

Índice general

Índice general

I

HOMOLOGÍA SINGULAR DE UN ESPACIO TOPOLOGICO	3
1 Grupos de homología singular	4
1.1 Símplices singulares	4
1.2 Grupos de homología	7
1.2.1 Homología de un espacio topológico	9
1.2.2 Interpretación geométrica	11
1.2.3 Característica de Euler	12
1.3 Homología de un espacio arcoconexo	13
1.3.1 Sumas directas en homología	14
1.3.2 Descomposición en arcocomponentes	15
1.3.3 Homología de un conjunto convexo	16
1.4 Homotopías en el grupo de homología	17
1.4.1 Homotopías de cadenas	20
1.4.2 Aplicaciones homotópicas	20
1.5 Sucesiones exactas	23
2 Sucesiones de Mayer-Vietoris	27
2.1 Espacios de Mayer-Vietoris	27
2.2 Grupo de homología de S^1	29
2.2.1 Grupo de homología de S^n	31
2.3 Grupo de homología de la figura ocho	32
2.3.1 La rosa del topólogo	34
2.4 Grupo de homología del toro	35
HOMOLOGÍA RELATIVA Y CELULAR	38
3 Grupos de homología relativa	39
3.1 Complejo de cadenas cociente	39
3.2 Homología singular relativa	41
3.3 Aplicaciones entre pares	43
3.3.1 Teorema de escisión	44
3.4 Grupo de homología reducida	45
3.4.1 Una fórmula para la homología reducida	47
3.4.2 Homología reducida y homología relativa	48
3.5 Homeomorfismo relativo	51
4 Espacios CW-complejos	53
4.1 Espacio de adjunción	53
4.1.1 Células y adjunción	56
4.2 Espacios CW-complejos	58
4.2.1 Subcomplejos	62
4.3 Grupos de homología celular	64
4.4 Homología de la n -rosa	65
4.4.1 Rosa mixta	65

5 Homología de las superficies compactas	68
5.0.1 Homología del n -toro	68
5.0.2 Espacio proyectivo real	69
6 Dos generalizaciones del toro	72
6.1 $W = S^2 \times S^1$	72
6.2 $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$	74
APÉNDICES	77

Índice de figuras

0.1	Tetrahemihexaedro	1
1.1	Puntos afínmente independientes	5
1.2	Triángulo y tetraedro	5
1.3	Circunferencia	6
1.4	Gráfica auxiliar que ilustra el cambio de índices	10
1.5	Varios caminos en \mathbb{R}^2	12
1.6	Dos espacios arcoconexos.	15
1.7	Peine del topólogo.	18
2.1	C queda dividido en dos triángulos, A y B , a los cuales asignamos orientaciones contrarias.	29
2.2	Figura ocho en línea discontinua, con un posible conjunto U dibujado en línea sólida gruesa.	32
2.3	Rosa de 8 pétalos.	35
2.4	Toro de Clifford	36
3.1	Esfera y cilindro del 3.2.1.	42
3.2	Agujero en un agujero en un agujero	44
3.3	Generadores del grupo de homología de primer orden del toro.	45
4.1	Conjunto S^1 construido como espacio de adjunción.	56
4.2	Espacio S^1 con dos segmentos adicionales, creando una figura ocho.	56
4.4	Espacio S^2 construido utilizando el 4.2.1.	59
4.5	Primeras 16 iteraciones del pendiente hawaiano.	61
4.6	1-esqueleto del cilindro.	62
4.7	1-esqueleto del toro.	62
4.8	Pasos ilustrados de la demostración.	64
4.9	Ejemplo de rosa mixta $B_{(2,2)}$	65
5.1	Bitoro llano.	69

Índice de cuadros

List of Listings

Introducción

En el año 1758, Euler publica un artículo que cubre diversas propiedades de los poliedros. El principal resultado de su artículo es la celebrada fórmula de Euler para poliedros convexos,

$$V - A + C = 2$$

donde V , A y C denotan respectivamente el número de vértices, aristas y caras del poliedro. La demostración de este resultado se basa en el hecho de que los poliedros convexos son homeomorfos a un sólido común, la bola cerrada. Si consideramos un poliedro irregular que sea homeomorfo a la esfera, este resultado sigue siendo válido.

Sin embargo, podemos encontrar poliedros que no verifiquen esta fórmula eliminando la condición de convexidad. Un ejemplo de poliedro que no verifica esta expresión es el tetrahemihexaedro, con 6 vértices, 12 aristas y 7 caras. Si computamos su valor $V - A + C$, obtenemos

$$6 - 12 + 7 = 1$$

El valor $V - A + C$ de un poliedro regular se denomina *característica de Euler* del poliedro.

Un espacio topológico $X \subset \mathbb{R}^n$ 2AN y Hausdorff es una superficie si, dado $p \in X$, existe un entorno abierto $U \subset X$ de p homeomorfo a una bola de \mathbb{R}^2 . Desde un punto de vista geométrico, podemos decir que los puntos de X perciben el mundo en dos dimensiones, al igual que los personajes de la novela *Planilandia*. Algunas superficies pueden ser representadas utilizando poliedros regulares, que podemos clasificar en función de su característica de Euler. Cuando una superficie sea homeomorfa a algún poliedro regular, diremos que es poliédrica.

A partir de un espacio topológico, podemos generar una familia de grupos abelianos llamados *grupos de homología*. Los grupos de homología nos permiten utilizar técnicas de álgebra comutativa para conocer algunas de las propiedades topológicas de un espacio, permitiendo probar resultados que están fuera del alcance de la topología conjuntista. En particular, veremos una demostración del teorema del punto fijo de Brouwer, que establece la existencia de puntos fijos para cualquier aplicación continua entre conjuntos convexos.

Este texto está fuertemente basado en [Vick94], un texto dirigido a estudiantes de máster y doctorado (conocido en Estados Unidos como el *graduate level*), por lo que las explicaciones son más breves y muchos detalles se asumen triviales. Mi objetivo es adaptar estos textos, de forma que sean lo más asequible posible a estudiantes de 3º y 4º de carrera.

Dado que la información en [Vick94] está muy concentrada, se han tomado los dos primeros capítulos y convertido en partes. Se recomienda al lector tratar de entender y computar ejemplos antes de pasar a la parte siguiente.

La primera parte de este texto corresponde al capítulo 1, *Singular Homology Theory*, donde se introducen los grupos de homología singular y las

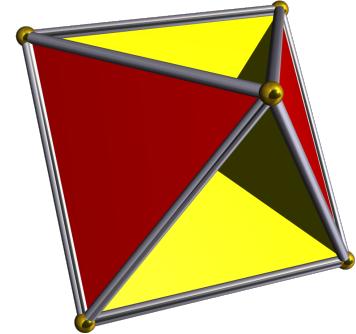


Figura 0.1: Tetrahemihexaedro regular. Algunas de sus caras se intersecan entre sí, haciendo que su topología sea diferente a la de la bola cerrada. Imagen: [Tetra].

sucesiones de Mayer-Vietoris. Las sucesiones de Mayer-Vietoris son la técnica básica para calcular los grupos de homología de un espacio topológico, y son válidas para cualquier espacio.

La segunda parte corresponde al capítulo 2, *Attaching Spaces with Maps*, donde se introducen los espacios CW-complejos y los grupos de homología celular. La homología celular es una forma más directa de computar los grupos de homología, pero requiere que nuestro espacio admita una estructura especial, la *estratificación por CW-complejos*.

Finalmente, los apéndices presentan información adicional que no es necesaria para poder seguir el texto, pero he considerado interesante y digna de discusión.

El objetivo de este texto es introducir al lector en la teoría de homología singular, y está dirigido principalmente a estudiantes de la *Universitat de València*. Como consecuencia, el lector se asume familiarizado con el contenido cubierto por las asignaturas de Estructuras algebraicas y Topología de segundo curso.

HOMOLOGÍA SINGULAR DE UN ESPACIO TOPOLÓGICO

1 Grupos de homología singular

1.1 Símplices singulares	4
1.2 Grupos de homología	7
1.2.1 Homología de un espacio topológico	9
1.2.2 Interpretación geométrica	11
1.2.3 Característica de Euler	12
1.3 Homología de un espacio arcoconexo	13
1.3.1 Sumas directas en homología	14
1.3.2 Descomposición en arco-componentes	15
1.3.3 Homología de un espacio convexo	16
1.4 Homotopías en de homología	17
1.4.1 Homotopías de cadenas	20
1.4.2 Aplicaciones homotópicas	20
1.5 Sucesiones exactas	23

Proposition 1.1.1 La familia de puntos $S = \{x_0, \dots, x_p\} \subset \mathbb{R}^n$ es afínmente independiente si y sólo si la familia de vectores $\{x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0\}$ es

linealmente independiente.

Demostración.

