}{\sec\theta} = \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta} = \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\sec\theta},$$

$$x^2 y = \sec^3\theta, \quad xy^2 = \operatorname{tg}^3\theta.$$

由 $\sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta = 1$ 得

$$(x^2 y)^{\frac{2}{3}} - (xy^2)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

即

$$x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{4}{3}} = 1.$$

31. 〔解法一〕 ①+②，得

$$\sin\theta = \frac{a+b}{2}.$$

由③得

$$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)-\sin\theta=-b^2.$$

所以

$$ab-\frac{a+b}{2}=-b^2.$$

$$b=-a \text{ 或 } b=\frac{1}{2}.$$

③又可以写成

$$2\sin^2\theta-\sin\theta-1=-b^2,$$

即

$$2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{a+b}{2}-1=-b^2.$$

整理，得

$$a^2+2ab+3b^2-a-b-2=0 \qquad ④$$

把 $b=-a$ 代入④，得 $a^2=1$，故

$$a=\pm1,\quad b=\mp1.$$

把 $b=\frac{1}{2}$ 代入④，得 $a^2=\frac{7}{4}$，　$a=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-1 \\ b=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=\frac{\sqrt{7}}{2} \\ b=\frac{1}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-\frac{\sqrt{7}}{2} \\ b=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

〔解法二〕　②代入③，得

$$\sin^2\theta-\cos^2\theta-\sin\theta=-(\sin\theta-\cos\theta)^2,$$

$$2\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta=0,$$

$$\sin\theta(2\sin\theta-2\cos\theta-1)=0,$$

$$\sin\theta=0 \text{ 或 } 2\sin\theta-2\cos\theta-1=0.$$

由 $\sin\theta=0$ 得 $\theta=k\pi$（k 为整数）。将 $\theta=k\pi$ 分别代入①、②，当 k 为偶数时有 $a=1,b=-1$；当 k 为奇数时有 $a=-1$，$b=1$.

由 $2\sin\theta-2\cos\theta-1=0$ 得

$$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2},$$

$$b=\frac{1}{2}.$$

将 $b=\dfrac{1}{2}$ 代入③，得

$$\sin^2\theta-\cos^2\theta-\sin\theta=-\frac{1}{4},$$

$$2\sin^2\theta-\sin\theta-\frac{3}{4}=0,$$

$$\sin\theta=\frac{1\pm\sqrt{7}}{4}.$$

从而

$$\cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{4}.$$

$$a=\sin\theta+\cos\theta=\frac{1\pm\sqrt{7}}{4}+\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

因此原方程组的解是

$$\begin{cases}a=1\\ b=-1;\end{cases}\quad \begin{cases}a=-1\\ b=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\\ b=\dfrac{1}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}a=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\\ b=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

32. $$x_{n-1}^2 + x_n^2 = \cos^2\phi_1 \cos^2\phi_2 \cdots \cos^2\phi_{n-2}(\sin^2\phi_{n-1} + \cos^2\phi_{n-1})$$
$$= \cos^2\phi_1 \cos^2\phi_2 \cdots \cos^2\phi_{n-2},$$
$$x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 = \cos^2\phi_1 \cos^2\phi_2 \cdots \cos^2\phi_{n-3}(\sin^2\phi_{n-2} + \cos^2\phi_{n-2})$$
$$= \cos^2\phi_1 \cos^2\phi_2 \cdots \cos^2\phi_{n-3},$$

依次类推，最后得到

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sin^2\phi_1 + \cos^2\phi_1 = 1.$$

第二章　加法定理及其推广

一、概　　述

第一章研究了单角的三角函数，本章将研究复角的三角函数．这有时也视作两个变量的函数关系．这里，问题是如何用单角(如α、β)的三角函数表示和角$(\alpha+\beta)$、差角$(\alpha-\beta)$的三角函数．其中最基本的公式是：

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

由于这公式成功地将复角$\alpha+\beta$的余弦函数转化为单角的正弦、余弦函数，因此若将β换成$-\beta$，可得$\cos(\alpha-\beta)$的公式．若运用诱导公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha\pm\beta)\right]$$

$$=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\mp\beta\right]$$

就得到和角、差角的正弦公式．再利用

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)},$$

又可得到和角、差角的正切公式．当$\alpha=\beta$时，就得到倍角公式．又α是$\frac{\alpha}{2}$的倍角，若用α的三角函数表示$\frac{\alpha}{2}$的三角函数，则得半角公式．若将和角、差角的正弦及余弦的公式相加或相减，就得到积化和差、和差化积的公式．

本章的公式如下：

和角、差角公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

万能置换公式

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

积化和差

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right].$$

和差化积

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

本章例题的类型，大体如上章．但本章公式较多，除应熟练地掌握公式外，并应注意它们之间的内在联系及相互转化．如

已知 α 及 $\alpha+\beta$ 的三角函数值，要求 β 的三角函数值时，可视 $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$.

2α 是 α 的倍角，α 是 2α 的半角，α 是$\frac{\alpha}{2}$的倍角，$\frac{\alpha}{2}$ 是 α 的半角等．

若式子中出现 $\sin^2\alpha$，$\cos^2\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$ 或其更高次幂时，可利用倍角或半角公式降次

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

此外，在使用倍角公式或半角公式时，应正确确定有关的角所在的象限．另外，代数中恒等变形、比例定理以及方程、方程组的消元法、不等式的性质、数列、极值等与三角函数相交缘时，应首先看出问题的特征，然后采取综合手段加以解决．

二、例　　题

1．已知 $\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$，$540^\circ<\alpha<450^\circ$，求 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$ 的值．

〔分析〕　$\frac{\alpha}{4}$ 是 $\frac{\alpha}{2}$ 的半角，依半角的正切公式，应先求出 $\cos\frac{\alpha}{2}$ 的值．

〔解〕　由 $450^\circ<\alpha<540^\circ$ 知

$$225^\circ<\frac{\alpha}{2}<270^\circ,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}<0,\qquad \cos\frac{\alpha}{2}<0.$$

又

$$\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}, \tag{①}$$

对此式两边平方，化简得

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5}.$$

所以

$$1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{9}{5},$$

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{9}{5},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{\sqrt{5}}.$$ ②

由①、②可得

$$\sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{2}{\sqrt{5}},\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

所以

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}=\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{-\frac{2}{\sqrt{5}}}=-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1).$$

2. 设方程 $x^2+px+q=0$ 的二根是 $\operatorname{tg}\theta$ 和 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$，且这方程的二根之比为3:2，求 p 和 q 的值.

〔解法一〕 依韦达定理有

$$\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=-p,\quad \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=q.$$

所以

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{tg}\left[\theta+\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]=\frac{\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$$

$$=\frac{-p}{1-q},$$

即

$$\frac{-p}{1-q}=1,$$

$$p-q+1=0.$$ ①

又已知这个方程的二根之比为3:2，故设此二根分别为 $3a$ 和 $2a$，于是有

$$\begin{cases}3a+2a=-p,\\3a\cdot 2a=q.\end{cases}$$

由此二式消去 α，得

$$6p^2=25q. \qquad ②$$

由①、②得

$$\begin{cases}p=5\\ q=6;\end{cases} \qquad \begin{cases}p=-\dfrac{5}{6}\\ q=\dfrac{1}{6}\end{cases}.$$

〔解法二〕 因此方程二根之比为3:2，不妨设

$$\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}=\frac{3}{2}.$$

即

$$\frac{\operatorname{tg}\theta}{\dfrac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta}}=\frac{3}{2},$$

$$2\operatorname{tg}^2\theta+5\operatorname{tg}\theta-3=0.$$

解之，得

$$\operatorname{tg}\theta=-3 \text{ 或 } \operatorname{tg}\theta=\frac{1}{2}.$$

所以

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=-2 \text{ 或 } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{1}{3}.$$

依韦达定理有

$$p=-[(-3)+(-2)]=5,\quad q=(-3)\cdot(-2)=6;$$

或 $$p=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{6},\qquad q=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

若设 $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\operatorname{tg}\theta}=\dfrac{3}{2}$，仍得此结果.

3. 设 $\operatorname{tg}x=3\operatorname{tg}y$ $\left(0\leqslant y\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right)$，求 $u=x-y$ 的最大

值.

〔分析〕 根据正切函数的单调性，在$\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$内，$\operatorname{tg} u$ 和 u 同时取得最大值，故本题可从求 $\operatorname{tg} u$ 的最大值入手.

〔解〕 由于 $u=x-y$，$0 \leqslant y \leqslant x<\frac{\pi}{2}$，

故

$$0 \leqslant u<\frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} u &= \operatorname{tg}(x-y) \\
&= \frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \\
&= \frac{3 \operatorname{tg} y-\operatorname{tg} y}{1+3 \operatorname{tg} y \operatorname{tg} y} \\
&= \frac{2 \operatorname{tg} y}{1+3 \operatorname{tg}^2 y} \\
&= \frac{2}{\operatorname{ctg} y+3 \operatorname{tg} y}.
\end{aligned}$$

因为 $\operatorname{ctg} y>0, 3 \operatorname{tg} y>0, \operatorname{ctg} y \cdot 3 \operatorname{tg} y=3$，故当 $\operatorname{ctg} y=3 \operatorname{tg} y$，即$y=\frac{\pi}{6}$时，$\operatorname{ctg} y+3 \operatorname{tg} y$ 取最小值，从而 $\operatorname{tg} u$ 取最大值，u 取最大值.

由 $\operatorname{tg} x=3 \operatorname{tg} y$，$y=\frac{\pi}{6}$ 得 $x=\frac{\pi}{3}$.

因此，当 $x=\frac{\pi}{3}, y=\frac{\pi}{6}$时，$u=x-y$ 取最大值 $\frac{\pi}{6}$.

4. 求证 $\cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{2 \pi}{15} \cos \frac{3 \pi}{15} \cos \frac{4 \pi}{15} \cos \frac{5 \pi}{15} \cos \frac{6 \pi}{15} \cos \frac{7 \pi}{15}=\frac{1}{2^7}$.

〔分析一〕 利用公式$\cos\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$对左边进行计算.

〔证一〕 左边$=\dfrac{\sin\frac{2\pi}{15}}{2\sin\frac{\pi}{15}}\cdot\dfrac{\sin\frac{4\pi}{15}}{2\sin\frac{2\pi}{15}}\cdot\dfrac{\sin\frac{6\pi}{15}}{2\sin\frac{3\pi}{15}}$

$$\cdot\frac{\sin\frac{8\pi}{15}}{2\sin\frac{4\pi}{15}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{12\pi}{15}}{2\sin\frac{6\pi}{15}}\cdot\frac{\sin\frac{14\pi}{15}}{2\sin\frac{7\pi}{15}}.$$

由于

$$\sin\frac{14\pi}{15}=\sin\frac{\pi}{15},\qquad \sin\frac{12\pi}{15}=\sin\frac{3\pi}{15},$$

$$\sin\frac{8\pi}{15}=\sin\frac{7\pi}{15},$$

所以

$$原式左边=\frac{1}{2^7}.$$

〔分析二〕 由于

(1) $\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{15}}\cdot\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$$

$$=\frac{\sin\frac{16\pi}{15}}{2^4\sin\frac{\pi}{15}}$$

$$=-\frac{1}{2^4};$$

(2) $\cos\dfrac{3\pi}{15}\cos\dfrac{6\pi}{15}=\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{5}}\cdot\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$=\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{2^2\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$=\frac{1}{2^2};$$

(3) $\cos\frac{5\pi}{15}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$;

(4) $\cos\frac{7\pi}{15}=-\cos\frac{8\pi}{15}$.

于是问题可就此得证.

〔证二〕 左边 $=\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\left(-\cos\frac{8\pi}{15}\right)$

$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{3}$

$$=\frac{-\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cdot\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cdot\frac{1}{2}}{\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$=-\frac{1}{2^7}\cdot\frac{\sin\frac{16\pi}{15}\cdot\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{15}\cdot\sin\frac{\pi}{5}}.$$

$$=\frac{1}{2^7}.$$

5. 求证 $\operatorname{tg}55^\circ\operatorname{tg}65^\circ\operatorname{tg}75^\circ=\operatorname{tg}85^\circ$.

〔分析〕 转化为证 $\operatorname{tg}55^\circ\operatorname{tg}65^\circ\operatorname{tg}75^\circ\operatorname{ctg}85^\circ=1$.

〔证〕 $\operatorname{tg}55^\circ\operatorname{tg}65^\circ\operatorname{tg}75^\circ\operatorname{ctg}85^\circ$

$$=\frac{\sin 55^\circ \sin 65^\circ \sin 75^\circ \cos 85^\circ}{\cos 55^\circ \cos 65^\circ \cos 75^\circ \sin 85^\circ}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\cos 10^\circ-\cos 120^\circ)\cdot\frac{1}{2}(\sin 160^\circ-\sin 10^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 10^\circ+\cos 120^\circ)\cdot\frac{1}{2}(\sin 160^\circ+\sin 10^\circ)}$$

$$=\frac{\left(\cos 10^\circ+\frac{1}{2}\right)(\sin 20^\circ-\sin 10^\circ)}{\left(\cos 10^\circ-\frac{1}{2}\right)(\sin 20^\circ+\sin 10^\circ)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(2\cos 10^\circ+1)\cdot\sin 10^\circ(2\cos 10^\circ-1)}{\frac{1}{2}(2\cos 10^\circ-1)\cdot\sin 10^\circ(2\cos 10^\circ+1)}$$

$$=1.$$

所以

$$\operatorname{tg} 55^\circ \operatorname{tg} 65^\circ \operatorname{tg} 75^\circ=\operatorname{tg} 85^\circ.$$

6. 求证 $\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}=\frac{1+\sqrt{13}}{4}$,

$$\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}=\frac{1-\sqrt{13}}{4}.$$

〔分析〕 本题是两个相关联的等式，合在一起，容易觉察它们的内在规律，分别求值反而困难，为此，可通过求

$\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}$ 与 $\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}$ 的和

及积入手(其所以用和与积，是为了能用韦达定理，而且可行；其所以不用二式之差，因为差不能显示其内在规律)。

〔证〕 设 $x=\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}$,

$$y=\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13},$$ 则

$$x+y=\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{13}}\Big[\sin\frac{2\pi}{13}+\Big(\sin\frac{4\pi}{13}-\sin\frac{2\pi}{13}\Big)+\cdots$$

$$+\Big(\sin\frac{12\pi}{13}-\sin\frac{10\pi}{13}\Big)\Big]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{13}}\cdot\sin\frac{12\pi}{13}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

$$xy=\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{11\pi}{13}$$

$$+\cos\frac{3\pi}{13}\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}\cos\frac{11\pi}{13}$$

$$+\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{11\pi}{13}$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\Big(\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}\Big)+\Big(\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}\Big)$$

$$+\Big(\cos\frac{12\pi}{13}+\cos\frac{10\pi}{13}\Big)+\Big(\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{2\pi}{13}\Big)$$

$$+\Big(\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}\Big)+\Big(\cos\frac{14\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}\Big)$$

$$+\Big(\cos\frac{14\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}\Big)+\Big(\cos\frac{16\pi}{13}+\cos\frac{2\pi}{13}\Big)$$

$$+\Big(\cos\frac{20\pi}{13}+\cos\frac{2\pi}{13}\Big)\Big]$$

$$=\frac{3}{2}\Big(-\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}$$

$$+\cos\frac{10\pi}{13}\Big)$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{13}}\left[-\sin\frac{2\pi}{13}+\left(\sin\frac{3\pi}{13}-\sin\frac{\pi}{13}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\sin\frac{11\pi}{13}-\sin\frac{9\pi}{13}\right)\right]$$

$$=\frac{3}{4\sin\frac{\pi}{13}}\left(-\sin\frac{2\pi}{13}-\sin\frac{\pi}{13}+\sin\frac{11\pi}{13}\right)$$

$$=-\frac{3}{4}.$$

由 $x+y=\frac{1}{2}$，$xy=-\frac{3}{4}$ 及 $x>y$ 得

$$x=\frac{1+\sqrt{13}}{4},\quad y=\frac{1-\sqrt{13}}{4}.$$

所以

$$\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}=\frac{1+\sqrt{13}}{4},$$

$$\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}=\frac{1-\sqrt{13}}{4}.$$

7. 化简 $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

〔分析〕 为统一成同角关系，运用诱导公式，将分母化成 $\frac{\pi}{4}+\alpha$ 或 $\frac{\pi}{4}-\alpha$ 的三角函数.

〔解〕 原式 $=\dfrac{\cos 2\alpha}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$

$$=\frac{\cos 2\alpha}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$= 1.$$

8. 求证 $\sin 3A \sin^3 A + \cos 3A \cos^3 A = \cos^3 2A$.

〔分析〕 为统一成同角关系，采取将左边化成 $2A$ 或者 A 的三角函数.

〔证一〕 左边 $= \sin 3A \sin A \sin^2 A + \cos 3A \cos A \cos^2 A$

$$= \frac{1}{2}(\cos 2A - \cos 4A) \cdot \frac{1 - \cos 2A}{2}$$

$$+ \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 4A) \cdot \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(2\cos 2A + 2\cos 2A \cos 4A)$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2A(1 + \cos 4A)$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2A \cdot 2\cos^2 2A$$

$$= \cos^3 2A.$$

〔证二〕 因 $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$$= 3\sin A(\sin^2 A + \cos^2 A) - 4\sin^3 A$$

$$= 3\sin A \cos^2 A - \sin^3 A,$$

$$\cos 3A = \cos^3 A - 3\cos A \sin^2 A,$$

所以

左边 $= (3\sin A \cos^2 A - \sin^3 A)\sin^3 A$

$$+ (\cos^3 A - 3\cos A \sin^2 A)\cos^3 A$$

$$= \cos^6 A - 3\cos^4 A \sin^2 A + 3\cos^2 A \sin^4 A - \sin^6 A$$

$= (\cos^2 A - \sin^2 A)^3$

$= \cos^3 2A.$

9. 求证: $\sin^3\alpha\cos^5\alpha = \frac{3}{64}\sin 2\alpha + \frac{1}{64}\sin 4\alpha$

$$- \frac{1}{64}\sin 6\alpha - \frac{1}{128}\sin 8\alpha.$$

〔分析〕 表面看来，右边比较复杂，左边比较简单，应从右边证到左边，这就需将右边统一成 α 的三角函数．实际做起来，很麻烦．故考虑从左边证到右边．这只要应用降次的公式及积化和差的公式，就可达到目的．

〔证〕 $\sin^3\alpha\cos^5\alpha = (\sin\alpha\cos\alpha)^3\cos^2\alpha$

$$= \frac{1}{8}\sin^3 2\alpha \cdot \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{16}\sin^3 2\alpha(1+\cos 2\alpha)$$

$$= \frac{1}{16}\sin^2 2\alpha(\sin 2\alpha + \sin 2\alpha\cos 2\alpha)$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{1-\cos 4\alpha}{2}\left(\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\sin 4\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{32}\left(\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\sin 4\alpha - \sin 2\alpha\cos 4\alpha\right.$$

$$\left.- \frac{1}{2}\sin 4\alpha\cos 4\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{32}\left[\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\sin 4\alpha\right.$$

$$\left.- \frac{1}{2}(\sin 6\alpha - \sin 2\alpha) - \frac{1}{4}\sin 8\alpha\right]$$

$$= \frac{3}{64}\sin 2\alpha + \frac{1}{64}\sin 4\alpha - \frac{1}{64}\sin 6\alpha$$

$$- \frac{1}{128}\sin 8\alpha.$$

10. 证明：

$$\cos^2(A-\theta)+\cos^2(B-\theta)-2\cos(A-B)\cos(A-\theta)\cos(B-\theta)$$

的值与 θ 无关.

〔分析〕 本题实质就是要将上式化简成一个不含 θ 的式子.

〔证〕 因为

$$\begin{aligned}
&2\cos(A-B)\cos(A-\theta)\cos(B-\theta)\\
&=\cos(A-B)[\cos(A+B-2\theta)+\cos(A-B)]\\
&=\cos^2(A-B)+\cos(A-B)\cos(A+B-2\theta)\\
&=\cos^2(A-B)+\frac{1}{2}[\cos 2(A-\theta)+\cos 2(B-\theta)]\\
&=\cos^2(A-B)+\frac{1}{2}\left\{2\cos^2(A-\theta)-1+2\cos^2(B-\theta)-1\right\}\\
&=\cos^2(A-B)+\cos^2(A-\theta)+\cos^2(B-\theta)-1,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\cos^2(A-\theta)+\cos^2(B-\theta)-2\cos(A-B)\cdot\\
&\cos(A-\theta)\cos(B-\theta)\\
&=1-\cos^2(A-B)\\
&=\sin^2(A-B)
\end{aligned}$$

与 θ 无关.

11. 已知 α、β 为锐角，且

$$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1,$$

$$3\sin 2\alpha-2\sin 2\beta=0.$$

求证： $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

〔分析〕 欲证 $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$，可证 $\sin(\alpha+2\beta)=1$ 或 $\cos(\alpha+2\beta)=0$. 因 $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ 不存在，故不宜取 $\alpha+2\beta$ 的正切函数，

但 $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}-\alpha=2\beta$ 等价，故也可证 $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}2\beta$.

〔证一〕 由已知条件得

$$\cos 2\beta=3\sin^2\alpha \quad ①$$

$$\sin 2\beta=3\sin\alpha\cos\alpha \quad ②$$

①÷②，得 $\operatorname{ctg}2\beta=\operatorname{tg}\alpha$.

所以

$$\operatorname{ctg}2\beta=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right). \quad ③$$

由 α、β 都是锐角及③，知 2β、$\frac{\pi}{2}-\alpha$ 也都是锐角，

所以

$$2\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha.$$

即

$$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}.$$

〔证二〕 由①、②得

$$\begin{aligned}\cos^2 2\beta+\sin^2 2\beta&=9\sin^4\alpha+9\sin^2\alpha\cos^2\alpha\\&=9\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

所以

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{9}.$$

由于 α 是锐角，所以

$$\sin\alpha=\frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+2\beta)&=\sin\alpha\cos 2\beta+\cos\alpha\sin 2\beta\\&=\sin\alpha\cdot 3\sin^2\alpha+\cos\alpha\cdot 3\sin\alpha\cos\alpha\\&=3\sin\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\\&=1.\end{aligned}$$

因为

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2},\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2},$$

所以

$$0<\alpha+2\beta<\frac{3\pi}{2},$$

故必有　　　$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

〔证三〕　由①、②得

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+2\beta)&=\cos\alpha\cos2\beta-\sin\alpha\sin2\beta\\&=\cos\alpha\cdot3\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot3\sin\alpha\cos\alpha\\&=0.\end{aligned}$$

因为

$$0<\alpha+2\beta<\frac{3\pi}{2},$$

所以

$$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}.$$

12. 如果 $\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{tg}2\beta$、$\operatorname{tg}\beta$ 成等差数列，求证：

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\sin2\beta.$$

〔证〕　由 $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=2\operatorname{tg}2\beta$ 得

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha&=2\operatorname{tg}2\beta-\operatorname{tg}\beta\\&=\frac{4\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}-\operatorname{tg}\beta\\&=\frac{\operatorname{tg}\beta(3+\operatorname{tg}^2\beta)}{1-\operatorname{tg}^2\beta}.\end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{tg}\beta(3+\operatorname{tg}^2\beta)}{1-\operatorname{tg}^2\beta}-\operatorname{tg}\beta}{1+\dfrac{\operatorname{tg}\beta(3+\operatorname{tg}^2\beta)}{1-\operatorname{tg}^2\beta}\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$$=\frac{3\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}^3\beta-\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}^3\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta+3\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^4\beta}$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\beta(1+\operatorname{tg}^2\beta)}{(1+\operatorname{tg}^2\beta)^2}$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}$$

$$=\sin 2\beta.$$

13. 已知 $\sin x=k\sin(A-x)$，且 $k\neq-1$，求证：

$$\operatorname{tg}\left(x-\frac{A}{2}\right)=\frac{k-1}{k+1}\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

〔分析〕 将已知条件和结论变形为

已知：$\dfrac{\sin x}{\sin(A-x)}=k$，求证：$\dfrac{\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{A}{2}\right)}{\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}}=\dfrac{k-1}{k+1}$.

这就启发我们应使用合分比定理来进行证明.

〔证〕 $\sin x=k\sin(A-x)$，

即

$$\frac{\sin x}{\sin(A-x)}=k.$$

依合分比定理有

$$\frac{\sin x-\sin(A-x)}{\sin x+\sin(A-x)}=\frac{k-1}{k+1}.$$

但

$$\frac{\sin x-\sin(A-x)}{\sin x+\sin(A-x)}=\frac{2\cos\dfrac{A}{2}\sin\left(x-\dfrac{A}{2}\right)}{2\sin\dfrac{A}{2}\cos\left(x-\dfrac{A}{2}\right)}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\left(x-\frac{A}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}},$$

因此

$$\frac{\operatorname{tg}\left(x-\frac{A}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=\frac{k-1}{k+1}.$$

即

$$\operatorname{tg}\left(x-\frac{A}{2}\right)=\frac{k-1}{k+1}\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

14．求证两个简谐振动

$$S_1=A_1\sin(\omega t+\phi_1),\quad S_2=A_2\sin(\omega t+\phi_2)$$

的和仍为简谐振动.

〔证〕 $$\begin{aligned}S_1+S_2&=A_1\sin(\omega t+\phi_1)+A_2\sin(\omega t+\phi_2)\\&=A_1\sin\omega t\cos\phi_1+A_1\cos\omega t\sin\phi_1\\&\quad+A_2\sin\omega t\cos\phi_2+A_2\cos\omega t\sin\phi_2\\&=(A_1\cos\phi_1+A_2\cos\phi_2)\sin\omega t\\&\quad+(A_1\sin\phi_1+A_2\sin\phi_2)\cos\omega t\\&=A\sin(\omega t+\phi).\end{aligned}$$

其中 $$\begin{aligned}A&=\sqrt{(A_1\cos\phi_1+A_2\cos\phi_2)^2+(A_1\sin\phi_1+A_2\sin\phi_2)^2}\\&=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2(\cos\phi_1\cos\phi_2+\sin\phi_1\sin\phi_2)}\\&=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\phi_1-\phi_2)},\end{aligned}$$

$$\phi=arc\operatorname{tg}\frac{A_1\sin\phi_1+A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1+A_2\cos\phi_2}.$$

故 S_1+S_2 仍是简谐振动.

15．已知 $A+B+C=\pi$，求证：

$$\sin 2nA+\sin 2nB+\sin 2nC$$

$$=(-1)^{n+1}4\sin nA\sin nB\sin nC.$$

其中 n 为整数.

〔证〕 因 $A+B+C=\pi$,

$$\sin 2nc=\sin 2n[\pi-(A+B)]=\sin[2n\pi-2n(A+B)]$$
$$=-\sin 2n(A+B),$$

所以

$$\begin{aligned}&\sin 2nA+\sin 2nB+\sin 2nC\\&=\sin 2nA+\sin 2nB-\sin 2n(A+B)\\&=2\sin n(A+B)\cos n(A-B)\\&\quad-2\sin n(A+B)\cos n(A+B)\\&=2\sin n(A+B)[\cos n(A-B)-\cos n(A+B)]\\&=2\sin n(\pi-C)\cdot 2\sin nA\sin nB\\&=(-1)^{n+1}4\sin nA\sin nB\sin nC.\end{aligned}$$

16. 设 α、m 为常数，θ 是任意角，证明：

$$[\cos(\alpha+\theta)+m\cos\theta]^2\leqslant 1+2m\cos\alpha+m^2.$$

〔分析〕 证明不等式时，常通过移项，从而转证所得式子大于零或者小于零，本题亦此.

〔证〕 $$\begin{aligned}f(\theta)&=1+2m\cos\alpha+m^2-[\cos(\alpha+\theta)+m\cos\theta]^2\\&=1+2m\cos\alpha+m^2-\cos^2(\alpha+\theta)\\&\quad-2m\cos(\alpha+\theta)\cos\theta-m^2\cos^2\theta\\&=\sin^2(\alpha+\theta)+2m[\cos\alpha-\cos(\alpha+\theta)\cos\theta]\\&\quad+m^2\sin^2\theta.\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}\cos\alpha-\cos(\alpha+\theta)\cos\theta&=\cos[(\alpha+\theta)-\theta]-\cos(\alpha+\theta)\cos\theta\\&=\sin(\alpha+\theta)\sin\theta,\end{aligned}$$

所以

$$f(\theta)=\sin^2(\alpha+\theta)+2m\sin(\alpha+\theta)\sin\theta+m^2\sin^2\theta$$

$$=[\sin(\alpha+\theta)+m\sin\theta]^2\geqslant 0.$$

即

$$[\cos(\alpha+\theta)+m\cos\theta]^2\leqslant 1+2m\cos\alpha+m^2.$$

17. 已知 $0<x<\pi$，求证 $\operatorname{ctg}\frac{x}{8}-\operatorname{ctg}x>3$.

〔**分析**〕 对于 $\operatorname{ctg}\frac{x}{8}$ 和 $\operatorname{ctg}x$，没有公式使它们直接发生联系，但 $\frac{x}{8}$ 是 $\frac{x}{4}$ 的半角，$\frac{x}{4}$ 是 $\frac{x}{2}$ 的半角、$\frac{x}{2}$ 是 x 的半角，这就启发我们反复运用半角公式.

半角的余切公式以运用

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\csc\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$$

为宜.

〔**证**〕 由 $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\csc\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$ 有

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\csc x+\operatorname{ctg}x,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{4}=\csc\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{8}=\csc\frac{x}{4}+\operatorname{ctg}\frac{x}{4}.$$

把上面三个式子的两边分别相加，并抵消相同的项，得

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{8}=\csc x+\csc\frac{x}{2}+\csc\frac{x}{4}+\operatorname{ctg}x.$$

即

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{8}-\operatorname{ctg}x=\csc x+\csc\frac{x}{2}+\csc\frac{x}{4}.$$

又由 $0<x<\pi$ 知

$$\csc x\geqslant 1,\quad \csc\frac{x}{2}>1,\quad \csc\frac{x}{4}>1,$$

所以

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{8}-\operatorname{ctg}x>3.$$

〔附注〕 因 $\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}=\dfrac{1+\cos\frac{x}{2^{n-1}}}{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}=\csc\frac{x}{2^{n-1}}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{n-1}}$,

故当 $0<x<\pi$ 时，我们可证

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x>n,$$

并且可以得到

$$\csc x+\csc\frac{x}{2}+\csc\frac{x}{2^2}+\cdots+\csc\frac{x}{2^n}$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{n+1}}-\operatorname{ctg}x.$$

这是级数求和的一种方法.

18. 设 A、B 是任意实数，且 $A\neq B$，k 是正整数，证明

$$\left|\frac{\cos kB\cos A-\cos kA\cos B}{\cos B-\cos A}\right|\leqslant k^2-1.$$

〔证〕 运用数学归纳法可证

$$|\sin kx|\leqslant k|\sin x|,$$

即

$$\left|\frac{\sin kx}{\sin x}\right|\leqslant k.$$

于是有

$$\left|\frac{\cos kB\cos A-\cos kA\cos B}{\cos B-\cos A}\right|$$

$$=\left|\frac{\frac{1}{2}[\cos(kB+A)+\cos(kB-A)-\cos(kA+B)-\cos(kA-B)]}{\cos B-\cos A}\right|$$

$$=\left|\frac{\frac{1}{2}[\cos(kB+A)-\cos(kA+B)+\cos(kB-A)-\cos(kA-B)]}{\cos B-\cos A}\right|$$

$$=\left|\frac{\sin(k+1)\frac{A+B}{2}\sin(k-1)\frac{A-B}{2}-\sin(k-1)\frac{A+B}{2}\sin(k+1)\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\sin(k+1)\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\right|\cdot\left|\frac{\sin(k-1)\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\right|+\left|\frac{\sin(k-1)\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\right|\cdot\left|\frac{\sin(k+1)\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\right|\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}[(k+1)(k-1)+(k-1)(k+1)]$$

$$=k^2-1.$$

19. 设 a、b、A、B 为给定的实常数.

$$f(\theta)=1-a\cos\theta-b\sin\theta-A\cos 2\theta-B\sin 2\theta,$$

证明：若 $f(\theta)\geqslant 0$ 对所有实数 θ 成立，则

$$a^2+b^2\leqslant 2,\quad A^2+B^2\leqslant 1.$$

〔分析〕 应将 $f(\theta)$ 变形为

$$f(\theta)=1-\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\phi_1)-\sqrt{A^2+B^2}\sin(2\theta+\phi_2).$$

其中 $\phi_1=arc\operatorname{tg}\frac{a}{b}$, $\phi_2=arc\operatorname{tg}\frac{A}{B}$.

由 $f(\theta)\geqslant 0$，得

$$1-\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\phi_1)\geqslant\sqrt{A^2+B^2}\sin(2\theta+\phi_2)\qquad ①$$

欲证 $a^2+b^2\leqslant 2$. 就应利用 $f(\theta)\geqslant 0$ 对所有实数 θ 成立，得出一个新的不等式，它和①联立，能消去 A、B. 同理可证

$$A^2+B^2\leqslant 1.$$

〔证〕 令 $\phi_1=arc\operatorname{tg}\frac{a}{b}$，$\phi_2=arc\operatorname{tg}\frac{A}{B}$，则有

$$f(\theta)=1-\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\phi_1)-\sqrt{A^2+B^2}\sin(2\theta+\phi_2).$$

因为 $f(\theta)\geqslant 0$，所以

$$1-\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\phi_1)\geqslant\sqrt{A^2+B^2}\sin(2\theta+\phi_2). \qquad ①$$

由于对于任何 θ，$f(\theta)\geqslant 0$ 成立，故对于 $\theta+2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$f(\theta)\geqslant 0$ 也成立，将①式中的 θ 换成 $\theta+2k\pi+\frac{\pi}{2}$，得

$$1-\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\phi_1)\geqslant-\sqrt{A^2+B^2}\sin(2\theta+\phi_2). \qquad ②$$

①+②：　$2-\sqrt{a^2+b^2}[\sin(\theta+\phi_1)+\cos(\theta+\phi)]\geqslant 0$，

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\theta+\phi_1+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 2,$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\theta+\phi_1+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}, \qquad ③$$

③式对于 $\theta+\phi_1+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}-\phi_1$ 也应成立，

所以

$$\sqrt{a^2+b^2}\leqslant\sqrt{2},$$

即

$$a^2+b^2\leqslant 2.$$

①式对于 $\theta+(2k+1)\pi$ 应成立，

所以

$$1+\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\phi_1)\geqslant\sqrt{A^2+B^2}\sin(2\theta+\phi_2) \qquad ④$$

①+④：　$2\geqslant 2\sqrt{A^2+B^2}\sin(2\theta+\phi_2)$，

$$\sqrt{A^2+B^2}\sin(2\theta+\phi_2)\leqslant 1. \qquad ⑤$$

⑤式对于 $2\theta+\phi_2=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\phi_2}{2}$ 也应成立，

所以

$$\sqrt{A^2+B^2}\leqslant 1,$$

即

$$A^2+B^2\leqslant 1.$$

20. 消去下式中的 θ

$$\begin{cases}\operatorname{tg}(\theta-\alpha)+\operatorname{tg}(\theta-\beta)=a\\ \operatorname{ctg}(\theta-\alpha)+\operatorname{ctg}(\theta-\beta)=b.\end{cases}\quad (a\neq -b)$$

〔分析〕 因 $(\theta-\alpha)-(\theta-\beta)=\beta-\alpha$,

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\operatorname{tg}[(\theta-\alpha)-(\theta-\beta)]$$

$$=\frac{\operatorname{tg}(\theta-\alpha)-\operatorname{tg}(\theta-\beta)}{1+\operatorname{tg}(\theta-\alpha)\operatorname{tg}(\theta-\beta)}.$$

根据已知条件,能求出 $\operatorname{tg}(\theta-\alpha)-\operatorname{tg}(\theta-\beta)$ 和 $\operatorname{tg}(\theta-\alpha)\operatorname{tg}(\theta-\beta)$ 的值,从而可达到消去 θ 之目的.

〔解〕 因为

$$\operatorname{tg}(\theta-\alpha)+\operatorname{tg}(\theta-\beta)=a,\quad \operatorname{ctg}(\theta-\alpha)+\operatorname{ctg}(\theta-\beta)=b,$$

$$\operatorname{ctg}(\theta-\alpha)+\operatorname{ctg}(\theta-\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\theta-\alpha)}+\frac{1}{\operatorname{tg}(\theta-\beta)}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}(\theta-\alpha)+\operatorname{tg}(\theta-\beta)}{\operatorname{tg}(\theta-\alpha)\operatorname{tg}(\theta-\beta)}$$

所以

$$b=\frac{a}{\operatorname{tg}(\theta-\alpha)\operatorname{tg}(\theta-\beta)},$$

$$\operatorname{tg}(\theta-\alpha)\operatorname{tg}(\theta-\beta)=\frac{a}{b}.$$

又

$$[\operatorname{tg}(\theta-\alpha)-\operatorname{tg}(\theta-\beta)]^2$$

$$=[\operatorname{tg}(\theta-\alpha)+\operatorname{tg}(\theta-\beta)]^2-4\operatorname{tg}(\theta-\alpha)\operatorname{tg}(\theta-\beta)$$

$$=a^2-\frac{4a}{b},$$

所以

$$\operatorname{tg}^2(\beta-\alpha)=\operatorname{tg}^2[(\theta-\alpha)-(\theta-\beta)]$$

$$=\frac{[\mathrm{tg}(\theta-\alpha)-\mathrm{tg}(\theta-\beta)]^2}{[1+\mathrm{tg}(\theta-\alpha)\,\mathrm{tg}(\theta-\beta)]^2}$$

$$=\frac{a^2-\frac{4a}{b}}{\left(1+\frac{a}{b}\right)^2},$$

$$=\frac{a^2b^2-4ab}{(a+b)^2},$$

即

$$ab(ab-4)=(a+b)^2\mathrm{tg}^2(\beta-\alpha).$$

21．求 $y=a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x$ 的极值．

〔分析〕 根据正弦波形求极值．本题宜化为

$$y=A\sin(\omega x+\phi)+k$$

的形式．

〔解〕 $y=a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x$

$$=\frac{a}{2}(1-\cos 2x)+\frac{b}{2}\sin 2x+\frac{c}{2}(1+\cos 2x)$$

$$=\frac{1}{2}[b\sin 2x+(c-a)\cos 2x]+\frac{a+c}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+(c-a)^2}\,\sin\left(2x+arc\,\mathrm{tg}\frac{c-a}{b}\right)+\frac{a+c}{2}.$$

因此，当 $2x+arc\,\mathrm{tg}\frac{c-a}{b}=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，

即 $x=n\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}arc\,\mathrm{tg}\frac{c-a}{b}$ 时，函数取极大值

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+(c-a)^2}+\frac{a+c}{2}$$

$$=\frac{a+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ac}}{2},$$

当 $2x+arc\,\mathrm{tg}\frac{c-a}{b}=2n\pi-\frac{\pi}{2}$，即 $x=n\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}arc\,\mathrm{tg}\frac{c-a}{b}$

时，函数取极小值

$$y=-\frac{1}{2}\sqrt{b^2+(c-a)^2}+\frac{a+c}{2}$$

$$=\frac{a+c-\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ac}}{2}.$$

22．求证 $(1+\mathrm{tg}\,1^\circ)(1+\mathrm{tg}\,2^\circ)\cdots(1+\mathrm{tg}\,44^\circ)=2^{22}$.

〔分析〕 本题特征：左边为44个因子所形成，右边为22个2的连乘积，因此考虑左边是否存在每两个两个因子之积为2．

又 $1^\circ+44^\circ=2^\circ+43^\circ=\cdots=45^\circ$，故试证左边对称的两因子之积是否为2．

〔证〕 因

$$\mathrm{tg}\,45^\circ=\mathrm{tg}(1^\circ+44^\circ)$$

$$=\frac{\mathrm{tg}\,1^\circ+\mathrm{tg}\,44^\circ}{1-\mathrm{tg}\,1^\circ\,\mathrm{tg}\,44^\circ},$$

所以

$$\mathrm{tg}\,1^\circ+\mathrm{tg}\,44^\circ=1-\mathrm{tg}\,1^\circ\,\mathrm{tg}\,44^\circ,$$

即有

$$(1+\mathrm{tg}\,1^\circ)(1+\mathrm{tg}\,44^\circ)=2.$$

同理

$$(1+\mathrm{tg}\,2^\circ)(1+\mathrm{tg}\,43^\circ)=2,$$

……

$$(1+\mathrm{tg}\,22^\circ)(1+\mathrm{tg}\,23^\circ)=2.$$

所以

$$(1+\mathrm{tg}\,1^\circ)(1+\mathrm{tg}\,2^\circ)\cdots(1+\mathrm{tg}\,44^\circ)=2^{22}.$$

23．设 $x+y+z=xyz$ 且 $x\neq\pm1$，$y\neq\pm1$，$z\neq\pm1$，求证：

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)},$$

〔证〕 设 $x=\operatorname{tg}\alpha$, $y=\operatorname{tg}\beta$, $z=\operatorname{tg}r$, 因

$$x+y+z=xyz, \qquad \text{即}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma,$$

所以 $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$ (k 为整数).

$$\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}2\beta+\operatorname{tg}2\gamma=\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}2\beta\operatorname{tg}2\gamma,$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}+\frac{2\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}^2\gamma}$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}^2\gamma},$$

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2},$$

即

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

24. 利用复数的性质证明

$$\sin^6\alpha=\frac{1}{32}\left(10-15\cos2\alpha+6\cos4\alpha-\cos6\alpha\right).$$

〔证〕 设 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, 则

$$\frac{1}{z}=\cos\alpha-i\sin\alpha, \qquad z^n=\cos n\alpha-i\sin n\alpha,$$

$$\frac{1}{z^n}=\cos n\alpha-i\sin n\alpha, \qquad z+\frac{1}{z}=2\cos\alpha,$$

$$z-\frac{1}{z}=2i\sin\alpha, \qquad z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\alpha.$$

又 $$(2i\sin\alpha)^6=\left(z-\frac{1}{z}\right)^6$$

$$=z^6-6z^4+15z^2-20+\frac{15}{z^2}-\frac{6}{z^4}+\frac{1}{z^6}$$

$$=\left(z^6+\frac{1}{z^6}\right)-6\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)+15\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)$$

$$-20$$

$$=2\cos 6\alpha-12\cos 4\alpha+30\cos 2\alpha-20,$$

所以 $\sin^6\alpha=\dfrac{1}{32}(10-15\cos 2\alpha+6\cos 4\alpha-\cos 6\alpha)$.

三、习　　题

1. 已知 $\mathrm{tg}\alpha=2\sqrt{2}$，$180^\circ<\alpha<270^\circ$，求 $\cos 2\alpha$、$\cos\dfrac{\alpha}{2}$的值.

2. 已知 $\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{ctg}\,\beta=-\dfrac{1}{3}$，$\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$，求 $\csc(\alpha+\beta)$ 的值.

3. 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{7}{25}$，$\alpha$ 在第三象限，求 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$、$\cos\dfrac{\alpha}{2}$和 $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$的值.

4. 已知 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{5}{13}$，$0<x<\dfrac{\pi}{4}$，求$\dfrac{\cos 2x}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}$的值.

5. 设 α、β 为锐角，且 $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，求证 $\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

6. 求证：$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}$.

7. 设 $\sin\alpha$ 和 $\sin\beta$ 是方程

$$x^2-(\sqrt{2}\cos 20^\circ)x+\left(\cos^2 20^\circ-\frac{1}{2}\right)=0$$

的两个根，且 α、β 都是锐角，求 α 和 β 的度数.

8. 设 $\mathrm{tg}\alpha$ 和 $\mathrm{tg}\beta$ 是方程 $x^2+px+q=0$ 的二根，求

$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$

的值。

9. 设 x 的二次方程

$$(\sin\theta+1)(x^2-x)=(\sin\theta-1)(x-2)$$

的根是实数，而且两根的绝对值相等，符号相反，取其中的正根 x，求

$$\log_2 x^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\cdots\frac{1}{2^n}}$$

的值。

10. 设方程 $a\cos x-b\sin x+c=0$ 在 $(0,\pi)$ 中有相异二根 α、β，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值。

11. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=p$，$\cos\alpha+\cos\beta=q$，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值。

12. 求证下列各题：

(1) $\dfrac{1}{\sin10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos10^\circ}=4$；

(2) $\sin50^\circ(1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}10^\circ)=1$；

(3) $\csc5^\circ\sqrt{1+\sin620^\circ}=\sqrt{2}$；

(4) $\sin9^\circ=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$；

(5) $\sin\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{6\pi}{7}=\dfrac{1}{8}$；

(6) $\mathrm{tg}10^\circ\,\mathrm{tg}50^\circ\,\mathrm{tg}70^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；

(7) $\mathrm{tg}9^\circ-\mathrm{tg}27^\circ-\mathrm{tg}63^\circ+\mathrm{tg}81^\circ=4$；

(8) $\cos40^\circ\cos80^\circ+\cos80^\circ\cos160^\circ+\cos160^\circ\cos40^\circ$

$=-\dfrac{3}{4}$；

(9) $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$;

(10) $1+4\cos\frac{2\pi}{7}-4\cos^2\frac{2\pi}{7}-8\cos^3\frac{2\pi}{7}=0$;

(11) $\sin47^\circ+\sin61^\circ-\sin11^\circ-\sin25^\circ=\cos7^\circ$;

(12) $\operatorname{tg}6^\circ\operatorname{tg}42^\circ\operatorname{tg}66^\circ\operatorname{tg}78^\circ=1$;

(13) $\cos\frac{2\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}-\cos\frac{7\pi}{15}-\cos\frac{\pi}{15}=\frac{1}{2}$.

