小学数学奥林匹克竞赛指南

XIAO XUE SHU XUE AO LIN PI KE JING SAI ZHI NAN

顾荣 编

山东教育出版社

小学数学奥林匹克竞赛指南

顾 荣 编

山 东 教 育 出 版 社

1992・济南

鲁新登字2号

小学数学奥林匹克竞赛指南

顾 荣 编

*

山东教育出版社出版

(济南经九路胜利大街)

山东省新华书店发行 山东人民印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 10.5印张 221千字

1992年8月第1版 1992年8月第1次印刷

印数 1—6,600

ISBN 7—5328—1386—X/G·1251

定价：2.85元

目　录

学竞赛，先后在北京、天津、上海和武汉四大城市举行。从而揭开了我国数学竞赛的序幕。1965年以后，我国数学竞赛被迫停止，1978年，数学竞赛活动，又重新在全国开展起来。

国际性的数学竞赛活动，是从1959年开始的。这一年，罗马尼亚数理学会首先发出倡议，在布加勒斯特举行第一届“国际数学奥林匹克”，得到东欧七国的积极响应。从这以后，每年举行一次国际性的数学竞赛活动。

1985年，在第26届国际数学奥林匹克中，我国首先派代表参加了这次比赛。比赛成绩居于中下。接着，在1986年，我国就正式派出自己的代表队，参加第27届国际数学奥林匹克竞赛。取得良好的好成绩：获三个一等奖，一个二等奖，一个三等奖。团体总分第四。为我国争得了荣誉。1989年，我国派出六名选手参加第三十届国际数学奥林匹克竞赛，共获四枚金牌和两枚银牌，在50个参赛国中总分第一。

数学奥林匹克竞赛不但在中学（高中和初中）举行，在小学也举行这样的竞赛。

1990年10月中国数学会普及工作委员会提出了“全国小学数学奥林匹克竞赛规则”（讨论稿）请第六次全国数学普及工作会议讨论确定。1991年全国许多省、市、县都举行了“小学数学奥林匹克竞赛活动”。这样，统筹规划了我国高中、初中、小学数学竞赛和工作，合理安排了小学数学课外活动，探讨中、小学数学教学的衔接及小学数学竞赛的内容形式和意义。为我国早期培养、发现人才开创新的篇章。

1·2 全国小学数学奥林匹克竞赛规则

（讨论稿）

全国小学数学奥林匹克竞赛是由中国数学会普及工作委员会组织，小学五、六年级学生参加的数学课外活动。

一、宗旨与原理

统筹规划我国高中、初中、小学数学竞赛和工作，合理安排小学数学课外活动，探讨中、小学数学的衔接及小学数学竞赛的内容形式和意义。竞赛将遵循：统一命题，自愿参加，早期培养，发现人才，民办公助，精简节约的原则。

二、组织机构

竞赛设组织委员会和主试委员会，分别负责竞赛的组织与命题工作。

三、竞赛时间与办法

1. 竞赛分初赛和决赛，分别在每年三月下旬第一个星期日和四月中旬的第二个星期日举行。

2. 凡接到竞赛通知并回执表示参赛的单位，组织委员会将于每年二月底以前把初赛、决赛试题及标准答案寄至参赛单位（指省、市自治区数学会普及工作委员会或地市一级教研部门），各单位可根据情况适当调整竞赛的组织办法，但有义务负责试题的保密。

3. 初赛试卷包含 20—30 个填充题，由主试委员会标明每个题目的难度，供参赛单位选用（亦可酌情删改试题）。初赛试题由组织者自行翻印，参赛名额不限，在规定日期内考试，目的是选出参加决赛的学生。

4. 凡初赛成绩超过一定分数的学生，有资格参加决赛。

5. 决赛试题包含 15 个填充题，每题 8 分，试卷满分 120 分。决赛试卷由组织委员会按规定格式自行翻印。统一设置考场，在规定日期时间内考试，并将本单位前 20 名试卷及全部参加决赛的选手成绩单，于四月底以前寄回组委会复查。

四、评奖与收费

1. 全国小学生奥林匹克竞赛拟设一、二、三等奖。获奖面占参加决赛学生总数的 3%左右。此外，另设鼓励奖若干。由参赛单位发给本地参加决赛人数 30%的学生，以上各类证书由中国数学会普及工作委员会统一印刷。

2. 参赛学生的报名费，除交纳适当的初赛试卷、决赛试卷费外，其余经费由参赛单位组织者掌握用于竞赛组织，试卷刻印，考场安排，阅卷，试卷邮资等。

中国数学会普及工作委员会

1990 年 10 月

〔注：以上意见提请第六次全国数学普及工作会议讨论确定。〕

1·3 小学数学奥林匹克竞赛大纲

（讨论稿）

为了科学合理地开展小学课外活动，为了使学生更生动活泼地全面发展，拟就几年来小学数学课外活动的有关内容提出如下“小学数学奥林匹克竞赛大纲草案”。（讨论稿）

一、计算问题

1. 基本题；

2. 运用运算性质及定律运算的问题；

3. 巧算的问题（找规律、分数问题）；

4. 估算。

二、应用题

1. 平均数；

2. 行程问题；

3. 工程问题；

4. 分数应用题；

5. 会用线段、面积等相应方法解决应用问题。

三、整数的有关问题

1. 整数概念、数的整除特征；

2. 奇偶数的性质；

3. 带余数除法与十进制表示法；

4. 质数与合数，最大公约数与最小公倍数；

5. 整数的拆分。

四、几何初步知识

1. 几何的计算与计算问题（数图形、求长度，面积与体积的问题）；

2. 几何形体的分、合、移、补的问题；

3. 动手、动脑、操作、归纳。

五、数字问题

1. 填运算符号、字母等有关的竖式与横式问题；

2. 数阵图中找规律的问题；

3. 数字串问题。

六、有关专题的内容及方法

1．分析推理问题；

2．包含排除的问题；

3．某些有规律排列的数的求和等问题；

4．数字游戏（双人对等）及最好的对策等问题；

5．简单的抽屉原则问题；

6．简单的最大与最小的问题。

七、其它。

原指较为灵活的、综合的一些问题，应注意到小学生的知识和思维特征所能达到的水平。

1·4　数学奥林匹克竞赛的意义

《全国小学数学奥林匹克竞赛规则》（讨论稿）中指出："统筹规划我国高中、初中、小学数学竞赛和工作，合理安排小学数学课外活动，探讨中、小学数学教学的衔接及小学数学竞赛的内容、形式和意义"，"早期培养，发现人才。"

我们伟大的祖国四化建设需要科学，我国的现代化建设，必须以科学为基础。数学又是发展科学的重要基础。试看，通讯卫星的上天，火箭导弹的发射，电脑的建造与运用，工业生产和农业生产的革新，医学的发展……都离不开数学，都需要大批的高水平的数学人才，我们举行数学竞赛就是发现和培养大批数学人才的好的新的途径。

我们都知道数学是中学的一门主要学科，也是我们小学课程中的一门主要课程，而小学数学又是数学的基础。我们的教师在数学教学中要面向全体学生，要大面积提高教学质量，这无疑是为提高民族素质所需要的。但是，长期的教学

实践证明，有的同学除了学好数学课本上的知识外，尚有一定的学习余力，愿意学习更多的知识，并从多条渠道自学一些课本以外的数学知识，并取得了可喜的成绩。

小学数学奥林匹克竞赛活动，正是组织小学五、六年级学生参加的数学课外活动，也正是满足这部分学有余力的同学的需要。通过小学数学奥林匹克竞赛有利于培养广大少年儿童学习数学的兴趣，发展他们的思维能力，发展他们的智力和能力。我们都知道，今天的科学家、数学家、发明家，许多是当年中小学生的数学竞赛的获奖者。当然，当年榜上无名者，也有许多人后来成为有所作为的人，因为数学修养会在一切未来的职业中显现其重要的作用。

学好课本上的知识，打好课内基础，特别是课内学习中，发展我们的思维能力，发展了我们的智慧，为课外学习创造了极为有利的条件，因此，我们首先要学好数学课本，在学习课本知识中，必须也能发展我们的学数学的兴趣。

数学竞赛越来越引起世界各国的重视，我国政府也特别重视数学竞赛活动。我国伟大的数学家华罗庚教授为我国数学的研究作出了很大的贡献。为了纪念我国杰出的数学家华罗庚教授，并且以他的名字命名的“华罗庚金杯”少年数学邀请赛，是共青团中央等单位倡导及组织的，为小学高年级及初中一、二年级学生举办的全国性数学竞赛。首届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛于 1986 年 10 月 5 日举行，全国有 150 万中小学生参加了竞赛。这也充分地说明我国政府，人民和广大少年学生都十分重视数学竞赛。无疑，这也推动了我国数学竞赛的开展。小学生数学奥林匹克竞赛的开展，使我国少年儿童的数学竞赛更加广泛、深入地发展起来。无疑，今

天参加数学竞赛的学生中，他日将涌现出一批批伟大的数学家、科学家、发明家。

1·5　怎样参加小学数学奥林匹克竞赛

我们要参加小学数学奥林匹克竞赛的愿望是好的，是值得鼓励的。但我们应该知道仅仅有美好的愿望是不够的，要把它落实到我们的学习中去，努力实现自己的愿望。伟大的作家巴金说得好："希望是人生的需要。人如果没有希望，何异江河干涸了流水?!"是的，许多科学家他们也都有自己的崇高理想。法国著名的物理学家和化学家，人们都赞誉她是一位有崇高理想和远大抱负的杰出的女科学家——居里夫人，她说："如果能追随理想而生活，本着正直自由的精神，勇往直前的毅力，诚实不自软的思想而行，则定能臻于至美至善的境地。"屠格涅夫说："生活中没有理想的人，是可怜的人。"相信我们从小就有学好数学，在奥林匹克竞赛中获胜的理想，加上勤奋、坚持，定能取得好的成绩的。

为此，我们应从如下几个方面努力：

1. 参赛前的准备工作

(1)学好课本、打好基础。

学好课本、打好基础的突出标志是能熟练地掌握数学基础知识和基本技能。

我们都知道数学竞赛题的知识覆盖面比较大，综合性强，尽管如此，但解任何一道竞赛题都离不开数学的基础知识和基本技能。试想，如果平时连数学课本都没学好的同学，怎么去解奥林匹克竞赛题呢！因此，只有透彻理解和切实掌握了全

部的小学数学教学大纲、小学数学课本里的知识，才有可能进一步学习课外数学知识，才能在竞赛时，取得好成绩。其实，只要我们上课时认真听课，独立思考课本上的问题并完成作业，注意概括整理已学的知识，在学习的过程中发展我们的思维能力，我们就完全有可能学习好课本的知识。显然，这也就为参加课外数学活动，为参加数学竞赛迈出了可喜的一步。

(2)在学习时，要肯动脑筋，善思考，找数学的解题规律；在这同时，发展我们的思维能力。

在课堂学习中，只要我们愿意动脑筋，肯动脑筋，久而久之，养成了动脑筋的良好习惯，我们就一定能在长知识的同时，长智慧。比如，学习“比例”时，教师上课时，要我们做这样的一道填空题：6∶4=(　)∶(　)，经过大家发言，得出了下面一些解：

6∶4=(3)∶(2)——►6∶4的前、后项都缩小2倍。

6∶4=(1.5)∶(1)——►6∶4的前、后项都缩小4倍。

6∶4=(1.2)∶(0.8)——►6∶4的前、后项都缩小5倍。

6∶4=(0.6)∶(0.4)——►6∶4的前、后项都缩小10倍。

……

不难发现，根据“比的基本性质”，把比的前项和后项都缩小相同的倍数，比值不变，这样，可以得到无数个解。

还可以得到这样一组解：

6∶4=(12)∶(8)——►6∶4的前、后项都扩大2倍，

6∶4=(18)∶(12)——►6∶4的前、后项都扩大3倍，

6∶4=(24)∶(16)——►6∶4的前、后项都扩大4倍，

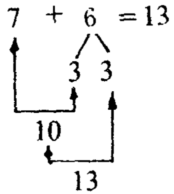
6∶4=(30)∶(20)——►6∶4的前、后项都扩大5倍。

……

显然，根据“比的基本性质”把比的前项和后项都扩大相同的倍数，比值不变。这样，也可以得无数组解。

在我们的学习过程中，只要我们有动脑筋的想法，即使是最简单的题目，同样，可以有较多的思考途径。当然，这较多的思考途径，不一定都是捷径，我认为：即使想出的解题途径是“曲径”，也比不想、不敢想、不肯想的人好上千、百倍。要知道，今天走曲径，明天走曲径，不等于后天还走曲径。千百次曲径，将建筑出一条捷径呢！

比如，小学生计算“7＋6”时，按照课本上的“模式”是用“凑十法”的思路来找解题途径的，即：



可是肯动脑筋的小学生，提出自己的思考途径：

思考途径(1)：先看这两个加数都接近 5，第一个加数比 5 多 2，第二个加数比 5 多 1 ⟶ 两个 5 相加得 10，⟶ 10 加 2(第一个加数比 5 多的 2)再加上 1(第二个加数比 5 多的 1)，即 10＋2＋1 得 13。这种用“推导的方法”计算，思维比较简捷。因为，两个 5 相加得 10，是易记的数据。接近 5 的加数，通常是 4、6、7。用推导法计算能提高速度，准确率也比较高。

思考途径(2)：〔用“减补法”计算〕即想到第二个加数 6 的补数是 4，⟶ 第一个加数 7 减去 6 的补数 4 得 3 ⟶ 3＋10 得 13。显然，这样的思考途径，有利于发展逆向思维能力，对于发展智力很有好处。

思考途径(3)：〔用“比较法”计算〕想到 6＋6 得 12 ⟶ 第一个加数 7 比 6 多 1，第二个加数 6 与第二个加数(6)相同 ⟶ 所以 7＋6 得 13。显然，这种从已知的一道算式的计算作

思维的起点，经过比较，推理，得出结果，也同样有利于发展思维能力。

除此，他们还提出了“添数法”、“数数法”……。

(3)要积极开展数学课外活动。

小学数学奥林匹克竞赛的目的就是让小学五、六年级(五年制小学的四、五年级)学生参加数学课外活动。因此，各学校要努力安排好数学课外活动。所谓安排好数学课外活动，要做好如下几点：

①固定数学课外活动时间。规定每周有1～4次的数学课外活动时间，并在活动时间内，坚持搞好课外活动——即学习数学的活动。或在教师的指导下学习，或参加者自学。

②要有专任辅导教师，有计划、有准备地开展数学课外活动的辅导工作。所谓辅导，一是有计划地统筹安排学习内容，达到师生都明确什么时间学什么内容，二是由教师分期作辅导讲座，每次讲座能突出重点、解决一个问题。比如，这次讲的是“抽屉原理问题”。通过讲座就是要掌握：什么是“抽屉原理”，“抽屉原理有几条定理”，怎样解抽屉原理方面的题目、解题的重点、难点各是什么，解题的思考途径是什么。讲解时，最好能结合具体题目、具体事例，讲深讲透。讲座最好在教室举行，或者是有黑板的活动室举行。这样，教师可以边讲边板演，达到“理论明，事理通”的要求。

每次讲座后，要在3～10天时间(即数学课外活动时间)复习、消化、理解已学的知识，当然，可以边复习知识，边演算必要的类似题目。这是复习的必要阶段。

每次讲座后，在复习的基础上，要开展练题活动。由辅导教师(或家长)提供一些与之类似的题目进行解题练习。练习

时，以独立思考解题方法为主，也可以组织必要的小组讨论，在小组内大家发表意见，互相启发，达到共同进步，都有提高的目的。遇到不懂的题目，久思不得其解，也可以求师拜友，请别人帮助。

练习时，最好能有“小学生数学奥林匹克竞赛辅导”方面的书，因为这类书，有的不但介绍思考方法，还提供了多方面的知识和较典型的各类题目。有的书还提供了较详细的思考途径，以答案的形式，附在后边，供我们解题后，互相对照。

熟能生巧(做熟练了就能有巧妙的方法)这句话是有科学道理的。同一类题目，由于编题人从各个不同的角度去考虑，因此，编出的题目也各有特点、风格。当然，我们熟练的题目多了，也就能娴熟地解各个方面的题目。参加竞赛时，解起题目来，就能做到顺手拈来。

③开展练题活动。开展练题活动的形式是多种多样的。比如，“定时定量”性的练题，即在一定的时间内，解答一定数量的题，使我们既有时间感，又有解题任务感。“分类练题”学习哪个数学问题，就练对应性的题目，巩固所学的基础知识与解题的基本技能。“综合性练题”在单一问题练习的基础上，可练综合性的题目，练“综合性题目”可以发展我们分析问题和解决问题的能力。磨练我们的意志、毅力，发展我们的思维能力。我们往往有这样的体会。若是遇上一道十分棘手的题目，久思不得其解，这时我们可能用“过电影”的方法，将自己已掌握的解题方法，逐一用来对照，仍然不得其解，想呀想，算啊算，甚至弄得满头大汗，……但一旦此题获解时，心里那股高兴的劲儿就难以形容了，真是如在九天捞到了月亮，浑身轻松、愉快。我想，每个数学爱好者，都曾做过这样甜蜜的梦的。这样的梦

境做得越多，越说明我们进步得越大，越有成就。成熟感是促使我们前进的无穷力量。

也可以开展“竞赛性练题”。由教师印发一部分选编好的题目，让同学们在固定的时间内解答，公布成绩，然后再针对解题情况组织“讲评”，重点地指导解题思路。

还可以组织小竞赛活动，通过竞赛活动，激发学习的兴趣，培养我们临场的适应能力。

④要备有“小学数学奥林匹克竞赛”方面的书。书是我们学习的工具。这样，可以比较系统地、按部就班地学习。奥林匹克竞赛辅导书的内容一般是按竞赛内容编著的。它具有系统性、科学性、可读性。

2. 怎样参加竞赛

参加小学数学奥林匹克竞赛的学生，一般是自愿报名的。报名之前一定是作了一番准备的同学。所谓准备是指积极参加数学课外活动，在学习数学方面取得了良好的开端。因此，参赛本身就意味着早有思想准备。

怎样才能使我们在竞赛中能获得好成绩呢？

(1)要有自信心。

参加奥林匹克竞赛时，心情紧张是参赛者常常发生的现象，这种现象，如不能及时得到克服，必然会影响竞赛的成绩。实践证明，参赛时，谁的情绪稳定，谁的水平就发挥得好一点，谁的心情紧张，或过分紧张，谁的水平就发挥得差一点。

我们既然参加数学奥林匹克竞赛，就要树立获胜的信心。有人问法国著名的物理学家和化学家居里夫人：“你认为成才的窍门在哪里？”居里夫人回答说：“恒心和自信力，尤其是自信力。”事实也正如此，学生在学习上的自信力，就是在学习的

实践活动中，对自己能否取得学习的成功，达到预想的目的，对各种主观条件相信程度的心理状态，它是学习成功的支柱。只有信心百倍，才会劲头十足。从而更好地调动主观能动性，使思考力、观察力、记忆力、创造力……充分得到发挥；也只有信心百倍，才能百折不挠，克服学习竞赛中的种种困难，取得学习成功。

坐在考场里，拿到试卷前，我们可以这样想，在考场的参赛者中，我比谁都强，今天考试的题目不可能太难，因为我准备了那么长的时间，学会了那么多的题目，我肯定能很好地解答，并取得优异的成绩的。接着想——教师批阅我的试卷时，笑嘻嘻的情景，连连点头，为我得满分而高兴——进一步想，公布了考试成绩，我名列前茅，我在授奖大会上，从容地走向领奖台……台下那么多观众在热烈地鼓掌……啊！获奖证书，鲜红的封面，金黄色的字，耀眼放光……这样，高兴地想下去。一直到我们拿到了试卷。有人把这种想象，称作成功的“心理图象”。心理学家研究证明，心理图象能帮助我们取得成功。美国心理学者马克斯威尔·马尔兹说：“如果我们构想自己以某种方式行事，几乎也就是实际上这么干。”他把“心理图象”的方法，称为“心理实践可以帮助我们的行为臻于完美。”

提高自信心，可以消除紧张心理。紧张心理的表现形式不同。如有的认为竞赛难，产生了不必要惧怕心理，本来能够解答的题目，由于脑子里总认为不会这么容易，明明做对了，结果改来改去，到后来反而错了。有的为了取得好成绩，赛前“开夜车”，结果是搞得头脑昏沉沉，参赛时精神振作不起来，思维迟钝，思路不畅，心情慌乱，考不出好成绩。还有的是看到试题，由于看得不细致，就认为题目容易，因此，而产生麻痹思

想，结果注意力不集中，颠三倒四，以致疏忽，考不出好成绩。

实践证明，心理过分紧张，就会造成暂时性遗忘现象。只要我们克服心理过分紧张，就可防止暂时性遗忘，就能考出好成绩。

(2)要加强心理品质的修养，认真解题。

①做好考前准备。只有我们平时学好数学，心里有了底，就必然会做赛题，没有紧张的必要。

②树立自信心，不断激励自己沉着，细心，认真，必然能考出好成绩。

③先把试卷从头至尾认真地看一遍，在此基础上，确定解题的顺序。本着先易后难的原则。这样，其实这就是合理地分配我们的注意力和合理地转移精力。

④充分运用我们已学过的解题思考方法。从严格审题，分析题中的数量关系入手。善于思考，合理联想，努力寻找关键，选好解题的突破口。

⑤从解题失误中，吸取教训，我们的目的是学得更多的数学知识。从这个意义上讲，失误倒可以激励我们进取。俗话说，“吃一堑，长一智，”是有道理的。

⑥合理分配我们的考试时间，花一定的时间把有把握做对的题目，认真做好，确保有把握的题目不失分。集中一定的精力，攻克经过努力把能够解出来的题目，做出正确的答案。

(3)组织必要的参赛后的总结。

每一次参赛，就是一次对已学知识的检验，从这里可以全面衡量我们解各类数学问题的水平。从这里总结经验，吸取教训，这样，就能达到不断提高解题能力的目的。

二 思考方法

2·1 分析综合法

思考是指比较深刻、周到的思维方法。掌握思考方法是解题的关键。我们平常所说的解题思考途径，就是从题目里寻找已知条件和所求问题之间的联系的思维过程。这种思考途径通常采用如下两种。一种是从“未知”看“需知”逐步靠拢“已知”，这种从“未知”出发，转化问题，步步逆推，执果索因的思考方法叫分析法。另一种是从“已知”看“可知”逐步推向“未知”，这种从已知出发，转化条件，步步顺推，由因导果的思考方法叫综合法。

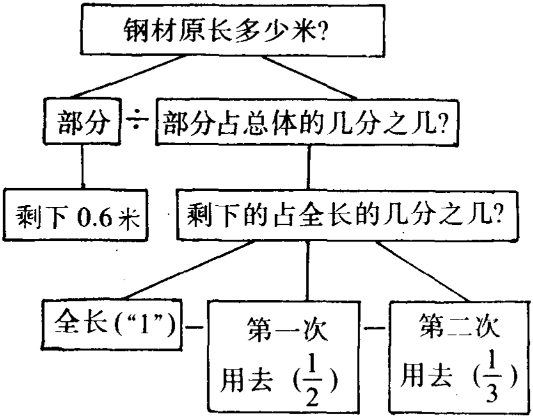
例 1 一根钢材，第一次用去全长的$\frac{1}{2}$，第二次又用去全长的$\frac{1}{3}$，最后剩下 0.6 米，求这根钢材原来的长度？

思考途径：读题，审题，分析已知条件和所求的问题。

已知条件：第一次用去全长的$\frac{1}{2}$，第二次又用去全长的$\frac{1}{3}$，剩下 0.6 米。

要求的问题：这根钢材原来长多少米？

分析法思考框图：



算式：$0.6\div(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$

$=3.6$(米)

答：这根钢材原来长是 3.6 米。

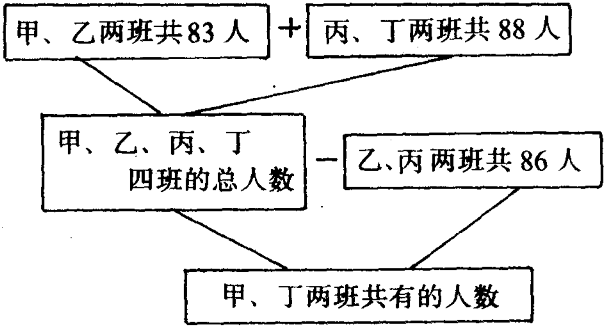
例 2 甲班和乙班共 83 人，乙班和丙班共 86 人，丙班和丁班共 88 人，问甲班和丁班共多少人？(首届"华罗庚金杯"少年数学邀请赛复赛试题)

思考途径：读题，审题，分析题中数量关系，已知条件和要求的问题。

已知条件：甲班和乙班共 83 人，乙班和丙班共 86 人，丙班和丁班共 88 人。

要求的问题：甲班和丁班共多少人？

综合法思考框图：



算式:(83+88)-86

　　=85(人)