Sea S afínmente independiente y $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tales que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i(x_i - x_0) = 0 \iff \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = x_0 \sum_{i=1}^p \lambda_i \quad (1.1)$$

Definimos $\lambda_0 = -\lambda_1 - \dots - \lambda_p$. Por construcción, $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_p = \lambda_0 - \lambda_0 = 0$. Aplicando la identidad (1.1),

$$0 = \sum_{i=1}^p \lambda_i(x_i - x_0) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i - x_0 \sum_{i=1}^p \lambda_i = \sum_{i=0}^p \lambda_i x_i$$

Dado que S es una familia afínmente independiente, $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Por tanto, T es linealmente independiente. Recíprocamente, sea T linealmente independiente y $\mu_0, \alpha_0, \dots, \mu_p, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{i=0}^p \mu_i x_i = \sum_{i=0}^p \alpha_i x_i; \quad \sum_{i=0}^p \mu_i = \sum_{i=0}^p \alpha_i$$

Combinando ambas igualdades, deducimos que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^p (\mu_i - \alpha_i)x_i = \sum_{i=0}^p (\mu_i - \alpha_i)x_i - 0x_0 = \\ &= \sum_{i=0}^p (\mu_i - \alpha_i)x_i - \left(\sum_{i=0}^p (\mu_i - \alpha_i) \right) x_0 = \\ &= \sum_{i=1}^p (\mu_i - \alpha_i)(x_i - x_0) \end{aligned}$$

Dado que T es linealmente independiente, se sigue que

$$\mu_i - \alpha_i = 0 \iff \mu_i = \alpha_i$$

para $i = 1, \dots, p$. Por tanto, S es afínmente independiente. \square

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ afínmente independiente y (a, b, c) una terna en S con $a \neq b \neq c$. Si S es afínmente independiente, $a - b$ y $b - c$ son linealmente independientes. Como $a - b \neq 0$, existen rectas afines $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^n$ que son paralelas a $a - b$ y $b - c$. Por independencia lineal, L_1 y L_2 se cruzan a lo sumo en un punto, por lo que $a \notin L_2$ y $c \notin L_1$ (ver Figura ??).

Definition 1.1.1 Un p -símplex es la envoltura convexa de una familia afínmente independiente $\{x_0, \dots, x_p\} \subset \mathbb{R}^n$. Dichos puntos reciben el nombre de vértices del símplex.

Proposition 1.1.2 Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un p -símplex y $\{x_0, \dots, x_p\}$ una familia afínmente independiente de puntos contenidos en S . Dado $x \in S$, existen únicos $t_0, \dots, t_p \in [0, 1]$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^p t_i x_i; \quad \sum_{i=0}^p t_i = 1$$

Decimos que un p -símplex está **ordenado** cuando se aplica una relación de orden determinada sobre sus vértices.

Example 1.1.1 Sean $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$ y $c = (0, 0, 1)$. La envoltura convexa de $\{a, b, c\}$ es un 2-símplex σ . Si $e_1 = a$, $e_2 = b$ y $e_3 = c$, la relación de orden $e_i \leq e_j \Leftrightarrow i \leq j$ hace que σ sea un 2-símplex ordenado.

Sea $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} . La envoltura convexa de los puntos $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ es un n -símplex, que denotaremos como σ_n . Por 1.1.2, los puntos de σ_n son de la forma

$$(t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \quad t_1 + \dots + t_{n+1} = 1$$

Sea $S = \{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^m$ una familia de puntos afínmente independientes: la aplicación continua

$$\begin{aligned} f: \sigma_n &\longrightarrow \text{Con}(S) \\ (t_0, \dots, t_n) &\longmapsto \sum_{i=0}^n t_i x_i \end{aligned}$$

establece una biyección entre σ_n y $\text{Con}(S)$. Dado que σ_n es compacto y $\text{Con}(S)$ es un espacio de Hausdorff, f es un homeomorfismo [IntroTopo], por lo que $\text{Con}(S)$ es homeomorfo a σ_n . De aquí se sigue que todo p -símplex de \mathbb{R}^{p+1} es homeomorfo a σ_p , por lo que se conoce como **p -símplex estándar**.

Example 1.1.2 Los símplices en bajas dimensiones son $\sigma_0 = \{1\}$, $\sigma_1 = [e_1, e_2]$, σ_2 (el triángulo) y σ_3 (el tetraedro).

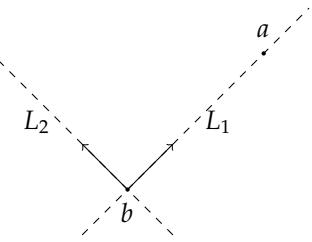


Figura 1.1: La independencia afín es el equivalente en conjuntos afines a la independencia lineal.

Envoluta convexa

Un $C \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío es convexo si, dados $x, y \in C$, C contiene al segmento $[x, y] = \{xt + y(1-t): t \in [0, 1]\}$. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es no vacío, se define su **envoltura convexa** como el menor subconjunto convexo que contiene a A ,

$$\text{Con}(A) = \bigcup_{x, y \in A} [x, y]$$

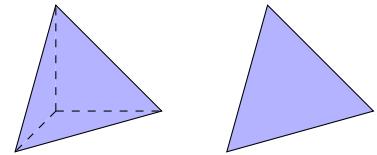


Figura 1.2: Los triángulos y tetraedros constituyen ejemplos de símplices. Se puede definir una teoría de homología equivalente a la homología singular utilizando sólo símplices, llamada *homología simplicial* (véase [Hatcher]).

IntroTopo

Example 1.1.2 Los símplices en bajas dimensiones son $\sigma_0 = \{1\}$, $\sigma_1 = [e_1, e_2]$, σ_2 (el triángulo) y σ_3 (el tetraedro).

Definition 1.1.2 Un p -símplex singular en un espacio topológico X es una aplicación continua $\phi: \sigma_p \rightarrow X$.

Example 1.1.3 Sea \mathbb{D} la circunferencia unidad en \mathbb{C} . La aplicación

$$\begin{aligned}\phi: \sigma_1 &\longrightarrow \mathbb{D} \\ (t_0, t_1) &\longmapsto e^{\pi i t_0}\end{aligned}$$

es un símplice singular que envía al 1-símplex estándar en el hemisferio norte de \mathbb{D} (ver Figura 1.3). Notemos que $\phi(\sigma_1)$ no es un segmento desde el punto de vista geométrico porque está curvado, pero sí lo es desde un punto de vista topológico, ya que ϕ es un homeomorfismo y σ_1 es un segmento.

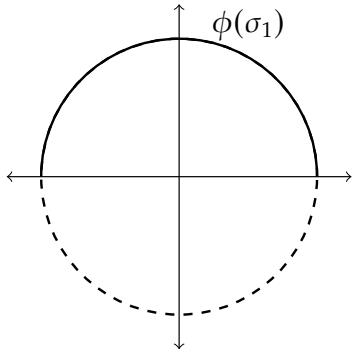


Figura 1.3: La curva $\phi(\sigma_1)$ dada por el símplice singular ϕ de 1.1.3. Los símplices singulares amoldan el símplice estándar al espacio de llegada usando su continuidad.

Dado un $p \in X$ y un espacio topológico Y , toda aplicación constante $Cte_p: Y \rightarrow X$ se identifica con el 0-símplex singular $\phi_p: \sigma_0 \rightarrow X$ que envía al punto 1 en p . En general, todo camino $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ se identifica con el 1-símplex singular

$$\begin{aligned}\psi: \sigma_1 &\longrightarrow X \\ (t_0, t_1) &\longmapsto \alpha(t_0)\end{aligned}$$

Sean X, Y espacios topológicos. Dada una aplicación continua $f: X \rightarrow Y$ y un p -símplex singular $\phi: \sigma_p \rightarrow X$, la aplicación $f_{\#}(\phi) := f \circ \phi: \sigma_p \rightarrow Y$ es un p -símplex singular en Y por ser composición de aplicaciones continuas. Esto hace que toda aplicación continua dé lugar a una aplicación que envía p -símplices singulares de X en p -símplices singulares de Y .

Proposition 1.1.3

1. Si id es la identidad en X , $id_{\#}$ es la identidad en σ_n ;
2. si $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ son continuas, $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$.

Sea $\phi: \sigma_p \rightarrow X$ un p -símplex singular y $0 \leq i \leq p$. Se define la cara i -ésima de ϕ como el $(p-1)$ -símplex singular

$$\begin{aligned}\partial_{(i)}\phi: \sigma_{p-1} &\longrightarrow X \\ (t_0, \dots, t_{p-1}) &\longmapsto \phi(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1})\end{aligned}$$

Example 1.1.4 El 2-símplex singular

$$\begin{aligned}\phi: \sigma_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x + 2, 2y + 2, 2z + 2)\end{aligned}$$

tiene como caras

$$\begin{aligned}\partial_{(0)}\phi(u, v) &= \phi(0, u, v) = (2, 2u + 2, 2v + 2) \\ \partial_{(1)}\phi(u, v) &= \phi(u, 0, v) = (2u + 2, 2, 2v + 2) \\ \partial_{(2)}\phi(u, v) &= \phi(u, v, 0) = (2u + 2, 2v + 2, 2)\end{aligned}$$

Desde un punto de vista geométrico, $\partial_{(i)}\phi(\sigma_1)$ es una cara del tetraedro $\phi(\sigma_2)$.