13 化简下列各式：

(1) $\cos^2\phi+\cos^2(\theta+\phi)-2\cos\theta\cos\phi\cos(\theta+\phi)$;

(2) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$

$-\sin\frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}+2\alpha\right)$;

(3) $(1+\sin x)\left[\frac{x}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}-2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]$;

(4) $\frac{2(\sin2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos3\alpha+\sin3\alpha}$.

14. 求证下列各恒等式：

(1) $\frac{2\sin A}{\cos A+\cos3A}=\operatorname{tg}2A-\operatorname{tg}A$;

(2) $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\cos\phi}{1-\sin\phi}$

$=\frac{2(\sin\theta-\sin\phi)}{\sin(\theta-\phi)+\cos\theta-\cos\phi}$;

(3) $\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)=2\csc\theta$;

(4) $\sin\theta\cos^5\theta-\cos\theta\sin^5\theta=\frac{1}{4}\sin4\theta$;

(5) $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$;

(6) $\sin^8\alpha-\cos^8\alpha+\cos 2\alpha=\dfrac{1}{4}\sin 2\alpha\sin 4\alpha$;

(7) $\sin^4\alpha=\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha+\dfrac{1}{8}\cos 4\alpha$;

(8) $$\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\frac{1}{\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)}+\frac{1}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}$$
$$=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}.$$

15. 已知 $A+B+C=\pi$，求证：

(1) $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$;

(2) $\operatorname{tg}nA+\operatorname{tg}nB+\operatorname{tg}nC=\operatorname{tg}nA\operatorname{tg}nB\operatorname{tg}nC$;

(3) $\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A=1$.

16. 已知 $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$，求证：

(1) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1$;

(2) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma\geqslant 1$;

(3) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$.

17. 设 $x+y+z=k\cdot\dfrac{\pi}{2}$，试问 k 为何值时，

$$u=\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$$

与 x、y、z 无关.

18. 求证：

(1) $\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\sqrt{3}\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ=\sqrt{3}$;

(2) $\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)$
$+\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)=1$;

(3) $\operatorname{tg}5\alpha-\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}5\alpha\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{tg}2\alpha$.

19. 已知$|A|<1$，$\cos\beta\neq A$，$\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}$，且

$$\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta),$$

求证：$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}$.

20. 已知$\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$，且$\beta\neq k\pi$（$k$为整数），$m\neq1$，求证：$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\operatorname{tg}\alpha$.

21. 已知$\operatorname{tg}^2\theta=\operatorname{tg}(\theta-\alpha)\operatorname{tg}(\theta-\beta)$，且$\alpha+\beta\neq k\pi$，求证：$\operatorname{tg}2\theta=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

22. 已知$\frac{e^2-1}{1+2e\cos\alpha+e^2}=\frac{1+2e\cos\beta+e^2}{e^2-1}$，求证：

(1) $\frac{e^2-1}{1+2e\cos\alpha+e^2}=\frac{e+\cos\beta}{e+\cos\alpha}=\pm\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

$=-\frac{1+e\cos\beta}{1+e\cos\alpha}$;

(2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\pm\frac{1+e}{1-e}$.

23. 设$\sin\theta=\frac{a}{b}\sin\phi$，$\cos\theta=\frac{c}{d}\cos\phi$，这里$\phi\neq\frac{k\pi}{2}$，求证：$\cos(\theta\mp\phi)=\frac{ac\pm bd}{ad\pm bc}$.

24. 设$\cos x=\cos\alpha\cos\beta$，求证：

$$\operatorname{tg}\frac{x+\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{x-\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{x+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{x-\beta}{2}$$

$$=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

25. 已知$\cos\alpha=\operatorname{tg}\beta$，$\cos\beta=\operatorname{tg}\gamma$，$\cos\gamma=\operatorname{tg}\alpha$，（$\alpha$，$\beta$，$\gamma$均不为$k\pi/2$）求证：

$\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\sin^2\gamma=4\sin^2 18°$.

26. 在锐角三角形 ABC 中，已知 $\cos A=\cos\alpha\sin\beta$，$\cos B=\cos\beta\sin\gamma$，$\cos C=\cos\gamma\sin\alpha$。试证：$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=1$.

27. 设 $\sin A+\sin B+\sin C=\cos A+\cos B+\cos C=0$，求证：

(1) $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=3\sin(A+B+C)$，

$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=3\cos(A+B+C)$；

(2) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$ 为定值.

28. 设 A、B、C 都是锐角，且 $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=1$，求证：$\frac{\pi}{2}\leqslant A+B+C<\pi$.

29. 已知 $a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta=(a+b)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$，求证：

$$a\cos\beta=b\cos\alpha.$$

30. 已知$\frac{\operatorname{tg}(A-B)}{\operatorname{tg}A}+\frac{\sin^2 C}{\sin^2 A}=1$，求证：$\operatorname{tg}^2 C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B$.

31. 设 $e^x-e^{-x}=2\operatorname{tg}\theta$，试证：

(1) $e^x+e^{-x}=2\sec\theta$；

(2) $x=\log_e\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\ (e>0,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2})$.

32. 设 $0<\alpha<\pi$，$0<\beta<\pi$，又 $\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}$，试证：$\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$.

33. 如果 $(x-a)\cos\theta+y\sin\theta=(x-a)\cos\theta_1+y\sin\theta_1=a$ 和 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}=2l$，则有 $y^2=2ax-(1-l^2)x^2$.

34. 已知 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，且 $\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{tg}\beta$、$\operatorname{tg}\gamma$ 成等差数列.

求证：$\cos(\beta+\gamma-\alpha)=\frac{4+5\cos 2\gamma}{5+4\cos 2\gamma}$.

35. $\triangle ABC$ 的三内角 A、B、C 成等比数列，其公比为 3，求证：

$$\cos B\cos C+\cos C\cos A+\cos A\cos B=-\frac{1}{4}.$$

36. 已知

$$a\sin x+b\cos x=0,\qquad ①$$

$$A\sin 2x+B\cos 2x=C,\qquad ②$$

其中 a、b 不同时为零，求证：

$$2abA+(b^2-a^2)B+(a^2+b^2)C=0.\qquad ③$$

37. 已知 $\dfrac{\cos x}{a}=\dfrac{\cos(x+\alpha)}{b}=\dfrac{\cos(x+2\alpha)}{c}$

$$=\frac{\cos(x+3\alpha)}{d},$$

求证：$\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{b+d}{c}$.

38. 和差化积：

(1) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$；

(2) $(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2$；

(3) $\sin\alpha+\cos\alpha+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+\sin 3\alpha+\cos 3\alpha$；

(4) $\operatorname{ctg}^2 2x-\operatorname{tg}^2 2x-8\cos 4x\operatorname{ctg}4x$；

(5) $(\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha)^3-\sin^3\alpha-\sin^3 2\alpha-\sin^3 3\alpha$.

39. 已知 $A+B+C=\pi$，求证：

(1) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$；

(2) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$；

(3) $\dfrac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}B}+\dfrac{\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}C}+\dfrac{\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A}+\dfrac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}C}+\dfrac{\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A}+\dfrac{\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}B}$

$=\sec A\sec B\sec C-2$；

(4) $\operatorname{ctg} B+\dfrac{\cos C}{\sin B\cos A}=\operatorname{tg} A$;

(5) $\dfrac{\cos A}{\sin B\sin C}+\dfrac{\cos B}{\sin C\sin A}+\dfrac{\cos C}{\sin A\sin B}=2.$

40. 在四边形 $ABCD$ 中，求证：

(1) $\sin A-\sin B+\sin C-\sin D$

$=4\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{B+C}{2}\sin\dfrac{C+A}{2}$;

(2) $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C-\cos^2 D$

$=2\cos(A+B)\sin(B+C)\sin(C+A)$.

41. 设四边形 $ABCD$ 是不含直角的凸四边形，试证：

$$\frac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C+\operatorname{tg} D}{\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C\operatorname{tg} D}=\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} D.$$

42. 设

$$a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+\cdots+a_n\cos\alpha_n=0,$$

$$a_1\cos(\alpha_1+1)+a_2\cos(\alpha_2+1)+\cdots+a_n\cos(\alpha_n+1)=0,$$

试证：对于任何实数 β，有

$$a_1\cos(\alpha_1+\beta)+a_2\cos(\alpha_2+\beta)+\cdots+a_n\cos(\alpha_n+\beta)=0.$$

43. 设 $f(x)=A\cos x+B\sin x$，其中 A、B 为常数，如果对于自变量的两个值 x_1 和 x_2，$x_1-x_2\neq k\pi$（k 为整数），$f(x_1)=f(x_2)=0$，那么 $f(x)\equiv 0$.

44. 已知 $\cos\theta-\sin\theta=b$，$\cos 3\theta+\sin 3\theta=a$ 求证：

$$a=3b-2b^3.$$

45. 由方程组 $\dfrac{\cos(\alpha-3\phi)}{\cos^3\phi}=\dfrac{\sin(\alpha-3\phi)}{\sin^3\phi}=m$ 消去 ϕ.

46. 由方程组

$$\begin{cases} a\cos\theta+b\sin\theta=c & ① \\ a\cos^2\theta+2a\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta=c & ② \end{cases}$$

消去 θ（这里设 $a\neq b$）.

47．由方程组

$$\begin{cases} x\cos\theta+y\sin\theta=2a & ① \\ x\cos\phi+y\sin\phi=2a & ② \\ 2\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\phi}{2}=1 & ③ \end{cases}$$

消去 θ 和 ϕ.

48．由方程组

$$\begin{cases} \sin x=a\sin(y-z) & ① \\ \sin y=b\sin(z-x) & ② \\ \sin z=c\sin(x-y) & ③ \end{cases}$$

消去 x、y、z（这里 $a\neq 1$，$b\neq 1$，$c\neq 1$）.

49．试比较 $2+\sin x+\cos x$ 与 $\dfrac{2}{2-\sin x-\cos x}$ 的大小.

50．直角三角形的两条直角边的长为 x、y，斜边的长为 z，试证明：对于任何正数 m、n，有

$$\frac{mx+ny}{\sqrt{m^2+n^2}}\leqslant z.$$

51．若 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，求证：$\alpha-\sin\alpha<\beta-\sin\beta$.

52．求证：

(1) $\sin^6x+\cos^6x\geqslant\dfrac{1}{4}$；

(2) $\left(\dfrac{1}{\sin^4\alpha}-1\right)\left(\dfrac{1}{\cos^4\alpha}-1\right)\geqslant 9$；

(3) $(\operatorname{ctg}^2x-1)(3\operatorname{ctg}^2x-1)(\operatorname{ctg}3x\operatorname{tg}2x-1)\leqslant -1$.

53．设 $13^\circ\leqslant x\leqslant 28^\circ$，试证：

(1) $\dfrac{3}{2}\leqslant\sin^2(4x+8^\circ)+\cos^2(4x-82^\circ)\leqslant 2$；

(2) $0\leqslant \mathrm{ctg}^2(4x+8^\circ)+\mathrm{tg}^2(4x-82^\circ)\leqslant\dfrac{2}{3}$.

54. 设 $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$，$0\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0\leqslant\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$0\leqslant\gamma<\dfrac{\pi}{2}$，求证：

$$\sqrt{\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta+5}+\sqrt{\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma+5}+\sqrt{\mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\alpha+5}\leqslant4\sqrt{3}.$$

55. 设 $A+B+C=\pi$，求证：

(1) $1<\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\dfrac{3}{2}$；

(2) $\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$；

(3) $\cos A\cos B\cos C\leqslant\dfrac{1}{8}$；

(4) $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\begin{cases}>2\left(\text{当}\triangle ABC\text{ 为锐角三角形时}\right)\\=2\left(\text{当}\triangle ABC\text{ 为直角三角形时}\right)\\<2\left(\text{当}\triangle ABC\text{ 为钝角三角形时}\right)\end{cases}$

(5) $\csc\dfrac{A}{2}+\csc\dfrac{B}{2}+\csc\dfrac{C}{2}\geqslant6$；

(6) $\mathrm{ctg}^2\dfrac{A}{2}+\mathrm{ctg}^2\dfrac{B}{2}+\mathrm{ctg}^2\dfrac{C}{2}\geqslant9$；

(7) $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A\sin B\sin C}\geqslant4$；

(8) $\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}+\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}$

$+\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\leqslant\dfrac{9}{8}$.

56. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，求证：

(1) $\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C\geqslant3\sqrt{3}$；

(2) $\operatorname{tg}A(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)+\operatorname{tg}B(\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}A)$
$+\operatorname{tg}C(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B)\geqslant 6$;

(3) $\sin A+\sin B+\sin C+\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C>2\pi$;

(4) $\operatorname{tg}^nA+\operatorname{tg}^nB+\operatorname{tg}^nC>3+\dfrac{3n}{2}$.

57. 设 α、β、γ 是任一锐角三角形的三个内角，且 $\alpha<\beta<\gamma$，求证：$\sin 2\alpha>\sin 2\beta>\sin 2\gamma$.

58. 在 $\triangle ABC$ 中，$\lg\operatorname{tg}A+\lg\operatorname{tg}C=2\lg\operatorname{tg}B$，求证：$\dfrac{\pi}{3}\leqslant B<\dfrac{\pi}{2}$.

59. 已知 $mx^2+(2m-3)x+(m-2)=0$ 的二根为 $\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{tg}\beta$，求证：$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\geqslant-\dfrac{3}{4}$.

60. 设 x 为实数，求证：

$$y=\frac{x^2-2x\cos\alpha+1}{x^2-2x\cos\beta+1}$$

的值在 $\dfrac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2\dfrac{\beta}{2}}$ 和 $\dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\beta}{2}}$ 之间.

61. 设 $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\operatorname{tg}\theta+m-1}{\operatorname{tg}\theta+m+1}$，且 m 是实数，试证：m 的值不可能在 -1 与 1 之间.

62. 实数 q 在什么范围内，方程 $\cos 2x+\sin x=q$ 有实数解.

63. a 为何值时，函数

$$y=\sqrt{\sin^6x+\cos^6x+a\sin x\cos x}$$

的自变量 x 的定义域是实数集.

64. 求下列函数的极值：

(1) $y=\sin^{10}x+10\sin^2x\cos^2x+\cos^{10}x$；

(2) $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}+3x\right)\cos\left(x+\frac{2\pi}{9}\right)$；

(3) $y=\cos^p x\sin^q x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right.$，$p$、$q$ 为正有理数$\left.\right)$；

(4) $y=\mathrm{tg}^p x+\mathrm{ctg}^q x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right.$，$p$、$q$ 为正有理数$\left.\right)$.

65. 求证：$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta+\dfrac{\sin(n+1)\theta}{2}$ 当 θ 在区间$[0,\ \pi]$内是非负的.

66. 求 $\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta+\cdots+\sin^2 n\theta$ 的和.

67. 求证：

$$\frac{1}{1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}2\alpha}+\frac{1}{1+\mathrm{tg}2\alpha\,\mathrm{tg}4\alpha}+\cdots+\frac{1}{1+\mathrm{tg}n\alpha\,\mathrm{tg}2n\alpha}$$

$$=\frac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{\sin\alpha}.$$

68. 求 $\mathrm{tg}\,\alpha+\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2^2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ 的和.

69. 求证：$(2\cos\theta-1)(2\cos 2\theta-1)(2\cos 2^2\theta-1)\cdots$

$$\cdots(2\cos 2^{n-1}\theta-1)=\frac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos\theta+1}.$$

70. 若 $\alpha\neq\beta$，求证：

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\beta}{4}\right)\cdots\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}+\cos\frac{\beta}{2^n}\right)$$

$$=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\frac{\beta}{2^n}}.$$

71. 当 $n<89$ 时，求证：

$$\frac{1}{\cos 0^\circ\cos 1^\circ}+\frac{1}{\cos 1^\circ\cos 2^\circ}+\cdots+\frac{1}{\cos n^\circ\cos(n+1)^\circ}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}(n+1)^{\circ}}{\sin 1^{\circ}}.$$

72. 当 $x\neq 2^{t}k\pi\ (t=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$时，求证：

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

73. 设 A 为锐角，求证：

$$\sec A+\sec\frac{A}{2}+\cdots+\sec\frac{A}{n}+\csc A+\csc\frac{A}{2}+\cdots+\csc\frac{A}{n}$$

$$>\sec A\csc A+\sec\frac{A}{2}\csc\frac{A}{2}+\cdots+\sec\frac{A}{n}\csc\frac{A}{n}.$$

74. 如果 x、y 都是实数，且 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$，求 $z=x^2+y^2-xy$ 的最大值和最小值.

75. 已知 $a^2+b^2=1$，$x^2+y^2=1$，求证：$|ax+by|\leqslant 1$.

76. 已知 $a_1^2+b_1^2=1$，$a_2^2+b_2^2=1$，$a_1a_2+b_1b_2=0$，求证：

$a_1^2+a_2^2=1$，$b_1^2+b_2^2=1$，$a_1b_1+a_2b_2=0$.

77. 已知 $x+y+z=\frac{\pi}{4}$，求证：

$$\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}+\frac{1+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}y}+\frac{1+\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}z}$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}y}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}z}.$$

78. 设 $xy+yz+zx=1$，求证：

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$$

$$=4xyz.$$

79. 求方程 $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$的实数根.

80. 解方程组

$$\begin{cases}\sqrt{x(1-y)}+\sqrt{y(1-x)}=1,\\ \sqrt{xy}+\sqrt{(1-x)(1-y)}=1.\end{cases}$$

81. 设 $x>0$, $y>0$, $x+y=1$, 求证:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\geqslant\frac{25}{4}.$$

四、习 题 解 答

1. 〔解法一〕因 $180^\circ<\alpha<270^\circ$, 所以

$\sec\alpha=-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=-\sqrt{1+(2\sqrt{2})^2}=-3$,

$$\cos\alpha=-\frac{1}{3}.$$

因此 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2-1=-\frac{7}{9}$.

由 $180^\circ<\alpha<270^\circ$ 得

$$90^\circ<\frac{\alpha}{2}<135^\circ.$$

所以

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. 〔解法一〕 $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-1}{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)}=-7,$$

所以 $\csc^2(\alpha+\beta)=1+\operatorname{ctg}^2(\alpha+\beta)=1+(-7)^2=50$.

又因 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$, 所以

$$2\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<2\pi+\frac{3\pi}{2},$$

但 $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)<0$, 因此 $\alpha+\beta$ 是第二象限的角, 所以

$$\csc(\alpha+\beta)=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

〔解法二〕 由 $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2}$ 及 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ 得

$$\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

由 $\operatorname{ctg}\beta=-\frac{1}{3}$ 及 $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$ 得

$$\sin\beta=-\frac{3}{\sqrt{10}},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

所以
$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&=-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{50}},\end{aligned}$$

$$\csc(\alpha+\beta)=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

3. α 在第三象限，

即

$$2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2}.\quad (k\text{ 为整数})$$

$$k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{3\pi}{4}.$$

若 k 为奇数，则 $\frac{\alpha}{2}$ 在第四象限，

$$\sin\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}}=-\frac{4}{5},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}}=\frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{4}{3}.$$

若 k 为偶数，则 $\frac{\alpha}{2}$ 在第二象限，

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{5},\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{4}{3}.$$

4. 依已知条件有

$$0<\frac{\pi}{4}-x<\frac{\pi}{4},\quad \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{12}{13}.$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}&=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\\&=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\\&=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{24}{13}.\end{aligned}$$

5. 因 β 为锐角，$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$，

所以

$$\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{10}},\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3},$$

$$\operatorname{tg}2\beta=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}.$$

因此 2β 也是锐角，且 $0<\alpha+2\beta<\pi$.

又

$$\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\beta}=\frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{4}}=1,$$

所以

$$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}.$$

6. $$\frac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

7. 解这个方程，得

$$x=\frac{\sqrt{2}\cos 20^\circ\pm\sqrt{2\cos^2 20^\circ-4\left(\cos^2 20^\circ-\frac{1}{2}\right)}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 20^\circ\pm\sin 20^\circ)$$

$$=\sin 45^\circ\cos 20^\circ\pm\cos 45^\circ\sin 20^\circ$$

$$=\sin(45^\circ\pm 20^\circ).$$

所以

$$x_1=\sin 65^\circ,\quad x_2=\sin 25^\circ.$$

即

$\sin\alpha=\sin 65^\circ$，$\sin\beta=\sin 25^\circ$ 或 $\sin\alpha=\sin 25^\circ$，$\sin\beta=\sin 65^\circ$.

但 α、β 都是锐角，

所以

$$\alpha=65^\circ,\ \beta=25^\circ \text{ 或 } \alpha=25^\circ,\ \beta=65^\circ.$$

8. 依韦达定理有

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-p,\quad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=q.$$

若 $q\neq 1$，则

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{-p}{1-q}=\frac{p}{q-1}.$$

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$$

$$=\cos^2(\alpha+\beta)[\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+p\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+q]$$

$$=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}[\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+p\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+q]$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{p}{q-1}\right)^2}\left[\left(\frac{p}{q-1}\right)^2+p\cdot\frac{p}{q-1}+q\right]$$

$$=q$$

若 $q=1$，则

$$\cos(\alpha+\beta)=0,\quad \sin^2(\alpha+\beta)=1,$$

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$$

$$=\sin^2(\alpha+\beta)=1=q.$$

9．原方程可变为

$$(\sin\theta+1)x^2-2\sin\theta\cdot x+2(\sin\theta-1)=0 \qquad ①$$

因已知方程有不相等的两个根，所以

$$\sin\theta+1\neq 0,$$

又因两根是绝对值相等、符号相反的实数，故

$$\sin\theta=0,\quad \theta=k\pi\,(k\text{ 是整数})$$

将 $\theta=k\pi$ 代入①，得

$$x=\pm\sqrt{2}.$$

取 $x=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$，则有

$$\log_2 x^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$

$$=\log_2 2^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

10．依题设有

$$a\cos\alpha+b\sin\alpha+c=0,$$
$$a\cos\beta+b\sin\beta+c=0.$$

所以

$$a(\cos\alpha-\cos\beta)+b(\sin\alpha-\sin\beta)=0,$$

$$-2a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+2b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

因为

$$\alpha\neq\beta,\ 0\leqslant\alpha\leqslant\pi,\ 0\leqslant\beta\leqslant\pi,$$

所以

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\neq0,$$

$$b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0 \qquad ①$$

若 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\neq0$，则有

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{b}{a},$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\cdot\frac{b}{a}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

若 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0$，因 $0\leqslant\frac{\alpha+\beta}{2}\leqslant\pi$，故有 $\alpha+\beta=\pi$，因此 $\sin(\alpha+\beta)=0$.

但这时由①知 $a=0$，（注意此时必有 $b\neq0$，否则原方程不存

在了)，所以仍有$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

11. 当 $p=q=0$ 时，由已知条件有

$$\sin\beta=-\sin\alpha,\quad \cos\beta=-\cos\alpha.$$

所以

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&=\sin\alpha(-\cos\alpha)+\cos\alpha(-\sin\alpha)\\&=-\sin2\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\cos\alpha(-\cos\alpha)-\sin\alpha(-\sin\alpha)\\&=-\cos2\alpha.\end{aligned}$$

在这种情况下，所求的解答不定.

当 p、q 不全为零，例如 $q\neq0$ 时，由已知条件得

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{p}{q},$$

$$\frac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{p}{q},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{p}{q}.$$

所以

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2pq}{q^2+p^2};$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2}.$$

12. (1) $\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$

$$=\frac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{4(\sin 30^\circ\cos 10^\circ-\cos 30^\circ\sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{4\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$=4.$$

(2) $\sin 50^\circ(1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,10^\circ)$

$$=\sin 50^\circ\left(1+\frac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right)$$

$$=\sin 50^\circ\cdot\frac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$=2\sin 50^\circ\cdot\frac{\frac{1}{2}\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{2\sin 50^\circ\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{\cos(50^\circ-40^\circ)-\cos(50^\circ+40^\circ)}{\cos 10^\circ}$$

$$=1.$$

(3) $\csc 5^\circ\sqrt{1+\sin 620^\circ}=\csc 5^\circ\cdot\sqrt{1-\cos 10^\circ}$

$$=\csc 5^\circ\cdot\sqrt{2\sin^2 5^\circ}$$

$$=\sqrt{2}.$$

(4) 由 $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，得

$$\sin 9^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 18^\circ)} = \frac{1}{2}\sqrt{2-2\cos 18^\circ}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 18^\circ - 2\sqrt{1-\sin^2 18^\circ} + 1 - \sin 18^\circ}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{1+\sin 18^\circ} - \sqrt{1-\sin 18^\circ}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin 18^\circ} - \sqrt{1-\sin 18^\circ}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}} - \sqrt{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}\right).$$

(5) $\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{6\pi}{7}$

$$= -\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$$

$$= -\frac{1}{8\sin\frac{\pi}{7}}\cdot 8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$$

$$= -\frac{1}{8\sin\frac{\pi}{7}}\cdot\sin\frac{8\pi}{7}$$

$$= \frac{1}{8}.$$

(6) $$\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}50^\circ\operatorname{tg}70^\circ = \frac{\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ}{\cos 10^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}(\cos 60^\circ - \cos 40^\circ)\sin 70^\circ}{\frac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 40^\circ)\cos 70^\circ}$$

$$=\frac{\sin70^\circ\cos40^\circ-\frac{1}{2}\sin70^\circ}{\cos70^\circ\cos40^\circ+\frac{1}{2}\cos70^\circ}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\sin110^\circ+\sin30^\circ)-\frac{1}{2}\sin70^\circ}{\frac{1}{2}(\cos110^\circ+\cos30^\circ)+\frac{1}{2}\cos70^\circ}$$

$$=\frac{\sin70^\circ+\sin30^\circ-\sin70^\circ}{-\cos70^\circ+\cos30^\circ+\cos70^\circ}$$

$$=\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(7) $\quad \operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ$

$$=\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ-(\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{ctg}27^\circ)$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}^2 9^\circ}{\operatorname{tg}9^\circ}-\frac{1+\operatorname{tg}^2 27^\circ}{\operatorname{tg}27^\circ}$$

$$=\frac{2}{\sin18^\circ}-\frac{2}{\sin54^\circ}$$

$$=\frac{2(\sin54^\circ-\sin18^\circ)}{\sin18^\circ\sin54^\circ}$$

$$=\frac{2\cdot2\cos36^\circ\sin18^\circ}{\sin18^\circ\sin54^\circ}$$

$$=4.$$

(8) $\quad \cos40^\circ\cos80^\circ+\cos80^\circ\cos160^\circ+\cos160^\circ\cos40^\circ$

$$=\frac{1}{2}(\cos120^\circ+\cos40^\circ+\cos240^\circ$$

$$+\cos80^\circ+\cos200^\circ+\cos120^\circ)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}+\cos40^\circ+\cos80^\circ-\cos20^\circ\right)$$

$$=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(\cos40^\circ+\cos80^\circ-\cos20^\circ)$$

$$= -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}(2\cos 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 20^\circ)$$

$$= -\frac{3}{4}.$$

(9) $\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\right.$$

$$\left. + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\right.$$

$$\left. + \sin\frac{6\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}} \cdot \sin\frac{6\pi}{7}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

(10) $1 + 4\cos\frac{2\pi}{7} - 4\cos^2\frac{2\pi}{7} - 8\cos^3\frac{2\pi}{7}$

$$= 1 - 4\cos^2\frac{2\pi}{7} + 4\cos\frac{2\pi}{7} - 8\cos^3\frac{2\pi}{7}$$

$$= 1 - 2\left(1 + \cos\frac{4\pi}{7}\right) + 4\cos\frac{2\pi}{7}\left(1 - 2\cos^2\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$= 1 - 2\left(1 + \cos\frac{4\pi}{7}\right) - 4\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$$

$$= 1 - 2\left(1 + \cos\frac{4\pi}{7}\right) - 2\left(\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$= -\left[1 + 2\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right)\right].$$

但利用上题的方法可证

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2},$$

所以

$$1+4\cos\frac{2\pi}{7}-4\cos^2\frac{2\pi}{7}-8\cos^3\frac{2\pi}{7}$$

$$=-\left\{1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=0.$$

(11) $\sin47^\circ+\sin61^\circ-\sin11^\circ-\sin25^\circ$

$=2\sin54^\circ\cos7^\circ-2\sin18^\circ\cos7^\circ$

$=2\cos7^\circ(\sin54^\circ-\sin18^\circ)$

$=2\cos7^\circ\cdot2\sin18^\circ\cos36^\circ$

$=\cos7^\circ\cdot\dfrac{4\sin18^\circ\cos18^\circ\cos36^\circ}{\cos18^\circ}$

$=\cos7^\circ\cdot\dfrac{\sin72^\circ}{\cos18^\circ}$

$=\cos7^\circ.$

(12) $\sin6^\circ\sin42^\circ\sin66^\circ\sin78^\circ$

$=\sin6^\circ\cos48^\circ\cos24^\circ\cos12^\circ$

$=\dfrac{\sin6^\circ\cos6^\circ\cos12^\circ\cos24^\circ\cos48^\circ}{\cos6^\circ}$

$=\dfrac{\frac{1}{16}\sin96^\circ}{\cos6^\circ}$

$=\dfrac{1}{16}.$

$\cos6^\circ\cos42^\circ\cos66^\circ\cos78^\circ$

$=\cos6^\circ\cos66^\circ\cos42^\circ\cos78^\circ$

$=\dfrac{1}{2}(\cos72^\circ+\cos60^\circ)\cdot\dfrac{1}{2}(\cos120^\circ+\cos36^\circ)$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin 18^\circ + \frac{1}{2}\right)\left(\cos 36^\circ - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sin 18^\circ \cos 36^\circ + \frac{1}{2}(\cos 36^\circ - \sin 18^\circ) - \frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right\}$$

$$= \frac{1}{16},$$

所以

$$\text{tg}\, 6^\circ \text{tg}\, 42^\circ \text{tg}\, 66^\circ \text{tg}\, 78^\circ = \frac{\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ}{\cos 6^\circ \cos 42^\circ \cos 66^\circ \cos 78^\circ}$$

$$= 1.$$

(13) $\cos\frac{2\pi}{15} + \cos\frac{4\pi}{15} - \cos\frac{7\pi}{15} - \cos\frac{\pi}{15}$

$$= 2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{15} - 2\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{5}$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{15} - \cos\frac{4\pi}{15}\right)$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{10}$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

13. (1) $\cos^2\phi + \cos^2(\theta + \phi) - 2\cos\theta\cos\phi\cos(\theta + \phi)$

$$= \cos^2\phi + \cos(\theta + \phi)\left[\cos(\theta + \phi) - 2\cos\theta\cos\phi\right]$$

$$= \cos^2\phi + \cos(\theta + \phi)(-\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi)$$

$$= \cos^2\phi - \cos(\theta + \phi)\cos(\theta - \phi)$$

$$= \cos^2\phi - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 2\varphi)$$

$$= \cos^2\phi - \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2\theta + 2\cos^2\phi - 1)$$

$$= \sin^2\theta.$$

(2) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$

$$-\sin\frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}+2\alpha\right)$$

$$= \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{2} - \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)}{2}$$

$$-\sin\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}\cos 2\alpha - \sin\frac{\pi}{12}\sin 2\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 2\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin 2\alpha\right)$$

$$-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\cos 2\alpha + \sin^2\frac{\pi}{12}\sin 2\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{4}\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha$$

$$-\frac{1}{4}\cos 2\alpha + \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}\sin 2\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha + \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\sin 2\alpha$$

$$= \sin 2\alpha.$$

(3) $(1+\sin x)\left[\frac{x}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} - 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]$

$$= (1+\sin x)\left[\frac{x}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} - 2\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]$$

$$= (1+\sin x)\left(\frac{x}{1+\sin x} - \frac{2\cos x}{1+\sin x}\right)$$

$$= x - 2\cos x.$$

(4) $$\frac{2(\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1)}{\cos\alpha - \sin\alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha}$$

$$= \frac{2(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha - \sin\alpha}$$

$$= \frac{2(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2\sin 2\alpha\sin\alpha + 2\cos 2\alpha\sin\alpha}$$

$$= \csc\alpha.$$

14\. (1) $$\frac{2\sin A}{\cos A + \cos 3A} = \frac{2\sin A}{2\cos 2A\cos A}$$

$$= \frac{\sin(2A - A)}{\cos 2A\cos A}$$

$$= \frac{\sin 2A\cos A - \cos 2A\sin A}{\cos 2A\cos A}$$

$$= \operatorname{tg} 2A - \operatorname{tg} A.$$

(2) $$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{\cos\phi}{1-\sin\phi}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)^2} + \frac{\cos^2\frac{\phi}{2} - \sin^2\frac{\phi}{2}}{\left(\cos\frac{\phi}{2} - \sin\frac{\phi}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}} + \frac{\cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\phi}{2}}{\cos\frac{\phi}{2} - \sin\frac{\phi}{2}}$$

$$= \frac{2\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\phi}{2} - \sin\frac{\phi}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2} - \sin\frac{\theta+\phi}{2}} \cdot \frac{2\sin\frac{\theta-\phi}{2}}{2\sin\frac{\theta-\phi}{2}}$$

$$= \frac{2(\sin\theta - \sin\phi)}{\sin(\theta-\phi) + \cos\theta - \cos\phi}.$$

(3) $$\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\theta\,\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\operatorname{ctg}\theta\left(1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= 2\operatorname{ctg}\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= 2\csc\theta.$$

(4) $$\sin\theta\cos^5\theta - \cos\theta\sin^5\theta$$

$$= \sin\theta\cos\theta(\cos^4\theta - \sin^4\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\theta\cos 2\theta$$

$$= \frac{1}{4}\sin 4\theta.$$

(5) $$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha} - 2\cos(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta)\sin\alpha - 2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

(6) $\sin^8\alpha-\cos^8\alpha+\cos 2\alpha$

$=(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)+\cos 2\alpha$

$=\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right)(-\cos 2\alpha)+\cos 2\alpha$

$=\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\cos 2\alpha$

$=\frac{1}{4}\sin 2\alpha\sin 4\alpha.$

(7) $\sin^4\alpha=(\sin^2\alpha)^2=\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)^2$

$=\frac{1}{4}(1-2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha)$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4\alpha}{2}$

$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{8}\cos 4\alpha.$

(8) $\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-r)}$

$+\frac{1}{\sin(\beta-r)\sin(\beta-\alpha)}+\frac{1}{\sin(r-\alpha)\sin(r-\beta)}$

$=-\frac{\sin(\beta-r)+\sin(r-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-r)\sin(r-\alpha)}$

$=-\frac{2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-2r}{2}+2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-r)\sin(r-\alpha)}$

$=-\frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta-2r}{2}\right)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-r)\sin(r-\alpha)}$

$=-\frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(-2\sin\frac{\alpha-r}{2}\sin\frac{r-\beta}{2}\right)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-r)\sin(r-\alpha)}$

$$=\frac{4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-r}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\beta-r}{2}\cos\frac{\beta-r}{2}}$$

$$\cdot\frac{\sin\frac{r-\alpha}{2}}{2\sin\frac{r-\alpha}{2}\cos\frac{r-\alpha}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta-r}{2}\cos\frac{r-\alpha}{2}}。$$

15. (1) 因 $A+B+C=\pi$，所以

$$\operatorname{tg}(A+B)=\operatorname{tg}(\pi-C)=-\operatorname{tg}C.$$

又

$$\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B},$$

所以

$$-\operatorname{tg}C=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}.$$

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B=-\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C,$$

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C.$$

(2) 由 $A+B+C=\pi$ 有

$$nA+nB+nC=n\pi,$$

$$\operatorname{tg}(nA+nB)=\operatorname{tg}(n\pi-nC)=-\operatorname{tg}nC.$$

又

$$\operatorname{tg}(nA+nB)=\frac{\operatorname{tg}nA+\operatorname{tg}nB}{1-\operatorname{tg}nA\operatorname{tg}nB},$$

所以

$$-\operatorname{tg}nC=\frac{\operatorname{tg}nA+\operatorname{tg}nB}{1-\operatorname{tg}nA\operatorname{tg}nB},$$

$$\operatorname{tg}nA+\operatorname{tg}nB+\operatorname{tg}nC=\operatorname{tg}nA\operatorname{tg}nB\operatorname{tg}nC.$$

(3) $$\operatorname{ctg}(A+B)=\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B-1}{\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B},$$

$$\operatorname{ctg}(A+B)=\operatorname{ctg}(\pi-C)=-\operatorname{ctg}C,$$

所以

$$-\operatorname{ctg}C=\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B-1}{\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B},$$

$$\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A=1.$$

16. (1) 由 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ 有

$$\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}.$$

所以

$$1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta).$$

即

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1.$$

(2) 因为

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta\geqslant 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta,$$

$$\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma\geqslant 2\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma,$$

$$\operatorname{tg}^2\gamma+\operatorname{tg}^2\alpha\geqslant 2\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha.$$

所以

$$2(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma)\geqslant 2(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha),$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma\geqslant\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha.$$

而当 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ 时有(注意上题之结果)

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1,$$

所以

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma\geqslant 1.$$

(3) $$\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]$$

$$=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}.$$

所以

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\gamma,$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma.$$

17. $$u=\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$$

$$=\frac{\cos x\sin y\sin z+\cos y\sin z\sin x+\cos z\sin x\sin y}{\cos x\cos y\cos z}$$

$$=\frac{\cos x\cos y\cos z-\cos(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z}$$

$$=1-\frac{\cos\dfrac{k\pi}{2}}{\cos x\cos y\cos z}.$$

当 k 为奇数时，$\cos\dfrac{k\pi}{2}=0$，$u=1$. 即当 k 为奇数时，不论 x、y、z 是怎样的数，函数 u 的值与 x、y、z 无关，总等于 1.

18. (1) 因为

$$\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{tg}120^\circ=\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}120^\circ,$$

$$\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}40^\circ-\sqrt{3}=\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ(-\sqrt{3}),$$

所以

$$\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\sqrt{3}\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ=\sqrt{3}.$$

(2) 因为

$$2\alpha+(30^\circ-\alpha)+(60^\circ-\alpha)=90^\circ,$$

所以

$$\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)+\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)$$
$$+\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)=1.$$

(3) 因为 $\quad \operatorname{tg} 5\alpha=\operatorname{tg}(3\alpha+2\alpha)$

$$=\frac{\operatorname{tg} 3\alpha+\operatorname{tg} 2\alpha}{1-\operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} 2\alpha},$$

所以

$$\operatorname{tg} 3\alpha+\operatorname{tg} 2\alpha=\operatorname{tg} 5\alpha-\operatorname{tg} 5\alpha \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} 2\alpha,$$
$$\operatorname{tg} 5\alpha-\operatorname{tg} 3\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha=\operatorname{tg} 5\alpha \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} 2\alpha.$$

19. $\quad \sin\alpha=\sin[(\alpha+\beta)-\beta]$

$$=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$$
$$=A\sin(\alpha+\beta),$$

所以

$$\sin(\alpha+\beta)(\cos\beta-A)=\cos(\alpha+\beta)\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}.$$

20. 由已知条件有

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta}=\frac{1}{m},$$

由合分比定理,

$$\frac{1+m}{1-m}=\frac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta}$$
$$=\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}$$
$$=\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\alpha},$$

所以

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\operatorname{tg}\alpha.$$

21．依题设有

$$\mathrm{tg}^2\theta=\frac{\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)\cos(\theta-\beta)}$$

$$=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(2\alpha-\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(2\theta-\alpha-\beta)},$$

故有

$$\cos 2\theta=\frac{1-\mathrm{tg}^2\theta}{1+\mathrm{tg}^2\theta}=\frac{\cos(2\theta-\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)},$$

$$\cos 2\theta\cos(\alpha-\beta)=\cos(2\theta-\alpha-\beta)$$

$$=\cos 2\theta\cos(\alpha+\beta)+\sin 2\theta\sin(\alpha+\beta),$$

$$\cos 2\theta[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]=\sin 2\theta\sin(\alpha+\beta),$$

$$\cos 2\theta\cdot 2\sin\alpha\sin\beta=\sin 2\theta\sin(\alpha+\beta),$$

所以

$$\mathrm{tg}\,2\theta=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

22．(1) 由已知条件，根据等比定理有

$$\frac{e^2-1}{1+2e\cos\alpha+e^2}=\frac{(e^2-1)+(1+2e\cos\beta+e^2)}{(1+2e\cos\alpha+e^2)+(e^2-1)}$$

$$=\frac{2e^2+2e\cos\beta}{2e^2+2e\cos\alpha}$$

$$=\frac{e+\cos\beta}{e+\cos\alpha},$$

$$\frac{e^2-1}{1+2e\cos\alpha+e^2}=\frac{(e^2-1)-(1+2e\cos\beta+e^2)}{(1+2e\cos\alpha+e^2)-(e^2-1)}$$

$$=\frac{-2-2e\cos\beta}{2+2e\cos\alpha}$$

$$=-\frac{1+e\cos\beta}{1+e\cos\alpha},$$

所以

$$\frac{e+\cos\beta}{e+\cos\alpha}=-\frac{1+e\cos\beta}{1+e\cos\alpha},$$

$$\left(\frac{e+\cos\beta}{e+\cos\alpha}\right)^2=\left(-\frac{1+e\cos\beta}{1+e\cos\alpha}\right)^2$$

$$=\frac{(e+\cos\beta)^2-(1+e\cos\beta)^2}{(e+\cos\alpha)^2-(1+e\cos\alpha)^2}$$

$$=\frac{e^2+\cos^2\beta-1-e^2\cos^2\beta}{e^2+\cos^2\alpha-1-e^2\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}.$$

因此

$$\frac{e+\cos\beta}{e+\cos\alpha}=\pm\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

即

$$\frac{e^2-1}{1+2e\cos\alpha+e^2}=\frac{e+\cos\beta}{e+\cos\alpha}$$

$$=-\frac{1+e\cos\beta}{1+e\cos\alpha}=\pm\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

(2) 由 $\dfrac{e+\cos\beta}{e+\cos\alpha}=-\dfrac{1+e\cos\beta}{1+e\cos\alpha}$ 有

$$\frac{e+\cos\beta+1+e\cos\beta}{e+\cos\alpha-1-e\cos\alpha}=\frac{e+\cos\beta-1-e\cos\beta}{e+\cos\alpha+1+e\cos\alpha},$$

$$\frac{(e+1)(1+\cos\beta)}{(e-1)(1-\cos\alpha)}=\frac{(e-1)(1-\cos\beta)}{(e+1)(1+\cos\alpha)},$$

$$\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}=\left(\frac{e+1}{e-1}\right)^2,$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}=\left(\frac{e+1}{e-1}\right)^2,$$

所以

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\pm\frac{e+1}{e-1}.$$

23. 依题设有

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\theta}{\sin\phi},\quad \frac{c}{d}=\frac{\cos\theta}{\cos\phi},$$

所以

$$\frac{ac\pm bd}{ad\pm bc}=\frac{\frac{c}{d}\pm\frac{b}{a}}{1\pm\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{d}}=\frac{\frac{\cos\theta}{\cos\phi}\pm\frac{\sin\phi}{\sin\theta}}{1\pm\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\cos\phi}}$$

$$=\frac{\sin\theta\cos\theta\pm\sin\phi\cos\phi}{\sin\theta\cos\phi\pm\cos\theta\sin\phi}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\sin 2\theta\pm\sin 2\phi)}{\sin(\theta\pm\phi)}$$

$$=\frac{\sin(\theta\pm\phi)\cos(\theta\mp\phi)}{\sin(\theta\pm\phi)}$$

$$=\cos(\theta\mp\phi).$$

24. $$\operatorname{tg}\frac{x+\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{x-\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}}{\cos\frac{x+\alpha}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\cos\alpha-\cos x}{\cos\alpha+\cos x}$$

$$=\frac{\cos\alpha-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\alpha\cos\beta}$$

$$=\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}$$

$$=\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

同理可得

$$\operatorname{tg}\frac{x+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{x-\beta}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

所以

$$\operatorname{tg}\frac{x+\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{x-\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{x+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{x-\beta}{2}$$

$$=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

25. 由已知条件有

$1+\cos^2\alpha=\sec^2\beta$, $1+\cos^2\beta=\sec^2\gamma$. $1+\cos^2\gamma=\sec^2\alpha$.