答:甲、丁两班共有85人。

在我们实际运算的过程中,常常用分析法以及把分析与综合结合起来的思考方法,去探索解题的思考途径。实践证明,这种应用不但广泛,而且能解答一些比较复杂的应用题。只要我们肯思考,善于思考,认真分析题中的数量关系,就不难找到解答的方法。下面我们举个例子。

例3　快、中、慢三辆车同时从同一地点出发,沿同一公路追赶前面的一个骑车人。这三辆车分别用6分钟、10分钟、12分钟追上骑车人。现在知道快车每小时走24千米,中车每小时走20千米。那么,慢车每小时走多少千米?(“华罗庚金杯”少年数学邀请赛决赛试题〔第二试〕)

思考途径:首先考虑到这道题的已知条件,再进一步考虑题中要求的问题,进而分析还需要找出的隐蔽条件,从直接的条件中,推出未知的条件。从这样的分析中,通过数量关系的分析,从而基本上理清了条件与问题的关系。

这样想，已知慢车用 12 分钟追上骑车人，要求慢车每小时行多少千米，需要知道慢车在这段时间所行的路程。(分析)$\Longrightarrow$要求慢车从发车到追上骑车人所走的路程，需要知道中车追上骑车人时所走的路程，和骑车人最后 2 分钟所走的路程。(分析)$\Longrightarrow$已知中车每小时行 20 千米，用 10 分钟追上骑车人，可以求出中车追上骑车人时所走的路程。(综合)$\Longrightarrow$要求骑车人最后 2 分钟所走的路程，只需要知道骑车人的车速。(分析)$\Longrightarrow$已知骑车人从被快车追上到被中车追上相隔 $10-6=4$ 分钟，要求骑车人的车速，只需要知道在这段时间内他所行的路程。(分析)$\Longrightarrow$已知快车每小时行 24 千米，可求出快车 6 分钟行的路程。(综合)$\Longrightarrow$算出了快车 6 分钟行的路程和中车 10 分钟行的路程，可以求出骑车人相继被快车和中车追上相隔的 2 分钟内所行的路程。(综合)

分步列式：快车 6 分钟行的路程是：

$$24\times\frac{6}{60}=\frac{12}{5}(\text{千米})$$

中车 10 分钟行的路程是：

$$20\times\frac{10}{60}=\frac{10}{3}(\text{千米})$$

推理：骑车人在 4(10−6)分钟内走的路程是：

$$\frac{10}{3}-\frac{12}{5}=\frac{14}{15}(\text{千米})$$

骑车人的速度是每小时

$$\frac{14}{15}\div(\frac{10}{60}-\frac{6}{60})=14(\text{千米})$$

他从被中车追上到被慢车追上相隔 2(12−10)分钟，在这段时间里，他走的路程是：

$$14\times(\frac{12}{60}-\frac{10}{60})=14\times\frac{1}{30}=\frac{7}{15}(千米)$$

推理，慢车追上骑车人时，共行的路程是：

$$\frac{10}{3}+\frac{7}{15}=\frac{19}{5}(千米)$$

所以，慢车每小时的速度是：

$$\frac{19}{5}\div\frac{12}{60}=19(千米)$$

综上所述，可列如下综合算式：

$$\{[(20\times\frac{10}{60}-24\times\frac{6}{60})\div(\frac{10}{60}-\frac{6}{60})]\times(\frac{12}{60}-\frac{10}{60})$$

$$+20\times\frac{10}{60}\}\div\frac{12}{60}$$

$$=\{14\times\frac{1}{30}+20\times\frac{10}{60}\}\div\frac{12}{60}$$

$$=\frac{19}{5}\div\frac{12}{60}$$

$$=19(千米)$$

答：慢车每小时行 19 千米。

2·2 列 举 法

我们在解某些数字题时，时常有这样的一个感觉，就是很难列出算式或列方程式求解。在这样的情况下，可把题目中的已知条件进行整理，分类排列，对应地表示出相应的情况。可以根据题目的要求，把可能的答案一一列举出来，再进一步根据题目的条件逐步排除非解或缩小范围，进而筛选出题目的答案，我们把这种解题方法叫做列举法。

例 1　一个数是 5 个 2，3 个 3，2 个 5，1 个 7 的连乘积，这个数当然有许多约数是两位数，在这些两位约数中，最大的是几？(首届"华罗庚金杯"少年数学邀请赛决赛试题)

思考途径：题中所给的数是 $2^5\times3^3\times5^2\times7$。

因为题目要求的约数是两位数，所以它小于或等于 99。

因为 99 有质因数 11，所以它不是已知数的约数。

因为 98 含有两个质因数 7，所以也不是所求的两位约数。

97 是质数，也不是已知数的约数。

$96=3\times2^5$，所以是这个数最大的两位约数。

例 2　营业员有 2 分和 5 分两种硬币，他要找给顾客 5 角钱，有几种找法？(写出找的方法)(《小学生学习报》1987 年赛题)

思考途径：解题时如果用凑数的方法，想好一种方法就写一个，很容易出现遗漏或重复的情况。 ⟶ 但遵循一定的顺序先排 5 分的，再排 2 分的，就比较科学。为此，想到用列表的方法，可很快地找出如下几种找法。

5 分币(个)	2 分币(个)	
10	0	……………………… 找法(1)
8	5	……………………… 找法(2)
6	10	……………………… 找法(3)
4	15	……………………… 找法(4)
2	20	……………………… 找法(5)
0	25	……………………… 找法(6)

所以，营业员有 6 种找法。

例 3 已知蟋蟀有 6 只脚，蜘蛛有 8 只脚，一个盒子里的蟋蟀与蜘蛛共有 46 只脚，问蟋蟀与蜘蛛各有多少只？

思考途径：因为蟋蟀与蜘蛛共有 46 只脚，所以蜘蛛的只数不能超过 5 只。要是有 6 只蜘蛛就应该有 48 只脚。$(8\times 6=48)$

如果有 5 只蜘蛛，应有 40 只脚，1 只蟋蟀 6 只脚。（符合题意）…………………………………………………………（1）

如果有 4 只蜘蛛，应有 32 只脚，2 只蟋蟀共有 12 只脚。（不符合题意）…………………………………………………（2）

如果有 3 只蜘蛛，应有 24 只脚，3 只蟋蟀共有 18 只脚。（不符合题意）…………………………………………………（3）

如果有 2 只蜘蛛，应有 16 只脚，4 只蟋蟀共有 24 只脚。（不符合题意）…………………………………………………（4）

如果有 2 只蜘蛛，应有 16 只脚，5 只蟋蟀共有 30 只脚。（符合题意）……………………………………………………（5）

如果有 1 只蜘蛛，应有 8 只脚，$46-8=38$　38 不能被 6 整除。（不符合题意）…………………………………………（6）

2・3　归纳递推法

归纳推理或称归纳法，是从一般到特殊的推理方法。归纳法一般分为不完全归纳和完全归纳两类。

不完全归纳法，从事物的一个或几个特殊情况作出一般结论的推理方法叫做不完全归纳法。例如，从 $30\times 50=50\times 30$，$12\times 5=5\times 12$、$400\times 20=20\times 400$ 等几个特殊的等式，得

出乘法交换律；从$\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$，$\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$等几个特殊分数相等的情况，得出分数的基本性质。都是运用了不完全归纳法。用不完全归纳法得出的结论，有时是正确的，有时是错误的。比如，从63能被3整除，153能被3整除，273能被3整除这三个特殊的情况，得出“个位上的数是3的整数都能被3整除”的结论，就是错误的。所以，用不完全归纳法得出的结论，还必须用其他方法进行证明，才能肯定是正确的。尽管用不完全归纳法得出的结论不一定正确，但是它能为人们探索真理、发现规律提出设想和提供线索，因此这种方法在科学研究中仍有重要的价值。

完全归纳法，在列举对象的一切特殊情况，并进行一一考察之后，得出关于全部对象的一般结论的推理方法叫完全归纳法。由于完全归纳法考察了全部对象的一切情况，所以它的结论是一定正确的。但是这种方法只适用于所考察的对象比较少的情况，如果所考察的对象很多时，应用本法就比较繁多，甚至不能应用。

某些与自然数有关的问题的解答，常要依据自然数由小到大的顺序，列出问题的几个特殊情况进行试探，并逐一观察、分析、比较，找出它们之间的关系，特别是其间的递推关系，由此归纳出一般性的规律，然后，再根据发现的规律求出问题的解答。这种解题方法我们称为归纳递推法。

例1 若干个同样的盒子排成一排，小明把五十多个同样的棋子分装在盒中，其中只有一个盒子没有装棋子，然后他外出了。小光从每个有棋子的盒子里各拿一个棋子放在空盒

内，再把盒子重新排一下。小明回来仔细查看一番，没有人动过这些盒子和棋子。问共有多少个盒子？（“华罗庚金杯”决赛题）

思考途径：根据题意可进行如下推理：小光从每个有棋子的盒子里各拿一个棋子放在空盒内，而小明没有发现有人动过这些棋子和盒子。由此，可见现在又出现了一个空盒子，这个空盒子是原来装一个棋子的盒子。

即是说，经小光操作后，原来装 2 个棋子的盒子，现在变成了装一个棋子的盒子，原来装 3 个棋子的盒子，现在变成了装 2 个棋子的盒子，同理，原来装 4 子棋子的盒子，现在变成了装 3 个棋子的盒子，……以此递推，小明原来在各个盒子里装的棋子数从少到多，依次的情况是：

0，1，2，3，4，……

根据这个规律，我们试算它们的和。

试算式如下：

$0+1+2+3+\cdots\cdots+9=45$

$0+1+2+3+\cdots\cdots+9+10=55$

$0+1+2+3+\cdots\cdots+9+10+11=66$

可知，第二种情况为本题的解，即盒子数应是 11 个。

例 2 今有鸡和兔同笼，共有 35 个头，共有 94 只脚，问鸡和兔各是多少只？

思考途径：从题目的条件中看出鸡和兔共 35 只，因此，如果能求出鸡（或兔）的只数，兔（或鸡）的只数也就能知道了。而它们的只数都在 0～35 之中。

我们作如下的探索：

(1)如果鸡是 0 只,那么兔是 35 只,它们的总脚数是 140 只。即 $4\times35=140$(只)

(2)如果鸡是 1 只,那么兔是 34 只,它们的总脚数是:

$2\times1+4\times34=2+136=138$(只)

(3)如果鸡是 2 只,那么兔是 33 只,它们的总脚数是:

$2\times2+4\times33=4+132=136$(只)

(4)如果鸡是 3 只,那么兔是 32 只,它们的总脚数是:

$2\times3+4\times32=6+128=134$(只)

……

如果继续这样试探下去,要得出答案是很繁琐的。但我们从上面试探的四次数据中发现,当鸡增加 1 只,兔数同时减少 1 只时,总脚数就减少 2 只。

根据这个规律,推想:如果鸡的只数是 0 只时,总脚时是 140 只,比已知条件 94 只多 46 只,所以,要使总脚数减少 46 只,鸡的只数必须从 0 只增加到 $46\div2=23$(只)

兔的只数是:$35-23=12$(只)

例 3 81 只乒乓球有 1 只次品(较轻),用一个天平,最少需称几次就能找出次品?

思考途径:首先我们考虑一次最多能从几只球中找出次品。

显然,最多是三只,即我们在天平两端各放一只球,如果平衡,那么剩下的那一只是次品,如果不平衡,轻的是次品。

类似这样的称法,称两次就能从 $3\times3=9$(只)球中找出那只次品;三次能从 $9\times3=27$(只)球中找出那次品。

所以,要从 81 只球中找出哪只较轻的次品球,在天平上

称四次就可以了。

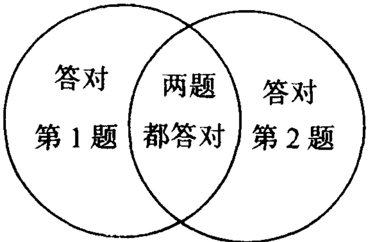
2·4 类 比 法

“类比法”又叫“类比推理”。是根据两个对象有一部分属性相类似，从而推出这两个对象的其它属性也相类似的思维过程。它是一种从特殊到特殊的推理方法。例如，由两位数加两位数的法则推出多位数加法法则。就应用了类比推理。

类比推理不是证明，由类比推理得出的结论，只能作为猜想或假设，它的真实性还要用其它方法论证。但是类比推理和不完全归纳法一样，可以为探索真理提供线索，也是进行科学研究的一种重要的方法。例如，人们从锯齿草得到启发，类比创造发明了锯子。

例 1　在有 40 名学生的班里进行算术测验，测验题有 2 道，答对第 1 题的有 25 人，答对第 2 题的有 28 人。回答下面的问题：(1)两道题都答对的学生最多、最少能有几人？(2)如果答对第 1 题得 4 分，答对第 2 题得 6 分，那么这个班级的平均分数是多少？（日本小学数学试题）

思考途径：根据题意可作下面的图帮助思考，分析所求的问题。



共 40 名

如果答对第1题的同学没有一名答对第2题，那么这两道题答对的同学就应该共有：

$25+28=53$（人）

但是，题中告诉我们全班是40人，所以答对两题的同学最少有：$53-40=13$（人）

因为答对两道题的同学一定是在答对第1题或答对第2题的人中，所以，答对第1题的25人，如果全部同时也答对第2题，就是答对两题的所有可能中最多的情况。

班级的平均分数，容易由答对第1题的总得分与答对第2题的总得分的和除以全班总人数而求得是6.7分

例2 张老师为学校图书室买课外书，他带去的钱可以买15本科技书或24本故事书。如果张老师买了10本科技书后，剩下的钱全部买故事书，还可以买几本故事书？

思考途径：我们可以把买书的总钱数理解为总工作量，把带的钱可买15本科技书或24本故事书理解为甲、乙两个单独完成总工作量各需15天、24天。那么，联想到这样一道工程问题："一项工程，甲做15天完成，乙做24天完成，现在甲先做10天后，再由乙接着做，问还需要多少天才能完成？"如果我们撇开题的事件性内容，那么，这道工程问题的结构和原题是完全一致的。从而，得出原题的解答方法。即：

$$\left(1-\frac{1}{15}\times 10\right)\div\frac{1}{24}$$
$$=\frac{1}{3}\div\frac{1}{24}$$
$$=8\text{（本）}$$

答：可买8本故事书。

例 3 甲、乙、丙三个油桶，各盛油若干千克，先从甲桶倒油入乙、丙两桶，使乙、丙两桶各增加原有油的一倍；再从乙桶倒油入丙、甲两桶，使丙、甲两桶，各增加原有油的一倍；最后，从丙桶倒油入甲、乙两桶，使甲、乙两桶各增加原有油的一倍。这样，各桶里的油都是 48 千克。问各桶原来分别盛油多少千克？

思考途径：我们根据题目的特点，联想到“还原问题”的解法。

我们可以这样想：第三次倒油后，甲、乙、丙三只桶里的油一样多，都是 48 千克。所以，在这之前（即丙桶未倒油入甲、乙两桶之前）

甲桶有油：$48\div2=24$（千克）

乙桶有油：$48\div2=24$（千克）

丙桶有油：$48+24+24=96$（千克）

进而推想：在第二次倒油之前，即乙桶未倒油入丙、甲两桶油之前。

甲桶有油：$24\div2=12$（千克）

丙桶有油：$96\div2=48$（千克）

乙桶有油：$24+12+48=84$（千克）

我们继续向前推理，想到在第一次倒油前，即甲桶未倒油入乙、丙两桶油之前。

乙桶有油：$84\div2=42$（千克）

丙桶有油：$48\div2=24$（千克）

甲桶有油：$12+42+24=78$（千克）

答：原来甲桶盛油 78 千克，乙桶盛油 42 千克，丙桶盛油 24 千克。

解答时的思维过程，如下表：

	甲桶	乙桶	丙桶
现在	48 ÷2	48 ÷2	48 +24×2
丙→(甲、乙)前	24 ÷2	24 +12+48	96 ÷2
乙→(丙、甲)前	12 +42+24	84 ÷2	48 ÷2
甲→(乙、丙)前	78	42	24

2·5 试 探 法

我们在解题时，往往通过对一个又一个情况的试探，从而找到解题方向或答案的思考方法，叫试探法。这是探索解题之路时的一种常用的方法。

试探时，要按照一定方向去试探，也就是朝着问题所求的目标方向探索。

例 1 紧接着 1989 后面写一串数字，写下的每个数字都是它前面两个数字的乘积的个位数。例如：8×9=72，在 9 的后面写 2， 9×2=18，在 2 后的后面写 8，……得到一串数字，1989286……。这串数字从 1 开始往右数，第 1989 个数字是什么？

思考途径：根据题目告诉我们的规则，采用“试探法”去思考。

$8\times9=72$，　$9\times2=18$，　$2\times8=16$，

$8\times6=48$，　$6\times8=48$，　$8\times8=64$；

$8\times4=32$，　$4\times2=8$，　$2\times8=16$

$8\times6=48$，　$6\times8=48$，　$8\times8=64\cdots\cdots$

这样可知 1989 后面的一串数字按 286884 循环出现。

$$(1989\underbrace{-4}_{\text{本身 4 位数}})\div\underbrace{6}_{\text{“6”个数字为一循环节}}=330\cdots\cdots5$$

因此，在 1989 后面的这一串数字平均分成 330 段，还剩余 5 个数字，所以第 1989 个数字是 8。

例 2　读一本书，用一天 80 页的速度，需要 5 天，用一天 90 页的速度，需要 4 天。现在要使每天读的页数跟能读完这本书的日数相等，每天应读多少页？（西安市 1986 年“从小爱科学”赛题）

思考途径：我们知道每天读的页数乘以读书的天数等于书的总页数。从题意又知道，每天读的页数要与天数相等，所以关键在要求出总页数。〔根据所需的目标，确定试探的对象。〕

“用一天 80 页的速度，需要 5 天”，是否能够认为总页数就是 $80\times5=400$（页）呢？联系下一句话可知。这句话只能理解为：每天看 80 页，看了 4 天还有余下的，留到第 5 天才看完。即这本书超过 $80\times4=320$（页）至少是 321 页。

同理，“用一天 90 页的速度，需要 4 天”，也只能理解为：这本书最多不会超过 $90\times4=360$（页）。

根据上述分析，我们知道这本书的页数在 321～360 之

间。这样，我们首先确定总页数的范围。〔确定试探对象的数值范围。〕

进一步用试探的方法，确定什么数自身相乘会在 321～360 之间。

试算：$17^2=289$，　$18^2=324$，　$19^2=361$。因此，只有每天读 18 页才能符合题意要求。即每天读 18 页，且 18 天读完，全书应为 324 页。〔试探时一般可先从简单的情况、特殊的情况、极端的情况、中间的情况开始，然后再试探其它的情况。最后确定符合要求的答案。〕

例 3　辅导员把一批图书分给一些少先队员，如果平均分，则余 3 本，如果每人分给 14 本，那么最后一人只能分得 5 本，问共有多少同学？

思考途径：根据题中提供的条件，我们想到每人分 14 本，还缺 $14-5=9$（本）因此，第一次平均分时，每人最多只能分得 13 本。

用"试验法"求解：

设共有 x 个少先队员分这些书，因为每人分 14 本时缺 9 本，所以，余 3 本时，每人分得的必少于 14 本。

如果第一次每人分到 13 本，那么，

$14x-9=13x+3$　得 $x=12$（人）

如果每人分得 12 本，那么，

$14x-9=12x+3$　　得 $x=6$（人）

如果每人分得 11 本，那么，

$14x-9=11x+3$　得 $x=4$（人）

继续试验下去，可知每人分 10 本，9 本……都不合题意。

答:共有 12 人,或 6 人,或 4 人。

2·6 交 集 法

由属于 A 和 B 的所有共同元素所组成的集合,叫做集合 A 与 B 的交集。表示为 A∩B,读作“A 交 B”。例如

A={1,2,3}

B={1,2,4}

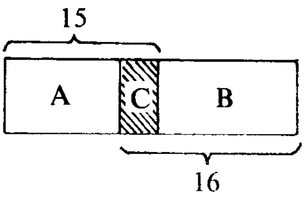
则 A∩B={1,2}。

有些题目的问题所求,是由几个条件共同决定的,这时,我们可以分别列出满足每一条件的情况,然后再求它们的共有部分。

我们把满足每一个条件的情况称为一个集合,用一个圈表示。那么,这些圈的交叉重叠部分就是同时满足这几个条件的公共部分,称为交集。用这种思考方法解题叫做“交集法”。

例 1 东河小学画展上展出许多幅画,其中有 16 幅不是六年级的,有 15 幅不是五年级的.现知道五、六年级共有 25 幅画,因此,其他年级的画共有______幅。

思考途径:根据题意,可运用交集法来解答。—→假设六年级展出的画幅数为 A,五年级展出的画幅数为 B.其它年级展出的画的幅数为 C—→根据题意作示意图助析。



从图中很清楚地看出他们之间的关系。根此列出算式：

(15＋16－25)÷2

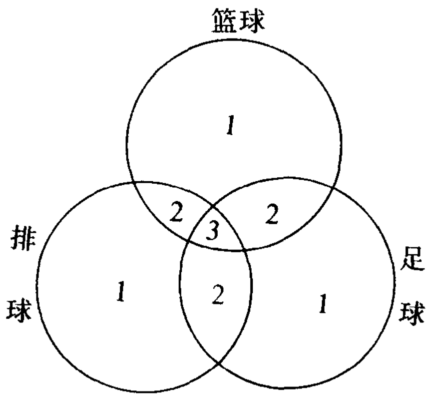
＝6÷2

＝3(幅)

答：其它年级共展出 3 幅画。

例 2 六年级有学生 54 人，每人至少爱好两种球类活动，其中爱好篮球有 40 人，爱好足球的 20 人，爱好排球的有 30 人，既爱好篮球又爱好排球的 18 人，既爱好足球又爱好篮球的有 14 人，既爱好足球又爱好排球的有 12 人。对于这三种球都爱好的有几人？

思考途径：根据题意看出此题为两次重叠交集问题——→以每人计算，只喜爱一种球类的计算 1 个人次，喜爱两种的计算 2 个人次，喜爱三种的计算 3 个人次——→作图如下：



——→通过两次消去的方法，先消去 1 次计算的人次，再消去 2 次计算人次，可求出计算 3 个人次的人数(即三种球类都

喜爱的人数)——►列算式如下：

40＋30＋20＝90(人次)

90－54＝36(人次)……消去一次计算的人次

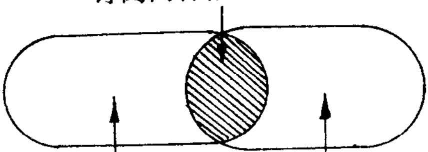
18＋12＋14＝44(人次)

44－36＝8(人)再消去 1 次计算人次。

答：三种球都爱好的 8 人。

例 3 一个班有 42 名学生，订阅《中国少年报》有 32 人，订阅《小学生报》有 27 人。至少有多少人订阅两种报纸？

思考途径：根据题中条件，可用“交集法”来解题——►把订阅《中国少年报》的 32 人当作一个集合，把订阅《小学生报》的 27 人当作另一个集合，把它们的交集就表示两种报纸都订阅的人——►作示意图如下：



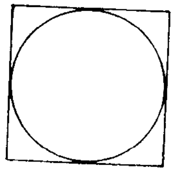
——►订阅《中国少年报》的 32 人，加上订阅《小学生学习报》的 27 人，共是 59 人，这与全班人数 42 人相比，不相等。——►从图中可以看出，在算人数时把两种报纸都订阅的人数多算了一次。把订阅两种报纸人数的和减去全班订阅人数，就得到多算一次的那一部分人数，即两种报纸都订阅的人数。即 32＋27－42＝17(人)——►订阅两种报纸的 17 人。

2·7 假 设 法

有的应用题中数量关系比较复杂，有的推理题中事物间的联系纵横交错，如果按照一般的解题思路，不易找到解题的方法。这时，我们可以把原题作一些转化，使用“假设”改变题目的某些条件使复杂关系化简，或使用“假设”将某些未知设为已知，以增加推理的已知因素。进行假设时，可进行“条件假设”、“问题假设”、“情景假设”。在此基础上，对因假设而造成的差异进行分析推断，以获得问题的解决。这样一种转化思考的解题方法叫做“假设法”。

运用“假设法”，可化复杂为单一，化繁难为简易，化迷朦为明朗，是解数学难题的一种好的思考途径。

例 1 如图，正方形面积为 30 平方厘米．求圆的面积。



思考途径：通常的解法应先求出正方形的边长和圆的半径，然后求圆的面积，这样算要用到开平方的知识，如果我们假设正方形的边长为 1，那么用小学数学的知识就可以首先算出圆面积占正方形面积的百分之几。