1.2. Grupos de homología

Dado un grupo abeliano G , consideramos la acción $\rho: G \times \mathbb{Z} \rightarrow G$ dada por

$$\begin{array}{ll} ng := g + \stackrel{(n)}{\dots} + g & ng := -g - \stackrel{(n)}{\dots} - g \\ (n > 0) & (n < 0) \end{array}$$

Decimos que un subconjunto $S \subset G$ es un **sistema generador** de G si, dado un $g \in G$, podemos hallar $b_1, \dots, b_n \in S$ y enteros μ_1, \dots, μ_n tales que

$$g = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n$$

Definition 1.2.1 Sea G un grupo abeliano. Un sistema generador B de G es una **base** si, dados $b_1, \dots, b_n \in B$ y enteros $\lambda_1, \dots, \lambda_n$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0 \implies \lambda_i = 0 \quad (1.2)$$

Decimos que G es un **grupo libre** si admite una base.

Example 1.2.1 Supongamos que el grupo aditivo \mathbb{Q} es un grupo libre generado por un cierto conjunto $B \subseteq \mathbb{Q}$. Dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in B$,

$$cb \frac{a}{b} - ad \frac{c}{d} = 0,$$

por lo que B está formado por un único elemento. Sea p un número primo coprimo con b . Por ser \mathbb{Q} libre, existirá un entero α tal que

$$\frac{1}{p} = \alpha \frac{a}{b}$$

pero esto implica que $b = \alpha p a$, en contradicción con la primalidad de p . Por tanto, \mathbb{Q} no es un grupo libre.

Se define el **grupo libre** generado por A como la familia $\mathcal{F}(A)$ de todas las aplicaciones $f: A \rightarrow \mathbb{Z}$ con soporte finito, dotado con la suma de aplicaciones.

Soporte de una aplicación

Dado un grupo abeliano G , el soporte de una aplicación $f: A \rightarrow G$ es el conjunto de los puntos donde no se anula.

Proposition 1.2.1 El grupo $\mathcal{F}(A)$ es libre.

Demostración. Dado un $a \in A$, denotamos \mathcal{X}_a como la aplicación característica del conjunto $\{a\}$. Claramente, $\mathcal{X}_a \in \mathcal{F}(A)$. También denotamos \mathcal{X} como la familia de todos los \mathcal{X}_a con $a \in A$.

Dada $f \in \mathcal{F}(A)$, se define \tilde{f} como

$$\tilde{f} = \sum_{a \in A} f(a) \mathcal{X}_a$$

Dado un $x \in A$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, por lo que \mathcal{X} es un sistema generador de $\mathcal{F}(A)$.

Sean μ_1, \dots, μ_n enteros y $a_1, \dots, a_n \in A$ tales que $\mu_1 \mathcal{X}_{a_1} + \dots + \mu_n \mathcal{X}_{a_n} = 0$. Dado un $1 \leq j \leq n$,

$$0 = \sum_{i=1}^n \mu_i \mathcal{X}_{a_i}(a_j) = \mu_j \mathcal{X}_{a_j}(a_j) = \mu_j$$

por lo que $\mu_1, \dots, \mu_n = 0$ y \mathcal{X} es una base. \square

Remark 1.2.1 Dado un conjunto finito A , $\mathcal{F}(A) \cong \mathbb{Z}^{|A|}$.

Definition 1.2.2 Un **grupo graduado** es una colección de grupos $G = \{G_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Un **grupo graduado** H es **subgrupo graduado** (resp. **normal**) de G si $H_j \subseteq G_j$ (resp. $H_j \trianglelefteq G_j$) para todo j . Si H es un **subgrupo graduado normal** de G , definimos

$$\frac{G}{H} := \left\{ \frac{G_i}{H_i} : i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Sean G, H grupos graduados. Un **homomorfismo graduado** $f: G \rightarrow H$ es una colección de homomorfismos $f_i: G_i \rightarrow H_{i+r}$, donde $r \in \mathbb{Z}$ es un valor común para todos los f_i , llamado **grado** de f . Diremos que f es un monomorfismo (resp. epimorfismo, isomorfismo, endomorfismo, automorfismo) graduado si lo es cada uno de los homomorfismos en la colección.

Definition 1.2.3 Un **complejo de cadenas** es un par de la forma (G, ∂) , siendo G un grupo graduado y ∂ un endomorfismo de grado -1 tal que

$$\text{Im } \partial_n \leq \ker \partial_{n-1}$$

La aplicación ∂ recibe el nombre de **operador borde**.

Definition 1.2.4 Sean (C, d) y (C', d') dos complejos de cadenas. Una **aplicación de cadenas** es un homomorfismo graduado $\Phi: C \rightarrow C'$ de grado 0 tal que el siguiente diagrama es comutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n \\ \downarrow \Phi_{n+1} & & \downarrow \Phi_n \\ C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n \end{array}$$

Sea (C, d) un complejo de cadenas. Se definen los grupos graduados

$$Z_*(C) := \ker d = \{\ker d_n : n \in \mathbb{Z}\}; \quad Z_n(C) := \ker d_n$$

$$B_*(C) := \text{Im } d = \{\text{Im } d_n : n \in \mathbb{Z}\}; \quad B_n(C) := \text{Im } d_n$$

Diremos que dos elementos $p, q \in Z_n(C)$ son **homólogos** si $p - q \in B_n(C)$.

Definition 1.2.5 Se define el **grupo graduado de homología** C como

$$H_*(C) := \frac{Z_*(C)}{B_*(C)}$$

Diremos que dos complejos de cadenas tienen el mismo **tipo de homología** si sus grupos de homología son isomorfos.

Sea $f: (C, d) \rightarrow (D, \partial)$ una aplicación de cadenas. Dado un $c \in Z_n(C)$,

$$d_n(c) = 0 \implies \partial_n[f_n(c)] = f_{n-1}[d_n(c)] = f_{n-1}(0)$$

Como f_{n-1} es un homomorfismo de grupos, $f_{n-1}(0) = 0$, por lo que $f_n(c) \in Z_n(D)$ y $f_n[Z_n(C)] \leq Z_n(D)$. Análogamente, $f_n[B_n(C)] \leq B_n(D)$. Por tanto, f induce un homomorfismo entre grupos de homología,

$$f_*: H_*(C) \rightarrow H_*(D)$$

1.2.1. Homología de un espacio topológico

Definition 1.2.6 Se define el **grupo de n -cadenas singulares** $S_n(X)$ como el grupo libre generado por todos los simplices singulares $\phi: \sigma_n \rightarrow X$. Los elementos de $S_n(X)$ reciben el nombre de n -cadenas singulares de X .

A partir los grupos de cadenas singulares, podemos definir el grupo graduado

$$S_*(X) = \{S_n(X) : n \geq 0\}$$

Para poder completar el grupo graduado, simplemente se considera que $S_p(X) = 0$ para todo $p < 0$.

El objetivo de esta sección es definir un operador borde sobre $S_*(X)$, de forma que $(S_*(X), \partial)$ forme una complejo de cadenas. Podemos extender el operador cara a $S_n(X)$ tomando

$$\partial_{(j)} \left(\sum_{i=1}^n k_i \phi_i \right) = \sum_{i=1}^n k_i \partial_{(j)} \phi_i$$

Este proceso da lugar a $n + 1$ operadores cara diferentes, pero ninguno de ellos define un operador borde.

Definition 1.2.7 Se define el **operador borde** $\partial: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ asociado a $S_*(X)$ como

$$\partial = \partial_{(0)} - \partial_{(1)} + \cdots + (-1)^n \partial_{(n)}$$

Theorem 1.2.2 Dado un espacio topológico X , $\text{Im } \partial \leq \ker \partial$. Esto implica que $(S_*(X), \partial)$ es un complejo de cadenas.

*Demuestra*ción. Sea $c \in S_n(X)$. Dado que $S_n(X)$ es un grupo libre y ∂ es un homomorfismo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que c es un simplice singular $\sigma_n \rightarrow X$.

