出 版 说 明

为满足广大中学生学习数学和中学数学教师教学的需要，我们邀请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了这套中学数学：《代数》，《几何》，《三角与解析几何》和《国际数学竞赛试题讲解》.

希望这套书和广大读者见面以后，能听到来自读者的热情的批评和建议，以便我们进一步修订，使其日臻完善.

一九七九年三月

目　录

前　言

1978年第二十届国际中学生数学竞赛试题公布以后，引起了广大师生和数学爱好者的广泛兴趣．本书是十九、二十两届试题的分析和解答，曾先后在武汉、黄石等地作过多次讲解，并在1978年湖北省暨武汉市数学年会上作过专题介绍．

第十九届竞赛于1977年7月在南斯拉夫的贝尔格莱德举行，试题共六道，以点记分，卷面满分为40点；第二十届竞赛在罗马尼亚的布加勒斯特举行，试题也是六道，满分40分．参加国以欧、美居多，亚、非、拉国家较少．竞赛试题由各参加国的代表团事先提出，然后共同协商选定．选手赛毕，成绩先由本队领队和东道国协调员（每道题两名）评定．发生分歧时，交全体协调员会议最后评定．据报道，欧、美各国对此项比赛都较重视，选手经过严格挑选，例如英国选手通过全国竞赛和不列颠数学奥林匹克选拔；有的国家则把中学生的尖子利用周末和假期集中训练；有的则举办专门的数学学校拔尖培养．青少年选手们除进行数学比赛外，还参加东道国主办的各种参观、游览以及棋类比赛等益智活动．

试题总的看来，知识面较宽，难度较大，综合性较强，技巧性较高，灵活、新颖而且具有一定的趣味性．二十届比十九届难，特别是二十届的第三题，不是我们现在的中学生

都能独立完整解出的．这些试题，从一个侧面反映出欧美中、小学数学教学的近况．个别试题比较容易，如十九届第一题的平面几何试题和第四题的三角试题、二十届第四题的平面几何试题等；多数试题对数学基础知识的要求较高，如涉及集合与映射概念、方程论和初等数论等；有的试题有些中学生平时很少见过，甚至一下子还不能弄清题意．尽管试题偏难，但利用我国中学生熟悉的数学知识来解，多数题仍能解出，而且还可借以提高分析推理、空间想象、抽象思维以及灵活运用所学知识的能力．为了适应中学的实际情况，我们一般从分析入手，根据中学课程内容列出多种解答，并加附注．这样，不仅使各题得出了正确解答，也许还能使读者具体窥视国际数学竞赛的水平，掌握解题的思路，总结某些带规律性的方法和技巧，补充中学尚未学过的部分知识，如“集合”、“映射”和“抽屉原则”等．

在武汉市教育局、湖北省暨武汉市数学学会和武汉市教师进修学院等单位领导和支持下，武汉市在 1978 年先后举办了中学数学竞赛．附录是武汉市 1978 年中学数学竞赛试题分析与解答。

这次数学竞赛的命题，既遵照《一九七八年全国高等学校招生考试复习大纲》规定的范围，又照顾到几年来我市学生的实际水平，初赛以基础知识为主，决赛则稍侧重于分析、综合能力和解题的技巧．无论初赛或决赛，重点都在基础理论和基本训练．

由于个人水平有限，时间仓促，加之这种不同于单一题解的写法少有先例，书中定有不妥和错误之处，请读者批评指正。

第十九届国际中学生数学竞赛试题分析与解答

【第一题】 由正方形 $ABCD$ 分别向外（或向内）侧作等边三角形 ABK, BCL, CDM, DAN. 证明四线段 KL, LM, MN, NK 的中点及八线段 AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN 的中点是一个正十二边形的顶点.（6 点）

【分析】 这道题很简单，要证的十二边形显然是个凸多边形，既可用纯几何法解决，也可用解析法证明.

要证一个多边形是正十二边形，只需证明各边都相等，每个内角都是 150° 即可.

边相等是显然的，因为每边都分别是相应的三角形的中位线，而这些三角形的第三边边长都等于原正方形边长．又根据平行线的性质，等边三角形内角、直角等的度数，也不难算出内角是 150°(图 1).

用解析法证明时，可取如图 2 所示的坐标系．根据正方形的边长和它的对称性，立即得到 A、B、C、D 的坐标以及 M, N, K, L 的坐标，由此推得各中点的坐标．再进一步计算原点到中点的距离，便知各中点何在以原点为圆心的圆上；又通过距离公式可证圆内接十二边形的各边长相等.

【证法一】 如图 1 所示，设 P_1、P_2、P_3 分别是 DN、AN、NK 的中点.

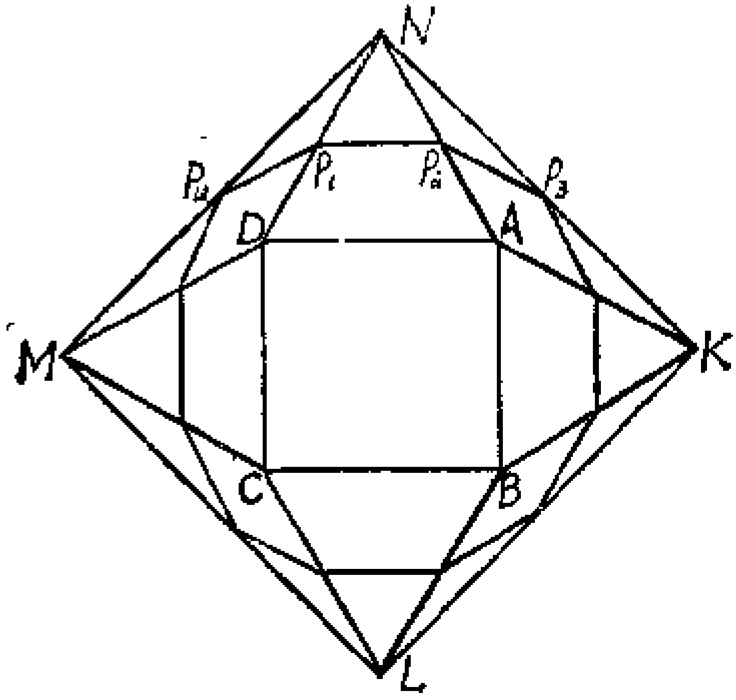

图 1

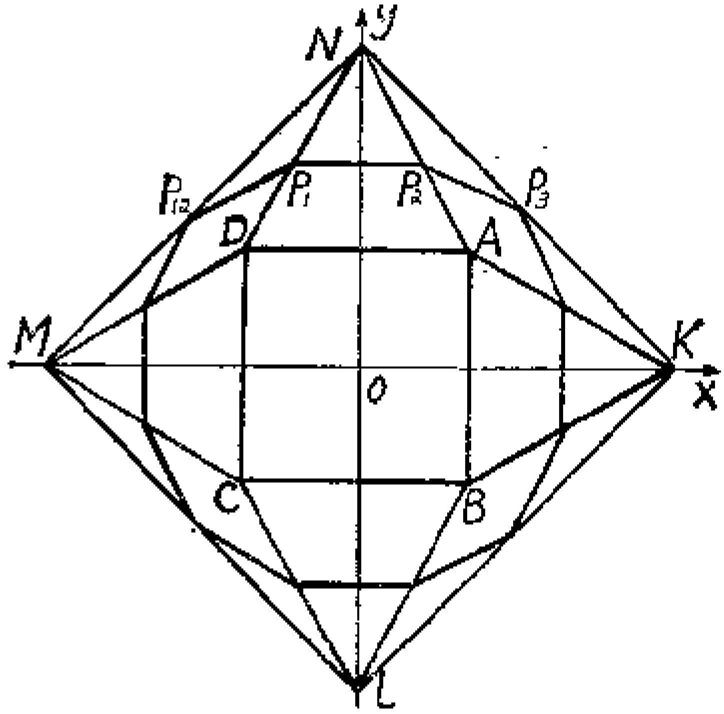

图 2

$\because \quad P_2P_3 \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DA,$

又 $\quad P_1P_2 \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}DA,$

$\therefore \quad P_1P_2 = P_2P_3.$

同理可证，十二边形 $P_1P_2\cdots P_{12}$ 的其它各边之长也都等于原正方形边长的一半.

由于 $\angle P_1P_2P_3$ 与 $\angle DAK$ 的两边分别平行且方向相同，因此，

$\angle P_1P_2P_3 = \angle DAK = \angle DAB + \angle BAK = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$

同理可证，十二边形的其它各内角也都等于 150°.

综上所述，命题得证.

【证法二】 取如图 2 的平面直角坐标系. 设正方形 $ABCD$ 的边长为 2，根据正方形关于 x 轴、y 轴对称，易知以下各点坐标：

$A(1,1)$， $B(1,-1)$， $C(-1,-1)$， $D(-1,1)$；

$K(1+\sqrt{3},0)$， $L(0,-1-\sqrt{3})$，

$M(-1-\sqrt{3},0)$， $N(0,1+\sqrt{3})$.

由中点坐标公式分别求出中点 P_1, P_2, P_3 的坐标：

$P_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$， $P_2\left(\frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$，

$P_3\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

又据两点间距离公式得：

$$|P_1P_2| = \sqrt{1^2+0^2} = 1,$$

$$|P_2P_3| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1;$$

$$|OP_1|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

$$|OP_2|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

$$|OP_3|=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{2\cdot\frac{4+2\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

因此，十二边形的诸顶点都在以原点 O 为圆心，以 $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 为半径的圆上，并且各边之长皆为 1，所以该多边形是正十二边形.

【附注】 1 这题的证明虽然简单，但图形对称优美，能引起学生学习的兴趣；同时，它涉及到平面几何中直线形的基础知识，以及解析几何的基础知识，因而不失为学生练习的好题.

2 如果是由正方形 $ABCD$ 分别向内侧作等边三角形，同样可证结论的正确性，不过所画图形的线条拥挤一些罢了.

【第二题】 在一个有限项的实数数列中，任意接连七项之和为负数，任意接连十一项之和为正数，求这样的数列的最大项数.（6 点）

【分析】 显然，这样的数列至少有 11 项，否则“十一项之和”即无意义．但是，项数也不是多得可为大于 11 的任意自然数，因为题目给定是有限的．我们用 S_i 表示数列中

任意接连 i 项之和，当项数足够多时，根据题设条件，S_7 可看成 $S_{11}-S_4$. 因 $S_7<0$，即 $S_{11}-S_4<0$，而 $S_{11}>0$，故必有 $S_4>0$. 同理：S_4 可看或 $S_7-S_3>0$，因而 $S_3<0$；S_3 可看成 $S_4-S_1<0$，因而 $S_1>0$.

也就是说，数列中任意一项都是正数. 这与已知条件"任意接连七项之和为负数"矛盾.

到底最大项数可能是多少呢？我们可以从项数为 **11** 开始，逐个验证观察：比如，当项数为 11 时，根据条件，第 1 至第 11 项和为正，前 7 项和与后 7 项和又为负，可见后 4 项和与前 4 项和必均为正；同理，当项数为 12 时，可推得 2—5 项和与 9—12 项和均为正；依此类推，当项数为 16 时，可推得 6—9 项和与 13—16 项和均为正；当项数为 17 时，可推得 7—10 项和与 14—17 项和均为正. 这就是说，当项数为 17 时，下列连续四项之和：

1—4，2—5，3—6，4—7，5—8，6—9，7—10，

8—11，9—12，10—13，11—14，12—15，13—16，14—17

均为正. 和前面的算法一样，一定导致矛盾，故项数不可能为 17.

项数不能等于 17，能否大于 17（比如项数是 18，19，…）？回答也是否定的. 因为只要项数超过 16，上述的分析推证都成立.

事实上：若项数 $n>17$，则对任意的接连四项来说，必在其后或者其前还有接连的七项，从而有接连的十一项. 因此，对此十一项仍必有：

$$S_4>0, \quad S_3<0, \quad S_1>0.$$

这就是说，数列中任意一项都是正数，与已知条件"任意接连

七项之和为负数”矛盾.

符合题设条件的数列的项数不能超过 16 这一事实，已在上述分析中得到了证明，因而下面进一步用不同的方法证明项数不能超过 16，并举出项数为 16 的数列实例.

【解法一】 先将题设条件用不等式表示出来，通过不等式之间的加减变换，证明项数不能超过 16；然后利用解不等式组的办法举出满足题设条件的数列实例.

设有 n 项的实数数列：

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{17},\ \cdots,\ a_n,$$

由已知条件对任一正整数 k 可得：

$$a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{k+6}<0, \tag{1}$$

$$a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{k+6}+a_{k+7}+\cdots+a_{k+10}>0. \tag{2}$$

(2)－(1)：

$$a_{k+7}+a_{k+8}+a_{k+9}+a_{k+10}>0. \tag{3}$$

这就是说，从第 11 项起，任意接连四项之和都是正数.于是我们得到：

$$a_8+a_9+a_{10}+a_{11}>0, \tag{4}$$

$$a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}>0. \tag{5}$$

(4)＋(5)：

$$a_8+a_9+a_{10}+2a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}>0. \tag{6}$$

由(1)得：

$$a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}<0. \tag{7}$$

(6)－(7)：

$$a_{11}>0.$$

同理可得：

$$a_{12}>0,\qquad a_{13}>0.$$

所以 $$a_{11}+a_{12}+a_{13}>0. \tag{8}$$

当 $n\geqslant 17$ 时，比如取 $n=17$(对于 $n=18$，19，…，以下推证仍成立)，在(1) 中，令 $k=11$ 得：

$$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{17}<0; \tag{9}$$

在(3) 中，令 $k=7$ 得：

$$a_{14}+a_{15}+a_{16}+a_{17}>0. \tag{10}$$

(9) − (8)：

$$a_{14}+a_{15}+a_{16}+a_{17}<0. \tag{11}$$

显然，(11)与(10)矛盾．因此，项数 $n\geqslant 17$ 不可能．

另一方面，当 $n=16$ 时，满足题设条件的数列是确实存在的，例如：

$$1,1,-2.6,1,1,1,-2.6,1,1,-2.6,1,1,1,-2.6,1,1. \tag{12}$$

这个数列是这样构造出来的：考虑到数列中 $s_7<0, s_{11}>0$ 是当然的；但一下子考虑到很多项时，不好写出数列的开始几项，为此开始写时还要考虑到 $s_3<0, s_4>0$；此外，数列中既有正实数项，也有负实数项，为方便起见，不妨设正实数项都为 1，负实数项为 $-x$．于是得到：

$$1,1,-x,1,1,1,-x,1,1,-x,1,1,1,-x,1,1,$$

其中 x 同时满足：

$$2-x<0,\quad 3-x>0,\quad 5-2x<0,\quad 8-3x>0.$$

解此不等式组得：$2.5=\dfrac{5}{2}<x<\dfrac{8}{3}=2.\dot{6}$．取 $x=2.6$，即得上述数列(12)．

如设正数项为 a，负数项为 $-x$，则 $\dfrac{5}{2}a<x<\dfrac{8}{3}a$．当 $a=6$ 时，$15<x<16$，取 $x=15.5$，可得满足题设条件的如下数

列：

$$6, 6, -15.5, 6, 6, 6, -15.5, 6, 6, -15.5, 6, 6, 6, -15.5, 6, 6.$$

由此可见，满足题设条件的数列是无限多的，其最大项数皆为 16.

【解法二】 先把 $a_1, a_2, \cdots, a_{17}$ 排成如下的数表：

$$\begin{array}{llllll}
a_1, & a_2, & \cdots, & a_7, & a_8, & \cdots, & a_{11}; \\
a_2, & a_3, & \cdots, & a_8, & a_9, & \cdots, & a_{12}; \\
a_3, & a_4, & \cdots, & a_9, & a_{10}, & \cdots, & a_{13}; \\
a_4, & a_5, & \cdots, & a_{10}, & a_{11}, & \cdots, & a_{14}; \\
a_5, & a_6, & \cdots, & a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{15}; \\
a_6, & a_7, & \cdots, & a_{12}, & a_{13}, & \cdots, & a_{16}; \\
a_7, & a_8, & \cdots, & a_{13}, & a_{14}, & \cdots, & a_{17}.
\end{array}$$

表中有 7 行、11 列，共有数的个数为 $7\times 11=77$. 现将这 77 个数的总和记为 S，易知，无论按行加或按列加，和 S 不变.

若按行求和，则

$$S=\sum_{i=1}^{11}a_i+\sum_{i=2}^{12}a_i+\cdots+\sum_{i=7}^{17}a_i>0; \qquad (1)$$

若按列求和，则

$$S=\sum_{i=1}^{7}a_i+\sum_{i=2}^{8}a_i+\cdots+\sum_{i=11}^{17}a_i<0. \qquad (2)$$

(1)与(2)显然矛盾.

【附注】 1 我国中学数学教材中，介绍了关于数列的基础知识，但此种类型的问题我们的中学生见到不多，它还涉及到一些不等式的基础知识，需要有较强的分析问题和

推理判断的能力才能解出．解题时，宜从具体入手分析，然后给以论证．

2　本题可进一步推广为：

设一有限项的实数序列中，任意接连 m 项之和为负数，任意接连 n 项之和为正数，试确定序列的最大项数（其中 m、n 为两不等于 1 、且不相同的正整数）．

【第三题】　设给定的自然数 $n>2$，Vn 是形如 $kn+1$ 的数集，其中 $k=1, 2, \cdots$．数 $m\in Vn$（符号 $\in$ 读作"属于"），如果不存在两个数 p、$q\in Vn$，使得 $pq=m$，则称 m 为 Vn 中的不可分解数．试证，存在一个数 $r\in Vn$，这个数可以用不止一种方式分解为数集 Vn 中的几个不可分解数的乘积（如果分解的表达式仅仅在于 Vn 中的数的乘积次序不同，则看作是同一种方式的分解）．（7 点）

【分析】　首先应弄清题意，"给定的自然数 $n>2$，Vn是形如 $kn+1$ 的数集，其中 $k=1, 2, \cdots$" 是什么意思？具体指的就是：

$$V_3=\{1\times3+1,\ 2\times3+1, \cdots\}=\{4,\ 7, \cdots\};$$
$$V_4=\{1\times4+1,\ 2\times4+1, \cdots\}=\{5,\ 9, \cdots\};$$
$$V_5=\{1\times5+1, 2\times5+1, \cdots\}=\{6, 11, \cdots\};$$
$$\cdots\cdots$$

什么叫做 Vn 中的可分解数、不可分解数？现以 V_3 为例加以说明．V_3是由如下的数所组成：

$$4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, \cdots.$$

16 是 V_3 中的可分解数，因为 $16=4\times4$，而且 16、$4\in V_3$；28 也是 V_3 中的可分解数，因为它可以表为 V_3 中两

个数 4 与 7 的乘积．另外，19 显然是 V_3 中的不可分解数；又如，10 是否为 V_3 中的不可分解数呢？虽然 10 按"通常的分解"可以表示为 2×5，但因 2、$5\overline{\in}V_3$(符号 $\overline{\in}$ 读作"不属于")，故由题中所给定义知：10 仍是 V_3 中的不可分解数．

题目要证明的是：存在一个数 $r\in Vn$，使 $r=p_1p_2=q_1q_2$，其中 p_i 与 q_j $(i, j=1,2)$ 不完全相同，并且都是 Vn 中的不可分解数．

不难看出，要找出符合上述条件的数 r，只需事先选取不是 $kn+1$ 型的不等的两数 s，t；但 s^2，t^2，st 又都是 $kn+1$ 型的数即可．因为这时若令 $p_1=s^2$，$p_2=t^2$，$q_1=q_2=st$，$r=s^2t^2$(注意到此时的 p_1，p_2，q_1，q_2 不能在 Vn 中分解了)，则 r 具有如下的两种不同的分解：

$$r=p_1p_2=(s^2)(t^2)=(st)^2=(st)(st)$$
$$=q_1q_2.$$

易知，这样的 s，t 可以从形如 $kn-1$ 的数中选取．

下面，就沿着上面分析的思路来证明这一命题．

【证明】 取两数 $s=n-1$ 与 $t=2n-1$，其中 n 为大于 2 的自然数，作

$$r=[(n-1)^2][(2n-1)^2]=[(n-1)(2n-1)]^2$$
$$=[(n-1)(2n-1)][(n-1)(2n-1)],$$

则 r 就是 Vn 中具有两种不同分解的可分解数．事实上：

第一，$(n-1)^2=n^2-2n+1=(n-2)n+1$

$$=k_1n+1\in Vn$$

(因自然数 $n>2$，故 $k_1=n-2$ 为自然数)；

$$(2n-1)^2=4n^2-4n+1=4(n-1)n+1$$
$$=k_2n+1\in Vn\ (k_2=4(n-1)\text{ 为自然数})；$$

$$(n-1)(2n-1)=2n^2-3n+1=(2n-3)n+1$$
$$=k_3n+1\in V_n$$
$$(k_3=2n-3\text{ 为自然数})；$$
$$r=(n-1)^2(2n-1)^2=(k_1n+1)(k_2n+1)$$
$$=(k_1k_2n+k_1+k_2)n+1=k_4n+1\in V_n$$
$$(k_4=k_1k_2n+k_1+k_2\text{ 为自然数}).$$

第二，由于$n>2$，因此：
$$(n-1)(2n-1)\neq(n-1)^2;$$
$$(n-1)(2n-1)\neq(2n-1)^2.$$

第三，因为$n-1<kn+1$，所以$n-1\overline{\in}V_n$，即$(n-1)^2$是V_n中的不可分解数；$2n-1\overline{\in}V_n$（否则，如果$2n-1=kn+1$，则$2=k+\frac{2}{n}$为分数，导致矛盾），因此，$(2n-1)^2$也是V_n中的不可分解数；虽然$(n-1)(2n-1)$是$n-1$与$2n-1$的乘积，但$n-1$与$2n-1$都不属于V_n；此外，$(n-1)(2n-1)$又不能再表成其它的乘积形式（因$n-1$与$2n-1$都已经是关于n的一次式），所以$(n-1)(2n-1)$仍是V_n中的不可分解数．证毕．

【附注】 1 题意一时都难于理解时，应先具体，后一般，逐步弄清．本题涉及了特定条件下的可分解数（合数）与不可分解数（素数或质数）的概念．质数与合数都是整数论中的基本概念，在中、小学适当注意这方面内容的教学是必要的．解题技巧在于选取形如$kn-1$的两个数，这样的数的特点是关于n的一次式，而且它的平方，或者该二数之积的常数项均为$(-1)(-1)=1$，因而都属于V_n．

2 如果利用狄利克雷（*Dirichlet*）定理来证本题，就比

较简单．该定理的内容是：

在任何一个(无穷)算术级数中，只要公差与首项互素，则这个级数中就包含有无限多个素数．

当 $n>2$ 时，n 与 $n-1$ 显然互素，因而可在算术级数

$$n-1,\ 2n-1,\cdots,kn-1,\cdots$$

中选出四个素数，比如：

$$k_1n-1,\ \ k_2n-1,\ \ k_3n-1,\ \ k_4n-1.$$

不难知道，其中任二数的积都为 Vn 中的不可分解数，因为这些积的每一个因子都不属于 Vn．于是，我们就可以用三种不同的方式，将 V_n 中的数 $r=\prod\limits_{i=1}^{4}(k_in-1)$ 分解成 Vn 中的不可分解数之积：

$$\begin{aligned}r&=[(k_1n-1)(k_2n-1)][(k_3n-1)(k_4n-1)]\\&=[(k_1n-1)(k_3n-1)][(k_2n-1)(k_4n-1)]\\&=[(k_1n-1)(k_4n-1)][(k_2n-1)(k_3n-1)].\end{aligned}$$

【第四题】 设 $f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x$，其中 a，b，A，B 为给定的实常数，如果 $f(x)\geqslant 0$ 对所有实数 x 成立，证明：

$$a^2+b^2\leqslant 2;\qquad A^2+B^2\leqslant 1.\qquad\text{（6 点）}$$

【分析】 题中所涉及的实函数不是代数的，而是初等超越函数，是关于基本初等函数——三角函数的复合函数．两个条件是：第一，函数 $f(x)$ 的具体表达式中含有 a，b，A，B 四个已知的实参数；第二，对于自变量 x 的任何实数值，恒有 $f(x)\geqslant 0$．

由于 $f(x)$ 的具体表达式中“项数较多”，给定的 a，b，A，

B 四个实参数“比较分散”，我们可以从引进辅助角 θ、φ 入手，将 $a\cos x+b\sin x$ 变形为 $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$，$A\cos 2x+B\sin 2x$ 变为 $\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\varphi)$，于是：

$$f(x)=1-\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)-\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\varphi).$$

从而使 $f(x)$ 的具体表达式变为“项数较少”，给定的 a, b, A, B 四个实参数“相对集中”．毫无疑问，这是有助于问题的解决的．

然后，再利用第二个条件，适当选取 x 的值，即可证得：

$$a^2+b^2\leqslant 2;\quad A^2+B^2\leqslant 1.$$

关于最后一步的证明，既可用直接证法，也可用间接证法．

【证法一】 首先，引入辅助角 θ（如示意图 3），φ（如示意图 4），分别使：

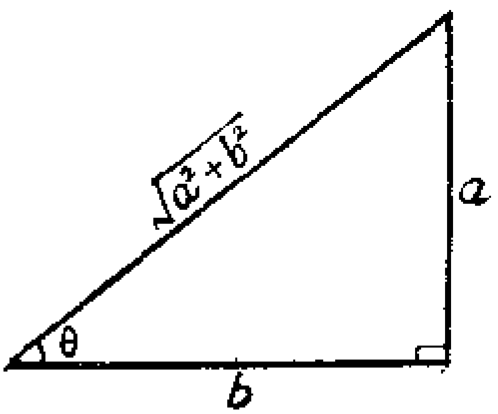

图 3

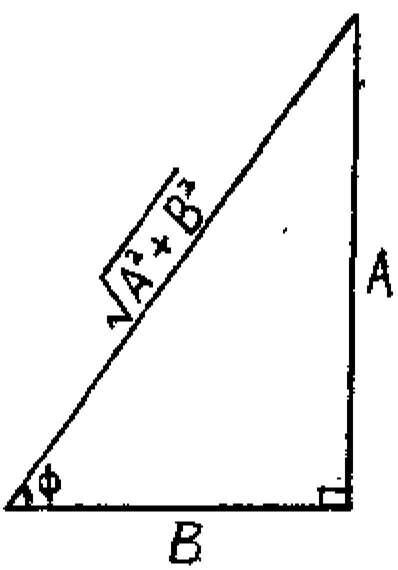

图 4

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\theta; \qquad \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sin\varphi;$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\theta. \qquad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\varphi.$$

$$a=\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta; \qquad A=\sqrt{A^2+B^2}\sin\varphi;$$

$$b=\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta. \qquad B=\sqrt{A^2+B^2}\cos\varphi.$$

