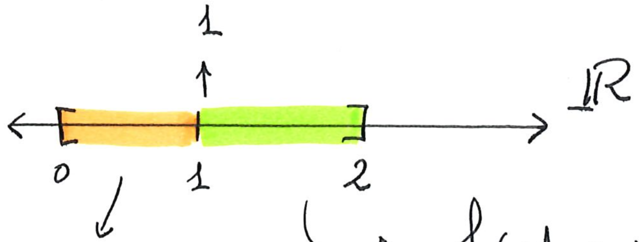
Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2) - x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ x^3 + 6 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



$f(x) = x^3 + 6$

$f(x) = \operatorname{sen}(x^2) - x^2$

Para un x en $[0, 1[$, $f(x)$ es continua por ser suma, producto y composición de funciones continuas:

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(x) & \text{continua} \\ x^2 & \text{continua} \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{sen}(x^2) \text{ continua}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(x^2) & \text{continua} \\ x^2 & \text{continua} \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{sen}(x^2) - x^2 \text{ continua}$$

De la misma forma, f es continua para todo x en $]+1, 2]$ por ser suma y producto de funciones continuas:

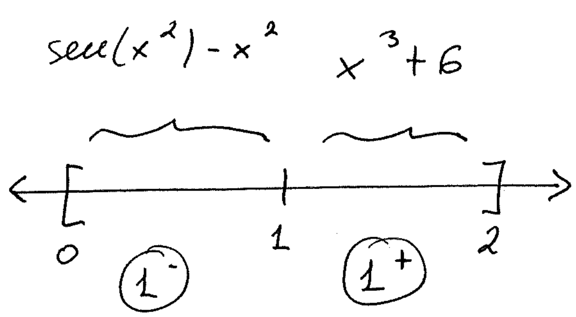
$$\left.\begin{array}{l} x^3 \text{ continua} \\ 6 \text{ continua} \end{array}\right\} \Rightarrow x^3+6 \text{ continua}$$

En $x=1$, usamos que f es continua si ~~(y sólo si)~~ por definición se cumplen las siguientes condiciones:

① $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$

② $f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$

Tenemos que



$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \operatorname{sen}(1) - 1 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \# \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7 \end{array}\right.$$

Luego f no es continua en $x=1$.

$$\lim_{x \to \infty} (1+x^2)^{\frac{1}{\log(x)}}$$

* Suponiendo que $\log \equiv \log_e$ (ln)

$$(1+x^2)^{\frac{1}{\log(x)}} = L(x)$$

$$\log(L(x)) = \frac{1}{\log(x)} \log(1+x^2) =$$

$$= \frac{\log(1+x^2)}{\log(x)}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log(1+x^2)}{\log(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\frac{1}{x^2}+1} = \boxed{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} L(x) = e^2$$

Ahora lo haremos con $\log$ como $\log_{10}$ para ver cómo cambia el resultado.

$$\lim_{x\to\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{\log(x)}}$$

* Supondo que $\log \equiv \log_{10}$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{\log(x)}} = L(x)$$

$$\log(L(x)) = \frac{1}{\log(x)} \log(1+x^2) =$$

$$= \frac{\log(1+x^2)}{\log(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\log(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{\ln(10)(1+x^2)}}{\frac{1}{\ln(10)x}} =$$

L'Hôpital

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 \cancel{\ln(10)}}{(1+x^2)\cancel{\ln(10)}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = 2$$

$$\lim_{x\to\infty} L(x) = 10^2 = 100$$