Dados $0 \leq p, q \leq n$ con $p < q - 1$,

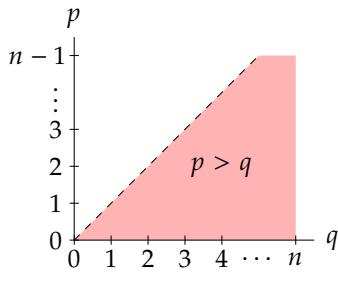
$$\begin{aligned} \partial_{(p)} \partial_{(q)} c(t_0, \dots, t_{n-2}) &= \partial_{(q)} c(t_0, \dots, t_{p-1}, \hat{t}_p, t_p, \dots, t_{n-2}) = \\ &= c(t_0, \dots, t_{p-1}, \hat{t}_p, t_p, \dots, t_{q-2}, \hat{t}_q, t_{q-1}, \dots, t_{n-2}) = \\ &= \partial_{(p)} c(t_0, \dots, t_{q-2}, \hat{t}_{q-1}, t_{q-1}, \dots, t_{n-2}) = \\ &= \partial_{(q-1)} \partial_{(p)} c(t_0, \dots, t_{n-2}) \end{aligned}$$

donde \hat{t} denota reemplazar t con un cero. Por otro lado,

$$\partial^2 c = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \partial_{(p)}(\partial c) = \sum_{q=0}^n \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{p+q} \partial_{(p)} \partial_{(q)} c \quad (1.3)$$

Combinando ambas expresiones,

$$\partial^2 c = \sum_{q=1}^n \sum_{p < q-1} (-1)^{p+q} \partial_{(p)} \partial_{(q)} c + \sum_{q=0}^n \sum_{p > q} (-1)^{p+q} \partial_{(p)} \partial_{(q)} c$$



Observemos que

$$\begin{aligned} \{(p, q) : q = 0, \dots, n, 0 \leq p < q\} &= \\ \{(q, p) : p = 0, \dots, n-1, p < q \leq n\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

(ver Figura ??), por lo que $\partial^2 c$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} &\sum_{q=1}^n \sum_{p < q-1} (-1)^{p+q} \partial_{(q-1)} \partial_{(p)} c + \sum_{q=0}^n \sum_{p < q} (-1)^{p+q} \partial_{(p)} \partial_{(q)} c = \\ &= \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{p < q} (-1)^{p+q+1} \partial_{(q)} \partial_{(p)} c + \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q > p} (-1)^{p+q} \partial_{(q)} \partial_{(p)} c = \\ &= \sum_{q=0}^{n-1} \left(- \sum_{p < q} (-1)^{p+q} \partial_{(q)} \partial_{(p)} c + \sum_{p < q} (-1)^{p+q} \partial_{(q)} \partial_{(p)} c \right) = 0 \end{aligned}$$

□

Dado que $S_*(X)$ es abeliano por definición, su grupo de homología asociado está bien definido. Además, como todo espacio topológico X define un grupo graduado $S_*(X)$ de forma única, podemos introducir la siguiente notación sin ambigüedades:

$$Z_n(X) := Z_n(S_*(X)); \quad B_n(X) := B_n(S_*(X))$$

Definition 1.2.8 Sea X un espacio topológico. Se define el **grupo de homología de orden n** asociado a X como

$$H_n(X) := H_n(S_*(X)) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$$

Example 1.2.2 Sea $f: [0, 1] \rightarrow X$ un camino. Se define el 1-símplex singular

$$\begin{aligned} \psi: \sigma_1 &\longrightarrow X \\ (t_0, t_1) &\longmapsto f(t_0) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Se tiene entonces que ψ es un 1-ciclo si y sólo si $\psi(0, 1) = \partial_{(0)}\psi = \partial_{(1)}\psi = \psi(1, 0)$. Dado que $\psi(0, 1) = f(0)$ y $\psi(1, 0) = f(1)$, un camino es un 1-ciclo si y sólo si f es un lazo.

Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Habíamos definido una aplicación $f_\#$ que convierte símplices de X en símplices de Y , al igual que el operador cara convertía n -símplices en $(n - 1)$ -símplices. Podemos extender $f_\#$ a todo el grupo de cadenas singulares de forma que la aplicación resultante sea un homomorfismo:

$$f_\#(n_1\phi_1 + \cdots + n_k\phi_k) = n_1f_\#(\phi_1) + \cdots + n_kf_\#(\phi_k)$$

Esta aplicación recibe el nombre de **morfismo inducido en homología** por f .

Proposition 1.2.3 Todo morfismo inducido por una aplicación continua es una aplicación de cadenas. Como consecuencia, si $f: X \rightarrow Y$ es continua, $f_\#$ induce una familia de homomorfismos

$$\begin{aligned} f_*: H_n(X) &\longrightarrow H_n(Y) \\ [x] &\longmapsto [f_\#(x)] \end{aligned}$$

Dadas $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ continuas, deducimos de las proposiciones ?? y 1.2.3 que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Theorem 1.2.4 Si $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, $f_*: H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ es un isomorfismo para todo $k \geq 0$.

1.2.2. Interpretación geométrica

Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ con la topología inducida por \mathbb{R}^2 . El espacio \mathbb{R}^2 no es homeomorfo a X ; sin embargo, no es posible probar este resultado utilizando sólo topología conjuntista.

Definimos un **camino orientado** en un espacio topológico X como una terna $(\gamma; A, B)$, siendo $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ un camino con $\gamma(0) \neq \gamma(1)$ y $A, B \in \gamma(\{0, 1\})$ con $A \neq B$. Diremos que $(\gamma; A, B)$ está **orientado positivamente** (resp. **negativamente**) si $A = \gamma(0)$ y $B = \gamma(1)$ (resp. $A = \gamma(1)$ y $B = \gamma(0)$).

Example 1.2.3 Sea $\eta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ el camino dado por

$$\eta(t) = (\sin(\pi t), -\cos(\pi t))$$

Caminos compatibles

Diremos que dos caminos orientados $(\alpha; A_1, B_1)$ y $(\beta; A_2, B_2)$ en X son **compatibles** si el camino $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ dado por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \eta(t) = (\sin(\pi t), -\cos(\pi t)); \quad \phi(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t));$$

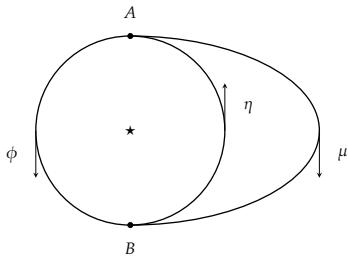
es continuo y $B_1 = A_2$.

Consideremos los siguientes caminos positivamente orientados en \mathbb{R}^2 : Los caminos ϕ y η tienen orientaciones compatibles, y forman una circunferencia cuyo interior está contenido en \mathbb{R}^2 . Por tanto, podemos hallar una cadena singular cuyo borde sea $\phi + \eta$. Si tomamos clases módulo $B_1(\mathbb{R}^2)$,

$$\phi + \eta \in B_1(\mathbb{R}^2) \iff -[\eta] = [\phi]$$

Los caminos η y μ forman una figura homotópica a una circunferencia, y sus orientaciones son compatibles. Podemos encontrar una cadena singular cuyo borde sea $\phi + \mu$. Tomando clases,

$$\phi + \mu \in B_1(\mathbb{R}^2) \iff [\phi] = -[\mu]$$



Consideremos ahora el plano perforado, $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. La aplicación $\phi|_X + \eta|_X$ ya no forma el borde de una cadena singular, dado que los caminos encierran al punto $(0, 0)$, que no está. Por tanto, las clases de $\phi|_X$ y $\mu|_X$ serán diferentes. En cambio, ϕ y ψ siguen siendo homólogas, porque sus orientaciones son compatibles y no contienen al punto que hemos quitado.

Como consecuencia del 1.2.4, concluimos que \mathbb{R}^2 no es homeomorfo a X .

Figura 1.5: Varios caminos en \mathbb{R}^2

Rango de un grupo

Sea A un grupo abeliano. Se denomina **subgrupo de torsión** de A al subgrupo T formado

elementos de orden finito. Decimos que A es **libre de torsión** si $T = 0$, y que A es un **grupo de torsión** si $T = A$. Definimos la **característica de torsión** de A como el mínimo número de generadores que posee A para ser de torsión.

Característica de Euler

Example 1.2.4 1. El grupo aditivo $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un grupo de torsión: dado un $\bar{p} \in \mathbb{Z}_n$,

$$n\bar{p} = \sum_{i=1}^{n|p|} \bar{1} = \sum_{i=1}^{|p|} \bar{n} = \sum_{i=1}^{|p|} 0 = 0$$

Por la misma razón, todo cuerpo de característica mayor que cero define un grupo de torsión.

2. El grupo aditivo \mathbb{Z} es un grupo libre de torsión porque no tiene divisores de cero: si $n > 0$ y $p \in \mathbb{Z}$ es tal que $np = 0$, necesariamente se cumple que $p = 0$.

3. Consideramos $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$: dado un $\bar{q} \in \mathbb{Z}_n$,

$$n(0, \bar{q}) = \sum_{i=1}^n (0, \bar{q}) = (0, n\bar{q}) = (0, 0)$$

por lo que el subgrupo de torsión de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ contiene a $\{0\} \times \mathbb{Z}_n$. Sin embargo, si $m > 0$ y $p \in \mathbb{Z}$,

$$m(p, \bar{q}) = \sum_{i=1}^m (p, \bar{q}) = (mp, m\bar{q}) = (0, 0)$$

luego n divide a mq y $p = 0$. Por tanto, el subgrupo de torsión de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ es $\{0\} \times \mathbb{Z}_n$ (que es un subgrupo propio).

Definition 1.2.9 Se define el *n-ésimo número de Betti* $\beta_n(X)$ como el rango de $H_n(X)$. Si existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_p(X) = 0$ para todo $p > k$, se define la *característica de Euler* de X como

$$\chi(X) := \sum_{n=0}^k (-1)^n \beta_n(X)$$

1.3. Homología de un espacio arcoconexo

Sea X un espacio topológico arcoconexo. Dados dos puntos $x, y \in X$, existe un camino $L_{x,y}: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $L_{x,y}(0) = x$ y $L_{x,y}(1) = y$. Como vimos en 1.2.2, $L_{x,y}$ induce un 1-símplex singular $\phi: \sigma_1 \rightarrow X$. En particular, $L_{x,x} = \text{Cte}_x$ es una aplicación constante que queda totalmente determinada por x , por lo que podemos identificar x con $L_{x,y}$.