于是，

$$\begin{aligned}f(x)&=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x\\&=1-\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta\cos x-\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta\sin x\\&\quad-\sqrt{A^2+B^2}\sin\varphi\cos 2x-\sqrt{A^2+B^2}\cos\varphi\sin 2x\\&=1-\sqrt{a^2+b^2}(\cos x\sin\theta+\sin x\cos\theta)\\&\quad-\sqrt{A^2+B^2}(\cos 2x\sin\varphi+\sin 2x\cos\varphi)\\&=1-\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)-\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\varphi),\end{aligned}$$

$$f(x)=1-\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)-\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\varphi)\geqslant 0. \tag{1}$$

因为(1) 对任何实数值 x 成立，故将 x 换为$\frac{\pi}{2}+x$，(1) 仍能成立．于是得到：

$$1-\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\theta)+\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\varphi)\geqslant 0. \tag{2}$$

(1) + (2)：

$$2-\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta+\frac{\pi}{4})\geqslant 0. \tag{3}$$

又(3) 对 $x=\frac{\pi}{4}-\theta$ 当亦成立，这样得到：

$$2-\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\sin(\frac{\pi}{4}-\theta+\theta+\frac{\pi}{4})\geqslant 0,$$

$$2-\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\sin\frac{\pi}{2}\geqslant 0,$$

所以，

$$a^2+b^2\leqslant 2. \qquad (*)$$

现在类似地导出 $A^2+B^2\leqslant 1$. 在 (1) 中令 x 取值 $\pi+x$, 得

$$1+\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)-\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\varphi)\geqslant 0. \qquad (4)$$

(1) + (4)：

$$2-2\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\varphi)\geqslant 0. \qquad (5)$$

同理，在(5) 中令 $x=\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$，得到：

$$2-2\sqrt{A^2+B^2}\sin\left[2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)+\varphi\right]\geqslant 0,$$

$$2-2\sqrt{A^2+B^2}\sin\frac{\pi}{2}\geqslant 0,$$

所以

$$A^2+B^2\leqslant 1. \qquad (**)$$

【证法二】 用反证法．由证法一知，下式对任何实数值 x 成立：

$$f(x)=1-\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)-\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\varphi)\geqslant 0. \qquad (1)$$

假设$\sqrt{a^2+b^2}>\sqrt{2}$，取 x 使 $\sin(x+\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$，即

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}-\theta=\begin{cases}2k\pi+\frac{\pi}{4}-\theta;\\(2k+1)\pi-\frac{\pi}{4}-\theta.\end{cases}$$ (n、$k\in$ 整数集Z)

这时，$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)>\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=1$，且

$$\sin(2x+\varphi)=\begin{cases}\sin[2(2k\pi+\frac{\pi}{4}-\theta)+\varphi]\\ \sin[2(\overline{2k+1}\pi-\frac{\pi}{4}-\theta)-\varphi]\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sin[4k\pi+\frac{\pi}{2}-2\theta+\varphi]\\ \sin[2(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}-2\theta+\varphi]\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sin[\frac{\pi}{2}-(2\theta-\varphi)]=\cos(2\theta-\varphi);\\ \sin[-\frac{\pi}{2}-(2\theta-\varphi)]=-\cos(2\theta-\varphi).\end{cases}$$

显然，当 $\cos(2\theta-\varphi)\geqslant 0$（或 $\leqslant 0$）时，则 $-\cos(2\theta-\varphi)\leqslant 0$（或 $\geqslant 0$）．这就是说，无论怎样，$\sin(2x+\varphi)$ 仍有非负值，即 $\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\theta)$ 仍存有非负值，亦即此时，仍可有 $f(x)<0$．而这与题给条件矛盾，故 $\sqrt{a^2+b^2}>\sqrt{2}$ 不可能．也就是说，必须 $\sqrt{a^2+b^2}\leqslant\sqrt{2}$，所以 $a^2+b^2\leqslant 2$． (*)

用类似方法可证 $A^2+B^2\leqslant 1$．

假设 $\sqrt{A^2+B^2}>1$，取 x 使 $\sin(2x+\varphi)=1$，即

$$x=n\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}=\begin{cases}2k\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2};\\ (2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}.\end{cases}\quad (n,\ k\in Z)$$

这时，$\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\varphi)>1$，且

$$\sin(x+\theta)=\begin{cases}\sin(2k\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}+\theta)\\ \sin(\overline{2k+1}\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}+\theta)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}+\theta);\\ -\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}+\theta).\end{cases}$$

显然，当 $\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}+\theta)\geqslant 0$（或 $\leqslant 0$）时，则 $-\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}+\theta)\leqslant 0$（或 $\geqslant 0$）．这就是说，$\sin(x+\theta)$ 仍有非负值，即 $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$ 仍有非负值，亦即可有 $f(x)<0$．而这与题给条件矛盾．故 $\sqrt{A^2+B^2}>1$ 不可能．也就是说，必须 $\sqrt{A^2+B^2}\leqslant 1$，所以

$$A^2+B^2\leqslant 1. \qquad (**)$$

【附注】 1 这是一道平面三角题，综合性较强，从三角函数的定义域、值域，三角函数式的恒等变换，直到三角方程，几乎都涉及到了，是灵活运用三角以及不等式知识的好题．

2 解题关键，在于首先引用辅助角，变“多项”为“单项”；然后，反复运用 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立这一条件，适当选取 x 的值，再作变形而得出结论．

【第五题】 设 a，b 皆为正整数，当 a^2+b^2 被 $a+b$ 除时，商为 q，余数为 r．寻找所有的数对 (a, b)，使得 $q^2+r=1977$．（7 点）

【分析】 显然，所求的 a，b 是满足如下两方面条件的正整数：

$$a^2+b^2=q(a+b)+r;$$

$$q^2+r=1977.$$

其中，$0\leqslant r<a+b$.

第二个条件形式较简，可由此入手定出正整数 q 的大致范围．比方说，q 不能大于 44，因为 $45^2=2025>1977$，而 r 又是非负的整数．这样，r 也就不能小于 41 了．

再根据第一个条件，把 q 的取值范围进一步缩小．先定出有序数对 $(q,\ r)$，并代入第一个等式，最后解不定方程，具体地求出所有的正整数对 (a,b)．

也可先由第二个等式解出 $r=1977-q^2$，代入第一个等式，得到关于 q 的一元二次方程，根据 q 为（正整）实数可知判别式：

$$\Delta_q=f(a,b)\geqslant 0,$$

其中，$f(a,\ b)$ 是关于 a，b 的二元二次整式．

再将 $f(a,\ b)\geqslant 0$ 作为关于 a（或者 b，因由第一个条件知 a 与 b 对称）的二次不等式进行讨论，从而逐步推出所有的正整数对 $(a,\ b)$．

【解法一】 首先，根据 $r\geqslant 0$ 以及 $q^2+r=1977$ 知：$q^2<1977$，正整数 $q\leqslant 44$．因此，数对 $(q,\ r)$ 可能的取值为：

$$(44,\ 41),\ (43,\ 128),\cdots.$$

又由整数的带余除法定则知：

$$a^2+b^2=q(a+b)+r\,(0\leqslant r<a+b), \tag{1}$$

所以

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}=q+\frac{r}{a+b}<q+1.$$

因为

$$q\leqslant 44,$$

所以

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}<45\,(=44+1),$$

而且

$$r=1977-q^2\geqslant 1977-44^2=41,$$

$$a+b>r\geqslant 41.$$

另一方面，因为

$$a^2+b^2\geqslant 2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2),$$

$$2(a^2+b^2)\geqslant (a+b)^2,$$

所以

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b}{2}>\frac{r}{2},\qquad \frac{r}{2}<45,\qquad r<90.$$

因此，只能是 $r=41$，从而 $q=44$。

将 $q=44$，$r=41$ 代入(1)：

$$a^2+b^2=44(a+b)+41,$$

$$(a-22)^2+(b-22)^2=1009. \tag{2}$$

下面我们来求不定方程(2)的正整数解。

由于 $(a-22)^2$ 与 $(b-22)^2$ 都是完全平方数，故二者的个位数字只可能为：0，1，4，9，6，5。但据(2)知，二者之和的个位数字为9，因此二者的个位数字又不能为1和6，只可能为0，4，9，5。也就是说：

当 $|a-22|$(或 $|b-22|$)的个位数字分别取0；2或8，则 $|b-22|$(或 $|a-22|$)的相应的数字取3或7；5。

经具体验算知道：满足(2)的只有 $a-22$(或 $b-22$)$=15$，-15 以及 $b-22$(或 $a-22$)$=28$，由此得到符合题设条件的数对 (a, b) 的值为：

$$(37,\ 50),\ (50,\ 37),\ (7,\ 50),\ (50,\ 7).$$

【解法二】 由题设条件知，所求正整数对 (a, b) 满足：

$$a^2+b^2=q(a+b)+r; \tag{1}$$

$$q^2+r=1977, \tag{2}$$

其中，$0\leqslant r<a+b$.

将(2) 代入(1)，整理后得

$$q^2-(a+b)q+(a^2+b^2-1977)=0.$$

因为 q 为(正整)实数，故其判别式 $\Delta_q\geqslant 0$，即：

$$\Delta_q=(a+b)^2-4(a^2+b^2-1977)\geqslant 0,$$

即

$$3a^2-2ab+3b^2-4\cdot 1977\leqslant 0.$$

设 $f(a)=3a^2-(2b)a+(3b^2-4\cdot 1977)$，则知"存在 a 值，使关于 a 的实函数 $f(a)\leqslant 0$"的充要条件是其判别式 $\Delta_a\geqslant 0$，即：

$$\Delta_a=(-2b)^2-4\cdot 3(3b^2-4\cdot 1977)\geqslant 0,$$

$$b^2\leqslant \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1977<\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2000=3000,$$

所以

$$\text{正整数 } b<55.$$

由(1) 知，a 与 b 对称，故也有正整数 $a<55$. 因此 $a+b<110$.

由(2) 知，

$$1977>q^2=1977-r>1977-(a+b)>1977-110=1867.$$

所以

$$1867<q^2<1977,\quad 43^2<q^2<45^2.$$

故正整数 $q=44$，因而正整数 $r=41$.

将 q，r 的值代入(1)：

$$a^2+b^2=44(a+b)+41. \tag{3}$$

方程(3) 的正整数解就是所求的数对(a, b)的值（具体

计算过程同解法一，不再赘述）.

【附注】 1 这里巧妙地将竞赛年号“1977”编入题中，新颖而具有趣味性．若将题中“1977”代之以其它的正整数 M，例如 $M=1978$，情况怎样？$M=1979$ 又如何？请读者试试看.

2 本题涉及的知识面较宽，解法灵活，最后还要求不定方程的整数解，综合性较强，难度较大．关于不定方程问题，现在我国中学数学内容中，未设专章介绍，但有时在一些数学竞赛的试题中出现，是提高解题能力的好题材，因此在课外学习或研究有关这方面的问题，无疑是有益的.

【第六题】 设 $f(n)$ 是定义在全体正整数集合上的函数，值域是与定义域相同的集合．证明，若 $f(n+1)>f[f(n)]$ 对每一个正整数 n 成立，则 $f(n)=n$ 对每一个 n 成立.（8 点）

【分析】 需要证明的结论简单明确，题目给的有两个条件：函数 $f(n)$ 的定义域和值域都是正整数集；$f(n+1)>f[f(n)]$ 对每一个正整数成立．其中函数 $f[f(n)]$ 是函数 $f(n)$ 的函数，即复合函数，它以 $f(n)$ 为变量.

要证“$f(n)=n$ 对每一个正整数n成立”，可先证 $f(n)\geqslant n$，再证 $f(n)\leqslant n$，从而推出 $f(n)=n$．显然，$f(n)\geqslant n$ 或 $f(n)\leqslant n$ 比 $f(n)=n$ 较易证得，因为要求“放宽”了.

事实上，根据题设条件，很容易得到：当 $n\geqslant 1$ 时，$f(n)\geqslant 1$．因为函数的定义域与值域都是正整数集，而 1 是此集中最小者，所以任何函数值都大于或等于 1，当然有 $f(n)\geqslant 1$.

具体证明时，由特殊到一般，对一般情况可严格地按数学归纳法证之．另外，在推导时也可采用反证法．

【证法一】 先证当 $n \geqslant m$ 时，$f(n) \geqslant m$ 对任意正整数 m 成立．我们对 m 作数学归纳法．

当 $m=1$ 时，结论显然正确，即当 $n \geqslant 1$ 时，$f(n) \geqslant 1$．因为函数的定义域和值域都是正整数集，而 1 是此集中最小者，所以它的任何函数值都大于或等于 1．

假设当 $m=k$（$k \in$ 正整数集 N）时结论正确，即当 $n \geqslant k$ 时，有 $f(n) \geqslant k$；要证明当 $m=k+1$ 时，即对 $n \geqslant k+1$，有 $f(n) \geqslant k+1$．事实上，因为

$$n \geqslant k+1, \text{ 即 } n-1 \geqslant k,$$

所以

$$f(n-1) \geqslant k, \text{ 即 } f[f(n-1)] \geqslant k$$

（归纳法假设）．

又因为

$$f(n) > f[f(n-1)] \qquad \text{（题设条件）},$$

所以

$$f(n) > k,$$

因而

$$f(n) \geqslant k+1.$$

这就是说，当 $n \geqslant m$ 时，$f(n) \geqslant m$ 对任意正整数 m 成立．由于 m 的任意性，取 $m=n$，于是对每一个正整数 n，有下式成立：

$$f(n) \geqslant n. \tag{1}$$

再证 $f(n) \leqslant n$ 对每一个正整数 n 成立．

由（1）知，$f[f(n)] \geqslant f(n)$，又因 $f(n+1) > f[f(n)]$，

所以 $f(n+1)>f(n)$. 这就是说，函数 $f(n)$ 是严格递增的.

因为 $f[f(n)]<f(n+1)$，且函数 f 是严格递增的，所以，$f(n)<n+1$. 因而

$$f(n)\leqslant n. \tag{2}$$

综合(1)与(2)即可得到：$f(n)=n$ 对每一个正整数 n 都成立.

【证法二】 在推导过程中也可用反证法。

先证：当 $n\geqslant m$ 时，

$$f(n)\geqslant m. \tag{1}$$

当 $m=1$ 时结论正确. 否则 $f(n)<1$，这不可能，因为函数 $f(n)$ 的值域中无小于 1 的数.

假设当 $m=k$ 时结论正确；即当 $n\geqslant k$ 时，$f(n)\geqslant k$. 要证当 $m=k+1$ 时，结论仍正确；即当 $n\geqslant k+1$ 时，$f(n)\geqslant k+1$. 如若不然，则至少存在一自然数 $n_0\geqslant k+1$，使 $f(n_0)<k+1$. 此时，

$$n_0\geqslant k+1\Rightarrow n_0-1\geqslant k\Rightarrow f(n_0-1)\geqslant k\Rightarrow$$
$$f[f(n_0-1)]\geqslant k\Rightarrow f(n_0)>k,$$

与 $f(n_0)<k+1$ 矛盾. (1)得证. (符号⇒读作"推得")

再证：$f(n)=n$ 对每一个正整数 n 成立.

如若不然，则可令 l 是使 $f(n)=n$ 不成立的正整数中最小者. 于是：

$$f(l)\neq l,\ 当\ n<l\ 时\ f(n)=n<l;$$

另一方面，当 $n\geqslant l+1$ 时，由(1)知 $f(n)\geqslant l+1$.

这就是说，函数 $f(n)$ 不取 l 这个正整数值，与"值域构成与定义域相同的集合"矛盾. 证毕.

【附注】 1 此题涉及到我国中学教材上目前尚未介

绍的集合与函数的一般概念，归纳法的运用也异于寻常，难度较大．我们的中学生，对于指出一些给定的具体函数的表达式，定义域，或代进某些数值计算出具体的函数值比较熟悉．但在本题的推证过程中，需反复用到抽象的函数记号和有关的不等式的知识，并不涉及函数的具体表达式．例如：关系式 $f(n)>f[f(n-1)]$ 实际上是已知条件 $f(n+1)>f[f(n)]$ 的另一形式；又如，根据"当 $n\geqslant k$ 时，$f(n)\geqslant k$"，在 $n\geqslant k+1$ 时即可作如下的推导：

$$n-1\geqslant k\Rightarrow f(n-1)\geqslant k\Rightarrow f[f(n-1)]\geqslant k.$$

函数概念的最本质属性是定义域和对应规律．至于用什么符号记自变量，则是任意的，在 $f[f(n-1)]$ 中就是以自然数 $f(n-1)$ 记自变量的．通常以 x 表自变量，y 表示相应的函数值，不过是习惯罢了．

以上所讲这些，都是我们部分中学生在数学学习中的薄弱环节．

2　本题可作如下推广：

如果 $\{a_n\}=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 表示一个（有限或无限）实数序列，其中 $a_n<a_{n+1}(n\in N)$，设 $f(a_n)$ 是定义在 $\{a_n\}$ 上的函数，且值域与定义域相同，若 $f(a_{n+1})>f[f(a_n)]$ 对每一个正整数 n 成立，则

$$f(a_n)=a_n$$

对每一个 n 成立．

3　关于"集合"知识的简介．

现代数学研究的对象，远远超出了中学数学所接触到的数、式、点、线、面、体等等内容．广言之，它可以是宇宙中的一些事物．

和点是几何中最基本的概念之一一样，集合是现代数学中的最基本的概念之一．数学上，将研究的对象起一个抽象的名称．叫元素，简称元，常记作小写英文字母．具有某些特性的元素(有限个或无限个)的全体叫做集合，简称集，常记以大写英文字母．元素 a 属于集合 A，或集合 A 含有元素 a 就表示为：$a \in A$；元素 b 不属于集合 A，或集合 A 不含元素 b，则表示为：$b \overline{\in} A$．例如：

所有参加第十九届国际中学生数学竞赛的学生，构成一个集合．显然，凡参加的学生就属于这个集合，该集合就不含未参加的学生作为它的元．

全体自然数构成一个集合，就是自然数集 N． $2 \in N$，$\sqrt{2} \overline{\in} N$．

集合的表示法一般有两种：一种是将集合中所含有的元逐一地列举出来，摆在花括号之内，叫做列举法；另一种则是将集合的元的特性叙述出来，叫做描述法．例如：

方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集可用$\{1,\ 2\}$表示．

由直线 $y=x$ 上的第一象限内的整点（两个坐标都是整数）所组成的集合，用$\{(x,\ y) \mid y=x,\ x、y \in N\}$表示．

不含任何元素的集合叫做空集，用“0”或“ϕ”表示．比如，不等式组 $x>2$ 和 $x<1$ 的解集是空集；下面的直线和圆的交点所成的集合也是空集：

$$y=x+2, \qquad x^2+y^2=1.$$

应注意，空集不仅是客观存在，而且在集合的运算中具有确定意义的．

运用集合这一概念，在有关问题的研究中，是非常方便的．但是，这一名称也不能随便乱用．例如：

某服装店里所有的漂亮的外套不能叫集．虽然这里指的不是鞋子，或者别的什么，而是外套，但是否"漂亮"就成了问题．因为判断的准则是"模糊"的．对于店里的同一件外套来说，也可能甲认为漂亮，而乙却认为不那么漂亮．

又如，很大的正数也不能构成集合，因为这里的大小没有确定的标准；与某定点很近的点，同样不能构成集．

如果 A 的一切元都属于 B，则称 A 为 B 的子集；并表示为：$A\subseteq B$．某服装店里所有的外套则成一集，而漂亮的外套虽不成为一个子集，但却成为一个"模糊子集"，是模糊数学研究的对象．

如果 A 的一切元都属于 B，且 B 中至少有一元不属于 A，则称 A 为 B 的真子集；并表示为：$A\subset B$．

如果 A 与 B 所含的元完全一样，则称 A 与 B 等价或相等；并表示为：$A=B$．

由 A 与 B 所有的共同元素组成的集合 C 叫做 A 与 B 的相交集合，简称交集；并用 $C=A\cap B$ 或 $A\cdot B$ 表示，即：

$$C=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

由 A 与 B 的所有元合并在一起组成的集合 S 叫做 A 与 B 的合并集合，简称并集；并且用 $S=A\cup B$ 或 $A+B$ 表示，即：

$$S=\{y\mid y\in A \text{ 或 } y\in B\}.$$

例如，$A=\{$所有正奇数$\}$，$B=\{$一切正偶数$\}$，Z^+ 表示自然数集，那么就有下面的一些结果：

$$Z^+\subseteq Z^+,\qquad Z^+=Z^+;$$

$$A\subset Z^+,\qquad B\subset Z^+;$$

$$A\cup B=Z^+,\qquad A\cap B=\phi;$$

$$A \cup Z^+ = Z^+, \qquad B \cap Z^+ = B.$$

应该注意，在集的交并运算中，相重的元只算一个。同理可以定义集合的差。

第二十届国际中学生数学竞赛试题分析与解答

【第一题】 数 1978^n 与 1978^m 的最后三位数相等，试求出正整数 n 和 m，使得 $n+m$ 取最小值．这里 $n>m\geqslant 1$．（6 分）

【分析】 如果 $n=m=1$，显然有 1978^1 与 1978^1 的最后三位数相等，都是“978”，此时 $n+m=1+1=2$．但这不合题意，因为题目要求的是 $n>m(\geqslant 1)$，故满足题设条件的 n 的数值应从大于 1 的正整数中去找．

但是，对于正整数 n 和 m 来说，1978^n 与 1978^m 都是不低于四位的多位数，如若逐一地算出它们的值，以求题目的答案，则计算量大，因而是不可取的．

怎么办？为了使 n 和 m“直接发生关系”，可以做差：$1978^n-1978^m=1978^m(1978^{n-m}-1)$．于是，“$1978^n$ 与 1978^m 的最后三位数相等”就变为“$1978^m(1978^{n-m}-1)$ 含有 $1000=10^3=(2\cdot 5)^3=2^3\cdot 5^3$ 的因子”．而 1978^m 为偶数、无 5 的因子；$(1978^{n-m}-1)$ 为奇数，无 2 的因子．因此，一切 2 的因子必须含于 1978^m 之中；一切 5 的因子又必须含于 $(1978^{n-m}-1)$ 之中．所以，我们应该沿着这一思路，抓住个位数字一层一层地分析下去，就可使问题方便地获得解决．

本题是整数论的问题，这里借助于二项式定理，用初等方法寻求正确的答案．

【解答】 由于1978^n与1978^m都是不低于四位的多位数，其最后三位数(即个位、十位和百位数字)相同，因而差(1978^n-1978^m)的最后三个数字皆为零，所以

$$\begin{aligned}1978^n-1978^m&=1978^m(1978^{n-m}-1)\\&=(2\cdot 989)^m(1978^{n-m}-1)\\&=2^m\cdot 989^m(1978^{n-m}-1)\end{aligned}$$

含有$1000=2^3\cdot 5^3$的因子.

但因989^m的个位数字仅能是9或者是1，故既无2的因子，也无5的因子；而1978^{n-m}为偶数，$(1978^{n-m}-1)$必为奇数，故$(1978^{n-m}-1)$中无2的因子，只可能有5的因子；又2^m中显然有2的因子，无5的因子．因此，当且仅当：

(1) 2^m含有2^3因子，即$m\geqslant 3$；

(2) $1978^{n-m}-1$含有5^3因子，

1978^n与1978^m的最后三位数才能相等.

由(1)，容易求得正整数m的数值范围，从而得知符合条件的m的最小值是3；接着，我们据(2)来定出符合条件的n的值.

因为$(1978^{n-m}-1)$有5的因子，所以$(1978^{n-m}-1)$的末位数字为0或5，而1978^{n-m}的末位数字为1或6．又因为1978^{n-m}为偶数，所以1978^{n-m}的末位数字不可能为1，只能为6.