$\longrightarrow$ 假设正方形的边长为 1，则正方形的面积是 $1\times1=1$，圆的面积是 $3.14\times0.5^2=0.785$ 圆的面积是正方形面积的 $0.785\div1=78.5\%$ $\longrightarrow$ 已知正方形面积是 30 平方厘米，因此，圆的面积为 $30\times78.5\%=23.55$（平方厘米）

答：圆的面积为 23.55 平方厘米。

例 2 一个学生从家到学校，起先用每分钟 50 米的速度走 2 分钟后，感到如果这样走下去，他就要迟到 8 分钟。后来改用每分钟 60 米的速度前进，结果早到 5 分钟。这个学生从家到学校的距离是多少？（无锡市崇安区 1983 年赛题）

思考途径：根据题意，我们任意假设还要再走 1200 米到达学校，（假设应大于 400 米即可，）——►按两种速度走，所花的时间相差：$\frac{1200}{50}-\frac{1200}{60}=4$（分钟），而实际上所花的时间差是 $8+5=13$（分钟）——►根据时间相差的两个数据的比，可以求出修正的实际还要走的距离：$1200\times\frac{13}{4}=3900$（米）——►再加上每分钟走 50 米、已走 2 分钟的距离，即 $50\times2=100$，$3900+100=4000$（米）

答：从家到学校是 4000 米。

例 3 两人沿着铁路线边的小道，从两地出发，以相同的速度相对而行。一列火车开来，全列车从甲身边开过用了 10 秒钟。3 分钟后，乙遇到火车，全列车从乙身边开过只用了 9 秒钟。火车离开乙多少时间后两人才相遇？

思考途径：根据题意，假设这列火车的车长为“1”，甲、乙两人各作点。——►根据追及问题是可知车速与甲速之差为车长的 $\frac{1}{10}$，相向行程问题可知车速与乙速之和为车长的 $\frac{1}{9}$——►根据甲、乙两人的速度相同，依据和差问题可知车速为：$(\frac{1}{10}+\frac{1}{9})\div2=\frac{19}{180}$，行速为 $\frac{19}{180}-\frac{1}{10}=\frac{1}{180}$（或 $\frac{1}{9}-\frac{19}{180}=\frac{1}{180}$）——►火车从离开甲，到遇上乙，直至火车离乙时，甲、乙两人之

间的距离是：$\frac{19}{180}\times60\times3+1-\frac{1}{180}\times(60\times3+9)-\frac{1}{180}\times9=20-1\frac{1}{20}-\frac{1}{20}=18\frac{9}{10}$ ⟶ 火车离乙后，相向而行的相遇时间是：$18\frac{9}{10}\div(\frac{1}{180}\times2)\div60=28\frac{7}{20}$（分钟）

答：火车离乙 $28\frac{7}{20}$ 分钟后两人才相遇。

2·8 等量变换法

我们在解题时，发现有的题目的数量关系比较复杂，且十分隐蔽。根据现有的条件，难以与所求的问题直接地沟通起关系。如果我们根据已知条件与未知条件相等的关系，使未知条件转化为已知条件，把隐蔽的数量关系使之明朗化。作某些适当的变换，使原来的题目由复杂变得简单，由困难变得容易些。达到问题迎刃而解的目的。这种解题方法叫等量变换法。

小学数学里常用等价的量去替代题中原有的量。我们指的等价是指新的量与原有的量实质上是相同的，或指两者关系实质上是一样的。

常用的等量变换有：条件变换、问题变换、图形变换、关系变换、式子变换等。

例 1 把 100 多粒围棋子，每 3 粒分一堆余 2 粒，每 5 粒一堆，余 4 粒，每 7 粒一堆，余 6 粒。共有多少粒棋子？

思考途径：根据题目提供的三个条件和要求的问题，我们用等量变换法解，即先添上 1 粒后，再分成 3 粒一堆，5 粒 1 堆，7 粒 1 堆就不再余了，也就是说，添上 1 粒后，棋子数是 3、

5、7 的最小公倍数 ⟶ 求 3、5、7 的最小公倍数，$3\times5\times7$ 得 105 ⟶ 再减去添上的一粒，$105-1$ 得 104，104 粒是这堆棋子数，符合 100 多粒的要求。

算式：求 3、5、7 的最小公倍数。

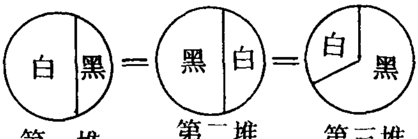
$$3\times5\times7=105$$

$$105-1=104（粒）$$

答：共有 104 粒棋子。

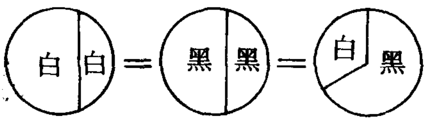
例 2　有三堆棋子，每堆棋子数一样多，并且都只有黑、白两色棋子。第一堆里的黑子和第二堆里的白子一样多，第三堆里的黑子占全部黑子的 $\frac{2}{5}$，把这三堆棋子集中在一起，问白子占全部棋子的几分之几？（“华罗庚杯”复赛题）

思考途径：题中提供的数量关系比较复杂，为此，用图解法将条件画出来，帮助我们分析题意。



第一堆　　第二堆　　第三堆

从上图可以看出，我们把第一堆里的黑子与第二堆里的白子对换一下，这时，可以得到下面的关系图：



(A)　　(B)　　(C)

根据第三堆黑子是全部黑子的$\frac{2}{5}$,可以得出第二堆(全部换成黑子)是全部黑子的$\frac{3}{5}$→我们把第三堆里的黑子看作2份,那么第二堆里的黑子是3份→推理,第一堆的白子也是3份→第三堆3份中有2份是黑子,剩下的白子是1份。→所以,白子占全部棋子的$\frac{4}{9}$。

例3 六年级甲、乙两班的同学人数相等,各有一些同学参加课外数学兴趣小组,甲班参加数学兴趣小组的人数恰好是乙班没有参加的人数的$\frac{1}{3}$,乙班参加数学兴趣小组的人数是甲班没有参加人数的$\frac{1}{4}$。问甲班没有参加的人数是乙班没有参加的人数的几分之几?(“华罗庚杯”复赛题)

思考途径:审题后看出题中没有具体的数量,给解题造成困难,为了解答方便,我们用代换的方法打开解题的缺口→甲班参加数学兴趣小的人数用“甲(参)”表示,乙班参加数学兴趣小组的人数用“乙(参)”表示;甲班未参加数学小组的人数用“甲(未)”表示,乙班未参加数学兴趣小组的人数用“乙(未)”表示。→现把题中的题意表示为如下关系式:

甲(参)$=\frac{1}{3}$乙(未)　　　乙(参)$=\frac{1}{4}$甲(未)

甲(参)+甲(未)=乙(参)+乙(未)

问题是要求甲(未)与乙(未)的关系,因此,我们要设法应用关系变换,把其它的量转化为“甲(未)”、“乙(未)”表示,然后再求这两者的直接关系→我们把最后一个已知的关系式中“甲参”“乙(参)”用“甲(未)”、“乙(未)”来表示,得到关系

式：$\frac{1}{3}$乙(未)＋甲(未)＝$\frac{1}{4}$甲(未)＋乙(未)$\longrightarrow$把关系式两边各减去一个$\frac{1}{3}$乙(未)和一个$\frac{1}{4}$甲(未)得到如下关系式：$\frac{3}{4}$甲(未)＝$\frac{2}{3}$乙(未)$\longrightarrow$写成比例式，得　甲(未)：乙(未)＝$\frac{2}{3}:\frac{3}{4}\longrightarrow\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{9}$，即甲班未参加的人数是乙班没参加的人数$\frac{8}{9}$。

2·9　图　表　法

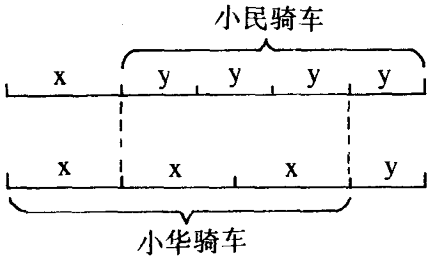
我们寻找解题途径时，可在认真审题的基础上，把题中的已知条件和要求的问题，用图形、表格、符号等形象、简略地表示出来。这样，我们就能明显地显示出条件与条件间，条件与问题间的直观联系，通过分析、推理、寻找解题途径。这种方法叫做图表法。

运用图表法的好处是把抽象的变得具体，复杂的变得简单，隐蔽的变得明朗，是一种解决数学问题的好方法。

例 1　小民和小华住在同一幢楼，他们同时出发去郊外看王老师，又同时到达王老师家。但小民途中休息的时间是小华骑车时间的$\frac{1}{3}$，而小华途中休息的时间是小民骑车时间的$\frac{1}{4}$，小民和小华骑车速度的比是多少？

思考途径：审题时看出小民和小华同时以不同的速度骑自行车去看王老师，仅告诉我们他们各自途中休息的时间与

他人骑车时间的比，因此，数量关系比较隐蔽，先作示意图，帮助分析数量关系。



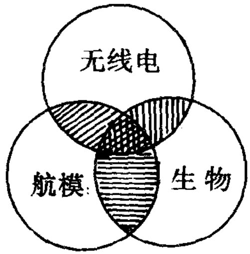
——根据小民和小华骑车和休息时间的关系，设小民途中休息时间为 x，小华途中休息时间为 y，从线段图看出：$2x=3y$

即 $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$ ——因此，$\frac{\text{小民速度}}{\text{小华速度}}=\frac{\text{小华骑车时间}}{\text{小民骑车时间}}=\frac{3x}{4y}=\frac{3}{4}\times\frac{x}{y}$
$=\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$

答：小民与小华骑车速度之比为 $\frac{9}{8}$。

例 2 某班有学生 45 人，参加无线电小组、航模小组和生物小组的各有 20 人、20 人和 15 人。其中，同时参加无线电小组和航模小组的有 5 人，同时参加航模小组和生物小组的有 5 人，同时参加生物小组和无线电小组的有 3 人，并且全班每人都至少参加了以上三个小组中的某一个。问三个小组都参加的有多少人？

思考途径：审题时想到题目的数量关系比较复杂、隐蔽，——►画图（韦恩图）帮助分析（如图）题中数量关系——►从图中看出：



全班人数等于无线电小组人数，加航模小组人数，再加生物小组人数；减去同时参加无线电小组和航模小组的人数，减去同时参加无线电小组和生物小组的人数，再减去同时参加航模小组和生物小组的人数；最后加上同时参加航模、无线电和生物三个小组的人数——►列算式可以求得同时参加三个小组的人数各是多少人。

算式：设同时参加三个小组的人数为 x 人，

$45=20+20+15-5-5-3+x$

$45=55-5-5-3+x$

$45=42+x$

$x=3$

答：同时参加无线电、航模和生物三个小组的是 3 人。

例 3 有 43 位同学，他们身上所带的钱数从 8 分到 5 角，并且每人的钱数各不相同。现在每个同学各自把身上的钱全部买了画片。画片只有两种，3 分一张和 5 分一张的，每人尽可能多买 5 分一张的，问他们买的 3 分画片总数是多少张？

思考途径：审题时看出要求每人尽量多买 5 分一张的画片，而且每人把钱正好都用完。而每人的钱数从 8 分到 5 角各不相同。因此，我们可以列出“每人的钱数”和“买 3 分画片”张数的对应表：

钱数(分)	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	……	50
3 分画片(张)	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3		0

从表中可以清楚地看，这些同学遵循"现在每个同学各自把身上的钱全部买了画片，画片只有两种，3 分一张和 5 分一张的，每人尽可能多买 5 分一张"的题目中条件，买 3 分画片的张数是按照 1，3，0，2，4；1，3，0，2，4；……的规律排列的 ⟶ 把表中的排列的顺序，依次分成 5 人一组，那么，可以分成 8 组，还余 3 人 ⟶ 每组买的 3 分画片的张数是：$1+3+0+2+4=10$(张)8 组共买的张数是：$10\times8=80$(张)，再加上余下的 3 个人买的 3 分画片数：$1+3+0=4$(张)，这样，可以求出全班 43 人买的 3 分画片总数：$80+4=84$(张)

算式：$(1+3+0+2+4)\times8+(1+3+0)$

$=10\times8+4$

$=80+4$

$=84$(张)

答：全班 43 人买的 3 分画片共 84 张。

2·10 对 应 法

我们在解数学问题时，常常用对应的思想方法。所谓"对应"就是在两类事物之间建立某种联系，以实现未知向已知转化。找准常见的对应数量关系，有利于我们分析较复杂的对应数量关系。这为我们顺利解析题中的数量关系创造条件。

例 1 新华小学和孙武小学共有学生 1024 人，新华小学

算式:求 3,4,5,6,7 的最小公倍数

$$\begin{array}{r|l} 2 & 3,\ 4\ 5\ 6\ 7 \\ \hline 3 & 3\ \ 2\ 5\ 3\ 7 \\ \hline & 1\ \ 2\ 5\ 1\ 7 \end{array}$$

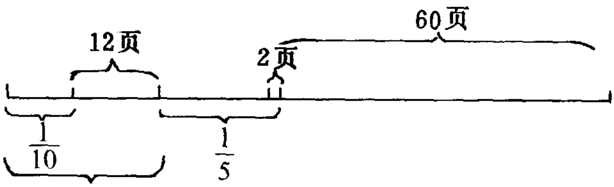
$2\times3\times2\times5\times7=420$

$420-2=418$

答:这批故事书是 418 册。

例 3 小利读一本故事书,第一天读的页数比总页数的 $\frac{1}{10}$ 多 12 页,第二天读的页数比总页数的 $\frac{1}{5}$ 少 2 页。还余 60 页,这本书共有多少页?

思考途径:审题时,分析题中的数量关系,想到要找出题中具体数的对应分率,为此,作线段图帮助分析。



把要求的总页数看作"1",$\frac{1}{10}$和$\frac{1}{5}$都是对总页数来讲的,余下的分率是 $1-\frac{1}{10}-\frac{1}{5}=\frac{7}{10}\longrightarrow\frac{7}{10}$的对应数是 $60-2+12=70\longrightarrow$ 用对应数÷对应分率,可以求出总页数。

算式:$(60-2+12)\div(1-\frac{1}{10}-\frac{1}{5})$

$=70\div\frac{7}{10}$

$=100$(页)

答：这本故事书是100页。

2·11 反 证 法

我们在解某些数学题时，不直接去证明它的结论是正确的，而去证明它的反面是不正确的，从而证明了这个结论是正确的。这种方法我们叫做反证法。

例1 一堆棋子共100粒，全部放入15个盒子里，求证至少有两个盒子里放的棋子一样多。

证明 假设15个盒子里，任何两个盒里放的棋子数不相等，那么，这些盒 子里放的棋子至少分别为0，1，2，3……，14(粒)，即是说，棋子的总数至少为 $1+2+3+\cdots\cdots+14=\frac{(1+14)\times14}{2}=\frac{210}{2}=105$(粒)⟶和已知的条件矛盾。⟶所以，至少有两个盒子里放的棋子一样多。

例2 从整数1—10这10个数中任意选出6个数来，那么，这6个数中必有一个数是另一个数的倍数。

证明 假设任意选出的6个数中，任何一个数都不是另一个数的倍数。显然这6个数中没有选1。在剩下来的9个数中，分情况讨论：

(1)如果这6个数中选了2，那么根据假设4、6、8、10都不能选，剩下的只有3、5、7、9，凑不够六个数；因此，这6个数没有选2。

(2)如果这6个数中选了3，那么6、9，不能选，剩下的2、

4、5、7、8、10 这 6 个数中任选 5 个数，总至少有一个数是另一个数的倍数，因此，这 6 个数中也未选 3。

(3)如果这 6 个数中选了 4，那么，2，8 不能选，剩下的 3、5、6、7、9、10 这 6 个数中任选 5 个数，总至少有一个数是另一个数的倍数，因此，这 6 个数中未选 4。

这样，剩下的 5、6、7、8、9、10 这 6 个数中 5、10 不能同时选，就凑不够 6 个可选数了，所以前面的假设是错的，因而从 1 至 10 中任选 6 个数中，必有一个数是另一个数的倍数。

2·12 代 数 法

我们在解题时，找出题目中的等量关系，通过列方程来解题的一种常用的方法，这叫做代数法。

例 1 一批化肥，第一次运走它的$\frac{2}{7}$，第二次运走余下的$\frac{1}{3}$又 6 吨，还剩下 14 吨。问这批化肥共有多少吨？

思考途径：审题后，根据题中的数量关系，设这批化肥为 x 吨→可推理，第一次运走这批化肥的$\frac{2}{7}x$，第二次运走$\frac{1}{3}\times(1-\frac{2}{7})x+6$ 已知还剩下 14 吨，把这三部分化肥的吨数合起来，得到这批化肥总数。

算式： 设这批化肥为 x 吨，得出：

$$\frac{2}{7}x+[\frac{1}{3}\times(1-\frac{2}{7})x+6]+14=x$$

$$\frac{2}{7}x+[\frac{5}{21}x+6]+14=x$$

化简　$\frac{10}{21}x=20$

$x=42$

答：这批化肥有 42 吨。

例 2　3 头牛和 8 只羊每天共吃青草 93 千克，5 头牛和 15 只羊每天共吃青草 165 千克，那么，一头牛和一只羊每天共吃青草多少千克？

思考途径：审题，分析题中的数量关系和要求的问题，用"代数法"来计算 ⟶ 设每头牛每天吃草 x 千克，一只羊每天吃草 y 千克。可列出两方程：(1)$3x+8y=93$　(2)$5x+15y=165$ ⟶ 设法统一两个方程式中的牛的头数，再解此方程，可以求出一只羊每天吃草的千克数 ⟶ 把每只羊每天吃草的千克数代入方程(1)或(2)，可以求出每头牛每天吃青草的千克数。

解：设每头牛每天吃青草 x 千克，每只羊每天吃青草 y 千克。得如下方程：

$3x+8y=93$ ……………………………………（1）

$5x+15y=165$ …………………………………（2）

把(1)式扩大 5 倍，(2)式扩大 3 倍，这样(1)与(2)牛的头数就一样多了，可减少一个未知数，求出 y 的值。于是：

$5(3x+8y)=465$ ……………………………………（3）

$3(5x+15y)=495$ …………………………………（4）

由(3)式得　$15x+40y=465$ ………………………（5）

由(4)式得　$15x+45y=495$ ………………………（6）

(6)－(5)得　$5y=30$

所以　$y=6$

将 $y=6$ 的值，代入(1)式得

$3x+8\times6=93$

$3x+48=93$

$3x=45$

$x=15$

得出一头牛一天吃青草15千克，一只羊一天吃青草6千克。

三、小学数学奥林匹克竞赛内容辅导

3·1 计 算 问 题

“根据皮亚杰的理论，科学概念包含两大类型，一类是逻辑数学的概念，它们的形式化就是人的认知结构；另一类是于现实世界的(自然的、社会的)规律性的认识，它们的形是现实的客观因果性结构。”① 从这个意义上讲我们可以理研究数学的学问的重要性，举行小学数学奥林匹克竞赛正是重视科学的一个重要方面。

“什么叫运算呢？运算就是内化了的、可逆的、组成系(结构)且具有守恒性的动作。运算是皮亚杰理论中最核心最关键的概念。皮亚杰曾指出，知识总是与动作联系在一起的这里的“动作”就广义而言，它包括运算，”② 因此，运算对数学和科学来讲是重要的。

小学数学奥林匹克竞赛的主要内容之一是“计算问题”正说明计算在数学丛林中的重要性。小学数学是一切数学的基础，计算是数学的基本技能。

“计算问题”的主体内容是什么呢？“竞赛大纲”里规定的大体范围是：

①基本题；

---

① 引自《儿童怎样学习数学》(上海教育出版社)1985年12月版。P.2—

② 引自《儿童怎样学习数学》(上海教育出版社)1985年12月版，P.6。

②运用运算性质及定律运算的问题；

③巧算的问题(找规律、分数问题)；

④估算。

进行基础知识和运算基本技能的训练，是参加小学数学奥林匹克竞赛取得好成绩的前提。我们只有具备了扎实的基础知识和一定的技能技巧，才能更好地学习其它内容。

(1)基本题

我们认为基本题就是整数、小数、分数四则混合运算。比1991年小学数学奥林匹试题初赛(A)卷的第1题是：

计算　$41.2\times8.1+11\times9\frac{1}{4}+537\times0.19=$____

初赛试题(B)卷的第1题是：

计算　$7142.85\div3.7\div2.7\times1.7\times0.7=$____

初赛试题(C)卷的第1题是：

计算　$3.6\times31\frac{2}{5}+43.9\times6\frac{2}{3}=$____

决赛试题的第1题是：

计算　$1991+199.1+19.1+1.991=$____

显然，试题中安排这样的题目是考查学生对基础知识的理解和掌握的程度，同时也考查同学们灵活运用知识的能力。因此，我们必须要有扎扎实实的运算基础知识和基本技能、技巧。

在这里，我们重点介绍基本题的一般解题规律，为学习打下良好的基础，为后面的学习创造良好的条件。

解题时，我们要掌握如下几条原则：

①切实掌握运算顺序，遵循运算顺序的法则去计算，万万

不可粗心大意。

②熟记一些常见的数据值，提高计算的速度和正确率，节省运算时间。

③注意计算方法的灵活、合理。选择比较简捷的计算方法，化难为易，化繁为简，变慢为快。

④切实做到审题细而严，绝不苟且丝毫。审好题，再计算，不逾越瑶池半步。

⑤做到有算必验，确保计算的正确性。

例 1 $1680\div42\times2.5-87\frac{1}{2}-2.5$

$=40\times2.5-87\frac{1}{2}-2.5$

$=100-87\frac{1}{2}-2.5$

$=12.5-2.5$

$=10$

思考途径：审题时，看出在一道算式中，既有加减法，又有乘除法⟶先算乘除法，后算加减法⟶$1680\div42$ 得 40⟹40×2.5 得 100⟹$100-87\frac{1}{2}$得 12.5，⟹$12.5-2.5$ 得 10⟶验算。

例 2 $[5-2\frac{7}{8}\div(1\frac{1}{6}+2.25\times\frac{1}{3})]\div1\frac{7}{8}$

$=[5-2\frac{7}{8}\div1\frac{11}{12}]\div1\frac{7}{8}$

$=3\frac{1}{2}\div1\frac{7}{8}$

$=1\frac{13}{15}$

思考途径：审题时，想到在有括号的算式里，要先算括号里的（首先算小括号里的，后算中括号里的），再算括号外的 $\longrightarrow 1\frac{1}{6}+2.25\times\frac{1}{3}$ 得 $1\frac{11}{12}\Longrightarrow 5-2\frac{7}{8}\div 1\frac{11}{12}$ 得 $3\frac{1}{2}\Longrightarrow 3\frac{1}{2}\div 1\frac{7}{8}$ 得 $1\frac{13}{15}\longrightarrow$ 验算。

例 3　$\frac{3}{8}\div 2.75\times\frac{1}{6}$

$=\frac{3}{8}\div 2\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}$

$=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{8}}}\times\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{11}\times\frac{1}{\underset{2}{\cancel{6}}}$

$=\frac{1}{44}$

思考途径：审题时，看出一道算式中，只有乘除法，自左向右依次运算$\longrightarrow$除数是小数，把小数化为分数计算比较简便，$2.75=2\frac{3}{4}\longrightarrow\frac{3}{8}\div 2\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}$ 得 $\frac{1}{44}\longrightarrow$ 验算。

例 4　$[3.5-(\frac{7}{10}+0.96\div 3\frac{1}{5})\times 2\frac{5}{7}]\div 3\frac{1}{7}$

$=[3.5-(\frac{7}{10}+\overset{0.06}{\cancel{0.96}}\times\frac{5}{\underset{1}{\cancel{16}}})\times 2\frac{5}{7}]\div 3\frac{1}{7}$

$=[3.5-(\frac{7}{10}+0.3)\times 2\frac{5}{7}]\div 3\frac{1}{7}$

$=[3.5-2\frac{5}{7}]\div 3\frac{1}{7}$

$=[3\frac{1}{2}-2\frac{5}{7}]\div 3\frac{1}{7}$

$=[2\frac{21}{14}-2\frac{10}{14}]\div 3\frac{1}{7}$

$=\frac{\overset{1}{\cancel{11}}}{\underset{2}{\cancel{14}}}\times\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{2}{\cancel{22}}}$

$=\frac{1}{4}$

思考途径：审题时看出这是一道有中括号的四则混合运算式题，选算括号里的，再算括号外的 $\longrightarrow$ 小括号里的 0.96 直接参加运算，$\overset{0.06}{\cancel{0.96}}\times\frac{5}{\underset{1}{\cancel{16}}}$ 得 0.3 $\Longrightarrow \frac{7}{10}+0.3$ 得 1 $\longrightarrow$ 算中括号里的数，$1\times 2\frac{5}{7}$ 得 $2\frac{5}{7}\Longrightarrow 3.5-2\frac{5}{7}$，把 3.5 化为分数计算比较简便，$3\frac{1}{2}-2\frac{5}{7}$ 得 $\frac{11}{14}\longrightarrow\frac{11}{14}\times\frac{7}{22}$ 得 $\frac{1}{4}\longrightarrow$ 验算