设 $\cos^2\alpha=x$, $\cos^2\beta=y$, $\cos^2\gamma=z$, 则有

$$\sec^2\alpha=\frac{1}{x},\quad \sec^2\beta=\frac{1}{y},\quad \sec^2\gamma=\frac{1}{z}.$$

于是

$$1+x=\frac{1}{y},\quad 1+y=\frac{1}{z},\quad 1+z=\frac{1}{x}.$$

解这个方程组得

$$x=y=z=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

即 $$\cos^2\alpha=\cos^2\beta=\cos^2\gamma=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

所以

$$\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\sin^2\gamma=1-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}).$$

但 $$4\sin^2 18^\circ=4\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}),$$

所以

$$\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\sin^2\gamma=4\sin^2 18^\circ.$$

26. 当 $A+B+C=\pi$ 时有(证明参看39题(2)小题)

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1 \qquad ①$$

将已知条件代入①式，得

$$\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta\sin^2\gamma+\cos^2\gamma\sin^2\alpha$$

$$+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=1. \tag{②}$$

显然 $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\neq0$，将②式两边同除以 $\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma$，得

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}^2\beta\sec^2\gamma+\operatorname{tg}^2\gamma\sec^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\sec^2\beta+2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\\&=\sec^2\alpha\sec^2\beta\sec^2\gamma,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma&=(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)(1+\operatorname{tg}^2\gamma)\\&\quad-[\operatorname{tg}^2\beta(1+\operatorname{tg}^2\gamma)+\operatorname{tg}^2\gamma(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\\&\quad+\operatorname{tg}^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\beta)]\\&=1+\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma.\end{aligned}$$

所以

$$(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-1)^2=0,$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=1.$$

27. (1) 由题设得

$$\sin A+\sin B=-\sin C,\quad \cos A+\cos B=-\cos C,$$

$$2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=-\sin C,$$

$$2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=-\cos C,$$

所以

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{tg}C.$$

$$C=k\pi+\frac{A+B}{2},$$

$$2C=2k\pi+(A+B),$$

$$3C=2k\pi+(A+B+C).\quad (k\text{ 为整数})$$

$$\sin3C=\sin(A+B+C),\quad \cos3C=\cos(A+B+C).$$

同理可证

$$\sin3A=\sin3B=\sin(A+B+C),$$

$$\cos3A=\cos3B=\cos(A+B+C).$$

所以

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=3\sin(A+B+C),$$

$$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=3\cos(A+B+C).$$

(2) $\sin A+\sin B=-\sin C$, $\cos A+\cos B=-\cos C$,

所以

$$\sin^2 A+2\sin A\sin B+\sin^2 B=\sin^2 C, \qquad ①$$

$$\cos^2 A+2\cos A\cos B+\cos^2 B=\cos^2 C. \qquad ②$$

①＋②：$2+2\cos(A-B)=1$,

$$\cos(A-B)=-\frac{1}{2},$$

所以

$$A-B=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3},$$

$$A=2k\pi+B\pm\frac{2\pi}{3}. \quad (k\text{ 为整数})$$

于是

$$\cos A=\cos\left(B\pm\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\begin{aligned}-\cos C&=\cos A+\cos B\\&=\cos\left(B\pm\frac{2\pi}{3}\right)+\cos B\\&=2\cos\left(B\pm\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}\\&=\cos\left(B\pm\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

即

$$\cos C=-\cos\left(B\pm\frac{\pi}{3}\right).$$

所以

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$$

$$=\cos^2\left(B\pm\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^2 B+\cos^2\left(B\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(2B\pm\frac{4\pi}{3}\right)\right]+\frac{1}{2}(1+\cos 2B)$$

$$+\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(2B\pm\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos\left(2B\pm\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(2B\pm\frac{2\pi}{3}\right)+\cos 2B\right]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[2\cos(2B\pm\pi)\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2B\right]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[-\cos 2B+\cos 2B]$$

$=\frac{3}{2}$为一定值.

28. 由 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=1$ 得

$$\sin^2A=1-\sin^2B-\sin^2C$$

$$=\cos^2B-\sin^2C$$

$$=\cos^2B-\sin^2C\cos^2B+\sin^2C\cos^2B-\sin^2C$$

$$=\cos^2B\cos^2C-\sin^2B\sin^2C$$

$$=(\cos B\cos C+\sin B\sin C)(\cos B\cos C-\sin B\sin C)$$

$$=\cos(B-C)\cos(B+C).$$

因 B、C 都是锐角，故知 $\cos(B-C)>0$，从而 $\cos(B+C)>0$，$B+C<\frac{\pi}{2}$，$A+B+C<\pi$.

由 B、C 都是锐角还可知

$$\cos(B-C)\geqslant\cos(B+C),$$

$$\sin^2A=\cos(B-C)\cos(B+C)\geqslant\cos^2(B+C),$$

$$\sin A\geqslant\cos(B+C)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-(B+C)\right],$$

所以有

$$A \geqslant \frac{\pi}{2}-(B+C), \quad A+B+C \geqslant \frac{\pi}{2}.$$

即

$$\frac{\pi}{2} \leqslant A+B+C<\pi.$$

29. 由已知条件得

$$a \operatorname{tg} \alpha-a \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}=b \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}-b \operatorname{tg} \beta,$$

$$a\left(\operatorname{tg} \alpha-\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}\right)=b\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}-\operatorname{tg} \beta\right),$$

$$a \cdot \frac{\sin \alpha \cos \frac{\alpha+\beta}{2}-\cos \alpha \sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos \alpha \cos \frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$=b \cdot \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \beta-\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \beta}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \beta},$$

$$\frac{a \sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \alpha \cos \frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{b \sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \beta},$$

所以

$$a \cos \beta=b \cos \alpha.$$

30. 由已知条件有

$$\frac{\sin^2 C}{\sin^2 A}=1-\frac{\operatorname{tg}(A-B)}{\operatorname{tg} A}$$

$$=1-\frac{\sin (A-B) \cos A}{\cos (A-B) \sin A}$$

$$=\frac{\sin A \cos (A-B)-\cos A \sin (A-B)}{\cos (A-B) \sin A}$$

$$=\frac{\sin B}{\cos (A-B) \sin A},$$

所以有

$$\sin^2 C=\frac{\sin A\sin B}{\cos(A-B)}.$$

$$\cos^2 C=1-\sin^2 C=1-\frac{\sin A\sin B}{\cos(A-B)}$$

$$=\frac{\cos A\cos B}{\cos(A-B)}.$$

$$\operatorname{tg}^2 C=\frac{\sin^2 C}{\cos^2 C}=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B.$$

31. (1) 由 $e^x-e^{-x}=2\operatorname{tg}\theta$ 有

$$(e^x-e^{-x})^2=4\operatorname{tg}^2\theta,$$

$$(e^x+e^{-x})^2=(e^x-e^{-x})^2+4=4\operatorname{tg}^2\theta+4=4\sec^2\theta.$$

因为

$$e>0,\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2},$$

所以

$$e^x+e^{-x}=2\sec\theta.$$

(2) 由 $e^x-e^{-x}=2\operatorname{tg}\theta$，$e^x+e^{-x}=2\sec\theta$ 有

$$e^x=\sec\theta+\operatorname{tg}\theta=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right).$$

所以

$$x=\log_e\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right).$$

32. $\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}$,

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1=\frac{3}{2},$$

$$4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1=0$$

$$\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-1$$

$$=-\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

要使上式成立，必须 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$.

而

$$0<\alpha<\pi,\quad 0<\beta<\pi,$$

所以必须 $\alpha=\beta$. 这时有

$$\cos\alpha=\cos\beta=\frac{1}{2},$$

所以

$$\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}.$$

33. 令 $t=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$，则

$$(x-a)\cos\theta+y\sin\theta=a$$

可变为

$$(x-a)\frac{1-t^2}{1+t^2}+y\cdot\frac{2t}{1+t^2}=a,$$

$$xt^2-2yt-(x-2a)=0,$$

解之，得

$$t=\frac{y\pm\sqrt{x^2+y^2-2ax}}{x}.$$

即

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{y\pm\sqrt{x^2+y^2-2ax}}{x}.$$

同理可得

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}=\frac{y\pm\sqrt{x^2+y^2-2ax}}{x}.$$

因为

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}=2l,$$

所以

$$\pm 2\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2-2ax}}{x}=2l.$$

去分母，两边平方，即得

$$x^2+y^2-2ax=l^2x^2,$$

$$y^2=2ax-(1-l^2)x^2.$$

34. 由 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ 有

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

又 $\qquad \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma=2\operatorname{tg}\beta,$

所以

$$3\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma,$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma=3,\quad \operatorname{tg}\gamma=\frac{3}{\operatorname{tg}\alpha},$$

$$\cos 2\gamma=\frac{1-\operatorname{tg}^2\gamma}{1+\operatorname{tg}^2\gamma}=\frac{1-\left(\frac{3}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-9}{\operatorname{tg}^2\alpha+9}.$$

$$\frac{4+5\cos 2\gamma}{5+4\cos 2\gamma}=\frac{4+5\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-9}{\operatorname{tg}^2\alpha+9}}{5+4\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-9}{\operatorname{tg}^2\alpha+9}}=\frac{4\operatorname{tg}^2\alpha+36+5\operatorname{tg}^2\alpha-45}{5\operatorname{tg}^2\alpha+45+4\operatorname{tg}^2\alpha-36}$$

$$=\frac{9(\operatorname{tg}^2\alpha-1)}{9(\operatorname{tg}^2\alpha+1)}=-\cos 2\alpha.$$

又

$$\cos(\beta+\gamma-\alpha)=\cos(\pi-\alpha-\alpha)=-\cos 2\alpha,$$

所以

$$\cos(\beta+\gamma-\alpha)=\frac{4+5\cos 2\gamma}{5+4\cos 2\gamma}.$$

35. 由题设有

$$C=3B=9A,\quad A=\frac{\pi}{13}.$$

所以

$$\begin{aligned}
&\cos B\cos C+\cos C\cos A+\cos A\cos B\\
&=\cos 3A\cos 9A+\cos 9A\cos A+\cos A\cos 3A\\
&=\frac{1}{2}(\cos 12A+\cos 6A+\cos 10A+\cos 8A\\
&\quad+\cos 4A+\cos 2A)\\
&=\frac{1}{2\sin A}\cdot\sin A(\cos 2A+\cos 4A+\cos 6A+\cos 8A\\
&\quad+\cos 10A+\cos 12A)\\
&=\frac{1}{4\sin A}(\sin 13A-\sin A)^{*}\\
&=\frac{1}{4\sin A}(\sin\pi-\sin A)\\
&=-\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

36. 若 $a=0$，则 $b\neq 0$，这时①变为

$$b\cos x=0.$$

所以有

$\cos x=0$，$\sin x=\pm 1$，$\sin 2x=0$，$\cos 2x=-1$.

代入②，得 $-B=C$. 这时③式显然成立.

若 $a\neq 0$，由①得

$$\operatorname{tg}x=-\frac{b}{a},$$

---

* 此处参看第 66 题的解法过程.

$$\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{-2ab}{a^2+b^2},$$

$$\cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

将 $\sin 2x$、$\cos 2x$ 之值代入②:

$$A\cdot\frac{-2ab}{a^2+b^2}+B\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=C,$$

化简得

$$2abA+(b^2-a^2)B+(a^2+b^2)C=0.$$

37. 设 $\dfrac{\cos x}{a}=\dfrac{\cos(x+\alpha)}{b}=\dfrac{\cos(x+2\alpha)}{c}$

$$=\frac{\cos(x+3\alpha)}{d}=\frac{1}{k},\ \text{则}$$

$a=k\cos x$, $b=k\cos(x+\alpha)$, $c=k\cos(x+2\alpha)$,

$d=k\cos(x+3\alpha)$.

从而

$$\frac{a+c}{b}=\frac{k\cos x+k\cos(x+2\alpha)}{k\cos(x+\alpha)}=\frac{2\cos(x+\alpha)\cos\alpha}{\cos(x+\alpha)}$$

$$=2\cos\alpha,$$

$$\frac{b+d}{c}=\frac{k\cos(x+\alpha)+k\cos(x+3\alpha)}{k\cos(x+2\alpha)}$$

$$=\frac{2\cos(x+2\alpha)\cos\alpha}{\cos(x+2\alpha)}=2\cos\alpha.$$

所以

$$\frac{a+c}{b}=\frac{b+d}{c}.$$

38. (1) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha=(1+\cos\alpha)+\operatorname{tg}\alpha(1+\cos\alpha)$

$$=(1+\cos\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)=2\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha\right)$$

$$= 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha}$$

$$= 2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sec\alpha.$$

(2) $(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2$

$$= \cos^2 x+2\cos x\cos y+\cos^2 y+\sin^2 x+2\sin x\sin y+\sin^2 y$$

$$= 2+2\cos(x-y)$$

$$= 4\cos^2\frac{x-y}{2}.$$

(3) $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha=(\sin\alpha+\sin3\alpha)+\sin2\alpha$

$$= 2\sin2\alpha\cos\alpha+\sin2\alpha$$

$$= 2\sin2\alpha\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right),$$

$\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha=(\cos\alpha+\cos3\alpha)+\cos2\alpha$

$$= 2\cos2\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha$$

$$= 2\cos2\alpha\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right).$$

所以 $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha$

$$= 2\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)(\sin2\alpha+\cos2\alpha)$$

$$= 2\left(\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sqrt{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

(4) $\operatorname{ctg}^2 2x-\operatorname{tg}^2 2x-8\cos4x\operatorname{ctg}4x$

$$= (\operatorname{ctg}2x+\operatorname{tg}2x)(\operatorname{ctg}2x-\operatorname{tg}2x)-8\cos4x\operatorname{ctg}4x$$

$$= 4\csc4x\operatorname{ctg}4x-8\cos4x\operatorname{ctg}4x$$

$$= 4\operatorname{ctg}4x\csc4x(1-2\sin4x\cos4x)$$

$$= 4\text{ctg}\,4x\csc 4x\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 8x\right)$$

$$= 8\text{ctg}4x\csc 4x\cos\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-4x\right).$$

(5) 根据公式 $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

$=3(a+b)(b+c)(c+a)$ 得

$$(\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha)^3-\sin^3\alpha-\sin^3 2\alpha-\sin^3 3\alpha$$

$$=3(\sin\alpha+\sin 2\alpha)(\sin 2\alpha+\sin 3\alpha)(\sin 3\alpha+\sin\alpha)$$

$$=3\cdot 2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin 2\alpha\cos\alpha$$

$$=24\sin\frac{3\alpha}{2}\sin 2\alpha\sin\frac{5\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha.$$

39. (1) $\cos A+\cos B+\cos C=\cos A+\cos B-\cos(A+B)$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos^2\frac{A+B}{2}+1$$

$$=1+2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left[-2\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)\right]$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(2) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos 2A)+\frac{1}{2}(1+\cos 2B)+\frac{1}{2}(1+\cos 2C)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos 2A+\cos 2B+\cos 2(A+B)\right]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2(A+B)-1\right]$$

$$=1+\cos(A+B)\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]$$

$$= 1 - \cos C \cdot 2\cos A \cos B$$

$$= 1 - 2\cos A \cos B \cos C.$$

所以

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1.$$

(3) $\dfrac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} + \dfrac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} + \dfrac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A} + \dfrac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} C} + \dfrac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A} + \dfrac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}$

$$= \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B} + \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} + \frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C}{-\operatorname{tg}(A+C)} + \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{-\operatorname{tg}(A+B)} + \frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{-\operatorname{tg}(B+C)}$$

$$= \operatorname{tg} A \operatorname{tg} C - 1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B - 1 + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C - 1$$

$$= \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A - 3$$

$$= \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} + \frac{\sin B \sin C}{\cos B \cos C} + \frac{\sin C \sin A}{\cos C \cos A} - 3$$

$$= \frac{\sin A \sin B \cos C + \sin B \sin C \cos A + \sin C \sin A \cos B}{\cos A \cos B \cos C} - 3$$

$$= \frac{\cos A \cos B \cos C - \cos(A+B+C)}{\cos A \cos B \cos C} - 3$$

$$= \frac{\cos A \cos B \cos C - \cos \pi}{\cos A \cos B \cos C} - 3$$

$$= \sec A \sec B \sec C - 2.$$

(4) $\operatorname{ctg} B + \dfrac{\cos C}{\sin B \cos A} = \dfrac{\cos B}{\sin B} + \dfrac{\cos C}{\sin B \cos A}$

$$= \frac{\cos A \cos B + \cos C}{\sin B \cos A} = \frac{\cos A \cos B - \cos(A+B)}{\sin B \cos A}$$

$$= \frac{\sin A \sin B}{\sin B \cos A} = \operatorname{tg} A.$$

(5) $\dfrac{\cos A}{\sin B \sin C} + \dfrac{\cos B}{\sin C \sin A} + \dfrac{\cos C}{\sin A \sin B}$

$$=\frac{\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot 4\sin A\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$=2.$$

40. (1) $\sin A-\sin B+\sin C-\sin D$

$$=\sin A-\sin B+\sin C+\sin(A+B+C)$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B+2C}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\sin\frac{A-B}{2}+\sin\frac{A+B+2C}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

$$=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{A+C}{2}.$$

(2) $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C-\cos^2 D$

$$=\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C-\cos^2(A+B+C)$$

$$=\frac{1}{2}[\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C-\cos 2(A+B+C)]$$

$$=\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos(A+B+2C)\cos(A+B)$$

$$=\cos(A+B)[\cos(A-B)-\cos(A+B+2C)]$$

$$=\cos(A+B)[-2\sin(A+C)\sin(-B-C)]$$

$$=2\cos(A+B)\sin(B+C)\sin(C+A).$$

41. 由题设知

$$(A+B)+(C+D)=2\pi.$$

若 $A+B=\frac{\pi}{2}$，则 $C+D=\frac{3\pi}{2}$，

$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}C\operatorname{tg}D=1$.

$\operatorname{tg}A=\operatorname{ctg}B$，$\operatorname{tg}B=\operatorname{ctg}A$，$\operatorname{tg}C=\operatorname{ctg}D$，$\operatorname{tg}D=\operatorname{ctg}A$.

所以等式成立.

若 $A+B\neq\frac{\pi}{2}$，则 $C+D\neq\frac{3\pi}{2}$，

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}(A+B)+\operatorname{tg}(C+D)\\=&\operatorname{tg}(A+B)+\operatorname{tg}[2\pi-(A+B)]=0.\end{aligned}$$

即

$$\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}+\frac{\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}D}{1-\operatorname{tg}C\operatorname{tg}D}=0,$$

所以

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}D\\=&\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\operatorname{tg}D+\operatorname{tg}C\operatorname{tg}D\operatorname{tg}A\\&+\operatorname{tg}D\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B.\end{aligned}$$

用 $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\operatorname{tg}D$ 除等式两边，即得

$$\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}D}{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\operatorname{tg}D}=\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}D.$$

42. 记

$$f(\beta)=a_1\cos(\alpha_1+\beta)+a_2\cos(\alpha_2+\beta)+\cdots+a_n\cos(\alpha_n+\beta).$$

由题设知 $f(0)=f(1)=0$. 但由于

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),$$

所以

$$f(\beta)=\cos\beta f(0)+\sin\beta f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

令 $\beta=1$，由 $f(1)=0$，$\sin 1\neq 0$，得 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. 所以对于所

有 β，有 $f(\beta)=0$.

43. 在

$$f(x_1)=A\cos x_1+B\sin x_1=0,$$
$$f(x_2)=A\cos x_2+B\sin x_2=0$$

中，因为

$$\begin{vmatrix}\cos x_1 & \sin x_1\\ \cos x_2 & \sin x_2\end{vmatrix}=\sin(x_2-x_1)\neq 0,$$

所以

$$A=B=0,\quad f(x)\equiv 0.$$

44. 因 $\cos\theta-\sin\theta=b$,

所以

$$1-2\sin\theta\cos\theta=b^2,$$
$$\sin\theta\cos\theta=\frac{1-b^2}{2}.$$

又

$$\cos 3\theta+\sin 3\theta=a,$$
$$4\cos^3\theta-3\cos\theta+3\sin\theta-4\sin^3\theta=a,$$
$$4(\cos\theta-\sin\theta)\ (\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta)$$
$$-3(\cos\theta-\sin\theta)=a,$$
$$4b\left(1+\frac{1-b^2}{2}\right)-3b=a,$$

所以

$$a=3b-2b^3.$$

45. 由题设有

$$\cos(\alpha-3\phi)=m\cos^3\phi \qquad ①$$
$$\sin(\alpha-3\phi)=m\sin^3\phi \qquad ②$$

于是

$$\cos(\alpha-3\phi)\cos 3\phi = m\cos^3\phi\cos 3\phi \qquad ③$$

$$\sin(\alpha-3\phi)\sin 3\phi = m\sin^3\phi\sin 3\phi \qquad ④$$

③－④：
$$\cos\alpha = m(\cos^3\phi\cos 3\phi - \sin^3\phi\sin 3\phi)$$
$$= -3m(\cos^4\phi+\sin^4\phi) + 4m(\cos^6\phi+\sin^6\phi) \qquad ⑤$$

①、②平方后相加，得

$$1 = m^2(\cos^6\phi+\sin^6\phi),$$

所以
$$\cos^6\phi+\sin^6\phi = \frac{1}{m^2} \qquad ⑥$$

$$\cos^4\phi - \sin^2\phi\cos^2\phi + \sin^4\phi = \frac{1}{m^2}. \qquad ⑦$$

又
$$\sin^4\phi+\cos^4\phi = (\sin^2\phi+\cos^2\phi)^2 - 2\sin^2\phi\cos^2\phi$$
$$= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\phi$$
$$= \frac{3}{4}+\frac{\cos 4\phi}{4}, \qquad ⑧$$

$$\sin^2\phi\cos^2\phi = \frac{1}{8}(1-\cos 4\phi). \qquad ⑨$$

将⑧、⑨代入⑦，得

$$\frac{3}{4}+\frac{\cos 4\phi}{4}-\frac{1}{8}(1-\cos 4\phi) = \frac{1}{m^2},$$

所以
$$\cos 4\phi = \frac{8}{3m^2}-\frac{5}{3}. \qquad ⑩$$

将⑥、⑧、⑩代入⑤，并化简，得

$$\cos\alpha = \frac{2-m^2}{m}.$$

46．(1) 式平方，得

$$a^2\cos^2\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta + b^2\sin^2\theta = c^2. \qquad ③$$

(2)式乘以 b，得

$$ab\cos^2\theta+2ab\sin\theta\cos\theta+b^2\sin^2\theta=bc. \qquad ④$$

③－④，得

$$(a^2-ab)\cos^2\theta=c^2-bc,$$

所以

$$\cos^2\theta=\frac{c^2-bc}{a^2-ab},$$

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{2c^2-2bc}{a^2-ab}-1=\frac{2c^2-2bc-a^2+ab}{a^2-ab}.$$

由②得

$$a(1+\cos 2\theta)+2a\sin 2\theta+b(1-\cos 2\theta)=2c,$$

所以

$$\begin{aligned}2a\sin 2\theta&=2c-a-b+(b-a)\cos 2\theta\\&=2c-a-b+(b-a)\cdot\frac{2c^2-2bc-a^2+ab}{a^2-ab}\\&=\frac{2ac-2ab+2bc-2c^2}{a},\end{aligned}$$

$$\sin 2\theta=\frac{ac-ab+bc-c^2}{a^2}=\frac{(a-c)(c-b)}{a^2}.$$

由 $\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1$ 有

$$\frac{(a-c)^2(c-b)^2}{a^4}+\frac{(2c^2-2bc-a^2+ab)^2}{a^2(a-b)^2}=1.$$

进一步化简可得

$$(a-b)^2(a-c)(c-b)=4a^2c(a+c-b).$$

47. 依(1)、(2)，θ 及 ϕ 均为方程

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=2a$$

之 α 的二根，将这个方程变形：

$$(x\cos\alpha-2a)^2=y^2\sin^2\alpha,$$

$$x^2\cos^2\alpha-4ax\cos\alpha+4a^2=y^2\sin^2\alpha,$$

$$x^2\cos^2\alpha-4ax\cos\alpha+4a^2=y^2-y^2\cos^2\alpha,$$

$$(x^2+y^2)\cos^2\alpha-4ax\cos\alpha+4a^2-y^2=0.$$

根据韦达定理有

$$\cos\theta+\cos\phi=\frac{4ax}{x^2+y^2},\quad \cos\theta\cos\phi=\frac{4a^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

将(3)式平方，得

$$4\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\phi}{2}=1,$$

$$(1-\cos\theta)\ (1-\cos\phi)\ =1,$$

$$1-\ (\cos\theta+\cos\phi)\ +\cos\theta\cos\phi=1,$$

$$\cos\theta\cos\phi=\cos\phi+\cos\phi.$$

所以

$$\frac{4a^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{4ax}{x^2+y^2},$$

$$y^2=4a^2-4ax.$$

48. 由①得

$$\frac{\sin x}{\sin(y-z)}=a,$$

由合分比定理

$$\frac{\sin x+\sin(y-z)}{\sin x-\sin(y-z)}=\frac{a+1}{a-1},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{x+y-z}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x-y+z}{2}}=\frac{a+1}{a-1}. \qquad ④$$

同理

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{y+z-x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{y-z+x}{2}}=\frac{b+1}{b-1}, \qquad ⑤$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{z+x-y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{z-x+y}{2}}=\frac{c+1}{c-1} \tag{⑥}$$

②·③·④，得

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(a-1)(b-1)(c-1)}=1.$$

化简后可得

$$ab+bc+ca=-1.$$

49. $2+\sin x+\cos x-\dfrac{2}{2-\sin x-\cos x}$

$$=\frac{4-(\sin x+\cos x)^2-2}{2-(\sin x+\cos x)}$$

$$=\frac{2-(1+\sin 2x)}{2-(\sin x+\cos x)}$$

$$=\frac{1-\sin 2x}{2-(\sin x+\cos x)}.$$

因为

$$|\sin x+\cos x|<2,\quad \sin 2x\leqslant 1,$$

所以

$$2-(\sin x+\cos x)>0,\quad 1-\sin 2x\geqslant 0.$$

$$2+\sin x+\cos x-\frac{2}{2-\sin x-\cos x}\geqslant 0.$$

故有

$$2+\sin x+\cos x\geqslant\frac{2}{2-\sin x-\cos x}.$$

50. 设直角三角形的一锐角为 θ，则

$$x=z\sin\theta,\quad y=z\cos\theta.$$

令 $\dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}=\cos\alpha$，$\dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}=\sin\alpha$，则

$$\frac{mx+ny}{z\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{x}{z}\cdot\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}+\frac{y}{z}\cdot\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}$$
$$=\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha$$
$$=\sin(\theta+\alpha)\leqslant 1.$$

所以 $$\frac{mx+ny}{\sqrt{m^2+n^2}}\leqslant z.$$

51. 由 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ 有

$$0<\frac{\beta-\alpha}{2}<\frac{\pi}{2},\quad 0<\frac{\beta+\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}.$$

所以 $$\sin\beta-\sin\alpha=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2}$$
$$<2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$
$$<2\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}$$
$$=\beta-\alpha,$$
$$\alpha-\sin\alpha<\beta-\sin\beta.$$

52. (1) $\sin^6 x+\cos^6 x$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$

$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$

$\geqslant 1-\frac{3}{4}$

$=\frac{1}{4}.$

(2) $\left(\frac{1}{\sin^4\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^4\alpha}-1\right)=(\csc^4\alpha-1)(\sec^4\alpha-1)$

$$= (\csc^2\alpha + 1)(\csc^2\alpha - 1)(\sec^2\alpha + 1)(\sec^2\alpha - 1)$$

$$= (\operatorname{ctg}^2\alpha + 2)\operatorname{ctg}^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha + 2)\operatorname{tg}^2\alpha$$

$$= 5 + 2(\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha)$$

$$\geqslant 5 + 2\cdot 2\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$$

$$\geqslant 9.$$

(3) $(\operatorname{ctg}^2 x - 1)(3\operatorname{ctg}^2 x - 1)(\operatorname{ctg}3x\operatorname{tg}2x - 1)$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{3\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x}\cdot$$

$$\cdot\frac{\cos 3x\sin 2x - \sin 3x\cos 2x}{\sin 3x\cos 2x}$$

$$= \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\cdot\frac{3 - 4\sin^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{-\sin x}{\sin 3x\cos 2x}$$

$$= -\frac{1}{\sin^4 x} \leqslant -1.$$

53. (1) $\sin^2(4x + 8^\circ) + \cos^2(4x - 82^\circ) = 2\sin^2(4x + 8^\circ)$.

因为

$$13^\circ \leqslant x \leqslant 28^\circ,$$

所以

$$60^\circ \leqslant 4x + 8^\circ \leqslant 120^\circ,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sin(4x + 8^\circ) \leqslant 1,$$

$$\frac{3}{4} \leqslant \sin^2(4x + 8^\circ) \leqslant 1,$$

$$\frac{3}{2} \leqslant 2\sin^2(4x + 8^\circ) \leqslant 2.$$

即

$$\frac{3}{2} \leqslant \sin^2(4x + 8^\circ) + \cos^2(4x - 82^\circ) \leqslant 2.$$

(2) $\operatorname{ctg}^2(4x + 8^\circ) + \operatorname{tg}^2(4x - 82^\circ) = 2\operatorname{ctg}^2(4x + 8^\circ)$.

因为

$$0\leqslant \operatorname{ctg}^2(4x+8^\circ)\leqslant \frac{1}{3},$$

所以

$$0\leqslant 2\operatorname{ctg}^2(4x+8^\circ)\leqslant \frac{2}{3},$$

$$0\leqslant \operatorname{ctg}^2(4x+8^\circ)+\operatorname{tg}^2(4x-82^\circ)\leqslant \frac{2}{3}.$$

54. 因$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+5}$、$\sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+5}$、$\sqrt{\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+5}$都是大于零的实数，故有

$$(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+5}-\sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+5})^2\geqslant 0,$$

$$2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+5}\sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+5}\leqslant \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+10.$$

同理

$$2\sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+5}\sqrt{\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+5}\leqslant \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+10,$$

$$2\sqrt{\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+5}\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+5}\leqslant \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+10.$$

所以(在下列过程中注意利用 16 题(1)小题之结果)：

$$\begin{aligned}&(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+5})^2\\&=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+15+2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+5}\\&\quad\sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+5}+2\sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+5}\sqrt{\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+5}\\&\quad+2\sqrt{\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+5}\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+5}\leqslant 3(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\\&\quad+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha)+45\\&=3+45\\&=48,\end{aligned}$$

$$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+5}\leqslant 4\sqrt{3}.$$

55. (1) 利用 39 题之(1)，我们有

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

因 A、B、C 是三角形的内角，所以 $\sin\frac{A}{2}$、$\sin\frac{B}{2}$、$\sin\frac{C}{2}$

都是正数，故有 $\cos A+\cos B+\cos C>1$.

又

$$\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos C$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos C.$$

如果 C 为定值，则当 $A=B$ 时，$\cos A+\cos B+\cos C$ 有最大值. 同理，若 A 或 B 为定值，则当 $B=C$ 或 $C=A$ 时，$\cos A+\cos B+\cos C$ 有最大值 $3\cos 60^\circ=\frac{3}{2}$，因此有

$$1<\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}.$$

〔**附注**〕 由 $\cos A+\cos B+\cos C$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\text{得}$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{4}(\cos A+\cos B+\cos C-1)$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}-1\right)$$

$$=\frac{1}{8}.$$

(2) $\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$+\sin(A+B).$$

当 $A=B$ 时，$\cos\frac{A-B}{2}=1$， 且 $\sin\frac{A+B}{2}$ 和 $\sin(A+B)$ 都是正值，故有

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant 2\sin\frac{A+B}{2}+\sin(A+B)$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(1+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=2\sqrt{1-\cos^2\frac{A+B}{2}}\left(1+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3\left(1-\cos\frac{A+B}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A+B}{2}\right)^3}.$$

因为

$$3\left(1-\cos\frac{A+B}{2}\right)+\left(1+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$
$$+\left(1+\cos\frac{A+B}{2}\right)+\left(1+\cos\frac{A+B}{2}\right)=6,$$

所以在 $3\left(1-\cos\frac{A+B}{2}\right)=1+\cos\frac{A+B}{2}$时，即 $A+B=120°$时，$\sin A+\sin B+\sin C$ 取最大值.

又因 $A=B$，故当 $A=B=C=60°$时，$\sin A+\sin B+\sin C$ 取最大值$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，即 $\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

〔附注〕 ①本题也可用策 52 (1) 题的方法证得；

② 由 $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$得

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{4}(\sin A+\sin B+\sin C)$$
$$\leqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

(3)〔证一〕 $\cos A\cos B\cos C$

$$=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]\cos C$$

$$=\frac{1}{2}[-\cos^2C+\cos(A-B)\cos C]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\cos C-\frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2+\frac{1}{8}\cos^2(A-B).$$

因为

$$-\left[\cos C-\frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2\leqslant 0,\quad \cos^2(A-B)\leqslant 1,$$

所以

$$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}.$$

〔证二〕 设 $t=\cos A\cos B\cos C$，则

$$t=\frac{1}{2}[-\cos^2C+\cos(A-B)\cos C],$$

$$\cos^2C-\cos(A-B)\cos C+2t=0.$$

但 $\cos C$ 是实数，故有

$$\cos^2(A-B)-8t\geqslant 0.$$

所以

$$t\leqslant\frac{1}{8}\cos^2(A-B)\leqslant\frac{1}{8}.$$

即

$$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}.$$

(4) $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)+\frac{1}{2}(1-\cos 2B)+\frac{1}{2}(1-\cos 2C)$$

$$=\frac{1}{2}[3-(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)]$$

$$=\frac{1}{2}[3+(1+4\cos A\cos B\cos C)]$$

$$=2(1+\cos A\cos B\cos C).$$

当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时，$\cos A$、$\cos B$、$\cos C$ 都是正数，$\cos A\cos B\cos C>0$，故 $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C>2$；

当 $\triangle ABC$ 为直角三角形时，$\cos A$、$\cos B$、$\cos C$ 中，有且仅有一个为零，所以 $\cos A\cos B\cos C=0$，故 $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$；

当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，$\cos A$、$\cos B$、$\cos C$ 必有一个为负，而其余两个为正，所以 $\cos A\cos B\cos C<0$，$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C<2$.

(5)
$$\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2}\geqslant 3\sqrt[3]{\csc\frac{A}{2}\csc\frac{B}{2}\csc\frac{C}{2}}$$
$$=3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{8}=6.$$

(6) 对于任意的正数 a、b、c，有不等式

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9.$$

故有

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\cdot$$
$$\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right)\geqslant 9.$$

但

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1,$$

所以

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\geqslant 9.$$

又

$$\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}\geqslant\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$$+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2},$$

故有

$$\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}\geqslant 9.$$

(7) $$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$=\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\geqslant\frac{1}{2\cdot\frac{1}{8}}=4.$$

(8) $$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{A-B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{C}{2}+\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(1+\cos C+\cos B-\cos A).$$

同理

$$\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{4}(1+\cos A+\cos C-\cos B),$$

$$\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{4}(1+\cos B+\cos A-\cos C).$$

所以

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\leqslant\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{8}.$$

56．（1）由 A、B、C 都是锐角知 $\operatorname{tg}A>0$，$\operatorname{tg}B>0$，$\operatorname{tg}C>0$.

所以

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C\geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}.$$

但

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C,$$

于是有

$$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C},$$

$$(\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C)^{\frac{2}{3}}\geqslant 3,$$

$$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\geqslant 3\sqrt{3}.$$

（2）因 A、B、C 都是锐角，故 $\operatorname{tg}A$、$\operatorname{tg}B$、$\operatorname{tg}C$、$\operatorname{ctg}A$、$\operatorname{ctg}B$、$\operatorname{ctg}C$ 都是正数，所以

$$\operatorname{tg}A(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)+\operatorname{tg}B(\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}A)+\operatorname{tg}C(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B)$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)(\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}A)(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B)}$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\cdot 2\sqrt{\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C}\cdot 2\sqrt{\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A}\cdot 2\sqrt{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B}}$$

$$=6.$$

（3）$$\sin A+\operatorname{tg}A=\frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}+\frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{4\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}^4\frac{A}{2}}.$$

因为 $0<A<\frac{\pi}{2}$，所以

$$0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{4}, \quad 0<\operatorname{tg}\frac{A}{2}<1, \quad \frac{1}{1-\operatorname{tg}^4\frac{A}{2}}>1,$$

$$\sin A+\operatorname{tg} A>4\operatorname{tg}\frac{A}{2}>4\cdot\frac{A}{2}=2A.$$

同理

$$\sin B+\operatorname{tg} B>2B, \quad \sin C+\operatorname{tg} C>2C.$$

所以

$$\begin{aligned}&\sin A+\sin B+\sin C+\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C\\ =&(\sin A+\operatorname{tg} A)+(\sin B+\operatorname{tg} B)+(\sin C+\operatorname{tg} C)\\ >&2(A+B+C)=2\pi.\end{aligned}$$

(4) 由第(1)题知

$$\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C\geqslant 3\sqrt{3},$$

所以

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^n A+\operatorname{tg}^n B+\operatorname{tg}^n C&\geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}^n A\operatorname{tg}^n B\operatorname{tg}^n C}\\ &\geqslant 3\sqrt[3]{(3\sqrt{3})^n}\\ &\geqslant 3(3\sqrt{3})^{\frac{n}{3}}=3\cdot(\sqrt{3})^n.\end{aligned}$$

因为

$$\sqrt{3}>1+\frac{1}{2}, \quad (1+a)^n\geqslant 1+na \quad (a>0),$$

所以

$$(\sqrt{3})^n>\left(1+\frac{1}{2}\right)^n\geqslant 1+\frac{n}{2},$$

于是

$$\operatorname{tg}^n A+\operatorname{tg}^n B+\operatorname{tg}^n C>3\left(1+\frac{n}{2}\right)=3+\frac{3n}{2}.$$

57. 〔证一〕 $\sin 2\alpha-\sin 2\beta=2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$$=2\cos\gamma\sin(\beta-\alpha).$$

因为γ和$\beta-\alpha$都是锐角，所以

$$\sin 2\alpha-\sin 2\beta>0,$$

$$\sin 2\alpha>\sin 2\beta.$$

同理可得

$$\sin 2\beta>\sin 2\gamma.$$

所以

$$\sin 2\alpha>\sin 2\beta>\sin 2\gamma.$$

〔证二〕 $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)<\frac{\pi}{2}$.

所以

$$\alpha+\beta>\frac{\pi}{2},\ 2\alpha+2\beta>\pi,\ \pi-2\beta<2\alpha<2\beta.$$

$$\sin 2\alpha>\sin 2\beta.$$

又由 $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$及$\alpha<\beta$得

$$2\beta>\frac{\pi}{2}.$$

所以

$$\frac{\pi}{2}<2\beta<2\gamma<\pi.$$

但正弦函数在$\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$是单调递减的，故有

$$\sin 2\beta>\sin 2\gamma.$$

所以

$$\sin 2\alpha>\sin 2\beta>\sin 2\gamma.$$

58. 因 A、B、C 是三角形的内角，$\operatorname{tg} A$、$\operatorname{tg} B$、$\operatorname{tg} C$ 必须

都是正数，故 A、B、C 都是锐角， 于是 $0<B<\frac{\pi}{2}$.

由 $\lg\operatorname{tg} A+\lg\operatorname{tg} C=2\lg\operatorname{tg} B$ 有

$$\operatorname{tg}^2 B=\operatorname{tg} A\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A[-\operatorname{tg}(A+B)]$$

$$=\frac{-\operatorname{tg} A(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B)}{1-\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B},$$

$$\operatorname{tg}^2 B(1-\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B)=-\operatorname{tg}^2 A-\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B,$$

$$\operatorname{tg}^2 A+\operatorname{tg} B(1-\operatorname{tg}^2 B)\operatorname{tg} A+\operatorname{tg}^2 B=0$$

因 $\operatorname{tg} A$ 为实数，故

$$[\operatorname{tg} B(1-\operatorname{tg}^2 B)]^2-4\operatorname{tg}^4 B\geqslant 0,$$

$$\operatorname{tg}^4 B-2\operatorname{tg}^2 B-3\geqslant 0,$$

$$(\operatorname{tg}^2 B-3)(\operatorname{tg}^2 B+1)\geqslant 0.$$

但 $$\operatorname{tg}^2 B+1>0,$$

所以

$$\operatorname{tg}^2 B-3\geqslant 0.$$

由于 B 是锐角，所以

$$\operatorname{tg} B\geqslant\sqrt{3},\quad B\geqslant\frac{\pi}{3}.$$

$$\frac{\pi}{3}\leqslant B<\frac{\pi}{2}.$$

59. 方程

$$mx^2+(2m-3)x+(m-2)=0$$

有实根，所以它的判别式的值

$$(2m-3)^2-4m(m-2)\geqslant 0.$$

解之，得

$$m\leqslant\frac{9}{4}.$$

又

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-\frac{2m-3}{m},\quad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{m-2}{m},$$

所以

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{-\frac{2m-3}{m}}{1-\frac{m-2}{m}}=-m+\frac{3}{2}\geqslant-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}=-\frac{3}{4}.$$

60. 由 $y=\frac{x^2-2x\cos\alpha+1}{x^2-2x\cos\beta+1}$ 得

$$(1-y)x^2-2(\cos\alpha-y\cos\beta)x+(1-y)=0.$$

因为 x 是实数，所以，

$$4(\cos\alpha-y\cos\beta)^2-4(1-y)^2\geqslant0,$$

$$\sin^2\beta y^2-2(1-\cos\alpha\cos\beta)y+\sin^2\alpha\leqslant0.$$

这里二次三项式里 y^2 的系数 $\sin^2\beta>0$，它的二根为

$$y=\frac{1}{2\sin^2\beta}[2(1-\cos\alpha\cos\beta)\pm$$

$$\sqrt{4(1-\cos\alpha\cos\beta)^2-4\sin^2\alpha\sin^2\beta}]$$

$$=\frac{1}{\sin^2\beta}\left[1-\cos\alpha\cos\beta\pm2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{\sin^2\beta}[1-\cos\alpha\cos\beta\pm(\cos\beta-\cos\alpha)].$$

即

$$y_1=\frac{1}{\sin^2\beta}[1-\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta-\cos\alpha]$$

$$=\frac{1}{\sin^2\beta}(1+\cos\beta)(1-\cos\alpha)$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}\cdot2\cos^2\frac{\beta}{2}\cdot2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}}.$$

$$y_2=\frac{1}{\sin^2\beta}\cdot[1-\cos\alpha\cos\beta-\cos\beta+\cos\alpha]$$

$$=\frac{1}{\sin^2\beta}(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\beta}{2}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}.$$

所以，y 的值在$\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}}$与$\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}$之间.

〔附注〕 $\sqrt{(1-\cos\alpha\cos\beta)^2-\sin^2\alpha\sin^2\beta}$

$$=\sqrt{(1-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}\cdot\sqrt{(1-\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)}$$

$$=\sqrt{[1-\cos(\alpha+\beta)][1-\cos(\alpha-\beta)]}$$

$$=\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=\pm 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

61. 由题设知$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\neq 1$，且 $m\neq -1$. 依合分比定理有

$$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}=\operatorname{tg}\theta+m,$$

$$m=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}-\operatorname{tg}\theta=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}-\frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}=\sec\theta.$$

但因$|\sec\theta|\geqslant 1$，故有$m\geqslant 1$或$m<-1$.

62. 原方程可变为

$$1-2\sin^2x+\sin x=q,$$

$$2\sin^2x-\sin x+(q-1)=0.$$

这个方程的判别式的值

$$\Delta=(-1)^2-8(q-1)=-8q+9.$$

要使x取实数值，必须$\Delta\geqslant 0$且$|\sin x|\leqslant 1$，即

$$\begin{cases}-8q+9\geqslant 0,\\ -1\leqslant\dfrac{1\pm\sqrt{-8q+9}}{4}\leqslant 1.\end{cases}$$

解不等式组

$$\begin{cases}-8q+9\geqslant 0,\\ \dfrac{1\pm\sqrt{-8q+9}}{4}\geqslant -1\end{cases}$$

得

$$-2\leqslant q\leqslant\frac{9}{8};$$

解不等式组

$$\begin{cases}-8q+9\geqslant 0\\ \dfrac{1\pm\sqrt{-8q+9}}{4}\leqslant 1\end{cases}$$

得

$$0\leqslant q\leqslant\frac{9}{8}$$

故 q 的取值范围是 $-2\leqslant q\leqslant\frac{9}{8}$.

此时方程 $\cos 2x+\sin x=q$ 有实数解.