另一方面，“8”自乘时，末位数字将是8，4，2，6四个数字循环出现，故知$n-m$为4的倍数．因此可令：

$$n-m=4k \qquad (k\in \text{自然数集 } N).$$

于是，

$$1978^{n-m}-1=1978^{4k}-1=(2000-22)^{4k}-1$$

$$= 2000P^* + 22^{4k} - 1 = 2000P + (22^2)^{2k} - 1$$
$$= 2000P + 484^{2k} - 1 = 2000P + (500 - 16)^{2k} - 1$$
$$= 2000P + 500Q^* + 16^{2k} - 1$$
$$= 2000P + 500Q + (4^2)^{2k} - 1$$
$$= 2000P + 500Q + 4^{4k} - 1$$
$$= 2000P + 500Q + (5 - 1)^{4k} - 1$$
$$= 2000P + 500Q + (5^3R^* + C_{4k}^2 5^2 - C_{4k}^1 5 + 1) - 1$$
$$= 2000P + 500Q + 5^3R + \frac{4k(4k-1)}{2}\cdot 5^2 - 4k\cdot 5$$
$$= 2000P + 500Q + 5^3R + 2k(4k-1)5^2 - 4k\cdot 5$$

能被 5^3 整除．式中

$P^* = 2000^{4k-1} - C_{4k}^1 2000^{4k-2}\cdot 22 + \cdots$共 $4k$ 项，

$Q^* = 500^{2k-1} - C_{4k}^1 500^{2k-2}\cdot 16 + \cdots$共 $2k$ 项，

$R^* = 5^{4k-3} - C_{4k}^1 5^{4k-4} + \cdots$共 $4k-2$ 项．

因为 $(2000P + 500Q + 5^3R)$ 显然能被 5^3 整除，所以$[2k(4k-1)5^2 - 4k\cdot 5]$ 能被 5^3 整除．

由此推得，k 的最小值为 5^2．因此，$n - m = 4k = 100$，即 $n = 100 + m$，n 的最小值是 103．

所以，$n + m = 100 + 2m \geqslant 106$，即所求的最小值为 106．

【附注】 1 由于 n 与 m 分别是 1978^n 与 1978^m 这两个方幂的指数，为了使它们“直接发生关系”，根据题给条件，考虑到做差$(1978^n - 1978^m)$是一个解题技巧．此题需要有较强的分析问题能力和灵活运用所学知识的能力才能解出．此外，和第十九届一样，也是将竞赛的年号“1978”编入试题，能激起中学生钻研数学的兴趣．

2 我们将上述解法称为“展开弃项法”．它把复杂的难

以判断的问题变为简单的情况来处理，如变"求使 $(1978^{4k}-1)$ 中有 5^3 因子的最小值 k" 为"求使 $[2k(4k-1)5^2-4k\cdot 5]$ 中有 5^3 因子的最小值 k"。

这种变换也可以如下进行：

$$
\begin{aligned}
1978^{4k}-1 &= (2000-22)^{4k}-1=(5^3\cdot 16-22)^{4k}-1\\
&=5^3P+22^{4k}-1=5^3P+(22^4)^k-1\\
&=5^3P+(5^3\cdot 1874+6)^k-1\\
&=5^3P+5^3Q+6^k-1=5^3P+5^3Q+(5+1)^k-1\\
&=5^3P+5^3Q+5^3R+\frac{k(k-1)}{2}\cdot 5^2+5k\\
&=5^3\text{ 的倍数}+5k\cdot\frac{5k-3}{2}.
\end{aligned}
$$

由于 $(5k-3)$ 中无 5 的因子，因此，当且仅当 k 含 5^2 因子时，$(1978^{4k}-1)$ 中有 5^3 因子，从而定出 k 的最小值为 25.

还可以这样处理：

$$
\begin{aligned}
1978^{4k}-1 &= (1975+3)^{4k}-1=(5^2\cdot 79+3)^{4k}-1\\
&=5^3P+4k\cdot 5^2\cdot 79\cdot 3^{4k-1}+3^{4k}-1\\
&=5^3P+4k\cdot 5^2\cdot 79\cdot 3^{4k-1}+(5\cdot 16+1)^k-1\\
&=5^3\text{ 的倍数}+\cdots.
\end{aligned}
$$

于是，就可将"5^3 的倍数"丢掉不管.

由此可知，虽然变换的细节可以不止一种，但都不能离开"展开弃项"的共同特点. 所以解这类问题都可采用展开弃项法.

3　用展开弃项法求解本题，不止一次地用到了二项式定理，由此可知二项式定理的重要性，无论是解决初数问题，或是高数问题，它都是有力的数学工具之一. 因此，在可能

情况下，尽早地向中学生介绍这一内容是必要的.

4　本题属于整数论方面的问题，如用“数论”的知识求解，则须先具备有关同余概念、欧拉定理等知识，先求出最小的 $k=25$，再求最小的 $n+m=106$. 由于我国的中学生没有接触过这方面的专门知识，当然也不宜在中学里开设这门课，而类似于本题的一些问题又是提高学生智力的好题材，国内外中学生数学竞赛多有这方面的试题，所以，并不排斥有选择地向学生介绍一些整数的整除性有关知识（如被 5 整除的数的特点等等）.

5　本题还可以进一步推广，如将题设条件中的“最后三位数字”换为“最后连续 $r(>1)$ 位数字”，或“1978”换为“任意大于 1 的正整数 M”后，仍可求出 $n+m$ 的唯一确定的最小正整数值.

【第二题】　在一个球体内有一个定点 P，球面上有 A，B，C 三个动点，$\angle BPA=\angle CPA=\angle CPB=90°$. 以 PA，PB 和 PC 为棱，构成平行六面体，点 Q 是六面体上与 P 斜对的一个顶点，当 A，B，C 在球面上移动时，求 Q 点的轨迹.（7 分）

【分析】　这是一个三维空间(即立体)的几何问题，对此，我们有时可以从比较简单的二维空间(即平面)的类似问题，通过分析，加以类比，初步估计出所求问题的结论. 如图 5 所示，设平面上的圆 O 内有一定点 P. A，B 是圆周上两个动点，且 $\angle APB=90°$，$APBQ$ 是平行四边形（实际上是个矩形）. 我们只要再画两个这样的矩形，就会初步发现：由 P 点出发的矩形 $APBQ$ 的对角线 PQ 的另一端点 Q 的轨

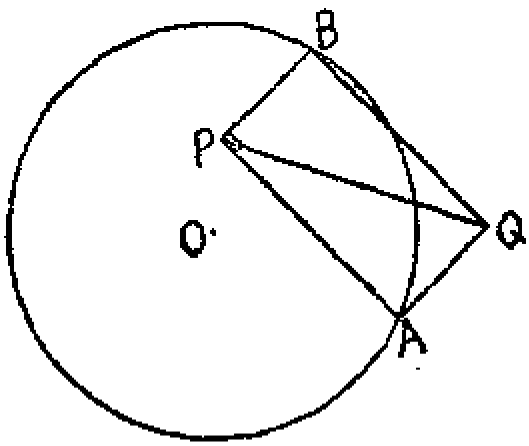

图 5

迹，是在圆 O 外而与圆 O 同心的一个圆.

类似的，我们可以判断：在空间中 Q 点的轨迹，是在已知球的外部，而与已知球同心的一个球. 这样，我们只要能证明不论点 Q 如何移动，它与球心 O 的距离恒为一定值，问题便解决了.

由题意知，球的半径以及球心和点 P 的距离为已知的定值，因此，只要推出用这两个定值表示 $|OQ|$ 的不变的表达式即可. 这个表达式，我们可以从三条不同的渠道获得：立体几何法；空间解析几何法；矢量法.

【解法一】 设已知的球心为 O，半径是 R，$OP=r_0$. 又过 O 作一平面与平面 APB 平行，并与 PC 交于 F；过 O 作一平面与平面 BPC 平行，并与 PA 交于 D；过 O 作一平面与平面 CPA 平行，并与 PB 的反向延长线交于 E（当 O 不在平行六面体 PQ 的外部，比如在内部时，则仍与 PB 相交)，如图 6 所示. 因为 PA，PB，PC 是两两垂直的，所以图中所示的棱柱体 OQ，OP，OA，OB，OC 等都是长方体. 在长方体 OQ 中：

$$OQ^2=AD^2+BE^2+CF^2; \tag{1}$$

在长方体 OP 中：

$$OP^2=PD^2+PE^2+PF^2=r_0^2; \tag{2}$$

在长方体 OA 中：

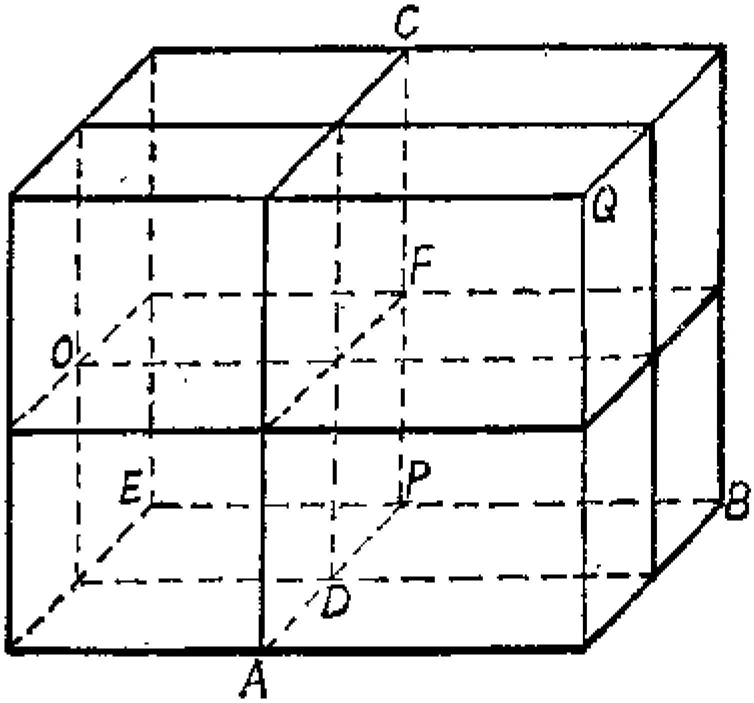

图 6

$$OA^2 = AD^2 + PE^2 + PF^2 = R^2; \quad (3)$$

在长方体 OB 中：

$$OB^2 = PD^2 + BE^2 + PF^2 = R^2; \quad (4)$$

在长方体 OC 中：

$$OC^2 = PD^2 + PE^2 + CF^2 = R^2. \quad (5)$$

(3) + (4) + (5)，得

$$(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(PD^2 + PE^2 + PF^2) = 3R^2. \quad (6)$$

将(1)，(2) 代入(6)，得

$$OQ^2 = 3R^2 - 2r_o^2. \quad (7)$$

由 (7)，$OQ = \sqrt{3R^2 - 2r_o^2}$ (由 $R > r_o$ 知 $3R^2 - 2r_o^2 > 0$，开方取正值).

这就是说，不论 A, B, C 在球面上按题设条件如何移动，

动点 Q 与定点 O 的距离永远不变而等于定值 $\sqrt{3R^2-2r_o^2}$ $(>R>0)$.

所以，Q 点的轨迹是以 O 为球心，$\sqrt{3R^2-2r_o^2}$ 为半径的球，且此球面在已知球的外部而与已知球同心．图 6 中仅画出 O 点在长方体外部的情况，当长方体按条件变动时，O 点也可以在长方体的内部或长方体的面、棱上．显然，不论如何变动，只要符合条件，上述解答过程以及所得到的结论都是成立的，OQ 永为定值．（充要性证明从略．）

【解法二】 以点 P 为原点，PA，PB，PC 分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，（如图 7）建立空间直角坐标系 $P—xyz$．设球心为 $O(a,\ b,\ c)$，半径为 R，$|OP|=r_o$，则球面方程为：

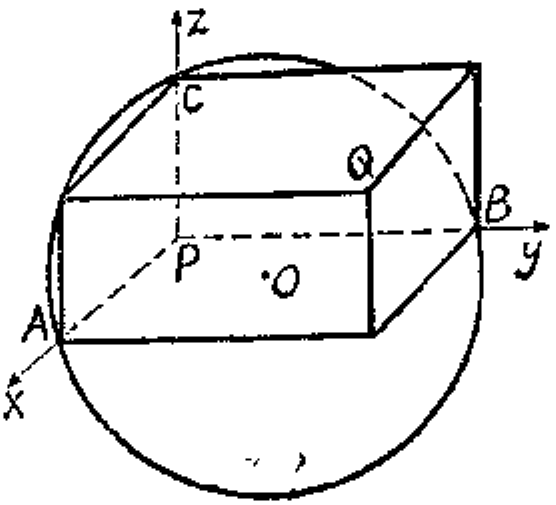

图 7

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

为求 $|OQ|$，必须先求点 Q 的坐标，而 Q 的横坐标即为点 A 的横坐标；Q 的纵坐标即为点 B 的纵坐标；Q 的立坐标即为点 C 的立坐标．因此，分别在球面方程中，令 $y=z=0$，得 Q 之横坐标

$$PA=x=a+\sqrt{R^2-b^2-c^2};$$

令 $z=x=0$，得 Q 之纵坐标

$$PB=y=b+\sqrt{R^2-c^2-a^2},$$

令 $x=y=0$，得 Q 之立坐标

$$PC=z=c+\sqrt{R^2-a^2-b^2}.$$

由两点间距离公式，得

$$\begin{aligned}|OQ|&=\sqrt{(a+\sqrt{R^2-b^2-c^2}-a)^2+(b+\sqrt{R^2-c^2-a^2}-b)^2+(c+\sqrt{R^2-a^2-b^2}-c)^2}\\&=\sqrt{(R^2-b^2-c^2)+(R^2-c^2-a^2)+(R^2-a^2-b^2)}\\&=\sqrt{3R^2-2(a^2+b^2+c^2)}\qquad(a^2+b^2+c^2=|OP|^2)\\&=\sqrt{3R^2-2|OP|^2}\qquad(|OP|^2=r_0^2)\\&=\sqrt{3R^2-2r_0^2}\qquad(>R)\end{aligned}$$

为定值.

因此，Q 点的轨迹是以已知的球心为球心，以 $\sqrt{3R^2-2r_0^2}$ 为半径而在已知球外的一个同心球面.

【解法三】 前面谈了几何法和解析法两种，下面再介绍一下矢量法.

如图 8 所示，已知的球心是 O，半径为 R，并设 $\overrightarrow{OQ}=\vec{r}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{r}_0$，$\overrightarrow{OA}=\vec{r}_a$，$\overrightarrow{OB}=\vec{r}_b$，$\overrightarrow{OC}=\vec{r}_c$，则 $\vec{r}_a^{\,2}=\vec{r}_b^{\,2}=\vec{r}_c^{\,2}=$

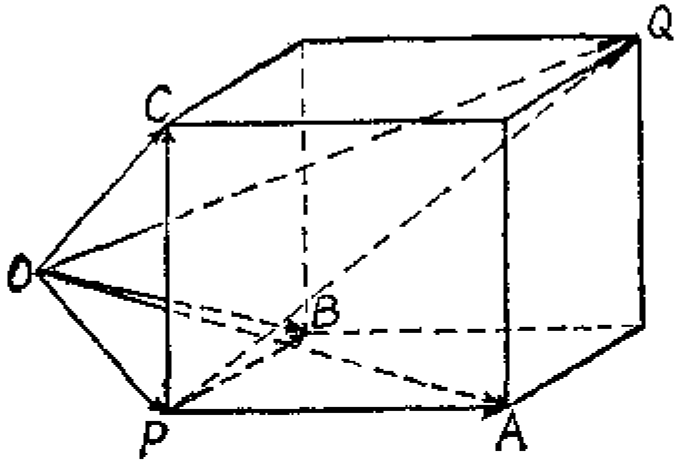

图 8

R^2; $\overrightarrow{PA}=\vec{r}_a-\vec{r}_o$, $\overrightarrow{PB}=\vec{r}_b-\vec{r}_o$, $\overrightarrow{PC}=\vec{r}_c-\vec{r}_o$.

因为 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ 两两正交，所以

$$(\vec{r}_a-\vec{r}_o)(\vec{r}_b-\vec{r}_o)=0,$$
$$(\vec{r}_b-\vec{r}_o)(\vec{r}_c-\vec{r}_o)=0,$$
$$(\vec{r}_c-\vec{r}_o)(\vec{r}_a-\vec{r}_o)=0.$$

即

$$\vec{r}_a\vec{r}_b-\vec{r}_o(\vec{r}_a+\vec{r}_b)+\vec{r}_o^{\,2}=0,$$
$$\vec{r}_b\vec{r}_c-\vec{r}_o(\vec{r}_b+\vec{r}_c)+\vec{r}_o^{\,2}=0,$$
$$\vec{r}_c\vec{r}_a-\vec{r}_o(\vec{r}_c+\vec{r}_a)+\vec{r}_o^{\,2}=0.$$

又

$$\begin{aligned}\vec{r}&=\vec{r}_o+\overrightarrow{PQ}=\vec{r}_o+(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\\&=\vec{r}_o+[(\vec{r}_a-\vec{r}_o)+(\vec{r}_b-\vec{r}_o)+(\vec{r}_c-\vec{r}_o)]\\&=\vec{r}_a+\vec{r}_b+\vec{r}_c-2\vec{r}_o.\end{aligned}$$

将上式两边分别取内积，得

$$\begin{aligned}\vec{r}^{\,2}&=(\vec{r}_a+\vec{r}_b+\vec{r}_c)^2-4\vec{r}_o(\vec{r}_a+\vec{r}_b+\vec{r}_c)+4\vec{r}_o^{\,2}\\&=\vec{r}_a^{\,2}+\vec{r}_b^{\,2}+\vec{r}_c^{\,2}+2(\vec{r}_a\vec{r}_b+\vec{r}_b\vec{r}_c+\vec{r}_c\vec{r}_a)-4\vec{r}_o\\&\quad(\vec{r}_a+\vec{r}_b+\vec{r}_c)-4\vec{r}_o^{\,2}\\&=3R^2-2[\vec{r}_o(\vec{r}_a+\vec{r}_b)+\vec{r}_o(\vec{r}_b+\vec{r}_c)+\vec{r}_o(\vec{r}_c+\vec{r}_a)\\&\quad-\vec{r}_a\vec{r}_b-\vec{r}_b\vec{r}_c-\vec{r}_c\vec{r}_a]+4\vec{r}_o^{\,2}\\&=3R^2-2[\vec{r}_o^{\,2}+\vec{r}_o^{\,2}+\vec{r}_o^{\,2}]+4\vec{r}_o^{\,2}\\&=3R^2-6r_o^2+4r_o^2\\&=3R^2-2r_o^2,\end{aligned}$$

所以

$$|\vec{r}|=\sqrt{3R^2-2r_o^2}.$$

故所求的轨迹是以已知球心为球心，以 $\sqrt{3R^2-2r_o^2}$ 为半径的球面.

【附注】 1 由于一般立体图的线条多，图形比较复杂，一时难于作出正确的判断，甚至一下子还不能弄清题意，因此，对于一些空间问题，往往先从平面上类似的问题分析入手，较易寻求问题的结论，然后给以解答；同时，分析的过程中，也蕴藏了解题的具体方法.

2 用解析法和矢量法解本题，思路一般都有一定的规律性可循. 过去我国中学数学课程只开设到平面解几为止，学生没有接触空间解几，特别是矢量运算，解本题就感困难。

3 解法二所建立的坐标系是“移动的”，但毫无关系. 因 PA，PB，PC 是两两垂直的，故以它们为坐标轴所建立的坐标系恒为直角坐标系；同时，我们还可以看到，那样建立的空间坐标系，不论怎样“移动”，坐标原点不变，始终为点 P；而我们所研究的只是两点间的距离，且距离对坐标变换来说是不变量，得到的结论是：$OQ=\sqrt{3R^2-2r_o^2}$ 恒为定长. 所以，对问题的解决既方便，又不影响推导过程的正确性和所得结论的一般性.

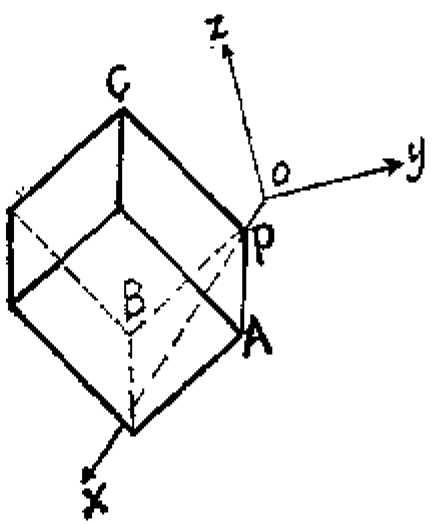

图 9

这里，我们再补充一种“固定的”坐标系的解析解法，并看其结果如何？

以球心 O 为原点，OP 为 x 轴正向，建立空间直角坐标系，如图 9 所示. 设球 O 的半径为 R，则已知的球面方程为：

$$x^2-y^2+z^2=R^2.$$

假定 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，$C(x_3, y_3, z_3)$，那末

$$x_i^2+y_i^2+z_i^2=R^2 (i=1,\ 2,\ 3). \tag{1}$$

又设 $Q(x,\ y,\ z)$，$OP=r_o$，则点 P 的坐标为 $(r_o,\ 0,\ 0)$。由"长方体的任意一条对角线的平方等于它的三度的平方和"，得

$$PQ^2=PA^2+PB^2+PC^2. \tag{2}$$

根据两点间距离公式，得

$$PQ^2=(x-r_o)^2+y^2+z^2; \tag{3}$$

$$PA^2=(x_1-r_o)^2+y_1^2+z_1^2; \tag{4}$$

$$PB^2=(x_2-r_o)^2+y_2^2+z_2^2; \tag{5}$$

$$PC^2=(x_3-r_o)^2+y_3^2+z_3^2. \tag{6}$$

将(1)，(3)，(4)，(5)，(6)代入(2)，并加整理，得

$$x^2+y^2+z^2=3R^2+2{r_o}^2+2r_o(x-x_1-x_2-x_3). \tag{7}$$

由矢量加法的平行六面体法则：

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC},$$

有

$$\begin{aligned}(x-r_o,\ y,\ z)&=(x_1-r_o,\ y_1,\ z_1)+(x_2-r_o,\ y_2,\ z_2)\\&\quad+(x_3-r_o,\ y_3,\ z_3)\\&=(x_1+x_2+x_3-3r_o,\ y_1+y_2+y_3,\\&\qquad z_1+z_2+z_3),\end{aligned}$$

所以

$$x-r_o=x_1+x_2+x_3-3r_o,$$

$$x-x_1-x_2-x_3=-2r_o. \tag{8}$$

将(8)代入(7)，即得动点 Q 的轨迹方程：

$$x^2+y^2+z^2=3R^2-2{r_o}^2. \tag{9}$$

显然，(9)是以 O 为球心，$\sqrt{3R^2-2{r_o}^2}$ 为半径的球面方程.

可见，此与前面三种解法所得的结果完全一致．但此解

法与上述解法二相比，计算量要大些，优点是可以得到Q点轨迹的方程.

4 用立体几何的方法，关键在于作出几个辅助面，把原长方体划分为若干个长方体，然后根据立几中的"长方体的任意一条对角线的平方等于它的三度的平方和"这一定理，经过适当的组合，运算，即能得到本题的正确答案．但要求学生具有较高的空间想象和逻辑思维的能力.

5 在对一个数学问题的研究过程中，考虑一下问题的特殊情况，和问题能否推广等等，是能够提高分析问题能力的．本题的特例之一，是当P与圆心重合的情况，这时$|OQ| = \sqrt{3R^2-2r_o^2} = \sqrt{3}R$；之二是当$P$在球面上，则$|PQ| = \sqrt{3R^2-2r_o^2} = \sqrt{3R^2-2R^2} = R(>0)$，点$Q$的轨迹就是已知的球面本身；之三是$n$维空间的情况，则是本题的推广.

【第三题】 设f，g：$Z^+\longrightarrow Z^+$为严格递增函数，且

$$f(z^+)\cup g(z^+)=z^+,\quad f(z^+)\cap g(z^+)=\phi,$$
$$g(m)=f[f(m)]+1,$$

求$f(2m)$．这里z^+是正整数集合，ϕ是空集．（8分）

【分析】 本题涉及集合与映射的概念．函数与映射、对应、变换等是同义词，y是x的函数普通表示为$y=f(x)$，记号f标志着函数的对应规律或对应法则．在现代数学中，函数或者映射又常用如下的记法表示：

$$x\xrightarrow{f}y \text{ 或 } f:\ x\rightarrow y[=f(x)].$$

这就是说，通过法则f把x变为y，或在f下由x映射至y．如果自变量是集合A（映射的定义域）中的任意元，而

$y \in B$，则又可写成：

$$f: A \longrightarrow B.$$

本题采用了现代数学中的一些记法．

在 f 下，当由 A 中的相异元所得到的 B 中的元也相异时，则称映射 f 为单射；当 B 中的元都可取到时，则称映射 f 为全射．由于本题的函数 f 与 g 都是严格递增的，且值域 $f(z^+)$ 与 $g(z^+)$ 的并集为正整数集 z^+，它们的交集为空．因此，f 与 g 都是单射，但都不是全射．

剖析题给条件，我们看到，f 与 g 都是以正整数为自变量取值的函数，所有的函数值 $f(z^+)$ 与 $g(z^+)$ 也都是正整数，并且各自组成递增序列：

两个递增序列合并，即为正整数列；

两个序列之间，没有任何公共同正整数；

两个函数之间由关系式 $g(m)=f(f(m))+1$所联系．

题目要求的是 $f(2m)$ 的一般表达式．为此，可先求 $f(m)$ 与 $g(m)$ 的一般表达式．求法还可先具体后一般．比如，根据已知条件可以计算出 $f(1)$，$g(1)$ 的值．因为 f，g: $z^+ \to z^+$ 严格递增，所以，当 $r<s$ $(r, s \in z^+)$时，$f(r)<f(s)$，$g(r)<g(s)$．

又因 $f(z^+) \cup g(z^+)=z^+$，$f(z^+) \cap g(z^+)=\phi$，故在 $f(1)$、$g(1)$ 两值中，必有且仅有一值取 z^+ 中的最小值 1，并且：

$$f[f(1)] \geqslant 1, \qquad g(1)=f[f(1)]+1 \geqslant 2.$$

既然 $g(1) \neq 1$，故必有 $f(1)=1$，从而

$$g(1)=f[f(1)]+1=2.$$

仿此可以相继求出 $f(2)$，…和 $g(2)$，…，并列表观察

它们之间的变化规律和函数值的分布状况，再给以理论证明，从而求出$f(2m)$.

必须说明，本题无论用什么方法解决都是相当困难的，解答的篇幅也很冗长，就是象上面那样继续求出$f(2)$，$g(2)$，$f(3)$，$g(3)$等值，也不是轻而易举的事. 至于理论上的论证，一般表达式的寻求，更需要涉及不少予备知识，包括数论中的若干结论.

