2. Calcula la ecuación de la recta, r, que pasa por el punto $A = (1, 2)$ en la dirección $\overrightarrow{v} = (1, 1)$. Esta recta corta al eje OX en un punto P, calcula la ecuación de la recta, s, que pasa por P y es perpendicular a r. Finalmente, calcula el área del triángulo formado por las rectas r, s y la recta $y = 1$.

La ecuación de una recta que pasa por el punto $A = (a, b)$ con vector director $\vec{v} = (u, v)$ tiene por ecuación $(x, y) = (a + \lambda u, b + \lambda v)$, con λ un número real. Podemos convertir esta recta en forma punto-pendiente resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x = a + \lambda u \\ y = b + \lambda v \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - a = \lambda u \\ y - b = \lambda v \end{cases} \rightarrow y - b = \frac{v}{u}(x - a)$$

En este caso, $y - 2 = x - 1 \Rightarrow y = x + 1$. Para hallar el punto de corte con el eje OX, resolvemos para $y = 0$:

$$0 = x + 1 \Rightarrow x = -1$$

Luego la recta r corta a OX en $(-1, 0) = P$. La recta s tendrá como vector director a $\vec{w} = (-1, 1)$, luego s tiene por ecuación

$$y - 0 = -1\,(x - (-1)) = -(x + 1)$$

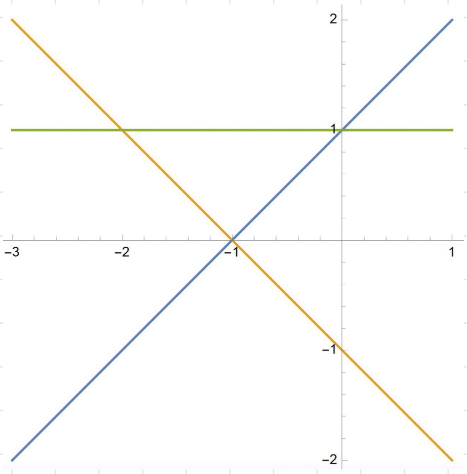
Las rectas r y s se cortan en la solución del sistema

$$\begin{cases} y - 2 = x - 1 \\ y = -(x + 1) \quad + \end{cases}$$
$$2y - 2 = -2 \Rightarrow y = 0$$

$$0 = -x - 1 \Rightarrow x = -1$$

Usamos la solución para y en una de las ecuaciones para obtener x.

Por tanto, r y s se cortan en $A=(-1,0)$. Para obtener los otros dos puntos, introducimos $y=1$ en las ecuaciones de las rectas y resolvemos para x:



$$y-2 = x-1 \xrightarrow{y=1} 1-2 = x-1 \Rightarrow x=0$$

$$y = -(x+1) \xrightarrow{y=1} 1 = -(x+1) \Rightarrow x=-2$$

Por tanto, $B=(-2,1)$ y $C=(0,1)$. Para hallar el área del triángulo, podemos usar la siguiente fórmula: si un triángulo tiene vértices $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$, $C=(x_3,y_3)$,

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 \end{pmatrix}\right|$$

Signo del valor absoluto

DEMOSTRACIÓN

$$\left.\begin{array}{l} A=(x_1,y_1) \\ B=(x_2,y_2) \\ C=(x_3,y_3) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{v}_1=(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ 0) \\ \vec{v}_2=(x_1-x_3,\ y_1-y_3,\ 0) \end{array}\right.$$

$$\vec{v}_1\times\vec{v}_2 = \begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & 0 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 \end{vmatrix}\vec{k}$$

El área del triángulo será igual a

$$\frac{1}{2}|\vec{v}_1\times\vec{v}_2| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 \end{pmatrix}\right|$$

En este caso,

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1$$

3. Un estanque que contiene inicialmente 80 m^3 se llena por una fuente con un caudal de 30 litros/ minuto. ¿Cuál es la recta cuya ecuación representa este problema de llenado? Calcula cuánto tiempo se tardaría en volver a tener 80 m^3 si el estanque estuviera vacío.

Primero tenemos que escribir todos los datos en las mismas unidades:

$$30 \frac{l}{min} \cdot \frac{1 m^3}{1000 l} = 0'003 \ m^3/min$$

Usamos la expresión punto-pendiente para calcular la ecuación de la recta. Si x es el tiempo en minutos, tomamos $x_0 = 0$, $y_0 = 80$ (la cantidad inicial) y $m = 0'003$ (la velocidad de llenado):

$$y - y_0 = m(x - x_0) \underset{\substack{y_0 = 80 \\ m = 0'003}}{\rightsquigarrow} y = 0'003x + 80$$

Si suponemos que el estanque está vacío, entonces $y_0 = 0$. Si queremos saber el tiempo que se tarda en llenar el estanque, queremos hallar el x tal que $y = 80$:

$$80 = 0'003x \Rightarrow x = \frac{80}{0'003} \approx 26666'7 \ min \approx 18'5 \ días$$