63. $\sin^6x+\cos^6x+a\sin x\cos x$

$$=(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^4x-\sin^2x\cos^2x+\cos^4x)+a\sin x\cos x$$

$$=(\sin^2x+\cos^2x)^2-3\sin^2x\cos^2x+a\sin x\cos x$$

$$=-3(\sin x\cos x)^2+a\sin x\cos x+1.$$

设 $t=\sin x\cos x$，则上式化为

$$f(t)=-3t^2+at+1.$$

因为 $t=\frac{1}{2}\sin 2x$，而 $|\sin 2x|\leqslant 1$，所以 $-\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$，

故只须确定 a 的值，使

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2} & ①\\ -3t^2+at+1\geqslant 0. & ②\end{cases}$$

解②，得

$$\frac{a-\sqrt{a^2+12}}{6}\leqslant t\leqslant\frac{a+\sqrt{a^2+12}}{6}.$$

注意①，得

$$\begin{cases}\frac{a+\sqrt{a^2+12}}{6}=\frac{1}{2}, & \text{即 } a=-\frac{1}{2},\\ \frac{a-\sqrt{a^2+12}}{6}=-\frac{1}{2}, & \text{即 } a=\frac{1}{2},\end{cases}$$

64. (1) $y=\sin^{10}x+10\sin^4x\cos^2x+\cos^{10}x$

$$=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5+\frac{5}{2}\sin^2 2x+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5$$

$$=\frac{10\cos^4 2x-60\cos^2 2x+82}{32}$$

$$=\frac{5}{16}(\cos^2 2x-3)^2-\frac{1}{4}.$$

当 $\cos^2 2x=0$，即 $x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$时，$y_{极大}=2\frac{9}{16}$；

当 $\cos^2 2x=1$，即 $x=k\cdot\frac{\pi}{2}$时，$y_{极小}=1$。

(2) $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}+3x\right)\cos\left(x+\frac{2\pi}{9}\right)$

$$=\sin\left(3x+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{2\pi}{9}\right)$$

$$=-\cos3\left(x+\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(x+\frac{2\pi}{9}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\cos4\left(x+\frac{2\pi}{9}\right)+\cos2\left(x+\frac{2\pi}{9}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[2\cos^2 2\left(x+\frac{2\pi}{9}\right)+\cos2\left(x+\frac{2\pi}{9}\right)-1\right]$$

$$=-\left[\cos2\left(x+\frac{2\pi}{9}\right)+\frac{1}{4}\right]^2+\frac{9}{16}.$$

当 $\cos2\left(x+\frac{2\pi}{9}\right)=-\frac{1}{4}$，即 $x=\left(k-\frac{2}{9}\right)\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$

时，$y_{极大}=\frac{9}{16}$；

当 $\cos2\left(x+\frac{2\pi}{9}\right)=1$，即 $x=\left(k-\frac{2}{9}\right)\pi$ 时，$y_{极小}=-1$。

(3) 设 $\cos^2 x=u$，$\sin^2 x=v$，则.

$$y=\cos^p x\sin^q x=u^{\frac{p}{2}}v^{\frac{q}{2}}.$$

而 $u+v=\cos^2 x+\sin^2 x=1$，即 u 与 v 的和为常数，

所以当$\frac{2u}{p}=\frac{2v}{q}$时，$y$ 有极大值.

由 $u+v=1$ 及 $\frac{2u}{p}=\frac{2v}{q}$ 求得

$$u=\frac{p}{p+q},\quad v=\frac{q}{p+q}.$$

就是

$$\cos^2 x=\frac{p}{p+q},\quad \sin^2 x=\frac{q}{p+q}.$$

所以，当 $x=arc\cos\sqrt{\frac{p}{p+q}}$ 时，$y_{极大}=\sqrt{\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}}$.

(4) 设 $\mathrm{tg}^p x=u$，$\mathrm{ctg}^q x=v$，则

$$y=\mathrm{tg}^p x+\mathrm{ctg}^q x=u+v.$$

而 $u^{\frac{1}{p}}\cdot v^{\frac{1}{q}}=\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{ctg}x=1$，所以当 $pu=qv$ 时，$u+v$ 有极小值.

由 $u^{\frac{1}{p}}\cdot v^{\frac{1}{q}}=1$ 及 $pu=qv$ 求得

$$u=\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{p+q}},\quad v=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p+q}}.$$

就是

$$\mathrm{tg}\,x=\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{p+q}},\quad \mathrm{ctg}\,x=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p+q}}.$$

所以，当 $x=arc\,\mathrm{tg}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{p+q}}$ 时，$y_{极小}=\frac{p+q}{pq}(p^p q^q)^{\frac{1}{p+q}}$.

65. $\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta+2\sin\frac{\theta}{2}\sin 2\theta\right.$$

$$\left.+\cdots+2\sin\frac{\theta}{2}\sin n\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}-\cos\frac{5\theta}{2}\right.$$

$$+\cdots+\cos\frac{2n-1}{2}\theta-\cos\frac{2n+1}{2}\theta)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}\theta\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

所以

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta+\frac{\sin(n+1)\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta+\sin\theta+\sin 2\theta$$

$$+\cdots+\sin n\theta+\sin(n+1)\theta]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n+2}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(\sin\frac{n\theta}{2}+\sin\frac{n+2}{2}\theta\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}\cdot 2\sin\frac{n+1}{2}\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=\sin^2\frac{n+1}{2}\theta\cdot\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

但 $0<\theta<\pi$，$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}>0$，因此有

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta+\frac{\sin(n+1)\theta}{2}>0$$

而在 $\theta=0$ 及 $\theta=\pi$ 时，显然有，$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta+\frac{\sin(n+1)\theta}{2}=0$。

66. $\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\cdots+\sin^2 n\theta$

$$=\frac{1}{2}[(1-\cos 2\theta)+(1-\cos 4\theta)+\cdots+(1-\cos 2n\theta)]$$

$$=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cdots+\cos 2n\theta)$$

$$=\frac{n}{2}-\frac{1}{4\sin\theta}(2\sin\theta\cos 2\theta+2\sin\theta\cos 4\theta+\cdots+2\sin\theta\cos 2n\theta)$$

$$=\frac{n}{2}-\frac{1}{4\sin\theta}[\sin 3\theta-\sin\theta+\sin 5\theta-\sin 3\theta+\cdots+\sin(2n+1)\theta-\sin(2n-1)\theta]$$

$$=\frac{n}{2}-\frac{1}{4\sin\theta}[\sin(2n+1)\theta-\sin\theta]$$

$$=\frac{n}{2}-\frac{\cos(n+1)\theta\sin n\theta}{2\sin\theta}.$$

67. 因为

$$\frac{1}{1+\mathrm{tg}\, n\alpha+\mathrm{tg}\, 2n\alpha}$$

$$=\frac{\cos n\alpha\cos 2n\alpha}{\cos n\alpha\cos 2n\alpha+\sin n\alpha\sin 2n\alpha}$$

$$=\frac{\cos n\alpha\cos 2n\alpha}{\cos n\alpha}$$

$$=\cos 2n\alpha,$$

所以

$$\frac{1}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha}+\frac{1}{1+\mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\,4\alpha}$$

$$+\cdots+\frac{1}{1+\operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg} 2n\alpha}$$

$$=\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cdots+\cos 2n\alpha$$

$$=\frac{\cos(n+1)\alpha \sin n\alpha}{\sin\alpha}.$$

68. 因为

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha,$$

所以

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha, \quad ①$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\alpha, \quad ②$$

……

$$\frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-2}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-2}} \quad ⓝ$$

把这 n 个式子两边分别相加，得

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}-2\operatorname{ctg}2\alpha.$$

69. $(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=4\cos^2\theta-1$

$$=4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}-1=2\cos 2\theta+1, \quad ①$$

$$(2\cos 2\theta+1)(2\cos 2\theta-1)=2\cos 2^2\theta+1, \quad ②$$

$$(2\cos 2^2\theta+1)(2\cos 2^2\theta-1)=2\cos 2^3\theta+1, \quad ③$$

……

$$(2\cos 2^{n-1}\theta+1)(2\cos 2^{n-1}\theta-1)=2\cos 2^n\theta+1. \quad ⓝ$$

把这 n 个式子两边分别相乘，得

$$(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)(2\cos 2\theta-1)(2\cos 2^2\theta-1)$$

$$\cdots(2\cos 2^{n-1}\theta-1)=2\cos 2^n\theta+1.$$

所以

$$(2\cos\theta-1)(2\cos2\theta-1)(2\cos2^2\theta-1)$$
$$\cdots(2\cos2^{n-1}\theta-1)=\frac{2\cos2^n\theta+1}{2\cos\theta+1}.$$

70. $\cos\alpha-\cos\beta=\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)-\left(2\cos^2\frac{\beta}{2}-1\right)$

$$=2\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}\right),$$

所以

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}}.$$

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\beta}{4}\right)\cdots$$
$$\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}+\cos\frac{\beta}{2^n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\beta}{4}}$$

$$\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}-\cos\frac{\beta}{2^{n-1}}}{\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\frac{\beta}{2^n}}$$

$$=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\frac{\beta}{2^n}}.$$

71. $\operatorname{tg}1^\circ-\operatorname{tg}0^\circ=\frac{\sin1^\circ}{\cos0^\circ\cos1^\circ}$, ①

$\operatorname{tg}2^\circ-\operatorname{tg}1^\circ=\frac{\sin1^\circ}{\cos1^\circ\cos2^\circ}$ ②

……

$$\operatorname{tg}(n+1)^\circ-\operatorname{tg}n^\circ=\frac{\sin1^\circ}{\cos n^\circ\cos(n+1)^\circ}. \qquad ⓝ$$

把这 n 个等式两边分别相加，得

$$\operatorname{tg}(n+1)^\circ=\sin1^\circ\left\{\frac{1}{\cos0^\circ\cos1^\circ}+\frac{1}{\cos1^\circ\cos2^\circ}+\cdots+\frac{1}{\cos n^\circ\cos(n+1)^\circ}\right\}.$$

所以

$$\frac{1}{\cos0^\circ\cos1^\circ}+\frac{1}{\cos1^\circ\cos2^\circ}+\cdots+\frac{1}{\cos n^\circ\cos(n+1)^\circ}=\frac{\operatorname{tg}(n+1)^\circ}{\sin1^\circ}.$$

72. $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$， ①

$$\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2}, \qquad ②$$

$$\sin\frac{x}{2^2}=2\sin\frac{x}{2^3}\cos\frac{x}{2^3}, \qquad ③$$

……

$$\sin\frac{x}{2^{n-1}}=2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}. \qquad ⓝ$$

把这 n 个等式两边分别相乘，得

$$\sin x=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n},$$

所以

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

73. $\sec A+\csc A=\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\sin A}=\frac{\sin A+\cos A}{\cos A\sin A}$.

因为 A 为锐角，所以

$$\sin A+\cos A>1,$$

$$\sec A+\csc A>\frac{1}{\cos A\sin A}=\sec A\csc A.$$

同理

$$\sec\frac{A}{2}+\csc\frac{A}{2}>\sec\frac{A}{2}\csc\frac{A}{2},$$

……

$$\sec\frac{A}{n}+\csc\frac{A}{n}>\sec\frac{A}{n}\csc\frac{A}{n}.$$

所以

$$\sec A+\sec\frac{A}{2}+\cdots+\sec\frac{A}{n}+\csc A+\csc\frac{A}{2}+\cdots+\csc\frac{A}{n}$$

$$=(\sec A+\csc A)+\left(\sec\frac{A}{2}+\csc\frac{A}{2}\right)+\cdots+\left(\sec\frac{A}{n}+\csc\frac{A}{n}\right)$$

$$>\sec A\csc A+\sec\frac{A}{2}\csc\frac{A}{2}+\cdots+\sec\frac{A}{n}\csc\frac{A}{n}.$$

74. 令 $x=\gamma\cos\theta$，$y=\gamma\sin\theta$，则

$$z=x^2+y^2-xy=\gamma^2-\gamma^2\sin\theta\cos\theta=\gamma^2\left(1-\frac{1}{2}\sin2\theta\right).$$

由题设知 $1\leqslant\gamma^2\leqslant2$.

$$|\sin2\theta|\leqslant1,\quad \frac{1}{2}\leqslant1-\frac{1}{2}\sin2\theta\leqslant\frac{3}{2},$$

所以

$$\frac{1}{2}\leqslant z\leqslant3.$$

即 z 有最大值 3，最小值$\frac{1}{2}$.

75. 因 $a^2+b^2=1$，$x^2+y^2=1$，

所以

$$|a|\leqslant 1,\quad |b|\leqslant 1,\quad |x|\leqslant 1,\quad |y|\leqslant 1.$$

故可设 $a=\sin\alpha$，$b=\cos\alpha$，$x=\sin\beta$，$y=\cos\beta$.

于是 $\quad |ax+by|=|\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta|=|\cos(\alpha-\beta)|\leqslant 1.$

76. 因 $a_1^2+b_1^2=1$，$a_2^2+b_2^2=1$，

所以

$$|a_1|\leqslant 1,\quad |b_1|\leqslant 1,\quad |a_2|\leqslant 1,\quad |b_2|\leqslant 1.$$

故可设 $a_1=\sin\alpha$，$b_1=\cos\alpha$，$a_2=\sin\beta$，$b_2=\cos\beta$.

由 $a_1a_2+b_1b_2=0$ 得

$$\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=0,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=0,$$

$$\alpha-\beta=k\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}+\beta\quad (k\text{ 为整数}).$$

所以

$$\sin\alpha=\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}+\beta\right)=(-1)^k\cos\beta,$$

$$\cos\alpha=\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{2}+\beta\right)=(-1)^{k+1}\sin\beta.$$

因此

$$a_1^2+a_2^2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta=[(-1)^k\cos\beta]^2+\sin^2\beta=1,$$

$$b_1^2+b_2^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta=[(-1)^{k+1}\sin\beta]^2+\cos^2\beta=1,$$

$$\begin{aligned}a_1b_1+a_2b_2&=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta\\&=(-1)^k\cos\beta\cdot(-1)^{k+1}\sin\beta+\sin\beta\cos\beta\\&=0.\end{aligned}$$

77. 因 $x+y+z=\frac{\pi}{4}$，所以

$$\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\left(y+\frac{\pi}{4}\right)+\left(z+\frac{\pi}{4}\right)=\pi,$$

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(z+\frac{\pi}{4}\right),$$

即

$$\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}+\frac{1+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}y}+\frac{1+\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}z}$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}y}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}z}.$$

78. 设 $x=\operatorname{tg}\alpha$，$y=\operatorname{tg}\beta$，$z=\operatorname{tg}\gamma$，由题设有

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1.$$

所以

$$\alpha+\beta+\gamma=k\pi+\frac{\pi}{2}.\quad(k\text{ 为整数})$$

$$2\alpha+2\beta+2\gamma=2k\pi+\pi.$$

$$\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}2\beta+\operatorname{tg}2\gamma=\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}2\beta\cdot\operatorname{tg}2\gamma.$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}+\frac{2\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}^2\gamma}$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}^2\gamma}.$$

即

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}$$

去分母，即得

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)$$
$$+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz.$$

79. 因 $|x|>1$，且 $x>0$，故令 $x=\sec\phi$（ϕ 为锐角），则

$$\sqrt{x^2-1}=\mathrm{tg}\phi.$$

原方程化为

$$\sec\phi+\frac{\sec\phi}{\mathrm{tg}\phi}=\frac{35}{12},$$

$$\frac{\sin\phi+\cos\phi}{\sin\phi\cos\phi}=\frac{35}{12},$$

$$\frac{4(1+\sin2\phi)}{\sin^2 2\phi}=\frac{1225}{144},$$

$$1225\sin^2 2\phi-576\sin2\phi-576=0,$$

解这个方程，得

$$\sin2\phi=\frac{24}{25}.$$

所以

$$\cos2\phi=\pm\frac{7}{25},\quad \cos\phi=\sqrt{\frac{1\pm\frac{7}{25}}{2}}.$$

$$\cos\phi=\frac{4}{5}\text{ 或 }\cos\phi=\frac{3}{5}.$$

$$\sec\phi=\frac{5}{4}\text{ 或 }\sec\phi=\frac{5}{3}.$$

即

$$x=\frac{5}{4}\text{ 或 }x=\frac{5}{3}.$$

80. 题中的 x、y 必须满足

$$0\leqslant x\leqslant1,\quad 0\leqslant y\leqslant1,$$

故设 $x=\sin^2\alpha\left(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$y=\sin^2\beta\left(0\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则原方程组可化为

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=1,\\ \sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=1.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=1,\\ \cos(\alpha-\beta)=1.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2},\\ \alpha-\beta=0.\end{cases}$$

$$\alpha=\beta=\frac{\pi}{4},$$

故

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\ y=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

81．依已知条件，可设 $x=\sin^2\alpha$、$y=\cos^2\alpha$，于是有

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=\left(\sin^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\left(\cos^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)$$

$$=\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$+\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha\cos^2\alpha)^2+\cos^4\alpha+\sin^4\alpha+1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha\cos^2\alpha)^2+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{(1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha)^2+1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}.$$

因为 $$\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\leqslant\frac{1}{4},$$

所以 $$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\geqslant\frac{\left(1-\dfrac{1}{4}\right)^2+1}{\dfrac{1}{4}}=\frac{25}{4}.$$

第三章 解三角形

一、概　　述

三角形的三个角与三条边叫三角形的六个元素.

若已知三角形的两角和一边,或两边和其中一边的对角,或两边和夹角,或三边而求其它的三角形元素,这就是解三角形.

解三角形常根据:

三角形的内角和等于π(即$A+B+C=\pi$)及

正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

余弦定理:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

射影定理:

$$a=b\cos C+c\cos B,$$

$$b=c\cos A+a\cos C,$$

$$c=a\cos B+b\cos A.$$

正切定理:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}},$$

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}.$$

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{C+A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C-A}{2}}.$$

半角定理：

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}},$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{r}{s-a},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=\frac{r}{s-b}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\frac{r}{s-c}.$$

面积公式：

$$\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

$$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$\triangle=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin(C+A)}$$

$$= \frac{c^2 \sin A \sin B}{2\sin(A+B)}.$$

$$\triangle = rs,$$

$$\triangle = \frac{abc}{4R}.$$

外接圆、内切圆、旁切圆的半径：

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} = \frac{abc}{4\triangle}.$$

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = (s-a)\ \mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

$$= (s-b)\ \mathrm{tg}\frac{B}{2} = (s-c)\ \mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{\triangle}{s}.$$

$$r_a = s\,\mathrm{tg}\frac{A}{2} = \frac{\triangle}{s-a}, \qquad r_b = s\,\mathrm{tg}\frac{B}{2} = \frac{\triangle}{s-b},$$

$$r_c = s\,\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{\triangle}{s-c}.$$

解任意三角形的问题，常分为下列四种类型，分别使用各种定理.

1. 已知两角和一边，用正弦定理.

2. 已知两边和其中一边的对角，也用正弦定理．但需按下表加以区别对待：

<table>
<tr><td></td><td>$A \geqslant 90^\circ$</td><td colspan="2">$A < 90^\circ$</td></tr>
<tr><td>$a > b$</td><td>一解</td><td colspan="2">一解</td></tr>
<tr><td>$a = b$</td><td>无解</td><td colspan="2">一解</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$a < b$</td><td rowspan="3">无解</td><td>$a > b\sin A$</td><td>两解</td></tr>
<tr><td>$a = b\sin A$</td><td>一解</td></tr>
<tr><td>$a < b\sin A$</td><td>无解</td></tr>
</table>

3. 已知两边及其夹角，用余弦定理或正切定理.

4. 已知三边，用余弦定理或半角定理.

本章所涉及问题，有时在条件和结论中，边、角关系同时出现，于是形成了很多变量(或未知数). 为了简化它们，常以正弦定理或余弦定理，将其全部转化为角或边的关系. 例如，若三角形三边 a、b、c 成等差数列，则 $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$ 成等差数列，于是便将边转化为角的关系了.

本章例题，除常见类型外，还引进了判断三角形的形状，极值问题，用三角法证几何题等.

二、例　　题

1. 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C$$
$$=0.$$

〔分析〕 本题由于边角因素过多，因此宜将左边统一为角 A、B、C 的三角函数或将左边统一为边 a、b、c 之间的关系进行论证.

〔证一〕 依正弦定理有

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A=\frac{4R^2(\sin^2 B-\sin^2 C)}{4R^2\sin^2 A}\cdot\sin 2A$$
$$=\frac{\sin^2 B-\sin^2 C}{\sin^2 A}\cdot 2\sin A\cos A$$
$$=\frac{\sin(B+C)\sin(B-C)}{\sin A}\cdot 2\cos A$$
$$=2\sin(B-C)\cos A$$
$$=-2\sin(B-C)\cos(B+C)$$
$$=\sin 2C-\sin 2B.$$

同理

$$\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B=\sin 2A-\sin 2C,$$

$$\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=\sin 2B-\sin 2A.$$

所以

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C$$

$$=(\sin 2C-\sin 2B)+(\sin 2A-\sin 2C)+(\sin 2B-\sin 2A)=0.$$

〔证二〕 依正弦定理和余弦定理有

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A=\frac{b^2-c^2}{a^2}\cdot 2\sin A\cos A$$

$$=\frac{b^2-c^2}{a^2}\cdot 2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{b^4-c^4-a^2b^2+a^2c^2}{2Rabc}.$$

同理

$$\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B=\frac{c^4-a^4-b^2c^2+a^2b^2}{2Rabc},$$

$$\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=\frac{a^4-b^4-a^2c^2+b^2c^2}{2Rabc}.$$

所以

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C$$

$$=\frac{b^4-c^4-a^2b^2+a^2c^2}{2Rabc}+\frac{c^4-a^4-b^2c^2+a^2b^2}{2Rabc}+\frac{a^4-b^4-a^2c^2+b^2c^2}{2Rabc}$$

$$=0.$$

2．求证 $a^2-2ab\cos(60^\circ+C)=c^2-2bc\cos(60^\circ+A)$．

〔**分析**〕 为证本题，首先应考虑采用一种便于论证的等价形式，为此本题应化为

$$2ab\cos(60^\circ+C)-2bc\cos(60^\circ+A)=a^2-c^2$$

或

$$a^2+b^2-2ab\cos(60^\circ+C)=b^2+c^2-2bc\cos(60^\circ+A).$$

〔**证一**〕 因

$$\begin{aligned}
&2ab\cos(60^\circ+C)-2bc\cos(60^\circ+A)\\
&=2b[a(\cos 60^\circ\cos C-\sin 60^\circ\sin C)\\
&\quad -c(\cos 60^\circ\cos A-\sin 60^\circ\sin A)]\\
&=b[(a\cos C-c\cos A)+\sqrt{3}(c\sin A-a\sin C)]\\
&=b(a\cos C-c\cos A)\\
&=ab\cos C-bc\cos A\\
&=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)-\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)\\
&=a^2-c^2,
\end{aligned}$$

所以

$$a^2-2ab\cos(60^\circ+C)=c^2-2bc\cos(60^\circ+A).$$

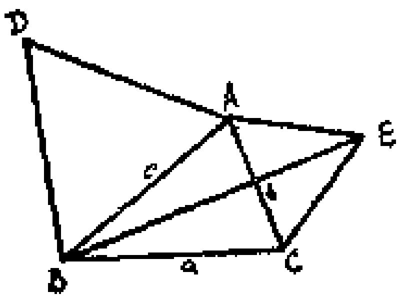

图 3—1

〔**证二**〕 分别以 AB、AC 为边向外作等边三角形 ABD 和 ACE，在 $\triangle ABE$ 中，

$$BE^2=b^2+c^2-2bc\cos(60^\circ+A),$$

在 $\triangle BCE$ 中，

$$BE^2=a^2+b^2-2ab\cos(60^\circ+C).$$

所以

$$a^2+b^2-2ab\cos(60^\circ+C)=b^2+c^2-2bc\cos(60^\circ+A),$$

即

$$a^2-2ab\cos(60^\circ+C)=c^2-2bc\cos(60^\circ+A).$$

3. $\triangle ABC$ 中，求证$\frac{r_a}{bc}+\frac{r_b}{ca}+\frac{r_c}{ab}=\frac{1}{r}-\frac{1}{2R}$. 其中$R$、$r$分别为外接圆及内切圆的半径，$r_a$、$r_b$、$r_c$分别为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$内的旁切圆的半径.

〔分析〕 为简化因素，先用三角形的元素表示r_a、r_b、r_c后，再用面积公式进行证明.

〔证〕 设$\odot I_1$是$\triangle ABC$的$\angle A$内的旁切圆，其半径为r_a，D、E、F是切点，则

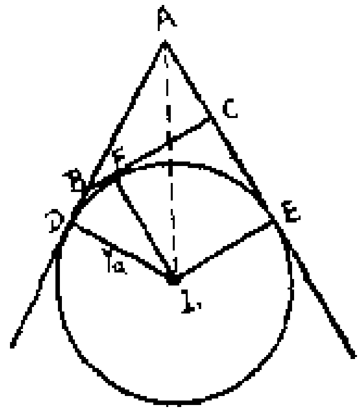

图 3—2

$$AD+AE=AB+BD+AC+CE$$
$$=AB+BF+AC+CF,$$
$$2AD=AB+BC+CA,$$

所以

$$AD=\frac{1}{2}(a+b+c)=s.$$

在 rt $\triangle AI_1D$ 中，$r_a=AD\operatorname{tg}\frac{A}{2}=s\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

同理

$$r_b=s\operatorname{tg}\frac{B}{2},\quad r_c=s\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

所以

$$\frac{r_a}{bc}+\frac{r_b}{ca}+\frac{r_c}{ab}$$
$$=\frac{s}{abc}\left(a\operatorname{tg}\frac{A}{2}+b\operatorname{tg}\frac{B}{2}+c\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$$

$$=\frac{4Rs}{abc}\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$=\frac{4Rs}{abc}\left(1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right).$$

又

$$\triangle=\frac{abc}{4R},\quad \triangle=rs,$$

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

所以

$$\frac{4Rs}{abc}=\frac{1}{r},$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}.$$

$$\frac{r_a}{bc}+\frac{r_b}{ca}+\frac{r_c}{ab}=\frac{1}{r}\left(1-2\cdot\frac{r}{4R}\right)$$

$$=\frac{1}{r}-\frac{1}{2R}.$$

4．在$\triangle ABC$中，已知$\angle B-\angle C=90^\circ$，求证：

$$\frac{2}{a^2}=\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}.$$

〔分析〕 从结论逆推，可得

$$\frac{2}{a^2}=\frac{2(b^2+c^2)}{(b^2-c^2)^2},$$

$$\frac{a^2(b^2+c^2)}{(b^2-c^2)^2}=1,$$

$$\left(\frac{ab}{b^2-c^2}\right)^2+\left(\frac{ac}{b^2-c^2}\right)^2=1.$$

于是，只要证明$\frac{ab}{b^2-c^2}$和$\frac{ac}{b^2-c^2}$分别是某个角的正弦和余弦，问题就比较明显了．

〔证〕 由 $\angle B-\angle C=90°$ 知 $\angle ABC$ 是钝角，作 $AH\perp BC$，交 CB 的延长线于 H，令 $BH=x$，$\angle BAH=\alpha$，则

$\alpha=\angle C$，$x=c\sin C$.

根据正弦定理有

$b\sin C=c\sin B$.

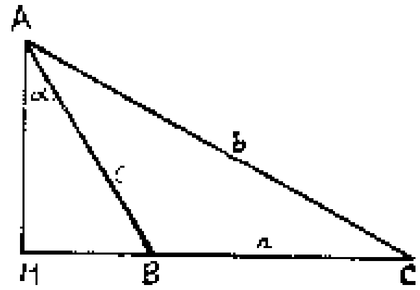

图 3—3

因为 $\angle B-\angle C=90°$. 所以 $\angle B=90°+\angle C$，$\sin B=\cos C$. 于是

$$b\sin C=c\cos C,$$

$$\cos C=\frac{b\sin C}{c}.$$

又

$$CH=a+x=b\cos C,$$

将 $x=c\sin C$. $\cos C=\dfrac{b\sin C}{c}$ 代入 $a+x=b\cos C$，得

$$a+c\sin C=\frac{b^2\sin C}{c}.$$

解之，得 $\sin C=\dfrac{ac}{b^2-c^2}$.

从而

$$\cos C=\frac{b}{c}\sin C=\frac{b}{c}\cdot\frac{ac}{b^2-c^2}=\frac{ab}{b^2-c^2}.$$

由 $\sin^2 C+\cos^2 C=1$ 有

$$\left(\frac{ac}{b^2-c^2}\right)^2+\left(\frac{ab}{b^2-c^2}\right)^2=1,$$

即

$$\frac{2}{a^2}=\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}.$$

5. 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\dfrac{1}{a}$、$\dfrac{1}{b}$、$\dfrac{1}{c}$ 成等差数列，那么

$\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}}$、$\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{B}{2}}$、$\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{C}{2}}$也成等差数列.

〔分析〕 利用半角定理进行证明.

〔证〕 由已知条件有

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b},$$

$$\frac{a+c}{ac}=\frac{2}{b},$$

$$2ac=b(a+c).$$

所以

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\\
&=\frac{bc}{(s-b)(s-c)}+\frac{ab}{(s-a)(s-b)}\\
&=\frac{bc(s-a)+ab(s-c)}{(s-a)(s-b)(s-c)}\\
&=\frac{b(cs-ac+as-ac)}{(s-a)(s-b)(s-c)}\\
&=\frac{b[s(a+c)-b(a+c)]}{(s-a)(s-b)(s-c)}\\
&=\frac{b(a+c)(s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)}\\
&=\frac{2ac}{(s-a)(s-c)}\\
&=\frac{2}{\sin^2\frac{B}{2}}.
\end{aligned}$$

即$\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}}$、$\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{B}{2}}$、$\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{C}{2}}$成等差数列.

6. $\triangle ABC$ 中，a、b、c 成等差数列，$A-C=120°$，求 $\sin A$ 及 $\sin C$ 的值.

〔分析〕 依 a、b、c 成等差数列，则 $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$ 必成等差数列，即 $a+c=2b$，则 $\sin A+\sin C=2\sin B$. 于是先求出 $\sin B$ 的值，即 $\sin A+\sin C$ 的值，再求出 $\sin A-\sin C$ 的值.

〔解〕 因为 $a+c=2b$，根据正弦定理有

$$\sin A+\sin C=2\sin B,$$

$$2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\sin B.$$

$$2\cos\frac{B}{2}\cos 60°=4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}.$$

所以有

$$\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{4},\quad \cos\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\sin B=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{15}}{8},$$

$$\sin A+\sin C=2\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

又

$$\sin A-\sin C=2\cos\frac{A+C}{2}\sin\frac{A-C}{2}$$

$$=2\sin\frac{B}{2}\sin 60°$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

所以

$$\sin A=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{8},\quad \sin C=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{8}.$$

7. $\triangle ABC$ 中，a、b、c 成等差数列，最大角为 A，求

证：$\dfrac{\cos A+\cos C}{1+\cos A\cos C}=\dfrac{4}{5}$.

〔分析〕 依余弦定理，用 a、b、c 表出 $\cos A$、$\cos C$. 再依已知条件，将所得式子化简.

〔证〕 由题设知 $a>b>c$，$A>B>C$，$2b=a+c$.
依余弦定理有

$$\begin{aligned}\cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+(c+a)(c-a)}{2bc}\\&=\frac{b^2+2b(c-a)}{2bc}=\frac{b+2(c-a)}{2c}\\&=\frac{\frac{1}{2}(c+a)+2(c-a)}{2c}=\frac{5c-3a}{4c}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{b^2+(a+c)(a-c)}{2ab}\\&=\frac{b^2+2b(a-c)}{2ab}=\frac{b+2(a-c)}{2a}\\&=\frac{\frac{1}{2}(a+c)+2(a-c)}{2a}=\frac{5a-3c}{4a}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\cos A+\cos C}{1+\cos A\cos C}&=\frac{\dfrac{5c-3a}{4c}+\dfrac{5a-3c}{4a}}{1+\dfrac{5c-3a}{4c}\cdot\dfrac{5a-3c}{4a}}\\&=\frac{4(10ac-3a^2-3c^2)}{5(10ac-3a^2-3c^2)}\\&=\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

8．$\triangle ABC$ 中，已知

$$a^2-a-2b-2c=0, \qquad ①$$

$$a+2b-2c+3=0. \quad ②$$

求最大角.

〔**分析**〕 在△ABC中,要求最大角,必先确定最大边. 因此必须由所给二式用一边表示其它两边,才容易比较大小. 用哪一边来表示其它两边呢? 由于a是二次式,因此用a表示b、c,较为容易.

〔**解**〕 ①+②, 得

$$a^2-4c+3=0,$$

所以

$$c=\frac{1}{4}(a^2+3). \quad ③$$

③代入①, 得

$$b=\frac{1}{4}(a^2-2a-3)=\frac{1}{4}(a-3)(a+1) \quad ④$$

因为a、b、c为三角形的边,

所以

$$a+1>0,$$

从而

$$a>3.$$

又

$$b-c=\frac{1}{4}(a^2-2a-3)-\frac{1}{4}(a^2+3)$$

$$=-\frac{a}{2}-\frac{3}{2}<0,$$

$$c-a=\frac{1}{4}(a^2+3)-a=\frac{1}{4}(a^2-4a+3)$$

$$=\frac{1}{4}(a-3)(a-1)>0,$$

所以

$$c>b,\quad c>a.$$

即 c 为最大边，C 为最大角.

$$\begin{aligned}\cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\&=\frac{a^2+\frac{1}{16}(a-3)^2(a+1)^2-\frac{1}{16}(a^2+3)^2}{2\cdot a\cdot\frac{1}{4}(a-3)(a+1)}\\&=\frac{16a^2+(a-3)^2(a+1)^2-(a^2+3)^2}{8a(a-3)(a+1)}\\&=\frac{-4a^3+8a^2+12a}{8a(a-3)(a+1)}\\&=\frac{-4a(a-3)(a+1)}{8a(a-3)(a+1)}\\&=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$C=120^\circ.$$

9．三角形中有一个角是 60°，夹这个角的两边的比是 8:5，内切圆的面积是 12π，求三角形的面积.

〔解〕 设 $C=60^\circ$，两条夹边 $a=8x$，$b=5x$，那么

$$\begin{aligned}c&=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}\\&=\sqrt{(8x)^2+(5x)^2-2\cdot 8x\cdot 5x\cos 60^\circ}\\&=7x.\end{aligned}$$

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(8x+5x+7x)=10x.$$

又

$$r=\sqrt{12}=2\sqrt{3},$$

根据面积公式 $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C$ 及 $\Delta=rs$ 有

$$\frac{1}{2}\cdot 8x\cdot 5x\cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}\cdot 10x,$$

$$x = 2,$$

面积$\triangle = 40\sqrt{3}$.

10. 圆内接四边形的边长为 a、b、c、d，其面积为 S，求证：

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$\left(\text{其中}\quad p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)\right)$.

〔分析〕 直接求出 a、b、c、d 和 S 之间的关系，比较困难. 但根据圆内接四边形的性质知 $B+D=180^\circ$. 连结 AC，运用面积公式及余弦定理，可用 a、b、c、d、S 表示 $\sin B$ 和 $\cos B$，消去 B，就得出 a、b、c、d、S 之间的关系式，再经化简，得出圆内接四边形的面积公式.

〔证〕 连结 AC，设$\triangle ABC$ 和$\triangle ADC$ 的面积分别为 Δ_1 和 Δ_2，则

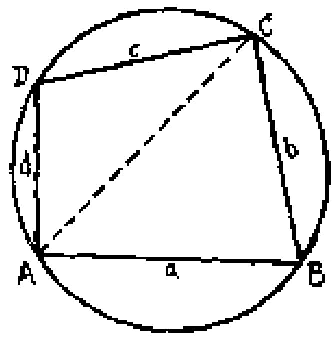

图 3—4

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}ab\sin B,$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}cd\sin D.$$

因为 $B+D=180^\circ$，所以，

$$\sin B = \sin D,\quad \cos D = -\cos B.$$

而 $S = \Delta_1 + \Delta_2$，故有

$$S = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin B,$$

$$\sin B = \frac{2S}{ab+cd}.$$

又

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B,$$

$$AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos D = c^2 + d^2 + 2cd\cos B,$$

所以

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 + 2cd\cos B,$$

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - (c^2 + d^2)}{2(ab + cd)}.$$

由 $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ 有

$$\left(\frac{2S}{ab + cd}\right)^2 + \left[\frac{a^2 + b^2 - (c^2 + d^2)}{2(ab + cd)}\right]^2 = 1,$$

$$\frac{4S^2}{(ab + cd)^2} = 1 - \left[\frac{a^2 + b^2 - (c^2 + d^2)}{2(ab + cd)}\right]^2,$$

$$4S^2 = (ab + cd)^2 - \left[\frac{a^2 + b^2 - (c^2 + d^2)}{2}\right]^2$$

$$= \left[ab + cd + \frac{a^2 + b^2 - (c^2 + d^2)}{2}\right] \cdot$$

$$\left[ab + cd - \frac{a^2 + b^2 - (c^2 + d^2)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}[(a + b)^2 - (c - d)^2][-(a - b)^2 + (c + d)^2]$$

$$= \frac{1}{4}[(a + b + c - d)(a + b - c + d) \cdot$$

$$(c + d + a - b)(c + d - a + b)].$$

因为

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c + d),$$

$$b + c + d - a = a + b + c + d - 2a = 2(p - a),$$

$$a + c + d - b = a + b + c + d - 2b = 2(p - b),$$

$$a + b + d - c = a + b + c + d - 2c = 2(p - c),$$

$$a + b + c - d = a + b + c + d - 2d = 2(p - d),$$

所以

$$4S^2=\frac{1}{4}\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)\cdot 2(p-d),$$

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d),$$

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

11．在 $\triangle ABC$ 中，已知

$$a(1-2\cos A)+b(1-2\cos B)+c(1-2\cos C)=0,$$

求证：这个三角形是等边三角形.

〔**分析**〕 要证这三角形是等边三角形， 即证 $A=B=C$ 或 $a=b=c$.

若证 $A=B=C$，则应将边转化为角（可用正弦定理）； 若证 $a=b=c$，则应将角转化为边（可用余弦定理）.

本题采取将边转化为角的方法来证明，较为方便.

〔**证**〕由正弦定理，原式可化为

$$\sin A(1-2\cos A)+\sin B(1-2\cos B)+\sin C(1-2\cos C)=0,$$

即

$$\sin A+\sin B+\sin C=\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C.$$

而

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C,$$

所以

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=4\sin A\sin B\sin C,$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{8}.$$

据第二章第55(1)题知上式当且仅当 $A=B=C$ 时成立， 由此可知，$\triangle ABC$ 是等边三角形.

12．$\triangle ABC$ 中，已知 $a^2+b^2-ab=c^2=2\sqrt{3}\triangle$，问此三角形是怎样的一个三角形．

〔分析〕 依已知条件、运用余弦定理，求出 C，再用面积公式，从而可得 a、b 之间的关系．

〔解〕 由 $a^2+b^2-ab=c^2$ 得

$$a^2+b^2-c^2=ab,$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2},$$

$$C=60^\circ.$$

于是

$$\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab,$$

又

$$a^2+b^2-ab=2\sqrt{3}\triangle,$$

所以

$$a^2+b^2-ab=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}ab,$$

$$2a^2-5ab+2b^2=0,$$

$$a=2b \text{ 或 } b=2a.$$

若 $a=2b$，则由 $a^2+b^2-ab=c^2$ 得 $a^2=b^2+c^2$，$A=90^\circ$；

若 $b=2a$，则由 $a^2+b^2-ab=c^2$ 得 $b^2=a^2+c^2$，$B=90^\circ$．

因此 $\triangle ABC$ 是一个直角三角形，其中 $C=60^\circ$．

13．试证三角形的三边 a、b、c 满足不等式

$$2abc<a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$$

〔分析〕 在这个不等式中，每一项都有一个因式是三角形两边之和与第三边的差，故本题应注意运用"三角形两边之和大于第三边"．再利用

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

$$=a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-2abc>0$$

证出左边的不等式.

又经过变形

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)$$
$$=a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2),$$

运用余弦定理，从而可证得右边的不等式.

〔证〕 因 a、b、c 是三角形的三边，

所以

$$b+c-a>0,\quad c+a-b>0,\quad a+b-c>0,$$
$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)>0,$$
$$(b+c-a)[a^2-(b-c)^2]>0,$$
$$a^2(b+c-a)-(b+c)(b-c)^2+a(b-c)^2>0,$$
$$a^2(b+c-a)-(b^2-c^2)(b-c)+a(b^2-2bc+c^2)>0,$$
$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-2abc>0.$$

即

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)>2abc.$$

又由余弦定理有

$$2abc\cos A=a(b^2+c^2-a^2)=ab^2+ac^2-a^3,$$
$$2abc\cos B=b(a^2+c^2-b^2)=a^2b+bc^2-b^3,$$
$$2abc\cos C=c(a^2+b^2-c^2)=a^2c+b^2c-c^3.$$

把这三个式子相加并整理，得

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)$$
$$=2abc(\cos A+\cos B+\cos C)$$

而(参见第二章习题 55(1)小题)

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2},$$

所以

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$$

于是

$$2abc<a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$$

14. 设O为$\triangle ABC$内一点.O到顶点A、B、C的距离分别为x、y、z，到BC、CA、AB的距离分别为p、q、r，求证：

$$xyz\geqslant(q+r)(r+p)(p+q).$$

又在什么条件下，等式成立.

〔**分析**〕 从结论逆推，由于$xyz\geqslant(q+r)(r+p)(p+q)$与

$$\left(\frac{q}{x}+\frac{r}{x}\right)\left(\frac{r}{y}+\frac{p}{y}\right)\left(\frac{p}{z}+\frac{q}{z}\right)\leqslant 1$$

等价，而上式中各比都可分别用α、β、γ、δ、θ、ϕ的正弦表示，于是问题转化为上述各角的三角函数间的关系.

〔**证**〕 如图，

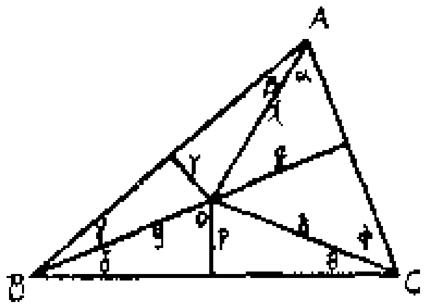

图 3—5

$$\begin{aligned}&(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\gamma+\sin\delta)\cdot(\sin\theta+\sin\phi)\\&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\cdot 2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}\\&=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}.\end{aligned}$$

但

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8},\qquad \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}\leqslant 1,$$

所以

$$(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\gamma+\sin\delta)(\sin\theta+\sin\phi)\leqslant 1.$$

由于

$$\sin\alpha=\frac{q}{x},\ \sin\beta=\frac{r}{x},\ \sin\gamma=\frac{r}{y},\ \sin\delta=\frac{p}{y},$$

$$\sin\theta=\frac{p}{z},\ \sin\phi=\frac{q}{z},$$

所以

$$\left(\frac{q}{x}+\frac{r}{x}\right)\left(\frac{r}{y}+\frac{p}{y}\right)\left(\frac{p}{z}+\frac{q}{z}\right)\leqslant 1,$$

即

$$xyz\geqslant(q+r)(r+p)(p+q).$$

又当 $A=B=C$ 时，$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{8}$，且 $\alpha=\beta$、$r=\delta$、$\theta=\phi$ 时，$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}=1$，故当此三角形是等边三角形且$O$是内心时，$xyz=(q+r)(r+p)(p+q)$.

15．B、C 为线段 AD 的三等分点，P 为以 BC 为直径的半圆上的任意一点，连结 PA、PB、PC、PD，求证：

$\mathrm{tg}\angle APB\cdot\mathrm{tg}\angle CPD$ 为定值.

〔分析〕 因$\angle BPC=90°$，故可考虑作 $BE\parallel CP$，$CF\parallel BP$，在 $rt\triangle PEB$ 和$rt\triangle PFC$ 中，分别求出 $\mathrm{tg}\angle APB$ 和 $\mathrm{tg}\angle CPD$，再计算它们的积.

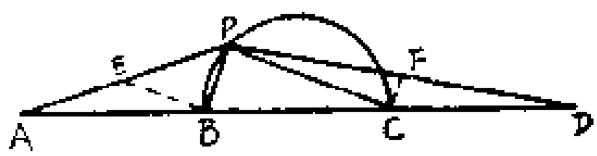

图 3—6

考虑到 $AB=BC=CD$，本题也可利用面积公式来进行证明.

〔证一〕 作 $BE\parallel CP$，交 AP 于 E，作 $CF\parallel BP$，交 PD 于F，则 $\angle PBE=90°$，$\angle PCF=90°$.

又 B 是 AC 的中点，C是 BD 的中点，

所以

$$BE=\frac{1}{2}PC,\quad CF=\frac{1}{2}PB,$$

$$\text{tg}\angle APB=\frac{BE}{PB}=\frac{PC}{2PB},\quad \text{tg}\angle CPD=\frac{CF}{PC}=\frac{PB}{2PC},$$

$$\text{tg}\angle APB\cdot\text{tg}\angle CPD=\frac{PC}{2PB}\cdot\frac{PB}{2PC}=\frac{1}{4}.$$

即

$$\text{tg}\angle APB\cdot\text{tg}\angle CPD\ \text{为定值.}$$

〔**证二**〕 $S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}PA\cdot PB\cdot\sin\angle APB,$

$$\begin{aligned}S_{\triangle APC}&=\frac{1}{2}PA\cdot PC\cdot\sin\angle APC\\&=\frac{1}{2}PA\cdot PC\cdot\sin(90^\circ+\angle APB)\\&=\frac{1}{2}PA\cdot PC\cdot\cos\angle APB,\end{aligned}$$

$$S_{\triangle APC}=2S_{\triangle APB},$$

所以

$$\frac{1}{2}PA\cdot PC\cdot\cos\angle APB=PA\cdot PB\cdot\sin\angle APB,$$

$$\text{tg}\angle APB=\frac{PC}{2PB}.$$

同理

$$\text{tg}\angle CPD=\frac{PB}{2PC}.$$

所以

$$\text{tg}\angle APB\cdot\text{tg}\angle CPD=\frac{PC}{2PB}\cdot\frac{PB}{2PC}=\frac{1}{4}\text{为定值.}$$

〔**附注**〕 按同样的证明方法可证：若 A_1，A_2，…，A_{n-1} 是线段 A_0A_n 的 n 等分点，P 是以线段 A_1A_{n-1} 为直径的圆上的任意一点，那么 $\text{tg}\angle A_0PA_1\cdot\text{tg}\angle A_{n-1}PA_n$ 为定值，这个定值等

于$\frac{1}{(n-1)^2}$.