【解答】 我们已经用过符号“$\Longrightarrow$”，它表示“由左端可推出右端”，有时还在箭头上标出推理的根据或理由.

为了叙述的方便，我们将题给条件依次标记为：

$$f, g: z^+ \longrightarrow z^+ \text{ 为严格递增函数；} \tag{1}$$

$$f(z^+) \cup g(z^+) = z^+ \quad \text{（正整数集）；} \tag{2}$$

$$f(z^+) \cap g(z^+) = \phi \quad \text{（空集）；} \tag{3}$$

$$g(m) = f[f(m)] + 1 \quad (m \in z^+). \tag{4}$$

下面分三个步骤来求$f(2m)$.

第一步 求值列表.

由(1)知，$f(m) = max\{f(1), f(2), \cdots, f(m)\}$，因而显然有：

$$f(m) \geqslant m. \tag{5}$$

而且，由(5)知，

$$f[f(m)] \geqslant f(m) \overset{(1)}{\Longrightarrow} f[f(m)] + 1 > f(m)$$

$$\overset{(4)}{\Longrightarrow} g(m) > f(m). \tag{6}$$

由(1)，(2)及(6)知$f(1) = 1$，故$g(1) = f[f(1)] + 1 = f(1) + 1 = 2$.

由(1)与(3)分别得到：

$$\left.\begin{array}{l} f(2)>f(1) \\ f(2)\neq 2=g(1) \end{array}\right\}\Longrightarrow f(2)\geqslant 3.$$

但若 $f(2)>3$，则将产生矛盾，因为

$$f(2)>3\xRightarrow{(6)} g(2)>3\xRightarrow{(1),(2)} 3\bar{\in} f(z^+)\cup g(z^+)=z^+,$$

所以，

$$f(2)=3.$$

由(1)，$f(3)\geqslant 4$，但 $f(3)$ 不能大于 4，否则将产生矛盾．因为

$$g(2)=f[f(2)]+1=f(3)+1>4\xRightarrow{(1),(2)} 4\bar{\in} z^+.$$

所以，$f(3)=4,\quad g(2)=5.$

由(1)，$f(4)>f(3)=4\xRightarrow{(3)} f(4)>5\Longrightarrow f(4)\geqslant 6$，但若 $f(4)>6$，则将又产生矛盾．因为

$$g(3)=f[f(3)]+1=f(4)+1>6\xRightarrow{(1),(2)} 6\bar{\in} z^+.$$

所以，$f(4)=6,\quad g(3)=7.$

仿照前面的推理，可陆续求出：

$f(5)=8, f(6)=9, g(4)=10, f(7)=11, f(8)=12,$

$g(5)=13,\cdots$

于是列出自变量 m 与函数值 $f(m)$，$g(m)$ 的对应数值表：

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
$f(m)$	1	3	4	6	8	9	11	12	……	
$g(m)$	2	5	7	10	13	15	18	……		

(7)

由于 (7) 中的数值是根据(1)，(2)，(3)，(4)推求出来的，所以表中数值是满足题给全部条件的．此外，还可从表中看出以下两点：

对于任意的 $m\in z^{+}$，都有 $g(m)=f(m)+m$； (8)

函数值 $f(m+1)$ 是 z^{+} 中除 $f(1)$，$f(2)$，…，$f(m)$，$g(1)$，$g(2)$，…，$g(m)$ 外的最小正整数． (9)

对 (8) 的一般证明见后面的附注；我们来证结论 (9) 成立．

事实上，设(9)中的最小正整数为 l，则由(1)与(3)得

$$f(m+1)\geqslant l.$$

但若 $f(m+1)>l$，就有

$$f(m+1)>l\xrightarrow{(1),(6)}g(m+1)>l\Longrightarrow l\bar{\in}z^{+},$$

与(2)矛盾．所以 $f(m+1)=l$．

根据(8)与(9)，可将表 (7) 续写至任何已知的正整数，所得结果不但符合题设全部条件，而且是唯一决定的．比如：

$$g(8)=f(8)+8=12+8=20.$$

此时 z^{+} 中已出现过的正整数为 1，2．3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13，⑭，15，⑯，⑰，18，⑲，20，…(圆圈内的数是未出现过的)，因此：

$f(9)=14$，　$g(9)=f(9)+9=14+9=23$；

$f(10)=16$，　$g(10)=f(10)+10=16+10=26$；

$f(11)=17$，　$g(11)=f(11)+11=17+11=28$；

$f(12)=19$，　$g(12)=f(12)+12=19+12=31$；

$f(13)=21$，　$g(13)=f(13)+13=21+13=34$；

由此可见，符合题设条件的函数 $f(m)$ 与 $g(m)$ 倘就这样唯一无重复地共同组成了正整数列.

第二步　求 $f(m)$ 与 $g(m)$ 的一般表达式.

使 $f(m)$ 与 $g(m)$ 无重复地共同组成正整数列，其一般表达式是怎样的呢？为了解决这一问题，需要用到数论中的结论，先证下面的引理.

引理　如果正无理数 α 与 β 满足

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1, \tag{10}$$

那么$[\alpha m]$与$[\beta m]$就无重复地共同组成正整数列. 其中 $m\in z^{+}$，$[x]$表示不超过正数 x 的最大整数.

证明　这实际上就是要证：对于任意一个正整数 N，不在数列$\{[\alpha m]\}$中出现，就在数列$\{[\beta m]\}$中出现且仅出现一次.

数列$\{[\alpha m]\}$与$\{[\beta m]\}$中的各项，显然都是正整数，用 m_1 与 m_2 分别表示各数列中不大于 N 的正整数的个数，则

$$m_1=max\{m \mid [\alpha m]\leqslant N\}.$$

由(10)，有

$$0<\beta=\frac{\alpha}{\alpha-1}\Longrightarrow \alpha>1,\quad \beta>1, \tag{11}$$

所以

$$[\alpha m_1]\leqslant N\leqslant[\alpha(m_1+1)]\overset{(11)}{\Longrightarrow}\alpha m_1<N+1<\alpha(m_1+1)$$

$$\Longrightarrow m_1<\frac{N+1}{\alpha}<m_1+1. \tag{12}$$

同理可得：

$$m_2 < \frac{N+1}{\beta} < m_2 + 1. \tag{13}$$

(12) + (13)．并根据(10)整理，得

$m_1 + m_2 < N + 1 < m_1 + m_2 + 2$， $m_1 + m_2 - 1 < N < m_1 + m_2 + 1$，
所以

$$m_1 + m_2 = N.$$

这就是说，在 $\{[\alpha m]\}$ 和 $\{[\beta m]\}$ 中，不大于 N 的正整数恰好共有 N 个．但由正整数 N 的任意性，同样可知，其中不大于 $N-1$ ($N>1$) 的正整数也恰好共有 $N-1$ 个．于是，两者一比较，即得在$\{[\alpha m]\}$ 和 $\{[\beta m]\}$ 中，大于 $N-1$ 而不大于 N 的正整数有且仅有一个，它正好就是 N．换句话说，任何正整数 N 不在$\{[\alpha m]\}$中出现一次，就在 $\{[\beta m]\}$ 中出现一次，二者必居其一．引理证毕．

满足(10)的正无理数组(α, β)有无限多组．例如：

$$\alpha = \sqrt{2}, \qquad \beta = 2 + \sqrt{2};$$

$$\alpha = \sqrt{5}, \qquad \beta = \frac{5+\sqrt{5}}{4};$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2};$$

……………………………………

但是，如果引理中的 α、β 不仅满足条件(10)，且又满足条件：

$$\beta = \alpha^2, \tag{14}$$

那么正无理数组(α, β)就是唯一的．

事实上，将(10)与(14)联立求解，并取正根，则

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0, \qquad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \tag{15}$$

$$\beta=\alpha^2=1+\alpha, \qquad \beta=\frac{3+\sqrt{5}}{2}. \tag{16}$$

设 α，β 为满足(10)与(14)的两个确定的正无理数，则 $m(\in z^+)$ 的函数

$$f(m)=[\alpha m], \quad g(m)=[\beta m] \tag{17}$$

满足(1)，(2)，(3)，(4).

事实上，因为两个正无理数 α 与 β 满足(10)，故由引理知，(17)满足(1)，(2)，(3). 需要证明的只是 (17) 满足条件(4).

一方面，因 α 为大于 1 的无理数，故有

$$[\alpha m]<\alpha m \Longrightarrow \alpha[\alpha m]<\alpha^2 m \overset{(14)}{\Longrightarrow} \alpha[\alpha m]<\beta m$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} [\alpha[\alpha m]]<[\beta m]. \tag{18}$$

另一方面，又由(10)与(14)，有 $\alpha=1+\frac{1}{\alpha}$，$\beta=\alpha+1$. 于是

$$\begin{aligned}\alpha[\alpha m] &= \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)[\alpha m]\\ &= [\alpha m]+\frac{1}{\alpha}[\alpha m]>[\alpha m]+\frac{1}{\alpha}(\alpha m-1)\\ &= [\alpha m]+m-\frac{1}{\alpha}=[\alpha m+m]-\frac{1}{\alpha}\\ &= [(\alpha+1)m]-\frac{1}{\alpha}>[\beta m]-1,\end{aligned}$$

所以

$$[\alpha[\alpha m]]\geqslant[\beta m]-1. \tag{19}$$

比较(18)与(19)得，$[\alpha[\alpha m]]=[\beta m]-1$，即

$$[\beta m]=[\alpha[\alpha m]]+1. \tag{20}$$

(20)即说明(17)满足条件(4)：

$$g(m)=f(f(m))+1.$$

第三步　最后求出 $f(2m)$ 的一般表达式.

不难依次算出(17)中的两个函数

$$f(m)=[\alpha m]=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}m\right],$$

$$g(m)=[\beta m]=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}m\right]$$

$(m\in z^{+})$ 的取值与表(7)完全一致，比如：

$$f(1)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]=[1.618\cdots]=1,$$

$$g(1)=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]=[2.618\cdots]=2;$$

$$f(2)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot 2\right]=[3.236\cdots]=3,$$

$$g(2)=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot 2\right]=[5.236\cdots]=5;$$

$$f(3)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot 3\right]=[4.854\cdots]=4,$$

$$g(3)=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot 3\right]=[7.854\cdots]=7;$$

$$f(4)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot 4\right]=[6.472\cdots]=6,$$

$$g(4)=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot 4\right]=[10.472\cdots]=10;$$

$$f(5)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot 5\right]=[8.090\cdots]=8,$$

$$g(5)=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot 5\right]=[13.090\cdots]=13;$$

……………………………………………

表(7)由题设条件知是唯一的，又(17)满足题设的全部

条件，所以本题的最后答案是：

$$f(2m)=[\alpha(2m)]=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}(2m)\right]$$

$$=[(1+\sqrt{5})m]=m+[\sqrt{5}m].$$

【附注】 1 关于(8)，即 $g(m)=f(m)+m$ 的一般证明.

对于任意的 $m\in z^+$，都有

$$g(m)+1\in f(z^+). \tag{21}$$

否则，

$$g(m)+1\overline{\in} f(z^+)\overset{(3)}{\Longrightarrow} g(m)+1\in g(z^+)$$

$$\overset{(4)}{\Longrightarrow} g(m)+1=f(f(m'))+1$$

$$\Longrightarrow g(m)=f(f(m'))$$

与(3)矛盾，其中 $m'\in z^+$.

对于任意的 $m\in z^+$，都有

$$g(m+1)\geqslant g(m)+2. \tag{22}$$

由(1)，$g(m+1)-g(m)\geqslant 1$. 但 $g(m+1)-g(m)\neq 1$，否则由(21)得 $g(m+1)=g(m)+1\in f(z^+)$ 与(3)矛盾，所以(22)成立.

若 $m\in g(z^+)$，则

$$f(m+1)=f(m)+1. \tag{23}$$

先证，对于 $g(z^+)$ 中的 m 有 $f(m)+1\in f(z^+)$.

设 $m\in z^+$，且 $\mu=g(m)$，如果此时 $f(\mu)+1\overline{\in} f(z^+)$，则必有 $m'\in z^+$：

$$f(\mu)+1\in g(z^+)\overset{(4)}{\Longrightarrow} f(g(m))+1=f(f(m'))+1$$

$$\Longrightarrow f(g(m))=f(f(m'))\xRightarrow{(1)} g(m)=f(m'),$$

与(3)矛盾，判断成立.

再证(23)成立. 由(1)，

$$f(m+1)>f(m)\Longrightarrow f(m+1)\geqslant f(m)+1.$$

但若上式的不等号成立，则对任何 $\mu\in z^+$ 均有，$f(m+\mu)>f(m)+1\xRightarrow{(6)} g(m+\mu)>f(m)+1\Longrightarrow$ 正整数 $f(m)+1\bar{\in} z^+$，与(2)矛盾，(23)证毕.

若 $m\in f(z^+)$，则

$$f(m+1)=f(m)+2. \tag{24}$$

显然，

$$\left.\begin{array}{l} m\in f(z^+)\xRightarrow{(4)} f(m)+1\in g(z^+), \\ (1)\xRightarrow{(3)} f(m+1)\geqslant f(m)+2\overset{(4)}{=}g(m')+1, \\ (21)\Longrightarrow g(m')+1\in f(z^+), \end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$f(m)+2\in f(z^+)\xRightarrow{(1),(2),(3)}(24).$$

用归纳法证明：$g(m)=f(m)+m$ 对 z^+ 中任意正整数成立.

当 $m=1$ 时，$g(1)=2$，$f(1)+1=1+1=2$，即 $g(1)=f(1)+1$ 成立.

设 $m=k$ 时，命题成立，即 $g(k)=f(k)+k$， (25)

这里 $k\in z^+$，下面就两方面的情况分别进行研究.

对于 $k\in f(z^+)$ 的情况，由(24)得

$$f(k+1)=f(k)+2. \tag{26}$$

但是，由

$$k \in f(z^+) \xRightarrow{(4)} f(k)+1 \in g(z^+) \xRightarrow{(23)} f[f(k)+2]$$
$$= f[f(k)+1]+1. \tag{27}$$

由(26)，可知

$$f[f(k+1)]+1 = f[f(k)+2]+1 \overset{(27)}{=} f[f(k)+1]+2$$
$$\overset{(24)}{=} f[f(k)]+1+3 \xRightarrow{(4)} g(k+1)$$
$$= g(k)+3. \tag{28}$$

(28) − (26)：

$$g(k+1) - f(k+1) = g(k) - f(k) + 1$$
$$\xRightarrow{(25)} g(k+1) - f(k+1) = f(k) + k - f(k) + 1$$
$$\xRightarrow{(4)} g(k+1) = f(k+1) + (k+1). \tag{*}$$

这就是说，当 $m=k+1$ 时命题仍成立。

对于 $k \in g(z^+)$ 的情况，由(23)得

$$f(k+1) = f(k) + 1. \tag{29}$$

$$f(k) \in f(z^+) \xRightarrow{(24)} f[f(k)+1] = f[f(k)]+2, \tag{30}$$

由(29)，可知

$$f[f(k+1)] = f[f(k)+1] \overset{(30)}{=} f[f(k)]+2$$
$$\Longrightarrow f[f(k+1)]+1 = f[f(k)]+1+2$$
$$\xRightarrow{(4)} g(k+1) = g(k)+2. \tag{31}$$

(31) − (29)：

$$g(k+1)-f(k+1)=g(k)-f(k)+1$$

$$\overset{(25)}{\Longrightarrow} g(k+1)-f(k+1)=f(k)+k-f(k)+1$$

$$\Longrightarrow g(k+1)=f(k+1)+(k+1). \qquad (**)$$

这就是说，当 $m=k+1$ 时命题仍成立.

由(*)与(* *)，对于任意的 $m\in z^+$，都有等式：

$$g(m)=f(m)+m.$$

2 关于(14)的由来.

可以证明，两个正整数 m 的一次函数

$$F(m)=\alpha m.\ \ G(m)=\beta m \qquad (32)$$

满足条件 $$G(m)=F(F(m)) \qquad (33)$$

时，函数 $f(m)=[F(m)]=[\alpha m]$ 与 $g(m)=[G(m)]=[\beta m]$ 一定满足题设全部条件，特别是包括第(4)个条件. 其中 α，β 都是满足(10)的正无理数(此问题的证明，不仅篇幅长，而且又要用到整数论的其它结论，因而从略).

由(32)，(33)不难推出 $\beta=\alpha^2$. 这是因为：

$$\beta m=Gm=F(F(m))=F(\alpha m)=\alpha(\alpha m)=\alpha^2 m.$$

3 本题也可采用下述步骤求解.

第一步，由题设条件具体算出 f 与 g 的前若干个值，并将它们按小到大的顺序排列，其分布概况是：

$$f,g,f,f,g,f,g,f,f,g,f,f,g,f,g,f,\cdots.$$

第二步，为寻求 f 与 g 的一般分布规律，构造一个序列：$P_N=\{f,g,\cdots\}$，其中有 N 个元，第 k 个元是 f 或是 g 应视 $k\in f(Z^+)$ 或 $k\in g(Z^+)$ 而定.

用数学归纳法证明：P_{F_n} 是 $P_{F_{n-1}}$ 与 $P_{F_{n-2}}$ 的依次合并.

---

* (F_n/F_{n-1}) 以黄金分割为极限.

此处 F_n 是斐波那契(Fibonacci)数列*的第 n 项：

$$F_1=1,\ F_2=2,\ \cdots,\ F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\ \cdots.$$

第三步，用数学归纳法证明：P_{F_n} 中恰含 F_{n-1} 个 f 值和 F_{n-2} 个 g 值．由此进一步归纳为：

$$f(F_{n-1}+m)=F_n+f(m)\quad(1\leqslant m\leqslant F_{n-2});$$

$$g(F_{n-2}+m)=F_n+g(m)\quad(1\leqslant m\leqslant F_{n-3}).$$

第四步，再用归纳法证明：

$$f(m)=\left[\frac{F_n}{F_{n-1}}m\right]\quad(F_{n-1}<m\leqslant F_n,\ m\geqslant 3).$$

第五步，证明 $\frac{F_n}{F_{n-1}}$（当 $n\longrightarrow\infty$ 时）的极限是 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，

从而求出：

$$f(m)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}m\right],$$

$$f(2m)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot 2m\right]=[(1+\sqrt{5})m]=[m+\sqrt{5}m]$$

$$=m+[\sqrt{5}m].$$

【第四题】 在$\triangle ABC$ 中，边 $AB=AC$，有一个圆内切于$\triangle ABC$ 的外接圆，并且与 AB，AC 分别相切于 P，Q，求证 P，Q 连线的中点是$\triangle ABC$ 的内切圆圆心．（5 分）

【分析】 设小圆圆心为 O'，PQ 的中点为 O，两圆相切于 D（参看图 10）．要证 O 是$\triangle ABC$ 的内心，只需证：O 点既在等腰$\triangle ABC$ 的顶角的平分线上，又在一个底角的平分线上即可；或者只需证 O 点到一腰的距离等于到底边的距离亦可．

但不论走那条道路，都得先证 A、O、O'、D 与大圆圆心共线，这点容易办到．事实上，根据平几中的有关定理，不难证明 AD 为圆的直径；或者利用圆和等腰三角形的对称性，也可立即证明这一事实．只有先证得 AD 为圆的直径，才能展开对其它部分的证明．

本题的证法很多，这里仅以一种证法为例，即以如何证明"O 点在 $\angle B$ 的平分线上"(O 点在等腰 $\triangle ABC$ 的顶角平分线上易证)为例，说明证题的思路．

从结论出发，由果追因．连 OB，要证 OB 是 $\angle B$ 的平分线，即证 $\angle 1=\angle 2$，亦即证 $\angle 1=\angle 3$（因易证 $PQ \parallel BC$），也就是要证明 $OP=BP$，$\triangle POB$ 是等腰三角形．

要证 $OP=BP$，方法也不止一种，其中之一是找出两个全等三角形，使 OP 与 BP 为对应边．为此，分别连 BD 与 PD．

在 $\triangle OPD$ 和 $\triangle BPD$ 中，已有 PD 公用，$\angle O=\angle B=\angle R$，还差一个条件．这个条件一般不宜再寻找两条边对应相等（因为已有 PD 公用，而 $OP=BP$ 是我们要证明的），宜再寻找两个角对应相等，比如 $\angle 4$ 与 $\angle 5$．

$\angle 4$ 是否等于 $\angle 5$ 呢？我们知道：圆周角 $\angle 4$ 对 $\overset{\frown}{DQ}$；$\angle 5$ 为夹 $\overset{\frown}{DP}$ 的弦切角．最后的问题是归结为证明 $\overset{\frown}{DQ}=\overset{\frown}{DP}$．因为 $\overset{\frown}{QDP}$ 被点 D 分为 $\overset{\frown}{DQ}$ 与 $\overset{\frown}{DP}$ 两段，而 AD 是垂直平分小圆的弦 PQ 的，所以也必平分 $\overset{\frown}{QDP}$．于是，问题得到彻底解决．

其余各种不同证法（有的也是大同小异的或者只是局部有所区别），包括几何法、解析法的分析，都不再一一赘述．

【证法一】 设内切于大圆的小圆圆心为 O'，切点为

D，PQ 的中点是 O，并连 AO，OB，BD，DP，如图 10 所示．

∵　$AP=AQ$（切线长定理），

∴　AO 平分 $\angle A$，AO 垂直平分 PQ，点 O' 在直线 AO 上．

同理，直线 AO 垂直平分 BC，

∴　大圆圆心在直线 AO 上，且 $PQ \parallel BC$．

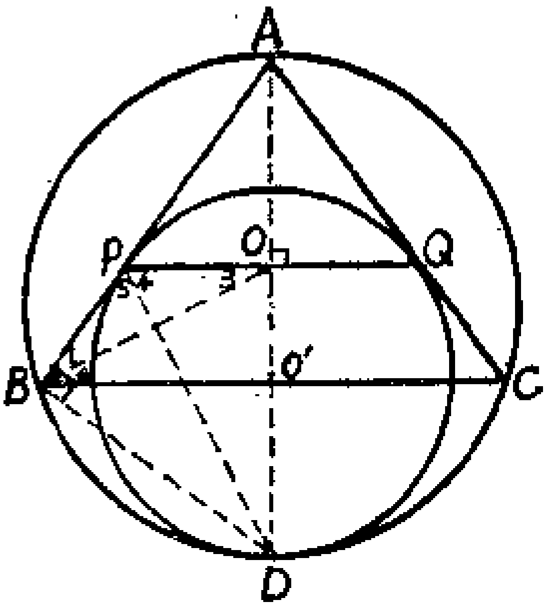

图 10

∵　直线 AO 通过两相切圆的圆心，

∴　直线 AO 通过切点 D，即 AD 为直径．

在直角三角形 OPD 与直角三角形 BPD 中：

∵　AD 垂直平分弦 PQ，$\overset{\frown}{DQ}=\overset{\frown}{DP}$（$D$ 点平分 $\overset{\frown}{QDP}$），

∴　$\angle 4=\angle 5$（$\angle 4$ 对 $\overset{\frown}{DQ}$，$\angle 5$ 为夹 $\overset{\frown}{DP}$ 的弦切角）；

又　PD 公用；

∴　$Rt\triangle OPD \cong Rt\triangle BPD$，

∴　$OP=BP$．

因此，$\angle 1=\angle 3$．而 $\angle 3=\angle 2$（平行线的内错角），故 $\angle 1=\angle 2$，亦即 OB 是等腰 $\triangle ABC$ 一个底角的平分线．又前已证，OA 为顶角 A 的平分线，所以 PQ 的中点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心．

【证法二】　证法一中已证的部分从略，下同．联 OB，BD，DP，DQ，如图 11 所示．根据圆和等腰三角形的

对称性，易知对称轴 AD 平分$\angle PDQ$，即$\angle\beta=\frac{1}{2}\angle PDQ$.

$\because$ O，P，B，D 四点共圆（$\angle POD=\angle PBD=\angle R$），

$\therefore$ $\angle\alpha=\angle\beta$.

又 $\angle ABC=\angle APQ$（$BC\parallel PQ$），

$\angle APQ=\angle PDQ$（弦切角等于内对角），

$\therefore$ $\angle ABC=\angle PDQ$.

但 OD 为$\angle PDQ$ 的分角线，故 OB 是$\angle ABC$ 的分角线.

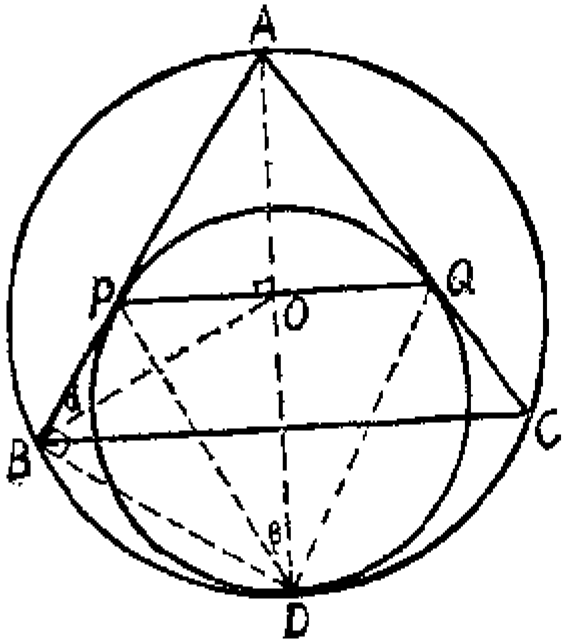

图 11

【证法三】 如图 12 所示，联 OB，BD，$O'P$，PD，则

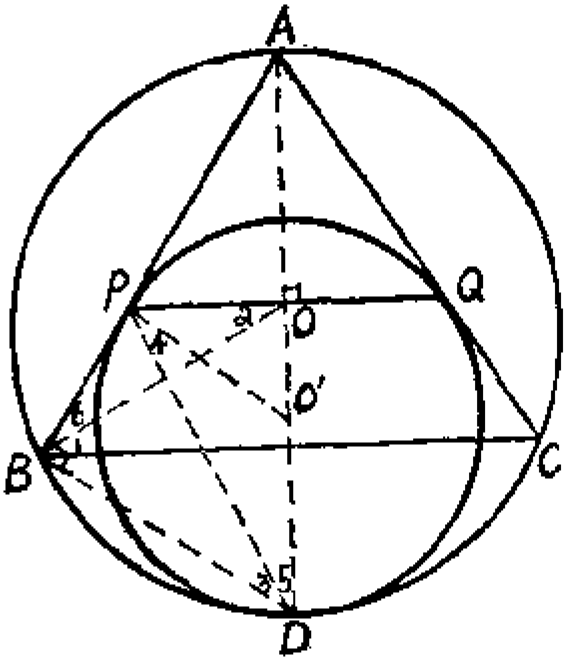

图 12

$\angle1=\angle2$（$PQ\parallel BC$），

$\angle2=\angle3$（O，P，B，D 共圆），

$\angle3=\angle4$（$O'P\parallel BD$），

$\angle4=\angle5$（$O'P=O'D$），

$\angle5=\angle6$（O，P，B，D 共圆）.