Dado que $\text{Cte}_x \in S_0(X)$, existirán $x_1, \dots, x_n \in X$ y enteros μ_1, \dots, μ_n tales que

$$x \equiv \text{Cte}_x = \sum_{i=1}^n \mu_i \text{Cte}_{x_i} \equiv \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$$

Consideremos el último tramo del complejo de cadenas $S_*(X)$:

$$S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Dado que $\partial_0 = 0$, $S_0(X) = Z_0(X)$ y podemos construir el siguiente homomorfismo entre $S_0(X)$ y \mathbb{Z} :

$$\begin{aligned} \beta: S_0(X) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n_1 x_1 + \dots + n_p x_p &\longmapsto n_1 + \dots + n_p \end{aligned}$$

Como $X \neq \emptyset$, β es epimorfismo, ya que $p = \beta(px)$ para todo $x \in X$.

Sea $\phi \in S_1(X)$: como ∂ es un homomorfismo de grado -1 , $\partial\phi \in S_0(X)$. En particular, ϕ es una aplicación continua que depende de dos variables no negativas cuya suma siempre es 1, luego

$$\partial\phi = \phi(0, t_0) - \phi(t_0, 0) = \phi(0, 1) - \phi(1, 0)$$

y $\partial\phi \in \ker \beta$. Si $c = n_1\phi_1 + \cdots + n_p\phi_p$,

$$\beta(\partial c) = \beta(n_1\partial\phi_1 + \cdots + n_p\partial\phi_p) = n_1\beta(\partial\phi_1) + \cdots + n_p\beta(\partial\phi_p) = 0$$

Como ∂c son los elementos de $B_0(X)$, $B_0(X) \subseteq \ker \beta$.

Recíprocamente, sea $c \in \ker \beta$: identificando $x \in X$ con Cte_x , existirán $x_1, \dots, x_k \in X$ tales que $c = n_1x_1 + \cdots + n_kx_k$. Como X es arcoconexo, dado un $x \in X$, podemos construir la cadena singular $d = n_1L_{x,x_1} + \cdots + n_kL_{x,x_k}$ y

$$\partial d = \sum_{i=1}^p n_i(L_{x,x_i}(1) - L_{x,x_i}(0)) = \sum_{i=1}^k n_i x_i - x \sum_{i=1}^k n_i.$$

Como $c \in \ker \beta$, se sigue que

$$\sum_{i=1}^p n_i = \beta(c) = 0 \implies \partial d = \sum_{i=1}^p n_i x_i = c.$$

Por tanto, $c \in B_0(X)$ y $B_0(X) = \ker \beta$. De aquí se sigue que

$$H_0(X) = \frac{Z_0(X)}{B_0(X)} = \frac{S_0(X)}{\ker \beta} \cong \mathbb{Z}$$

Proposition 1.3.1 Si X es arcoconexo, $H_0(X)$ tiene rango 1.

Example 1.3.1 Sea $X = \{\star\}$. Dado un $n \geq 0$, existe un único n -símplex singular $\phi_n: \sigma_n \rightarrow X$, que es la aplicación constante. Las caras de la aplicación constante son la aplicación constante, por lo que

$$\partial\phi_n = \begin{cases} \phi_{n-1} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Dado que $S_n(X) = \langle \phi_n \rangle$, el operador borde $\partial_n: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ es un isomorfismo si n es par y cero si n es impar. Por tanto, $H_n(X) = 0$ para todo $n > 0$.

1.3.1. Sumas directas en homología

Definition 1.3.1 Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de grupos abelianos. Se define la **suma directa** de los grupos G_α como el grupo G de aplicaciones $f: A \rightarrow G$ con soporte finito.

Si A es finito, escribiremos $G = G_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus G_{\alpha_k}$.

Denotaremos a las aplicaciones $f \in G$ como tuplas de la forma $(f_\alpha)_{\alpha \in A} = \{f(\alpha)\}_{\alpha \in A}$. Los elementos f_α reciben el nombre de **componentes** de f .

Dada una familia de complejos de cadenas $\{C^\alpha\}_{\alpha \in A}$, se define el grupo

graduado

$$C = \sum_{\alpha \in A} C^\alpha := \left\{ \sum_{\alpha \in A} C_p^\alpha : p \in \mathbb{Z} \right\}$$

donde Σ denota suma directa.

Dado un $c \in C_p$, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ tales que $c(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in A \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Podemos entonces identificar c con un elemento $(c^{\alpha_1}, \dots, c^{\alpha_n}) \in C_p^{\alpha_1} \oplus \dots \oplus C_p^{\alpha_n}$. Si denotamos al operador borde de C^{α_j} como ∂^{α_j} ,

$$\left(\partial_p^{\alpha_1} c^{\alpha_1}, \dots, \partial_p^{\alpha_n} c^{\alpha_n} \right) \in C_{p-1}^{\alpha_1} \oplus \dots \oplus C_{p-1}^{\alpha_n}$$

Por tanto, definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \partial_p: C_p &\longrightarrow C_{p-1} \\ c &\longmapsto (\partial_p^{\alpha_1} c^{\alpha_1}, \dots, \partial_p^{\alpha_n} c^{\alpha_n}) \end{aligned}$$

Dado que ∂_p actúa componente a componente, es inmediato que esta construcción da lugar a un operador borde.

Lema 1.3.2 Dada una familia de complejos de cadenas $\{C^\alpha\}_{\alpha \in A}$ con suma directa C ,

$$H_*(C) \cong \sum_{\alpha \in A} H_*(C^\alpha)$$

1.3.2. Descomposición en arcocomponentes

Supongamos Ω es un espacio topológico formado por dos arcocomponentes, Ω_1 y Ω_2 , como los que se muestran en Figura 1.6. Si $f(x) \in \Omega_1$, por continuidad, $f(\sigma_p) \subseteq \Omega_1$. De esta forma, todos los elementos de la base de $H_p(\Omega)$ están en $H_p(\Omega_1)$ o en $H_p(\Omega_2)$; es decir,

$$H_p(\Omega) \cong H_p(\Omega_1) \oplus H_p(\Omega_2)$$

Proposición 1.3.3 Sea X un espacio topológico y $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ la familia de arcocomponentes de X .

$$H_*(X) \cong \sum_{\alpha \in A} H_*(X_\alpha)$$

Demostración. Consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi_k: \sum_{\alpha} S_k(X_\alpha) &\longrightarrow S_k(X) \\ (g_\alpha)_\alpha &\longmapsto \sum_{\alpha} g_\alpha \end{aligned}$$

Toda cadena singular $g \in S_k(X)$ admite una descomposición única como combinación lineal de k -símplices singulares. Dado que cada símplice va a parar a una única componente conexa de X , se sigue que $\Psi_k(g) = \Psi_k(h)$ implica $g = h$, por lo que Ψ_k es inyectiva.

Sea $\phi: \sigma_k \rightarrow X$ un k -símplice singular. Las aplicaciones continuas preservan la arcoconexión, por lo que $\phi(\sigma_k)$ está en alguna componente

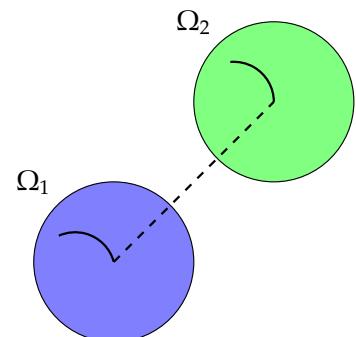


Figura 1.6: Los arcos de circunferencia son 1-símplices singulares de Ω , pero la línea discontinua uniéndolos no lo es, ya que se sale del espacio.

arcoc conexa $X_\alpha \subseteq X$. Por tanto, podemos hallar un $\phi_\alpha \in S_k(X_\alpha)$ tal que $\Psi_k(\phi_\alpha) = \phi$ y Ψ_k es sobreyectiva.

Dado $g = (g_\alpha)_\alpha$,

$$\Psi_k(\partial g) = \Psi_k(\partial^\alpha g_\alpha) = \sum_{\alpha \in A} \partial^\alpha g_\alpha = \partial \sum_{\alpha \in A} g_\alpha = \partial \Psi_k(g)$$

Se sigue que Ψ es aplicación de cadenas y

$$H_*(X) = H_*[S_*(X)] \cong H_* \left[\sum_{\alpha \in A} S_*(X_\alpha) \right]$$

Finalmente, aplicando 1.3.2,

$$H_* \left[\sum_{\alpha \in A} S_*(X_\alpha) \right] \cong \sum_{\alpha \in A} H_*[S_*(X_\alpha)] = \sum_{\alpha \in A} H_*(X_\alpha)$$

□

Como consecuencia de este resultado, podemos asumir que todo espacio topológico es arcoc conexo.