练　习　一

1. $52.9-18.4-31.6$

2. $\frac{4}{21}\times 8.4\div\frac{4}{21}\times 8.4$

3. $2.25+1\frac{3}{4}-1\frac{1}{6}-\frac{5}{6}$

4. $0.97\times(151-26.5\div0.5-1\frac{1}{2}\div0.75)\div0.97$

5. $[3\frac{5}{19}+5.4\div2\frac{3}{5}\times(4\frac{7}{8}-4.875)]-3\frac{5}{19}$

6. $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{7}{1-\cfrac{4}{5}}}$

7. $0.01\div[1\div(9.2-9.19)+(4\frac{1}{4}-4.25)\times13\frac{4}{17}]$

8. $7.56\times[1\div(3\frac{1}{10}-3.09)]\times\frac{1}{7}\div10\frac{4}{5}$

9. $[9.7-(\frac{8}{15}+14.3\times\frac{7}{13})]\div(2-\frac{2}{15}\times4)$

10. $6\frac{11}{12}\times4.4+6\frac{11}{12}\times6.6+6\frac{11}{12}$

11. $2\frac{1}{3}\times5.76\times1\frac{7}{32}\div0.13$

12. $\dfrac{1\frac{1}{6}-0.75}{(1\frac{5}{6}+1\frac{1}{3})\div2\frac{5}{7}}$

13. $\dfrac{(25.2+4.8)\times 1\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\times 0.6}$

(2)运用运算性质及定律运算的问题

在我们进行运算时，尽量能利用运算定律、性质以及和、差、积、商的变化规律等，把常规计算转化成为简便、迅速的计算。

运用运算性质及定律运算时的主要途径是：

①改变运算顺序；

②凑整；

③乘法分配律；

④利用和、差、积、商的变化规律；

⑤其它。

例 1 $1\frac{3}{4}-(2\frac{11}{19}-1.25)$

思考途径：审题时看出，去括号后，改变运算顺序，可使计算简便⟶去括号，得到算式：$1\frac{3}{4}-2\frac{11}{19}+1.25$⟶交换运算顺序得 $1\frac{3}{4}+1.25-2\frac{11}{19}$⟶$1.75+1.25$ 得 3⟶$3-2\frac{11}{19}$ 得$\frac{8}{19}$⟶验算。

计算：
$$1\frac{3}{4}-(2\frac{11}{19}-1.25)$$
$$=1\frac{3}{4}-2\frac{11}{19}+1.25$$

$$=1\frac{3}{4}+1.25-2\frac{11}{19}$$
$$=3-2\frac{11}{19}$$
$$=\frac{8}{19}$$

例 2　$1\frac{1}{8}\times2.5\times8\times4$

思考途径：审题时看出几个数连乘，交换因数的顺序，可使运算简便⟶$1\frac{1}{8}\times8\times2.5\times4$，⟹$1\frac{1}{8}\times8$ 得 9⟹2.5×4 得 10⟹9×10 得 90⟶验算。

计算　$1\frac{1}{8}\times2.5\times8\times4$

$$=(1\frac{1}{8}\times8)\times(2.5\times4)$$
$$=9\times10$$
$$=90$$

例 3　$6000\div(6\times\frac{25}{26})$

思考途径：审题时看出运用“除法运算性质”可使计算简便，⟶去括号，得到算式：$6000\div6\div\frac{25}{26}$ ⟶ $\overset{40}{\cancel{1000}}\times\frac{26}{\underset{1}{\cancel{25}}}$ 得 1040⟶验算。

计算　$6000\div(6\times\frac{25}{26})$

$$=6000\div6\div\frac{25}{26}$$

$$=\overset{40}{\cancel{1000}}\times\frac{26}{\underset{1}{\cancel{25}}}$$

$=1040$

例 4　$(72+3.6)\div12$

思考途径：审题时看出括号里的每个加数除以 12，计算都简便——►去括号得 $72\div12+3.6\div12$——►$72\div12$ 得 6⟹$3.6\div12$ 得 0.3⟹$6+0.3$ 得 6.3——►验算。

计算　$(72+3.6)\div12$

$=72\div12+3.6\div12$

$=6+0.3$

$=6.3$

例 5　$4.7\div2.5$

思考途径：审题时看出两个小数相除，除数是 2.5，可根据商不变性质，进行简算——►把 4.7 和 2.5 同时扩大 4 倍，得到算式：$(4.7\times4)\div(2.5\times4)=18.8\div10$⟹$18.8\div10$ 得 1.88——►验算。

计算　$4.7\div2.5$

$=(4.7\times4)\div(2.5\times4)$

$=18.8\div10$

$=1.88$

例 6　4.08×1.25

思考途径：审题时看出两个小数相乘，其中一个因数 1.25，1.25 扩大 8 倍得 10，另一个因数 4.08 缩小 8 倍得

0.51，可使运算简便——得到算式：(4.08÷8)×(1.25×8)——4.08÷8得0.51，1.25×8得10，0.51×10得5.1——验算。

算式　4.08×1.25

$=(4.08\div8)\times(1.25\times8)$

$=0.51\times10$

$=5.1$

例7　$59\times\frac{57}{58}$

思考途径(1)：审题时看出把其中一个因数拆成两个数的和(或两个数的差)，再运用乘法分配律进行计算，可进行简便运算——把59拆成(58+1)得到如下算式：$(58+1)\times\frac{57}{58}$——$58\times\frac{57}{58}$得57，$1\times\frac{57}{58}$得$\frac{57}{58}$，$57+\frac{57}{58}$得$57\frac{57}{58}$——验算。

计算　$59\times\frac{57}{58}$

$=(58+1)\times\frac{57}{58}$

$=\overset{1}{\cancel{58}}\times\frac{57}{\underset{1}{\cancel{58}}}+1\times\frac{57}{58}$

$=57\frac{57}{58}$

思考途径(2)：审题时看出把其中一个因数拆成两个数的差，再运用乘法分配律进行计算，可使计算简便——把$\frac{57}{58}$

拆成 $(1-\frac{1}{58})$，得到如下算式：$59\times(1-\frac{1}{58})\longrightarrow 59\times1-59\times\frac{1}{58}\Longrightarrow 59\times1$ 得 59，$59\times\frac{1}{58}$ 得 $1\frac{1}{58}\Longrightarrow 59-1\frac{1}{58}=57\frac{57}{58}$ $\longrightarrow$ 验算。

算式：$59\times\frac{57}{58}$

$=59\times(1-\frac{1}{58})$

$=59\times1-59\times\frac{1}{58}$

$=59-1\frac{1}{58}$

$=57\frac{57}{58}$

例 8 $(29\frac{7}{8}\div2.9875+2\frac{1}{7})\times\frac{3}{85}$

思考途径：审题时看出 2.9875 化成分数后去除 $29\frac{7}{8}$，这就比较麻烦，如果把 $29\frac{7}{8}$ 化成小数是 29.875，这样，计算比较简便 $\longrightarrow$ 可得到如下算式：$(29.875\div2.9875+2\frac{1}{7})\times\frac{3}{85}$ $\longrightarrow 29.875\div2.9875$ 得 10，$10+2\frac{1}{7}$ 得 $12\frac{1}{7}\longrightarrow$ $12\frac{1}{7}$ 即 $\frac{85}{7}$，$\frac{85}{7}\times\frac{3}{85}$ 得 $\frac{3}{7}\longrightarrow$ 验算。

计算 $(29\frac{7}{8}\div2.9875+2\frac{1}{7})\times\frac{3}{85}$

$=(29.875\div2.9875+2\frac{1}{7})\times\frac{3}{85}$

$=12\frac{1}{7}\times\frac{3}{85}$

$=\frac{85}{7}\times\frac{3}{85}$

$=\frac{3}{7}$

例 9　$64\frac{1}{17}\div 9$

思考途径：审题时看出把 $64\frac{1}{17}$拆成两个数和的形式，可使计算简便——►得到算式：$(63+1\frac{1}{17})\div 9$——►$63\div 9$ 得 7，$1\frac{1}{17}\div 9=\frac{18}{17}\div 9$ 得$\frac{2}{17}$⟹$7+\frac{2}{17}$得 $7\frac{2}{17}$——►验算。

计算　$64\frac{1}{17}\div 9$

$=(63+1\frac{1}{17})\div 9$

$=63\div 9+1\frac{1}{17}\div 9$

$=7+\frac{2}{17}$

$=7\frac{2}{17}$

练　习　二

1. $3\frac{8}{11}\times 1.25\times 2\frac{1}{2}\times 0.32$

2. $(19\frac{3}{8}\div 1.9375+3\frac{1}{2})\div 0.135$

3. $35\frac{5}{9}\times 29+65\frac{5}{9}\times 29-\frac{1}{9}\div\frac{1}{29}$

4. $3\frac{1}{4}-(5\frac{13}{17}-4.75)$

5. $\frac{1}{8}\times 2.5\times 80\times 4$

6. $700\div(7\times\frac{25}{27})$

7. $(8.4+36)\div 12$

8. $7.4\div 2.5$

9. 6.04×1.25

10. $39\times\frac{37}{38}$

11. $46\frac{1}{17}\div 9$

12. $(13\frac{3}{8}\div 1.3375+3\frac{1}{2})\div 0.135$

13. $(35\frac{1}{2}+12.5+54.5)\times 0.8$

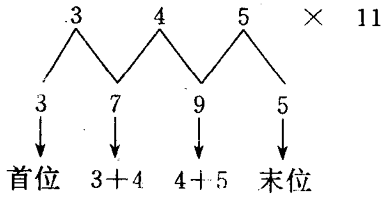
(3)巧算的问题

巧算是指运算技巧，俗话说，“熟能生巧”是有一定道理的。巧算也总是遵循一定的规律的。只要我们善于观察题目的特征，运用特定的解题方法，就能算得又快又对。

例 1　345×11＝3795

思考途径：审题时看出乘数是 11，想到运用特殊的速算方法，进行巧解——►被乘数的首、尾两位数字不变，中间的数字，就是被乘数相邻的两个数字相加的和，满十要向前一位进一——►首位数字是“3”，⟹中间数字是“7”(3＋4)、“9”(4＋5)，⟹末位数字是“5”⟹这个“积”是 3795(思考途径示意图如下)——►验算。

345×11 定积示意图

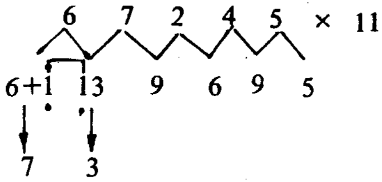


所以，345×11＝3795

例 2　67245×11

思考途径：审题时看出两数相乘，其中一个因数是 11，想到一个数乘以 11 的巧解法——►首位是 7(6＋1)⟹中间数字分别是“3”、“9”(7＋2)、“6”(2＋4)、“9”(4＋5)，⟹末位数字是 5，⟹积是 739695——►验算。

67245×11 的思考途径示意图：



所以，67245×11＝739695

例 3　46×44＝2024

思考途径：审题时看出两个两位数相乘，两个因数的十位上的数字相同，个位上的两个数字互补(即相加和为 10)，可以用特殊方法巧解⟶用相同的那个十位数字(4)乘以本身加 1 的和(4＋1＝5)，即 4×5 得 20⟹再乘以 100，得 2000⟹然后加上个位数的乘积，即 24(6×4)⟹2024⟶验算。

例 4　47×67＝3149

思考途径：审题时看出两个因数都是两位数，十位上的两个数字(4 和 6)互补，个位上的两个数字相同(都是 7)，可用特殊方法巧解⟶用十位上数字的积(4×6 得 24)与相同的那个个位数相加(24＋7 得 31)，再乘以 100，(31×100＝3100)⟹最后加上个位数自乘的积(7×7＝49)，即 3100＋49 得 3149⟶验算。

例 5　$\underset{\cdot}{2}\underset{\cdot}{4}\underset{\triangle}{7}\times\underset{\cdot}{2}\underset{\cdot}{4}\underset{\triangle}{3}=60021$

思考途径：审题时看出两个因数都是三位数，它们的前两

位相同(都是 24),个位上的两个数字互补,可用特殊方法巧解→24×(24+1)得 600⇒600×100 得 60000→7×3 得 21⇒60000+21 得 60021→验算。

例 6　19.6×1.94=38.024

思考途径:审题时看出相乘的两位数,都是三位小数,前两位数字相同(都是 19),个位上的数字互补(6 和 4 互补),可用特殊的方法巧解→先把小数当作整数来计算⇒19×(19+1)得 380⇒4×6=24⇒把两个部分积接起来得 38024⇒加上小数点得 38.024→验算。

例 7　43×46

思考途径:审题时看出两个因数都是两位数,十位上的数字相同,个位上的数字不同,用特殊的方法巧解→把一个因数与另一因数的个位数相加(3+46)得 49,再乘以那个相同十位数字的 10 倍,即 49×4×10 得 1960,然后再加个位数字相乘的积,即 3×6 得 18⇒1960+18 得 1978→验算。

算式:　43×46

=(3+46)×4×10+3×6

=49×4×10+3×6

=1960+18

=1978

例 8　48×58

思考途径:审题时看出两个因数都是两位数,个位上的数

字相同，都是8；十位上的数字不同（4和5），用特殊方法巧解→尾同十异的两个数相乘，把两个十位数字相乘的积（4×5＝20）再乘以100，即20×100得2000，⟹加上十位上数字的和（4＋5＝9），乘以个位数，即9×8＝72，再乘以10，即72×10得720⟹再加上个位上的数字自乘的积，即8×8得64⟹2000＋720＋64得2784→验算。

算式：　48×58

口算过程：

$$
\begin{array}{lr}
(1)\ 4\times5=20 \xrightarrow{\times100} & 2000 \\
(2)\ (4+5)\times8=72 \xrightarrow{\times10} & 720 \\
(3)\ 8^2 \qquad\quad =64 \longrightarrow & 64 \\
\hline
 & 2784
\end{array}
$$

例9　93×84

思考途径：审题时看出两个因数都接近100，可用特殊方法巧解→先用100分别减去两个因数，得到两个差，即，100－93＝7（差①），100－84＝16（差②）⟹被乘数（93）减去差②（或乘数减去差①），即93－16＝77，做积的左段数⟹差①乘以差②做积的右段数，即16×7得112⟹把两段数接起来（77＋1＝78）得7812→验算。

口算程序：

100－93＝7……………①

100－84＝16…………②

$$\begin{array}{rrl} 93 & 7 & \\ -16 & \times 16 & \\ \hline 77 & 112 & \text{(右段积是两位数)} \\ \uparrow \quad \text{进位} & & \\ \hline 78 & 12 & \end{array}$$

所以，$93 \times 84 = 7812$

例 10　112×105

思考途径：审题时看出一个接近 100 的三位数与另一个接近 100 的三位数相乘，可用特殊法巧解⟶把一个因数与 100 的差数（即 $112-100=12$）加到另一个因数（105）上去做积的左段数，即 $105+12=117$⟹两个因数与 100 的差（$112-100=12$，$105-100=5$）数相乘（即 12×5）的积做积的右段数⟹把两段数接起来（即 11760）就是要求的积⟶验算。

口算过程：

$112-100=12$

$105-100=5$

$$\left.\begin{array}{l} 112+5=117 \quad \text{(左段数)} \\ 12\times 5=60 \text{(右段数)} \end{array}\right\} 11760$$

所以，$112\times 105=11760$

例 11　(1)31×51　(2)61×21　(3)51×51

观察下列各式，看有何规律：

$$\begin{array}{r} 31\\ \times 51\\ \hline 31\\ 15\,5\\ \hline 15\,81 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 61\\ \times 21\\ \hline 61\\ 12\,2\\ \hline 12\,81 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 51\\ \times 51\\ \hline 51\\ 25\,5\\ \hline 26\,01 \end{array}$$

$25+1\downarrow$

$\uparrow\quad 10$

思考途径：从上列算式中看出，当个位数是 1 的两位数相乘时，可用特殊方法巧解——►十位上数字相乘的积，做积的左段数（标上“～～”），十位上数字相加的和，做积的中段数（标上“△”号，得数超过 10 时，要向前一段进上“1”），右段数是 1（标上“·”号）⟹把三段数接起来，就是要求的积——►验算。

口算过程：

(1) $31\times51=1581$

$$\left.\begin{array}{l} 3\times5=15\text{（左段数）}\\ 3+5=8\text{（中段数）}\\ 1\qquad\quad\text{（右段数）}\end{array}\right\}\text{接起来，得}1581$$

(2) $61\times21=1281$

$$\left.\begin{array}{l} 6\times2=12\text{（左段数）}\\ 6+2=8\text{（中段数）}\\ 1\qquad\quad\text{（右段数）}\end{array}\right\}\text{接起来，得}1281$$

(3) 51×51

$5\times5=\underset{\sim}{25}\Longrightarrow 25+1=\underset{\sim}{26}$(左段数)
$5+5=1\underset{\triangle}{0}$ ↑(中段数) 三段相接得$\underset{\sim\sim}{26}\underset{\triangle}{0}\dot{1}$
$\dot{1}$……………………(右段数)

例 12 (1)15^2-14^2

(2)234^2-233^2

思考途径:审题时看出两个连续数的平方,可用特殊方法巧解→两数相加(即 15+14;234+233)就是计算的结果。

算式:

(1)$15^2-14^2=15+14=29$

(2)$234^2-233^2=234+233=467$

例 13 92^2

思考途径:审题时看出 92^2 是在 90~100 之间数的平方,可用特殊方法巧解→口算时,从该数中减去个位数的补数,(即 $92-8=\dot{8}\dot{4}$)做为左段数⟹补数(2 的补数是 8)的平方($8\times8=\underset{\sim}{64}$)做为右段数⟹把两段数连接起来($\dot{8}\dot{4}\underset{\sim}{64}$)得 8464→验算。

口算过程:

92^2

$92-8=\underset{\sim}{84}$ (左段数)
$8^2=\dot{6}\dot{4}$ (右段数)
接起来得$\underset{\sim}{84}\dot{6}\dot{4}$

所以 $92^2=\underset{\sim}{84}\dot{6}\dot{4}$

例 14　1,3,5,7,……按这样的规律排着一列数,第 50 个数是几?

思考途径(1):审题时看出这一列数的排列规律是:前一个数加 2 得后一个数。

1,1+2=3,　1+2+2=5……

可用特殊方法巧解→我们研究数列的规律是:数列第 1 个数:1

数列第 2 个数:$\underbrace{1+2}_{1个2}=3$

数列第 3 个数:$\underbrace{1+2+2}_{2个2}=5$

数列第 4 个数:$\underbrace{1+2+2+2}_{3个2}=7$

数列第 5 个数:$\underbrace{1+2+2+2+2}_{4个2}=9$

……

数列第 n 个数:$\underbrace{1+2+2+\cdots\cdots+2}_{(n-1)个2}$

从这个规律,可以求出第 50 个数是几:
即用 1 加上 2 乘以(50-1)的积。

算式:

$1+2\times(50-1)$

$=1+2\times49$

$=1+98$

$=99$

思考途径(2):审题时,可从另一个角度想,数列的排列规律:

数列第一个数：$2\times1-1=1$

数列第二个数：$2\times2-1=3$

数列第三个数：$2\times3-1=5$

数列第四个数：$2\times4-1=7$

数列第五个数：$2\times5-1=9$

数列第n个数：$2\times n-1$

根据上面的规律，可以推理求出第50个数是 $50\times2-1$。

算式：

$$
\begin{aligned}
&50\times2-1\\
=&100-1\\
=&99
\end{aligned}
$$

例 15　$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3=($　　$)$

思考途径：审题时，想着找规律，探索巧解途径。

$$\begin{cases}1^3+2^3=1+8=9\\(1+2)^2=3\times3=9\end{cases}$$

$$\begin{cases}1^3+2^3+3^3=1+8+27=36\\(1+2+3)^2=6\times6=36\end{cases}$$

$$\begin{cases}1^3+2^3+3^3+4^3=1+8+27+64=100\\(1+2+3+4)^2=10^2=100\end{cases}$$

……

仔细观察上面三组题的计算过程，可以发现这样的计算规律：连续自然数（从 1 开始）立方之和，等于这些连续自然和的平方——→根据此规律，可以求出题目的结果。

算式：

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3$$
$$=(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)^2$$
$$=55^2$$
$$=3025$$

例 16 $5^2=(\quad)+(\quad)+(\quad)+(\quad)+(\quad)$

思考途径：审题时想到通过试验，找出巧解的规律性——→试验从自然数 1 开始：

$1^2=1$

$2^2=(1)+(3)$

$3^2=(1)+(3)+(5)$

$4^2=(1)+(3)+(5)+(7)$

……

从上面的试验中，发现如下规律：从 1 开始连续奇数的和，等于奇数个数的平方——→根据这个规律，求出

$5^2=(1)+(3)+(5)+(7)+(9)$

例 17 有同样大小的红、白、黑珠 180 个，按先红 5 个，再白 4 个，再黑 3 个排列着：

①黑珠共有多少个？

②第 158 个珠子是什么颜色的珠子？

（上海市嘉定县 1986 年"从小爱科学"邀请赛试题）

思考途径①：审题时想到 180 分别是 5、4、3 的倍数，可考虑用分组进行巧算──►180 除以 12，（即 $5+4+3=12$）可得 15 组（$180\div12=15$）──►每组有 3 个黑珠，因此，共有 45 个（$3\times15=45$）黑珠。

算式：$180\div(5+4+3)=15$　$3\times15=45$（个）

思考途径②：审题时想到第 158 珠，按 12 个珠子为一组（即 $5+4+3=12$）分，可以确定它是什么样的珠子──►$158\div12=13\cdots\cdots2$ 余下的两个珠子应在第 14 组的第一、第二两个位置上，显然是红珠──►所以，第 158 珠是红珠。

算式：

$158\div(5+4+3)$

$=13\cdots\cdots2$

所以第 158 珠是红珠。

例 18　观察一下，下面每组算式的规律，根据规律在（　）里填上适当的数。

(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

(2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$

(1) $\frac{1}{7}+\frac{1}{6}=(\frac{13}{42})$，　$\frac{1}{5}+\frac{1}{9}=(\frac{14}{45})$

(2)$\frac{1}{4}-\frac{1}{7}=(\frac{3}{28})$　　$\frac{1}{3}-\frac{1}{11}=(\frac{8}{33})$

思考途径(1)：审题时看出(1)组题目的规律是：分母是互质数，分子都是 1 的两个分数求和，可用特殊法进行巧解——→用两个分母的积 作分母，两个分母的和 作分子。

算式(口算过程)

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{6}=\frac{7+6}{7\times6}=\frac{13}{42}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{9}=\frac{5+9}{5\times9}=\frac{14}{45}$$

思考途径(2)：审题看出(2)组题目的规律是：分母是互质数，分子是 1 的两个分数相减。可用特殊方法进行巧解——→用两个分母的积作分母，两个分母的差(大一小)作分子。

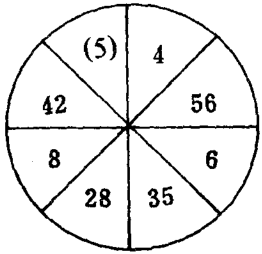
算式(口算过程)：

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{7}=\frac{7-4}{4\times7}=\frac{3}{28}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{11}=\frac{11-3}{3\times11}=\frac{8}{33}$$

例 20　找规律填数。

(1)在右图的空格里，填上合适的数。



思考途径：审题时，看出对角两个数的关系为：大数是小数的 7 倍，如，4×7=28，8×7=56，6×7=42，……——→根据这样的规律，空格内应填 5(35÷7=5)。

(2)1、2、4、8、(　)、32、(　)、……

思考途径：审题时看出这一列数的排列规律是：后一个数是前一个数的 2 倍。即 $1\times2=2$，$2\times2=4$，$4\times2=8$……写成公式是：前一个数$\times2=$后一个数 ⟶ 根据这样的规律，(　)应填上 16($8\times2=16$)、(　)应填上 64($32\times2=64$)

(3)1、4、13、40、(　)、364、(　)、……

思考途径：审题时重点看这一列数的排列规律，看出这个规律是：从第二个数起分别比前一个数大 3、大 9，大 27，大 81，大 243……如：$1+3=4$，$4+9=13$，$13+27=40$，$40+81=121$…… ⟶ 根据这个规律，在第一个(　)里填上“121”($40+81=121$)，第二个(　)里填上“1093”($729+364=1093$)。

例 20　观察下面的一列数，注意发现排列的规律，然后根据规律在括号内填上适当的数。

$2\frac{1}{4}$，　$4\frac{4}{9}$，　$8\frac{9}{16}$，　$16\frac{16}{25}$，　$32\frac{25}{36}$，(　)，(　)。