16. 设有一边长为1的正方形. 试在这个正方形的内接正三角形中，找出一个面积最大和一个面积最小的，并求出这两个面积.

〔分析〕 所求内接正三角形的面积与边长有关，而边长又与该边和正方形的边的夹角有关. 不妨如图就α而言，$\triangle EFG$的面积是α的函数，运用求三角函数极值的方法，可求出面积的最大值和最小值.

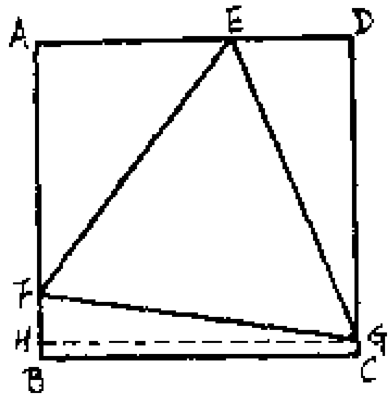

图 3—7

〔解〕 如图，正三角形EFG的三个顶点，必落在正方形$ABCD$的三边上，故不妨设其中二顶点F、G落在正方形的一组对边AB、CD上.

作$GH\perp AB$于H，令$\angle GFH=\alpha$，则

$$FG=\frac{GH}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

故当$\alpha=90°$时，FG取最小值1. 此时，$\triangle EFG$的面积$\triangle=\frac{\sqrt{3}}{4}$是最小值.

当$\alpha=90°$时，F与H重合，$FG\parallel BC$，E是AD的中点. 以AD的中点E为圆心，1为半径画弧，分别交AB、AC于F、G，连结EF、FG、GE，所得$\triangle EFG$是该正方形的面积最小的一个内接正三角形.

又在$rt\triangle FGH$和$rt\triangle EGD$中，$FG=GE$，$GH\geqslant DG$，故

$$\angle GFH\geqslant\angle GED.$$

而

$$\angle GFH+\angle AFE=\angle GED+\angle AEF=120°,$$

于是

$$\angle AFE\leqslant\angle AEF.$$

$$\angle A=90°,$$

所以

$$\angle AFE\leqslant 45°,\quad \angle AEF\geqslant 45°.$$

$$\alpha=\angle GFH\geqslant 75°.$$

故当 $\alpha=75°$时，FG 取最大值$\frac{1}{\sin 75°}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，从而 $\triangle EFG$ 的面积有最大值

$$\triangle_{最大}=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=2\sqrt{3}-3.$$

此时，$\angle AFE=\angle AEF=45°$，$AE=AF$，因此 AG 是 EF 的中垂线，即 G 点在对角线 AC 上，故 G 点与 C 点重合。

17．如图所示，半圆O 的直径为 2，A 为直径延长线上的一点，且$OA=2$，B 为半圆周上的任意一点，以 AB 为一边作等边 $\triangle ABC$，问 B 点在什么位置时，四边形 $OACB$ 的面积最大？并求出这个面积的最大值.

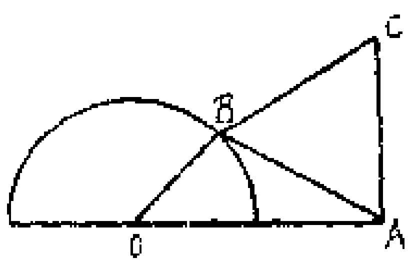

图 3—8

〔分析〕 四边形 $OACB$ 的面积 $y=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle AOB}$，而$S_{\triangle ABC}$ 与边长(AB)有关；$\triangle AOB$中，$OB=1$，$OA=2$，它的面积也与 AB 有关. 若设 $AB=x$，则 y 是 x 的函数. 运用求函数极值的方法，可求出 y 的最大值. 但用x表示$\triangle AOB$ 的面积时，所得的式子是根式，从而 y 是 x 的无理函数. 欲求其极值，比较麻烦.

若考虑到 B 点在半圆周上，取 $\angle AOB=x$ 作自变量，则 $\triangle AOB$ 和 $\triangle ABC$ 的面积都可用 x 的三角函数表示，从而转化为求三角函数的极值，问题就比较简单.

〔解〕 设 $\angle AOB=x$. 四边形 $OACB$ 的面积为y，则

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin x=\sin x,$$

$$AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos x=5-4\cos x,$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\frac{5\sqrt{3}}{4}-\sqrt{3}\cos x,$$

$$\begin{aligned}y&=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle ABC}\\&=\sin x+\frac{5\sqrt{3}}{4}-\sqrt{3}\cos x\\&=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

所以，当 $x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{5\pi}{6}$时，四边形 $OACB$ 的面积有最大值

$$y_{最大}=2+\frac{5\sqrt{3}}{4}=\frac{8+5\sqrt{3}}{4}.$$

18. 证明：分别以任意三角形的三边为边向形外作等边三角形，连结它们的中心，构成一个等边三角形.

〔分析〕 $\triangle GHM$ 的各边，例如 GH，在 $\triangle BGH$ 中，由于 G、H 分别是 $\triangle ABD$、$\triangle BCE$ 的中心，故 BG、BH、$\angle GBH$ 都可用 $\triangle ABC$ 的元素表出. 运用余弦定理，GH 可用 $\triangle ABC$的元素表出. 同理，HM、MG 也都可以用 $\triangle ABC$ 的元素表出，从而可以证明 $GH=HM=MG$.

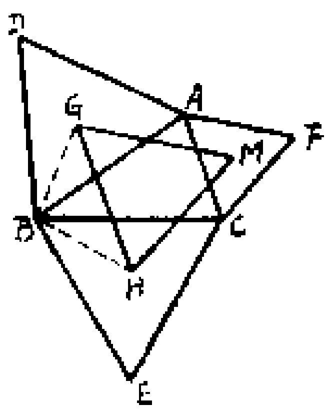

图 3—9

〔证〕 $BG=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$，$BH=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$，

$\angle GBH = 60° + B$,

$$GH^2 = BG^2 + BH^2 - 2\cdot BG\cdot BH\cdot\cos\angle GBH$$

$$= \left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\cdot\frac{c}{\sqrt{3}}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\cos(60° + B)$$

$$= \frac{c^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{2ca}{3}(\cos 60°\cos B - \sin 60°\sin B)$$

$$= \frac{c^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{2ca}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\triangle}{ac}\right)$$

$$= \frac{c^2+a^2}{3} - \frac{a^2+c^2-b^2}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\triangle$$

$$= \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\triangle.$$

同理可证

$$HM^2 = MG^2 = \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\triangle.$$

所以

$$GH = HM = MG.$$

即 $\triangle GHM$ 是等边三角形.

三、习　　题

1. 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

(1) $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A} + \dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B} + \dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C} = 0$;

(2) $(a-b)\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2} + (b-c)\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2} + (c-a)\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2} = 0$;

(3) $a^2 = b^2\cos 2C + 2bc\cos(B-C) + C^2\cos 2B$;

(4) $(b^2+c^2-a^2)\operatorname{tg}A = (c^2+a^2-b^2)\operatorname{tg}B$
$= (a^2+b^2-c^2)\operatorname{tg}C$;

(5) $\operatorname{ctg}A - \operatorname{ctg}B = \dfrac{b^2-a^2}{2\triangle}$;

(6) $s^2 = bc\cos^2\frac{A}{2} + ca\cos^2\frac{B}{2} + ab\cos^2\frac{C}{2}$;

其中 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

(7) $\dfrac{\cos\frac{B}{2}\sin\left(\frac{B}{2}+C\right)}{\cos\frac{C}{2}\sin\left(\frac{C}{2}+B\right)} = \dfrac{a+c}{a+b}$;

(8) $(\sin A + \sin B + \sin C)(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)$

$= \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $B=2C$，求证：

(1) $a-b+c=2(b-c)\cos C$;

(2) $b^2-c^2=ac$.

3. $\triangle ABC$ 中，已知 $C=60^\circ$，求证：

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}.$$

4. $\triangle ABC$ 中，已知 $A:B:C=4:2:1$，求证：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}.$$

5. 在两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 中，$\angle B=\angle B'$，$\angle A+\angle A'=180^\circ$，求证：$aa'=bb'+cc'$.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，求证 $\operatorname{ctg} A$、$\operatorname{ctg} B$、$\operatorname{ctg} C$ 成等差数列的充要条件是 a^2、b^2、c^2 成等差数列.

7. $\triangle ABC$ 中，

(1) a、b、c 成等差数列时，求证：$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$；

(2) a、b、c 成等比数列时，求证：

$\cos(A-C)+\cos B+\cos 2B=1$.

8. $\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆的半径分别是 R 和 r，求证：

(1) $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{1}{2Rr}$；

(2) $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$；

(3) $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$；

(4) $a\operatorname{ctg}A+b\operatorname{ctg}B+c\operatorname{ctg}C=2(R+r)$.

9. $\triangle ABC$ 中，a、b、c 成等差数列，求证：$ac=6Rr$.

10. 设三角形的三边成等差数列，最大角为 θ，最小角为 ϕ，求证：$\cos\theta+\cos\phi=4(1-\cos\theta)(1-\cos\phi)$.

11. $\triangle ABC$ 的面积用 $\triangle$ 表示，求证：

(1) $\triangle=\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A)$；

(2) $\triangle=\frac{(a^2-b^2)\sin A\sin B}{2\sin(A-B)}$；

(3) $\triangle=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$；

(4) $\triangle=s^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$，其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

(5) $\triangle=\sqrt{\frac{1}{2}Rh_ah_bh_c}$. 其中 h_a、h_b、h_c 分别是 a、b、c 边上的高.

12. $\triangle ABC$ 中，r 为内切圆半径，s 为半周长，r_a、r_b、r_c 分别为 A、B、C 内的旁切圆的半径，求证：

(1) $\triangle=\sqrt{rr_ar_br_c}$；

(2) $s^2=r_ar_b+r_br_c+r_cr_a$.

13. $\triangle ABC$ 中，求证：$ab+bc+ca\geqslant 4\sqrt{3}\triangle$.

14. $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin B\sin C=\cos^2\frac{A}{2}$，求证：此三角形是等腰三角形.

15. $\triangle ABC$ 中，已知 $a+b=\operatorname{tg}\frac{C}{2}(a\operatorname{tg}A+b\operatorname{tg}B)$，求证：此三角形是等腰三角形.

16. $\triangle ABC$ 中，已知 $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=\frac{b-c}{b+c}$，求证：此三角形是直角三角形.

17. $\triangle ABC$ 中，已知 $\frac{\cos A+2\cos C}{\cos A+2\cos B}=\frac{\sin B}{\sin C}$，求证：此三角形为等腰三角形或直角三角形.

18. $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的中线，若 $\angle B+\angle CAD=90°$，求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形.

19. $\triangle ABC$ 中，已知 $\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$，且 B 为锐角，试判断此三角形是何种三角形.

20. 如果三角形两边的和为一定值，夹角为 60°，试证当周长取最小值或面积取最大值时，此三角形是等边三角形.

21. 三角形的高为 h_a、h_b、h_c，内切圆半径为 r，且 $h_a+h_b+h_c=9r$，求证：此三角形为等边三角形.

22. $\triangle ABC$ 中，已知 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$，求证 B 为锐角.

23. 在 $\triangle ABC$ 中，BC 边上的高 $AD=3$，$BD=m$，$DC=n$，且

$$\frac{1}{\log_m 3}+\frac{1}{\log_n 3}<2,$$

求证：$\angle BAC$ 必为锐角.

24. $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=1$，求证：此三角形必有一角为 120°.

25. $\triangle ABC$ 的三个角满足 $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\sqrt{3}$，

证明：此三角形必有一角为$60°$.

26．设A、B、C为三角形的三个内角，且方程

$$(\sin B-\sin A)x^2+(\sin A-\sin C)x+(\sin C-\sin B)=0$$

的两根相等，求证：$B\leqslant 60°$.

27．圆内接四边形$ABCD$中，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，且$a\sin A=b\sin B=c\sin C=d\sin D$，问此四边形是具有怎样特点的四边形.

28．在直角三角形中，斜边是斜边上的高的4倍，求两个锐角.

29．$\triangle ABC$中，已知$a=(m+n)(m-3n)$，$b=4mn$，$C=\dfrac{2\pi}{3}$，$m>3n>0$，求c.

30．$\triangle ABC$中，已知$B=60°$，$b=4$，$\triangle=\sqrt{3}$，求a、c.

31．$\triangle ABC$中，最大角A为最小角C的2倍，且三边之长为三个连续整数，求a、b、c.

32．三角形的一角为$60°$，面积为$10\sqrt{3}$，周长为20，求各边的长.

33．三角形的最长边与次长边之和为12，而面积的数值等于这两边夹角正弦值的$17\frac{1}{2}$倍，一个内角是$120°$，求这个三角形各边的长.

34．$\triangle ABC$中，已知$\operatorname{tg}B=1$，$\operatorname{tg}C=2$，$b=100$，求a及面积.

35．在$\triangle ABC$中，底$BC=14\,\text{cm}$，高$AH=12\text{cm}$，内切圆半径$r=4\text{cm}$，求AB、AC的长.

36．在$\triangle ABC$中，$\angle A=45°$，BC边上的高AD将BC

分成 2cm 和 3cm 两部分，求这个三角形的面积.

37. $\triangle ABC$ 的内角按 A、B、C 的顺序从小到大成等差数列，且 $\operatorname{tg} A$、$\operatorname{tg} B$、$\operatorname{tg} C$ 为方程

$$x^3-(3+2k)x^2+(5+4k)x-(3+2k)=0$$

的三个根，又这三角形的面积为 $2(3-\sqrt{3})$，求这三角形的三条边和三个角.

38. 设 $\triangle ABC$ 的三内角成等差数列，三条边 a、b、c 之倒数也成等差数列，试求 A、B、C.

39. 三角形的三边成等差数列，其面积与同周等边三角形面积的比为 3:5，试求三边之比和最大角的度数.

40. $\triangle ABC$ 中，已知 $(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，求证：

(1) $\sin A:\sin B:\sin C=7:5:3$；

(2) 这个三角形的最大角为 $\frac{2\pi}{3}$.

41. 已知 $\triangle ABC$ 的三条中线 m_a、m_b、m_c，计算它的面积.

42. $\triangle ABC$ 中，$AB=c$，$AC=b$，$\angle BAC=\alpha$，M 为 BC 的中点，G 为它的重心，求证：G 到 BC 的距离为

$$\frac{bc\sin\alpha}{3\sqrt{(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

43. 平行四边形一锐角是 60°，对角线平方之比为 $\frac{19}{7}$，求两邻边之比.

44. $ABCD$ 为圆内接四边形，AB 为直径，若 $AD=a$，$CD=b$，$BC=c$，试证：AB 为方程

$$x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$$

的根.

45. 设圆内接四边形 $ABCD$ 的四条边分别为 a、b、c、d，对角线 $BD=x$，$AC=y$，求证：

$$x=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}},\quad y=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}.$$

46. $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 互相外切，半径分别为 a、b $(a>b)$，两外公切线相交于 A，求证：$\sin A=\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$.

47. 自定圆 O 外一点 P 引任意割线，求证：

$\operatorname{tg}\frac{\angle AOP}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle BOP}{2}$ 为定值.

48. 设 P 为单位圆周上任意一点，A_1、A_2、…、A_n 为圆内接正 n 边形的顶点，求证：$PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_n^2$ 是常数.

49. 设 O 为 $\triangle ABC$ 内一点. 连结 OA、OB、OC，设 $\angle OAC=\angle OCB=\angle OBA=r$. 求证：

$\operatorname{ctg} r=\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C$.

50. 等腰三角形的底边为 a，腰为 b. 顶角为 $20°$，求证：

$a^3+b^3=3ab^2$.

51. $\triangle ABC$ 的外接圆的直径 AE 交 BC 于 D，求证：

$\frac{AD}{DE}=\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C$.

52. A、B、C 是直线 l 上的三点，P 是这直线外一点，已知 $AB=BC=a$，$\angle APB=90°$，$\angle BPC=45°$，$\angle PBA=\theta$，求：

(1) $\sin\theta$、$\cos\theta$ 和 $\operatorname{tg}\theta$；

(2) 线段 PB 的长；

(3) P 点到直线 l 的距离.

53. 已知 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r，AD 为 BC 边上的高，求证：

$$AD=\frac{2r\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

54. 梯形外切于一个圆，两腰与较大的底分别成锐角 α 和 β，若已知梯形的面积为 Q，求圆的面积.

55. 直角三角形的斜边 AB 上两点 M、N 分 AB 成 $AM=MN=NB$，设 $\angle ACM=\alpha$，$\angle MCN=\beta$，$\angle NCB=\gamma$，求证：$3\sin\alpha\sin\gamma=\sin\beta$.

56. $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，AD 是中线．设 $\angle BAD=\alpha$，$\angle CAD=\beta$，$\angle ADC=\gamma$，求证：$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=2\operatorname{ctg}\gamma$.

57. 已知 $\angle XOZ=120°$，OY 平分 $\angle XOZ$，直线 l 分别交 OX、OY、OZ 于 A、B、C，求证：$\frac{1}{OB}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OC}$.

58. 在平面上任取三点，其坐标均为整数，证明：此三点不能组成正三角形.

59. 设 $\triangle ABC$ 之周长等于其内切圆直径与外接圆直径之和，求证：

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=2(\cos A+\cos B+\cos C).$$

60. 在等腰 $\triangle ABC$ 中，顶角 $A=100°$，角 B 的平分线交 AC 于 D，求证：$AD+BD=BC$.

61. 等腰三角形的腰长为 $\sqrt{3}$ cm，由顶点作到底边的线段，将顶角分成两部分，它们的差为 $60°$，这线段的长为 1cm，求顶角的度数.

62. 已知 $\angle XOY=60°$，M 是 $\angle XOY$ 内一点，它到两边的距离分别是 2 和 11，求 OM 的长.

63. 在正方形 $ABCD$ 的边 CD 上任取一点 M，作 $\angle ABM$ 的平分线交 AD 于 N，求证：$BM=CM+AN$.

64. 在正方形 $ABCD$ 的内部取一点 E，使 $\angle EAD=\angle EDA=15^\circ$，试证：$\triangle EBC$ 为正三角形.

65. 三角形有一内角是 60°，此角所对的边长是 1，求证：其余两边之和不大于 2.

66. 证明：顶点在单位圆上的锐角三角形的三个内角的余弦的和小于该三角形的周长之半.

67. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$C=2B$，求证：$\sqrt{2}<\dfrac{AB}{AC}<\sqrt{3}$.

68. 设 a、b、c 为三角形的三条边，求证：对于任何 x，$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2>0$.

69. 设 a、b、c 为任一三角形三边之长，α、β、γ 分别为 a、b、c 所对的角的大小，试证：

$$\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}.$$

70. 已知 $\triangle ABC$ 的三边分别为 a、b、c，且 $\odot O$ 为三角形的内切圆，分别切 BC、CA、AB 于 A_1、B_1、C_1，而 a_1、b_1、c_1 分别为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三边，求证：

$$\frac{a^2}{a_1^2}+\frac{b^2}{b_1^2}+\frac{c^2}{c_1^2}\geqslant 12.$$

71. 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边长和面积分别为 a、b、c、a_1、b_1、c_1 及 $\triangle$、$\triangle_1$，求证：

$a^2a_1^2+b^2b_1^2+c^2c_1^2\geqslant 16\triangle\triangle_1$.

72. 设 $\triangle ABC$ 的三边为 a、b、c，外接圆半径为 R，求证：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{R}.$$

73. 设 $\triangle ABC$ 的三边为 a、b、c，且 $a>b>c$，在此三角形的两边上分别取 P、Q 两点，使线段 PQ 把 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分，求使 PQ 长度为最短的点 P、Q 的位置.

74．在一个圆锥内，以它的底面作底面，再作一个圆锥，小圆锥的高和母线所成的角等于 α，大圆锥的高和母线所成的角等于 β，两个圆锥的高的差为 h，求证：这两个圆锥侧面所夹的部分的体积是

$$\frac{\pi h^3\sin^2\alpha\sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha-\beta)}.$$

75．设一球的半径为 R，求外切于这个球的一切圆锥中全面积最小的圆锥．

76．在锐角 θ 的一边上，由到顶点的距离为 a 的一点 A，向另一边作垂线，其垂足为 A_1．由 A_1 点向另一边作垂线，其垂足为 A_2，再由 A_2 向另一边作垂线，垂足为 A_3，…，这样无限地作下去，求折线 $AA_1A_2A_3\cdots$的长．

77．在 $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，$AC=3$，$BC=5$，$\odot O_1$ 是内切圆，然后作 $\odot O_2$ 切 AB、AC 及 $\odot O_1$，再作 $\odot O_3$，切 AB、AC 及 $\odot O_2$，…，这样无限地作下去，求所有这些圆面积之和．

四、习题解答

1．(1) $$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}=\frac{4R^2\sin^2A\sin(B-C)}{\sin A}$$
$$=4R^2\sin(B+C)\sin(B-C)$$
$$=2R^2(\cos 2C-\cos 2B),$$

同理

$$\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}=2R^2(\cos 2A-\cos 2C),$$
$$\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=2R^2(\cos 2B-\cos 2A).$$

所以

$$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}$$

$$=2R^2(\cos 2C-\cos 2B)+2R^2(\cos 2A-\cos 2C)$$

$$+2R^2(\cos 2B-\cos 2A)=0.$$

(2) $(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=2R(\sin A-\sin B)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$

$$=2R\cdot 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$$=2R\cdot 2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$$=2R\cdot 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2R\cdot 2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}$$

$$=2R(\cos B-\cos A).$$

同理

$$(b-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=2R(\cos C-\cos B),$$

$$(c-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=2R(\cos A-\cos C).$$

所以

$$(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+(b-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+(c-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$$

$$=2R(\cos B-\cos A)+2R(\cos C-\cos B)$$

$$+2R(\cos A-\cos C)=0.$$

(3) $b^2\cos 2C+2bc\cos(B-C)+c^2\cos 2B$

$$=b^2(\cos^2C-\sin^2C)+2bc(\cos B\cos C+\sin B\sin C)$$

$$+c^2(\cos^2B-\sin^2B)$$

$$=(b\cos C+c\cos B)^2-(b\sin C-c\sin B)^2.$$

根据射影定理和正弦定理有

$$a = b\cos C + c\cos B,\quad b\sin C = c\sin B.$$

所以

$$b^2\cos 2C + 2bc\cos(B-C) + c^2\cos 2B = a^2$$

(4) $(b^2+c^2-a^2)\operatorname{tg}A = 2bc\cos A\operatorname{tg}A = 2bc\sin A$

$= 4\Delta.$

同理

$$(c^2+a^2-b^2)\operatorname{tg}B = 4\Delta,\quad (a^2+b^2-c^2)\operatorname{tg}C = 4\Delta.$$

所以

$$(b^2+c^2-a^2)\operatorname{tg}A = (c^2+a^2-b^2)\operatorname{tg}B = (a^2+b^2-c^2)\operatorname{tg}C.$$

(5) $\dfrac{b^2-a^2}{2\Delta} = \dfrac{4R^2(\sin^2B-\sin^2A)}{ab\sin C}$

$$= \frac{4R^2\sin(B+A)\sin(B-A)}{4R^2\sin A\sin B\sin(A+B)}$$

$$= \frac{\sin(B-A)}{\sin A\sin B} = \frac{\sin B\cos A - \cos B\sin A}{\sin A\sin B}$$

$$= \operatorname{ctg}A - \operatorname{ctg}B.$$

(6) $bc\cos^2\dfrac{A}{2} + ca\cos^2\dfrac{B}{2} + ab\cos^2\dfrac{C}{2}$

$$= \frac{1}{2}bc(1+\cos A) + \frac{1}{2}ca(1+\cos B) + \frac{1}{2}ab(1+\cos C)$$

$$= \frac{1}{2}(ab+bc+ca+bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$$

$$= \frac{1}{2}\Big[ab+bc+ca+\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$$

$$+\frac{1}{2}(c^2+a^2-b^2)+\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)\Big]$$

$$= \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)$$

$$= \frac{1}{4}(a+b+c)^2$$

$$= s^2.$$

(7) $\cos\frac{B}{2}\sin\left(\frac{B}{2}+C\right)=\frac{1}{2}[\sin(B+C)+\sin C]$

$$=\frac{1}{2}(\sin A+\sin C)=\frac{1}{4R}(a+c),$$

$$\cos\frac{C}{2}\sin\left(\frac{C}{2}+B\right)=\frac{1}{4R}(a+b),$$

所以

$$\frac{\cos\frac{B}{2}\sin\left(\frac{B}{2}+C\right)}{\cos\frac{C}{2}\sin\left(\frac{C}{2}+B\right)}=\frac{a+c}{a+b}.$$

(8) $(\sin A+\sin B+\sin C)(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)$

$$=\frac{1}{2R}(a+b+c)\left(\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}\right)$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2R\sin A}+\frac{\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{2R\sin B}\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{2R\sin C}\right)$$

$$=(a+b+c)\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right).$$

2. (1) 依题设 $B=2C$ 有

$$B-C=C.$$

所以

$$a-b+c=2R(\sin A-\sin B+\sin C)$$

$$=2R[\sin A-\sin B+\sin(A+B)]$$

$$=2R\left(2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\right.$$

$$+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2})$$

$$=4R\cos\frac{A+B}{2}\left(\sin\frac{A-B}{2}+\sin\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=8R\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=8R\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos C$$

$$=4R(\sin B-\sin C)\cos C$$

$$=2(2R\sin B-2R\sin C)\cos C$$

$$=2(b-c)\cos C.$$

(2) $b^2-c^2=4R^2(\sin^2B-\sin^2C)$

$$=4R^2\sin(B+C)\sin(B-C)$$

$$=4R^2\sin A\sin C=2R\sin A\cdot 2R\sin C$$

$$=ac.$$

3. 由 $C=60^\circ$ 得

$$a^2+b^2-c^2=2ab\cos60^\circ=ab,$$

$$(a+b)^2-c^2=3ab,$$

$$(a+b+c)(a+b-c)=3ab,$$

$$(a+b+c)(a+b-c)+3c(a+b+c)$$

$$=3ab+3c(a+b+c),$$

$$(a+b+c)[(a+c)+(b+c)]=3(a+c)(b+c),$$

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}.$$

4. 令 $C=\alpha$，则 $B=2\alpha$，$A=4\alpha$，

$$a=2R\sin A=2R\sin 4\alpha,$$

$$b=2R\sin B=2R\sin 2\alpha,$$

$$c=2R\sin C=2R\sin\alpha.$$

又由　$\alpha+2\alpha+4\alpha=180^\circ$ 得

$$4\alpha=180^\circ-3\alpha,$$

$$\sin 4\alpha=\sin(180^\circ-3\alpha)=\sin 3\alpha.$$

所以

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{2R(\sin A+\sin B)}{4R^2\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\sin 4\alpha+\sin 2\alpha}{2R\sin 4\alpha\sin 2\alpha}=\frac{2\sin 3\alpha\cos\alpha}{2R\sin 4\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{1}{2R\sin\alpha}=\frac{1}{c}.$$

5. 依题设有

$$C'=180^\circ-A'-B'=A-B.$$

设$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的外接圆半径分别为R和R'，则

$$\begin{aligned}bb'+cc'&=4RR'(\sin B\sin B'+\sin C\sin C')\\&=4RR'[\sin^2 B+\sin(A+B)\sin(A-B)]\\&=4RR'(\sin^2 B+\sin^2 A-\sin^2 B)\\&=4RR'\sin^2 A\\&=2R\sin A\cdot 2R'\sin A'\\&=aa'.\end{aligned}$$

6. 必要性：

若$\operatorname{ctg}A$、$\operatorname{ctg}B$、$\operatorname{ctg}C$成等差数列，则有

$$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}C=2\operatorname{ctg}B,$$

$$\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}=\frac{2\cos B}{\sin B},$$

$$\frac{\sin^2 B}{\sin A\sin C}=2\cos B.$$

依正弦定理和余弦定理，得

$$\frac{b^2}{ac}=\frac{a^2+c^2-b^2}{ac},$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - b^2,$$
$$a^2 + c^2 = 2b^2.$$

即 a^2、b^2、c^2 成等差数列

因必要性的证明各步都是可逆的，倒推过去，就是对充分性的证明.

7. (1) 依题设有

$$2b = a + c,$$
$$2\sin B = \sin A + \sin C,$$
$$2\sin(A+C) = 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2},$$
$$4\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2} = 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}.$$

但 $\sin\frac{A+C}{2} \neq 0$，于是有

$$2\cos\frac{A+C}{2} = \cos\frac{A-C}{2},$$
$$2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2},$$
$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} = 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2},$$

所以

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}.$$

(2) $b^2 = ac$，故有 $\sin^2 B = \sin A\sin C$，

于是

$$\begin{aligned}
&\cos(A-C) + \cos B + \cos 2B \\
&= \cos(A-C) - \cos(A+C) + 2\cos^2 B - 1 \\
&= 2\sin A\sin C + 2\cos^2 B - 1 \\
&= 2\sin^2 B + 2\cos^2 B - 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

8. (1) $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{2s}{abc}$

$$=\frac{2\cdot\frac{\Delta}{r}}{4R\Delta}=\frac{1}{2Rr}.$$

(2) $4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$=4R\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$=\frac{4R(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$$

$$=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}\qquad\left(\Delta=\frac{abc}{4R}\right)$$

$$=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{rs}\qquad(\Delta=rs)$$

$$=\frac{1}{r}\cdot r^2\qquad\left(r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\right)$$

$$=r.$$

(3) $\cos A+\cos B+\cos C$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1+\frac{r}{R}.$$

(4) $a\operatorname{ctg}A+B\operatorname{ctg}B+c\operatorname{ctg}C$

$$=2R\sin A\operatorname{ctg}A+2R\sin B\operatorname{ctg}B+2R\sin C\operatorname{ctg}C$$

$$=2R(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$=2R\left(1+\frac{r}{R}\right)$$

$$=2(R+r).$$

9. 由 $a+c=2b$ 得

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{3}{2}b.$$

$$\Delta=rs,\quad \Delta=\frac{abc}{4R}.$$

$$r=\frac{\Delta}{s}=\frac{2\Delta}{3b},\quad R=\frac{abc}{4\Delta}.$$

所以

$$6Rr=6\cdot\frac{abc}{4\Delta}\cdot\frac{2\Delta}{3b}=ac.$$

10. 依题设有

$$\sin\theta+\sin\phi=2\sin(\theta+\phi),$$

$$2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}=2\cdot2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta+\phi}{2}.$$

但 $\sin\frac{\theta+\phi}{2}\neq0$，所以有

$$\cos\frac{\theta-\phi}{2}=2\cos\frac{\theta+\phi}{2}.$$

又

$$\cos\theta+\cos\phi=2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}=4\cos^2\frac{\theta+\phi}{2},$$

$$4(1-\cos\theta)(1-\cos\phi)=4\cdot2\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot2\sin^2\frac{\phi}{2}$$

$$=4\left(2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}\right)^2$$

$$=4\left(\cos\frac{\theta-\phi}{2}-\cos\frac{\theta+\phi}{2}\right)^2$$

$$=4\cos^2\frac{\theta+\phi}{2}.$$

所以

$$\cos\theta+\cos\phi=4(1-\cos\theta)(1-\cos\phi).$$

11\. (1) $\frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$

$$= \frac{1}{4}(a^2 \cdot 2\sin B\cos B + b^2 \cdot 2\sin A\cos A)$$

$$= \frac{1}{4}\left(a^2 \cdot 2 \cdot \frac{b}{2R}\cos B + b^2 \cdot 2 \cdot \frac{a}{2R}\cos A\right)$$

$$= \frac{ab}{4R}(a\cos B + b\cos A)$$

$$= \frac{abc}{4R}$$

$$= \Delta.$$

(2) $\frac{(a^2 - b^2)\sin A\sin B}{2\sin(A-B)}$

$$= \frac{4R^2(\sin^2 A - \sin^2 B)\sin A\sin B}{2\sin(A-B)}$$

$$= \frac{4R^2\sin(A+B)\sin(A-B)\sin A\sin B}{2\sin(A-B)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4R^2\sin A\sin B\sin C$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2R\sin A) \cdot (2R\sin B) \cdot \sin C$$

$$= \frac{1}{2}ab\sin C = \Delta.$$

(3) $Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$

$$= \frac{1}{2}r(2R\sin A + 2R\sin B + 2R\sin C)$$

$$= \frac{1}{2}r(a+b+c) = rs = \Delta.$$

(4) $s^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$

$$= s^2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \cdot \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\Delta.$$

(5) $$\sqrt{\frac{1}{2}Rh_ah_bh_c}=\sqrt{\frac{1}{2}R\cdot b\sin C\cdot c\sin A\cdot a\sin B}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}R\cdot\left(b\cdot\frac{c}{2R}\right)\cdot\left(c\cdot\frac{a}{2R}\right)\cdot\left(a\cdot\frac{b}{2R}\right)}$$

$$=\frac{abc}{4R}=\Delta.$$

12. (1) $$rr_ar_br_c=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$\cdot\frac{\Delta}{s-a}\cdot\frac{\Delta}{s-b}\cdot\frac{\Delta}{s-c}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{s(s-a)(s-b)(s-c)}}\cdot\Delta^3=\Delta^2,$$

所以

$$\Delta=\sqrt{rr_ar_br_c}.$$

(2) $$r_ar_b+r_br_c+r_cr_a$$

$$=\Delta^2\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}+\frac{1}{(s-b)(s-c)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(s-c)(s-a)}\right)$$

$$=\Delta^2\cdot\frac{s-c+s-a+s-b}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\Delta^2\cdot\frac{3s-(a+b+c)}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\Delta^2\cdot\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-b)}=\Delta^2\cdot\frac{1}{r^2}=s^2.$$

13. $$ab+bc+ca=\frac{2\Delta}{\sin C}+\frac{2\Delta}{\sin A}+\frac{2\Delta}{\sin B}$$

$$=2\Delta\left(\frac{1}{\sin C}+\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\right)$$

$$\geqslant 2\Delta\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}}$$

$$\geqslant 2\Delta\cdot 3\sqrt[3]{\frac{8}{3\sqrt{3}}}$$

$$=4\sqrt{3}\Delta.$$

14. 由 $\sin B\sin C=\cos^2\frac{A}{2}$ 可得

$$\sin B\sin C=\frac{1+\cos A}{2},$$

$$2\sin B\sin C=1+\cos A$$

$$=1-\cos(B+C)$$

$$=1-\cos B\cos C+\sin B\sin C,$$

$$\cos B\cos C+\sin B\sin C=1,$$

$$\cos(B-C)=1.$$

而 B、C 都是三角形的内角，所以

$$B-C=0,\ \ B=C.$$

即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

15. 由已知条件有

$$a\left(\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right)+b\left(\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right)=0,$$

$$2R\sin A\cdot\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A\cos\frac{A+B}{2}}+2R\sin B\cdot\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos B\cos\frac{A+B}{2}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}(\sin A\cos B-\cos A\sin B)}{\cos A\cos B\cos\frac{A+B}{2}}=0,$$

$$\sin\frac{A-B}{2}=0 \text{ 或 } \sin(A-B)=0.$$

而 $0<A<\pi$，$0<B<\pi$，所以

$$A-B=0,\quad A=B.$$

即$\triangle ABC$为等腰三角形.

16. $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=\frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}$,

所以

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

由题设知 $B>C$，$\frac{B-C}{2}$ 和 $\frac{A}{2}$ 都是锐角，故有

$$\frac{B-C}{2}=\frac{A}{2},\quad B-C=A,\quad B=A+C,\quad B=90^\circ.$$

即$\triangle ABC$是直角三角形.

17. 〔证一〕 由已知条件有

$$\cos A\sin B+\sin 2B=\cos A\sin C+\sin 2C,$$

$$\cos A(\sin B-\sin C)+\sin 2B-\sin 2C=0,$$

$$\cos A(\sin B-\sin C)+2\sin(B-C)\cos(B+C)=0,$$

$$\cos A\cdot 2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

$$-2\cos A\cdot 2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=0,$$

$$2\cos A\sin\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}-2\cos\frac{B-C}{2}\right)=0.$$

因为

$$\cos\frac{B+C}{2}-2\cos\frac{B-C}{2}\neq 0,$$

所以

$$\cos A=0 \text{ 或 } \sin\frac{B-C}{2}=0,$$

$$A=90^\circ \text{ 或 } B=C.$$

即$\triangle ABC$为直角三角形或等腰三角形.

〔**证二**〕 依余弦定理有

$$\frac{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{ab}}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\dfrac{a^2+c^2-b^2}{ac}}=\frac{b}{c},$$

所以

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}+\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{ab}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$$

$$-\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{ac}=0.$$

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$$

$$+\frac{1}{abc}\left[c^2(a^2+b^2-c^2)-b^2(a^2+c^2-b^2)\right]=0.$$

$$\frac{1}{2bc}(b^2+c^2-a^2)(c-b)+\frac{1}{abc}\left[(c^2-b^2)(a^2-c^2-b^2)\right]$$

$=0,$

$$\frac{1}{2abc}(b^2+c^2-a^2)(c-b)(a-2b-2c)=0.$$

因为$b+c>a$，所以$a-2b-2c\neq0$，于是

$$b^2+c^2-a^2=0 \text{ 或 } c-b=0,$$

$$b^2+c^2=a^2 \text{ 或 } c=b.$$

所以$\triangle ABC$为直角三角形或等腰三角形.

18. 因为$\angle B+\angle CAD=90^\circ$,

所以

$\angle C+\angle BAD=90°$,

$\angle CAD=90°-B$,

$\angle BAD=90°-C$.

又 AD 是 BC 边上的中线，

故有

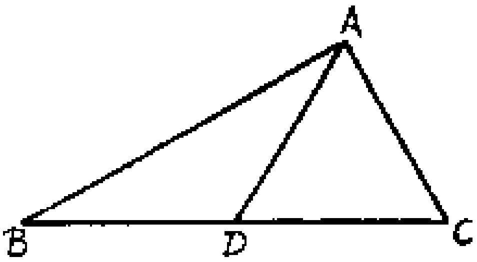

图 3—10

$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$,

$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AC\cdot\sin\angle CAD$,

$$AB\sin\angle BAD=AC\sin\angle CAD.$$

设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，依正弦定理有

$$2R\sin C\sin(90°-C)=2R\sin B\sin(90°-B),$$

$$\sin 2C=\sin 2B.$$

所以

$$2C=2B \text{ 或 } 2C=\pi-2B,$$

$$C=B \text{ 或 } C+B=\frac{\pi}{2}.$$

故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

19. 由 $\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$ 及 B 为锐角，得

$$B=45°$$

又由 $\lg a-\lg c=\lg\sin B$ 有

$$\sin B=\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C},$$

$$\sin A=\sin B\sin C,$$

$$\sin(B+C)=\sin B\sin C,$$

$$\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin B\sin C.$$

因为 $B=45°$，$\sin B=\cos B$，，所以有

$$\cos C+\sin C=\sin C,$$

$$\cos C=0,\quad C=90^\circ.$$

故$\triangle ABC$为等腰直角三角形.

20. 设a、b为三角形的两边，$a+b=k$(k为定值)，则三角形的周长

$$\begin{aligned} l&=a+b+\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ}\\ &=a+b+\sqrt{a^2+b^2-ab}\\ &=a+b+\sqrt{(a+b)^2-3ab}\\ &=k+\sqrt{k^2-3ab}. \end{aligned}$$

因为$a>0$，$b>0$，$a+b$为定值，所以当$a=b$时，ab有最大值，从而周长l有最小值. 显然，这时所给的三角形是等边三角形.

设这个三角形的面积为Δ，则

$$\Delta=\frac{1}{2}ab\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}ab.$$

因此，当$a=b$时，三角形的面积有最大值. 这时所给的三角形是等边三角形.

21. $h_a=b\sin C=\dfrac{bc}{2R}$，$h_b=\dfrac{ca}{2R}$，$h_c=\dfrac{ab}{2R}$.

由 $h_a+h_b+h_c=9r$ 有

$$\frac{bc+ca+ab}{2R}=9r,$$

$$bc+ca+ab=9\cdot 2Rr.$$

但

$$\Delta=\frac{abc}{4R}=rs=\frac{1}{2}r(a+b+c),$$

所以

$$2Rr=\frac{abc}{a+b+c},$$

$$bc+ca+ab=\frac{9abc}{a+b+c},$$

$$(bc+ca+ab)(a+b+c)=9abc.$$

由于

$$(bc+ca+ab)(a+b+c)$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{bc\cdot ca\cdot ab}\cdot 3\sqrt[3]{abc}=9abc,$$

上式中的等号仅当 $a=b=c$ 时成立，因此由

$$(bc+ca+ab)(a+b+c)=9abc \text{ 得}$$

$$a=b=c.$$

即 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

22. 由已知条件有

$$b=\frac{2ac}{a+c},$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-\left(\frac{2ac}{a+c}\right)^2}{2ac}$$

$$=\frac{(a^2+c^2)(a+c)^2-4a^2c^2}{2ac(a+c)^2}$$

$$\geqslant\frac{2ac(a+c)^2-4a^2c^2}{2ac(a+c)^2}$$

$$=\frac{a^2+c^2}{(a+c)^2}>0.$$

所以 B 为锐角.

23. 若 $\angle B$ 或 $\angle C$ 为钝角，则 $\angle BAC$ 定为锐角. 故设 $\angle B$、$\angle C$ 都是锐角.

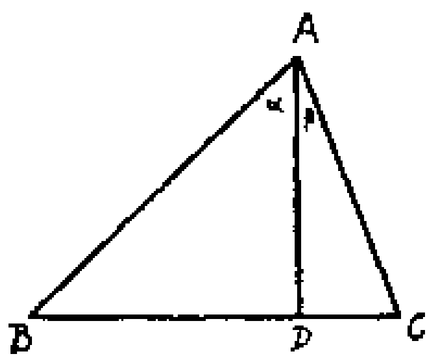

图 3—11

令 $\angle BAD=\alpha$，$\angle DAC=\beta$，则

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m}{3},\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{n}{3},$$

$\angle BAC=\alpha+\beta.$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{m}{3}+\frac{n}{3}}{1-\frac{m}{3}\cdot\frac{n}{3}}=\frac{3(m+n)}{9-mn}.$$

由$\frac{1}{\log_m 3}+\frac{1}{\log_n 3}<2$ 得

$$\log_3 m+\log_3 n<2,$$

$$\log_3(mn)<2,$$

$$mn<9.$$

所以

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)>0,\quad \alpha+\beta \text{ 为锐角},$$

即 $\angle BAC$ 为锐角.

24. $A+B+C=180°$, $C=180°-(A+B)$,

$3C=3\cdot180°-3(A+B)$,

$\cos 3C=\cos[3\cdot180°-3(A+B)]=-\cos 3(A+B)$.

所以

$$\cos3A+\cos3B+\cos3C=\cos3A+\cos3B-\cos 3(A+B)$$

$$=2\cos\frac{3}{2}(A+B)\cos\frac{3}{2}(A-B)-2\cos^2\frac{3}{2}(A+B)+1$$

$$=2\cos\frac{3}{2}(A+B)\left\{\cos\frac{3}{2}(A-B)-\cos\frac{3}{2}(A+B)\right\}+1$$

$$=-2\sin\frac{3}{2}C\cdot2\sin\frac{3}{2}A\sin\frac{3}{2}B+1$$

$$=-4\sin\frac{3}{2}A\sin\frac{3}{2}B\sin\frac{3}{2}C+1.$$

由已知 $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=1$ 有

$$4\sin\frac{3}{2}A\sin\frac{3}{2}B\sin\frac{3}{2}C=0,$$

$$\sin\frac{3}{2}A=0 \text{ 或 } \sin\frac{3}{2}B=0 \text{ 或 } \sin\frac{3}{2}C=0.$$

因为

$$0<A<\pi,\ 0<B<\pi,\ 0<C<\pi,$$

所以

$$0<\frac{3}{2}A<\frac{3}{2}\pi,\ 0<\frac{3}{2}B<\frac{3}{2}\pi,\ 0<\frac{3}{2}C<\frac{3}{2}\pi,$$

$$\frac{3}{2}A=\pi \text{ 或 } \frac{3}{2}B=\pi \text{ 或 } \frac{3}{2}C=\pi,$$

$$A=\frac{2}{3}\pi \text{ 或 } B=\frac{2}{3}\pi \text{ 或 } C=\frac{2}{3}\pi.$$

但 A、B、C 是三角形的内角，综上所述，A、B、C 三个角中，有且仅有一个角为$\frac{2}{3}\pi$，即 $120°$.