Sea X_α una arcocomponente de X y $x, y \in Z_0(X_\alpha)$. Si $a, b \in \mathbb{Z}$, $ax + by \in Z_0(X_\alpha)$. Teniendo en cuenta que $ax + by = a(x - y) + y(a + b)$,

$$[ax + by] = a[x - y] + (a + b)[y] = (a + b)[y] \implies H_0(X_\alpha) = \langle [y] \rangle$$

Si X tiene n arcocomponentes, existirán $y_i \in H_0(X_i)$ ($1 \leq i \leq n$) tales que

$$H_0(X) = \sum_{\alpha=1}^n \langle [y_\alpha] \rangle \cong \sum_{i=1}^n \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^n$$

1.3.3. Homología de un conjunto convexo

El objetivo de este apartado es probar el siguiente resultado:

Theorem 1.3.4 Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Dado un $p > 0$, $H_p(X) = 0$.

Lemma 1.3.5 Sea X un conjunto convexo. Dado un simplice singular $\phi: \sigma_p \rightarrow X$, la aplicación $T_p(\phi): \sigma_{p+1} \rightarrow X$ dada por

$$(t_0, \dots, t_{p+1}) \mapsto \begin{cases} (1-t_0)\phi\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_{p+1}}{1-t_0}\right) + t_0x & \text{si } t_0 < 1 \\ x & \text{si } t_0 = 1 \end{cases}$$

es un simplice singular.

Demostración. Si $t_0 < 1$,

$$\sum_{j=0}^{p+1} t_j = 1 \iff \sum_{j=1}^{p+1} t_j = 1 - t_0 \iff \sum_{j=1}^{p+1} \frac{t_j}{1-t_0} = 1 \quad (1.6)$$

por lo que los puntos de la forma $\frac{t_j}{1-t_0}$ están en σ_p y $T_p(\phi)$ está bien definida.

Sea $\tau_j = \frac{t_j}{1-t_0}$. La aplicación $T_p(\phi)$ es continua cuando $t_0 < 1$. Si $t_0 = 1$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|T_p(\phi)(t_0, \dots, t_{p+1}) - x\| &= \|(1-t_0)\phi(\tau_1, \dots, \tau_{p+1}) - (1-t_0)x\| \leq \\ &\leq (1-t_0)(\|\phi(\tau_1, \dots, \tau_{p+1})\| + \|x\|) \end{aligned}$$

Dado que ϕ es continua y σ_p es compacto, $\phi(\sigma_p)$ es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n , por lo que está acotado. Podemos encontrar un $M > 0$ tal que $\|\phi(\tau_1, \dots, \tau_{p+1})\|$, por lo que

$$0 \leq \|T_p(\phi)(t_0, \dots, t_{p+1}) - x\| \leq (1-t_0)(M + \|x\|)$$

De estas desigualdades, concluimos que

$$\lim_{t_0 \rightarrow 1} T_p(\phi)(t_0, \dots, t_{p+1}) = x$$

y $T_p(\phi)$ es un simplice singular. \square

Demostración del teorema. Dado un p -simplice singular ϕ , sea $T_p(\phi)$ el simplice definido en el lema 1.3.5. Queremos ver que

$$\phi = \partial T_p(\phi) + T_p(\partial\phi) \quad (1.7)$$

Por un lado, $\partial T_p(\phi)(t_0, \dots, t_p) = \phi(t_0, \dots, t_p)$, por lo que $\partial \circ T_p$ es la identidad. Por otro lado, dado $i = 1, \dots, p+1$,

$$\begin{aligned} T_p(\partial_{(i-1)}\phi)(t_0, \dots, t_p) &= (1-t_0)(\partial_{(i-1)}\phi)(\tau_1, \dots, \tau_p) + t_0x = \\ &= (1-t_0)\phi(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, 0, \tau_{i-1}, \dots, \tau_p) + t_0x = \\ &= T_p(\phi)(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_p) = \\ &= \partial_{(i)}T_p(\phi)(t_0, \dots, t_p) \end{aligned}$$

de forma que $\partial_{(i)}(T_p\phi) = T_p(\partial_{(i-1)}\phi)$. Combinando ambas identidades,

$$\begin{aligned} \partial T(\phi) &= \partial_{(0)}T(\phi) + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \partial_{(i)}(T_p\phi) = \\ &= \phi + \sum_{i=0}^p (-1)^{i+1} T_p(\partial_{(i)}\phi) = \phi - \sum_{i=0}^p (-1)^i T_p(\partial_{(i)}\phi) \end{aligned}$$

de donde se sigue la igualdad deseada.

Sea $z \in Z_p(X)$. Usando (1.7), $z = \partial T_p(z) + T_p(\partial z) = \partial T_p(z)$, por lo que $z \in B_p(X)$ y $H_p(X) = 0$. \square

1.4. Homotopías en el grupo de homología

Definition 1.4.1 Decimos que X es **contráctil** si existe un punto $p \in X$ y una homotopía F_p tal que

$$F_p: \text{id}_X \simeq \text{Cte}_p$$

Sea X un espacio contráctil. Por definición, existe un punto $p \in X$ y una homotopía $F: X \times [0, 1] \rightarrow X$ tales que $F: \text{id}_X \simeq \text{Cte}_p$. Si ahora consideramos dos puntos $x, y \in X$, podemos construir el camino $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ dado por

$$\alpha(t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } t < 1/2 \\ F(y, 1 - 2t) & \text{si } t \geq 1/2 \end{cases}$$

Observamos que $F(x, 1) = p = F(y, 1)$, de forma que α es continua en $t = 1/2$. Por tanto, podemos hallar un camino que conecta todo par de puntos en X , de forma que X es arcoconexo.

Example 1.4.1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Por ser convexo, dado un $a \in A$, el segmento $[0, a]$ está contenido en A . Eso nos permite definir la aplicación continua

$$\begin{aligned} F: A \times I &\longrightarrow A \\ (a, t) &\longmapsto (1-t)a \end{aligned} \tag{1.8}$$

por lo que $F: \text{id}_A \simeq \text{Cte}_0$

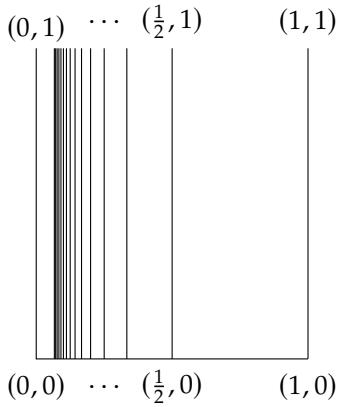


Figura 1.7: Primeras 15 iteraciones del peine del topólogo. La iteración w añade el segmento correspondiente a $x = 1/w$.

Example 1.4.2 Sea III (pronunciado *sh*) el peine del topólogo. Consideremos la aplicación continua

$$\begin{aligned} F: \text{III} \times I &\longrightarrow \text{III} \\ (x, y, t) &\longmapsto (x, (1-t)y) \end{aligned} \tag{1.9}$$

y la proyección sobre el eje de abscisas, $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. La aplicación F es una homotopía que baja las púas de III :

$$F: \text{id}_{\text{III}} \simeq (\pi \times \text{Cte}_0)$$

Dado que $\pi \simeq \text{Cte}_{(1,0)}$, III es un espacio contráctil.

Definition 1.4.2 Un subespacio A de X es un **retracto débil** si podemos hallar una aplicación continua $r: X \rightarrow A$ tal que $r|_A \simeq \text{id}_A$. Si podemos construir r de forma que $r|_A = \text{id}_A$, decimos que A es un **retracto fuerte** (o simplemente **retracto**) y r es una **retracción**.

Sea A un retracto de X y $r: X \rightarrow A$ una retracción. Por definición de retracto, si $i: A \hookrightarrow X$ es la inclusión,

$$r \circ i = \text{id}_A \implies \text{id}_{H_n(A)} = (1_A)_* = (r \circ i)_* = r_* \circ i_*$$

por lo que r_* es sobreyectiva e i_* es inyectiva.

Example 1.4.3 Sea D^2 la bola de centro $p = (0, 0)$ y radio 1 de \mathbb{R}^2 . Se considera la aplicación

$$\begin{aligned} r: D^2 - \{p\} &\longrightarrow S^1 \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|} \end{aligned} \tag{1.10}$$

La aplicación r es continua por ser cociente de funciones continuas. Además, $r|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$. Se sigue que S^1 es un retracto de $D^2 - \{p\}$.

Example 1.4.4 ([Spanier66], p. 28) Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$ el cuadrado unidad en \mathbb{R}^2 . La inclusión $i: \text{III} \hookrightarrow X$ define un retracto débil. Sin embargo, se puede probar que III no es un retracto fuerte de X .

Definition 1.4.3 Sea A un subespacio de X . Decimos que X es **deformable en A** si existe una aplicación continua $r: X \rightarrow A$ llamada **deformación** tal que $i \circ r \simeq \text{id}_X$, siendo $i: A \hookrightarrow X$ la inclusión.

Dado que $i \circ r \simeq \text{id}_X$, i_* es sobreyectiva y r_* es inyectiva.

Example 1.4.5 1. Sea $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección sobre el eje de abscisas. Tomando la aplicación $r(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, se tiene que $r \circ \pi: D^2 \rightarrow S^1$ es una deformación. No obstante, si tomamos el punto $(0, 1) \in S^1$,

$$(r \circ \pi)(0, 1) = r(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0) \neq (0, 1)$$

por lo que $r \circ \pi$ no es una retracción.