思考途径：审题，仔细观察这一列数的排列规律是：

(1)后一个分数的整数部分是前一个分数的整数部分的 2 倍。如 2、4、8、16……

(2)前一个分数的分母就是后一个分数的分子。如，$2\frac{1}{4}$，

$4\frac{4}{9}$，$8\frac{9}{16}$……

(3)从第二个分数起，分数的分母分别比前一个分数的分母大 5，大 7，大 9，大 11，…… ⟶ 根据上述三条规律，经过推

理，第一个括号里的分数是 $64\frac{36}{49}$（整部部分是 $32\times2=64$，分子是 36，分母是 $36+13=49$）$\Longrightarrow$ 第二个括号里的分数是 $128\frac{49}{64}$（整数部分是 $64\times2=128$，分子是 49，分母是 $49+15=64$）$\longrightarrow$ 因此，这个数列是：

$2\frac{1}{4}, 4\frac{4}{9}, 8\frac{9}{16}, 16\frac{16}{25}, 32\frac{25}{36}$，（$64\frac{36}{49}$）、（$128\frac{49}{64}$）。

练　习　三

1. 236×11

2. 75324×11

3. 72×78　　4. 326×324

5. 5.97×59.3　　6. 37×32

7. 26×56　　8. 94×92

9. 96×98　　10. 1052×1011

11. 41×51　　12. 71×61

13. 13^2-12^2　　14. 19^2-18^2

15. 35^2　　16. 75^2

17. 98^2

18. 找规律，在（　）里填上适当的数。

(1)8、2、（　）、$\frac{1}{8}$、$\frac{1}{32}$

(2)$\frac{3}{9}$、$\frac{4}{12}$、$\frac{5}{15}$、$\frac{6}{18}$（　　）

19. 找规律填数：

(1)1，4，9，16，25，……（　）（第 100 个数）……

(2)自 2 开始，每隔一个数取一数，于是得到一列数，2，4，

6,8,10,……那么第100个数是(　)

20. 自1开始，每隔两个数，写出一个数来，得到数列1、4、7、10……。问：第100个数是多少？

(4)估算

估算是遵循一定的原则测定计算值的大体范围，掌握一些估算方法，可以初步确定计算结果的粗略正确率。比如，“99×21”它的积的大体值是20个100(即2000)～21个100(即2100)之间。又如$27\overline{)33642}$的商是4位数，如果计算的结果——商的位数少于4位数，就意味着产生错误。

“估算”是指粗略值，不是精确的值，因此估算的结果，绝不是正确的得数。估算也有一定的原则，而不是胡乱的猜想。它是用省略尾数或取近似值的方法，也就是用放大或缩小计算量的方法来估计整个算式的值大致在什么范围内。

例1　310×198　估积

思考途径：审题，根据解题要求是估积，⟶把310看作约等于300，198约等于200⟶300×200得60000⟶所以310×198≈6000⟶验算。

算式　310≈300　　198≈200

　310×198≈60000

例2　估商　23950÷621

思考途径：审题，根据要求：估商⟶把23950看作约等于是24000，621看作约等600⟶24000÷600＝40⟶所以，23950÷621约等于40⟶验算。

算式：　$23950 \approx 24000$

　　　　$621 \approx 600$

所以　$23950 \div 621 \approx 40$

例 3　估计$\frac{4}{9}+\frac{6}{13}+\frac{9}{19}$　的值的范围。

思考途径：审题，要求估算$\frac{4}{9}+\frac{6}{13}+\frac{9}{19}$的值范围——►先把此式放大，得：

$$\frac{4}{9}+\frac{6}{13}+\frac{9}{19}<\frac{4}{8}+\frac{6}{12}+\frac{9}{18}=\frac{3}{2}=1.5$$

——►再把此式缩小，得：

$$\frac{4}{9}+\frac{6}{13}+\frac{9}{19}>\frac{4}{10}+\frac{6}{15}+\frac{9}{20}$$

$$=0.4+0.4+0.45=1.25$$

因此，算式的值大约在 1.25 和 1.5 之间。

例 4　已知　$S=\cfrac{1}{\frac{1}{1980}+\frac{1}{1981}+\frac{1}{1982}+\cdots\cdots+\frac{1}{1991}}$

求 S 的整数部分。

（第三届"华罗庚金杯"少年数学邀请赛复赛题）

思考途径：审题，这是一道"估值问题"不用直接计算求解——►想到运用已学的比较分数大小的知识，借助适当的变式、推理，设法把要求的答案从两个很靠近的数中确定下来，——►根据分子相同，分母大，分数值反而小，得到：

$$\frac{1}{1980}>\frac{1}{1981},\quad \frac{1}{1980}>\frac{1}{1982},\quad \frac{1}{1980}>\frac{1}{1983},$$

$\frac{1}{1980}>\frac{1}{1984}$，$\frac{1}{1980}>\frac{1}{1985}$……

$\frac{1}{1980}>\frac{1}{1991}$，$\frac{1}{1991}<\frac{1}{1990}$，$\frac{1}{1991}<\frac{1}{1989}$，

$\frac{1}{1991}<\frac{1}{1988}$……

$\frac{1}{1991}<\frac{1}{1981}$

设题目中繁分数的分母部分是 A，由上面比较的结果知道：$12\times\frac{1}{1991}<A<12\times\frac{1}{1980}$……①⟶对两个自然数 a、b 来说，如果 a>b，那末，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。⟶①式可改写成：

$\frac{1980}{12}<\frac{1}{A}<\frac{1991}{12}$……②，②式中的 $\frac{1980}{12}=165$，$\frac{1991}{12}\approx$ 165.92。它们的整数部分都是 165，所以 $\frac{1}{A}$ 的整数部分必定也是 165（答案）。

练　习　四

1. 估算(1) $\frac{4}{5}+\frac{11}{12}+\frac{8}{9}$　　(2) 30.97×48.2

2. 检查“3329÷81≈41”的商最高位有没有错误。

3. 王亮从 1 月 5 日开始读一部小说。如果他每天读 80 页，到 1 月 9 日读完；如果每天读 90 页，到 1 月 8 日读完。为了不影响学习，王亮准备减少每天的阅读量，并决定分 a 天读完，每天都读 a 页便刚好全部读完。问这部小说共有多少页？

4. 求 $\dfrac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots\cdots+\frac{1}{19}}$ 的整数部分。

3.2 应 用 题

应用题是小学数学奥林匹克竞赛的主要内容之一。

什么叫应用题呢？一般把含有已知数量与未知数量之间关系的实际问题，用文字或语言叙述出来，并要求出未知数量的问题称为应用题。

应用题的结构：每一道完整的应用题都由已知条件和问题两部分组成，条件是指已知量的数值及已知量与已知量、已知量与未知量间的相互关系；问题是指要求出的未知量的数值。应用题的已知条件是必要的和充分的时候，应用题的问题有一个确定的答案。

应用题必须满足以下三项基本要求：(1)完备性。已知条件的完备性，是指题目中的条件必须充分，足以保证从条件可以解出要求的未知量的数值。当已知条件不充分时，应用题的问题没有确定的答案。例如，两只篮子里共放 30 千克鸡蛋，每只篮子里放多少千克鸡蛋？由于缺少一个条件，如，两篮放的一样多，或一篮比另一篮少 5 千克等等。所以得不到确定的答案。(2)无矛盾性。无矛盾性是指题中所给的条件，不能自相矛盾，条件与问题也不能相互矛盾。如果有矛盾，那么就无解。例如：1 张桌子和 1 把椅子的价格是 56 元，一张桌子的价格是 66 元，1 把椅子的价格是多少元？这题条件互相矛盾。又如，某工厂五月份用煤 20 吨，六月份用煤 30 吨，六月份比五月份节约用煤多少吨？这题条件与问题相矛盾。(3)独立性。独立性是指应用题的条件不能过剩，也就是一般不能有多余条件。如果有多余条件并且这些条件不矛盾，应用题的问题可

能有确定的答案，但题目累赘。如果已知条件有矛盾，那么就无解。例如，要修一条500米长的路，已经修了10天，每天修30米，共修了300米。问这条路还有多少米没有修？多余条件与其它条件不相矛盾，可以得到确定的答案是200米，但题目累赘。又如，果园里有桃树100棵；梨树比桃树多20棵，苹果树比梨树多30棵，苹果树的棵数等于桃树的2倍，果园里有苹果树多少棵？这题由于两个条件是矛盾的，所以无解。”①

应用题的解法：

应用题的解法常用的有算术解法和方程解法。

一般说来，算术解法思考性较强，而方程解法适用范围较广，且容易掌握。

算术解法的步骤是：

①认真审题，细读题目1—2遍，或多遍。

②分析、思考题目的数量关系，可用分步列式或作图来帮助分析，关键在于把复杂问题逐步分解成几个较简单的问题，找出解题途径。

③解答计算。

④验算解答是否正确。

⑤简明扼要地写出对问题的正确回答。

列方程解应用题的步骤是：

①在理解题意的基础上，选择一个未知数量，设为x。

②用含有x的算式表达其它数量，并分析题中的数量关系，找出其中的等量关系列成方程。

③解方程，算出未知数x。但要注意，x如果不是要求的

① 引自《小学数学知识辞典》（山东教育出版社）1987年版，P.56～57。

数量，还要再进行计算。

④验算解答是否正确。

⑤写出对问题的正确回答。

小学数学奥林匹克竞赛大纲里，提出如下几种应用题作为竞赛的主要内容：

(1)平均数。

(2)行程问题。

(3)工程问题。

(4)分数应用题。

(5)其它应用题。

(1)平均数

求平均数应用题(这里的平均数指的是算术平均数)的基本特征是：把若干个不相等的数量在总量不变的条件下，按照移多补少使它们相等或将总数量除以它所对应的总份数，就可以求出平均数。

这类应用题又可分为简单平均数问题和复杂平均数问题(又称加权算术平均数)。解题时，要先求出总数量和总份数，再用总数量除以总份数，可得到平均数。值得注意的是这里的总份数是指与总数量相对应的总份数。

计算公式： 总数量÷总份数=平均数

复杂的平均数问题与简单的平均数问题的主要区别在于：后者给出的数量是对应于每一份的，而前者都不是这么直接，给出的数量之间是不平衡的，有时给出的数量是对应于几份的。这样，我们在解题时，要区别情况，特别注意数量与份数

的对应，总数量与总份数的对应。

例 1 一个食堂在四月份的前 10 天每天烧煤 340 千克，后 20 天中每天比原来节约 30 千克。这个月平均每天烧煤多少千克？

思考途径：审题时想到计算公式，需要先求出总数量与总份数⟶总数量有两部分组成，一是前 10 天的烧煤总量：$340\times10=3400$（千克），二是后 20 天的烧煤总量：$(340-30)\times20=6200$（千克）$\Longrightarrow$烧煤总量是 $3400+6200=9600$（千克）⟶前、后两次共烧的天数是与总数量对应的总份数：$10+20=30$（天）⟶这个月平均每天烧煤多少千克：$9600\div30=320$（千克）

算式：

$$
\begin{aligned}
&[(340\times10)+(340-30)\times20]\div(10+20)\\
&=[3400+6200]\div30\\
&=9600\div30\\
&=320\text{（千克）}
\end{aligned}
$$

答：这个月平均每天烧煤 320 千克。

例 2 有上茶、中茶各一包，每包都是 8 千克。上茶每包 32 元，中茶每包 28 元，现把上茶 3 千克，中茶 5 千克混合起来。平均每千克售价多少元？

思考途径：审题，分析题中数量关系，根据求平均数计算公式⟶想到解题关键是求出混合茶的总钱数和相应的总千克数⟶先求两种茶的单价：$32\div8=4$（元），上茶每千克 4 元，$28\div8=3.5$（元）中茶每千克 3.5（元）$\Longrightarrow$混合茶总钱

数：$4\times3+3.5\times5=29.5$（元）$\longrightarrow$总千克数为 $3+5=8$（千克）$\longrightarrow$混合茶每千克的价钱是：$29.5\div8\approx3.69$（元）

算式：

$(32\div8\times3+28\div8\times5)\div(3+5)$

$=29.5\div8$

≈3.69(元)

答：平均每千克售价约 3.69 元。

例 3 小华上山的速度是每小时 3 千米，下山的速度是每小时 5 千米。问小华的平均速度是多少千米？

思考途径：审题，分析题中数量关系，想到要求小华的上山、下山的平均速度，要求出总路程和总时间$\longrightarrow$设山路的单程为 1，总行程为 $1+1=2\Longrightarrow$根据“速度×时间＝路程”，求出上山的时间为$\frac{1}{3}$，下山的时间为$\frac{1}{5}\longrightarrow$上山下山的平均速度为：$2\div(\frac{1}{3}+\frac{1}{5})=3\frac{3}{4}$(千米)。

算式：

设该山的路程(指单程)为 1

由路程＝速度×时间得出上山时间为$\frac{1}{3}$下山时间为$\frac{1}{5}$

$(1+1)\div(\frac{1}{3}+\frac{1}{5})$

$=2\div\frac{8}{15}$

$=3\frac{3}{4}$(千米)

答：小华上山、下山的平均速度为每小时 $3\frac{3}{4}$千米。

例 4 一辆汽车由甲地开往乙地，$\frac{1}{3}$的路程是平路，速度每小时 40 千米，$\frac{1}{3}$的路程是下坡路，每小时行 60 千米，$\frac{1}{3}$的路程是上坡路，每小时行 30 千米。求这辆汽车由甲地开往乙地的平均速度？

思考途径(1)：审题，分析题中数量关系，缺少甲地到乙地的路程是多少千米，可假设为 S，⟶平路用的时间为$\frac{\frac{1}{3}S}{60}$，下坡路用的时间为$\frac{\frac{1}{3}S}{40}$，上坡路用的时间为$\frac{\frac{1}{3}S}{30}$⟶根据"总路程÷总时间＝平均速度"得算式：$S\div(\frac{\frac{1}{3}S}{60}+\frac{\frac{1}{3}S}{40}+\frac{\frac{1}{3}S}{30})$⟶计算结果得 40(千米)

算式：设甲地到乙地的路程为 S 千米

$$S\div(\frac{\frac{1}{3}S}{60}+\frac{\frac{1}{3}S}{40}+\frac{\frac{1}{3}S}{30})$$

$$=3\div(\frac{1}{60}+\frac{1}{40}+\frac{1}{30})$$

$$=3\div\frac{3}{40}$$

$$=40(\text{千米})$$

答：这辆汽车的平均速度是每小时 40 千米。

思考途径(2)：审题，分析数量关系，想到平均速度与路程长短无关，用"1"表示各段路程，总路程为"3"⟶得出如下算

式：$3\div(\frac{1}{60}+\frac{1}{40}+\frac{1}{30})$ ——► 得出结果是40(千米)

算式： 设"1"为各段路程，

$3\div(\frac{1}{60}+\frac{1}{40}+\frac{1}{30})$

$=3\div\frac{3}{40}$

$=40$(千米)

答：这辆汽车的平均速度是每小时40千米。

思考途径(3)：审题，分析数量关系，想到设甲地到乙地的路程为一个任意数360千米 ——► 据此推出$\frac{1}{3}$路程为120千米 ——► 列出算式：$360\div(\frac{120}{60}+\frac{120}{40}+\frac{120}{30})$ ——► 结果得到40(千米)

算式：

设甲地到乙地的路程为360千米，那么，$\frac{1}{3}$路程为120千米，则

$360\div(\frac{120}{60}+\frac{120}{40}+\frac{120}{30})$

$=360\div(2+3+4)$

$=360\div9$

$=40$(千米)

答：这辆汽车平均每小时行40千米。

练　习　五

1. 农场有两种杂交水稻试验田，第一块共4公亩，公亩产

为 90 千克，第二块共 6 公亩，公亩产为 95 千克，问这两种杂交水稻平均每公亩产多少千克？

2. 一堆同样规格的小螺钉，不易数出它们的颗数，称得它们共重 765 克，取出 50 个后，剩余的螺钉重 750 克。求这堆螺钉的颗数。

3. 王红在期末考试时，地理成绩公布前，他四门功课的平均分数是 92 分。地理成绩公布后，他的平均分数下降了 2 分。王红的地理考了多少分？

4. 甲仓有米 1267 袋，乙仓有米 1153 袋，现有 3 人从甲仓将米搬到乙仓，当两仓袋数相等，这 3 人平均各搬了多少袋？

5. 甲、乙、丙、丁四人结伴旅行。甲带了 7 只面包，乙带了 5 只面包，丙带了 4 只面包，丁什么也没有带。午餐时，他们将这些面包平均地分吃了。吃完后，丁拿出 0.48 元作为面包费，问带面包的人应如何分配这些钱？

6. 甲缸有金鱼 172 尾，比乙缸的 2 倍多 4 尾，若每次从甲缸捞出 22 尾给乙缸，捞几次两缸的鱼数相等？

7. 15 只鸡分放于五笼，若每笼的只数不同，应怎么放？

8. 张叔叔买了一只手表，发现比家里的闹钟每小时快 30 秒，可是那只闹钟比标准时间每小时慢 30 秒。你想想，这只手表准不准？

9. 小玲和小明同时从学校出发，跑向距离学校有 1200 米的公园，然后再跑回来。小玲每分钟跑 300 米，小明去时每分钟跑 200 米，回来时每分钟跑 400 米。问谁先回到学校？

10. 甲、乙、丙三个学生各拿出同样多的钱买同样规格的练习本，买了以后，甲和乙都比丙多要 6 本，因此，甲、乙分别给丙人民币 0.36 元。求每本练习本的价钱是多少？

(2)行程问题

在行车、走路等类运动时，按照速度、时间、路程三者之间的相依关系，已知其中的任何两种量，要求第三种量的问题，称为行程问题。

行程问题是典型应用题，常见的类型是：①相遇问题(即相向运动)，②追及问题(即同向运动)，③相离问题(即相背运动)，④过桥问题(在形式上表现为“动与静”或“动与动”的两物相遇或追及)。

解题时，要认真分析题中的数量关系，特别注意题中的隐蔽条件。我们要把握住的关键是：①三个基本数量关系式：

路程＝速度×时间

时间＝路程÷速度

速度＝路程÷时间

②画出线段图，帮助分析数量关系。

③找出等量关系。如，两人同时出发，相遇时，两人所走的时间必定相等。两人同地出发，追及时，两人所走的距离必定相等。

解题时，分清题目的类型后，进一步根据各类题目的特点作细致的考虑。各类项目的主要特点是：

①相遇问题。

两个运动物体作相向运动或在环形跑道上作背向运动。随着时间的发展，必然面对面地相遇，这类问题即为相遇问题，它的特点是两个运动物体共同走完整个路程(距离和)。这类问题，根据数量关系可分成三种类型：(1)求两地距离(或环形跑道长)，(2)求相遇时间，(3)求速度。

②追及问题

追及问题的地点可以相同(如环形跑道上的追及问题),也可以不同。而方向一般是相同的,由于速度不同,就发生快的追及慢的问题。

根据速度差、距离差和追及时间三者之间的关系,常用下面的公式:

距离差=速度差×追及时间

追及时间=距离差÷速度差

速度差=距离差÷追及时间

快速-慢速=速度差

解题的关键是在互相关联,互相对应的距离差、速度差、追及时间三者之中,找出两者,然后运用公式求出第三者来达到解题的目的。

③相离问题

相离问题一般遵循"两车出发地之间路程+速度和×时间=两车间路程"

④过桥问题

"过桥问题"实质是一种行程问题,它在形式上表现"动与静"或"动与动"的两物相遇或追及问题。列队(或列车),它是有一定的长度,"桥"也是有一定长度的,解决过桥问题应注意"队伍"和"桥"的本身长度和相对运动的关系。

例 1 甲乙两地相距 730 千米,上午 6 时 30 分一辆货车从甲地开往乙地,2 小时 30 分钟后,一辆客车从乙地开往甲地。15 时 30 分两车相遇,已知客车每小时行 50 千米,货车每小时行多少千米?

思考途径(1):审题,分析数量关系,已知甲乙两地的距

离，又间接知道客车、货车行车的时间，知道相遇时间，客车速度，求货车速度—→用两地距离减去客车行的路程，可得到货车行的路程，然后再除以货车行的时间，即可求出货车速度—→列算式：

$$[730-50\times(15.5-6.5-2.5)]\div(15.5-6.5)$$
$$=[730-50\times6.5]\div9$$
$$=405\div9$$
$$=45\text{（千米）}$$

答：货车每小时行 45 千米。

思考途径（2）：审题，分析数量关系，假定客车与货车同时出发，这样，总路程中要加上客车 2.5 小时行的路程，把题目可以理解为：两车同时从两地相向而行，经过 9 小时相遇—→总路程除以相遇时间，可以求出两车速度和—→再求出货车的速度。

算式：

$$(730+50\times2.5)\div(15.5-6.5)-50$$
$$=855\div9-50$$
$$=95-50$$
$$=45\text{（千米）}$$

思考途径（3）：审题，分析数量关系，想到用方程解。

解：设货车每小时行 x 千米，则：

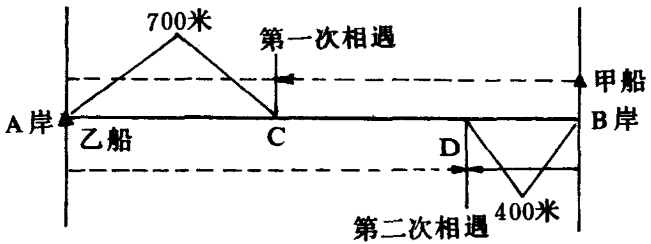
$$(15.5-6.5)x+50\times(15.5-6.5-2.5)=730$$
$$9x+50\times6.5=730$$
$$9x=405$$

$x=45$

答：货车每小时行 45 千米。

例 2 甲、乙两只船同时从江的两岸相对起航，第一次在距 A 岸 700 米处两船相遇，相遇后继续向前行驶，分别到达对岸后又立即返回，返回时，在距 B 岸 400 米处两船第二次相遇。求江宽。

思考途径：审题，分析数量关系，作示意图帮助分析



两船第一次相遇在 C 点，这时距 A 点 700 米，即 AC＝700 米 ⟹ 第二次相遇于 D 点，这时距 B 点 400 米，即 DB＝400 米 ⟶ 从图中看出，两船第二次相遇于 D 处时，两只船一共行驶了三个江面的宽(即 3 倍 AB 的长)，即是说，第一次在 C 处相遇时，两船一共只行驶了一个江面的宽，这时，从 A 岸出发的乙船到达 C 点处行了 700 米，这就是说，当两船共行驶“一个江宽”时，乙船行驶 700 米，而两船从出发到第二次相遇一共行了“三个江面宽”，所以，乙船一共行驶了 $700\times3=2100$ (米)在这段时间里，从 A 岸出发的乙船由 A→C→B→D 它实际上行驶了“一个江面宽”再加上 400 米，所以说，2100 米就是“一个江面宽”加上 400 米 ⟶ 因此“江宽＝2100－400＝

1700(米)

算式：

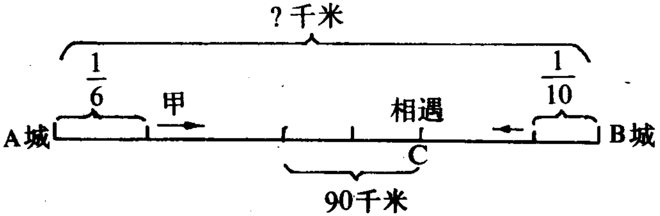
$700 \times 3 - 400$

$= 1700$(米)

答：江面宽为 1700 米。

例 3 甲车由 A 城到 B 城，要 6 小时，乙车由 B 城到 A 城，要 10 小时，同时相向而行，相遇时，甲比乙多行 90 千米，求两地距离。

思考途径(1)：审题，分析数量关系，作图助析。从甲车由 A 城到 B 城，要 6 小时，速度为$\frac{1}{6}$，乙车由 B 城到 A 城，要 10 小时，速度为$\frac{1}{10}$ $\Longrightarrow$ 时间相同，速度比等于所行路程的比，甲、乙相遇的路程比$\frac{1}{6}:\frac{1}{10}=5:3$ $\Longrightarrow$ 甲行了全路的$\frac{5}{5+3}=\frac{5}{8}$乙行了 $1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$ $\Longrightarrow$ 甲比乙多行了全程的$\frac{1}{4}$($\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$) $\longrightarrow$ $90 \div \frac{1}{4}=360$(千米)



算式：

$$90 \div \frac{5-3}{5+3}$$
$$= 90 \div \frac{1}{4}$$
$$= 360(\text{千米})$$

答：两地相距 360 千米。

思考途径(2)：审题，分析数量关系，设两车相遇时间为“$1 \div (\frac{1}{6}+\frac{1}{10}) = \frac{15}{4}$(小时)$\longrightarrow$甲速度比乙快 $90 \div \frac{15}{4} = 24$(千米)$\longrightarrow$对应全程的分率是$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}\longrightarrow 24 \div \frac{1}{15} = 360$(千米)