因此，$\angle1=\angle6$. 所以 OB 是$\angle ABC$ 的平分线.

【证法四】 上面三种方法，都是通过证明“O 是$\triangle ABC$ 的分角线的交点”来

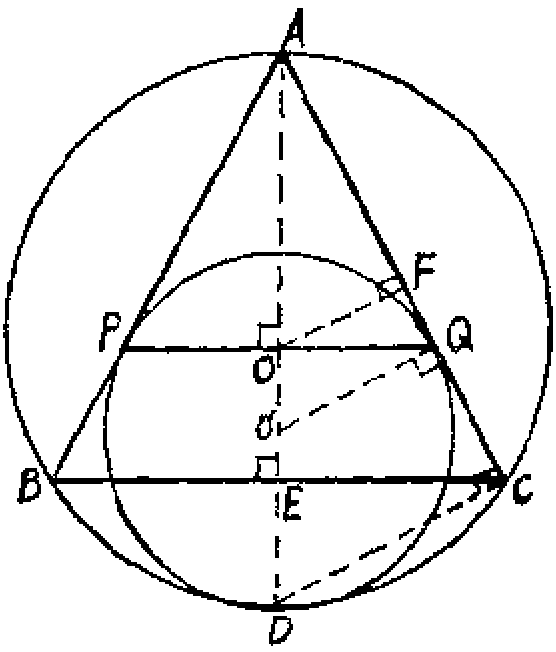

图 13

完成的．下面，我们再利用“PQ 的中点 O 到等腰三角形 ABC 的腰的距离等于到底边的距离”的事实来证本题．

过O 作 $OF\perp AC$，F 为垂足；分别连 $O'Q$，CD，则 $O'Q\perp AC$， $CD\perp AC$；又设直径 AD 与 BC 交于 E，如图 13 所示．

由 $Rt\triangle OFA\sim Rt\triangle O'QA$ 得：

$$\frac{OF}{OA}=\frac{O'Q}{O'A};$$

由 $O'Q=O'D$(同圆半径)得：

$$\frac{O'Q}{O'A}=\frac{O'D}{O'A};$$

由 $O'Q\parallel CD$ 知：

$$\frac{O'D}{O'A}=\frac{QC}{QA};$$

由 $PQ\parallel BC$ 知：

$$\frac{QC}{QA}=\frac{OE}{OA}.$$

因此，$\dfrac{OF}{OA}=\dfrac{OE}{OA}$，故 $OF=OE$．所以 PQ 的中点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心．

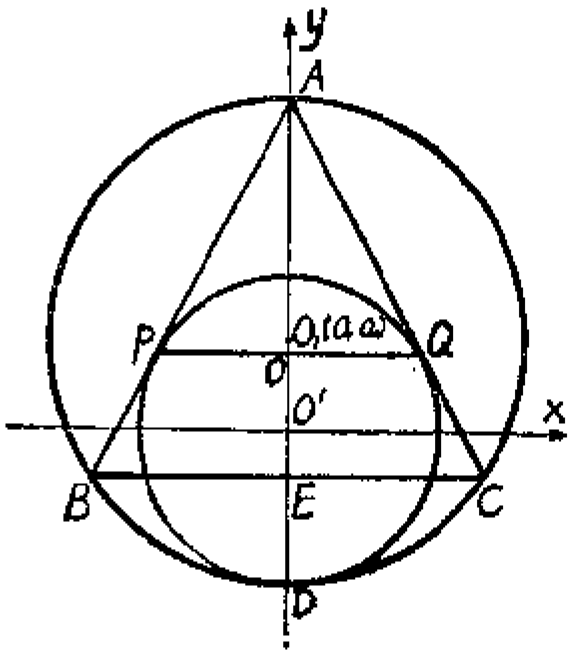

图 14

【证法五】 以$\odot O'$的圆心O'为原点，直径DA所在直线为纵轴，建立平面直角坐标系如图14．为方便起见，设$\odot O'$的半径为1，大圆圆心坐标为$O_1(0, a)$，则大圆O_1的半径为$a+1$，$\odot O'$与$\odot O_1$的方程分别为：

$$\begin{cases} x^2+y^2=1; \\ x^2+(y-a)^2=(a+1)^2. \end{cases} \quad (1)$$

又设Q点坐标为(x_1, y_1)，则$\odot O'$的切线AC的方程为：

$$x_1x+y_1y=1. \qquad (2)$$

于是，我们有

$$\begin{cases} x_1 0+y_1(2a+1)=1; \\ x_1^2+y_1^2=1. \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\pm 2\sqrt{a^2+a}}{2a+1}; \\ y_1=\dfrac{1}{2a+1}. \end{cases}$$

由此知Q点坐标为$\left(\dfrac{2\sqrt{a^2+a}}{2a+1}, \dfrac{1}{2a+1}\right)$；$O$点坐标为$\left(0, \dfrac{1}{2a+1}\right)$；$AC$的方程为

$$\frac{2\sqrt{a^2+a}}{2a+1}x+\frac{1}{2a+1}y-1=0. \qquad (3)$$

它以直线(2)为法线，故 O 到 AC 的距离

$$d_{AC}=\left|\frac{2\sqrt{a^2+a}}{2a+1}\cdot 0+\frac{1}{2a+1}\cdot\frac{1}{2a+1}-1\right|=\frac{4a(a+1)}{(2a+1)^2}.$$

同理，

$$d_{AB}=\frac{4a(a+1)}{(2a+1)^2}.$$

又将(1)与(3)联立求解，分别得 A 与 C 的坐标为：

$$A(0,\ 2a+1),\ C\left(\frac{4\sqrt{a^2+a}(a+1)}{(2a+1)^2},\ \frac{-4a^2-2a+1}{(2a+1)^2}\right).$$

因此，O 到 BC 的距离

$$d_{BC}=\frac{1}{2a+1}-\frac{-4a^2-2a+1}{(2a+1)^2}=\frac{4a(a+1)}{(2a+1)^2}.$$

这就是说，PQ 的中点 O 与$\triangle ABC$ 的三边等距．所以 O 是$\triangle ABC$ 的内心．

【附注】 1 上面列举了五种有代表性的证法，证法一至四是纯几何的，证法五是解析的．此题的证法甚多，还可以借助三角知识来证，关键在于：首先证明 A, O, O', O_1, D 五点共线；再就是从“分角线”(即证 O 是分角线的交点，如证法一至三)或“距离”(即证 O 到各边距离相等，如证法四，五)入手解题．

2 本题的综合性较强，是六道题中最容易的一道题，虽有一定的技巧，对我们中学同学是不困难的．

3 初等几何是不能从中学课程中取消的，它能锻炼推理和论证的能力．事实上，从逻辑思维能力的培养，严密的数学语言的训练，直到做题的书写格式等方面，学习初等几何都是很有裨益的．当然，一味追求这方面的难题既不必要，也是不对的．

4 几何法和解析法相比，各有优劣，应视情况而加以选择．比如本题用几何法证明，过程虽较简略，但辅助线难添；用解析法证明，计算量虽较大，但思路好想．就证法五而言，不外是根据题设条件和要求，选取以 O' 为原点，以直径 DA 为纵轴这一适当的平面直角坐标系，使所得方程形式和计算简便；然后导出$\odot O'$，$\odot O$ 以及切线 AC 的方程；最后求解方程组，得出点 Q，A，C 的坐标；利用距离公式计算 d_{AC}，d_{AB}，d_{BC}，从而使命题获得证明．几何问题的代数解法，思路自然，易于下手，不失为解题的一种好方法．

此外，平几对直线形和圆的一些问题的研究比较方便，而解几能对一般的曲线进行研究，远非平几所能比拟，解几可以说是由初等数学进入高等数学的桥梁，因此要引起足够的重视．

【第五题】 已知 a_1，a_2，…，a_k，…为两两各不相同的正整数，求证对任何正整数 n，下列不等式成立：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}. \qquad (6\text{ 分})$$

【分析】 解决本题的困难在于：这个正整数列不一定是按从小到大（或从大到小）顺序排列的；也不一定是连续的（全部或一部分）正整数；最小的正整数是多少也不清楚．如果我们能想出办法，将它们按从小到大（或从大到小）重新加以排列，则问题的解决显然就容易些．为此，先证如下的“引理”：

若 $a_r\geqslant a_s$，$r\leqslant s$，则

$$\frac{a_r}{r^2}+\frac{a_s}{s^2}\geqslant\frac{a_s}{r^2}+\frac{a_r}{s^2}.$$

事实上，因为

$$r\leqslant s\Longrightarrow r^2\leqslant s^2\Longrightarrow\frac{1}{r^2}\geqslant\frac{1}{s^2}\Longrightarrow\frac{1}{r^2}-\frac{1}{s^2}\geqslant 0,$$

又 $a_r\geqslant a_s\Longrightarrow a_r-a_s\geqslant o,$

所以 $(a_r-a_s)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{s^2}\right)=\frac{a_r}{r^2}+\frac{a_s}{s^2}-\left(\frac{a_s}{r^2}+\frac{a_r}{s^2}\right)\geqslant 0,$

亦即 $$\frac{a_r}{r^2}+\frac{a_s}{s^2}\geqslant\frac{a_s}{r^2}+\frac{a_r}{s^2}.$$

这就是说，左式中的分母不动，分子交换位置后，其值不会变大。

在$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}$中，各个分母数值大小的顺序是自然顺序，而依据上述引理又可将诸分子按从小到大的顺序重新排列，使"不等成分不断加强"，因此问题就能方便的解决。

本题也能用数学归纳法证明，困难仍然是$\{a_k\}$中各项数值大小的排列没有规律。因此，必须在归纳法的第二步作出某些处理才能迎刃而解。

用比较法，通过证明

$$\sum\frac{a_k}{k^2}-\sum\frac{1}{k}=\sum\frac{a_k-k}{k^2}\geqslant 0,$$

也能证明本题，但困难仍如上述。

【证法一】 假定a_1，a_2，$\cdots$，a_n这n个互不相等的正整数，从小到大的顺序排列为：

$$a_{i1},\ a_{i2},\cdots,\ a_{in},$$

那么，我们经过有限次(因n为自然数)交换后，可将

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}=\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}$$

变为如下的形式：

$$\frac{a_{i1}}{1^2}+\frac{a_{i2}}{2^2}+\frac{a_{i3}}{3^2}+\cdots+\frac{a_{in}}{n^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{ik}}{k^2}.$$

由引理知：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{ik}}{k^2}$$

由于$\{a_{ik}\}$是递增数列，并且它们都是互不相等的正整数，所以$a_{ik}\geqslant k$对于任意的自然数k成立．因此，我们有：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{ik}}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

【证法二】　用数学归纳法证明．

当$n=1$时，显然有$\frac{a_1}{1^2}\geqslant\frac{1}{1}$.

设当$n=h$(h为自然数)时，有不等式

$$\sum_{k=1}^{h}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{k},$$

我们来证明，当$n=h+1$时，有不等式成立

$$\sum_{k=1}^{h+1}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{h+1}\frac{1}{k}.$$

我们分$a_{h+1}\geqslant h+1$和$a_{h+1}<h+1$两种情况进行研究：

如果$a_{h+1}\geqslant h+1$，则有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{h+1}\frac{a_k}{k^2}&=\sum_{k=1}^{h}\frac{a_k}{k^2}+\frac{a_{h+1}}{(h+1)^2}\\&\geqslant\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{k}+\frac{h+1}{(h+1)^2}\\&=\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{k}+\frac{1}{h+1}\\&=\sum_{k=1}^{h+1}\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

故不等式成立．

如果 $a_{h+1}<h+1$，则必至少有一个 $a_i^*\geqslant h+1$，$i\leqslant h+1$（否则，a_1，a_2，…，a_{h+1} 这 $h+1$ 个互不相等的正整数就都小于 $h+1$ 了，这是不可能的）.

现在将第 i 个元改写为：

$$a_i^* = a_{h+1} + a_i^* - a_{h+1},$$

则

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{h+1}\frac{a_k}{k^2} &= \sum_{k=1}^{i-1}\frac{a_k}{k^2} + \frac{a_i^*}{i^2} + \sum_{k=i+1}^{h}\frac{a_k}{k^2} + \frac{a_{h+1}}{(h+1)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{i-1}\frac{a_k}{k^2} + \frac{a_{h+1}+a_i^*-a_{h+1}}{i^2} + \sum_{k=i+1}^{h}\frac{a_k}{k^2} + \frac{a_{h+1}}{(h+1)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{i-1}\frac{a_k}{k^2} + \frac{a_{h+1}}{i^2} + \sum_{k=i+1}^{h}\frac{a_k}{k^2} + \frac{a_{h+1}}{(h+1)^2} + \frac{a_i^*-a_{h+1}}{i^2} \\
&= \sum_{k=1}^{h}\frac{a_k}{k^2} + \frac{a_{h+1}}{(h+1)^2} + \frac{a_i^*-a_{h+1}}{i^2} \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{h}\frac{1}{k} + \frac{a_{h+1}}{(h+1)^2} + \frac{a_i^*-a_{h+1}}{i^2}\text{（归纳法假设）} \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{h}\frac{1}{k} + \frac{a_{h+1}}{(h+1)^2} + \frac{a_i^*-a_{h+1}}{(h+1)^2}\ (i\leqslant h+1) \\
&= \sum_{k=1}^{h}\frac{1}{k} + \frac{a_i^*}{(h+1)^2} \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{h}\frac{1}{k} + \frac{h+1}{(h+1)^2}\ (a_i^*\geqslant h+1) \\
&= \sum_{k=1}^{h}\frac{1}{k} + \frac{1}{h+1} \\
&= \sum_{k=1}^{h+1}\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

证毕.

【证法三】 用比较法证明．要证

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

成立，只须证下式成立：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k^2}-\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}\geqslant 0.$$

为此，考虑到“a_1，a_2，…，a_k，…为两两互不相同的正整数”这一已知条件，易知：

$$a_1\geqslant 1,$$
$$a_1+a_2\geqslant 1+2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant 1+2+\cdots+n.$$

即
$$\sum_{k=1}^{m}a_k-\sum_{k=1}^{m}k\geqslant 0\ (m=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

因此，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}\geqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-\sum\limits_{k=1}^{n}k}{n^2}\geqslant 0.$$

命题得证。

【附注】 1 本题证明的关键在于怎样利用题给的正整数列中“两两各不相同”这一条件，技巧在于把它们按大小次序整理排队。

2 证法一是将数列中各数重新按大小顺序排列后通过“引理”以及 $a_{i_k}\geqslant k(k=1,2,\cdots,n)$加以证明的。

3 证法二，在归纳法的第二步，必须分 $a_{h+1}\geqslant h+1$ 和 $a_{h+1}<h+1$ 两种情况。在第二种情况下，必至少存在一个 $a_i^*\geqslant h+1$，且 $i\leqslant h+1$，再作 $a_i^*=a_{h+1}+a_i^*-a_{h+1}$ 这一形式改变，然后逐步推证。之所以要这样，也是由于处理数列使之按大小顺序排列的需要。

4 在证法三中，除数列的第一项 $a_1\geqslant 1$外，就不一定有

$a_i \geq i$ ($i=2, 3, \cdots$)，仍因其中各数大小的顺序无规律．所以不能一项一项地"单独处理"，而要"联合处理"．例如，要考虑第 k 项 a_k，就必须考虑$\sum_{i=1}^{k} a_i$．

5 "等"与"不等"是数量关系的两个方面，有的中学生对"等"的知识，相对于"不等"来说，掌握的要好些，这也是符合认识规律的．但是，如不适时的加强不等式的学习，将是进一步提高的障碍．问题稍复杂，研究过程深化一步，就常涉及不等式的知识．

【第六题】 一个国际社团的成员来自六个国家，共有成员 1978 人，用 1，2，…，1977，1978 编号．请证明，该社团至少有一个成员的编号数，与他的两个同胞的编号数之和相等，或是一个同胞的编号数的二倍．（8 分）

【分析】 由题设条件知，人数为 1978 的国际社团是分别由六个国家来的人所组成的，也就是说，六个国家人数的总和为 1978．但每个国家人数是多少呢？答案显然是多种多样的．如果我们对各种情况逐一地加以考察，既很烦琐，也无必要．结合本题证明的需要，首先简略地介绍一下"数论"中的所谓"抽屉原则"：

如果十个苹果用九个抽屉装完（不许破坏苹果的完整），那么不论装法如何多种多样，至少有一个抽屉里至少装有两个（$\left[\frac{10}{9}\right]+1=2$，其中$[a]$表示不超过正数 a 的最大整数）苹果．这是非常浅显而易懂的事实，用反证法立即可以说明它的正确性．因为如若不然，即每个抽屉里装的都不到两个苹果，

那么十个苹果用九个抽屉就装不完.

我们不必纠缠于“各国人数分别是多少”这一可能性是多种多样的具体细节，根据上述的抽屉原则知：在六个国家中，至少有一个国家的人数至少是$\left[\frac{1978}{6}\right]+1=330$. 本题的证明就可先从这样的国家开始，反复利用抽屉原则，解决问题.

其次，由于每人一个编号，不同的人有不同的编号，因此可将人与编号不加区别. 所谓“同胞”是指同一个国家的成员. 用“集合论的语言”，本题显然可以叙述为：

设集合

$$A=\{1, 2, \cdots, 1977, 1978\}=\bigcup_{i=1}^{6}A_i,\quad A_i\cap A_j=\phi,$$

(其中 $i\neq j$，下标 i、$j=1, 2, \cdots, 6$,) 则至少有一个 a_{il} 满足下列条件：

$$a_{(i)t}=a_{(i)r}+a_{(i)s} \text{ 或 } a_{(i)t}=2a_{(i)r}, \qquad (*)$$

其中 $a_{(i)t}$, $a_{(i)r}$, $a_{(i)s}\in A_i\subset A$.

第三，为了便于证明，人们往往将要证明的命题用一个与它等价的命题来代替. 例如，本题的结论(*)与

$a_{(i)t}-a_{(i)r}=a_{(i)s}$ ($a_{(i)t}>a_{(i)r}$, $a_{(i)s}$,其中 r 可以等于 s) 等价. 显然，后一结论简单一些.

【证明】 用反证法，也就是说，假定结论不成立，从而导至矛盾，证明结论的正确性.

首先，根据“抽屉原则”知道，至少有一个集合 A_i，它所含元的个数至少为

$$\left[\frac{1978}{6}\right]-1=\left[329\frac{4}{6}\right]+1=329+1=330.$$

不妨设此集为 A_1，并将 A_1 中的元从小到大排列：

$$a_{(1)1},\ a_{(1)2},\ \cdots,\ a_{(1)330},\ \cdots.$$

由反证法的假定知：

$$a_{(1)330}-a_{(1)k}\overline{\in}A_1\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 329);$$

又因为 $a_{(1)330}$，$a_{(1)k}\in A_1\subset A$，且 $a_{(1)330}>a_{(1)k}$，故

$$1\leqslant a_{(1)330}-a_{(1)k}<1978,$$

$$a_{(1)330}-a_{(1)k}\in A.$$

因此，329 个形如 $a_{(1)330}-a_{(1)k}$ 的数必属于 $\bigcup\limits_{i=2}^{6}A_i=A-A_1$.

同理，在 $A-A_1$ 中，至少有一个集合，它所含元的个数至少为 $\left[\frac{329}{5}\right]+1=66$，设此集为 A_2，并将 A_2 中这 66 个数从小到大进行排列：

$$a_{(2)1},\ a_{(2)2},\ \cdots,\ a_{(2)66},\ \cdots.$$

由假定知：

$$a_{(2)66}-a_{(2)k}\overline{\in}A_2\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 65);$$

另一方面，它们也不应属于 A_1. 不然，

$$\begin{aligned}a_{(2)66}-a_{(2)k}&=(a_{(1)330}-a_{(1)r})-(a_{(1)330}-a_{(1)s})\\&=a_{(1)s}-a_{(1)r}\in A_{(1)},\end{aligned}$$

就不符合反证假定.

因此，这样的 65 个数 $a_{(2)66}-a_{(2)k}\in\bigcup\limits_{i=3}^{6}Ai=A-(A_1+A_2)$.

在 $A-(A_1+A_2)$ 中，至少有一个集合，比如 A_3，至少含有前述 65 个数中的 17 个数. 由此所作之差

$$a_{(3)17}-a_{(3)k}\overline{\in}A_3\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 16);$$

另一方面，它们当然也不属于 A_2，A_1，因为

$$a_{(3)17}-a_{(3)k}=(a_{(2)66}-a_{(2)r})-(a_{(2)66}-a_{(2)s})$$
$$=a_{(2)s}-a_{(2)r}\overline{\in}A_2,$$
$$a_{(3)17}-a_{(3)k}=a_{(2)s}-a_{(2)r}=(a_{(1)330}-a_{(1)u})$$
$$-(a_{(1)330}-a_{(1)v})=a_{(1)v}-a_{(1)u}\overline{\in}A_1.$$

因此，上述 16 个数 $a_{(3)17}-a_{(3)k}\in A-(A_1+A_2+A_3)$.

类似的，在 A_4、A_5、A_6 中至少有一个集合，至少含 16 个数 $a_{(3)17}-a_{(3)k}$ 中的 6 个，设此集为 A_4，则

$$a_{(4)6}-a_{(4)k}\overline{\in}\bigcup_{i=1}^{4}A_i\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

因此，$a_{(4)6}-a_{(4)k}\in A_5+A_6\,(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$.

在 A_5 和 A_6 中，至少有一个集合至少含有 5 个形如 $a_{(4)6}-a_{(4)k}$ 这样的数中的 3 个. 设此集合记为 A_5，则

$$a_{(5)3}-a_{(5)k}\overline{\in}\bigcup_{i=1}^{5}A_i\quad(k=1,\ 2).$$

因此，$a_{(5)3}-a_{(5)k}\in A_6\quad(k=1,\ 2)$.

最后，我们作出 A_6 中的两数 $A_{(6)1}$ 与 $A_{(6)2}$ 之差（大减小）：

$$a_{(6)2}-a_{(6)1}=(a_{(5)3}-a_{(5)1})-(a_{(5)3}-a_{(5)2})$$
$$=a_{(5)2}-a_{(5)1}\overline{\in}\bigcup_{i=1}^{6}A_i=A,$$

这是不可能的. 因为自然数 $a_{(6)2}-a_{(6)1}$ 显然小于 1978，故必须属于 A. 由此矛盾，推得命题的正确性.