2. Sea X un espacio contráctil a un cierto punto q . Si A es un subespacio de X que contiene a q , se tiene que $\text{Cte}_q: X \rightarrow A$ es una deformación de X en A por definición de espacio contráctil. Por tanto, X es deformable en cualquier subespacio que contenga a q .

Definition 1.4.4 Decimos que un subespacio A es un **retracto por deformación fuerte** de X si podemos hallar una homotopía $F: X \times I \rightarrow X$ tal que

1. dado un $x \in X$, $F(x, 0) = x$;
2. $F(X, 1) \subseteq A$;
3. dado un $a \in A$ y un $t \in I$, $F(a, t) = a$.

En particular, observamos que un retracto por deformación fuerte describe tanto una deformación (ítem 2) como una retracción (ítem 3).

Example 1.4.6 El peine del topólogo no es un retracto por deformación fuerte del cuadrado unidad, ya que no es un retracto fuerte.

Sea $i: A \hookrightarrow X$ la inclusión. Si A es un retracto por deformación de X , X es deformable en A (i_* es un epimorfismo), pero A es un retracto de X (i_* es un monomorfismo). Por tanto, se tiene el siguiente corolario:

Corollary 1.4.1 Los retractos por deformación fuerte no alteran el tipo de homología de un espacio topológico.

1.4.1. Homotopías de cadenas

Sean C y D complejos de cadenas, con $f, g: C \rightarrow D$ aplicaciones de cadenas. Queremos hallar una condición suficiente para poder afirmar que f y g inducen el mismo homomorfismo entre $H_p(C)$ y $H_p(D)$. Una forma de comprobar esto es verificar que la aplicación de cadenas $\alpha = f - g: C \rightarrow D$ induce el homomorfismo nulo en homologías:

$$f_* = g_* \iff \alpha_* = f_* - g_* = 0$$

Sea $c \in Z_p(C) \leq C_p$. Supongamos que existe un $b \in D_{p+1}$ tal que $\alpha(c) = \partial b$. Por cómo se define $B_p(D)$, es inmediato que

$$\alpha_*([c]) = [\partial b] = 0 + B_p(D)$$

Existirá una homomorfismo $S: C_p \rightarrow D_{p+1}$ tal que $\alpha = \partial \circ S$. Pero esta no es una aplicación de cadenas, por lo que no sabemos si va a inducir un homomorfismo entre los grupos de homología.

Como S es un homomorfismo, $S(0) = 0$; así, si tomamos $T = S|_{Z_p(C)}$, se verifica que $\alpha = \partial \circ T + T \circ \partial$. Veamos que esta nueva definición de α conmuta con el operador borde:

$$\begin{aligned} \partial \circ \alpha &= \partial^2 \circ T + \partial \circ T \circ \partial = \partial \circ T \circ \partial = \\ &= \partial \circ T \circ \partial + T \circ \partial^2 = \alpha \circ \partial \end{aligned}$$

Por construcción, α_* es el homomorfismo nulo. Pero $\alpha = f - g$, por lo que hemos encontrado una condición suficiente para que f y g induzcan el mismo homomorfismo entre grupos de homología.

Definition 1.4.5 Sean C y D complejos de cadenas. Dos aplicaciones de cadenas $f, g: C \rightarrow D$ son **homotópicas** si existe un homomorfismo $T: C \rightarrow D$ de grado 1 tal que

$$f - g = \partial \circ T + T \circ \partial$$

La aplicación T recibe el nombre de **homotopía de cadenas** entre f y g .

1.4.2. Aplicaciones homotópicas

Theorem 1.4.2 (Teorema de invarianza homotópica de la homología)
Dadas dos aplicaciones continuas $f, g: X \rightarrow Y$ homotópicas, $f_* = g_*$.

Demostración. Sea $F: X \times I \rightarrow Y$ una homotopía entre f y g . Se definen las aplicaciones $\alpha, \beta: X \rightarrow X \times I$ dadas por las expresiones

$$\alpha(x) = (x, 0); \quad \beta(x) = (x, 1)$$

de forma que $f = F \circ \alpha$ y $g = F \circ \beta$.

Supongamos que existe una homotopía de cadenas $T: S_*(X) \rightarrow S_*(X \times I)$ entre α y β . T induce una homotopía de cadenas entre $f_\#$ y $g_\#$ de la

siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_{\#} - g_{\#} &= F_{\#} \circ \alpha_{\#} - F_{\#} \circ \beta_{\#} = F_{\#} \circ (\alpha_{\#} - \beta_{\#}) = \\ &= F_{\#} \circ (\partial \circ T + T \circ \partial) = (F_{\#} \circ \partial) \circ T + (F_{\#} \circ T) \circ \partial \end{aligned}$$

Como $F_{\#}$ es una aplicación de cadenas,

$$\begin{aligned} (F_{\#} \circ \partial) \circ T + (F_{\#} \circ T) \circ \partial &= (\partial \circ F_{\#}) \circ T + (F_{\#} \circ T) \circ \partial = \\ &= \partial \circ (F_{\#} \circ T) + (F_{\#} \circ T) \circ \partial \end{aligned}$$

por lo que $f_* = g_*$, que es lo que queríamos probar. Por tanto, bastará con probar que T existe.

Sea $\tau_n: \sigma_n \rightarrow \sigma_n$ la aplicación identidad. Procedemos a construir T de forma inductiva: supongamos que $X = \sigma_0$. El simplicial σ_0 es el espacio puntual formado por el punto 1, de forma que definimos la 0-cadena

$$c = \alpha_{\#}(\tau_0) - \beta_{\#}(\tau_0) = \alpha - \beta \in S_0(\sigma_0 \times I)$$

Como $S_0(\sigma_0 \times I) = Z_0(\sigma_0 \times I)$, c es un 0-ciclo.

Dado que σ_0 es un espacio puntual, podemos identificar α con $\alpha(1) = (1, 0)$ y β con $\beta(1) = (1, 1)$. Como $\sigma_0 \times I$ es arcoconexo, existe un camino

$$b: I \rightarrow \sigma_0 \times I$$

tal que $b(0) = (1, 0) \equiv \alpha$ y $b(1) = (1, 1) \equiv \beta$. Se sigue que $c = \partial b$. Definimos entonces $T_{\sigma_0}(\tau_0) := b$.

Si X es un espacio topológico arbitrario y $\phi: \sigma_0 \rightarrow X$ un 0-simplicial singular, definimos

$$T_X(\phi) := (\phi \times \text{id}_I)_{\#}(T_{\sigma_0}(\tau_0))$$

La aplicación T_X induce un homomorfismo de $S_0(X)$ en $S_1(X \times I)$ de forma única.

Sea X un espacio topológico arbitrario y $n > 0$. Supongamos construida para todo $i < n$ una aplicación $T_X: S_i(X) \rightarrow S_{i+1}(X \times I)$ que verifique las siguientes condiciones:

1. $\partial \circ T_X + T_X \circ \partial = \alpha_{\#} - \beta_{\#}$ (\star) ,
2. $T_X \circ h_{\#} = (h_{\#} \times 1_I) \circ T_X$ para toda aplicación continua $h: X \rightarrow Y$.

Dado un $d \in S_n(\sigma_n)$, $\partial d \in S_{n-1}(\sigma_n)$, por lo que la cadena singular

$$c = \alpha_{\#}(d) - \beta_{\#}(d) - T_{\sigma_n}(\partial d) \tag{1.11}$$

está bien definida por hipótesis de inducción. Si calculamos ∂c ,

$$\begin{aligned} \partial c &= \partial \alpha_{\#}(d) - \partial \beta_{\#}(d) - \partial T_{\sigma_n}(\partial d) \stackrel{(\star)}{=} \\ &= \partial \alpha_{\#}(d) - \partial \beta_{\#}(d) - \partial \alpha_{\#}(d) + \partial \beta_{\#}(d) + T_{\sigma_n}(\partial^2 d) = 0 \end{aligned}$$

por lo que $c \in Z_n(\sigma_n \times I)$. Dado que $\sigma_n \times I$ es convexo,

$$H_n(\sigma_n \times I) = 0 \iff Z_n(\sigma_n \times I) = B_n(\sigma_n \times I)$$

por lo que $c \in B_n(\sigma_n \times I)$. Existirá entonces un $b \in S_{n+1}(\sigma_n \times I)$ tal que $\partial b = c$. Se define $T_{\sigma_n}(d) = b$.

Al igual que hicimos en el caso $n = 0$, definimos

$$T_X(\phi) = (\phi \times \text{id}_I)_\#(T_{\sigma_n}(\tau_n))$$

Nos queda ver que T_X verifica las dos condiciones descritas en la hipótesis de inducción.

Veamos que T_{σ_n} verifica la condición (\star) :

$$\begin{aligned} \partial T_{\sigma_n}(d) + T_{\sigma_n}(\partial d) &= \partial b + T_{\sigma_n}(\partial d) = c + T_{\sigma_n}(\partial d) \stackrel{(1.11)}{=} \\ &= \alpha_\#(d) - \beta_\#(d) - T_{\sigma_n}(\partial d) + T_{\sigma_n}(\partial d) = \\ &= \alpha_\#(d) - \beta_\#(d) \end{aligned}$$

Como la elección de d es arbitraria, se deduce que $\partial \circ T_{\sigma_n} + T_{\sigma_n} \circ \partial = \alpha_\# - \beta_\#$.