算式：

$$90 \div [1 \div (\frac{1}{6}+\frac{1}{10})] \div (\frac{1}{6}-\frac{1}{10})$$
$$= 90 \div [1 \div \frac{4}{15}] \div \frac{1}{15}$$
$$= 90 \div \frac{15}{4} \div \frac{1}{15}$$
$$= 360(\text{千米})$$

答：两地相距 360 千米。

例 4　甲、乙两船同时从两个码头出发，向同一方向航行，乙船在前，甲船在后，6 小时后，甲船追上乙船。已知两船每小时共航行 40 千米，乙船的速度是甲船的$\frac{2}{3}$，求两个码头相距多少千米？

思考途径：审题，分析数量关系，由于甲、乙两船航行方向相同，从而判定此题是追及问题$\longrightarrow$已知甲船追上乙船为 6

小时和两船速算的和为每小时 40 千米，想到要求出两船速度的差——→已知两船速度的和为 40(千米/小时)，设甲船的速度为 1，乙船的速度为$\frac{2}{3}$，所以，40 千米/小时的速度是相当于甲船速度的$(1+\frac{2}{3})$倍。——→甲船速度为 $40\div(1+\frac{2}{3})=24$(千米)乙船速度为：$40-24=16$(千米)——→甲、乙两船速度的差为：$24-16=8$(千米)——→代入公式：$8\times6=48$(千米)

算式：

$$\{40\div(1+\frac{2}{3})-[40-40\div(1+\frac{2}{3})]\}\times6$$

$$=\{40\div1\frac{2}{3}-[40-40\div1\frac{2}{3}]\}\times6$$

$$=\{40\div1\frac{2}{3}-16\}\times6$$

$$=8\times6$$

$$=48(\text{千米})$$

答：两个码头相距 48 千米。

例 5 解放军某部快艇追击敌舰，追到 A 岛时，敌舰已逃离该岛 15 分钟了。敌舰每分钟行 1000 米，解放军快艇每分钟行 1360 米。在距离敌舰 600 米处可开炮射击。问解放军快艇从 A 岛出发经过多少分钟可开炮射击敌舰？

思考途径：审题，分析数量关系，确定这道题是追及问题——→先求出解放军快艇追到 A 岛时，敌舰逃离 A 岛有多少米：1000×15 得 15000 米——→解放军快艇每分钟比敌舰快多少米：$1360-1000=360$(米)——→距离敌舰 600 米即可开炮射击，实际上敌舰在我前方的米数为：$15000-600=14400$(米)

——→经过多少分钟可开炮射击敌舰，14400÷360=40(分钟)

算式：

$(1000\times15-600)\div(1360-1000)$

$=14400\div360$

$=40$(分钟)

答：经过40分钟可开炮射击敌舰。

思考途径(2)：审题，分析数量关系，用方程法解——→设经过x分钟可开炮射击敌舰，——→经过x分钟，解放军快艇可前进1360x，这时，敌舰又往前逃跑了1000x——→解放军快艇从A岛出发追击敌舰时，敌舰已离开A岛15000(1000×15)米——→为了能在距离敌舰600米处开炮射击它，在x分钟之内，解放军快艇要比敌舰多行驶14400米(15000－600)，即1360x比1000x多14400米——→据此，可列出数量关系式。

解　设经过x分钟可开炮射击敌舰。

$$1360x-1000x=14400$$

$$360x=14400$$

$$x=40$$

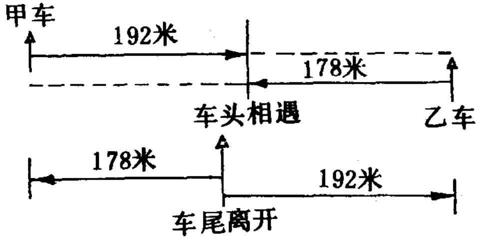
答：经过40分钟可开炮射击敌舰。

例6　在有上、下行的轨道上，两列火车相对开来，甲列车长192米，每秒钟行驶20米，乙列车长178米，每秒钟行驶17米，从车头相遇到车尾离开需要多少秒钟？

思考途径：审题，分析数量关系，想到把两列火车的车尾作为两个标准点，当两列火车的车头相遇时，这两个标准点之间的距离就是这两列火车的车身长的和，即192＋178=370

（米）→两列火车相对行驶时，可以理解为两个标准点相对行驶，当这两个标准点相遇时，也就是两列火车车尾离开的时候。 →两列火车

作示意图助析：



每秒钟行驶路程之和是 20＋17＝37（米）→从车头相遇到车尾离开需要多少秒钟：370÷37＝10（秒）

算式：

$(192+178)\div(20+17)$

$=370\div37$

$=10$（秒）

答：从车头相遇到车尾相离需要 10 秒钟。

练　习　六

1. 东西两地相距 217.5 千米，甲车以每小时 25 千米的速度从东地到西地。1.5 小时后，乙车从西地出发到东地，再过 3 小时两车还相距 15 千米，乙车每小时行多少千米？

2. 甲、乙两人在周长为 120 米的圆池边散步，甲每分钟走 8 米，乙每分钟 7 米。现两人从同一地点反向行走，问第二次相遇在出发后几分钟？

3. 甲车的速度是乙车速度的$\frac{5}{6}$，两车从 A、B 两站同时相向而行，在离中点 4 千米处相遇，求两站的距离。

4. 甲、乙两人从相距 1.1 千米的两地相向而行，甲每分钟行 65 米，乙每分钟行 75 米。甲出发 4 分钟后，乙才开始起步。乙带了一只狗，和乙同时出发，狗以每分钟 150 米的速度向甲奔去，遇到甲后立即回头向乙奔去，遇到乙后又回头向甲奔去，直到甲、乙两人相遇时狗才停住。这个狗共奔跑了多少路程？

5. 李山由乡里到县里去办事，每小时走 4 千米，这与预定到达时间还差 1.5 千米。如果每小时走 5.5 千米，比预定到达时间又会多走 4.5 千米。问乡里距离县城多少千米？

6. 在双轨铁路线上对开的两列火车相遇。第一列车的速度是每小时 36 千米，第二列车的速度是每小时 45 千米。第二列车上一位旅客从窗口发觉第一列车从旁开过时用了 36 秒钟，问第一列火车有多长？

7. 两车分别相距 480 千米的甲、乙两地同时相对开出，从甲地开出的汽车每小时行 48 千米，从乙地开出的汽车每小时行 60 千米，4.5 小时后两车相距多少千米？

8. 甲乙两人骑自行车同时从 A 地出发去 B 地，甲每小时行 15 千米，乙每小时行 12 千米。甲行 30 分钟后，因事用原速返回 A 地，在 A 地逗留了半小时，又以原速去 B 地，结果甲、乙二人同时到达 B 地，求 A、B 两地的距离。

9. 甲乙从东镇，丙从西镇同时相向出发，甲每小时行 4.5 千米，乙每小时行 5 千米，丙每小时行 5.5 千米。丙遇乙后 12 分钟再遇甲。求两镇距离是多少千米？

工程问题一般是求工作时间。它的特例之一是“合作问题”。在合作问题中，合作的工作效率等于独立工作效率的和，犹如相遇问题中，合速度等于各分速度之和。工程问题一般不用一元整式方程来解。但对合作完成时间的问题，有时可用一元整式方程来解。要注意的是，列方程常用的等量关系是“总量不变”。

例 1　一项工程，甲独做要 10 天，乙独做要 12 天，丙独做要 15 天。现由甲乙合做 4 天，剩下的工程由丙单独做，还要几天可以完成？

思考途径(1)：审题，分析数量关系，由甲单独做要 10 天，乙单独做要 12 天，丙单独做要 15 天，那么甲、乙、丙的工作效率分别是$\frac{1}{10}$、$\frac{1}{12}$、$\frac{1}{15}$ ⟶ 甲、乙两人合作 4 天，完成全部的工作量是：$(\frac{1}{10}+\frac{1}{12})\times 4$ 得$\frac{11}{15}$ ⟹ 剩下的工作量是：$1-\frac{11}{15}$得$\frac{4}{15}$ ⟶ 丙单独完成余下的工作量，用$\frac{4}{15}\div\frac{1}{15}$，得 4，即 4 天完成。

算式：

$$\left[1-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right)\times 4\right]\div\frac{1}{15}$$
$$=\left[1-\frac{11}{60}\times 4\right]\div\frac{1}{15}$$
$$=\frac{4}{15}\div\frac{1}{15}$$
$$=4(\text{天})$$

思考途径(2)：审题，分析数量关系 ⟶ 先求出剩下的工程占全部工程的几分之几，剩下的工程由丙单独来完成 ⟶ 因为丙的工作效率一定，所以丙完成的工作量与所需时间成

正比例，即丙完成剩下工程所需的时间占他完成全部工程所需时间的几分之几，应相当于他完成剩下工程占全部工程的几分之几$\longrightarrow$用丙完成全部工程需要的时间去乘以这个分率，就可以得到丙完成剩下工程所需的时间。

算式：

$$15\times\left[1-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right)\times 4\right]$$
$$=15\times\left[1-\frac{11}{60}\times 4\right]$$
$$=15\times\frac{4}{15}$$
$$=4(\text{天})$$

答：丙单独完成剩下的工作量要 4 天。

例 2 某工程，甲、乙合作需要 12 天才能完工，后来甲因事停工 5 天，以至完工日期延长 3 天。如果这项工程由甲、乙二人单独来做，那么各需要多少天完成？

思考途径：审题，分析数量关系，认为解题的关键是甲停工 5 天，才使工期延长 3 天才完成$\longrightarrow$延长 3 天的工作量是 $\frac{1}{12}\times 3$ 得$\frac{1}{4}$，$\longrightarrow$把整个工程作为单位“1”$\longrightarrow$延长 3 天的工作量（$\frac{1}{12}\times 3$），也就是甲 5 天的工作量，因此，甲每天的工作量是“$\frac{1}{12}\times 3\div 5$”$\longrightarrow$由甲的工作效率，可求出整个工程甲独做需要的天数$\longrightarrow$再进一步求出乙独做需要的天数。

算式：

$$1\div\left(\frac{1}{12}\times 3\div 5\right)$$

$=1\div\frac{1}{20}$

$=20$(天)……甲独做需要的天数。

$1\div(\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\times3\div5)$

$=1\div\frac{1}{30}$

$=30$(天)……乙独做需要的天数。

答：单独完成这项工程，甲、乙分别需要 20 天和 30 天。

例 3 一个水池装有三个进水管，单开甲管 24 分钟可把空池注满，单开乙管 30 分钟可把空池注满。甲乙两管同时开 4 分钟后又开丙管，再经过 7 分钟将空池注满。如果一开始就三管齐开，几分钟就可把空池注满？

思考途径(1)：审题，分析数量关系，考虑到甲乙两管从开始到注满水池共开了 11(7+4)分钟，共注满池水的$(\frac{1}{24}+\frac{1}{30})\times11=\frac{33}{40}\Longrightarrow$剩下的工作量，是丙 7 分钟注的水，因此，可以求出丙管每分钟注入满池水的几分之几⟶求出三管齐开注满水池所需要的时间。

算式：

$1\div\{[1-(\frac{1}{24}+\frac{1}{30})\times(4+7)]\div7+\frac{1}{24}+\frac{1}{30}\}$

$=1\div\{[1-\frac{3}{40}\times11]\div7+\frac{1}{24}+\frac{1}{30}\}$

$=1\div\{\frac{7}{40}\div7+\frac{1}{24}+\frac{1}{30}\}$

$=1\div\frac{1}{10}$

$=10$(分钟)

答：三管齐开 10 分钟可把空池注满。

思考途径(2)：审题，分析题中数量关系，想到先求出单独开两管，注满空池所需要的时间——►再求三管齐开注满空池所需要的时间。

算式：

$$7\div[1-(\frac{1}{24}+\frac{1}{30})\times(4+7)]$$

$$=7\div[1-\frac{33}{40}]$$

$$=7\div\frac{7}{40}$$

$=40$(分)

$$1\div(\frac{1}{24}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40})$$

$$=1\div\frac{1}{10}$$

$=10$(分)

答：三管齐开 10 分钟可把空池注满。

例 4 货车从甲城到乙城需 8 小时，客车从乙城到甲城需 6 小时。货车开了 2 小时后，客车出发，问客车出发后几小时相遇？

思考途径：审题，分析数量关系，想到题目虽是讲的相遇问题，但与一般的相遇问题不同，没有具体的数量，可将它转化为工程问题——►假设甲、乙两城的距离为"1"，按工程问题的思考途径，用"工作总量÷工作效率"，可求出工作时间。

算式：

$$\left(1-\frac{1}{8}\times 2\right)\div\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\div\frac{7}{24}$$

$$=2\frac{4}{7}\text{（小时）}$$

答：客车出发后 $2\frac{4}{7}$ 小时相遇。

例 5 有一批砖，如果用 4 辆卡车，3 天可以运完；如果用 5 辆马车，4 天可以运完；如果用 24 辆小板车，5 天可以运完。现由 2 辆卡车，4 辆马车，9 辆小板车共同运 2 天后，全部改用小板车运，必须在 2 天运完。问后两天每天要多少辆小板车？

思考途径（1）：审题，分析数量关系，想到三种车的工作效率是间接提供的，因此，先求出它们的工作效率。卡车的工作效率是 $\frac{1}{4\times 3}$，马车的工作效率是 $\frac{1}{4\times 5}$，一辆小板车的工作效率是 $\frac{1}{24\times 5}$ ⟶ 前 2 天共运走这批砖的 $\left(\frac{2}{4\times 3}+\frac{4}{4\times 5}+\frac{9}{24\times 5}\right)\times 2=\frac{53}{60}$，⟶ 还剩这批砖的 $1-\frac{53}{60}=\frac{7}{60}$ ⟶ 再算出两天要运完余下的砖，必须要 $\frac{7}{60}\div\left(\frac{1}{24\times 5}\times 2\right)=7$（辆）

算式：

$$\left[1-\left(\frac{2}{4\times 3}+\frac{4}{4\times 5}+\frac{9}{24\times 5}\right)\times 2\right]\div\left(\frac{1}{24\times 5}\times 2\right)$$

$$=\left[1-\frac{106}{120}\right]\div\frac{1}{60}$$

$$=\frac{7}{60}\div\frac{1}{60}$$

$=7$（辆）

答：要 7 辆小板车。

练　习　七

1. 一项工程，甲、乙合作，10 天完成，甲、乙工作效率的比是 2 ∶ 3，求单独完成这项工程各需多少天？

2. 一项工程甲乙合作要 60 天完成，甲独做要 100 天，甲先工作了若干天后，乙接着工作，直到完成共用了 125 天。甲、乙各工作了多少天？

3. 一件工作，甲每天工作 8 小时，12 天可以完成，若由乙来做，每天工作 9 小时，8 天可以完成。现在甲乙共同工作，每天工作 6 小时，几天可以完成？

4. 甲、乙两台抽水机共同工作，10 小时能把水池中的水抽完。两台抽水机共同工作 4 小时后，由乙机单独抽完余下的水还需要 18 小时。问乙机单独抽完全池的水需要多少小时？

5. 有一件工程，甲独做 20 天可以完成这件工程的 $\frac{1}{9}$，乙独做 9 天可以完成这件工程的 $\frac{1}{10}$，甲、乙两人合做，需要几天可以完成这件工程的一半？

6. 甲、乙两队合做一件工程，原计划 24 天完成，现在由乙队独做 10 天后，甲乙两队合做比原计划少用 4 天完成任务。求甲队的工作效率是乙队的百分之几？

7. 一项任务，师徒合作 2 天完成了全部任务的 $\frac{3}{5}$，接着师傅因故停工 2 天，后继续与徒弟合作，已知师徒工作效率之比

用题可通过画“线段图”来揭示“量”与“率”的对应关系。它可以帮助在复杂的条件与问题中，理清思路，正确地进行分析、综合、判断和推理。也有利于逻辑思维能力的发展。

例 1 小红看了一本科技书，看了 3 天，剩下 66 页，如果用这样的速度看 4 天，就剩下全书的$\frac{2}{5}$，这本书有多少页？

思考途径：审题时，想到把全书的页数看作单位“1”，题目要求全书多少页，也就是求单位“1”，用除法计算$\longrightarrow$关键是要求题目中唯一的已知量 66 页的对应分率$\longrightarrow$一本书看了 4 天，剩下全书的$\frac{2}{5}$，推理，4 天看了$\frac{3}{5}(1-\frac{2}{5})$，一天看全书的$\frac{3}{20}(\frac{3}{5}\div 4)\longrightarrow$3 天看全书的$\frac{3}{20}\times 3=\frac{9}{20}\longrightarrow$剩下的 66 页的对应分率为：$1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}\longrightarrow$对应数 66 页除以它的对应分率$\frac{11}{20}$，可求得全书的页数。

算式：

$$66\div[1-(1-\frac{2}{5})\div 4\times 3]$$

$$=66\div[1-\frac{3}{5}\div 4\times 3]$$

$$=66\div\frac{11}{20}$$

$=120$(页)

答：这本书共有 120 页。

例 2 一本故事书有 120 页，第一天看了全书的$\frac{1}{4}$，第二

天看了余下页数的$\frac{2}{3}$，剩下的第三天看完，第三天看了多少页？

思考途径(1)：审题，分析题中的数量关系，想到先求出第一天看的页数：$120\times\frac{1}{4}=30$(页)⟶进而求出余下的页数$120-30$得90(页)⟶求第二天看的页数：$90\times\frac{2}{3}=60$(页)⟶求第三天看的页数：$120-30-60=30$(页)

算式：

$$120-120\times\frac{1}{4}-(120-120\times\frac{1}{4})\times\frac{2}{3}$$
$$=120-30-90\times\frac{2}{3}$$
$$=120-30-60$$
$$=30(\text{页})$$

思考途径(2)：审题，分析数量关系，想到解题关键是求第三天看的页数占全书页数的几分之几⟶先求出第一天看后余下的页数占全书页数的几分之几$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$⟶求出第三天看的页数占余下的几分之几：$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$⟶求出第三天看的页数占全书页数的几分之几：$\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$⟶求第三天看的页数：$120\times\frac{1}{4}=30$(页)

算式：

$$120\times[(1-\frac{1}{4})\times(1-\frac{2}{3})]$$

思考途径：审题，分析数量关系，想到解题的要求是“超过计划的百分之几”，进而想到题中已经提供了计划数，因此，要找出超过数的前提是寻求实际数⟶10天完成计划的45%，算出计划产量45%是：$3200\times45\%=1440$（双）⟶算出实际每天产多少双：$1440\div10=144$（双）⟶求出每月实际产量：$144\times30=4320$（双）⟶求出超出计划的双数：$4320-3200=1120$（双）⟶求超出计划的百分之几：$1120\div3200=35\%$

算式：

$(3200\times45\%\div10\times30-3200)\div3200$

$=1120\div3200$

$=35\%$

答：超过计划的35%。

例4 育才小学举行三年级数学竞赛，参加竞赛的女生人数比男生多28名，根据成绩，男生全部列入优良，女生则有$\frac{1}{4}$没有达到优良成绩，男女生取得优良成绩的共计42名，参加比赛的男女生人数占全年级的20%，三年级共有学生多少人？

思考途径：审题，分析数量关系；题中告诉我们参加竞赛的女生人数比男生多28名，所以参加比赛的男生人数加上28人，就等于参加比赛的女生人数⟶参加比赛的女生人数与达到优良成绩的女生人数的和是：$42+28=70$（名）⟶把参加比赛的女生人数看作单位“1”，这样，70人的对应分率为：$1+(1-\frac{1}{4})$⟶参加比赛的女生人数：$(42+28)\div(1+1$

$-\frac{1}{4})=40$(名)——►参加比赛的女生人数减去 28 人，就是参加比赛的男生人数：40－28＝12(名)——►根据男、女生人数和的 20%求出三年级人数：52÷20%＝260(名)

算式：

$$[(42+28)\div(1+1-\frac{1}{4})\times2-28]\div20\%$$

$$=[70\div1\frac{3}{4}\times2-28]\div20\%$$

$$=52\div20\%$$

$=260$(名)

答：三年级共有 260 名学生。

例 5 两数之和等于 165，小数的$\frac{1}{5}$等于大数的$\frac{1}{6}$，求这两个数。

思考途径：审题，分析数量关系：已知小数的$\frac{1}{5}$等于大数的$\frac{1}{6}$，可以求出小数是大数的$\frac{5}{6}$($\frac{1}{6}\div\frac{1}{5}$)，就是把大数看作 1，小数为$\frac{5}{6}$——►两数的和 165 相当于大数的($1+\frac{5}{6}$)倍，由此，可以求出大数，进而求出小数。

算式：

$$165\div(1+\frac{1}{6}\div\frac{1}{5})$$

$$=165\div1\frac{5}{6}$$

$=90$··················(大数)

$$90\times(\frac{1}{6}\div\frac{1}{5})$$

$=90\times\frac{5}{6}$

$=75$…………………(小数)

答:大数是 90,小数是 75。

例 6 光明初级中学一年级学生人数占全校学生人数的 25%,一年级与三年级学生人数的比是 3∶4。已知一年级比三年级学生少 40 人,一年级有学生多少人?

思考途径:审题,分析数量关系:要求一年级学生人数,必须知道全校学生人数(标准量"1")——→三年级学生人数是全校学生人数的 $(1-25\%)\times\frac{4}{3+4}=\frac{3}{7}$——→一、三年级人数差相当于全校学生人数的几分之几:$\frac{3}{7}-25\%=\frac{5}{28}$——→40 人相当于 $\frac{5}{28}$,据此,可求出全校学生人数:$40\div\frac{5}{28}=224$(人)——→再求出一年级学生人数:$224\times25\%=56$(人)

算式:

$40\div[(1-25\%)\times\frac{4}{3+4}-25\%]\times25\%$

$=40\div[\frac{3}{4}\times\frac{4}{7}-25\%]\times25\%$

$=40\div\frac{5}{28}\times25\%$

$=224\times25\%$

$=56$(人)

答:一年级有学生 56 人。

练　习　八

1. 小红看一本故事书，看了 3 天，剩下 77 页，如果用这样的速度看 4 天，就剩下全书的$\frac{2}{5}$，这本书共有多少页？

2. 学校图书室里有 36 名学生在看书，其中女生占$\frac{4}{9}$，后来又有几名女生来看书，这时女生人数占所有看书人数的$\frac{9}{19}$，问后来又有几名女生来看书？

3. 用绳子测量井深，把绳子三折来量，井外余 4 米，把绳子四折来量，井外余 1 米，求井深和绳长。

4. 甲桶食油比乙桶食油多 2.4 千克，如果从两桶里各取出 0.6 千克食油后，甲桶余油的$\frac{5}{21}$等于乙桶余油的$\frac{1}{3}$。问两桶原来各有食油多少千克？

5. 某工厂甲车间的人数比乙车间的人数的$\frac{4}{5}$少 30 人，如果从乙车间调 10 人到甲车间，甲车间的人数是乙车间人数的$\frac{3}{4}$。求原来每个车间的人数。

6. 学校植树，第一天完成计划的$\frac{3}{8}$，第二天完成余下计划的$\frac{2}{3}$，第三天植树 55 棵，结果超过计划的$\frac{1}{4}$，原计划植树多少棵？

7. 一块地由 3 台拖拉机耕完，甲耕了这块地的$\frac{2}{5}$，乙耕的比丙耕的多$\frac{1}{4}$，乙比甲少耕 100 公亩，乙耕了多少公亩？

8. 解放军某部在“六一”节时，把两筐苹果分送给三个

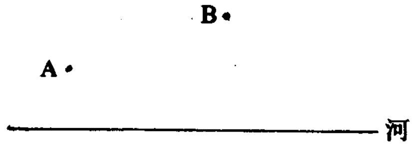
幼儿园。第一幼儿园分得全部的$\frac{5}{12}$，第二、三幼儿园分得苹果的比是 3∶4，已知第一筐苹果的重量为第二筐苹果的$\frac{7}{8}$，如果从第二筐中拿出 8 千克放到第一筐中，两筐苹果重量相等。求三个幼儿园各得苹果多少千克？

9. 从甲地到乙地要走 2 天，第一天走了全程的$\frac{1}{2}$又 72 千米，第二天走了第一天的$\frac{1}{3}$，两天分别走了多少千米？

10. 新华小学六年级共有学生 140 人，分成三个小组进行植树活动，已知第一小组和第二小组人数的比是 2∶3，第二小组和第三小组人数的比是 4∶5，这三个小组各有多少人？