【附注】 1 抽屉原则也称做“书架原则”、“网兜原则”等. 比如，9 本书放在书架的三格里，显然至少有一格里的书不少于 3 本；89 个鸡蛋用四个网兜装完，易知至少有一

个网兜至少要装 23 个鸡蛋等等．问题不在于取什么名称，而在于对它内容的理解．

抽屉原则所阐述的浅显易懂的道理，就连未专门受过数学训练的人也能很快理解．一般来说它可概述为：

将给定的 n 个数分成 m 类，那么至少有一类含有这 n 个数中的至少：$\left[\frac{n}{m}\right]$个，当 m 整除 n；或$\left[\frac{n}{m}\right]+1$ 个，当 m 不能整除 n．其中 m，n 都是自然数．

与上述原则类似的还有如下的原则：

将给定的无穷多个数分成有限多个类，那么至少有一类含有这无穷多个数中的无穷多个．

这一原则的真实性也是不难理解的．如若不然，假定每一类都只含有限个数，那么这有限多个类就一共只含有限个数，这与题给条件矛盾．因此至少有一类含有这无穷多个数中的无穷多个．

如果把上述原则中的“数”换为“元素”，则将进一步得到更一般化的原则．

2　本题利用抽屉原则获得了完满的证明，题中的具体数字“6”，“1978”等等不是主要的．比如，将 1978 换为 1979 或 1980，其它不变，情况怎样？读者不妨试试．

不仅如此，你还可以举出各种各样的有关数字，作出类似的判断，看起来复杂以至于难以捉摸，根据抽屉原则就能获得这些问题的解答．另外，本题的证明只用到四则运算，也不一定需要用集合论的知识叙述，但要有较强的分析能力，因而它不失为测验青少年智力的好题材．

3　什么类型的题目才能用抽屉原则解答呢？一般来说，

这类问题的共同特点，都与元素的“分布”、“分组”或“分类”有关．如本题的条件，显然是将 1978 个数分布到 6 个集合内，不过这里并不是要求出分法的种数(即无重复的排列组合数)．有的题目运用一次抽屉原则即能解决，有的则需反复运用多次(本题用了 6 次)；有些问题明显能用抽屉原则解决，但对于较复杂的问题则要经过一番剖析才能转化为分布问题，而这往往就是解题的关键．下面就“形”与“数”两方面各举一个简单的例子．

例如：正三角形内的任意五点(边上的点除外)，其中至少有两点的距离小于边长之半．

一个三角形内的点有无限多，任取五点的情况不可胜数，逐一考察是办不到的．“元素”就是“点子”，这里缺“抽屉”，抓住“边长之半”，联想三角形的中位线，画出图 15 (DEF 是以 ΔABC 各边中点为顶点的三角形)，这样一来，就把原三角形变为四个“抽屉”，即四个全等的小正三角形，其边长为原正三角形的边长之半．

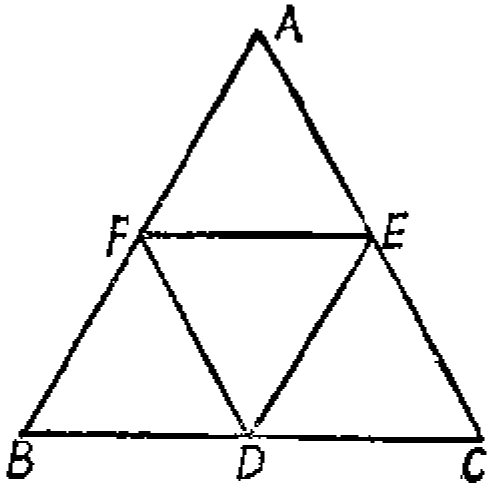

图 15

于是，在 ΔABC 内不论取怎样的五点，至少有一个小三角形至少包含其中的两点，如此两点的距离显然小于原三角形边长之半．

又如：设 m 是一给定的自然数，则在任意的 $m+1$ 个自然数中，至少有两个对 m 的余数相同．

事实上，由于任意一个自然数 n 被 m 除时，所得唯一的商数 q 和余数 r 满足以下关系：

$$n = qm + r, \quad 0 \leqslant r < m.$$

即余数只可能为 0，1，2，…，$m-1$，共有 m 种不同的余数．因此，如果把 $m+1$ 个自然数按照被 m 除时的余数分类(即余数相同的算作同类，余数不同的算作不同类)，则共有 m 类．根据抽屉原则知：在这 $m+1$ 个自然数中，至少有两个数在同一类中，即对 m 的余数相同，这就是同余类．

附　　录

武汉市一九七八年中学数学竞赛试题分析与解答

（一）　1978年（上半年）中学数学竞赛试题分析与解答

第 一 试（初赛）

【第一题】　1）什么叫做有理数？什么叫做无理数？什么叫做实数？

2）怎样的无理数是已知的？并举一例.

【分析】　这是一道基本概念问答题．对于第2）问，并不要求根据狄特金（*R*·*Dedekind*）分划或区间套等实数理论进行回答．事实上，中学生一般是没有接触过这一理论的.

但是，根据中、小学教材上所介绍的实数概念知道：凡实数都可以用“无限小数”这一统一的形式表示．当实数为有理数时，它是循环的（对于整数，比如3可看成$3.\dot{0}$）；当实数为无理数时，它是不循环的．所谓实数是已知的，就是指它的每一个数位上的数字都是已知的．因此，本题并不难作出正确的答案.

【解答】　1）无限循环小数叫做有理数；无限不循环小

数叫做无理数；有理数和无理数统称为实数.

2）如果知道一个法则，据此可以逐步写出某个无理数的每一个数位上的数字，则该无理数即为已知.

例如：$a=3.010110111\cdots$. 其构成法则是：在小数点后，依次写上一个零，一个1；一个零，两个1；一个零，三个1；…如此构成的小数显然是无限不循环小数，并且它的每一个数位上的数字都是知道的. 所以a是一个已知的无理数.

【第二题】 分解因式：$x^2y^2-x^2-y^2-4xy+1$.

【分析】 适当拆(添)其中的某一项进行分组，运用乘法公式即能完成因式分解.

【解答】 原式$=(x^2y^2-2xy+1)-(x^2+2xy+y^2)$

$$=(xy-1)^2-(x+y)^2$$

$$=(xy+x+y-1)(xy-x-y-1).$$

【第三题】 化简：

$$\sqrt[3]{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}\left[(a^3-b^3)(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)^{-1}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

【分析】 本题综合运用了算术根、指数以及乘法公式等基础知识.

【解答】 原式$=\sqrt[3]{(a-b)^3}\left[(a-b)(a^2+ab+b^2)(a-b)\right.$

$$\left.(a^2+ab+b^2)^{-1}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(a-b)\left[(a-b)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a-b}{a-b}=1, & (a>b)\\[2mm] \dfrac{a-b}{-(a-b)}=-1. & (a<b)\end{cases}$$

【第四题】 求适合方程$|x-3|+\sqrt{2-x}=3$的实数x。

【分析】 要求实数x的值，必须考虑如何去掉绝对值符号和平方根号，因此先要对未知数x的范围进行讨论，这就是解题的关键.

讨论时，先由$|x-3|$入手分$x<3$和$x\geqslant 3$两种情况；或者由$\sqrt{2-x}$知$x\ngtr 2$(即$x\leqslant 2$)入手.

由于这是无理方程，最后需注意验根.

【解答】 由$\sqrt{2-x}$知$x\ngtr 2$；如果$x\leqslant 2$，则$x<3$，原方程变为：

$$3-x+\sqrt{2-x}=3,$$

$$\sqrt{2-x}=x.$$

两边分别平方得：

$$2-x=x^2,$$

$$x^2+x-2=0,$$

$$(x+2)(x-1)=0,$$

所以

$$x=-2 \text{ 或 } x=1.$$

由验算知：$x=-2$是增根，适合原方程的实数$x=1$.

【第五题】 指出函数$y=\dfrac{\log_a(4-3x-x^2)}{x^2-2}$的定义域.

【分析】 在表示函数y的解析式中，对数符号下和分母里都含有x，因此定义域是由使真数为正，同时分母不为零的一切x值所组成.

【解答】 定义域由下面的不等式组决定：

$$\begin{cases}4-3x-x^2>0;\\ x^2-2\neq 0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(x+4)(x-4)>0;\\ x^2\neq 2.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}-4<x<1;\\ x\neq \pm\sqrt{2}.\end{cases}$$

故所给函数的定义域为两个开区间：

$$-4<x<-\sqrt{2},\quad -\sqrt{2}<x<1.$$

【第六题】 试证：两正数之和与此两正数的倒数之和的乘积不小于4.

【分析】 根据"两正数的算术平均数不小于它们的几何平均数"即能证明.

【证明】 设两正数分别为m和n，则有：

$$\frac{m+n}{2}\geqslant\sqrt{mn};\qquad \frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}}.$$

即

$$m+n\geqslant 2\sqrt{mn};\quad \frac{1}{m}+\frac{1}{n}\geqslant\frac{2}{\sqrt{mn}}.$$

所以

$$(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\geqslant 2\sqrt{mn}\cdot\frac{2}{\sqrt{mn}}=4.$$

【第七题】 平行四边形的一个内角为150°，周长是12

厘米，问边长等于多少时面积最大？并求出最大面积.

【分析】 如设平行四边形一边的长为 x，因为周长为 12，所以另一邻边长为$\frac{12-2x}{2}$. 而平行四边形被一对角线分为两个全等形，根据"三角形的面积等于两边以及这两边夹角正弦的连乘积的一半"可将该四边形的面积表为 x 的二次函数，因此问题转化为求二次函数的极值.

由于周长一定的面积最大的矩形是正方形，本题的答案是：一个内角为 150°，边长为 3cm 的菱形.

【解答】 设平行四边形的一边长为 x(cm)，则另一边长为$\frac{12-2x}{2}=6-x$(cm).

若用 S 表示四边形的面积，那么

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\cdot x(6-x)\sin150^\circ=x(6-x)\sin30^\circ$$

$$=\frac{1}{2}(6x-x^2)=-\frac{1}{2}(x^2-6x)=-\frac{1}{2}[(x-3)^2-9]$$

$$=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2}.$$

故当 $x=3$(cm)时，面积 $S=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$(cm^2)为最大.

【第八题】 证明$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$.

【分析】 此题证法虽不止一种，但下面的分析方法很有用：

要证当 $\sin x(1+\cos x)\neq0$ 时，$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$，

即证 $\sin^2x=1-\cos^2x$.

而这是显然成立的.

由果追因，易于思考，但在叙述时要防止逻辑上的错误，比如将要证明的等式当作已成立的结论使用等等.

【证明】 因为 $\sin^2x+\cos^2x=1$，所以

$$\sin^2x=1-\cos^2x.$$

由此推得

$$\sin x\cdot\sin x=(1+\cos x)(1-\cos x).$$

当 $x\neq n\pi$（n 为整数）时，$\sin x\neq 0$，$1+\cos x\neq 0$，

所以

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

【第九题】 当 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 时，判定 $tg2\theta$ 与 $2tg\theta$ 的大小.

【分析】 要判定 $tg2\theta$ 与 $2tg\theta$ 的大小，即确定 $tg2\theta-2tg\theta$ 的正负. 运用正切倍角公式将 $tg2\theta-2tg\theta$ 变形化简，并考虑到 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 这一条件，即能得出正确答案.

【解答】 $$tg2\theta-2tg\theta=\frac{2tg\theta}{1-tg^2\theta}-2tg\theta$$

$$=\frac{2tg^3\theta}{1-tg^2\theta}.$$

因为 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，所以

$$0<tg\theta<1,\ 0<tg^2\theta<1,\ 1-tg^2\theta>0.$$

我们有

$$tg2\theta-2tg\theta=\frac{2tg^3\theta}{1-tg^2\theta}>0,$$

即

$$tg2\theta > 2tg\theta.$$

【第十题】 解方程：$5^{x^3-x^2+x}-10^{lg125^x}=0$.

【分析】 由对数恒等式易知：

$$10^{lg125^x}=125^x=5^{3x}.$$

再据“同底之幂相等，幂指数必等”，将原指数方程转化为代数方程.

【解答】 原方程容易化为

$$5^{x^3-x^2+x}-125^x=0,$$

即

$$5^{x^3-x^2+x}=5^{3x},$$

故

$$x^3-x^2+x=3x,$$

化简得

$$x^3-x^2-2x=0,$$

$$x(x^2-x-2)=0,$$

$$x(x-2)(x+1)=0.$$

解之，得

$$x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=-1.$$

【第十一题】 1）证明：$\log_a b=\log_{a^n}b^n$.

2）计算 $(\log_7 5+\frac{1}{2}\log_7 4)\log_{\sqrt{10}}\sqrt{7}$.

【分析】第1）题是一个公式，证明时可先令 $\log_a b=x$，则转化为指数式 $a^x=b$，然后据此变形，再换为对数式即可.

第 1）题的公式在解决有关对数的计算、化简时非常方便，例如应用这一结论于第 2）题，就有 $\log_{\sqrt{10}}\sqrt{7}=lg7$.

【证明】 1）设 $\log_a b=x$，则 $a^x=b$，$(a^x)^n=b^n$，

$$(a^n)^x=b^n，x=\log_{a^n}b^n.$$

因此，

$$\log_a b=\log_{a^n}b^n.$$

2）原式 $=(\log_7 5\div\log_7 2)lg7$

$=\log_7 10\cdot lg7$

$=\frac{1}{lg7}\cdot lg7$

$=1.$

【第十二题】 用数学归纳法证明：

$$2^n\geqslant 2n(n\text{ 为任意自然数}).$$

【分析】 在归纳法的第二步，除用等量代换外，还要用到不等量代换．对于不等量代换，应注意不等号的方向．

【证明】 1）当 $n=1$ 时，命题显然成立．

2）设 $n=k$（k 为自然数）时命题成立，即 $2^k\geqslant 2k$，我们有 $2^{k+1}=2\cdot 2^k\geqslant 2\cdot 2k=2k+2k\geqslant 2k+2=2(k+1)$．

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立．

根据数学归纳法可以断定：$2^n\geqslant 2n$ 对于任意自然数 n 都成立．

【第十三题】 求数列 $\frac{1}{1.2}$，$\frac{1}{2.3}$，$\frac{1}{3.4}$，$\frac{1}{4.5}$，… 的前 n 项和并它的极限．

【分析】 先求前 n 项的和，再求当项数无限增大时的

极限.

由于题中的数列既非等差，又非等比数列，因此求和的方法也就不同于等差、等比数列的求和方法. 但是稍事注意观察即知：每一项都可以变为两数之差，且“头尾”的绝对值相等，而符号相反. 这种拆项的思路，在解决此类问题时非常有效. 一般来说，拆项可借助于通项公式进行，当情况较复杂时，还要用到部分分式的知识.

【解答】 数列前 n 项的和用 S_n 表示，就有

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1-\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} \\
&= 1-0=1.
\end{aligned}
$$

【第十四题】 已知 D，E，F 依次为 ΔABC 的边 BC，CA，AB 的中点，AD，BE，CF 相交于 M 点，且 ΔABC 的面积为 1，求 ΔAME 的面积.

【分析】 ΔABC 的面积为已知，利用 M 为 ΔABC 的重心这一条件，根据同高不同底的两三角形面积之比等于其底之比，就能将 ΔAME 的面积用 ΔABC 的面积表示出来.

这里选择什么边作为底边是一个技巧. 比如图 16 中 ΔAME 的面积 $=\frac{1}{3}\Delta ABE$ 的面积，应分别选 ME，BE 为

底边，它们的高才相同．为简单起见，我们用▲表示三角形的面积．

【解答】 如图 16 所示，

$$\blacktriangle AME=\frac{1}{3}\blacktriangle ABE$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\blacktriangle ABC$$

$$=\frac{1}{6}\blacktriangle ABC$$

$$=\frac{1}{6}.$$

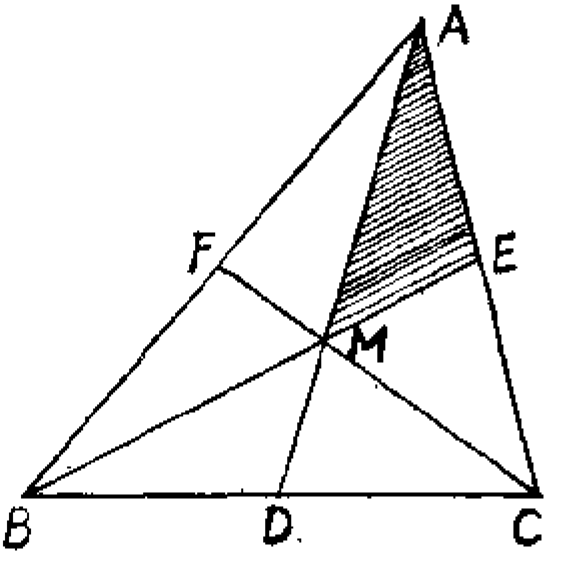

图 16

【第十五题】 由圆外一点 P 引圆的割线 PAB（A，B 为两个交点）和切线 PC（C 为切点）．求证：$PC^2=PA\cdot PB$．

【分析】 这是平几中的“切割线定理”，是“割线定理”的特例．数学上的内容都必须在系统的理解的基础上记忆，

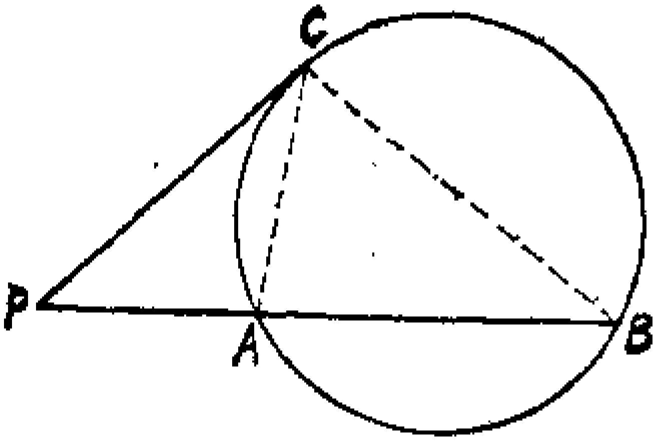

图 17

对于一些公式、定理等应能掌握其推证过程，并从中学习一些解题的思路和方法，这样才有可能灵活运用所学知识.

易知：要证 $PC^2=PA\cdot PB$，即证 $PC:PB=PA:PC$，也就是要证明 $\Delta PCA\backsim\Delta PBC$. 这样，必须先连 AC，BC (图17)，从而构成两个三角形(其中 $\angle P$ 公用，弦切角 $\angle PCA$ 等于所含弧上的圆周角 $\angle PBC$) 相似.

【证明】 分别连 AC 与 BC，因为在 ΔPCA 与 ΔPBC 中：

$$\angle PCA=\angle PBC;$$

$$\angle P=\angle P;$$

所以

$$\triangle PCA\backsim\triangle PBC;$$

$$PC:PB=PA:PC.$$

故

$$PC^2=PA\cdot PB.$$

【第十六题】 用解析法证明：连结三角形两边中点的线段，平行于第三边，且等于第三边的一半.

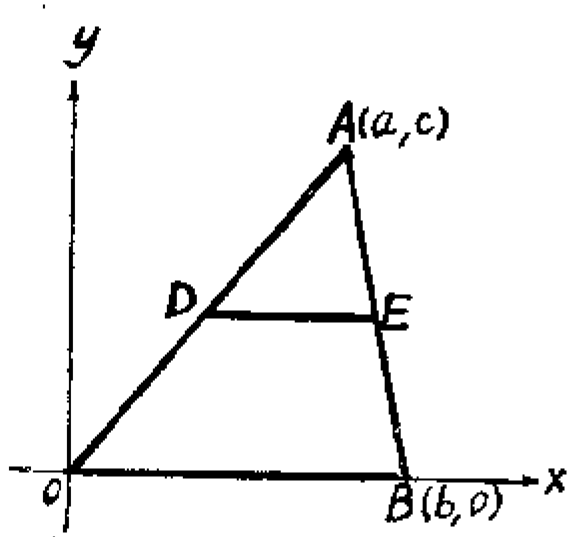

图 18

【分析】 题目要求用解几的方法证明平几中的三角形中位线定理，即用代数方法研究几何问题. 其优点之一是易于思考；坐标系选择适当时，还可简化计算. 本题显然宜选如图18

所示的坐标系．这里综合运用了平面解几中的两点间距离公式、中点坐标公式以及有关直线的基础知识．

【证明】 取如图 18 所示的直角坐标系，$\triangle OAB$ 的三个顶点的坐标依次为：$O(0,\ 0)$，$A(a,\ c)$，$B(b,\ o)$．设 D 为 OA 的中点，E 为 AB 的中点，则 D，E 的坐标分别为 $(\frac{a}{2},\ \frac{c}{2})$，$(\frac{a+b}{2},\ \frac{c}{2})$．于是 DE 的斜率，

$$K_{DE}=\frac{\frac{c}{2}-\frac{c}{2}}{\frac{a-b}{2}-\frac{a}{2}}=0,$$

所以

$$DE \parallel OB.$$

又

$$\begin{aligned}|DE|&=\left|\frac{a+b}{2}-\frac{a}{2}\right|\\&=\left|\frac{b}{2}\right|=\frac{1}{2}\left|OB\right|,\end{aligned}$$

命题得证．

【第十七题】 求过点 $(-4, 1)$ 而与抛物线 $y^2=2x$ 相切的切线方程．

【分析】 求已知二次曲线的切线方程时，第一种情况，当切点坐标已知，则可直接代切线公式．第二种情况，当切点坐标未知，则可根据题设条件，先求出切点坐标，再代切线公式；或者根据相切即有且只有一个公共点，将有关的直线方程与曲线方程联立求解，使其有且只有一组解，从而进一步求出切线方程．

因为 $(-4,\ 1)$ 不在 $y^2=2x$ 上，故本题属于上述第二种

情况，

【解法一】 设切点的坐标为(x_0, y_0)，则切线方程为：

$$y_0 y = x + x_0.$$

因为$(-4, 1)$在切线上，所以

$$y_0 = x_0 - 4; \tag{1}$$

又因为(x_0, y_0)在抛物线上，所以

$$y_0^2 = 2x_0. \tag{2}$$

联立求解(1)，(2)，得二切点坐标分别为：

$$\begin{cases} x_0 = 8, \\ y_0 = 4; \end{cases} \text{和} \begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = -2. \end{cases}$$

因此，所求切线有二条，其方程分别为：

$$x - 4y + 8 = 0 \text{ 和 } x + 2y + 2 = 0.$$

【解法二】 设过$(-4, 1)$而与抛物线

$$y^2 = 2x \tag{1}$$

相切的切线方程为：

$$y - 1 = k(x + 4). \tag{2}$$

由(1)，

$$x = \frac{1}{2}y^2. \tag{3}$$

(3) 代入(2)，并整理，得

$$ky^2 - 2y + 8k + 2 = 0. \tag{4}$$

(4) 有等根的充要条件是判别式的值为零，即

$$(-2)^2 - 4k(8k + 2) = 0,$$

$$8k^2 + 2k - 1 = 0,$$

$$(4k - 1)(2k + 1) = 0,$$

所以

$$k_1=\frac{1}{4},\qquad k_2=-\frac{1}{2}.$$

将 k_1 与 k_2 的值分别代入(2)后整理即得所求的两条切线方程:

$$x-4y+8=0 \text{ 和 } x+2y+2=0.$$

【第十八题】 如图19，平面四边形 $PQRS$ 的四个顶点分别在空间四边形 $ABCD$ 的四边上，且平面 PR 平行于对角线 AC 及对角线 BD. 求证：平面四边形 $PQRS$ 为一平行四边形.

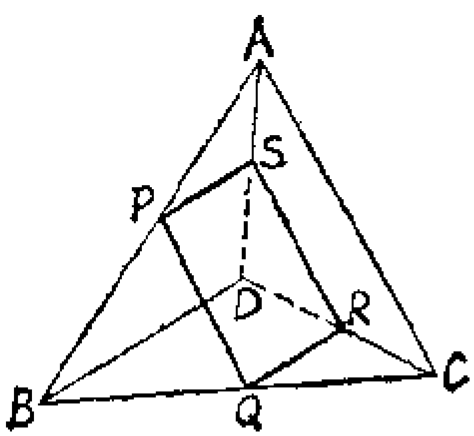

图 19

【分析】 要证平面四边形 $PQRS$(图19)是平行四边形，只需证两组对边分别平行，或一组对边平行且相等即可. 由于本题所给条件是一些平行关系，故取前者较为方便.

【证明】 因为：直线 AC // 平面 PR，而 PQ 是过 AC 的平面 ABC 与平面 PR 的交线，所以

$$PQ \parallel AC.$$

同理，直线 $RS \parallel AC$，所以直线 $PQ \parallel RS$.

根据直线 BD // 平面 PR，类似的又可得到直线 $PS \parallel QR$，故平面四边形 $PQRS$ 为一平行四边形.

第 二 试（决赛）

【第一题】 若 a，b 皆为实数，则关于 x 的方程

$$(x-a)(x-a-b)=1$$

有两相异实根，并且一根大于 a，另一根小于 a.

【分析】 这里并不要求解方程，求出 x 的值. 如果先求出方程的根，再通过计算来证明结论，则过程繁长，不是好的方法.

解本题的方法在于将方程左边按 $x-a$ 展开，以 $x-a$ 为未知数，求出根，接着就此根的表达式说明一个为正，另一个为负，从而证明本题.

【证明】 将方程 $(x-a)(x-a-b)=1$，按 $(x-a)$ 展开为：

$$(x-a)^2-b(x-a)-1=0.$$

因此，
$$x-a=\frac{b\pm\sqrt{b^2+4}}{2}.$$

因为 a，b 皆为实数，所以 $b^2+4>0$，且 $\sqrt{b^2+4}>b$，故

$$\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}>0\text{，}\quad\frac{b-\sqrt{b^2+4}}{2}<0\text{.}$$

这就是说，$x-a$ 的两个值不等，且一为正，另一为负，故原方程有两相异实根，一根大于 a，另一根小于 a.

【第二题】 解关于 x_1，x_2，…，x_n 的方程组：

$$\begin{cases} \quad\;\; x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n=1, \\ x_1\quad\;\;+x_3+x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n=2, \\ x_1+x_2\quad\;\;+x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n=3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{n-1}\quad\;\;=n. \end{cases}$$

【分析】 这是含有 n 个方程的 n 元线性方程组，乍一看很复杂，其实很有规律，稍加分析就知道解法.

第一个方程缺 x_1，右边是常数 1；第二个方程缺 x_2，右边是常数 2，依此类推. 先把它们加起来，左边含有 n 个元，右边是前 n 个自然数的和，然后分别减去各方程，即得方程组的唯一的一组解.

次高降次、元多消元是解方程(组)的基本途径. 本题的加减消元法是解线性方程组的一个最基本的方法.