25. 由题设知

$$\sin A-\sqrt{3}\cos A+\sin B-\sqrt{3}\cos B+\sin C-\sqrt{3}\cos C=0,$$

$$\sin(A-60°)+\sin(B-60°)+\sin(C-60°)=0, \qquad ①$$

因为

$$(A-60°)+(B-60°)+(C-60°)$$
$$=A+B+C-180°=0,$$

所以

$$C-60°=-[(A-60°)+(B-60°)]$$
$$=-(A+B-120°),$$
$$\sin(C-60°)=-\sin(A+B-120°).$$

由①得

$$2\sin\left(\frac{A+B}{2}-60°\right)\cos\frac{A-B}{2}$$

$$-2\sin\left(\frac{A+B}{2}-60^\circ\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}-60^\circ\right)$$

$$=0,$$

$$2\sin\left(\frac{A+B}{2}-60^\circ\right)\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\left(\frac{A+B}{2}-60^\circ\right)\right]$$

$$=0,$$

$$2\sin\left(\frac{A+B}{2}-60^\circ\right)\cdot 2\sin\frac{A-60^\circ}{2}\sin\frac{60^\circ-B}{2}=0,$$

$$\sin\left(\frac{A+B}{2}-60^\circ\right)=0 \quad 或 \quad \sin\frac{A-60^\circ}{2}=0$$

$$或 \quad \sin\frac{60^\circ-B}{2}=0,$$

$$\frac{A+B}{2}-60^\circ=0 \quad 或 \quad \frac{A-60^\circ}{2}=0 \quad 或 \quad \frac{60^\circ-B}{2}=0.$$

所以

$$A+B=120^\circ \quad 或 \quad A=60^\circ \quad 或 \quad B=60^\circ.$$

即

$$C=60^\circ \quad 或 \quad A=60^\circ \quad 或 \quad B=60^\circ.$$

故 $\triangle ABC$ 中定有一角为 60°.

26. 依题设有

$$(\sin A-\sin C)^2-4(\sin B-\sin A)(\sin C-\sin B)=0,$$

$$\sin^2 A-2\sin A\sin C+\sin^2 C-4\sin B\sin C$$
$$+4\sin A\sin C-4\sin A\sin B+4\sin^2 B=0,$$

$$(\sin A+\sin C)^2-4(\sin A+\sin C)\sin B+4\sin^2 B=0,$$

$$(\sin A+\sin C-2\sin B)^2=0.$$

由此得

$$\sin A+\sin C=2\sin B.$$

依正弦定理有

$$a+c=2b.$$

从而

$$a^2+2ac+c^2=4b^2,$$

$$b^2=\frac{1}{4}(a^2+c^2+2ac)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(a^2+c^2).$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\geqslant\frac{a^2+c^2-\frac{1}{2}(a^2+c^2)}{a^2+c^2}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

所以

$$B\leqslant 60^\circ.$$

27. 由 $A+C=180^\circ$ 有 $\sin A=\sin C$,

又由 $a\sin A=c\sin C$ 有 $\qquad a\sin A=c\sin A,$

所以

$$a=c.$$

同理可得

$$b=d.$$

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\angle A=\angle C,\quad \angle B=\angle D.$$

$$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ.$$

$$a\sin A=b\sin B=c\sin C=d\sin D,$$

所以 $\qquad a=b=c=d$

综上所述，可知四边形 $ABCD$ 是正方形.

28. 设斜边上的高 $CD=h$，则斜边 $AB=4h$，又设 $BD=x$，则 $AD=4h-x$.

由射影定理有

$$CD^2=AD\cdot BD,$$

$$h^2=(4h-x)\cdot x,$$

$$x^2-4hx+h^2=0,$$

图 3—12

所以

$$x=(2\pm\sqrt{3})h.$$

又

$$\operatorname{tg} B=\frac{CD}{BD}=2\mp\sqrt{3},$$

故

$$B=15^\circ \text{ 或 } B=75^\circ.$$

$$A=75^\circ \text{ 或 } A=15^\circ.$$

即这个直角三角形的两个锐角分别为 15° 和 75°.

29. 依余弦定理有

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\\&=[(m+n)(m-3n)]^2+(4mn)^2-2(m+n)(m-3n)\\&\quad\cdot 4mn\cos\frac{2\pi}{3}\\&=(m+n)^2(m-3n)^2+4mn(m+n)(m-3n)+16m^2n^2\\&=(m+n)(m-3n)[(m+n)(m-3n)+4mn]+16m^2n^2\\&=(m+n)(m-3n)(m-n)(m+3n)+16m^2n^2\\&=(m^2-n^2)(m^2-9n^2)+16m^2n^2\\&=m^4+6m^2n^2+9n^4\\&=(m^2+3n^2)^2.\end{aligned}$$

所以

$$c=m^2+3n^2.$$

30. 由面积公式 $\Delta=\frac{1}{2}ac\sin B$ 有

$$\frac{1}{2}ac\sin 60^\circ=\sqrt{3},$$

$$ac=4. \qquad ①$$

又

$$\begin{aligned}b^2&=a^2+c^2-2ac\cos 60^\circ\\&=a^2+c^2-ac\\&=(a+c)^2-3ac.\end{aligned}$$

所以

$$(a+c)^2=b^2+3ac=4^2+3\times4=28,$$

$$a+c=2\sqrt{7}. \qquad ②$$

由①、②得

$a=\sqrt{7}+\sqrt{3}$，$c=\sqrt{7}-\sqrt{3}$ 或 $a=\sqrt{7}-\sqrt{3}$，$c=\sqrt{7}+\sqrt{3}$.

31. 设三边 a、b、c 依次为 $n+1$、n、$n-1$，根据正弦定理有

$$\frac{n+1}{\sin A}=\frac{n}{\sin B}=\frac{n-1}{\sin C}.$$

$$\frac{n+1}{\sin 2C}=\frac{n-1}{\sin C}=\frac{n}{\sin(180^\circ-3C)}.$$

由 $\frac{n+1}{\sin 2C}=\frac{n-1}{\sin C}$ 得

$$\cos C=\frac{n+1}{2(n-1)}. \qquad ①$$

由 $\frac{n-1}{\sin C}=\frac{n}{\sin 3C}$ 得

$$\sin^2 C = \frac{2n-3}{4(n-1)}. \qquad ②$$

由①、②消去C，得

$$\frac{2n-3}{4(n-1)} + \left(\frac{n+1}{2(n-1)}\right)^2 = 1.$$

解之，得$n=5$，(还有一个$n=0$的解，不合题意，故舍去)

所以这个三角形三边之长依次为6、5、4.

32. 设夹60°角的两边为a、b，60°角的对边为c，则

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C} \\ &= \sqrt{a^2+b^2-ab} \\ &= \sqrt{(a+b)^2-3ab}. \end{aligned}$$

由面积公式$\Delta = \frac{1}{2}ab\sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$，得

$$ab = 40. \qquad ①$$

$$a+b+c=20,$$

即

$$a+b+\sqrt{(a+b)^2-3ab}=20,$$

$$\sqrt{(a+b)^2-120}=20-(a+b),$$

$$(a+b)^2-120=400-40(a+b)+(a+b)^2,$$

所以

$$a+b=13. \qquad ②$$

由①、②得$a=5$，$b=8$或$a=8$，$b=5$.

从而

$$c=20-(a+b)=20-13=7.$$

故所求的三边为8、5、7（60°角所对的边等于7）.

33. 设最长边、次长边、短边分别为a、b、c、最长边与次长边的夹角为θ，那么

$$\begin{cases} a+b=12, & ① \\ \frac{1}{2}ab\sin\theta=17\frac{1}{2}\sin\theta, & ② \\ a^2=b^2+c^2-2bc\cos120^\circ. & ③ \end{cases}$$

由①、②得 $a=7$，$b=5$.

将 $a=7$，$b=5$ 代入③，得

$$c=3 \text{ 或 } c=-8\text{(舍去)}.$$

故最长边为 7，次长边为 5，短边为 3.

34．由 $\operatorname{tg}B=1$，$\operatorname{tg}C=2$，

又在 ΔABC 中有

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$$

所以

$$\operatorname{tg}A=3,\quad \sin A=\frac{3}{\sqrt{10}},\quad \sin C=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin B=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

根据正弦定理，

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{100\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=60\sqrt{5},$$

所以

$$\text{面积 }\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot60\sqrt{5}\cdot100\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=6000.$$

35．因为

$$BC\cdot AH=r(AB+BC+CA)=2\Delta,$$

所以

$$14\cdot12=4(AB+BC+CA),$$

$$AB+BC+CA=42,$$

$$AB+CA=28. \qquad ①$$

根据公式 $r=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ 得

$$\sqrt{\frac{(21-14)(21-AB)(21-CA)}{21}}=4,$$

$$(21-AB)(21-CA)=48,$$

$$21^2-21(AB+CA)+AB\cdot CA=48,$$

$$21^2-21\cdot 28+AB\cdot CA=48,$$

所以

$$AB\cdot CA=195 \qquad ②$$

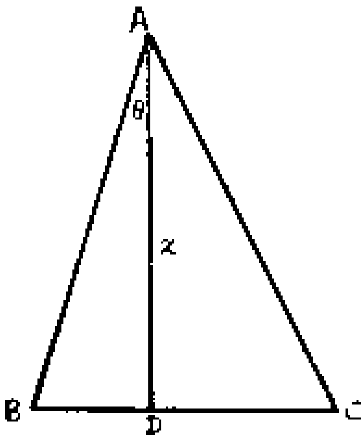

图 3—13

由①、②得 $AB=13$，$CA=15$ 或 $AB=15$，$CA=13$.

36. 设 $AD=x$，$\angle BAD=\theta$，则 $\angle CAD=45^\circ-\theta$，$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{2}{x}$，

$\operatorname{tg}(45^\circ-\theta)=\dfrac{3}{x}$.

由 $\operatorname{tg}(45^\circ-\theta)=\dfrac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta}$，得

$$\frac{3}{x}=\frac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{2}{x}},$$

$$x^2-5x-6=0,$$

$$x=6 \text{ 或 } x=-1(\text{舍去}).$$

即

$$AD=6(\text{cm}).$$

ΔABC 的面积 $=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15(\text{cm}^2)$.

37. 由已知条件有

$$B=60^\circ,\ \operatorname{tg}B=\sqrt{3}.$$

因为 tg B 是方程的根，所以

$$(\sqrt{3})^3-(3+2k)(\sqrt{3})^2+(5+4k)\sqrt{3}-(3+2k)=0,$$

解之，得 $k=\sqrt{3}$.

故原方程为

$$x^3-(3+2\sqrt{3})x^2+(5+4\sqrt{3})x-(3+2\sqrt{3})=0.$$

因 $x=\sqrt{3}$ 是方程的一个根，以 $x-\sqrt{3}$ 除方程两边，得

$$x^2-(3+\sqrt{3})x+(2+\sqrt{3})=0.$$

解之，得 $x=1$ 或 $x=2+\sqrt{3}$.

所以

$$\operatorname{tg}A=1,\ \operatorname{tg}C=2+\sqrt{3}.$$

$$A=45^\circ,\ C=75^\circ.$$

又依正弦定理有

$$\frac{a}{\sin45^\circ}=\frac{b}{\sin60^\circ}=\frac{c}{\sin75^\circ},$$

即

$$\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{b}{\sqrt{3}}=\frac{2c}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}. \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}ab\sin75^\circ=2(3-\sqrt{3}),$$

所以 $$ab=8(2\sqrt{6}-3\sqrt{2}). \qquad ②$$

由①、②可得

$$a=2(\sqrt{6}-\sqrt{2}),\ b=2(3-\sqrt{3}).$$

将 a、b 之值代入①，得 $c=2\sqrt{2}$.

即所求的三边 $a=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$，$b=2(3-\sqrt{3})$，$c=2\sqrt{2}$；三个角 $A=45^\circ$，$B=60^\circ$，$c=75^\circ$.

38．依题设有

$$B=\frac{\pi}{3},\ b(a-c)=2ac.$$

依正弦定理，有

$$\sin\frac{\pi}{3}(\sin A+\sin C)=2\sin A\sin C,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=\cos(A-C)-\cos(A+C),$$

$$\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{A-C}{2}=2\cos^2\frac{A-C}{2}-1-\cos\frac{2\pi}{3},$$

$$4\cos^2\frac{A-C}{2}-3\cos\frac{A-C}{2}-1=0,$$

$$\cos\frac{A-C}{2}=1\text{ 或 }\cos\frac{A-C}{2}=-\frac{1}{4}\text{（舍去）。}$$

所以

$$A-C=0,\quad A=C=\frac{\pi}{3}.$$

$$A=B=C=\frac{\pi}{3}.$$

39．设这个三角形三边从小到大依次为 $a-d$、a、$a+d$，最大角为 α，面积为 Δ，则周长 $2s=3a$，与它同周的等边三角形的边长为 a，面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，依题意得

$$\Delta:\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=3:5,$$

于是

$$\Delta=\frac{3\sqrt{3}}{20}a^2.$$

又

$$\Delta=\sqrt{\frac{3}{2}a\cdot\left(\frac{1}{2}a+d\right)\cdot\frac{1}{2}a\cdot\left(\frac{1}{2}a-d\right)},$$

所以

$$\sqrt{\frac{3}{2}a\cdot\left(\frac{1}{2}a+d\right)\cdot\frac{1}{2}a\cdot\left(\frac{1}{2}a-d\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{20}a^2.$$

解之，得 $d=\frac{2}{5}a$.

因此

$$(a-d):a:(a+d)=\frac{3}{5}a:a:\frac{7}{5}a=3:5:7.$$

$$\cos\alpha=\frac{(a-d)^2+a^2-(a+d)^2}{2a(a-d)}$$

$$=\frac{a-4d}{2(a-d)}$$

$$=\frac{a-4\cdot\frac{2}{5}a}{2(a-\frac{2}{5}a)}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

$$\alpha=120°.$$

即三边之比为 3:5:7，最大角为 120°.

40. (1) 设 $b+c=4x$，则

$$c+a=5x,\ a+b=6x.$$

从而

$$a=3.5x,\ b=2.5x,\ c=1.5x.$$

所以

$$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=3.5x:2.5x:1.5x=7:5:3.$$

(2) $a>b>c$，故 $A>B>C$. 即 A 为最大角.

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(2.5x)^2+(1.5x)^2-(3.5x)^2}{2\cdot(2.5x)(1.5x)}$$

$$=-\frac{1}{2},$$

所以

$$A=\frac{2\pi}{3}.$$

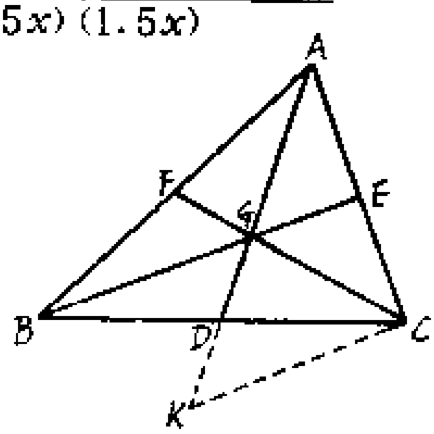

图 3—14

41. 延长GD到 K，使$DK=GD$，则

$$S_{\triangle CDK}=S_{\triangle CGD}.$$

于是

$$S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle CGK}.$$

根据重心定理知

$$GK=AG=\frac{2}{3}m_a,\quad KC=BG=\frac{2}{3}m_b,\quad CG=\frac{2}{3}m_c,$$

于是 ΔCGK 的半周长

$$s=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_b+\frac{2}{3}m_c\right)=\frac{1}{3}(m_a+m_b+m_c).$$

$$S_{\triangle CGK}=\sqrt{s\left(s-\frac{2}{3}m_a\right)\left(s-\frac{2}{3}m_b\right)\left(s-\frac{2}{3}m_c\right)}$$

$$=\frac{1}{9}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_a+m_b-m_c)(m_b+m_c-m_a)(m_c+m_a-m_b)}.$$

所以

$$\Delta=\frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_a+m_b-m_c)(m_b+m_c-m_a)(m_c+m_a-m_b)}.$$

42. $BC=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$

$$=\sqrt{(b-c)^2+2bc(1-\cos\alpha)}$$

$$=\sqrt{(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

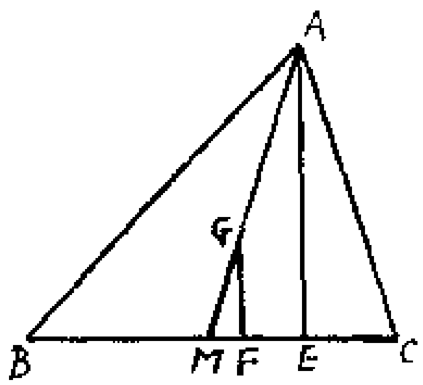

图 3—15

作 $AE\perp BC$，则

$$\frac{1}{2}BC\cdot AE=\frac{1}{2}bc\sin\alpha,$$

所以

$$AE=\frac{bc\sin\alpha}{BC}=\frac{bc\sin\alpha}{\sqrt{(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

$$GF:AE=GM:AM=1:3,$$

故

$$GF=\frac{bc\sin\alpha}{3\sqrt{(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

43. 设 $AB=a$，$BC=b$，则

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos120^\circ$$
$$=a^2+b^2+ab,$$
$$BD^2=a^2+b^2-2ab\cos60^\circ$$
$$=a^2+b^2-ab,$$

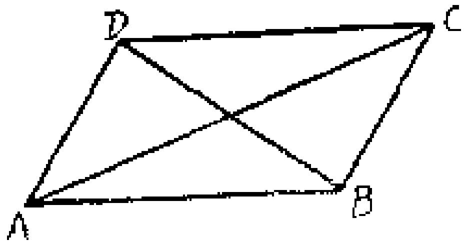

图 3—16

所以

$$\frac{a^2+b^2+ab}{a^2+b^2-ab}=\frac{19}{7},$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}+1}=\frac{19}{7}.$$

令 $\frac{a}{b}=k$。代入上式，得

$$\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\frac{19}{7}.$$

$$19k^2-19k+19=7k^2+7k+7,$$

$$6k^2-13k+6=0,$$

$$k=\frac{3}{2}\ 或\ k=\frac{2}{3}.$$

即这个平行四边形的两邻边之比为 3∶2

44. 如图3—17，根据托勒米定理

$$AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot BD.$$

即

$$bd+ac=\sqrt{d^2-c^2}\cdot\sqrt{d^2-a^2}$$

两边平方，得

$$(bd+ac)^2=(d^2-c^2)(d^2-a^2),$$

$$d^4-(a^2+b^2+c^2)d^2-2abcd=0.$$

但 $d\neq 0$，所以

$$d^3-(a^2+b^2+c^2)d-2abc=0.$$

即 $AB=d$ 是方程

$$x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$$

的根。

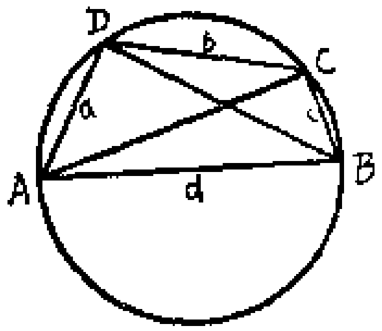

图 3—17

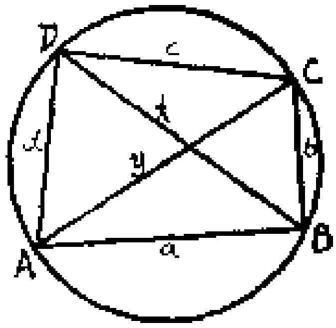

图 3—18

45. 由例 10 知

$$\cos B=\frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)}.$$

因为 $AC=y$，故有

$$\begin{aligned}y^2&=a^2+b^2-2ab\cos B\\&=a^2+b^2-2ab\cdot\frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)}\\&=\frac{(a^2+b^2)(ab+cd)-ab[a^2+b^2-(c^2+d^2)]}{ab+cd}\\&=\frac{(a^2+b^2)cd+ab(c^2+d^2)}{ab+cd}\\&=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.\end{aligned}$$

所以

$$y=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}.$$

同理可证

$$BD=x=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

x 也可由托勒米定理直接求出：

$$x=\frac{ac+bd}{y}$$

$$=(ac+bd)\cdot$$

$$\sqrt{\frac{ab+cd}{(ac+bd)(ad+bc)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$$

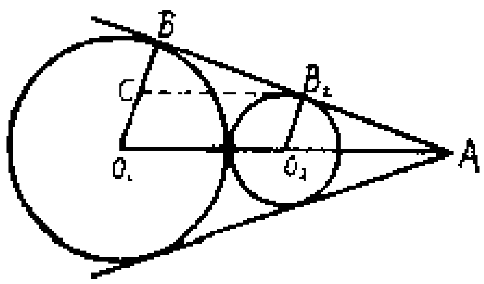

图 3—19

46．如图 3—19，$\angle B_1B_2C=\frac{A}{2}$，

$$CB_2=O_1O_2=a+b,\ CB_1=a-b.$$

所以

$$B_1B_2=\sqrt{CB_2^2-CB_1^2}=\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}=2\sqrt{ab}.$$

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{a-b}{a+b},\quad \cos\frac{A}{2}=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}.$$

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\cdot\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}.$$

47．如图3—20，设 $\angle AOP=\beta$，$\angle BOP=\alpha\,(\alpha<\beta)$，

$\odot O$ 的半径为 r，$OP=m$．作 $OM\perp AB$ 于 M，则

$$\angle AOM=\frac{1}{2}(\beta-\alpha),\quad \angle POM=\frac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

$$\operatorname{tg}\frac{\angle AOP}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle BOP}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}-\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}+\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\cos\angle AOM-\cos\angle POM}{\cos\angle AOM+\cos\angle POM}=\frac{\frac{OM}{r}-\frac{OM}{m}}{\frac{OM}{r}+\frac{OM}{m}}$$

$$=\frac{m-r}{m+r}=\text{定值}.$$

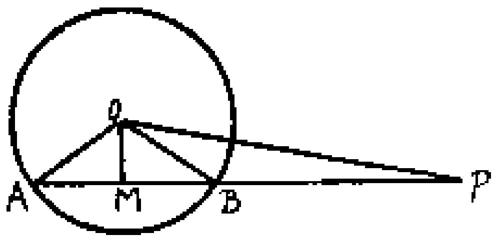

图 3—20

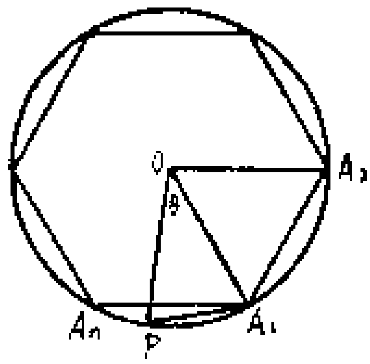

图 3—21

48. 令 $\angle POA_1=\theta$，则

$$PA_1^2=1^2+1^2-2\cos\theta=2-2\cos\theta,$$

$$PA_2^2=2-2\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right),$$

……

$$PA_n^2=2-2\cos\left[\theta+\frac{(n-1)2\pi}{n}\right].$$

$$PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_n^2=2n-2\left[\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+\cos\left(\theta+\frac{(n-1)2\pi}{n}\right)\right].$$

而

$$\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\cos\left[\theta+\frac{(n-1)2\pi}{n}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left\{2\sin\frac{\pi}{n}\cos\theta+2\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+2\sin\frac{\pi}{n}\cos\left[\theta+\frac{(n-1)2\pi}{n}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left\{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)-\sin\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)\right.$$

$$+\sin\left(\theta+\frac{3\pi}{n}\right)-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)+\cdots$$

$$\left.+\sin\left[\theta+\frac{(2n-1)\pi}{n}\right]-\sin\left[\theta+\frac{(2n-3)\pi}{n}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left\{\sin\left[\theta+\frac{(2n-1)\pi}{n}\right]-\sin\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\cdot 2\cos\left[\theta+\frac{(n-1)\pi}{n}\right]\sin\pi$$

$$=0.$$

所以

$$PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_n^2=2n.$$

49. 依题设有

$\angle BOC=180^\circ-B$,

$\angle AOB=180^\circ-A$,

$\angle COA=180^\circ-C$.

设 $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$,

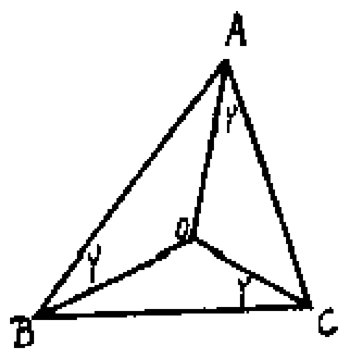

图 3—22

则

$$\frac{a}{\sin(180^\circ-B)}=\frac{y}{\sin r},$$

$$\frac{c}{\sin(180^\circ-A)}=\frac{y}{\sin(A-r)},$$

$$a=\frac{y\sin B}{\sin r},\quad c=\frac{y\sin A}{\sin(A-r)},$$

$$\frac{c}{a}=\frac{\sin r\sin A}{\sin B\sin(A-r)}.$$

但 $$\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A},$$

所以 $$\frac{\sin r\sin A}{\sin B\sin(A-r)}=\frac{\sin C}{\sin A},$$

$$\begin{aligned}\sin r\sin^2 A&=\sin B\sin C\sin(A-r)\\&=\sin B\sin C(\sin A\cos r-\cos A\sin r),\end{aligned}$$

$$\sin^2 A=\sin B\sin C(\sin A\operatorname{ctg} r-\cos A),$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} r&=\operatorname{ctg} A+\frac{\sin A}{\sin B\sin C}\\&=\operatorname{ctg} A+\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\\&=\operatorname{ctg} A+\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\sin B\sin C}\\&=\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C.\end{aligned}$$

50．依题设有

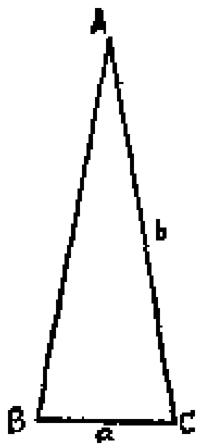

图 3—23

$$a=2b\cos 80^\circ,$$

所以

$$\begin{aligned}a^3&=8b^3\cos^3 80^\circ\\&=8b^3\cdot\frac{\cos 3\cdot 80^\circ+3\cos 80^\circ}{4}\\&=2b^3\left(-\frac{1}{2}+3\cos 80^\circ\right)\\&=-b^3+6b^3\cos 80^\circ\end{aligned}$$

$$= -b^3 + 3(2b\cos 80°)\cdot b^2$$
$$= -b^3 + 3ab^2.$$

即

$$a^3 + b^3 = 3ab^2.$$

51. 连结 EB、EC，则 ΔAEB 和 ΔAEC 都是直角三角形，且 $\angle B = \angle AEC$，$\angle C = \angle AEB$.

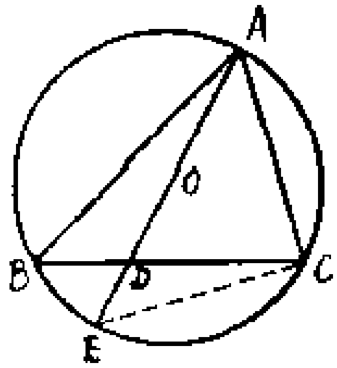

图 3—24

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} \angle AEC = \frac{AC}{CE},$$

$$\operatorname{tg} C = \operatorname{tg} \angle AEB = \frac{AB}{BE}.$$

所以

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \frac{AC}{CE}\cdot\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{BE}\cdot\frac{AB}{CE}.$$

又由 $\Delta ACD \backsim \Delta BED$ 和 $\Delta ABD \backsim \Delta CED$ 有

$$\frac{AC}{BE} = \frac{AD}{BD},\quad \frac{AB}{CE} = \frac{BD}{DE}.$$

于是

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \frac{AD}{BD}\cdot\frac{BD}{DF} = \frac{AD}{DE}.$$

52. (1) 设 $PB = x$，P 点到直线 l 的距离 $PD = h$，那么，在 ΔAPB 中，$x = a\cos\theta$.

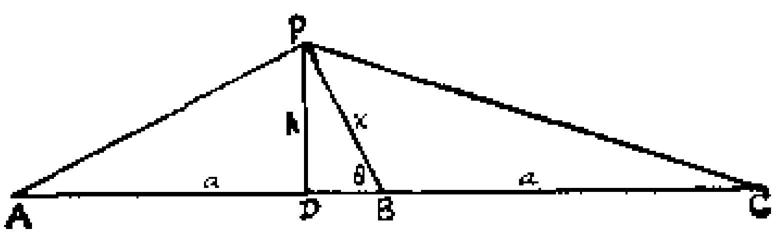

图 3—25

又在 $\triangle BPC$ 中，

$$\frac{a}{\sin 45^\circ}=\frac{x}{\sin(\theta-45^\circ)}.$$

所以

$$\frac{a}{\sin 45^\circ}=\frac{a\cos\theta}{\sin(\theta-45^\circ)},$$

$$\sin 45^\circ\cos\theta=\sin(\theta-45^\circ),$$

$$\sin 45^\circ\cos\theta=\sin\theta\cos 45^\circ-\cos\theta\sin 45^\circ,$$

$$\cos\theta=\sin\theta-\cos\theta.$$

$$\operatorname{tg}\theta=2.$$

因 θ 是锐角，故有 $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(2) $PB=x=a\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{5}}$.

(3) P 到直线 l 的距离 $h=x\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5}a$.

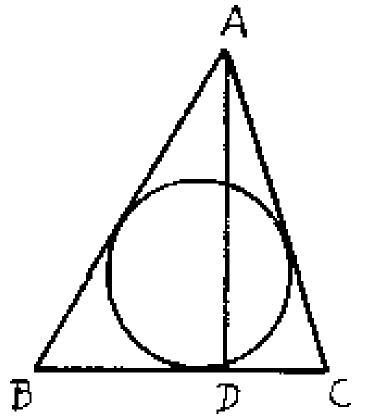

图 3—26

53. 由面积公式

$$\Delta=rs=\frac{1}{2}(a+b+c)r$$

及

$$\Delta=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}a\cdot AD$$

有

$$a\cdot AD=(a+b+c)r$$

所以

$$AD=\frac{r(a+b+c)}{a}$$

$$=\frac{r(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sin A}$$

$$=\frac{r\cdot 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2r\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

54. 设梯形 $ABCD$ 的内切圆直径为 d，则

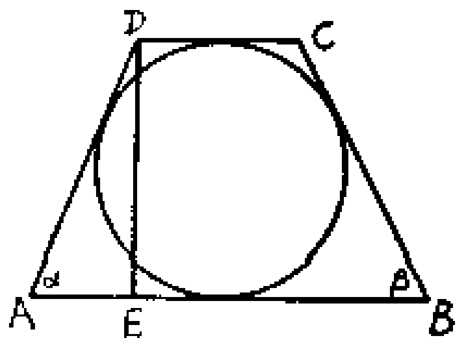

图 3—27

$$AD=\frac{d}{\sin\alpha},$$

$$BC=\frac{d}{\sin\beta}.$$

$$AB+DC=AD+BC,$$

所以梯形的面积

$$Q=\frac{1}{2}(AB+DC)\cdot DE$$

$$=\frac{1}{2}(AD+BC)d$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{d}{\sin\alpha}+\frac{d}{\sin\beta}\right)d$$

$$=\frac{1}{2}d^2\cdot\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

于是

$$d^2=\frac{2Q\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta},$$

圆的面积 $A=\frac{1}{4}\pi d^2=\frac{\pi Q\sin\alpha\sin\beta}{2(\sin\alpha+\sin\beta)}$.

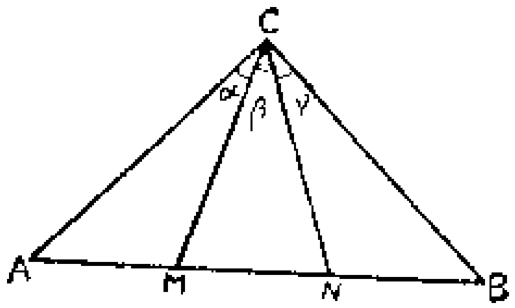

图 3—28

55. 由 $AM=MN=NB$ 有

$$S_{\triangle ACM}=S_{\triangle MCN}=S_{\triangle NCB}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.$$

又

$$S_{\triangle ACM}=\frac{1}{2}AC\cdot CM\sin\alpha,$$

$$S_{\triangle MCN}=\frac{1}{2}CM\cdot CN\sin\beta,$$

$$S_{\triangle NCB}=\frac{1}{2}CN\cdot BC\sin\gamma,$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC.$$

所以

$$\sin\alpha=\frac{2S_{\triangle ACM}}{AC\cdot CM}=\frac{\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}}{AC\cdot CM},$$

$$\sin\beta=\frac{\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}}{CM\cdot CN},$$

$$\sin\gamma=\frac{\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}}{CN\cdot BC},$$

$$\sin\alpha\sin\gamma=\frac{\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}}{AC\cdot CM}\cdot\frac{\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}}{CN\cdot BC}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}}{AC\cdot BC}\cdot\frac{\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}}{CM\cdot CN}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}}{2S_{\triangle ABC}}\cdot\sin\beta$$

$$=\frac{1}{3}\sin\beta.$$

即 $$3\sin\alpha\sin\gamma=\sin\beta.$$

56. 作 $BE\perp AD$ 的延长线于 E，作 $CF\perp AD$ 于 F，则

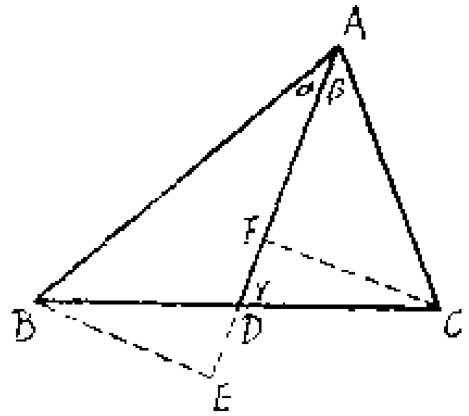

图 3—29

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{AE}{BE},\quad \operatorname{ctg}\beta=\frac{AF}{CF},$$

$$\operatorname{ctg}\gamma=\frac{DF}{CF}.$$

由于$\Delta BDE\cong\Delta CDF$，故有

$$BE=CF,\quad DE=DF.$$

所以

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{AE}{BE}-\frac{AF}{CF}=\frac{AE-AF}{CF}$$

$$=\frac{EF}{CF}=\frac{2DF}{CF}=2\operatorname{ctg}\gamma.$$

57. 如图，

$$S_{\triangle OAC}=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}$$

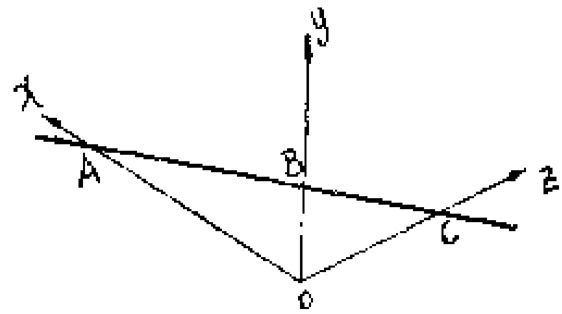

图 3—30

即

$$\frac{1}{2}OA\cdot OC\sin120^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\sin60^\circ$$

$$+\frac{1}{2}\cdot OB\cdot OC\sin60^\circ,$$

$$OA\cdot OC=OA\cdot OB+OB\cdot OC.$$

两边同除以 $OA\cdot OB\cdot OC$，得

$$\frac{1}{OB}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OC}.$$

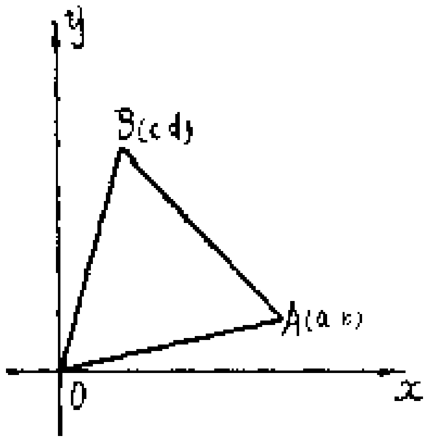

图 3—31

58．不失一般性，可设这个三角形的三个顶点为$O(0,0)$，$A(a,b)$，$B(c,d)$，且a、b、c、d都是整数（若不然，可经过坐标轴的平移或图形的平移）．又设$\angle XOA=\alpha$，若$\triangle OAB$是正三角形，则

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \angle XOB=60^\circ+\alpha.$$

从而
$$\begin{aligned}c&=|OB|\cos(60^\circ+\alpha)=|OA|\cos(60^\circ+\alpha)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos 60^\circ\cos\alpha-\sin 60^\circ\sin\alpha)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\&=\frac{a-\sqrt{3}\,b}{2},\end{aligned}$$

$$d=|OB|\sin(60^\circ+\alpha)=\frac{\sqrt{3}\,a+b}{2}.$$

而c、d都是整数，故必须$a=b=0$，所以坐标都是整数的三点，不能组成正三角形．

59．设$\triangle ABC$之三边分别为a、b、c，周长为$2s$，内切圆半径为r，外接圆半径为R．依题设有

$$2s=2r+2R.$$

$$\frac{s}{R}=1+\frac{r}{R}.$$

而
$$\frac{s}{R}=\frac{a+b+c}{2R}=\sin A+\sin B+\sin C,$$

根据习题8．(3)可知

$$1+\frac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C,$$

于是

$$\sin A+\sin B+\sin C=\cos A+\cos B+\cos C.$$

将上式两边平方：

$$\begin{aligned}&\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin A\sin B\\&\quad+2\sin B\sin C+2\sin C\sin A\\&=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\\&\quad+2\cos B\cos C+2\cos C\cos A.\end{aligned}$$

化简：

$$\begin{aligned}&\cos^2 A-\sin^2 A+\cos^2 B-\sin^2 B+\cos^2 C-\sin^2 C\\&=-2(\cos B\cos C-\sin B\sin C)-2(\cos C\cos A\\&\quad-\sin C\sin A)-2(\cos A\cos B-\sin A\sin B),\\&\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-2\cos(B+C)\\&\quad-2\cos(C+A)-2\cos(A+B),\\&\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=2\cos A+2\cos B+2\cos C.\end{aligned}$$

60. 依题设有

$\angle B=\angle C=40°$,

$\angle ABD=20°$, $\angle BDC=120°$.

$$AD=\frac{BD\sin 20°}{\sin 100°},$$

$$BD=\frac{BC\sin 40°}{\sin 120°}.$$

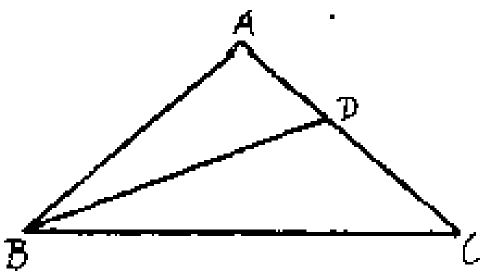

图 3—32

$$\begin{aligned}AD+BD&=\frac{BD\sin 20°}{\sin 100°}+BD\\&=BD\cdot\frac{\sin 20°+\sin 100°}{\sin 100°}\\&=BC\cdot\frac{\sin 40°}{\sin 120°}\cdot\frac{\sin 20°+\sin 100°}{\sin 100°}\end{aligned}$$

$$= BC \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\sin 60^\circ} \cdot \frac{2\sin 60^\circ \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$= BC \cdot \frac{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$= BC.$$

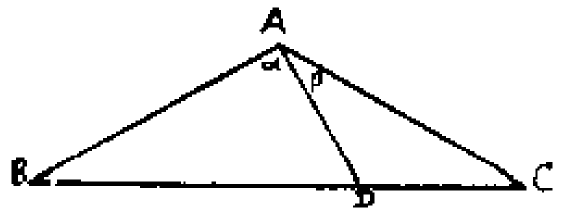

图 3—33

61. 设$\angle BAD = \alpha$，$\angle DAC = \beta$，则

$$\alpha - \beta = 60^\circ,$$

$$\angle B = \frac{1}{2}[180^\circ - (\alpha + \beta)]$$

$$= 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\angle ADB = 180^\circ - (\alpha + \angle B)$$

$$= 180^\circ - \left[\alpha + \left(90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)\right]$$

$$= 90^\circ - \frac{\alpha - \beta}{2} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

在ΔABD中，依正弦定理有

$$\frac{1}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}, \quad \sin B = \frac{1}{2}.$$

而$\angle B$为锐角，故$\angle B = 30^\circ$，顶角$\angle A = \alpha + \beta = 120^\circ$.

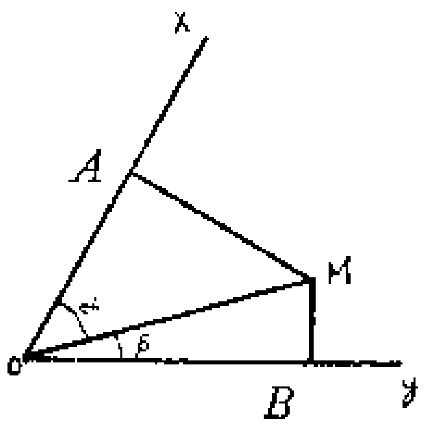

图 3—34

62. 设$\angle XOM = \alpha$，$\angle MOY = \beta$，则

$$\beta = 60^\circ - \alpha.$$

$$\sin \alpha = \frac{MA}{OM} = \frac{11}{OM},$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{OM^2 - 121}}{OM},$$

$$\sin \beta = \frac{MB}{OM} = \frac{2}{OM}.$$

$$\sin\beta = \sin(60^\circ - \alpha)$$

$$= \sin 60^\circ \cos\alpha - \cos 60^\circ \sin\alpha,$$

所以

$$\frac{2}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{OM^2 - 121}}{OM} - \frac{1}{2}\cdot\frac{11}{OM},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{OM^2 - 121} = \frac{15}{2},$$

$$OM^2 = 196,$$

$$OM = 14.$$

63. 设正方形的边长为a.

$\angle CBM = \alpha$, 则

$$\angle ABN = \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$CM = a\operatorname{tg}\alpha,$$

$$AN = a\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$BM = \frac{a}{\cos\alpha}.$$

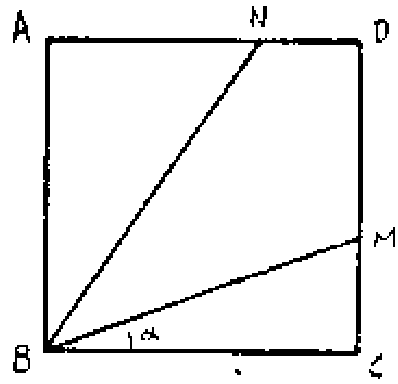

图 3—35

所以

$$CM + AN = a\left[\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$= a\left[\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{1-\cos(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)}\right]$$

$$= a\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$= \frac{a}{\cos\alpha}$$

$$= BM.$$

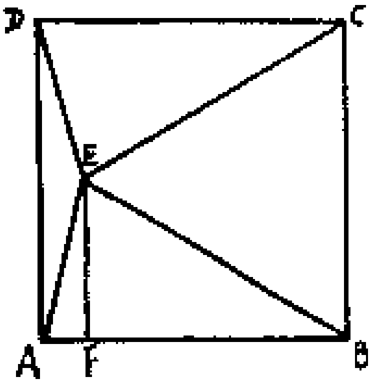

图 3—36

64. 设正方形 $ABCD$ 的边长为 a，作 $EF\perp AB$ 于 F，则

$$EF=\frac{a}{2},\quad \angle EAF=75^\circ,$$

$$AF=EF\,\mathrm{ctg}75^\circ=\frac{a}{2}(2-\sqrt{3})=a-\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

所以

$$BF=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\quad BE=a.$$

同理可证

$$CE=a.$$

故 ΔEBC 是等边三角形.