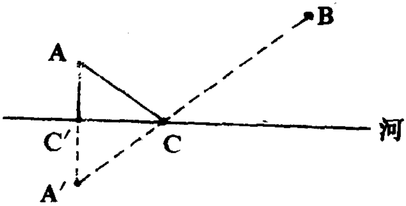
（5）其它应用题

例 1 王大伯从家（A 点处）去河边挑水，然后把水挑到积肥潭里（B 点处）。请帮他找一条最短的路线，在右图表示出来，并写出过程。

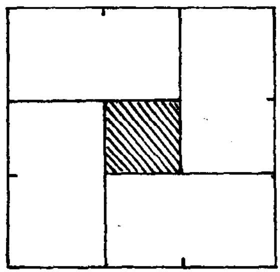


思考途径：审题，分析数量关系，从图中可以看出是一个三点连线最短问题 ⟶ 我们只知道两点之间的直线距离为最短，解题关键是把三点变成两点，再由两点得出第三点 ⟶ 根据轴对称图形，可以把河边看作对称轴，找出 A 点垂直于河边的轴对称点 A′ 点 ⟶ 作 AC′ 垂直于河边，并延长到 A′，

使 AC′=C′A′然后连接 A′B 交河边于 C。那么，走 ACB 这条路线最短。



例 2 四个一样的长方形和一个小的正方形拼成了一个大的正方形。(如图)大正方形的面积是 49 平方米，小正方形的面积是 4 平方米。求长方形的短边长度是几米？



思考途径：审题，分析题中数量关系："四个一样的长方形和一个小的正方形，拼成了一个大的正方形"，它的面积是 49 平方米，想到 7×7=49，所以，大正方形的边长是 7 米—→2×2=4，小正方形的边长是 2 米—→大正方形的边长是两个长方形的短边与小正方形的边长的和。所以，长方形的短边的长度是：(7—2) ÷2=2.5 (米)

算式：

(1) 因为 49=7×7 所以大正方形的边长为 7 米。

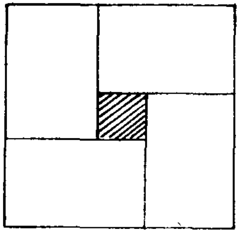
(2) 因为 4=2×2 所以，小正方形的边长为 2 米。

(3) (7—2) ÷2=2.5 (米) ……长方形短边的长度。

例 3 从一块正方形的木板锯下宽为$\frac{1}{2}$米的一个木条以

后，剩下的面积是$\frac{65}{18}$平方米。问锯下的木条面积是多少平方米？

思考途径：审题，分析数量关系：从题意看出这道题的基本数量关系是已知两数的差与积，求这两个数⟶我们可以联想到下面的图形，把锯下来的木板作为图中的一个长方形，那么，中心的小正方形的边长就是这个长方形的长与宽的差⟶推理，得出$\frac{65}{18}$平方米的4倍再加上$\frac{1}{2}$米的平方，就是大正方形的面积，而大正方形的边长正好是长方形长与宽的和 $\frac{65}{18}\times4+(\frac{1}{2})^2=\frac{529}{36}$（平方米）⟶



大正方形的边长是$\frac{23}{6}$米⟶这样，把题目的基本数量关系转化为已知两个数的和与差，求这两个数，正方形木板的长是：$(\frac{23}{6}+\frac{1}{2})\div2=\frac{13}{6}$（米）⟶锯下木条的面积是：$\frac{13}{6}\times\frac{1}{2}=1\frac{1}{12}$（平方米）

算式：

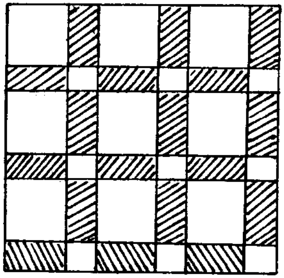
$\frac{65}{18}\times4+(\frac{1}{2})^2$

$=\frac{65}{18}\times4+\frac{1}{4}$

$=\frac{529}{36}$（平方米）

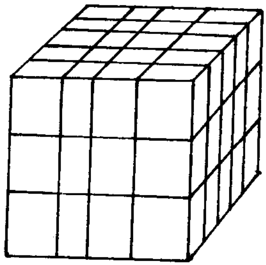
$(\frac{23}{6}+\frac{1}{2})\div2=\frac{13}{6}$（米）……正方形木板的长

4. 有一块黑白格子方布（如图），白色大正方形边长是14 厘米，白色小正方形边长是6 厘米。问这块方布中白色的面积占方布总面积的百分之几？



（第 4 题）

5. 一个正方体形状的木块，棱长 1 米。沿水平方向将它锯成 3 片，每片又锯成 4 长条，每长条又锯成 5 小块，共得大大小小的长方体 60 块（如图）表面积的和是多少平方米？


（第 5 题）

3·3 整数的有关问题

整数的有关问题，是数论中的一些最基本的问题，这些问题的学习，对今后进一步学习有较大的影响。对我们参加数学竞赛来说，也是十分重要的。

（1）整除概念、数的整除特征

整除问题是小学数学的一个重要的部分，它的内容是十

分丰富的。学好这些知识，一方面为今后的学习打下良好的数学基础，同时也有利于发展我们的思维能力。

自然数和零都是整数。而我们在这里研究整除问题，一般指的是自然数，不包括零。

数的整除问题在小学教材里，我们就知道这么几个问题：

①数甲除以数乙，除得的商正好是整数而没有余数，我们就说，甲能被乙整除，或乙整除甲。如用 a 表示数甲，用 b 表示数乙。则有 a 能被 b 整除，或 b 整除 a。简便书写方法把 b 整除 a，写作 $b|a$，显然从这里也看出 b 是 a 的因数(约数)，a 是 b 的倍数。

例如　$7|21$ 表示　7 整除 21，7 是 21 的因数或约数，21 是 7 的倍数。

②1 是任何数的约数。

③“0”不能做除数，“0”是任何数的倍数。

为了更好地学习整除的有关问题，我们还应明确如下几点普通的关于整除的数学知识：

①四种关于整除的说法。a 能被 b 整除，a 是 b 的倍数，b 能整除 a，b 是 a 的约数。说法虽然不同，但本质是一样的。

②当用“n”表示整数时，那么，$n+1$、$n+2$、$n+3$ 则表示三个连续的整数。

整除的一些性质，常用的有：

①如果 a 能整除 b，b 能整除 c，那么，a 能整除 c。

例如，3 能整除 6，6 能整除 18，那么，3 能整除 18。

②如果 a 与 b 是互质数，且 a、b 都能整除 c，那么，$a\times b$ 也能整除 c。

例如，3 与 2 是互质数，它们都能整除 12，那么，$3\times 2=6$，

6 能整除 12。

③如果一个数 a 能分别整除 b 和 c，那么，a 能整除 $b+c$ 与 $b-c$（b 不小于 c）。

例如，3 能整除 12 与 18，那么，3 能整除 30（12＋18）与 6（18－12）。

④如果一个数 a 能整除 b，c 是任意一个整数，那么，a 能整除 $b\times c$。

例如，5 能整除 25，那么，5 能整除 25×4，即，$25\times c$（c 为任意整数）。

⑤如果 a 与 b 是互质数，且 a 能整除 $b\times c$ 那么，a 能整除 c。

例如，2 和 3 是互质数，2 能整除 $3\times 6=18$，那么，2 能整除 6。

能被一个数整除的特征：

①末位数是 0、2、4、6、8 的数，能够被 2 整除。

②末位数是 0、5 的数，能被 5 整除。

③一个数的末两位数如果能被 4 或 25 整除，那么，这个数能够被 4 或 25 整除。

例　4527 12 能被 4 整除。

　　4527 25 能被 25 整除。

④一个数的末三位数如果能被 8 或 125 整除，那么，这个数能够被 8 或 125 整除。

例　427008 能被 8 整除。

　　375250 能被 125 整除。

⑤一个数的各数位上的数的和，如果能被 3 整除，那么，这个数就能被 3 整除。

例　1230 能被 3 整除。

⑥一个数的各数位上的数的和，如果能被 9 整除，那么，这个数就能被 9 整除。

例　708012 能被 9 整除

⑦一个数的奇数位上各数的和与偶位上各数的和之差（指大数减小数），如果能被 11 整除，那么，这个数就能被 11 整除。

例　231759的奇数位上各数的和为：9+7+3=19，偶数位上各数的和为：5+1+2=8，19−8=11，11 能被 11 整除，所以 231759 能被 11 整除。

⑧一个数割去末位数字，再从留下的数中减去所割数字的两倍，这样，一次一次地割减下去，最后得到的数是 7 的倍数（包括 0），那么，这个数就能被 7 整除。

例 527	1	……割去末位数字 1
2		……减去 1 的两倍
52	5	……割去末位数字 5
10		………… 减去 5 的两倍
42		………… 是 7 的倍数

所以 5271 能被 7 整除。

（这种判断方法，称作“割补法”。）

例 1　有一个四位数能被 72 整除，它的个位数既是偶数，又是质数，个位数与千位数的和为 10，另两位组成的数是质数。求这个四位数。

思考途径：审题，分析题中条件与要求（逐句都要透彻理

解：要求一个四位数能被 72 整除）⟶个位是 2，根据“个位数是偶数又是质数”确定的⟹根据“个位数与千位数的和为 10”，所以，确定千位数为 8（10－2＝8）⟹根据这个四位数能被 72 整除，想到 72＝9×8，在这里 9 与 8 是互质数，所以，它既能被 9 整除，又能被 8 整除⟹推理得出：它的十位数与百位数的和只能是 18－10＝8，或者 27－10＝17，⟶据此，这四位数可能是：

8 082，8 802；8 172，8 712；8 262，8 622；8 352，8 532；8 442；8 892，8 982。

⟶上述 11 个数中，能被 8 整除的（根据整除特征（4）检验）有 8 712 和 8 352，⟶根据“另两位组成的数是质数”这个条件，确定 8 712 符合所求的四位数。

例 2 五位数 54□7□中的□内填上什么数字才能被 3 整除，且含有约数 5？写出这些数。

思考途径：审题，分析题中条件与要求⟶根据“这个数含有约数 5”，个位数只能填上 0 或 5⟹当个位数填 0 时，百位上可填 2、5、8⟹当个位数填 5 时，百位上可填 0、3、6、9⟶所以，推理得出如下几个数：

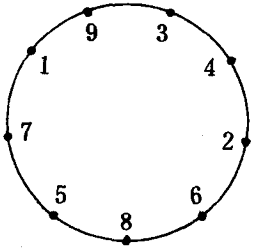
54270，54570 54870；54075，54375，54675，54975。

例 3 求能被 45 整除的形如$\overline{A1990B}$的六位数（A、B 是取 0—9 中的数字）。

思考途径：审题，分析题中数量关系⟶根据这个数能被 45 整除，所以$\overline{A1990B}$一定能被 5 和 9 整除（45＝5×9）⟶根据能被 5 整除这个要求，确定 B＝0 或 B＝5⟹当 B＝0

时，根据能被 9 整除的特征，确定 A＝8⟹当 B＝5 时，同样，可确定 A＝3⟶所以要求的六位数是 819900，319905

例 4 把 1—9 九个数字，按下图所示的顺序排成一个圆圈。请你在两个数字之间将圆圈剪开，分别按顺时针方向和逆时针方向依次取这些数字，排成两个九位数。(例如，在 1 和 7 之间剪开，排成 193426857 和 758624391)，如果要求剪开后所得到的两个九位数的差能被 396 整除，那么，剪开处左、右两个数字的乘积应是多少？



思考途径：审题，分析数量关系，回忆我们掌握的数学知识⟶根据“任意一个三位数、五位数，七位数或九位数，若将此数的顺序颠倒后，与原数之差能被 9 9 整除(如 391－193＝198，198÷99＝2)。⟶因为 $396=2^2\times3^2\times11=4\times9\times11$，所以，两个九位数之差能被 4、9，11 整除，那么，这个差也能被 396 整除⟶因为一个九位数和它的数字倒转后排成的数相减，差一定是 9 的倍数，所以，我们只要考虑这两个九位数之差能被 4 和 11 的整除性⟶从数的奇、偶性考虑，从 5 与 8，3 与 4 之间剪开，所得的两个九位数的差都是奇数，故不能被 4 整除⟶从 1 和 7 之间剪开得到的两个九位数，末两位之差 91－57＝34，34 不能被 4 整除，所以，这两个九位数的差也就不能被 4 整除⟶通过验证，从其它处分别剪开所得的六组九位数，末两位数之差都是 4 的倍数，因此，这六组九位数

的差，都能被 4 整除，⟶ 上述六组九位数的差分别是：

758406132，574900524，170603928，

441801756，232801668，133098768

⟶ 因为它们奇数位上一位数的和与偶数位上一位数的和相减的差都能被 11 整除，所以，这些数都能被 11 整除 ⟶ 所以，从 1 与 9，9 与 3，4 与 2，2 与 6，6 与 8，5 与 7 之间将圆圈剪开，所得的两个九位数的差都能被 396 整除。

例 5 六位数$\overline{7E36F5}$是 1375 的倍数，求这个六位数。

思考途径：审题，分析数量关系 ⟶ 因为 $1375=11\times5^3=11\times125$（把 1375 分解质因数），所以，末三位数$\overline{6F5}$，一定要能被 375 整除，故推算出 $F=2$ ⟹ 根据题意，所求的这个数能被 11 整除，故 $(7+3+2)-(E+6+5)=1-E$ 应是 11 的倍数，故推算出，$E=1$ ⟶ 这个六位数是 713625。

练 习 十

1. 3 $\square$ 6 $\square$ 5，这个五位数是 75 的倍数，且五位数字无重复，满足上述条件的五位数有哪些？

2. 五位数$\overline{4D97D}$能被 3 整除，它的最末两位数字组成的$\overline{7D}$又能被 6 整除，求这个五位数。

3. 当 n 是整数时，证明 $6|n(n+1)(n+2)$。

4. 已知六位数 $\square$ 8919 $\square$ 能被 33 整除，那么这个六位数是多少？

5. 某人在纸上写了一个五位数

3 $\square$ 6 $\square$ 5

这个五位数是 75 的倍数，在满足上述条件的五位数中，最大

偶数×奇数=偶数

奇数×偶数=偶数

偶数÷奇数=偶数(如 18÷3=6)

但是奇数永远不能被偶数整除。

例 1 1+2+3+……+1990 加得的和是奇数还是偶数?

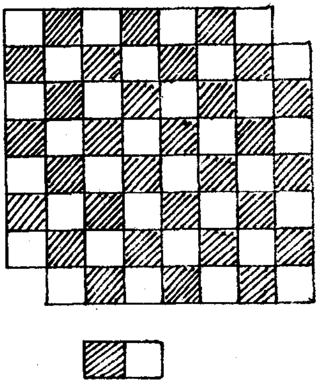
思考途径:审题时,想到不必计算 1+2+3+……+1990 的和是多少,要根据奇偶数加法的性质进行判断⟶因为偶数加上一个整数 a,不会改变 a 的奇偶性⟹2+4+6……+1990 得的和是偶数⟹1+3+5+1989 是 995 个奇数相加,得的和是奇数⟹根据"奇数+偶数=奇数",所以,1+2+3+……+1990 的和是奇数。

例 2 有六只杯子全部口向下置于桌上,如果每次翻动其中的五只杯子,你能否经过若干次翻动,把六只杯子翻成全部口向上?需要翻动几次?

思考途径:审题,分析题中的条件与要求⟶想到(实际是试验后发现)杯子翻动奇数次后,原来杯口向下的就变成杯口向上了,而翻动偶数次后,原来杯口向下的仍旧还是向下⟶把杯子编上 1—6 的号码⟹第一次翻动时,不动 1 号杯,第二次翻动时,不动 2 号杯,第三次翻动时,不动 3 号杯……,第六次翻动时,不动 6 号杯⟹这样,我们一共翻动了 6 次,而对每只杯子来说,只翻动了 5 次,由于 5 是奇数,所以在总共翻了 6 次之后,每只杯子的杯口都是口向上了。

例 3 将 8×8 的棋盘左下角和右上角的 1×1 小正方形

剪去。试证：用 31 张 1×2 的小长方形纸片不能完全盖住残缺的棋盘。



证明　把原图 62 个 1×1 小正方形间隔染成黑白二色（如图）。——►把 1×2 小长方形也染成黑白二色——►如果能用 31 个 1×2 的小长方形将残缺的棋盘盖满（盖时，总可以将黑的小正方形与棋盘上黑的小正方形重合），那么，残缺的棋盘应有 31 个黑的 1×1 小正方形和 31 个白的 1×1 小正方形，但棋盘上白的 1×1 小正方形是 32 个，黑的 1×1 小正方形是 30 个，所以，这是一个矛盾——►因此，不可能用 31 张 1×2 的小长方形纸片将残缺的棋盘完全盖住。

（这题的证明方法，是奇偶性分类法的一种变式，叫做简单染色法。）

例 4　自然数中前十位奇数的和是 100，自然数中前十个偶数的和是多少？

思考途径：审题时，分析题目的条件和要求——►从自然数列考虑，2 比 1 大 1，3 比 2 大 1，4 比 3 大 1……20 比 19 大 1，21 比 20 大 1……——►自然数中前 10 个偶数的和比前十个奇数的和大 10——►因为前 10 个奇数的和是 100，所以前 10 个偶数的和是 110。

练 习 十 一

1. 判断下列各数是奇数还是偶数。

(1)101　　(2)10101　　(3)1002

(4)0　　(5)2n　　(6)4n+1

(7)2n−1　　(8)n^2+n+1

2. 前 100 个自然数的和是 5050，前 50 个奇数的和是多少？前 50 个偶数的和是多少？

3. 一次竞赛，共 30 道题，评分标准是：基础分 15 分(即每人都得分)，答对一题加 5 分，不答一题加 1 分，答错一题减 1 分。如果 121 人参赛，问参赛同学得分总和是奇数还是偶数？

4. 一个工人将 99 颗弹子装进两种盒子中，每个大盒子装 12 颗，小盒子装 5 颗，恰好装完，已知盒子数大于 10，问这两种盒子各有多少？

5. 判断算式：

(300+301+……+397)−(151+152+……+197)的结果是奇数还是偶数？

6. 五个连续奇数的和是 1995，求这五个奇数。

7. 一串数排成一行，它的规律是：头两个数都是 1，从第三个数开始，每个数都是前两个数的和，也就是 1，1，2，3，5，8，13，21…，这串数也叫兔子数列，请问：这串数的前 50 个数中有多少个偶数？而自然数列 1 至 50 中又有多少个偶数呢？

8. 1+2+3+……+1990+1991 是奇数还是偶数？

9. 中国象棋盘的任意位置上有一只马，它跳若干步后正好回到原来的位置，问马所跳的步数是偶数还是奇数？

10. 有奇数个杯口向上的杯子，每次同时翻动偶数个杯

此式称为同余式。

关于模 m 的两个同余式，两端分别相加(减)，其结果还是对模(m)的同余式。

例如，66 和 18 对 8 同余数，所以 66－18 的差 48 能被 8 整除。再如，38－14＝24，24 能被 6 整除，说明 38 和 14 对 6 是同余数。

关于对模 m 的两个同余式，两端分别相乘(包括一个同余式的两端同时乘方)，其结果还是对模 m 的同余式。

例 1 正整数 n 有 1990 位，每位上都是 9，这个数除以 13 余几？

思考途径：审题，根据题中条件和要求进行试除 ⟶ 从试除看出 999999 能被 13 整除，因此，把 n 从左到右，每六位划分为一段，即得到 $n=999999\times10^{1984}+999999\times10^{1978}+\cdots\cdots$，要求 n 被 13 除余几，就要看分列最后，剩下的是几位。⟶

$\because 1990\div6=331\cdots\cdots4$

$\therefore n=999999\times10^{1984}+999999\times10^{1978}+\cdots\cdots+999999\times10^{4}+9999$

$\because 9999=13\times769+2$

$\therefore n=(\mathrm{mod}13)$

即 n 被 13 除的余数是 2。

例 2 有 701、1059、1417，2312 四个数，请你找出一个最大的整数，去除这四个数，使所得的余数都相同？

思考途径：审题，分析题中条件和解题要求，⟶ 要求

701、1059、1417、2312 四个数是对于要找的整数的同余数，因此，“要从四个数中任挑两个数，求出它们的差一定能被要找的整数整除”⟶根据这一性质，我们得出如下的式子（用两个数中的较大数减较小数）：

$2312-1417=895=5\times179$

$2312-1059=1253=7\times179$

$2312-701=1611=9\times179$

$1417-1059=358=2\times179$

$1417-701=716=4\times179$

$1059-701=358=2\times179$

显然，从上面的六个式子中，清楚看出来，“179”就是我们要找的整数。

例 3 哪些数除以 7，能使商与余数相同？

思考途径：审题，分析：题目要求：用整数 7 去除哪些数，得到的商与余数相同⟶推理，一个数被 7 除，余数要小于除数，因此，余数不能等于 7，更不能大于 7，只能是 0、1、2、3、4、5、6 这七种情况⟹要使所求的商与余数相同，那么，商也只能是 0～6 这七个数⟶被除数 $=\underbrace{\text{商数}\times7+\text{余数}}_{\text{相同}}$（即商数）$=$ 商数 $\times8$，由此，可以看出，被除数是商的 8 倍，⟶推理，要求的被除数，就是 0～6 各数乘以 8 的积。

算式：

$0\times8=0$	$1\times8=8$	$2\times8=16$
$3\times8=24$	$4\times8=32$	$5\times8=40$
$6\times8=48$		

所以，要求的被除数是 0，8，16，24，32，40，48。

例 4 $\underbrace{437\times437\times\cdots\times437}_{1991\text{个}}-40$ 除以 23 的余数是多少？

思考途径：审题，分析题中条件和要求 ⟶ 把原式写成：$(\underbrace{437\times437\times\cdots\times437}_{1991\text{个}}-46+6)$因为 $23|437$，$23|46$ 所以

$23|(\underbrace{437\times437\times\cdots\times437}_{1991\text{个}}-46)$ ⟶ 得知，

$\underbrace{437\times437\times\cdots437}_{1991\text{个}}-40$除以 23 的余数是 6。

〔说明，上例表明 $a|b$ $a|c$ 那么 $a|(b+c)$，$a|(b-c)$〕

练 习 十 二

1. 填空：

(1)一个数用 18 去除余 14，如果用 14 去除就没有余数。这个数最小的是________。

(2)一个三位数，个位数为 3，若把个位数移到左边，则新数比原数的 3 倍多 1，则原数为__________。

2. 国庆节后不久，王红在他外公家住了 7 天，回家后将这 7 天的日历撕下来，他把这 7 天日历上的日子数相加，所得到的和等于 49，问王红回家这一天是十月几日？他是哪一天去他外公家的？

3. 求 12345，$+71427\times19$ 除以 7 的余数。

4. 有五个连续偶数，已知第三个数比第一个与第五个数

的和的$\frac{1}{4}$多18，这五个偶数的和是多少？

5. 有一个一千位数，它的各位数字都是1，这个数被7除余数是多少？

6. 1990年5月1日是星期二，问十月一日是星期几？

7. 将一个三位数的数字重新排列，所得的最大的三位数减去最小的三位数正好等于原数。求这个三位数。

8. 1989^{1990}的尾数是几？

(4)质数与合数、最大公约数、最小公倍数

我们在小学教材里，已经初步学习了关于质数与合数，公约数与公倍数，最大公约数与最小公倍数等。

我们在这里着重研究运用质数的概念、性质以及分解质因数的方法来解答一些问题。

最大公约数和最小公倍数问题，着重讨论用求几个已知数的最大公约数或最小公倍数的方法来解答一些应用题。解这类题目时，难点是题目没有直接告诉我们求最大公约数还是求最小公倍数，而要靠我们自己去分析题中的条件和要求的问题，找到解题的思考途径，得到要求的解。

值得注意的是在分析数量关系时，要抓住整除这个关键，如果要求的数是已知数的除数，一般说，这时要求最大公约数，方能解决问题；如果要求的数是已知数的被除数，一般说，这时要求最小公倍数，方能解决问题。切不可仅凭题中的个别字词，如“最大”、“至少”等等来判断方法，那样，是片面的，不科学的，容易造成错误。

例1 把111111分解质因数。

$$\begin{array}{r|l} 3 & 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline 7 & 3\ 7\ 0\ 3\ 7 \\ \hline 11 & 5\ 2\ 9\ 1 \\ \hline 13 & 4\ 8\ 1 \\ \hline & 3\ 7 \end{array}$$

思考途径：审题，明确解题要求——→111111 各个数字的和是 6，6 是 3 的倍数，用质数 3 来除，得 37037——→用"割补法"判定 37037 能被 7 整除，用 7 除得 5291——→奇位数各数的和与偶位数各数的和之差能被 11 整除，用 11 来除，得到 481——→用 13 来除，得 37，37 是质数——→$111111=3\times7\times11\times13\times37$

例 2 用辗转相除法求 5418 和 11352 的最大公约数。

10	5 4 1 8	1 1 3 5 2	2
	5 1 6 0	1 0 8 3 6	
	2 5 8	5 1 6	2
		5 1 6	
		0	

思考途径：先把两个数并列排好，用三条线隔开——→用较小数去除较大数，得的商写在较大数的右边。5418 去除 11352 得 2，余 516——→用 516 去除 5418 商 10，余 258，得的商写在左边——→用 258 去除 516，得商 2，正好除尽——→258 是 5418 和 11352 的最大公约数。