【解答】

$$\begin{cases} \quad\;\; x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n=1, & (1)\\ x_1 \quad\;\; +x_3+x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n=2, & (2)\\ x_1+x_2 \quad\;\; +x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n=3, & (3)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{n-1} \quad\;\; =n. & (n)\end{cases}$$

(1) + (2) + (3) + ⋯ + (n)，得

$$(n-1)(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n)=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

所以

$$x_1+x_2+\cdots x_n=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}. \qquad (n+1)$$

将 $(n+1)$ 分别减 (1)，(2)，(3)，⋯，(n)，即得方程组的解：

$$x_1=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}-1=\frac{n^2-n+2}{2(n-1)},$$

$$x_2=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}-2=\frac{n^2-3n+4}{2(n-1)},$$

……

$$x_n=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}-n=\frac{n^2-(2n-1)n+2n}{2(n-1)}$$
$$=\frac{3n-n^2}{2(n-1)}.$$

【第三题】 证明：

$$\sin 9^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}).$$

【分析】 要求 $\sin 9^\circ$的值，根据正弦的半角公式，只需求 $\sin 18^\circ$的值．而 $\sin 18^\circ$ 的值又可由关系式 $\sin 36^\circ=\cos 54^\circ$ (利用正余弦的倍角公式，将它变为关于 $\sin 18^\circ$ 的方程）得到．

求出 $\sin 18^\circ$ 后，不宜利用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 求 $\cos 18^\circ$ 的值，代入半角公式计算．否则将出现多重（三层）根号，不便化为要证明的等式右端的形式．这里的关键是要作如下的处理：

$$\sin 9^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 18^\circ}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-2\cos 18^\circ}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 18^\circ-2\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}+1-\sin 18^\circ}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{1+\sin 18^\circ}-\sqrt{1-\sin 18^\circ})^2}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin 18^\circ}-\sqrt{1-\sin 18^\circ})$$
$$=\cdots\cdots.$$

【证明】 由 $\sin 36^\circ=\cos 54^\circ$，得

$$\sin(2\cdot 18^\circ)=\cos(3\cdot 18^\circ),$$
$$2\sin 18^\circ\cos 18^\circ=4\cos^3 18^\circ-3\cos 18^\circ,$$

$$2\sin 18^\circ = 4\cos^2 18^\circ - 3 \quad (\because \cos 18^\circ \neq 0),$$
$$4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0.$$
$$\therefore \quad \sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \quad (\because \quad \sin 18^\circ > 0).$$

因此，

$$\sin 9^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 18^\circ)} = \frac{1}{2}\sqrt{2-2\cos 18^\circ}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin 18^\circ) - 2\sqrt{1-\sin^2 18^\circ} + (1-\sin 18^\circ)}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{1+\sin 18^\circ} - \sqrt{1-\sin 18^\circ})^2}$$
$$= \frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin 18^\circ} - \sqrt{1-\sin 18^\circ})$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)} - \sqrt{1-\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)}\right]$$
$$= \frac{1}{4}(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}).$$

证毕.

【第四题】 求函数 $y = \dfrac{\sec^2 x - \operatorname{tg} x}{\sec^2 x + \operatorname{tg} x}$ 的最小值和最大值.

【分析】 利用 $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$，可将 y 表为 $\operatorname{tg} x$ 的函数. 去分母(因为 $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1$ 的判别式小于零，故其在实数范围内不可能为零)，即得关于 $\operatorname{tg} x$ 的一元二次方程，且系数里含有实数 y；再利用 $\operatorname{tg} x$ 为实数，判别式的值大于或等于零，从而得关于 y 的不等式；最后解此不等式，即得 y 的最小值和最大值.

凡属这类问题，都可采用这种解法.

【解答】 由 $y=\frac{\sec^2x-\operatorname{tg}x}{\sec^2x+\operatorname{tg}x}$，得

$$y[(1+\operatorname{tg}^2x)+\operatorname{tg}x]=(1+\operatorname{tg}^2x)-\operatorname{tg}x,$$

即

$$(y-1)\operatorname{tg}^2x+(y+1)\operatorname{tg}x+(y-1)=0.$$

因为 $\operatorname{tg}x$ 为实数，所以

$$(y+1)^2-4(y-1)^2\geqslant 0.$$

分解因子，得

$$[(y+1)+2(y-1)][(y+1)-2(y-1)]\geqslant 0,$$

即

$$(3y-1)(3-y)\geqslant 0,$$

所以

$$\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3.$$

故函数的最小值为$\frac{1}{3}$，最大值为 3.

【第五题】 已知：半径为 R 的⊙O 的两条平行切线 AC 与 BD，A，B 分别为切点，又⊙O 的一条动切线与 AC 交于 C，与 BD 交于 D. 求证：两线段 AC 与 BD 的乘积为一常量.

【分析】 如图 20 所示，分别连 OA,OB, OC, OD, OE 后，就得到一些直角三角形.

首先应该说明 A，O，B 三点共线，即 AB 为⊙O 的直径，只有这样，其它证明过程才能展开.

根据相似形的知识，不难知道 AC 与 BD 的乘积等于已

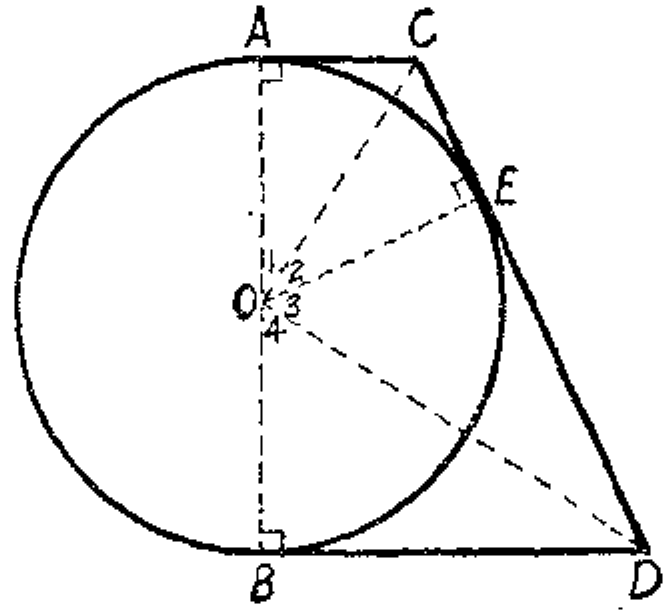

图 20

知圆的半径的平方，即为一常量.

下面是本题的一个详细的几何法证明. 此外, 利用 $Rt\triangle OCA$ 与 $Rt\triangle DOB$ 的相似性, 利用三角知识或解析法都可给以证明.

【证明】 分别连 OA 与 OB, 则 $OA\perp AC$, $OB\perp BD$, 又因为 $AC\parallel BD$, 所以 A, O, B 共线, 即 AB 为 $\odot O$ 的直径.

设 CD 与 $\odot O$ 切于 E, 连 OE, 则 $OE\perp CD$. 连 OC, OD, 在 $Rt\triangle OAC$ 与 $Rt\triangle OEC$ 中, 因为 $OA=OE=R$, OC 公用, 所以

$$Rt\triangle OAC\cong Rt\triangle OEC.$$

因而

$$\angle 1=\angle 2,\ AC=EC.$$

同理,

$$\angle 3=\angle 4,\ BD=ED.$$

但 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180°$，故 $\angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3=90°$.

在 $Rt\triangle CDO$ 中，因为 OE 是斜边 CD 上的高，所以

$$EC\cdot ED=OE^2,$$

于是

$$AC\cdot BD=R^2$$

为一常量.

【第六题】 已知：A，B 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在横轴、纵轴上的顶点，C 为线段 AB 的中点．求证：过直线 OC 与椭圆的交点的切线平行于 AB.

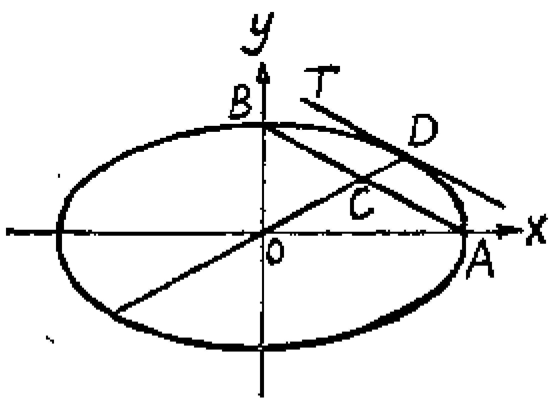

图 21

【分析】 题中的"线段AB"就是椭圆的一条弦，"直线 OC 与椭圆的交点"实际上是平分 AB 的椭圆的一条直径的端点（图 21）．其证明过程大致是：

由 $A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)\Longrightarrow$中点 $C\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$

$\Longrightarrow$ 直径的方程 $y=\frac{b}{a}x$

$\Longrightarrow$直径端点 $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$

$\Longrightarrow$切线 DT 的方程

$\Longrightarrow DT$ 的斜率；

再由 $A(a,\ o)$，$B(o,\ b)\Longrightarrow AB$ 的斜率.

根据斜率相等，即知 $DT \parallel AB$.

【证明】 在第一象限内，设 OC 与椭圆的交点为 D，过 D 的椭圆的切线为 DT，因为 A，B 的坐标分别为 (a, o)，(o, b)，故 C 的坐标为 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$，直线 OC 的方程为 $y=\frac{b}{a}x$. 解方程组:

$$\begin{cases} y=\frac{b}{a}x, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

得第一限象限内的 D 点坐标:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b\right).$$

因此切线 DT 的方程为:

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}ax}{a^2}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}b \cdot y}{b^2}=1,$$

即

$$\frac{\sqrt{2}}{2}bx+\frac{\sqrt{2}}{2}ay=ab,$$

所以 DT 的斜率

$$k_{DT}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}b}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=-\frac{b}{a}.$$

而 AB 的斜率

$$k_{AB}=\frac{b-o}{o-a}=-\frac{b}{a},$$

所以

$$DT \parallel AB.$$

证毕.

【第七题】　若 $x+y+z=xyz$，试证

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz.$$

【分析】　要证的是一个(条件)等式，可将左边展开，反复利用已知条件，分组集项，变形化简，即可加以证明．例如：根据 $x+y+z=xyz$，将

$$x+y=xyz-z,\quad y+z=xyz-x,\quad z+x=xyz-y$$

代入原式左端展开得

$$\begin{aligned}&x-xy^2-xz^2+xy^2z^2+y-yz^2-yx^2\\&\quad+yz^2x^2+z-zx^2-zy^2+zx^2y^2\\&=(x+y+z)-xy(x+y)-yz(y+z)-zx(z+x)\\&\quad+xyz(xy+yz+zx)\\&=\cdots\cdots.\end{aligned}$$

题中的代数(条件)等式也可用三角证法：根据平面三角中的正切函数的值域为实数集合，因而可令：

$$x=\operatorname{tg}\alpha,\quad y=\operatorname{tg}\beta,\quad z=\operatorname{tg}\gamma.$$

于是，可以利用正切的和角、倍角公式，使代数运算借助三角运算而实现．下面着重介绍这个代数问题的三角证法．

【证明】　设 $x=\operatorname{tg}\alpha$，$y=\operatorname{tg}\beta$，$z=\operatorname{tg}\gamma$，由题给条件，并逐步化简，得下列等式：

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma,$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-\operatorname{tg}\gamma(1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta),$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}(-\gamma),$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(-\gamma),$$

即

$$\alpha+\beta=n\pi-\gamma\quad(n\text{ 为整数}),$$

$$2\alpha+2\beta=2n\pi-2\gamma.$$

因此，

$$\operatorname{tg}(2\alpha+2\beta)=-\operatorname{tg}2\gamma,$$

$$\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}2\beta}{1-\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\beta}=-\operatorname{tg}2\gamma,$$

所以

$$\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}2\beta+\operatorname{tg}2\gamma=\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}2\beta\cdot\operatorname{tg}2\gamma.$$

但是

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2x}{1-x^2},$$

$$\operatorname{tg}2\beta=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{2y}{1-y^2},$$

$$\operatorname{tg}2\gamma=\frac{2\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}^2\gamma}=\frac{2z}{1-z^2}.$$

于是

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2},$$

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-2^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)},$$

故

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$$
$$=4xyz.$$

【第八题】 $\triangle ABC$ 是(直)圆锥的轴截面(如图 22)，母线长是底圆$\odot O$半径 r 的三倍，A，B是$\odot O$的一条直径的两个端点，一动点在锥面上由 A 运动至母线 BC 的中点 D，求最短路程.

【分析】 两点间的连线，显然以直线段长为最短. 但题中动点是在锥面上移动，轨迹不是一段直线(图 22). 好在圆

锥曲面是可展曲面，因此可将锥面展开，转化为平面上的问题来考察(图 23)，这是解题的关键．可展曲面上的这类问题，一般都可采用此法．

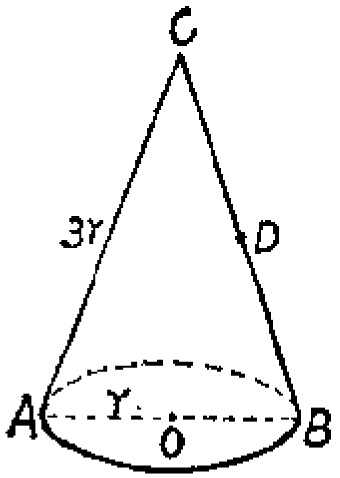

图 22

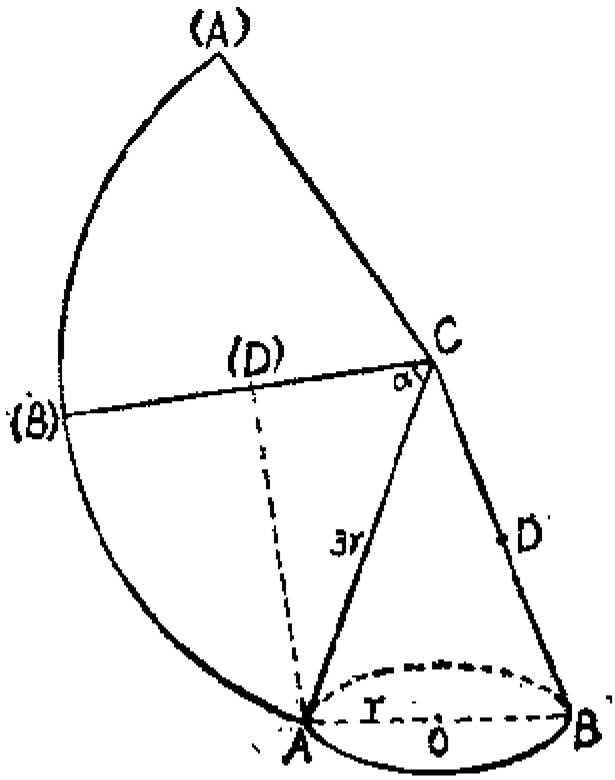

图 23

本题综合运用了几何与三角的有关知识，且具有一定的趣味性．

【解答】 将圆锥侧面展开，连直线 AD，在 $\triangle ACD$ 中，设 $\angle ACD$ 的弧度数为 α，则

$$\alpha=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{\pi r}{3r}=\frac{\pi}{3}.$$

因为 $AC=3r$， $CD=\frac{BC}{2}=\frac{3r}{2}$，所以最短路程

$$AD=\sqrt{AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos\alpha}$$
$$=\sqrt{(3r)^2+\left(\frac{3r}{2}\right)^2-2\cdot 3r\cdot\frac{3r}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt{3}\,r.$$

【第九题】 如图 24 所示，抛物线拱的高为 h，跨度等于 $2a$，求平面封闭图形的面积 S.

【分析】 首先，适当选取坐标系(图 25)导出抛物线方程：$y=\frac{h}{a^2}x^2$. 然后，根据平面封闭图形边界的一部分是抛物线弧，用定积分计算面积. 例如曲边 $\triangle OAH$ 的面积

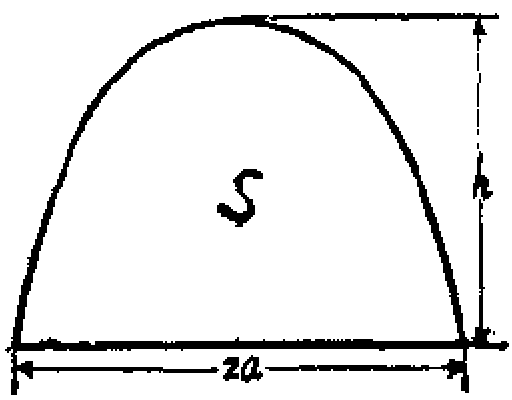

图 24

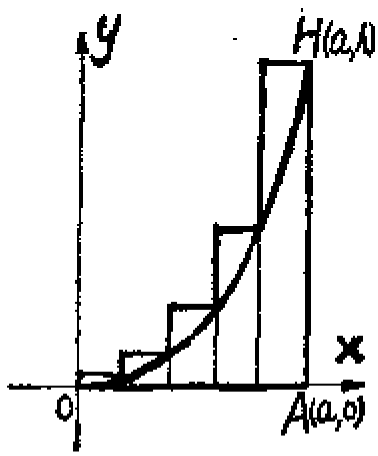

图 25

$$S'=\int_0^a\frac{h}{a^2}x^2dx=\frac{h}{a^2}\int_0^a x^2dx=\frac{h}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^a=\frac{1}{3}ah.$$

不熟悉微积分运算的中学同学利用数列与极限的一些知识求曲边 $\triangle OAH$ 的面积时，先可“以直代曲”，再求“和式极限”，从而进一步求出面积 S. 下面就介绍此法.

【解答】 将所给图形倒置，并不改变其面积. 为求出

面积 S，取如图 25 所示的坐标系，则抛物线的方程为：

$$x^2=2py \quad (p>0),$$

其中

$$2p=\frac{a^2}{h},$$

亦即

$$x^2=\frac{a^2}{h}y \text{ 或 } y=\frac{h}{a^2}x^2.$$

为求曲边 $\triangle OAH$ 的面积 S'，将闭区间 $[o, a]$ 分成 n 等分，并作出 n 个小矩形，显然，n 个小矩形面积之和 $S_n\approx S'$，并且 S_n 的极限(当 $n\to\infty$)存在时，它就等于 S'.

$$S_n=\frac{a}{n}\cdot\frac{h}{a^2}\left(\frac{a}{n}\right)^2+\frac{a}{n}\cdot\frac{h}{a^2}\left(\frac{2a}{n}\right)^2+\frac{a}{n}\cdot\frac{h}{a^2}\left(\frac{3a}{n}\right)^2+\cdots+\frac{a}{n}\cdot\frac{h}{n}\left(\frac{na}{n}\right)^2$$

$$=\frac{ah}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{ah}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{ah(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

$$S'=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{ah(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$=\frac{ah}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n^2}$$

$$=\frac{1}{3}ah.$$

因此，所求面积

$$S=2\left(ah-\frac{1}{3}ah\right)=\frac{4}{3}ah.$$

【第十题】 一支总人数是5的倍数且不少于1000的游行队伍，若按每横排4人编队，最后差3人；若按每横排3人编队，最后差2人；若按每横排2人编队，最后差1人．求这支游行队伍的人数最少是多少？

【分析】 符合题设条件的总人数可以通过若干次具体验算凑出，但若所给数目较大，数值不那么“特殊”，就不易获得正确答案．这类问题称为“韩信点兵”．

由题意显然可设总人数为 $5p$，并先不考虑“不少于1000”这一条件．

按每排4人编队最后“差3人”可转换为“多1人”；同理，3人编队差2人，2人编队差1人都可转换为多1人．这样根据整数的整除性知：$5p$ 分别被4、3、2除时均余1，即 $5p-1$ 是12的倍数．循此探索，就可求出结果．这里所说的“转换”，对于解此类问题非常有用．

【解答】 设总人数为 $5p$（p 为正整数），则由题意知：$5p$ 分别被4，3，2除时均余1，而 $(5p-1)$ 是4，3，2的公倍数，因此，可令 $5p-1=12q$（q 为正整数），故得：

$$p=\frac{12q+1}{5}. \tag{1}$$

(1) 中使 p 为正整数的最小 q 为2，这样又可令

$$q=2+5r \quad (r\text{ 为正整数}). \tag{2}$$

将(2)代入(1)得：

$$p=\frac{12(2+5r)+1}{5}=5+12r,$$

$$5p=25+60r. \tag{3}$$

由于 $5p$ 不小于 1000，即 $5p=25+60r\geqslant 1000$，所以

$$r\geqslant\frac{1000-25}{60}=16\frac{15}{60}=16\frac{1}{4}.$$

取 $r=17$ 代入(3)，得这支队伍的人数最少是

$$5p=25+60\cdot 17=1045.$$

（二） 武汉市1978年中学数学竞赛试题分析与解答

第一试（初赛）

【第一题】 指出函数$y=\dfrac{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2^{-1}-x)}}{2^{\frac{x}{x-1}}-2^{\frac{x}{1-x}}}$的定义域.

【分析】 函数的定义域是使函数有意义的一切自变量值的集合．本题的函数表达式中有分式、根式以及对数运算等，因此，分母不得为零、平方根号中的值应不小于零〔即$\log_{\frac{1}{2}}(2^{-1}-x)\geqslant 0$〕.

【解答】 显然，实变数x应满足下列条件：

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(2^{-1}-x)\geqslant 0\,; & (1)\\ x-1\neq 0\,; & (2)\\ \dfrac{x}{x-1}\neq\dfrac{x}{1-x}. & (3)\end{cases}$$

由(1)，得 $0<\frac{1}{2}-x\leqslant 1$，$-\frac{1}{2}<-x\leqslant\frac{1}{2}$，即

$$-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}.$$

由(2)，(3)知

$$x\neq 1,\ x\neq 0.$$

因此函数的定义域是：

$$-\frac{1}{2}\leqslant x<0\text{，}\quad 0<x<\frac{1}{2}.$$

【第二题】 判定方程 $4(x^4-x^2y^2-x^2+y^2)=y^2(y^2-x^2)$ 所表示的图形为何种曲线，并画出略图．

【分析】 题给的方程是四次的，应先尽可能地降次．如将它分解为若干个次数较低的方程，从而比较方便的进行判定．因此，解题的关键在于分解因式．

【解答】 原方程可以逐步变形如下：

$$4x^4-4x^2y^2-4x^2+4y^2-y^4+x^2y^2=0\text{，}$$

$$(4x^4-3x^2y^2-y^4)-4(x^2-y^2)=0\text{，}$$

$$(4x^2+y^2)(x^2-y^2)-4(x^2-y^2)=0\text{，}$$

$$(x^2-y^2)(4x^2+y^2-4)=0\text{，}$$

$$(x-y)(x+y)(4x^2+y^2-4)=0.$$

此即

$$x-y=0\text{，}\quad x+y=0\text{，}\quad 4x^2+y^2-4=0.$$

因此，原方程所表示的图形（图26）是：

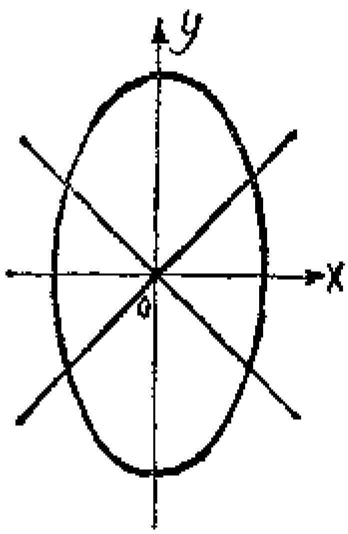

图 26

方程 $x-y=0$ 表示的图形是第一、三象限的分角线；方程 $x+y=0$ 表示的图形是第二、四象限的分角线；方程 $4x^2-y^2-4=0$ 可再作如下变形：

$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}=1,$$

因而它表示一个椭圆，中心是原点，短轴在 x 轴上（长为 2），长轴在 y 轴上

（长为 4）.

【第三题】 已知关于 x 的六次实系数多项式函数：

$$f(x)=x^6-2\sqrt{2}x^5-x^4+x^3-2\sqrt{3}x^2+2x-\sqrt{2},$$

求 $f(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ 的值.

【分析】 如果将 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 代入函数的表达式中，展开整理，是很麻烦的. 最好先对多项式进行变形，利用两共轭根式之积

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})=-1,$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$$

的结果，使之变为含有 $x(x-2\sqrt{2})$ 或 $x(x-2\sqrt{3})$ 项的形式，则能大大简化运算. 至于变形的细节，则是各种各样的，比如，下面的变形就是其中的一种：

$$\begin{aligned}f(x)&=x^4(x^2-2\sqrt{2}x-1)+x(x^2-2\sqrt{3}x+1)\\&\quad+(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})+\sqrt{3}\\&=x^4[x(x-2\sqrt{2})-1]+x[x(x-2\sqrt{3})+1]\\&\quad+[x-(\sqrt{2}+\sqrt{3})]+\sqrt{3}\\&=\cdots\cdots.\end{aligned}$$

将 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 代入 $f(x)$ 时，为简便起见，也可以一部分先代入，一部分暂不代入，只要我们知道不代入的 x 值仍表示 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 即可.

此外，用综合除法求 $f(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ 的值也是很方便的.

【解法一】 $f(\sqrt{2}+\sqrt{3})=(x^6-2\sqrt{2}x^5)-x^4$

$$\begin{aligned}&\quad+(x^3-2\sqrt{3}x^2)+2x-\sqrt{2}\\&=x^4\cdot x(x-2\sqrt{2})-x^4+x\cdot x(x-2\sqrt{3})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2x-\sqrt{2}\\
&=x^4(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})-x^4\\
&\quad+x(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})+2x-\sqrt{2}\\
&=x^4-x^4-x+2x-\sqrt{2}\\
&=x-\sqrt{2}\\
&=(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{2}\\
&=\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

【解法二】 利用综合除法：

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
\sqrt{2}+\sqrt{3} & 1 & -2\sqrt{2} & -1 & 1 & -2\sqrt{3} & 2 & -\sqrt{2}\\
 & & \sqrt{2}+\sqrt{3} & 1 & 0 & \sqrt{2}+\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}+\sqrt{3}\\
\hline
 & 1 & \sqrt{3}-\sqrt{2} & 0 & 1 & \sqrt{2}-\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3}
\end{array}
$$

所以 $f(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\sqrt{3}$.

【第四题】 已知：如图 27 所示，$AB \parallel CD_2$，$AC \parallel BD_1$．求证：$\triangle ABC$ 的面积是$\triangle ABD_1$ 的面积和$\triangle ACD_2$ 的面积的比例中项．

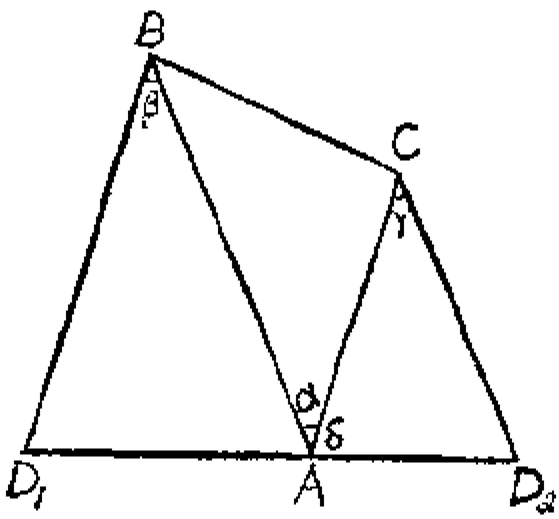

图 27

【分析】 由于平行线的内错角相等，易知$\triangle ABD_1 \sim \triangle D_2CA$，因而得$AB \cdot AC = BD_1 \cdot CD_2$．再据"两边夹角"的面积公式，不难证得本题的结论．

也可用"三角形面积等于底乘高的一半"来证明，不过要作出辅助线（即三角

形的高）.