65. 设在 ΔABC 中，$A=60^\circ$，$BC=1$，

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=\frac{1}{\sin 60^\circ},$$

所以

$$AC+AB=\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin B+\sin C)$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{120^\circ}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\leqslant 2.$$

66. 如图，在单位圆 O 内，任作一锐角三角形 ABC，设 A、B、C 各角所对的边分别为 a、b、c，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则有

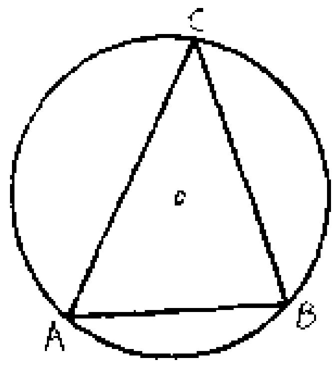

图 3—37

$$A+B>90°,\ A>90°-B.$$

从而

$$\cos A<\cos(90°-B)=\sin B.$$

同理

$$\cos B<\sin C,\ \cos C<\sin A.$$

所以

$$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C&<\sin A+\sin B+\sin C\\&=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\\&=s.\end{aligned}$$

67. $\frac{AB}{AC}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin 2B}{\sin B}=2\cos B.$

由 C 是锐角知 $B<45°$，$\cos B>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又由 A 是锐角知 $B+C>90°$，$3B>90°$，$B>30°$，$\cos B<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

于是

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos B<\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sqrt{2}<2\cos B<\sqrt{3}.$$

所以

$$\sqrt{2}<\frac{AB}{AC}<\sqrt{3}.$$

68. 因这个不等式左边二次三项式的二次项的系数 $b^2>0$，

判别式的值

$$\begin{aligned}&(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2\\=&(b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc)\\=&[(b+c)^2-a^2][(b-c)^2-a^2]\\=&-(a+b+c)(b+c-a)\cdot\\&(c+a-b)(a+b-c).\end{aligned}$$

由于 a、b、c 是三角形的三条边的长，所以

$$a+b+c>0,\ b+c-a>0,\ c+a-b>0,\ a+b-c>0.$$

即这个不等式左边二次三项式的判别式的值小于零，故对于任何 x，都有

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2>0.$$

69．根据同一三角形内大边对大角的定理，可得

$$(\alpha-\beta)(a-b)+(\beta-\gamma)(b-c)+(\gamma-\alpha)(c-a)\geqslant 0,$$

$$3(\alpha a+\beta b+\gamma c)\geqslant(\alpha+\beta+\gamma)(a+b+c).$$

而
$$\alpha+\beta+\gamma=\pi,$$
所以

$$\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{a+b+c}\geqslant\frac{\pi}{3}.$$

由于三角形两边之和大于第三边，且 α、β、γ 都大于零，所以

$$\alpha(b+c-a)+\beta(c+a-b)+\gamma(a+b-c)>0,$$

$$a(\beta+\gamma-\alpha)+b(\gamma+\alpha-\beta)+c(\alpha+\beta-\gamma)>0,$$

$$a(\pi-2\alpha)+b(\pi-2\beta)+c(\pi-2\gamma)>0,$$

$$\pi(a+b+c)>2(\alpha a+\beta b+\gamma c),$$

$$\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}.$$

故有

$$\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}.$$

70. 设 ΔABC 的外接圆半径为 R，内切圆半径为 r，则

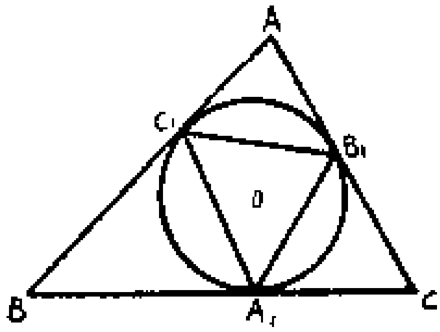

图 3—38

$$a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,$$

$$c=2R\sin C.$$

$$a_1=2r\sin A_1$$

$$=2r\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$$

$$=2r\cos\frac{A}{2},$$

$$b_1=2r\sin B_1=2r\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)=2r\cos\frac{B}{2},$$

$$c_1=2r\sin C_1=2r\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=2r\cos\frac{C}{2}.$$

所以

$$\frac{a^2}{a_1^2}+\frac{b^2}{b_1^2}+\frac{c^2}{c_1^2}=\frac{4R^2\sin^2 A}{4r^2\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{4R^2\sin^2 B}{4r^2\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{4R^2\sin^2 C}{4r^2\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{4R^2}{r^2}\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right).$$

由于

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}$$

$$+\frac{1-\cos C}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\geqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4},$$

$$R\geqslant 2r,$$

所以

$$\frac{a^2}{a_1^2}+\frac{b^2}{b_1^2}+\frac{c^2}{c_1^2}\geqslant 4\cdot 2^2\cdot\frac{3}{4}=12.$$

71. $$a^2a_1^2+b^2b_1^2+c^2c_1^2\geqslant 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca\cdot a_1b_1\cdot b_1c_1\cdot c_1a_1}$$

$$=3\sqrt[3]{\frac{2\Delta}{\sin C}\cdot\frac{2\Delta}{\sin A}\cdot\frac{2\Delta}{\sin B}\cdot\frac{2\Delta_1}{\sin C_1}\cdot\frac{2\Delta_1}{\sin A_1}\cdot\frac{2\Delta_1}{\sin B_1}}$$

$$=12\Delta\Delta_1\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}\cdot\frac{1}{\sin A_1\sin B_1\sin C_1}}.$$

由于 A、B、C 及 A_1、B_1、C_1 分别是ΔABC 及$\Delta A_1B_1C_1$ 的内角，故

$$\sin A\sin B\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8},\quad \sin A_1\sin B_1\sin C_1\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8},$$

所以

$$a^2a_1^2+b^2b_1^2+c^2c_1^2\geqslant 12\Delta\Delta_1\sqrt[3]{\frac{8}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{8}{3\sqrt{3}}}=16\Delta\Delta_1.$$

72. 由不等式

$$(x+y+z)^2\geqslant 3(xy+yz+zx)$$

可得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}}$$

$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}}$$

$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{2s}{abc}},\quad 其中\quad s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

因为 $$R\geqslant 2r,$$

所以

$$\sqrt{\frac{2s}{abc}}=\sqrt{\frac{2\cdot\frac{\Delta}{r}}{4R\Delta}}=\sqrt{\frac{1}{2Rr}}\geqslant\sqrt{\frac{1}{R^2}}=\frac{1}{R},$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{2s}{abc}}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{R}.$$

73. 设 P、Q 分别取在 a、b 边上，且 $CP=x$，$CQ=y$，则有

$$\frac{1}{2}xy\sin C=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ab\sin C,$$

$$xy=\frac{ab}{2}.$$

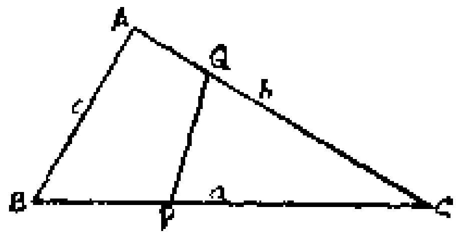

图 3—39

因为

$$\begin{aligned}PQ&=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos C}\\&=\sqrt{(x-y)^2+2xy(1-\cos C)}\\&=\sqrt{(x-y)^2+ab(1-\cos C)}.\end{aligned}$$

所以，当 $x=y$ 时，PQ 最小．这时

$$PQ=\sqrt{ab-ab\cos C}=\sqrt{ab-\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}(c+a-b)(c-a+b)}=\sqrt{2(s-a)(s-b)}.$$

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$．

若 P、Q 分别取在 b、c 边上，则当 $AP=AQ$ 时，PQ 有最小值 $\sqrt{2(s-b)(s-c)}$，若 P、Q 分别取在 c、a 边上，则当 $BP=BQ$ 时，PQ 有最小值 $\sqrt{2(s-a)(s-c)}$．

但 $a>b>c$，因此 $\sqrt{2(s-a)(s-b)}$ 最小，即 P、Q 取在 a、b 边上，且 $CP=CQ$ 时，PQ 的长度最短．

因为此时 $PQ=\sqrt{ab(1-\cos C)}=\sqrt{ab\cdot 2\sin^2\frac{C}{2}}$

$=\sqrt{2ab}\sin\frac{C}{2}$，$\Delta CPQ$ 是等腰三角形，故

$$CP=CQ=\frac{\frac{1}{2}PQ}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2ab}.$$

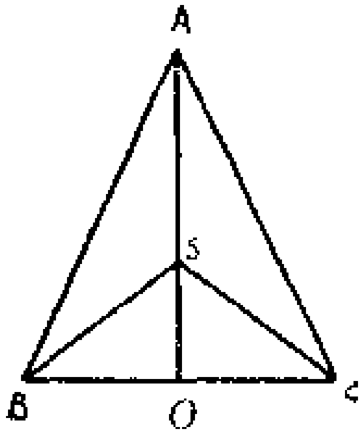

图 3—40

74. 如图，作圆锥的轴截面 ABC，则 $AS=h$，$\angle BAO=\beta$，$\angle BSO=\alpha$，$\angle ABS=\alpha-\beta$，在 $\triangle ABS$ 中，由正弦定理得

$$\frac{BS}{\sin\beta}=\frac{AS}{\sin(\alpha-\beta)},$$

$$BS=\frac{h\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

设圆锥底面半径为 r，则

$$r=OB=SB\sin\alpha=\frac{h\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

所以，这两个圆锥侧面所夹的部分的体积

$$V=V_{\text{圆锥}ABC}-V_{\text{圆锥}SBC}$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot AO-\frac{1}{3}\pi r^2\cdot SO$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^2(AO-SO)$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$=\frac{\pi h^3\sin^2\alpha\sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha-\beta)}.$$

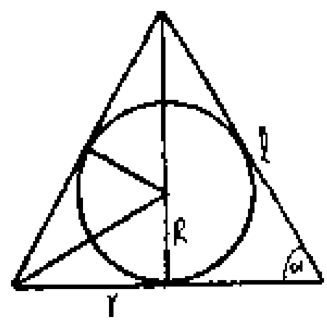

图 3—41

75. 设圆锥的底面半径为 r，母线为 l，母线与底面的夹角为 α，则

$$r=R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},\quad l=r\sec\alpha,$$

$$S_{\text{全}}=\pi r(r+l)=\pi r^2(1+\sec\alpha)$$

$$=\pi R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\pi R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=2\pi R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{1-\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}}$$

$$=2\pi R^2\cdot\frac{1}{-\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

当 $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$，即 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$时， $-\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$有最大值，从而 $S_{全}$ 有最小值，亦即当 $r=R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}R$ 时，$S_{全}$有最小值.

76. 如图，

$AA_1=OA\sin\theta=a\sin\theta$,

$A_1A_2=AA_1\cos\theta=a\sin\theta\cos\theta$,

$A_2A_3=A_1A_2\cos\theta=a\sin\theta\cos^2\theta$,

………

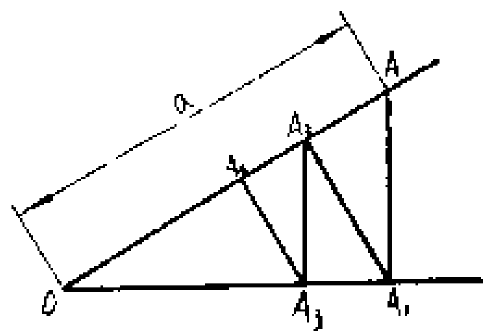

图 3—42

所以

$$AA_1+A_1A_2+A_2A_3+\cdots$$

$$=a\sin\theta+a\sin\theta\cos\theta+a\sin\theta\cos^2\theta+\cdots$$

$$=\frac{a\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=a\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

77. 依题设，圆心 O_1、O_2、O_3……均在$\angle B$ 的平分线上．设$\odot O_n$ 的半径为 r_n，则

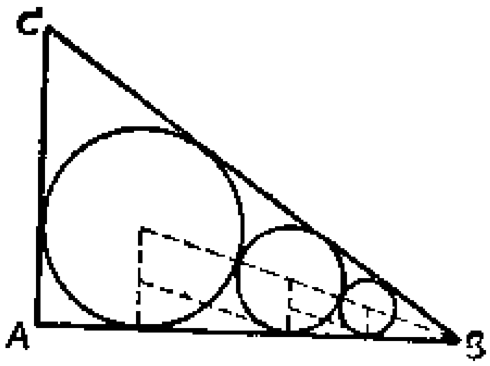

图 3—43

$$r_1=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$$

$$=\frac{1}{2}(4+3-5)=1,$$

$$\sin\frac{B}{2}=\frac{r_n-r_{n+1}}{r_n+r_{n+1}}.$$

由 $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{3}$ 可得 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$，

于是

$$\frac{r_n-r_{n-1}}{r_n+r_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$r_{n+1}=\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}r_n.$$

即半径 r_1， r_2， …， r_n， …是首项为 1， 公比为 $\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}$ 的无穷递缩等比数列，所以所求面积之和

$$S=\frac{\pi}{1-\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^2}=\frac{20+11\sqrt{10}}{40}\pi.$$

第四章　反三角函数和三角方程

一、概　　述

由三角函数所确定的对应法则，是自变量允许值的集合（定义域）到函数值的集合（值域）的单值对应，而不是一一对应．如 $y=\sin x$，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$y=\frac{1}{2}$；而当 $y=\frac{1}{2}$ 时，x 的值除 $\frac{\pi}{6}$ 之外，还有 $2\pi+\frac{\pi}{6}$，$-2\pi+\frac{\pi}{6}$，$4\pi+\frac{\pi}{6}$，$-4\pi+\frac{\pi}{6}$，…，$\pi-\frac{\pi}{6}$，$-\pi-\frac{\pi}{6}$，$3\pi-\frac{\pi}{6}$，$-3\pi-\frac{\pi}{6}$，…．因此，三角函数在其定义域内不存在反函数．但三角函数都有单调区间，以正弦函数 $y=\sin x$ 为例，它的单调区间是 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ 及 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$（$k$ 为整数）．在每一个单调区间上，它都有反函数．我们把 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数叫做反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$．类似地，

$y=\cos x$ 在 $[0,\ \pi]$ 上的反函数叫做反余弦函数．记作 $y=\arccos x$；

$y=\operatorname{tg} x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数叫做反正切函数，记作 $y=\operatorname{arc\,tg} x$；

$y=\operatorname{ctg} x$ 在 $(0,\pi)$ 上的反函数叫做反余切函数，记作

$y=\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$.

学习反三角函数，一定要弄清楚它们的定义，例如对 $\arcsin x$ 应理解如下三点：

1. $\arcsin x$ 表示角(实数)；

2. $\arcsin x \in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$；

3. 这个角的正弦值等于 x，即 $\sin(\arcsin x)=x$.

但 $\arcsin\sin x$ 未必等于 x，只有在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，才有 $\arcsin\sin x=x$ 成立。例如

$$\arcsin\sin\frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6},$$

$$\arcsin\sin\frac{5\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}\neq\frac{5\pi}{6},$$

$$\arcsin\sin\frac{4\pi}{5}=\arcsin\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}.$$

反三角函数的基本性质如下表：

函　　数	定 义 域	值　　域	增 减 性
$y=\arcsin x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$	增函数
$y=\arccos x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant\pi$	减函数
$y=\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$	$-\infty<x<+\infty$	$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$	增函数
$y=\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$	$-\infty<x<+\infty$	$0<y<\pi$	减函数

反三角函数的正负值关系：

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x,$$

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x,$$

$$\operatorname{arc\,tg}(-x)=-\operatorname{arc\,tg}x,$$

$$\operatorname{arc\,ctg}(-x)=\pi-\operatorname{arc\,ctg}x.$$

关于反三角函数的三角运算，主要公式有：

$$\sin(\arcsin x)=x,\qquad \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2},$$

$$\cos(\arccos x)=x,\qquad \sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2},$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}x)=x,\qquad \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,tg}x)=\frac{1}{x}.$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg}x)=x,\qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,ctg}x)=\frac{1}{x}.$$

其它的公式可由同角三角函数之间的关系得出，例如：

$$\operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\sec(\arccos x)=\frac{1}{\cos(\arccos x)}=\frac{1}{x}.$$

还可以得出

$$\sin(2\arcsin x)=2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)$$
$$=2x\sqrt{1-x^2},$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{1-\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$$

等等.

反三角函数之间有如下的关系：

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,ctg}x=\frac{\pi}{2}.$$

凡未知数含在三角函数符号中的条件等式叫做三角方程．而取代未知数后能满足方程的数叫做三角方程的解．对于某一三角方程来说，方程的全体解叫做三角方程的通解.

解三角方程，常归结为解最简三角方程．关于最简三角方程的求解，如下表：

方　　程	a 的　值	方　　程　　的　　解
$\sin x=a$	$\lvert a\rvert<1$	$x=k\pi+(-1)^k\arcsin a$
	$\lvert a\rvert=1$	$x=2k\pi+\arcsin a$
	$\lvert a\rvert>1$	无　　解
$\cos x=a$	$\lvert a\rvert<1$	$x=2k\pi\pm\arccos a$
	$\lvert a\rvert=1$	$x=2k\pi+\arccos a$
	$\lvert a\rvert>1$	无　解
$\mathrm{tg}\,x=a$	$-\infty<a<+\infty$	$x=k\pi+\mathrm{arctg}\,a$
$\mathrm{ctg}\,x=a$	$-\infty<a<+\infty$	$x=k\pi+\mathrm{arcctg}\,a$

一般可解的三角方程的解法，常分为两个类型：

(1) 利用函数值相同的两角间的关系，将三角方程转化为代数方程求解．

若 $\sin f(x)=\sin\phi(x)$，则 $f(x)=k\pi+(-1)^k\phi(x)$；

若 $\cos f(x)=\cos\phi(x)$，则 $f(x)=2k\pi\pm\phi(x)$；

若 $\mathrm{tg} f(x)=\mathrm{tg}\,\phi(x)$ 或 $\mathrm{ctg}\, f(x)=\mathrm{ctg}\,\phi(x)$，

则 $f(x)=k\pi+\phi(x)$．

(2) 利用代数方法，将一般三角方程化为最简三角方程求解．常见的有

1) 可化为同角同函数的三角方程；

2) 一边可以分解，另一边为零的三角方程；

3）关于 $\sin x$、$\cos x$ 的齐次方程；

4）形如 $a\sin x+b\cos x=c$ 的三角方程．

一般三角方程，都可利用万能置换公式，化为代数方程．但由于五次和五次以上的代数方程无一般解法，因此，有时这种有理置换失去实际意义．

在解三角方程时，还应注意增根和遗根的问题．因为在方程变形的过程中，往往会扩大或缩小未知数的允许值范围，破坏方程的同解性．所以解三角方程时，要注意可能产生增根和遗根．

本章例题，将涉及反三角函数运算、恒等式证明、级数求和、解三角方程、方程组及解三角不等式等．

二、例　　题

1．求 $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}+2\arccos\frac{5}{13}+\arccos\frac{4}{5}\right)$ 的值．

〔分析〕 括号内是用反三角函数表示的三个角的和，且其中有一个角是倍角．为便于使用和角公式，应将 $\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5}$ 视作一个角，$2\arccos\frac{5}{13}$ 也视作一个角．

〔解〕 $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}+2\arccos\frac{5}{13}+\arccos\frac{4}{5}\right)$

$$=\cos\left\{\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5}\right)+2\arccos\frac{5}{13}\right\}$$

$$=\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5}\right)\cos\left(2\arccos\frac{5}{13}\right)$$

$$-\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5}\right)\sin\left(2\arccos\frac{5}{13}\right).$$

而 $$\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5}\right)$$

$$=\cos\left(\arc\sin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arc\cos\frac{4}{5}\right)$$

$$-\sin\left(\arc\sin\frac{3}{5}\right)\sin\left(\arc\cos\frac{4}{5}\right)$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{25}.$$

$$\cos\left(2\arc\cos\frac{5}{13}\right)=2\cos^2\left(\arc\cos\frac{5}{13}\right)-1$$

$$=2\cdot\left(\frac{5}{13}\right)^2-1=-\frac{119}{169}.$$

$$\sin\left(\arc\sin\frac{3}{5}+\arc\cos\frac{4}{5}\right)$$

$$=\sin\left(\arc\sin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arc\cos\frac{4}{5}\right)$$

$$+\cos\left(\arc\sin\frac{3}{5}\right)\sin\left(\arc\cos\frac{4}{5}\right)$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}.$$

$$\sin\left(2\arc\cos\frac{5}{13}\right)=2\sin\left(\arc\cos\frac{5}{13}\right)\cos\left(\arc\cos\frac{5}{13}\right)$$

$$=2\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{5}{13}=\frac{120}{169}.$$

所以　　原式 $=\frac{7}{25}\cdot\left(-\frac{119}{169}\right)-\frac{24}{25}\cdot\frac{120}{169}=-\frac{3713}{4225}$.

2．用反正弦表示 $\arc\sin\frac{3}{5}+\arc\sin\frac{15}{17}$.

〔分析〕 本题是将用反正弦表示的和角化为单角的问题，一般用一组互逆运算处理（正弦、反正弦），这就要先求出它的正弦值和它所在的区间，

但　　$0<\arc\sin\frac{3}{5}<\frac{\pi}{2}$，$0<\arc\sin\frac{15}{17}<\frac{\pi}{2}$，

$$0<\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{15}{17}<\pi.$$

计算出 $\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{15}{17}$ 的正弦值，我们不能断定这个角在 $(0,\ \frac{\pi}{2})$，还是在 $(\frac{\pi}{2},\ \pi)$，故需转求这个角的余弦值.

〔解〕 由 $0<\arcsin\frac{3}{5}<\frac{\pi}{2}$，$0<\arcsin\frac{15}{17}<\frac{\pi}{2}$，

得 $$0<\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{15}{17}<\pi.$$

又 $$\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{15}{17}\right)$$

$$=\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{15}{17}\right)$$

$$-\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\sin\left(\arcsin\frac{15}{17}\right)$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{17}-\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{17}=-\frac{13}{85}<0,$$

所以

$$\frac{\pi}{2}<\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{15}{17}<\pi,$$

$$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{15}{17}\right)=\frac{84}{85}.$$

于是

$$\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{15}{17}=\pi-\arcsin\frac{84}{85}.$$

3. 已知 $|x|\leqslant 1$，求证：

$$\arcsin\cos\arcsin x+\arccos\sin\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

〔分析〕 本题是要证用反三角函数表示的两个角的和等于

$\frac{\pi}{2}$，自然想到恒等式

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\quad(|x|\leqslant 1)$$

但 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，这就只须证明

$$\cos\arcsin x=\sin\arccos x.$$

而上式可由 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ 及余角公式得出，于是问题得证.

〔证〕 由 $|x|\leqslant 1$ 有

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},$$

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x.$$

两边取余弦，有

$$\cos\arcsin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)$$

$$=\sin\arccos x.$$

$$|\cos\arcsin x|=|\sin\arccos x|\leqslant 1,$$

所以 $\arcsin\cos\arcsin x+\arccos\sin\arccos x=\frac{\pi}{2}.$

4. 设 $0\leqslant x\leqslant 1$，试证：$\cos(\arcsin x)<\arcsin(\cos x)$.

〔分析〕 要证 $\cos(\text{acr}\sin x)<\arcsin(\cos x)$，依概述，可化为求证代数不等式.

因左边 $=\sqrt{1-x^2}$，右边 $=\arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\frac{\pi}{2}-x$，于是原不等式化为

$$\sqrt{1-x^2}<\frac{\pi}{2}-x.$$

即

$$x+\sqrt{1-x^2}<\frac{\pi}{2}.$$

应用三角代换，令 $x=\sin\alpha$（α 为锐角），则 $\sqrt{1-x^2}=\cos\alpha$，不等式又化为

$$\sin\alpha+\cos\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

这在第一章例题 11 中已经证明，从而本题得证.

〔证〕 由 $0\leqslant x\leqslant 1$，令 $x=\sin\alpha$（α 为锐角），

则 $\sqrt{1-x^2}=\cos\alpha$.

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}<\frac{\pi}{2},$$

即

$$x+\sqrt{1-x^2}<\frac{\pi}{2},$$

$$\sqrt{1-x^2}<\frac{\pi}{2}-x.$$

但

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2},$$

$$\arcsin(\cos x)=\arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\frac{\pi}{2}-x,$$

所以

$$\cos(\arcsin x)<\arcsin(\cos x).$$

5. 求下列无穷级数的和

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{37}+\cdots+\operatorname{arc\,tg}\frac{2n+1}{n^4+2n^3+n^2+1}+\cdots.$$

〔分析〕 无穷级数求和，一般先求前 n 项的和 S_n，再取极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. 本题也不例外.

求前 n 项的和，常利用等差级数、等比级数的求和公式及

分项消项的方法．本题采用分项消项法．

因

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2n+1}{n^4+2n^3+n^2+1}=\operatorname{arc\,tg}\frac{(n+1)^2-n^2}{1+n^2(n+1)^2}$$

$$=\operatorname{arc\,tg}(n+1)^2-\operatorname{arc\,tg}n^2,$$

能表示成两个角的差，于是 Sn 容易求出，无穷级数的和也随之求出．

〔解〕 $$\operatorname{arc\,tg}\frac{2n+1}{n^4+2n^3+n^2+1}=\operatorname{arc\,tg}\frac{(n+1)^2-n^2}{1+n^2(n+1)^2}$$

$$=\operatorname{arc\,tg}(n+1)^2-\operatorname{arc\,tg}n^2,$$

所以这个无穷级数前 n 项的和是

$$Sn=(\operatorname{arc\,tg}2^2-\operatorname{arc\,tg}1^2)+(\operatorname{arc\,tg}3^2-\operatorname{arc\,tg}2^2)+\cdots$$
$$+[\operatorname{arc\,tg}(n+1)^2-\operatorname{arc\,tg}n^2]$$
$$=\operatorname{arc\,tg}(n+1)^2-\operatorname{arc\,tg}1^2.$$

它的和是

$$S=\lim_{n\to\infty}Sn=\lim_{n\to\infty}[\operatorname{arc\,tg}(n+1)^2-\operatorname{arc\,tg}1^2]$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

6．**解方程** $\cos(\pi\sin x)=\sin(\pi\cos x)$．

〔**分析**〕 将方程两边统一为同名三角函数，便于求解．

〔**解**〕 原方程可化为

$$\sin(\pi\cos x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi\sin x\right).$$

所以

$$\pi\cos x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\pi\sin x \text{ 或}$$

$$\pi\cos x=(2k+1)\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\pi\sin x\right).$$

即

$$\cos x+\sin x=2k+\frac{1}{2} \text{ 或 } \cos x-\sin x=2k+\frac{1}{2}\text{（}k\text{ 为整数）.}$$

于是

$$\cos\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4k+1}{2\sqrt{2}}.$$

但
$$\left|\cos\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant 1,$$

故

$$k=0,$$

$$\cos\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

所以

$$x=2n\pi\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}\pm\frac{\pi}{4}\text{（}n\text{ 为整数）.}$$

7．解方程 $a\cos x+b\sin x=a\cos mx+b\sin mx$

$(a\neq 0,\ b\neq 0)$.

〔分析〕 根据本题特点，应考虑引入辅助角，

$$\text{左边}=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right),$$

$$\text{右边}=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(mx-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right).$$ 于是原方程化为

$$\cos\left(x-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)=\cos\left(mx-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right).$$

便于求解.

〔解〕 因为

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right),$$

$$a\cos mx+b\sin mx=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(mx-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right),$$

所以原方程可化为

$$\cos\left(x-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)=\cos\left(mx-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right).$$

由此，得

$$mx-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}=2k\pi\pm\left(x-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right).\quad (k\ 为整数)$$

当 $m\neq\pm1$ 时，有

$$x=\frac{2}{m+1}\left(k\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)\ 或\ x=\frac{2k\pi}{m-1};$$

当 $m=1$ 时，则方程是恒等式，当 $m=-1$ 时，原方程变为 $b\sin x=-b\sin x$，其解是 $x=k\pi$.

8．解方程 $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$.

〔分析〕 方程两边化为 x 的同名三角函数，比较麻烦．可考虑将两边分别变形：

左边 $=2\sin x\cos x(2\cos x+1)$，

右边 $=\cos x(2\cos x+1)$.

方程两边有公因式，于是原方程可变形为左边是 n 个因式的积，右边是零的形式，从而化为最简三角方程求解．

〔解〕 原方程可化为

$$2\sin x\cos x(2\cos x+1)=\cos x(2\cos x+1),$$

$$\cos x(2\cos x+1)(2\sin x-1)=0,$$

$$\cos x=0\ 或\ 2\cos x+1=0\ 或\ 2\sin x-1=0,$$

所以

$$x=k\pi+\frac{\pi}{2},\quad 2k\pi\pm\frac{2\pi}{3},\quad k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}\ (k\ 为整数).$$

9．解方程 $\sin^{10}x+\cos^{10}x=\frac{29}{16}\cos^4 2x$.

〔分析〕 方程左边 $\sin x$、$\cos x$ 的次数较高，应先降次，将原方程统一成 $2x$ 的三角函数或 $4x$ 的三角函数，便于求解．

〔解法一〕 原方程可化为

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5=\frac{29}{16}\cos^4 2x,$$

$$1+10\cos^2 2x+5\cos^4 2x=29\cos^4 2x,$$

$$24\cos^4 2x-10\cos^2 2x-1=0,$$

$$(12\cos^2 2x+1)(2\cos^2 2x-1)=0.$$

但 $12\cos^2 2x+1\neq 0$，所以

$$2\cos^2 2x-1=0,$$

$$\cos 2x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

于是 $$2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4},\ 2k\pi\pm\frac{3\pi}{4}.$$

即原方程的解是 $x=k\pi\pm\frac{\pi}{8}$，$k\pi\pm\frac{3\pi}{8}$ (k 为整数)。

〔解法二〕 原方程可化为

$$24\cos^4 2x-10\cos^2 2x-1=0,$$

又可化为

$$24\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2-10\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}-1=0.$$

即

$$6\cos^2 4x+7\cos 4x=0,$$

$$\cos 4x(6\cos 4x+7)=0.$$

但 $6\cos 4x+7\neq 0$，所以 $\cos 4x=0$，

$$4x=k\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\ (k\ 为整数).$$

10．解方程 $\sin^3 x-\sin^2 x\cos x-3\sin x\cos^2 x+3\cos^3 x=0$.

〔分析〕 这是关于 $\sin x$、$\cos x$ 的齐次方程，因 $\cos x=0$

的解不是这个方程的解，两边同除以 $\cos x$，就化为关于 $\operatorname{tg} x$ 的代数方程.

〔解〕 因 $\cos x=0$ 的解不是原方程的解，故将两边同除以 $\cos^3 x$，得

$$\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x+3=0.$$

由此，将左边因式分解得：

$$(\operatorname{tg} x-1)(\operatorname{tg}^2 x-3)=0$$

$$\operatorname{tg} x=1 \text{ 或 } \operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}.$$

所以

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4} \text{或 } x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}(k \text{ 为整数}).$$

〔附注〕 下面的几个方程，表面上虽然不是齐次方程，但是利用 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，可以将它们变成齐次方程.

(1) $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d$；

(2) $a\sin^4 x+b\sin^3 x\cos x+c\cos^3 x\sin x=d$；

(3) $a\sin^2 x+b\sin 2x+c\cos 2x+d\cos^2 x=e$.

11．解方程. $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1$.

〔分析〕 因 $\sin x+\cos x$，$\sin x-\cos x$，$\sin x\cos x$三式中，已知其中一个式子的值，其余二式的值可以求出，故本题中可引入辅助未知数：令 $t=\sin x+\cos x$ 或 $t=\sin x\cos x$.

〔解〕 令 $t=\sin x+\cos x$.

则 $$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}.$$

原方程变成

$$t^2+2t-3=0,$$

由此得 $$t=1 \text{ 或 } t=-3.$$

即

$$\sin x+\cos x=1 \text{ 或 } \sin x+\cos x=-3.$$

方程 $\sin x+\cos x=1$ 的解是

$$x=k\pi-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}(k\text{ 为整数}),$$

方程 $\sin x+\cos x=-3$ 无解.

因此，原方程的解是 $x=k\pi-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}$.

12. 解方程 $\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=1+\sin 2x$.

〔分析〕 如利用倍角公式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$，则原方程中含有 $\sin x$、$\cos x$、$\operatorname{tg}x$，不便求解．但利用 $\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}$，原方程就化为 $\operatorname{tg}x$ 的有理方程，便于求解．这种有理置换，就是通常所说的万能置换．

〔解〕 因为 $\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}$，故原方程可化为

$$\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=1+\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x},$$

$$\operatorname{tg}^2x(1+\operatorname{tg}x)=0.$$

由此得

$$\operatorname{tg}x=0 \text{ 或 } \operatorname{tg}x=-1.$$

所以

$$x=k\pi \text{ 或 } x=k\pi-\frac{\pi}{4}(k\text{ 为整数}).$$

13. 解方程 $\theta=\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}^2\theta)-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3\sin 2\theta}{5+4\cos 2\theta}$.

〔分析〕未知数含在反三角函数符号里面的方程，一般将两边取同名三角函数，化为三角方程或代数方程求解．

本题两边取正切，则原方程化为关于 $\operatorname{tg}\theta$ 的方程．但右边

比较复杂，为便于求解，先计算出右边两个角的正切．

〔解〕 设 $\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg}^2\theta)=\alpha$，$\arcsin\dfrac{3\sin 2\theta}{5+4\cos 2\theta}=\beta$，

则 $$\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}^2\theta,$$

$$\sin\beta=\frac{3\sin 2\theta}{5+4\cos 2\theta}=\frac{6\sin\theta\cos\theta}{9\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{6\operatorname{tg}\theta}{9+\operatorname{tg}^2\theta},$$

$$\cos\beta=\pm\sqrt{1-\sin^2\beta}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{6\operatorname{tg}\theta}{9+\operatorname{tg}^2\theta}\right)^2}$$

$$=\pm\frac{9-\operatorname{tg}^2\theta}{9+\operatorname{tg}^2\theta}.$$

若 $\cos\beta=\dfrac{9-\operatorname{tg}^2\theta}{9+\operatorname{tg}^2\theta}$，因 $\theta=\alpha-\dfrac{\beta}{2}$，故 $\dfrac{\beta}{2}=\alpha-\theta$．

所以 $$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{2\operatorname{tg}^2\theta}{6\operatorname{tg}\theta}=\frac{\operatorname{tg}\theta}{3}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\operatorname{tg}(\alpha-\theta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}=\frac{2\operatorname{tg}^2\theta-\operatorname{tg}\theta}{1+2\operatorname{tg}^3\theta}.$$

即 $$\frac{\operatorname{tg}\theta}{3}=\frac{2\operatorname{tg}^2\theta-\operatorname{tg}\theta}{1+2\operatorname{tg}^3\theta},$$

$$\operatorname{tg}\theta(1+2\operatorname{tg}^3\theta-6\operatorname{tg}\theta+3)=0,$$

$$\operatorname{tg}\theta(\operatorname{tg}\theta-1)^2(\operatorname{tg}\theta+2)=0.$$

于是有

$$\operatorname{tg}\theta=0 \text{ 或 } \operatorname{tg}\theta-1=0 \text{ 或 } \operatorname{tg}\theta+2=0.$$

所以 $\theta=k\pi$，$k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\pi+\operatorname{arc\,tg}(-2)$（$k$ 为整数）．

若 $\cos\beta=-\dfrac{9-\operatorname{tg}^2\theta}{9+\operatorname{tg}^2\theta}$，则 $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{3}{\operatorname{tg}\theta}$，于是有

$$\frac{3}{\operatorname{tg}\theta}=\frac{2\operatorname{tg}^2\theta-\operatorname{tg}\theta}{1+2\operatorname{tg}^3\theta},$$

$$3+6\operatorname{tg}^3\theta=2\operatorname{tg}^3\theta-\operatorname{tg}^2\theta,$$

$$4\operatorname{tg}^3\theta+\operatorname{tg}^2\theta+3=0,$$

$$(\operatorname{tg}\theta+1)(4\operatorname{tg}^2\theta-3\operatorname{tg}\theta+3)=0.$$

因 $4\operatorname{tg}^2\theta-3\operatorname{tg}\theta+3\neq0$，故 $\operatorname{tg}\theta+1=0$，
所以

$$\theta=k\pi-\frac{\pi}{4}.$$

即原方程的解是 $\theta=k\pi$，$k\pi\pm\frac{\pi}{4}$，$k\pi+\operatorname{arc\,tg}(-2)$．

14．解方程组
$$\begin{cases}\sin x+\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{2} & ①\\ \cos x+\cos y=\dfrac{1}{2}. & ②\end{cases}$$

〔分析〕 三角方程组的复杂性在于既含未知数多，且未知数常含在非同名三角函数之中．其一般解法不外是消去未知数或统一成同名三角函数．根据本题特点，采用和差化积的方法，可求出 $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$ 的值，从而求出 $x+y$ 的值．再用代入法，分别求出 x、y 的值．

〔解〕 由 ①、②分别得

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad ③$$

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}. \quad ④$$

③÷④，得 $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\sqrt{3}$．

所以

$$\frac{x+y}{2}=k\pi+\frac{\pi}{3}\ (k\ 为整数),$$

$$x+y=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \quad ⑤$$

由⑤，得 $$y=2k\pi+\frac{2\pi}{3}-x, \qquad ⑥$$

代入②，并化简得

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

所以

$$x-\frac{\pi}{3}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\quad (n\text{ 为整数})$$

即

$$x=2n\pi\ \text{或}\ x=2n\pi+\frac{2\pi}{3}.$$

将 x 之值代入⑥，得

$$y=2(k-n)\pi+\frac{2\pi}{3}\ \text{或}\ y=2(k-n)\pi.$$

因 k、n 都是整数，故 $k-n$ 也是整数，令 $k-n=m$，则得原方程组的解是

$$\begin{cases} x=2n\pi \\ y=2m\pi+\dfrac{2\pi}{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2n\pi+\dfrac{2\pi}{3} \\ y=2m\pi. \end{cases}$$

三、习　题

1. 求下列函数的定义域和值域：

(1) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3x-2}$;

(2) $y=\lg \operatorname{arc\,tg} x$;

(3) $y=1-2\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

(4) $y=\dfrac{1}{3}\arccos(\csc x)$.

2. a 为何值时，$\arccos a-\arccos(-a)\gtreqless 0$.

3. 计算下列各式的值：

(1) $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right)$；

(2) $\arccos\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$；

(3) $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}$；$(x<-1)$

(4) $\sin\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)+\cos(\operatorname{arc\,tg} 2\sqrt{3})$；

(5) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{3}{5}-\arccos\frac{63}{65}\right)$；

(6) $\sec\{2\arcsin[\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,ctg} x)]\}$.

4. 用反三角函数表示角：

(1) 用反余弦表示 $2\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)$；

(2) 用反正切表示 $\arccos\left(-\frac{3}{7}\right)$；

(3) 用反余弦表示 $\operatorname{arc\,tg}(-2)+\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{2}\right)$；

(4) 用反正切及反余切表示 $2\operatorname{arc\,ctg}(-2)$.

5. 求证：$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}+1)^2$.

6. 求证：$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

7. 求证：$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$.

8. 求证：$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)$

$$=\frac{2b}{a}.$$

9. 求证：$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy}\ (xy<0)$.

10. 设 $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{a-b}{b+x}}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{a-b}{b+y}}$

$$+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a-b}{b+z}}=0,$$

求证：$\begin{vmatrix} 1 & x & (a+x)\sqrt{b+x} \\ 1 & y & (a+y)\sqrt{b+y} \\ 1 & z & (a+z)\sqrt{b+z} \end{vmatrix}=0$.

11. 设 $\arccos x+\arccos y+\arccos z=\pi$，求证：

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1.$$

12. 解方程：

(1) $2\operatorname{arc\,tg}(\cos x)=\operatorname{arc\,tg}(2\csc x)$；

(2) $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x+2}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{6x+1}=\dfrac{\pi}{4}$；

(3) $\arcsin\dfrac{2}{3\sqrt{x}}-\arcsin\sqrt{1-x}=\arcsin\dfrac{1}{3}$；

(4) $\arcsin ax+\arcsin bx+\arcsin cx=\pi$

（a、b、c 均不为零）；

(5) $m\arcsin x+n\arccos x=p\ (m\neq n)$.

13. 解不等式

(1) $\arccos x>\arccos x^2$；

(2) $\arcsin x<\arcsin(1-x)$.

14. 若 a_1，a_2，…，a_n 都是正数，试求

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a_1-a_2}{1+a_1a_2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{a_2-a_3}{1+a_2a_3}$$

$$+\cdots+\operatorname{arc\,tg}\frac{a_{n-1}-a_n}{1+a_{n-1}a_n}$$

之值.

15. 试证当 $n\to\infty$ 时，

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{6}+\arcsin\frac{\sqrt{15}-\sqrt{8}}{12}+\cdots+\arcsin\left(\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}-\sqrt{n^2-1}}{n^2+n}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

16. 解下列三角方程：

(1) $\sin x\sin 7x=\sin 3x\sin 5x$；

(2) $\sin 2x\sin 5x+\sin 4x\sin 11x+\sin 9x\sin 24x=0$；

(3) $\operatorname{tg}(\pi\cos\theta)=\operatorname{ctg}(\pi\sin\theta)$；

(4) $4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{4}+8\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}\frac{x}{12}-\operatorname{tg}\frac{x}{8}$；

(5) $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x=\frac{3}{8}$；

(6) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=3$；

(7) $3-7\cos^2 x\sin x-3\sin^3 x=0$；

(8) $\sin^4 x+\cos^4 x-2\sin 2x+\frac{3}{4}\sin^2 2x=0$；

(9) $a\sin x=b\cos\frac{x}{2}$；

(10) $\sin^3\theta+\cos\theta=\sin\theta+\cos^3\theta$；

(11) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$；

(12) $\operatorname{tg}^2 x=\frac{1-\cos x}{1-\sin x}$；

(13) $2\sin x+3\operatorname{ctg}x=3+2\cos x$；

(14) $\frac{1}{2}\sin 2x=\cos 2x-\sin^2 x+1$；

(15) $6\sin^2 x+3\sin x\cos x-5\cos^2 x=2$；

(16) $\sin x+7\cos x=5$;

(17) $8\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$;

(18) $\sin^5 x-\cos^5 x=\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\sin x}$;

(19) $\left(\dfrac{\sin x}{2}\right)^{2\csc^2 x}=\dfrac{1}{4}$;

(20) $\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x-2=0$;

(21) $\cos^n x-\sin^n x=1$ (n 为自然数);

(22) $\sin^n x+\dfrac{1}{\cos^m x}=\cos^n x+\dfrac{1}{\sin^m x}$

(m、n 为正奇数);

(23) $\left(\sin\dfrac{\pi}{36}\right)^{\lg(1+\sin x)-4\lg\cos x+\lg(1-\sin x)}=4\sin^2\dfrac{19\pi}{6}$;

(24) $2^{\sqrt{6}\,\mathrm{tg}^2\theta\cos^3\theta-3\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}2\theta}=\left(\sin\dfrac{29\pi}{6}\right)^{-3}$.

$(0<\theta<2\pi)$

17. 设 a、b 都是实数，求满足方程

$$\frac{a\sin x+b}{b\cos x+a}=\frac{a\cos x+b}{b\sin x+a}$$

的实数 x.

18. 求 $x^2-2x\sin\dfrac{\pi x}{2}+1=0$ 的所有实根.

19. 设 $\cos x\cos y+1=0$，求 x、y.

20. 设 $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$，求 $\mathrm{tg}2x$.

21. 设 $0\leqslant x\leqslant\pi$，且 $\sin\dfrac{x}{2}=\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}$，求 $\mathrm{tg}\,x$ 的一切可能值.

22. 求 $\mathrm{tg}\left[5\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right]=1$ 的正根.

23. 设 $4\sin^2\alpha-7\sin\alpha\cos\alpha+2=0$，求 $1+\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^3\alpha+\cdots$的和.

24. 设四正数 a、b、m、n 成递增等差数列，试解方程

$$\sin ax\sin bx=\sin mx\sin nx.$$

25. 不查表，求出 $-\frac{7}{4}<x<-\frac{1}{2}$之间满足下式的所有 x 的值：

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\cos x+\sin 6x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\cos 3x+\sin 8x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

26. 解方程组：

(1) $\begin{cases} x+y=\dfrac{5\pi}{6} & ① \\ \cos^2x+\cos^2y=\dfrac{1}{4}; & ② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \mathrm{tg}\,x=\mathrm{tg}^3y & ① \\ \sin x=\cos 2y; & ② \end{cases}$

(3) $\cos(\pi xy)=\log_5(x^2+y^2)=1$;

(4) $\begin{cases} 2^{\sin x+\cos y}=1, \\ 16^{\sin^2x+\cos^2y}=4; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x+y+z=\pi & ① \\ \mathrm{tg}\,x=\dfrac{\mathrm{tg}\,y}{2}=\dfrac{\mathrm{tg}\,z}{3}. & ② \end{cases}$

27. 消去下面方程组中的 x、y：

$\begin{cases} m\sin x\cos y=a; & ① \\ n\sin x\sin y=b; & ② \\ l\cos x=c. & ③ \end{cases}$

28. 解不等式：

(1) $\sin x+\cos 2x>1$;

(2) $\sin x>\cos^2 x$;

(3) $\operatorname{tg} x>\cos x$;

(4) $\cos^3 x\cos 3x-\sin^3 x\sin 3x>\frac{5}{8}$.

29. 方程 $x^2-(\sqrt{8}\sin\theta)x+3\sin\theta-1=0$ (1)有不等实数根，(2)有相等实数根，分别求出 θ 的值.

30. 求出在 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 内且满足下列条件的实数 x:

$$2\cos x\leqslant\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|\leqslant\sqrt{2}.$$

四、习 题 解 答

1. (1) $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant\frac{3}{5}$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$;

(2) $x>0$, $-\infty<y<\lg\frac{\pi}{2}$;

(3) $-\infty<x<+\infty$, $1-2\pi\leqslant y\leqslant 1$;

(4) $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ (k 为整数), $y=0$, $\frac{\pi}{3}$.