例 3 试证明$\dfrac{ab}{(a、b)}=[a、b]$

思考途径：审题，明确 ab 的积除以 a、b 的最大公约数，得到 a、b 的最小公倍数——►用 48 和 72 为例，作如下推理。

因为 $48\times72=(2^4\times3)\times(2^3\times3^2)$

$=(2^3\times3)$①　$\times[2^4\times3^2]$

所以，a、b 为两个自然数，它们的(a、b)与[a、b]的关系有：

$ab=(a,b)\times[a,b]$

即 $(a、b)=\dfrac{ab}{[a,b]}$

或 $[a、b]=\dfrac{ab}{(a、b)}$

例如，用上述公式求 48 和 72 的最小公倍数：

$[48、72]=\dfrac{48\times72}{(48,72)}=\dfrac{3456}{24}=144$

例 4　已知两个数的最小公倍数是 180，最大公约数是 12，且小数不能整除大数，求这两个数。

思考途径：审题，分析数量关系和要求——►假设这两个数是 a 和 b，且 a>b——►考察求 a 和 b 的最大公约数与最小公倍数的竖式：

$$\begin{array}{r|ll} 12 & a & b \\ \hline & c & d \end{array}$$

$\because 12\times c\times d=180$　　$\therefore c\times d=15$

当 c=15　D=1 时，$a=12\times15$　$b=12\times1$　a 数被 B 整

---

① 注：(　)表示求括号内的数的最大公约数，[　]表示求括号内的数的最小公倍数。

除，不符合要求。

当 $c=5$　$d=3$ 时，

$a=12\times5=60$　　　$b=12\times3=36$

60 不能被 36 整除，符合题意

所以，36 和 60 是要求的两个数 $\longrightarrow$ 验算。

例 5　把 1 米 3 分米 5 厘米长、1 米 5 厘米宽的纸裁成同样大的正方块，而没有剩下纸，这正方块最大的边长是多少？共可裁成几块？

思考途径：审题，分析数量关系 $\longrightarrow$ 长方形的纸要剪成同样大小的正方形，还不能有剩余，所以，这个正方形的边长要是长方形的约数，还要是长方形的宽的约数，即是长与宽的公约数 $\Longrightarrow$ 正方形要裁得最大，所以，正方形的边长是长方形长和宽的最大公约数 $\longrightarrow$ 求 135 和 105 的最大公约数。

算式：

$$\begin{array}{r|rr}
3 & 135 & 105 \\ \hline
5 & 45 & 35 \\ \hline
 & 9 & 7
\end{array}$$

105、135 的最大公约数是 $3\times5=15$

$15\times15=225$（平方厘米）……正方形纸的面积。

$135\times105=14175$（平方厘米）……长方形纸的面积。

$14175\div225=63$（块）

答：这正方块的边长是 15 厘米，共可裁 63 块。

例 6　甲、乙、丙三位青年总是在下午 2 点去图书馆读书，甲 3 天去一次，乙 4 天去一次，丙 5 天去一次，上次他们在

图书馆相遇是星期二。问至少要再过多少天，他们三人才能再次在图书馆相遇？下次相遇时是星期几？

思考途径：审题，分析数量关系——想到甲3天去一次图书馆，到下一次三人在图书馆相遇所需要的天数，一定是3的倍数，——同样的道理，到下次三人在图书馆相遇的时间也必须是4的倍数、5的倍数——且一定是3、4、5的最小公倍数。

算式：

3、4、5的最小公倍数是$3\times4\times5=60$……下一次三人在图书馆相遇的时间。

$60\div7=8\cdots\cdots4$

$2+4=6$（星期六）

答：要过60天他们才在图书馆相遇。相遇时是星期六。

练 习 十 三

1. 两个数的最大公约数是3，最小公倍数是561，求这两个数。

2. 有一种砖，长45厘米，宽30厘米，至少要用多少块这样的砖才能铺成一块正方形？

3. 在环形的400米跑道外围放盆花，甲乙两人从同一起点放，甲每隔10米放一盆，乙每隔8米放一盆。甲在前面放，乙在后面放。但要求甲已经放过花盆的地方，乙就不再放花盆。请问，跑道外围共放了多少盆花？

4. 少先队员参加课外活动，如果每4人一组余3人，如果每6人一组就余5人，如果每15人一组余14人。这些少先队员在150～200之间。问这些少先队员共多少人？

5. 有一部机器上的两个相衔接的齿轮，大齿轮有28个

齿，小齿轮有 16 个齿，如果在其中两个指定的齿上作个记号，问从第一次相遇到第二次相遇，各需要转多少转？

6. 有一个数，除以 3 余 2，除以 5 余数是 3，除以 7 余数是 4，求这个数最小是多少？

7. 从甲地到乙地原来每隔 45 米安装一根电线杆，加上两端两根共有 53 根。现要改成每隔 60 米安装一根电线杆，两端两根不需要移动外，中途还有多少根可以不必移动？

8. 张华、王祥、李民三人定期到刘老师家去补课，张华每 6 天去一次，王祥每 5 天去一次，李民每 4 天去一次。他们在今年 9 月 5 日正好同时到刘老师家里补课。下一次三人同时到刘老师家是几月几日？

(5)整数的拆分

整数的拆分，我们着重讨论一个自然数的一种分拆。比如“把自然数表示为 n 个自然数的和的形式，就称为这个自然数的一种分拆。比如 $5=1+4=2+3=1+1+3=1+2+2=1+1+1+2=1+1+1+1+1$

不难看出，5 的分拆法有六种。其中“二项分拆”有两种：$1+4$ 和 $2+3$。“三项分拆”有两种：$1+2+2$ 和 $1+1+3$。四项分拆有一种：$1+1+1+2$。五项分拆有一种：$1+1+1+1+1$。

自然数 n 不很大，且能满足某些条件的一些比较简单分拆方法，解决与此有关的问题。至于自然数 n 比较大，它的分拆方法必然也比较多，在这里，我们暂不去研究它。

根据我们研究发现，在自然数 n 的所有二项分拆中，有两个突出的特点：

(1)当 n 是偶数时，二项分拆中，以 $\frac{n}{2}$ 和 $\frac{n}{2}$ 二项的乘积最

大。

(2)当 n 是奇数时,二项分拆中,以$\frac{n-1}{2}$和$\frac{n+1}{2}$二项的乘积最大。

根据我们的研究发现,把一个数分拆成几个自然数的积且要使乘积最大,要注意下列三个特点:

(1)当这个数能被 3 整除时,以 3 的连乘积为最大。比如,15 分拆为 3+3+3+3+3 它们的连乘积是 $3\times3\times3\times3\times3=243$。

(2)当这个数被 3 除余 2 时,以其中有一个因数为 2,其他因数都是 3 时的连乘积为最大。比如,17 分拆为 2+3+3+3+3+3,它们的连乘积是:$3\times3\times3\times3\times3\times2=486$。

(3)当这整数被 3 除余 1 时,以其中有一个因数为 4,其他因数都是 3 时的连乘积为最大。比如,16 分拆为:3+3+3+3+4,它们的连乘积是:$3\times3\times3\times3\times4=324$。

例 1 把 11 本相同的书分给 4 位同学,使每位同学分得的本数各不相同,应怎样分?

思考途径:审题时分析题中的数量关系⟶想到此题实质上是要找出 4 个各不相同的自然数,使这 4 个数的和等于 11⟶试算:1+2+3+4=10⟶把另外一本分给其中的一个人,使 4 人的本数不同就可以⟶试算的结果,只有加在"4 本"上去,得 5,如果加 1、2 或 3 上面去,就要出现有两人的本数一样多⟶由此得出,按 1,2,3,5 分给四个同学符合题意。

例 2 五个儿童的年龄的和为 37,积是 18480,如果每一

个儿童的年龄不超过 13，求这五个儿童的年龄各是多少？

思考途径：审题，分析题中数量关系：想到 18480 是五个儿童年龄的积，因此，要作积的质因数分解：$18480=2^4\times3\times5\times7\times11$ ⟶ 由于每个儿童的年龄不超过 13 岁，所以，他们的年龄中，一定有 2、3、5、7、11 或这五个数的倍数 ⟶ 由此，可知他们中必有一个是 11 岁，一个是 7 岁 ⟹ 推理，其它三个儿童年龄的积是 $2^4\times3\times5$ ⟹ 他们年龄的和是 37，$37-7-11=19$，19 是一个奇数，因此，这三个儿童的年龄有两种可能：(1)一个儿童年龄是奇数，另两个儿童年龄是偶数。(2)三个儿童的年龄都是奇数。⟹ 由于 $2^4\times3\times5$ 的积是偶数，从这里推出三个儿童中至少有一个年龄是偶数 ⟹ 推理分析：三个儿童的年龄中就可以肯定一个是奇数，另两个是偶数。⟹ 设想有两种可能：(1)如果其中一个儿童年龄是 5 岁，另两个儿童年龄的积是 $2^4\times3$，由于两个儿童年龄的和是 $14(19-5)$ ⟹ 可知两个儿童的年龄一个是 8 岁，另一个是 6 岁。(2)如果奇数这个儿童年龄是 3 岁时，其余两个儿童年龄的和是 $16(19-3)$，而满足这两个条件的两个偶数无法排出来 ⟶ 推算得出的结论是：五个儿童的年龄分别是：5、6、7、8 和 11 ⟶ 验算(略)。

例 3 1990 和 1991 两个数，它们的两项分拆中，两项乘积最大的是多少？

思考途径：审题，分析题中的数量关系与解题要求 ⟶ 求 1990 和 1991 两个数的两项分拆中，选乘积最大的两项 ⟶ 想到自然数 n 的所有二项分拆中的两个特点 ⟹ 1990 这个

数是偶数，二项分拆中，以$\frac{n}{2}$和$\frac{n}{2}$二项的乘积最大$\Longrightarrow$即$\frac{1990}{2}\times\frac{1990}{2}=995\times995$的乘积最大。$\longrightarrow$1991这个数是奇数，二项分拆中，以$\frac{n-1}{2}\times\frac{n+1}{2}$二项的乘积最大$\Longrightarrow$即$\frac{1991-1}{2}\times\frac{1991+1}{2}=995\times996$的乘积最大$\longrightarrow$验算。

练习十四

1.填空：

(1)把24分拆成两个质数的和共有(　)种拆分法。

(2)把10分拆为几个质数(包括相同的质数)的和，共有(　)种分拆法。

(3)把29块象皮分放5处，使每处放的块数是互不相同的奇数，分拆的方法有(　)种。

(4)把43分成拆成5个不相同的合数的和，分拆的方法有(　)种。

2.把14分拆成n个自然数的和，再求出这些数的乘积，要使得到的乘积最大，问这个乘积是多少？

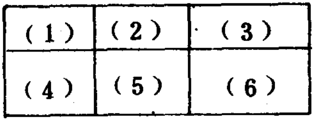
3.1880和1881两个数的二项分拆中，两项乘积最大的是多少？

4.把22分拆成几个自然数的和，要使这几个自然数的乘积最大，应如何分拆？

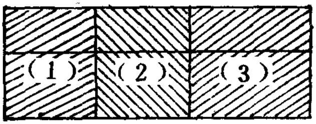
5.把63分拆成n个连续自然数的和，要求写出五种分拆法？

6.把17本《小学数学奥林匹克竞赛辅导十讲》分给五个班，使每个班所得的书的本数各不相同。应怎样分？

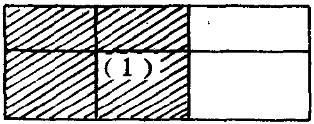
一个一个地数，即数出最小的长方形（如图二），共 6 个长方形，再把(1)与(4)、(2)与(5)、(3)与(6)合并起来（如图三）共 3 个长方形。——►再把(1)与(2)合并（图四），把(2)与(3)合并（图五）共 2 个长方形。（如图 3.4(5)）——►把图二中的(1)与(2)合并，(2)与(3)合并，(4)与(5)合并，(5)与(6)合并，共 4 个图形（图略）。——►把(1)、(2)、(3)合并，(4)、(5)、(6)合并，共 2 个图形（图略）——►把线全部去掉，看着一个图形（图略）——►这样，共 18 个（6+3+2+4+2+1）图形。



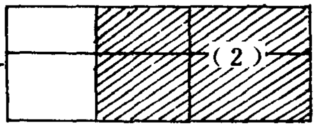
图二



图三

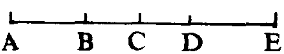


图四



图五

例 2 数出下图中线段的总条数。



图甲

图乙

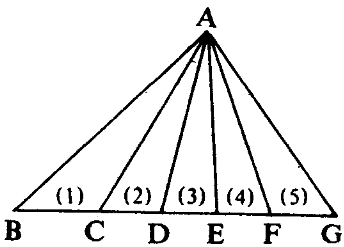
思考途径：审题，题目要求图甲与图乙中每条线段的总条图——►图甲中共有 4 条基本线段：AB、BC、CD、DE ⟹ 由两

条基本线段组成的线段组成的线段有 3 条：AC、BD、CE⟹由三条基本线段组成的线段有 2 条：AD、BE⟹由四条基本线段组成的线段有 1 条：AE⟹图中线段的总条数是：4+3+2+1=10⟶用同样的方法，我们可以求出图乙中线段的总条线是：

$$5+4+3+2+1=15$$

⟶从上述二例中，我们可以发现：线段的总条数与线段上的点数有关：正好等于从 1 开始的几个连续自然数的和，最后一个加数(即最大的一个加数)是线段上总点数减 1，如果线段的点数 n，那么，线段的总条数是：$1+2+3+\cdots\cdots+(n-2)+(n-1)$

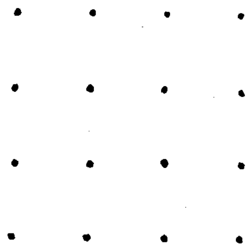
例 3 数出下图中共有多少个三角形。



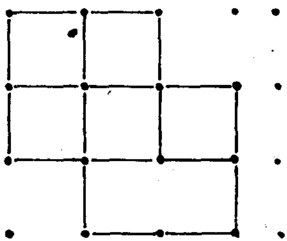
思考途径：审题，题目要求数出图中共有多少个三角形⟶图中共有 5 个基本三角形⟹把图中的(1)与(2)、(2)与(3)、(3)与(4)、(4)与(5)合并，可得到 4 个三角形⟹把(1)、(2)、(3)合并，(2)、(3)、(4)合并，(3)、(4)、(5)合并，可得到 3 个三角形⟹把(1)、(2)、(3)、(4)合并，(2)、(3)、(4)、(5)合并，可得到 2 个三角形⟹去掉 AC、AD、AE、AF 线，可得 1

个三角形(△ABC)→这样共有 15 个三角形→得到数这样图形的规律：1＋2＋3＋……＋(n－2)＋(n－1)＝总的图形数。

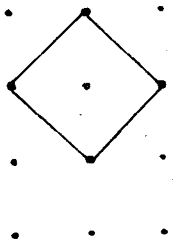
例 4 如图所示，平面上有 16 个点，在每个点上钉上钉子，如以这些钉子的顶点，用线把它们围起来，你能围出几个正方形？



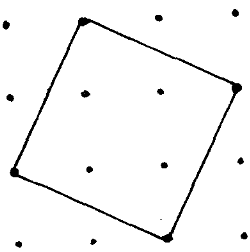
思考途径：审题，用线将点围成正方形，求围成的个数→这个问题与数正方形个数是不同的，这个正方形的边不是先画好的，而是要我们自己去定的，根据正方形的四个角都是直角，四条边都是相等的四条边，因此，只要选好四个顶点，就可用线围出一个正方形，→象图 1 那样，可以围成 14 个那样正向的正方形⟹象图 2 那样围成斜向的正方形 4 个，象图 3 那样的斜向正方形 2 个。→



(图 1)



(图 2)



(图 3)

这样，共有 20 个正方形。→研究下表找出它的规律：

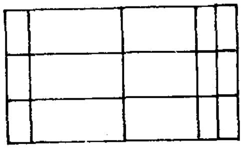
顶点数	2×2	3×3	4×4	5×5	……
正向正方形	1	5	14	30	……
斜向正方形	0	1	6	20	……
正方形总数	1	6	20	30	……

从表中可以发现这样的规律：对于 n×n 个顶点，可作出斜向正方向的个数恰好等于(n－1)×(n－1)个顶点时的正方形总数。

对于 n×n 个顶点可围出多少个正方形的问题，可以分别计算出正向正方形和斜向正方形的个数，再求其总和。

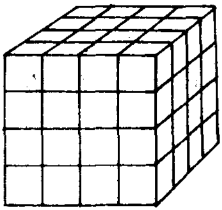
练 习 十 五

1. 图(1)中有多少个长方形？



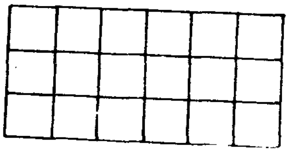
图(1)

2. 图(2)中有多少个立方体？



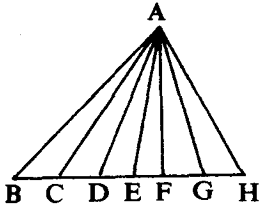
图(2)

3. 图(3)中有多少个正方形？



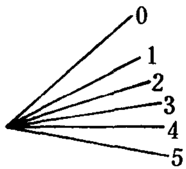
图(3)

4. 数出图(4)中有多少个三角形？



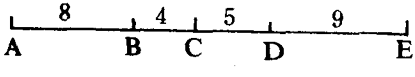
图(4)

5. 数出图(5)中有多少个角。



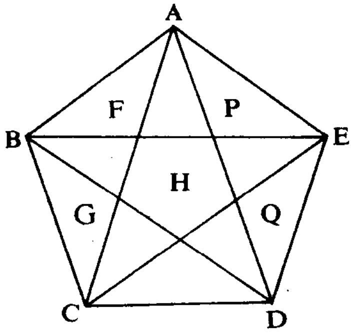
图(5)

6. 图(6)中线段 AB 长 8 厘米，BC 长 4 厘米，CD 长 5 厘米，DE 长 9 厘米。求所有线段长度的总和。



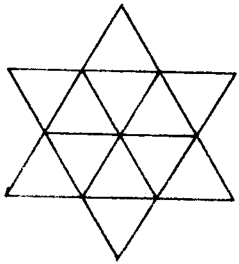
图(6)

7. 数出图(7)中所示的正五边形 ABCDE 中三角形的个数。



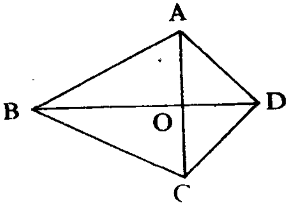
图(7)

8. 图(8)中有多少个三角形？多少个梯形？



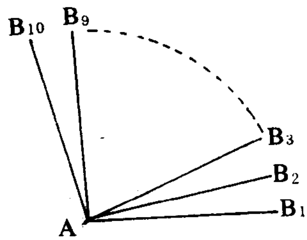
图(8)

9. 数出图(9)中有多少条线段。



图(9)

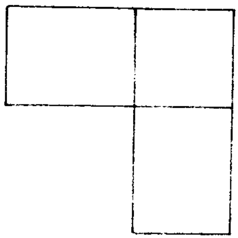
10. 如图，从一点 A 引出 10 条射线，图中共有多少个角？



图(10)

②求长度

例 1 有两个相同的长方形，长是 9 厘米，宽是 4 厘米．如果把它们按图重叠在一起变成 L 形，变形后的周长是多少？



思考途径(1)观察图形(右图)，清楚地看出这个图形的周长正好是原来长方形长的 4 倍。

算式：$9\times4=36$(厘米)

思考途径(2)：观察后看出图形的周长等于两个长方形周长的和，减去两个长方形重叠的那一部分(正方形)的周长，就是要求的图形的周长。

算式：$(9+4)\times2\times2-4\times4$

$=13\times2\times2-4\times4$

$=36$(厘米)

思考途径(3)：观察看出这个图形的周长是 6 条边长的

和。

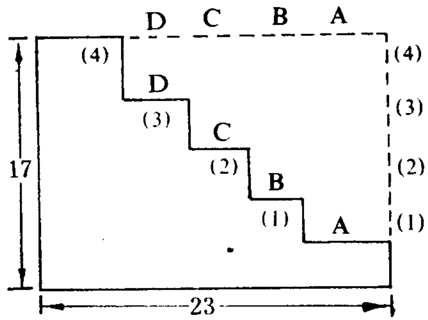
算式：$9\times2+4\times2+(9-4)\times2$

$=9\times2+4\times2+5\times2$

$=18+8+10$

$=36$（厘米）

例 2 如图是一块地，四周用竹篱笆围起来，转变处都是直角，已知西边的篱笆长 17 米，南边的篱笆长 23 米。四周的篱笆长多少米？



思考途径：审题，观察图形，已知西边的篱笆长 17 米，南边的篱笆长 23 米，要求四周的篱笆总长 ⟶ 关键是要求出东边和北边的篱笆长度，北边和东边的篱笆是由各个小短线组成 ⟶ 由于这块地的东边和北边的转弯处都是直角，可推理知道，设图中横着的四条短线为 A、b、c、D，移上去正好是北边的长度 ⟹ 竖着的四条短线为(1)、(2)、(3)、(4)，移向右边正好是东边的长度 ⟹ 因此，东边各短段篱笆长度的和与西边的篱笆同样长，同理，北边的篱笆长度也和南边的篱笆同样

长——►这样，便可求出这块地的周围篱笆长。

算式：

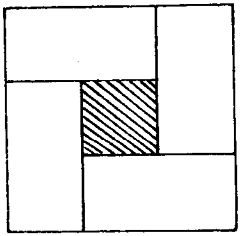
(17＋23)×2

＝40×2

＝80(米)

答：周围篱笆的总长为 80 米。

例 3 四个一样的长方形和一个小正方形(如图)拼成了一个大正方形，大正方形的面积是 49 平方米，小正方形的面积是 4 平方米。求长方形的短边长度是多少米？



思考途径(1)：审题并观察图形——►因为大正方形的面积是 49 平方米，小正方形的面积为 4 平方米——►推理：

长方形的长边＋长方形的短边＝大正方形边长

长方形的长边－长方形的短边＝小正方形边长

——►因此，长方形的短边长度＝(大正方形的边长－小正方形的边长)÷2——►求出长方形的短边长。

算式：

(7－2)÷2

＝2.5(米)

答：长方形的短边长为 2.5 米。

思考途径(2)：审题，观察图形，想到用方程解，设短边长为 x，长边为(7－x)——►长边－短边等于小正方形的边长。

解：设长方形的短边长为 x 米，

则长边为$(7-x)$米

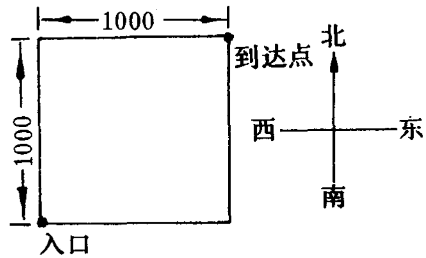
$$7-x-x=2$$

$$x=2.5$$

答：长方形的短边长为2.5米。

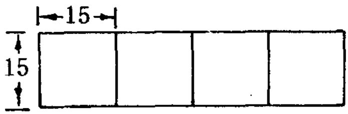
练 习 十 六

1. 正方形的树林（如图），它的角每边长1000米，里边有白杨树和榆树，小明从树林的西南走入树林，碰见一棵白杨就往正北走，碰见一棵榆树就往正东走，最后他走到了东北角上，问小明一共走了多少米？



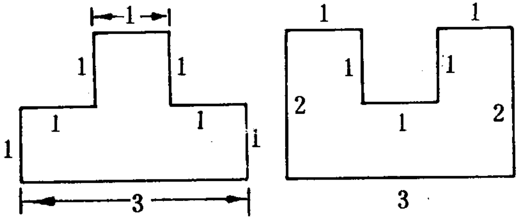
（第1题）

2. 把边长是15厘米的四个正方形连接起来拼成一个长方形。求这个长方形的周长。



（第2题）

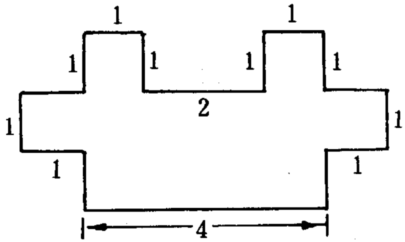
3. 计算下面的图形的周长。(单位:厘米)



图甲　　图乙

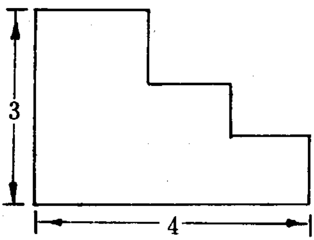
(第 3 题)

4. 求下图的周长。(单位:厘米)



(第 4 题)

5. 求下图的周长。(单位:米)



(第 5 题)

[General Information]
书名=小学数学奥林匹克竞赛指南
作者=顾荣编
页数=327
SS号=11527847
出版日期=1992年08月第1版