【证明】 $\because \quad AB \parallel CD_2$，

$\therefore \quad \angle\alpha = \angle\gamma$.

同理$\angle\alpha = \angle\beta$，

$\therefore \quad \angle\beta = \angle\gamma$.

又 $\angle\delta = \angle D_1$，

$\therefore \quad \triangle ABD_1 \sim \triangle D_2CA$，

$\therefore \quad AB:CD_2 = BD_1:AC$，

即 $AB \cdot AC = BD_1 \cdot CD_2$.

根据“三角形的面积等于两边及其夹角的正弦乘积之半”，知

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC\sin\alpha;$$

$$S_{\triangle ABD_1} = \frac{1}{2}AB \cdot BD_1\sin\beta = \frac{1}{2}AB \cdot BD_1\sin\alpha;$$

$$S_{\triangle ACD_2} = \frac{1}{2}AC \cdot CD_2\sin\gamma = \frac{1}{2}AC \cdot CD_2\sin\alpha.$$

所以 $$S_{\triangle ABD_1} \cdot S_{\triangle ACD_2} = \frac{1}{4}(AB \cdot AC)(BD_1 \cdot CD_2)\sin^2\alpha$$

$$= \frac{1}{4}(AB \cdot AC)^2\sin^2\alpha$$

$$= \left(\frac{1}{2}AB \cdot AC\sin\alpha\right)^2$$

$$= S^2_{\triangle ABC}.$$

【第五题】 试证：不论 x，y 为何实数，等式

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$$

恒不成立.

【分析】 要证$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\neq\frac{1}{x+y}$，即证$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y}\neq 0$，也就是要证下式的分子不得为零：

$$\frac{x^2+xy+y^2}{xy(x+y)}.$$

事实上，当x，y为实数时，x^2+xy+y^2（由于x与y对称，当作x或者y的二次式均可）的判别式小于零.

如果将原式两边同乘以$xy(x+y)$，变为整式讨论，则应分$xy(x+y)=0$与$xy(x+y)\neq 0$两种情况研究. 这点在解题时最易忽略. 这里，特将这种证法叙述如后.

不论采取那种证法，抓住判别式进行讨论是解题的关键.

【证明】 当$xy(x+y)=0$时，等式显然不能成立.

当$xy(x+y)\neq 0$时，则可将等式两边同时乘以$xy(x+y)$，得

$$y(x+y)+x(x+y)=xy,$$

$$x^2+xy+y^2=0 \qquad (1)$$

显然，(1)可看作关于x的一元二次方程（由于x与y对称，当然亦可视为关于y的一元二次方程）. 由于y为实数，故(1)中x有实数解的充要条件为：

$$\triangle=(-y)^2-4y^2=-3y^2\geqslant 0.$$

因此，只有$y=0$，然而，当$y=0$时，有$xy(x+y)=0$，归并为第一种情况，此时$\frac{1}{y}$无意义.

综上所述，命题得证.

【第六题】 证明：$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$
$=2^{\log_{\sqrt{2}}2}$.

【分析】 由于等式右边是4，因此左边也必须是4，所以可估计出

$$20\pm14\sqrt{2}=(a\pm b\sqrt{2})^3;$$

因为本题的数值比较特殊，容易看出：

$$20\pm14\sqrt{2}=(2\pm\sqrt{2})^3.$$

但在一般情况下，这样做是有困难的. 这时可将左端有理化，然后得到最后结果.

【证明】 等式右端可以简化：

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=2^{\log_{\sqrt{2}}4}=4.$$

令 $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$，则

$$x^3=40+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}$$
$$(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}})$$
$$=40+3\sqrt[3]{400-392}\,x=40+3\sqrt[3]{8}\,x=40+6x.$$

移项后化简，得 $x^3-6x-40=0$,

$$x^3-16x+10x-40=0,$$
$$x(x^2-4^2)+10(x-4)=0,$$
$$x(x-4)(x+4)+10(x-4)=0,$$
$$(x-4)(x^2+4x+10)=0. \qquad (1)$$

因为 $x^2+4x+10=0$ 的判别式 $\triangle=4^2-4\cdot10=-24<0$，所以对任何实数 x，都不能使 $x^2+4x+10=0$.

因此，由(1)能且只能得到 $x-4=0$，故 $x=4$.

【第七题】 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\lg a-\lg c=\lg\sin B$

$=-\lg\sqrt{2}$，其中角 B 为锐角，a 与 b 分别是 $\angle A$ 与 $\angle B$ 的对边，问 $\triangle ABC$ 是何种三角形？

【分析】 实际上

$$\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$$

是两个独立关系：

$$\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}=\lg\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lg a-\lg c=-\lg\sqrt{2}=\lg\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

根据第一个关系，立即可知角 B；根据第二个关系，通过正弦定理，先将边表之以角的正弦，也可逐步地求出角.

【解答】 显然，$\sin A>0$，$\sin B>0$，$\sin C>0$. 由正弦定理可得：

$$\lg a-\lg c=\lg\sin A-\lg\sin c.$$

因为

$$\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}=\lg\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以

$$\lg\sin A-\lg\sin C=\lg\sin B=\lg\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lg\frac{\sin A}{\sin C}=\lg\sin B=\lg\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\sin A}{\sin C}=\sin B=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

由 $\sin B=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(0^\circ<B<90^\circ)$，知

$$B=45^\circ.$$

由 $\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 和 $C=180^\circ-(A+B)=135^\circ-A$，得

$$\sin A=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin C=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(135^\circ-A)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin 135^\circ\cos A-\cos 135^\circ\sin A)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\sin A+\cos A),$$

所以 $\frac{1}{2}(\sin A-\cos A)=0$， $\sin A-\cos A=0$,

$\sin(A-45^\circ)=0$.

但 $A-45^\circ=180^\circ$不可能(否则，$A=225^\circ>180^\circ$)，因此，只能是$A-45^\circ=0$，$A=45^\circ$．于是$C=180^\circ-(A+B)=90^\circ$，所以$\triangle ABC$是等腰直角三角形.

【第八题】 已知$\triangle ABC$的两个顶点的坐标为$A(-2,0)$和$B(0,-2)$，第三个顶点C在曲线$y=3x^2-1$上移动．求$\triangle ABC$重心的轨迹方程，并指出它是何种曲线.

【分析】 这里主要考察两个动点，一个是$\triangle ABC$的重心$G(x,y)$，另一个是第三个顶点C．由于C在抛物线$y=3x^2-1$上移动，引进参变数t后，C点坐标可设为$(t,3t^2-1)$.

再根据定比分点公式，消去t后，即得所求的方程.

在求轨迹方程时，亦可直接利用三角形的重心坐标公式.

此外，在求轨迹方程的过程中，只要变形是同解的，都可不必再对结论进行证明.

【解答】 由$A(-2,0)$和$B(0,-2)$，知AB的中点D的坐标为$(-1,-1)$．因C点在曲线$y=3x^2-1$上，故可

设 C 点的坐标为：

$$(t,\ 3t^2-1).$$

又设$\triangle ABC$的重心为$G(x,\ y)$，则定比$\lambda=\frac{CG}{GD}=\frac{2}{1}=2$，于是：

$$\begin{cases} x=\dfrac{t-2}{3}, & (1)\\ y=t^2-1. & (2)\end{cases}$$

由（1），有

$$t=3x+2. \qquad (3)$$

将（3）代入（2），有

$$y=(3x+2)^2-1,$$

$$y=9\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-1.$$

故所求方程表示一条抛物线，它的开口向上，对称轴是$x=-\frac{2}{3}$，顶点为$\left(-\frac{2}{3},\ -1\right)$.

第　二　试（决赛）

【第一题】　如果α，β同为关于x的方程$x^2+px+q=0$和$x^{2n}+p^nx^n+q^n=0$（n是正偶数）的两相异非零根*，求证：$\frac{\alpha}{\beta}$，$\frac{\beta}{\alpha}$为$x^n+1+(x+1)^n=0$的根.

【分析】　要证$\frac{\alpha}{\beta}$是$x^n+1+(x+1)^n=0$的根，就是要证：

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+1+\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)^n=\frac{\alpha^n+\beta^n}{\beta^n}+\frac{(\alpha+\beta)^n}{\beta^n}=0.$$

因此，利用根与系数的关系，先由已知条件分别求出 $\alpha^n+\beta^n$ 与 $(\alpha+\beta)^n$ 之值即可。

【证法一】 设 $f(x)=x^n+1+(x+1)^n$，则由 $\beta\neq0$，知

$$f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+1+\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)^n$$

$$=\frac{\alpha^n+\beta^n}{\beta^n}+\frac{(\alpha+\beta)^n}{\beta^n}$$

$$=\frac{\alpha^n+\beta^n+(\alpha+\beta)^n}{\beta^n}. \qquad (1)$$

因为 α，β 是 $x^{2n}+p^nx^n+q^n=0$ 的两根，所以

$$\alpha^n+\beta^n=-p^n. \qquad (2)$$

又因为 α，β 是 $x^2+px+q=0$的两根，且 n 为偶数，所以

$$\alpha+\beta=-p,\quad (\alpha+\beta)^n=p^n. \qquad (3)$$

将（2），（3）代入（1），得

$$f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\frac{-p^n+p^n}{\beta^n}=0,$$

亦即证明了$\frac{\alpha}{\beta}$是 $x^n+1+(x+1)^n=0$ 的根。

类似地，可以证明$\frac{\beta}{\alpha}$也是 $x^n+1+(x+1)^n=0$ 的根。

【证法二】 由根与系数的关系知 $\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$，因为 n 为偶数，所以

$$(\alpha+\beta)^n=(-p)^n=p^n, \qquad (1)$$

$$(\alpha\beta)^n=\alpha^n\beta^n=q^n. \qquad (2)$$

又因为 α 是 $x^{2n}+p^nx^n+q^n=0$ 的根，故有

$$\alpha^{2n}+p^n\alpha^n+q^n=0. \qquad (3)$$

将（1），（2）代入（3），得

$$\alpha^{2n}+(\alpha+\beta)^n\alpha^n+\alpha^n\beta^n=0. \qquad (4)$$

(4) 除以 $\alpha^n\beta^n(\neq 0)$，得

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n}+\frac{(\alpha+\beta)^n}{\beta^n}+1=0,$$

即
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+1+\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)^n=0.$$

所以$\frac{\alpha}{\beta}$是 $x^n+1+(x+1)^n=0$ 的根．同理可证，$\frac{\beta}{\alpha}$也是该方程的根．

• 1 不是 $x^n+1+(x+1)^n=0$ 的根，题中的"相异非零根"条件是可以证明的。既然给出了"相异非零根"，就意味着对此不必推证．

【第二题】 证明：不论 k 为何实数，方程

$$x^2+y^2+2kx+(4k+10)y+10k+20=0$$

所表示的曲线都是圆；并且所有这些圆中的任意两相异圆都彼此相切．

【分析】 将方程左边配方（或由所给方程的 x^2、y^2的系数）可知其表示圆．

任取 k 的两个不同的值 k_1、k_2，得圆族中的两个相异圆，联立求解，只能得到一组解，这说明二者有且只有一个公共点，即相切．对此，亦可通过计算两圆的圆心距，与两半径和或差的绝对值相等给以证明．

【证明】 方程 $x^2+y^2+2kx+(4k+10)y+10k+20=0$，　　(1)

经简化、配方，有

$$\begin{aligned}(x+k)^2+(y+2k+5)^2&=k^2+(2k+5)^2-10k-20\\&=5(k+2k+1)\\&=5(k+1)^2,\end{aligned}$$

即 $$(x+k)^2+(y+2k+5)^2=[\sqrt{5}(k+1)]^2.$$

故不论 k 为何实数，(1) 都表示以 $(-k,\ -2k-5)$ 为圆心，以 $|\sqrt{5}(k+1)|$ 为半径的圆（在特殊情况下，当 $k=-1$ 时可视为点元）.

分别取 $k=k_1$，$k=k_2(k_1\neq k_2)$ 代入(1)，得

$$\begin{cases} x^2+y^2+2k_1x+(4k_1+10)y+10k_1+20=0, & (2)\\ x^2+y^2+2k_2x+(4k_2+10)y+10k_2+20=0. & (3)\end{cases}$$

(2)－(3)，得

$$2(k_1-k_2)x+4(k_1-k_2)y+10(k_1-k_2)=0. \qquad (4)$$

因为 $k_1\neq k_2$（否则，(2)与(3)表示同一个圆，而不是两相异圆），故可将(4)两边同时除以 $2(k_1-k_2)$，于是，

$$x+2y+5=0,$$

所以 $$x=-2y-5. \qquad (5)$$

将(5)代入(2)，得

$$(-2y-5)^2+y^2+2k_1(-2y-5)$$
$$+(4k_1+10)y+10k_1+20=0,$$
$$5y^2+30y+45=0,$$
$$(y+3)^2=0,$$

所以 $$y_1=y_2=-3. \qquad (6)$$

将(6)代入(5)，得

$$x_1=x_2=1.$$

这就是说，(1)中任意二相异圆都有而且只有一个公共点(1，－3)，所以它们彼此相切.

【第三题】 求关于 x 的方程 $x^2-2x-\sin 2^{-1}\pi x+2=0$ 的实根.

【分析】 方程中，对未知数施行的运算既有代数的，也有超越的，因此，宜重新"组合"，将两类运算分别处理(事实上，在中学教材内，用图象法解此类方程时，就是按照这一原则处理的)：

$$x^2-2x+1=\sin\frac{\pi x}{2}-1,$$

$$(x-1)^2=\sin\frac{\pi x}{2}-1.$$

其中，把"2"折成"1+1"也是一种变形的技巧．于是，可以根据实数的通性(任何实数的平方都是非负的)，以及正弦函数的值域($|\sin\alpha|\leqslant1$)，来求满足方程的实数 x.

另外，可以把 $(-\sin 2^{-1}\pi x+2)$ 暂时看作常数项，从而原方程就是个一元二次方程，有实数解的充要条件是判别式非负：

$$\triangle=(-2)^2+4\left(\sin\frac{\pi x}{2}-2\right)\geqslant0.$$

这里，仅正弦函数符号下含有未知数，对比进行讨论，不难求出方程的实根.

【解法一】 方程移项后，有

$$x^2-2x+1=\sin2^{-1}\pi x-1,$$

或
$$(x-1)^2=\sin\frac{\pi x}{2}-1.$$

对于任意实数 x，恒有

$$\begin{cases}(x-1)^2\geqslant0, & (1)\\ \sin\frac{\pi x}{2}-1\leqslant0. & (2)\end{cases}$$

当且仅当 $(x-1)^2=\sin\frac{\pi x}{2}-1=0$ 时，(1)与(2)同时成

立.

由 $(x-1)^2=0$ 得 $x=1$，而此时，

$$\sin\frac{\pi x}{2}-1=\sin\frac{\pi}{2}-1=1-1=0,$$

所以原方程的实根为 $x=1$.

【解法二】 将原方程改写为

$$x^2-2x-\left(\sin\frac{\pi x}{2}-2\right)=0. \tag{1}$$

因为 x 为实数，故判别式

$$\triangle=(-2)^2+4\left(\sin\frac{\pi x}{2}-2\right)\geqslant 0,$$

$$\sin\frac{\pi x}{2}-1\geqslant 0.$$

但因 $\sin\frac{\pi x}{2}-1>0$ 不可能，故 $\sin\frac{\pi x}{2}-1=0$，即

$$\sin\frac{\pi x}{2}=1,\quad \frac{\pi}{2}x=2k\pi+\frac{\pi}{2},$$

所以

$$x=4k+1\ (k\in Z). \tag{2}$$

将(2)代入(1)，得 $(4k+1)^2-2(4k+1)+1=0$，

$$k=0. \tag{3}$$

(3)代入(2)，得

$$x=1.$$

【第四题】 OA，OB 是已知圆 O 的任意两条半径，从 B 引 $BE\perp OA$，垂足为 E，过 E 作 $EP\perp AB$，垂足为 P. 求证：OP^2+EP^2 为一定值.

【分析】 可先计算 EP^2（先计算 OP^2 亦可）. 在 $Rt\triangle$

ABE 中，EP 是斜边上的高，因而 $EP^2=AP\cdot PB$.

为了使 $AP\cdot PB$ 能用 OP 来表示，可利用圆的相交弦定理，将 $AP\cdot PB$ 代之以 $CP\cdot PD$(如图 28 所示).

而 $CP=OC-OP$，$PD=OD+OP$，又 $OC=OD$ 为圆的半径，由此容易推得 OP^2+EP^2 等于圆的半径的平方，故为一定值.

此外，还可以利用勾股定理及三角中的余弦定理(图29)，或用解析法证明.

【证法一】 在 $Rt\triangle ABE$ 中，因为

$$\angle E=90^\circ,\ EP\perp AB,$$

所以
$$EP^2=AP\cdot PB.$$

延长 OP 与⊙O 交于 C，延长 PO 与⊙O 交于 D(图28)，

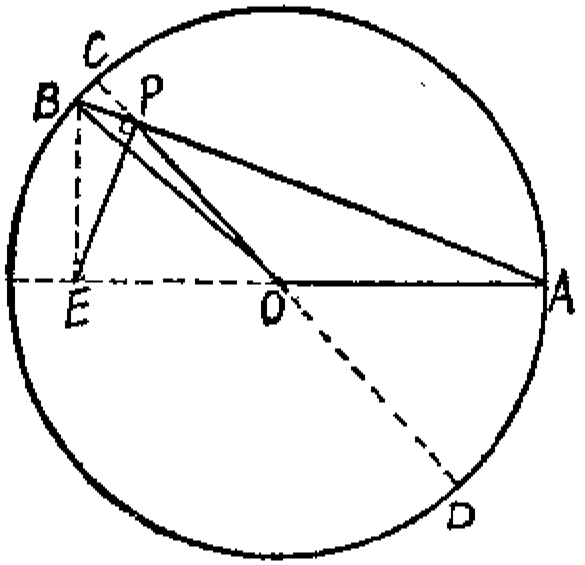

图 28

又设⊙O 的半径为 r，则据相交弦定理，得

$$\begin{aligned}AP\cdot PB&=CP\cdot PD\\&=(OC-OP)(OD+OP)\\&=(r-OP)\cdot(r+OP)\\&=r^2-OP^2.\end{aligned}$$

也就是 $EP^2=r^2-OP^2$.

所以 $OP^2+EP^2=r^2$ 为一定值.

【证法二】 如图 29 所示，过 O 作 $OC\perp AB$，C 为垂足，则 $AC=BC$（因$\triangle AOB$ 为等腰三角形).

由勾股定理，得

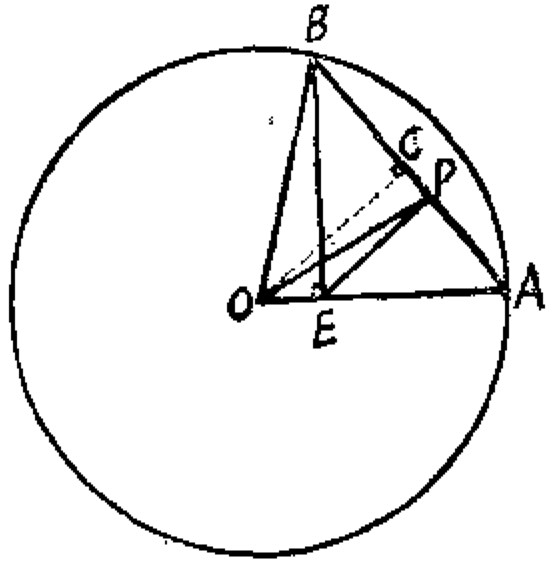

图 29

$$\begin{aligned}OP^2 &= OC^2+PC^2=OB^2-BC^2+PC^2\\ &= OB^2-(BC+PC)(BC-PC)\\ &= OB^2-PB(AC-PC)\\ &= OB^2-PB\cdot AP\\ &= r^2-EP^2,\end{aligned}$$

所以
$$OP^2+EP^2=r^2$$
为一定值.

【证法三】 上面的两种方法都是纯几何的，下面的证明，则用到三角的有关知识.

在 $\triangle OPB$ 中，由余弦定理，知

$$OP^2=OB^2+BP^2-2OB\cdot BP\cos B, \qquad (1)$$

在 $\triangle OAB$ 中，则有

$$OA^2=OB^2+AB^2-2OB\cdot AB\cos B. \qquad (2)$$

由(2)，得

$$\cos B=\frac{AB^2}{2OB\cdot AB}=\frac{AB}{2OB}. \qquad (3)$$

将(3)代入(1)，得

$$
\begin{aligned}
OP^2 &= OB^2 + BP^2 - 2OB \cdot BP \cdot \frac{AB}{2OB} \\
&= OB^2 + BP^2 - BP \cdot AB = r^2 + BP(BP - AB) \\
&= r^2 - BP(AB - BP) = r^2 - BP \cdot AP \\
&= r^2 - EP^2,
\end{aligned}
$$

所以

$$OP^2 + EP^2 = r^2$$

为一定值.

【第五题】 在平面直角坐标系中，两坐标都为有理数的点称为有理点. 任意作一条倾角为$\frac{\pi}{3}$的直线，问这样的直线最多能通过几个有理点？最少能通过几个有理点？并证明你的结论.

【分析】 观察直线的斜率 $k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$， $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时， $k = \sqrt{3}$. 由此可知，倾角为$\frac{\pi}{3}$的直线不能同时通过两个有理点，最多只能通过一个有理点（否则，将导致无理数等于有理数的矛盾）.

最少可以不通过任何有理点，即通过有理点的个数为零. 事实上，只要选取一个非有理点，过此点作一倾角为$\frac{\pi}{3}$的直线，该直线就不能通过任何有理点（道理同上）.

【证明】 首先证明：最多通过一个有理点.

设 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$是斜率为 $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$的直线上任意两个不同的点，则有

$$\sqrt{3}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

如果 x_1，x_2，y_1，y_2 都是有理数，则 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $(x_2-x_1\neq 0)$ 为有理数，于是得出"无理数等于有理数"的错误结论．因此，x_1，x_2，y_1，y_2 不能全为有理数，所以该直线不能通过两个(或两个以上的)有理点．

另一方面，倾角为 $\frac{\pi}{3}$，而通过一个有理点的直线是大量存在的，事实上，我们只要过任意一个有理点，作倾角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线就是所求的直线．

其次证明：最少可以不通过任何有理点(即通过有理点的个数为 0)．

例如，通过非有理点 $(0,\ \sqrt{2})$，倾角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线，$y=\sqrt{3}x+\sqrt{2}$，就不通过任何有理点．

事实上，假定该直线通过有理点 $\left(\frac{q}{p},\ \frac{s}{r}\right)$，其中 p，q，r，s 皆为整数，且 $p\neq 0$，$r\neq 0$．于是，

$$\frac{s}{r}=\sqrt{3}\cdot\frac{q}{p}+\sqrt{2},$$

$$ps=\sqrt{3}\,qr+\sqrt{2}\,pr,$$

$$(ps)^2=(\sqrt{3}\,qr+\sqrt{2}\,pr)^2$$

$$=(3q^2r^2+2p^2r^2)+\sqrt{6}\,(2pqr^2),$$

所以

$$\sqrt{6}\,^{*}=\frac{p^2s^2-(3q^2+2p^2)r^2}{2pqr^2}.$$

上式右端为有理数 ($q\neq 0$，否则将导致 $\frac{s}{r}=\sqrt{2}$，不可

能），而左端为无理数，因此，发生无理数等于有理数的矛盾．

综上所述，得知该直线最多通过一个有理点，最少不通过任何有理点．

* 在上述推证中，对"无理数$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$不等于有理数"这一事实是直接引用的，其实用反证法也是不难证明的，留给读者作练习。

【第六题】 设 $s=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{980100}}$，如果记号$[s]$表示不超过 s 的最大整数，试求$[s]$．

【分析】 和 s 不是整数，它介于两相邻整数之间，如能求出这样的上、下界，问题就迎刃而解了．

为求 s 的上、下界，可先求一般项$\frac{1}{\sqrt{n}}$的上、下界．为此，可由以下明显成立的不等式入手：

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2>0 \text{ 及 } (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2>0.$$

【解答】 由$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2>0$，得

$$n+1-2\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}+n>0,$$

$$2\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}-2n<1,$$

$$2\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<1,$$

所以
$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}},$$

同理可得，

$$2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}>\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

因此，

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}. \quad (1)$$

当 $n=2$，3，4…时，可分别由(1)得到：

$$2\sqrt{3}-2\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}-2\sqrt{1},$$

$$2\sqrt{4}-2\sqrt{3}<\frac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{3}-2\sqrt{2},$$

…………………………

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}.$$

将上列诸式不等号两端相应部分相加，得

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{1},$$

即 $$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}-1<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1. \quad (2)$$

因为 $\sqrt{n+1}<\sqrt{n}$，$3=\sqrt{9}>\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，故(2)可变为：

$$2\sqrt{n}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1. \quad (3)$$

当$n=980100$时，$\sqrt{n}=990$，于是(3)变为：

$$1978<S<1979,$$

所以 $$[S]=1978.$$

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝国际数学竞赛试题讲解（１）
作者＝江仁俊
页数＝１２３
ＳＳ号＝１００６８５７９
出版日期＝１９７９年０６月第１版