2. $\arccos a-\arccos(-a)=\arccos a-(\pi-\arccos a)$

$$=2\arccos a-\pi.$$

若 $\arccos a-\arccos(-a)\gtreqless 0$,

则

$$\arccos a\gtreqless\frac{\pi}{2},$$

于是

$$a\lesseqgtr 0.$$

3. (1) $\arcsin\sin\frac{7\pi}{4}=\arcsin\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$= -\arcsin\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4};$$

(2) $\arccos\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \arccos\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3};$

(3) 因为

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{x + \frac{1-x}{1+x}}{1 - x\cdot\frac{1-x}{1+x}} = 1,$$

又由 $x<-1$ 有

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg} x<0, \quad -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}<0,$$

所以

$$-\pi<\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}<0,$$

$\therefore$ $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x} = -\frac{3\pi}{4}.$

(4) $\sin\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right) + \cos(\operatorname{arc\,tg}2\sqrt{3})$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}2\sqrt{3})}}$$

$$= \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{1+(2\sqrt{3})^2}}$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$= \frac{39+5\sqrt{13}}{65};$$

(5) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{3}{5} - \arccos\frac{63}{65}\right)$

$$=\frac{1-\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}-\operatorname{arc}\cos\frac{63}{65}\right)}{\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}-\operatorname{arc}\cos\frac{63}{65}\right)}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{63}{65}+\frac{3}{5}\cdot\frac{16}{65}\right)}{\frac{3}{5}\cdot\frac{63}{65}-\frac{4}{5}\cdot\frac{16}{65}}$$

$$=\frac{1}{5}.$$

(6) $\sec\{2\operatorname{arc}\sin[\operatorname{tg}(\operatorname{arc}\operatorname{ctg}x)]\}$

$$=\sec\left(2\operatorname{arc}\sin\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{1-2\sin^2\left(\operatorname{arc}\sin\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{x^2}{x^2-2}.$$

4. (1) $\cos\left[2\operatorname{arc}\sin\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$

$$=1-2\sin^2\left[\operatorname{arc}\sin\left(-\frac{5}{13}\right)\right]=\frac{119}{169}>0,$$

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc}\sin\left(-\frac{5}{13}\right)<0,$$

所以

$$-\pi<2\operatorname{arc}\sin\left(-\frac{5}{13}\right)<0,$$

$$2\operatorname{arc}\sin\left(-\frac{5}{13}\right)=-\operatorname{arc}\cos\frac{119}{169};$$

(2) $\operatorname{tg}\left[\arccos\left(-\frac{3}{7}\right)\right]=\dfrac{\sqrt{1-\left(-\frac{3}{7}\right)^{2}}}{-\frac{3}{7}}=-\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$,

$$\frac{\pi}{2}<\arccos\left(-\frac{3}{7}\right)<\pi,$$

所以

$$\begin{aligned}\arccos\left(-\frac{3}{7}\right)&=\pi+\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)\\&=\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{10}}{3};\end{aligned}$$

(3) $\cos\left[\operatorname{arc\,tg}(-2)+\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

$$\begin{aligned}&=\cos[\operatorname{arc\,tg}(-2)]\cos\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\\&-\sin[\operatorname{arc\,tg}(-2)]\sin\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{1+(-2)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}-\frac{-2}{\sqrt{1+(-2)^2}}\\&\cdot\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}=0.\end{aligned}$$

又

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg}(-2)<0,\quad -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{2}\right)<0,$$

所以

$$-\pi<\operatorname{arc\,tg}(-2)+\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{2}\right)<0,$$

$$\operatorname{arc\,tg}(-2)+\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\arccos 0.$$

(4) $\operatorname{tg}[2\operatorname{arc\,ctg}(-2)]=\dfrac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,ctg}(-2))}{1-\operatorname{tg}^2[\operatorname{arcctg}(-2)]}$

$$=\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{4}{3}.$$

因为

$$\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,ctg}(-2)<\pi,$$

所以

$$\pi<2\operatorname{arc\,ctg}(-2)<2\pi,$$

$$2\operatorname{arc\,ctg}(-2)=2\pi+\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{4}{3}\right)=2\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}.$$

$$\operatorname{ctg}[2\operatorname{arc\,ctg}(-2)]=\frac{1}{\operatorname{tg}[2\operatorname{arc\,ctg}(-2)]}=-\frac{3}{4},$$

所以

$$2\operatorname{arc\,ctg}(-2)=\pi+\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{3}{4}\right)=2\pi-\operatorname{arc\,ctg}\frac{3}{4}.$$

5. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2.$$

又

$$0<\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}<\operatorname{arc\,tg}1=\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{\pi}{4}<\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)^2.$$

6. $$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}=\operatorname{arctg}\frac{4}{7},$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}}=\operatorname{arctg}\frac{3}{11},$$

$$\operatorname{arctg}\frac{4}{7}+\operatorname{arctg}\frac{3}{11}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{11}}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4},$$

所以

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.$$

7. 设 $\arcsin\frac{4}{5}=\alpha$, $\arcsin\frac{5}{13}=\beta$, $\arcsin\frac{16}{65}=\gamma$,

则

$$\sin\alpha=\frac{4}{5},\quad \sin\beta=\frac{5}{13},\quad \sin\gamma=\frac{16}{65}.$$

$$0<\alpha<\frac{\pi}{3},\quad 0<\beta<\frac{\pi}{6},\quad 0<\gamma<\frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\cos\alpha=\frac{3}{5},\quad \cos\beta=\frac{12}{13},\quad \cos\gamma=\frac{63}{65}.$$

所以

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{63}{65}.\end{aligned}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\gamma.$$

$$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}.$$

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}.$$

8. 因为

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)=\frac{1-\cos\left(\arccos\frac{a}{b}\right)}{\sin\left(\arccos\frac{a}{b}\right)}$$

$$=\frac{1-\frac{a}{b}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}}=\pm\frac{b-a}{\sqrt{b^2-a^2}}.$$

所以

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)}+\frac{1-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)}$$

$$=\frac{1\pm\frac{b-a}{\sqrt{b^2-a^2}}}{1\mp\frac{b-a}{\sqrt{b^2-a^2}}}+\frac{1\mp\frac{b-a}{\sqrt{b^2-a^2}}}{1\pm\frac{b-a}{\sqrt{b^2-a^2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{b^2-a^2}\pm(b-a)}{\sqrt{b^2-a^2}\mp(b-a)}+\frac{\sqrt{b^2-a^2}\mp(b-a)}{\sqrt{b^2-a^2}\pm(b-a)}$$

$$=\frac{2[b^2-a^2+(b-a)^2]}{b^2-a^2-(b-a)^2}$$

$$=\frac{4b(b-a)}{2a(b-a)}=\frac{2b}{a}.$$

9. $\operatorname{tg}(\operatorname{arc tg} x+\operatorname{arc tg} y)=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc tg} x)+\operatorname{tg}(\operatorname{arc tg} y)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arc tg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{arc tg} y)}$

$$=\frac{x+y}{1-xy}.$$

又当 $xy<0$ 时有

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc tg} x+\operatorname{arc tg} y<\frac{\pi}{2}.$$

所以，当 $xy<0$ 时，

$$\operatorname{arc tg} x+\operatorname{arc tg} y=\operatorname{arc tg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

10. 依题设有

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc tg}\sqrt{\frac{a-b}{b+x}}+\operatorname{arc tg}\sqrt{\frac{a-b}{b+y}}\right)$$

$$=\operatorname{tg}\left(-\operatorname{arc tg}\sqrt{\frac{a-b}{b+z}}\right),$$

$$\frac{\sqrt{\frac{a-b}{b+x}}+\sqrt{\frac{a-b}{b+y}}}{1-\sqrt{\frac{a-b}{b+x}}\cdot\sqrt{\frac{a-b}{b+y}}}=-\sqrt{\frac{a-b}{b+z}},$$

化简，得$\sqrt{(b+x)(b+y)}+\sqrt{(b+y)(b+z)}$

$$+\sqrt{(b+z)(b+x)}=a-b.$$

$$t=\sqrt{b+x},\quad u=\sqrt{b+y},\quad v=\sqrt{b+z},$$

则

$$tu+uv+vt=a-b.$$

所以

$$\begin{vmatrix}1 & x & (a+x)\sqrt{b+x}\\ 1 & y & (a+y)\sqrt{b+y}\\ 1 & z & (a+z)\sqrt{b+z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & t^2-b & (t^2+a-b)t\\ 1 & u^2-b & (u^2+a-b)u\\ 1 & v^2-b & (v^2+a-b)v\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & t^2 & t^3+(a-b)t \\ 1 & u^2 & u^3+(a-b)u \\ 1 & v^2 & v^3+(a-b)v \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & t^2 & t^3 \\ 1 & u^2 & u^3 \\ 1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix}+(a-b)\begin{vmatrix} 1 & t^2 & t \\ 1 & u^2 & u \\ 1 & v^2 & v \end{vmatrix}=0.$$

11．设 $\arccos x=\alpha$，$\arccos y=\beta$，$\arccos z=\gamma$，

则 $x=\cos\alpha$，$y=\cos\beta$，$z=\cos\gamma$，

$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$.

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$，

所以

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2+2xyz \\
&=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\
&=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha+1+\cos2\beta+2\cos^2\gamma)+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\
&=1+\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta+2\cos^2\gamma)+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\
&=1+\frac{1}{2}[2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\cos^2(\alpha+\beta)] \\
&\quad+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\
&=1+\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)] \\
&\quad+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\
&=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\
&=1.
\end{aligned}$$

12．(1) 两边取正切，原方程可化为

$$\frac{2\cos x}{1-\cos^2 x}=\frac{2}{\sin x},$$

即

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin x}.$$

所以

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\text{ 为整数}).$$

(2) 原方程可化为

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+2}=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{6x+1}.$$

两边取正切，可得

$$\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+2}}{1-\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x+2}}=\frac{1-\dfrac{1}{6x+1}}{1+\dfrac{1}{6x+1}},$$

化简为 $3x^3-11x-2=0.$

$$(x-2)(3x^2+6x+1)=0.$$

所以

$$x=2\text{ 或 }x=\frac{-3\pm\sqrt{6}}{3}.$$

(3) 两边取正弦，可得

$$\frac{2}{3\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3\sqrt{x}}\right)^2}\cdot\sqrt{1-x}=\frac{1}{3}.$$

化简为 $(3x-2)^2=0,$

所以

$$x=\frac{2}{3}.$$

经检验，$x=\frac{2}{3}$是原方程的根.

(4) 移项，得

$$\arcsin ax+\arcsin bx=\pi-\arcsin cx.$$

两边取正弦，可得

$$ax\sqrt{1-b^2x^2}+bx\sqrt{1-a^2x^2}=cx.$$

因 $x=0$ 显然不是原方程的解，故两边约去 x，得

$$a\sqrt{1-b^2x^2}+b\sqrt{1-a^2x^2}=c.$$

移项

$$a\sqrt{1-b^2x^2}=c-b\sqrt{1-a^2x^2}.$$

两边平方

$$a^2-a^2b^2x^2=c^2+b^2-a^2b^2x^2-2bc\sqrt{1-a^2x^2}.$$

$$2bc\sqrt{1-a^2x^2}=b^2+c^2-a^2.$$

两边再平方

$$4b^2c^2-4a^2b^2c^2x^2$$

$$=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2+2b^2c^2-2c^2a^2.$$

即

$$4a^2b^2c^2x^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4.$$

所以

$$x=\pm\frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{2abc}.$$

经检验，只有 $x=\dfrac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{2abc}$

是原方程的根.

(5) 依 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$，原方程可化为

$$m\arcsin x+n\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)=p,$$

$$(m-n)\arcsin x=p-\frac{n\pi}{2},$$

由 $n\neq n$，可得

$$\arcsin x=\frac{2p-n\pi}{2(m-n)}.$$

在$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{2p-n\pi}{2(m-n)}\leqslant\frac{\pi}{2}$的约束条件下可得

$$x=\sin\frac{2p-n\pi}{2(m-n)}.$$

13. (1) 由于 $\arccos x$ 是减函数，又不等式两边的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$。于是原不等式可化为

$$\begin{cases}x<x^2\\ -1\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

解这个不等式组，得 $-1\leqslant x<0$.

(2) 由于 $\arcsin x$ 是增函数，它的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$，所以原不等式化为

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant 1-x\leqslant 1\\ x<1-x.\end{cases}$$

解这个不等式组，得 $0\leqslant x<\frac{1}{2}$.

14. 当 x、y 都是正数时，有

$$\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{arc\,tg} y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy}.$$

a_1, a_2, …, a_n 都是正数，

所以

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a_1-a_2}{1+a_1a_2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{a_2-a_3}{1+a_2a_3}+\cdots+\operatorname{arc\,tg}\frac{a_{n-1}-a_n}{1+a_{n-1}a_n}$$

$$=(\operatorname{arc\,tg} a_1-\operatorname{arc\,tg} a_2)+(\operatorname{arc\,tg} a_2-\operatorname{arc\,tg} a_3)+\cdots$$

$$+(\operatorname{arc\,tg} a_{n-1}-\operatorname{arc\,tg} a_n)$$

$$=\operatorname{arc\,tg} a_1-\operatorname{arc\,tg} a_n$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{a_1-a_n}{1+a_1a_n}.$$

15. 因为

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}-\sqrt{n^2-1}}{n^2+n}\right)$$

$$=\arcsin\left(\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}-\frac{1}{n+1}\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right)$$

$$=\arcsin\frac{1}{n}-\arcsin\frac{1}{n+1},$$

所以

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{6}$$

$$+\arcsin\frac{\sqrt{15}-\sqrt{8}}{12}+\cdots$$

$$+\arcsin\left(\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}-\sqrt{n^2-1}}{n^2+n}\right)$$

$$=\left(\arcsin 1-\arcsin\frac{1}{2}\right)+\left(\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin\frac{1}{3}\right)$$

$$+\left(\arcsin\frac{1}{3}-\arcsin\frac{1}{4}\right)$$

$$+\cdots+\left(\arcsin\frac{1}{n}-\arcsin\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\arcsin 1-\arcsin\frac{1}{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{1}{n+1}=\arcsin 0=0,\quad \arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

所以

当 $n\to\infty$ 时，原式 $=\frac{\pi}{2}$.

16. (1) 原方程可化为

$$\frac{1}{2}(\cos 6x-\cos 8x)=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 8x).$$

$$\cos 6x=\cos 2x.$$

所以

$$6x=2k\pi\pm2x,$$

$$x=\frac{k\pi}{2}\text{ 或 }x=\frac{k\pi}{4}\ (k\text{ 为整数}).$$

(2) 原方程可化为

$$\frac{1}{2}(\cos3x-\cos7x)+\frac{1}{2}(\cos7x-\cos15x)$$

$$+\frac{1}{2}(\cos15x-\cos33x)=0,$$

$$\cos33x=\cos3x,$$

所以

$$33x=2k\pi\pm3x,$$

$$x=\frac{k\pi}{15}\text{ 或 }x=\frac{k\pi}{18}\ (k\text{ 为整数})$$

(3) 原方程可化为

$$\operatorname{tg}(\pi\cos\theta)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\pi\sin\theta\right).$$

于是

$$\pi\cos\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}-\pi\sin\theta,$$

$$\sin\theta+\cos\theta=k+\frac{1}{2},$$

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2k+1}{2\sqrt{2}}\ (k\text{ 为整数}).$$

但 $\left|\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant1,$

故上式中，$k=0,\ -1.$

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

所以

$$\theta+\frac{\pi}{4}=n\pi\pm\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\theta=n\pi-\frac{\pi}{4}\pm\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}\ (n\text{ 为整数})。$$

(4) 原方程可化为

$$8\operatorname{ctg}x+4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\operatorname{tg}\frac{x}{8}=\operatorname{tg}\frac{x}{12}。$$

因为

$$8\operatorname{ctg}x+4\operatorname{tg}\frac{x}{2}=8\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+4\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{4}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

$$=4\operatorname{ctg}\frac{x}{2}。$$

$$4\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{4}=2\operatorname{ctg}\frac{x}{4},$$

$$2\operatorname{ctg}\frac{x}{4}+\operatorname{tg}\frac{x}{8}=\operatorname{ctg}\frac{x}{8}.$$

于是，原方程又可化为

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{8}=\operatorname{tg}\frac{x}{12},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{8}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{12}\right)。$$

所以

$$\frac{x}{8}=k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{x}{12},$$

$$x=\frac{24}{5}\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{12}{5}(2k+1)\pi\ (k\text{ 为整数})。$$

(5) 因为

$$\sin^3x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x),\ \cos^3x=\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x),$$

故原方程可化为

$$\frac{3}{4}(\sin x\cos 3x+\cos x\sin 3x)=\frac{3}{8},$$

即

$$\sin 4x=\frac{1}{2}$$

所以

$$4x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6},$$

$$x=\frac{k\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{24}\ (k\text{ 为整数}).$$

(6) 因为

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\operatorname{tg}x+\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=\operatorname{tg}x+\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{4\sin 2x}{2\cos 2x-1}$$

$$=\frac{\sin x(2\cos 2x-1)+4\sin 2x\cos x}{\cos x(2\cos 2x-1)}$$

$$=\frac{2\sin x\cos 2x-\sin x+4\sin 2x\cos x}{2\cos 2x\cos x-\cos x}$$

$$=\frac{\sin 3x-\sin x-\sin x+2(\sin 3x+\sin x)}{\cos 3x+\cos x-\cos x}$$

$$=\frac{3\sin 3x}{\cos 3x}=3\operatorname{tg}3x.$$

于是，原方程可化为

$$3\operatorname{tg}3x=3,$$
$$\operatorname{tg}3x=1.$$

所以

$$3x=k\pi+\frac{\pi}{4},$$
$$x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\ (k\text{ 是整数}).$$

(7) 原方程可化为

$$3-7(1-\sin^2x)\sin x-3\sin^3x=0,$$
$$4\sin^3x-7\sin x+3=0,$$
$$(\sin x-1)(2\sin x-1)(2\sin x+3)=0.$$

因为

$$2\sin x+3\neq 0,$$

所以

$$\sin x=1\text{ 或 }\sin x=\frac{1}{2},$$

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\text{ 或 }x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}\ (k\text{ 为整数}).$$

(8) 因为 $\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1=-\frac{1}{2}\sin^22x$,

所以原方程可化为

$$1-\frac{1}{2}\sin^22x-2\sin 2x+\frac{3}{4}\sin^22x=0,$$
$$\sin^22x-8\sin 2x+4=0,$$
$$\sin 2x=4\pm 2\sqrt{3}.$$

$$|\sin 2x| \leqslant 1,$$

所以

$$\sin 2x = 4 - 2\sqrt{3},$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{(-1)^k}{2} arc\sin(4 - 2\sqrt{3})\ (k\ 为整数).$$

(9) 原方程可化为

$$a \cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - b\cos\frac{x}{2} = 0,$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(2a\sin\frac{x}{2} - b\right) = 0,$$

$$\cos\frac{x}{2} = 0 \text{ 或 } 2a\sin\frac{x}{2} - b = 0.$$

方程 $\cos\frac{x}{2} = 0$ 的解是 $x = (2k+1)\pi$.

方程 $2a\sin\frac{x}{2} - b = 0$，当 $|b| > |2a|$ 时，无解；当 $|b| \leqslant |2a|$ 时，$\sin\frac{x}{2} = \frac{b}{2a}$ 有解，其解为

$$x = 2k\pi + (-1)^k 2arc\sin\frac{b}{2a}.$$

因此，原方程的解是 $x = (2k+1)\pi$

或 $\qquad x = 2k\pi + (-1)^k 2arc\sin\frac{b}{2a}$ (k 为整数).

但 $|b| \leqslant |2a|$.

(10) 原方程可化为

$\sin^3\theta - \cos^3\theta + \cos\theta - \sin\theta = 0,$

$(\sin\theta - \cos\theta)(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta - 1) = 0,$

$\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) = 0,$

$\sin\theta = 0$ 或 $\cos\theta = 0$ 或 $\sin\theta - \cos\theta = 0.$

所以

$$\theta = k\pi \text{ 或 } \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \theta = k\pi + \frac{\pi}{4} (k \text{ 为整数}).$$

(11) 原方程可化为

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \cos^2 3x = 1,$$

$$1 + \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) + \cos^2 3x = 1,$$

$$\cos x \cos 3x + \cos^2 3x = 0,$$

$$\cos 3x(\cos x + \cos 3x) = 0,$$

$$2\cos x \cos 2x \cos 3x = 0,$$

$$\cos x = 0 \text{ 或 } \cos 2x = 0 \text{ 或 } \cos 3x = 0.$$

所以

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 或 } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ 或 } x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} (k \text{ 为整数}).$$

(12) 原方程可化为

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos x}{1-\sin x},$$

$$\frac{(\cos^3 x - \sin^3 x) - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos^2 x(1-\sin x)} = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x) - (\cos x - \sin x).$$

$$(\cos x + \sin x) = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x - \sin x - \cos x) = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)(1 - \cos x)(1 - \sin x) = 0.$$

但

$$1 - \sin x \neq 0 (\text{否则，原题无意义})$$

所以

$$\cos x - \sin x = 0 \text{ 或 } 1 - \cos x = 0$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ 或 } x = 2k\pi (k \text{ 为整数}).$$

(13) 方程两边同乘以 $\sin x$，得

$2\sin^2 x+3\cos x=3\sin x+2\sin x\cos x$.

$2\sin^2 x-2\sin x\cos x+3\cos x-3\sin x=0$.

$2\sin x(\sin x-\cos x)-3(\sin x-\cos x)=0$,

$(\sin x-\cos x)(2\sin x-3)=0$.

$2\sin x-3\neq 0$,

所以

$\sin x-\cos x=0$,

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}\ (k\text{ 为整数}).$$

(14) 原方程可化为

$\sin x\cos x=2\cos^2 x-\sin^2 x$.

$\sin^2 x+\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$.

因 $\cos x=0$ 的解不是这个方程的解，两边同除以 $\cos^2 x$，得

$$\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x-2=0.$$

解之，得　$\operatorname{tg}x=1$ 或 $\operatorname{tg}x=-2$.

所以

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}\text{ 或 }x=k\pi+\operatorname{arc\,tg}(-2)\ (k\text{ 为整数}).$$

(15) 原方程可化为

$6\sin^2 x+3\sin x\cos x-5\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)$,

$4\sin^2 x+3\sin x\cos x-7\cos^2 x=0$.

因 $\cos x=0$ 的解不是这个方程的解，两边同除以 $\cos^2 x$，得

$$4\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg}x-7=0.$$

解之，得　$\operatorname{tg}x=1$ 或 $\operatorname{tg}x=-\frac{7}{4}$.

所以

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}\text{ 或 }x=k\pi+\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{7}{4}\right)\ (k\text{ 为整数}).$$

(16)原方程可化为

$$\sqrt{50}\sin(x+arc\,\mathrm{tg}7)=5,$$

$$\sin(x+arc\,\mathrm{tg}7)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

所以

$$x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{4}-arc\,\mathrm{tg}7\ (k\text{ 为整数}).$$

(17)两边同乘以 $\sin x$，得

$$4\sin2x=\sqrt{3}+\mathrm{tg}\,x.$$

根据万能置换公式，可得

$$\frac{8\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}^2x}=\sqrt{3}+\mathrm{tg}\,x,$$

$$\mathrm{tg}^3x+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2x-7\mathrm{tg}x+\sqrt{3}=0,$$

$$(\mathrm{tg}\,x-\sqrt{3})(\mathrm{tg}^2x+2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x-1)=0.$$

$$\mathrm{tg}\,x-\sqrt{3}=0\text{ 或 }\mathrm{tg}^2x+2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x-1=0.$$

由

$$\mathrm{tg}\,x-\sqrt{3}=0\text{ 得 }x=k\pi+\frac{\pi}{3}.$$

由

$$\mathrm{tg}^2x+2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x-1=0\text{ 得 }\mathrm{tg}\,x=\pm2-\sqrt{3}.$$

$$\mathrm{tg}\,2x=\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2x}=\frac{2(\pm2-\sqrt{3})}{1-(\pm2-\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以 $$2x=k\pi+\frac{\pi}{6},\quad x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}.$$

经检验，原方程的根是 $x=k\pi+\frac{\pi}{3}$， $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$ （k 为整数）.

(18) 原方程可化为

$$(\sin x-\cos x)(\sin^4 x+\sin^3 x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x$$
$$+\sin x\cos^3 x+\cos^4 x)$$
$$=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x\cos x}.$$

所以

$$\sin x-\cos x=0 \qquad ①$$

或

$$\sin x\cos x(\sin^4 x+\sin^3 x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x$$
$$+\sin x\cos^3 x+\cos^4 x)-1=0 \qquad ②$$

①的解是

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}.$$

②又可化为

$$\sin x\cos x(1-2\sin^2 x\cos^2 x+\sin x\cos x$$
$$+\sin^2 x\cos^2 x)-1=0,$$

即

$$(\sin x\cos x)^3-(\sin x\cos x)^2-\sin x\cos x+1=0,$$
$$(\sin x\cos x-1)^2(\sin x\cos x+1)=0.$$

所以

$$\sin x\cos x=1 \text{ 或 } \sin x\cos x=-1.$$

但

$$|\sin x|\leqslant 1,\quad |\cos x|\leqslant 1,$$

故仅当 $|\sin x|=|\cos x|=1$ 时，$\sin x\cos x=1$，$\sin x\cos x=-1$ 才能成立．因 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，故方程②无解．

所以，原方程的解是 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ (k 为整数)．

(19) 当 $\sin x=\pm1$ 时， 方程两边为$\left(\frac{\pm1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，

所以

$$\sin x=\pm 1 \text{ 适合原方程.}$$

又当 $\sin x=0$ 时，原方程左边无意义.

当 $\sin x\neq 0$ 时，即 $0<|\sin x|<1$ 时，原方程可化为

$$\left(\frac{\sin^2 x}{4}\right)^{\csc^2 x}=\frac{1}{4}.$$

而

$$\frac{\sin^2 x}{4}<\frac{1}{4},\quad \csc^2 x>1,$$

所以此时方程无解.

因此，适合原方程的解只有 $\sin x=\pm 1$,

$$x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\text{ 为整数}).$$

(20) 原方程可化为

$$\log_{\cos x}\sin x+\frac{1}{\log_{\cos x}\sin x}-2=0,$$

$$(\log_{\cos x}\sin x)^2-2\log_{\cos x}\sin x+1=0,$$

$$(\log_{\cos x}\sin x-1)^2=0,$$

$$\log_{\cos x}\sin x=1.$$

$$\cos x=\sin x.$$

但必须 $\sin x>0$, $\cos x>0$.

所以原方程的解是 $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$. (k 为整数)

(21) 原方程可化为 $\cos^n x=1+\sin^n x$. ①

当 n 为偶数时，因 $1+\sin^n x\geqslant 1$, $\cos^n x\leqslant 1$, 故 ① 仅当 $\sin^n x=0$ 且 $\cos^n x=1$ 时成立，即 $x=k\pi$.

当 n 为奇数时，由于 $\cos^n x\leqslant 1$, 所以 $\sin^n x\leqslant 0$.

由于 $1+\sin^n x\geqslant 0$, 所以 $\cos^n x\geqslant 0$. 故 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi$. 显

然，$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$x=2k\pi$ 是原方程的解．现在来证当 $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi$ 时，方程没有解．

令 $x'=-x$，则 $2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$，且原方程化为

$$\sin^n x'+\cos^n x'=1, \tag{②}$$

$n=1$ 时，由于 $\sin x'+\cos x'>1$，所以方程 ② 无解，从而原方程无解．

$n\geqslant 3$ 时，由于

$$\begin{aligned}1-(\sin^n x'+\cos^n x') &= (\sin^2 x'+\cos^2 x')\\ &\quad-(\sin^n x'+\cos^n x')\\ &=\sin^2 x'(1-\sin^{n-2}x')+\cos^2 x'(1-\cos^{n-2}x')>0,\end{aligned}$$

所以方程②无解，从而原方程无解．

综上所述可知：当 n 为偶数时，原方程的解是 $x=k\pi$；当 n 为奇数时，原方程的解是 $x=2k\pi$ 或 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$（k 为整数）．

(22) 显然，方程 $\sin x=\cos x$ 的解是原方程的解，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$．现在来证方程再没有别的解．将原方程化为

$$\frac{1}{\cos^m x}-\cos^n x=\frac{1}{\sin^m x}-\sin^n x. \tag{①}$$

由于 m，n 是正奇数，所以 $\sin x$，$\cos x$ 必须同号．否则，方程①两边的符号相反．

若 $\sin x<\cos x<0$ 或 $0<\sin x<\cos x$，

则

$$\sin^n x<\cos^n x,\quad \frac{1}{\cos^m x}<\frac{1}{\sin^m x},$$

$$\sin^n x+\frac{1}{\cos^m x}<\cos^n x+\frac{1}{\sin^m x}.$$

即原方程无解.

若 $\sin x>\cos x>0$ 或 $0>\sin x>\cos x$，则

$$\sin^n x>\cos^n x,\quad \frac{1}{\cos^m x}>\frac{1}{\sin^m x},$$

$$\sin^n x+\frac{1}{\cos^m x}>\cos^n x+\frac{1}{\sin^m x}.$$

原方程也无解.

综上所述可知，原方程的解是 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$（k 为整数）.

(23) 由于

$$4\sin^2\frac{19\pi}{6}=4\sin^2\frac{7\pi}{6}=4\sin^2\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1.$$

所以原方程可化为

$$\lg(1+\sin x)-4\lg\cos x+\lg(1-\sin x)=0.$$

$$\lg\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\cos^4 x}=0,$$

$$\lg\frac{1}{\cos^2 x}=0,$$

$$\cos^2 x=1.$$

因为必须 $\cos x>0$，所以

$$\cos x=1,$$

$$x=2k\pi\ (k\text{ 为整数}).$$

(24) 由于 $\left(\sin\frac{29\pi}{6}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=2^3$.

所以原方程化为

$\sqrt{6}\,\mathrm{tg}\,2\theta\cos 3\theta-3\sqrt{2}\cos 3\theta+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,2\theta=3,$

$(\sqrt{2}\cos 3\theta+1)(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,2\theta-3)=0,$

$\sqrt{2}\cos 3\theta+1=0$ 或 $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,2\theta-3=0.$

$\cos 3\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $\mathrm{tg}\,2\theta=\sqrt{3}.$

所以

$$3\theta=2k\pi\pm\frac{3\pi}{4}\ \text{或}\ 2\theta=k\pi+\frac{\pi}{3}.$$

$$\theta=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{4}\ \text{或}\ \theta=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\ (k\ \text{为整数}).$$

但 $0<\theta<2\pi$ 及 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{7\pi}{4}$ 时，$\mathrm{tg}\,2\theta$ 无意义，因此原方程的解是 $\theta=\dfrac{5\pi}{12}$，$\dfrac{11\pi}{12}$，$\dfrac{13\pi}{12}$，$\dfrac{19\pi}{12}$，$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{2\pi}{3}$，$\dfrac{7\pi}{6}$，$\dfrac{5\pi}{3}$.

17. 若 $a=0$，$b=0$，则原方程无意义.

若 $a=0$，$b\neq 0$ 或 $b=0$，$a\neq 0$，则都有

$$\sin x=\cos x,$$

这时，$x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$（k 为整数）.

若 $a\neq 0$，$b\neq 0$，则原方程可化为

$$(a\sin x+b)(b\sin x+a)$$
$$=(a\cos x+b)(b\cos x+a),$$

$$(\sin x-\cos x)[ab(\sin x+\cos x)+a^2+b^2]=0.$$

由于

$$a^2+b^2\geqslant 2ab\ \text{及}\ |\sin x+\cos x|<2,$$
$$ab(\sin x+\cos x)+a^2+b^2\neq 0,$$

所以

$$\sin x-\cos x=0,$$

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}（k 为整数）.$$

验根：将 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ 代入原方程．由于，

$$b\cos x+a=b\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)+a,$$

$$b\sin x+a=b\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)+a,$$

所以：

(1) 当 $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 k 为奇数时，分母为零，原方程无意义．故满足原方程的实数是 $x=2n\pi+\frac{\pi}{4}$（n 为整数）．

(2) 当 $\frac{a}{b}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 k 为偶数时，分母也为零，原方程无意义，故满足原方程的实数是 $x=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{4}$（$n$ 为整数）．

(3) 当 $\frac{a}{b}\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，分母不为零，$x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ 是原方程的解．

18．原方程可化为

$$x^2-2x\sin\frac{\pi x}{2}+\sin^2\frac{\pi x}{2}+\cos^2\frac{\pi x}{2}=0,$$

即

$$\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2+\cos^2\frac{\pi x}{2}=0.$$

$$x-\sin\frac{\pi x}{2}=0 \quad 且 \quad \cos\frac{\pi x}{2}=0.$$

$$x=\pm1 \text{ 且 } x=\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \cdots$$

$$x=\pm 1.$$

19. 原方程可化为

$$\cos x\cos y=-1.$$

由于

$|\cos x|\leqslant 1$，$|\cos y|\leqslant 1$，所以上式仅当 $|\cos x|=|\cos y|=1$ 且 $\cos x$，$\cos y$ 异号时成立，于是有

$$\begin{cases}\cos x=1\\ \cos y=-1\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}\cos x=-1\\ \cos y=1.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}x=2k\pi\\ y=(2l+1)\pi\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}x=(2k+1)\pi\\ y=2l\pi\end{cases}(k、l\text{都是整数})$$

20. 依题设有

$$(\sin x+\cos x)+(1+2\sin x\cos x)+(\cos^2x-\sin^2x)=0,$$

$$(\sin x+\cos x)+(\sin x+\cos x)^2$$

$$+(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=0,$$

$$(\sin x+\cos x)(2\cos x+1)=0.$$

$$\sin x+\cos x=0 \text{ 或 } 2\cos x+1=0$$

$$\operatorname{tg} x=-1 \text{ 或 } \cos x=-\frac{1}{2}.$$

当 $\operatorname{tg} x=-1$ 时，$\operatorname{tg} 2x$ 不存在；

当 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 时，$\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}$，从而 $\operatorname{tg} 2x=\pm\sqrt{3}$.

21. 由于

$$\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}$$

$$=\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|-\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|.$$

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，即 $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}$ 时，$\cos\frac{x}{2}>\sin\frac{x}{2}\geqslant 0$，

$$\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$$

$$+\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}.$$

原方程化为 $\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}$． 所以 $\sin\frac{x}{2}=0$，从而 $\operatorname{tg}x=0$.

当 $\frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi$，即 $\frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin\frac{x}{2}>\cos\frac{x}{2}\geqslant 0$，

$$\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}$$

$$+\cos\frac{x}{2}=2\cos\frac{x}{2}.$$

原方程化为 $\sin\frac{x}{2}=2\cos\frac{x}{2}$，所以

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2,$$

$$\operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2\cdot 2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}.$$

即适合条件的 $\operatorname{tg}x$ 的一切可能值为 0 和 $-\frac{4}{3}$.

22．原方程可化为

$$5\pi\left(\frac{1}{2}\right)^x=k\pi+\frac{\pi}{4}\ (k\text{ 为整数}),$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{4k+1}{20}.$$

由于 x 是正数，所以 $\frac{4k+1}{20}<1$，$k=0, 1, 2, 3, 4$.

所以

$$x=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{4k+1}{20}\right),\ k=0, 1, 2, 3, 4.$$

23．依题设有

$$4\sin^2\alpha-7\sin\alpha\cos\alpha+2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=0,$$

$$6\sin^2\alpha-7\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha=0.$$

因 $\cos\alpha=0$ 的解不是这个方程的解，两边同除以 $\cos^2\alpha$，得

$$6\,\mathrm{tg}^2\alpha-7\,\mathrm{tg}\,\alpha+2=0.$$

解之，得 $\quad \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{2}$ 或 $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2}{3}$.

所以

$$1+\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^3\alpha+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

或

$$1+\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^3\alpha+\cdots=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3.$$

24．原方程可化为

$$\cos(a-b)x-\cos(a+b)x=\cos(n-m)x-\cos(n+m)x.$$

由于 a、b、m、n 成等差数列，

所以

$a-b=m-n$，原方程又可化为

$$\cos(n+m)x=\cos(a+b)x,$$

所以

$$(n+m)x=2k\pi\pm(a+b)x.$$

$$x=\frac{2k\pi}{n+m+a+b} \text{ 或 } x=\frac{2k\pi}{n+m-a-b}.$$

又因

$a+n=b+m$，$n-b=m-a$，原方程的解又可写成

$$x=\frac{k\pi}{m+b}\text{ 或 } x=\frac{k\pi}{n-b}\ (k\text{ 为整数}).$$

25. 原方程可化为

$$\cos x+\sin 6x+\frac{\sqrt{3}}{3}=\cos 3x+\sin 8x+\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cos x-\cos 3x=\sin 8x-\sin 6x,$$

$$\sin 2x\sin x=\cos 7x\sin x.$$

由于

$-\frac{7}{4}<x<-\frac{1}{2}$，所以 $\sin x\neq 0$，于是有

$$\cos 7x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right),$$

$$7x=2k\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-2x\right).$$

$$x=\frac{2k\pi}{9}+\frac{\pi}{18}\text{ 或 } x=\frac{2k\pi}{5}-\frac{\pi}{10}\ (k\text{ 为整数}).$$

但在 $x=\frac{2k\pi}{9}+\frac{\pi}{18}$ 中，只能取 $k=-1$，-2；在 $x=\frac{2k\pi}{5}-\frac{\pi}{10}$ 中，只能取 $k=-1$. 所以原方程适合条件的解是 $x=-\frac{3\pi}{18}$，$-\frac{7\pi}{18}$，$-\frac{\pi}{2}$.

26. (1) 由②，得

$$\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 2y}{2}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 2y)=-\frac{3}{4},$$

$$\cos(x+y)\cos(x-y) = -\frac{3}{4}.$$

①代入③，得 $\cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以

$$x - y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \qquad ④$$

由①和④可得

$$\begin{cases} x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{5\pi}{12}, \\ y = -k\pi \mp \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{5\pi}{12} \end{cases} \text{（} k \text{ 为整数）.}$$

(2) 由②，得

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right),$$

于是

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2y \text{ 或 } x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} + 2y \text{（} k \text{ 为整数）.}$$

将 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2y$ 代入②，得

$$\operatorname{ctg} 2y = \operatorname{tg}^3 y.$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 y}{2\operatorname{tg} y} = \operatorname{tg}^3 y,$$

$$2\operatorname{tg}^4 y + \operatorname{tg}^2 y - 1 = 0,$$

$$(\operatorname{tg}^2 y + 1)(2\operatorname{tg}^2 y - 1) = 0.$$

由于

$\operatorname{tg}^2 y + 1 \neq 0$，所以 $2\operatorname{tg}^2 y - 1 = 0$，$\operatorname{tg} y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$y=n\pi\pm\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}\ (n\text{ 为整数}).$$

将 $x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}+2y$ 代入①，得

$$-\operatorname{ctg}2y=\operatorname{tg}^3 y$$

$$2\operatorname{tg}^4 y-\operatorname{tg}^2 y+1=0.$$

这个方程没有实数根.

因此，原方程组的解是

$$\begin{cases} x=2m\pi+\frac{\pi}{2}\mp2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y=n\pi\pm\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}\quad (m、n\text{ 为整数}).$$

(3) 由 $\log_5(x^2+y^2)=1$，得

$$x^2+y^2=5. \tag{①}$$

由 $\cos(\pi xy)=1$，得

$$\pi xy=2k\pi\ (k\text{ 为整数}). \tag{②}$$

当 $k=0$ 时，由①、②，可得

$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=\sqrt{5}; \end{cases}\quad \begin{cases} x_2=0, \\ y_2=-\sqrt{5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=\sqrt{5}, \\ y_3=0; \end{cases}\quad \begin{cases} x_4=-\sqrt{5}, \\ y_4=0. \end{cases}$$

当 $k=\pm1$ 时，由①、②，可得

$$\begin{cases} x_5=1, \\ y_5=2; \end{cases}\quad \begin{cases} x_6=1, \\ y_6=-2; \end{cases}\quad \begin{cases} x_7=-1, \\ y_7=2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_8=-1, \\ y_8=-2; \end{cases}\quad \begin{cases} x_9=2, \\ y_9=1; \end{cases}\quad \begin{cases} x_{10}=2, \\ y_{10}=-1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11}=-2, \\ y_{11}=1; \end{cases}\quad \begin{cases} x_{12}=-2, \\ y_{12}=-1. \end{cases}$$

当$|k|\geqslant 2$时，方程组①、②没有实数解.

综上所述可知，原方程组有上述12组解.

(4) 原方程组可以化为

$$\begin{cases} \sin x+\cos y=0 & ① \\ 2(\sin^2 x+\cos^2 y)=1 & ② \end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases} \sin x=\frac{1}{2} \\ \cos y=-\frac{1}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x=-\frac{1}{2} \\ \cos y=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6} \\ y=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=k\pi+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} \\ y=2n\pi\pm\frac{\pi}{3} \end{cases} (k、n\text{ 为整数}).$$

(5) 由②，得

$$\operatorname{tg} y=2\operatorname{tg} x,\quad \operatorname{tg} z=3\operatorname{tg} x.$$

由①，得 $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z=\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z$.

即

$$\operatorname{tg} x+2\operatorname{tg} x+3\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} x\cdot 2\operatorname{tg} x\cdot 3\operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{tg} x(\operatorname{tg}^2 x-1)=0,$$

$$\operatorname{tg} x=0,\quad \operatorname{tg} x=1,\quad \operatorname{tg} x=-1.$$

所以

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x=0, \\ \operatorname{tg} y=0, \\ \operatorname{tg} z=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{tg} x=1, \\ \operatorname{tg} y=2, \\ \operatorname{tg} z=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{tg} x=-1 \\ \operatorname{tg} x=-2 \\ \operatorname{tg} x=-3. \end{cases}$$

于是再由

$x+y+z=\pi$，得原方程组的解

$$\begin{cases}x=l_1\pi,\\y=m_1\pi,\\z=n_1\pi;\end{cases}\quad\begin{cases}x=l_2\pi+arc\operatorname{tg}1,\\y=m_2\pi+arc\operatorname{tg}2,\\z=n_2\pi+arc\operatorname{tg}3;\end{cases}\quad\begin{cases}x=l_3\pi-arc\operatorname{tg}1,\\y=m_3\pi-arc\operatorname{tg}2,\\z=n_3\pi-arc\operatorname{tg}3.\end{cases}$$

这里l_i、m_i、n_i（$i=1$，2，3）都是整数，且适合

$$l_1+m_1+n_1=1,$$
$$l_2+m_2+n_2=0,$$
$$l_3+m_3+n_3=2.$$

27．分别由①、②可得

$$\cos y=\frac{a}{m\sin x},\quad \sin y=\frac{b}{n\sin x}.$$

因为

$$\sin^2 y+\cos^2 y=1,$$

所以

$$\left(\frac{a}{m\sin x}\right)^2+\left(\frac{b}{n\sin x}\right)^2=1.$$

解之，得

$$\sin^2 x=\frac{a^2}{m^2}+\frac{b^2}{n^2}.$$

由③，得

$$\cos x=\frac{c}{l},\quad \cos^2 x=\frac{c^2}{l^2}.$$

再由$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，可得

$$\frac{a^2}{m^2}+\frac{b^2}{n^2}+\frac{c^2}{l^2}=1.$$

28．(1) 原不等式可化为

$$\sin x+\cos 2x-1>0,$$
$$\sin x-2\sin^2 x>0,$$
$$0<\sin x<\frac{1}{2}.$$

$$2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{6}\text{或}(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}<x<(2k+1)\pi$$

(k 为整数).

(2) 原不等式可化为

$$\sin^2 x+\sin x-1>0.$$

解之，得

$$\sin x<\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\text{或 }\sin x>\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

但 $|\sin x|\leqslant 1$，故 $\sin x<\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ 无解. 因此，原不等式的解是

$$2k\pi+\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<(2k+1)\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(k 为整数).

(3) 原不等式可化为

$$\frac{\sin x}{\cos x}>\cos x,$$

$$\frac{\sin x-\cos^2 x}{\cos x}>0,$$

$$\begin{cases}\sin x-\cos^2 x>0,\\ \cos x>0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin x-\cos^2 x<0,\\ \cos x<0.\end{cases}$$

根据(2)题可知第一个不等式组的解是 $2k\pi+\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$，第二个不等式组的解是

$$(2k+1)\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<2(k+1)\pi-\frac{\pi}{2}$$

(k 为整数).

(4) 原不等式可化为

$$\cos 4x > \frac{1}{2}.$$

解之，得

$$2k\pi - \frac{\pi}{3} < 4x < 2k\pi + \frac{\pi}{3}.$$

所以

$$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} < x < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\ (k\ 为整数).$$

29. (1) 令 $(\sqrt{8}\sin\theta)^2 - 4\cdot(3\sin\theta - 1) > 0$，得

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 > 0,$$

$$(\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 1) > 0.$$

$\sin\theta - 1 \leqslant 0$，所以 $2\sin\theta - 1 < 0$，$\sin\theta < \frac{1}{2}$.

$$(2k-1)\pi - \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{6}\ (k\ 为整数).$$

(2) 令 $(\sqrt{8}\sin\theta)^2 - 4\cdot(3\sin\theta - 1) = 0$，得

$$\sin\theta = 1\ 或\ \sin\theta = \frac{1}{2}.$$

$$\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}\ 或\ \theta = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}\ (k\ 为整数).$$

30. 原不等式可化为

$$2\cos x \leqslant \big||\sin x + \cos x| - |\sin x - \cos x|\big| \leqslant \sqrt{2}. \qquad ①$$

由 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 及 $2\cos x \leqslant \sqrt{2}$，可得 $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}$.

将区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ 分成 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$，$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$，$\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$，$\left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$，$\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$，$\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$ 等 6 个小区间，在每一个小区间内，①式都成立，因此原不等式的解是 $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}$.

后　　记

本书是在湖北省暨武汉市数学学会的组织与指导下编写的．编写此书，主要供中学生课外阅读，同时，也为中学教师提供一些教学参考材料．写就本书，整整用了一年多的业余时间．开始，曾广泛搜集有关习题一千余例，后经反复筛选，选用例题和习题 294 例，加以讲解，并加上有关基础知识，最后编成．

全书共分四章．每章包括概述、例题、习题和习题解答四个部分．概述部分对每章所涉及的基础知识作了概括的叙述．例题是每章的中心．例题的选取，注意了题型的代表性和典型性、知识的综合性、解法的技巧性．习题部分选择了各种类型的题目，供读者参考，习题答案专门用一节列出．通过以上训练，以求提高学生分析和解答数学问题的能力．

本书由车新发编写，杨挥审编．欧阳钊、叶钦桂、林家昌等参加评审．限于业务水平，本书缺点在所难免，请读者批评指正．

编　者

一九八一年三月

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝三角解题引导
作者＝车新发编
页数＝３０２
ＳＳ号＝１１０２０２４５
出版日期＝１９８１年０９月第１版

前言
目录

目　　　录