Sea $\phi: \sigma_p \rightarrow X$ un p -símplice singular. Antes de probar la primera condición, notar que $\phi_\#(\tau_n) = \phi \circ \tau_n = \phi$, por lo que

$$(T_X \circ \phi_\#)(\tau_n) = T_X(\phi) = (\phi \times 1_I)_\# T_{\sigma_n}(\tau_n) \quad (1.12)$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \partial T_X(\phi) + T_X(\partial \phi) &= [\partial \circ (\phi \times \text{id}_I)_\# \circ T_{\sigma_n}](\tau_n) + (T_X \circ \partial \circ \phi_\#)(\tau_n) = \\ &= [\partial \circ (\phi \times \text{id}_I)_\# \circ T_{\sigma_n}](\tau_n) + (T_X \circ \phi_\#)(\partial \tau_n) \stackrel{(1.12)}{=} \\ &= [\partial \circ (\phi \times \text{id}_I)_\# \circ T_{\sigma_n}](\tau_n) + [(\phi \times 1_I)_\# \circ T_{\sigma_n}](\partial \tau_n) = \\ &= [(\phi \times \text{id}_I)_\# \circ \partial \circ T_{\sigma_n}](\tau_n) + [(\phi \times 1_I)_\# \circ T_{\sigma_n}](\partial \tau_n) = \\ &= [(\phi \times \text{id}_I)_\# \circ (\partial \circ T_{\sigma_n} + T_{\sigma_n} \circ \partial)](\tau_n) \stackrel{(\star)}{=} \\ &= (\phi \times \text{id}_I)_\#(\alpha_\# - \beta_\#)(\tau_n) \end{aligned}$$

Observamos que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \sigma_n & \xrightarrow{\alpha} & \sigma_n \times I \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \times \text{id}_I \\ X & \xrightarrow{\alpha} & X \times I \end{array} \quad (1.13)$$

$$\begin{array}{ccc} \sigma_n & \xrightarrow{\beta} & \sigma_n \times I \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \times \text{id}_I \\ X & \xrightarrow{\beta} & X \times I \end{array} \quad (1.14)$$

son conmutativos, por lo que también comutan cuando los convertimos en aplicaciones de cadenas. De aquí se sigue que

$$[(\phi \times \text{id}_I)_\# \circ (\alpha_\# - \beta_\#)](\tau_n) = [(\alpha_\# - \beta_\#) \circ \phi_\#](\tau_n) = (\alpha_\# - \beta_\#)(\phi)$$

por lo que $\partial \circ T_X + T_X \circ \partial = \alpha_\# - \beta_\#$.

Para la segunda condición, consideramos $h: X \rightarrow W$ continua y $\phi \in$

$S_n(X)$:

$$\begin{aligned}
 T_W[h_\#(\phi)] &= (T_W \circ h_\# \circ \phi_\#)(\tau_n) = [T_W \circ (h \circ \phi)_\#](\tau_n) \stackrel{(1.12)}{=} \\
 &= [(h \circ \phi) \times \text{id}_I]_\#[T_{\sigma_n}(\tau_n)] = \\
 &= [(h \times \text{id}_I) \circ (\phi \times \text{id}_I)]_\#[T_{\sigma_n}(\tau_n)] = \\
 &= [(h \times \text{id}_I)_\# \circ (\phi \times \text{id}_I)_\#][T_{\sigma_n}(\tau_n)] \stackrel{(1.12)}{=} \\
 &= (h \times 1_I)[T_X(\phi)]
 \end{aligned}$$

por lo que se cumple la segunda condición.

De esta forma, se construye una homotopía de cadenas entre α y β . \square

Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Decimos que f es una **equivalencia de homotopía** si existe una aplicación $g: Y \rightarrow X$, llamada **inversa homotópica**, tal que

$$f \circ g \simeq 1_Y; \quad g \circ f \simeq 1_X$$

Corollary 1.4.3 Si $f: X \rightarrow Y$ es una equivalencia de homotopía,

$$f_*: H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$$

es un isomorfismo de grado 0. En particular, si X es un espacio contráctil,

$$H_n(X) \cong H_n(\{\star\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

1.5. Sucesiones exactas

Definition 1.5.1 Una colección de grupos y homomorfismos

$$G_0 \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_2} G_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_n} G_n$$

es una **sucesión exacta finita** si $\text{Im } f_j = \ker f_{j+1}$ para todo j .

Si $n = 4$ y $G_0 = 0 = G_4$, se obtiene una sucesión exacta finita de la forma

$$0 \rightarrow G_1 \xrightarrow{f_2} G_2 \xrightarrow{f_3} G_3 \rightarrow 0$$

En este caso, hablamos de **sucesión exacta corta**. Notar que, por definición de sucesión exacta, f_2 es un monomorfismo (su núcleo es el grupo 0) y f_3 es un epimorfismo (su imagen es todo G_3).

Definition 1.5.2 Una colección de grupos y homomorfismos

$$G_0 \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_2} G_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_n} G_n \xrightarrow{f_{n+1}} \dots$$

es una sucesión exacta larga si $\text{Im } f_j = \ker f_{j+1}$ para todo j .

Sean C, D, E complejos de cadenas. Considérese la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0 \quad (1.15)$$

siendo f y g aplicaciones de cadenas de grado 0. Por ser aplicaciones de cadenas, dado un $p \geq 0$, podemos construir el diagrama

$$H_p(C) \xrightarrow{f_*} H_p(D) \xrightarrow{g_*} H_p(E)$$

Esta secuencia no es exacta, ya que f_* (resp. g_*) podría no ser inyectiva (resp. sobreyectiva). Lo que sí se cumple es que $\text{Im } f_* = \ker g_*$.

Para ver esta identidad, sea $c \in Z_p(C)$. Usando que (1.15) es una secuencia exacta,

$$(g \circ f)_*([c]) = [(g \circ f)(c)] = 0$$

por lo que $\text{Im } f_* \leq \ker g_*$.

Análogamente, sea $[z] \in \ker g_* \leq H_p(D)$. Sabemos que $[g(z)] = 0$, por lo que $g(z) = \partial d$ para algún $d \in D_{p+1}$. Como $g: D_{p+1} \rightarrow E_{p+1}$ es sobreyectivo, podemos hallar un $y \in D_{p+1}$ tal que $d = g(y)$. Dado que g es aplicación de cadenas,

$$g(z) = \partial d = \partial g(y) = g(\partial y) \implies z - \partial y \in \ker g$$

Usando $\ker g = \text{Im } f$, existirá un $x \in C_p$ tal que $z - \partial y = f(x)$. Como $[z] \in H_p(D)$, $z \in Z_p(D)$, luego

$$f(\partial x) = \partial f(x) = \partial z - \partial^2 y = 0 \implies \partial x \in \ker f$$

Pero f es un monomorfismo, luego $\partial x = 0$ y $x \in Z_p(C)$. Esto nos permite tomar clases módulo $B_p(C)$: usando $f(x) = z - \partial y$,

$$f_*([x]) = [z - \partial y] = [z]$$

Por tanto, $[z] \in \text{Im } f_*$, luego $\ker g_* \leq \text{Im } f_*$.

Para poder generar una sucesión exacta larga, vamos a introducir un homomorfismo $\Delta: H_*(E) \rightarrow H_*(C)$ (llamado **homomorfismo de conexión**) que nos permita conectar $H_n(D)$ con $H_{n-1}(C)$. El resultado será una secuencia exacta

$$\dots \xrightarrow{\Delta} H_n(C) \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C) \xrightarrow{f_*} \dots$$

Sea $z \in Z_n(E)$. Como $g: D \rightarrow E$ es un epimorfismo de grado 0, existe un $d \in D_n$ tal que $z = g(d)$. Como $z \in \ker \partial$ y g es aplicación de cadenas,

$$g(\partial d) = 0 \implies \partial d \in \ker g = \text{Im } f$$

A su vez, $f: C \rightarrow D$ es un homomorfismo de grado 0. Existirá un $c \in C_{n-1}$ tal que $\partial d = f(c)$. Pero f es aplicación de cadenas inyectiva, por lo que

$$0 = \partial d = \partial f(c) = f(\partial c) \implies c \in \ker f = 0 \implies c \in Z_{n-1}(C)$$

Esto define una correspondencia $\delta: z \mapsto c$ que depende implícitamente de d .

Proposition 1.5.1 La aplicación $\Delta: H_*(Z) \longrightarrow H_*(C)$ dada por $\Delta([z]) = [\delta c]$ está bien definida y es un homomorfismo.

Demostración. Sean $z, z' \in Z_n(E)$ con $z - z' \in B_n(E)$. Existe un $e \in E_{n+1}$ tal que $\partial e = z - z'$.

Sean $d, d' \in D_n$ tales que $g(d) = z$ y $g(d') = z'$, y sean $c, c' \in C_n$ tales que $\partial d = f(c)$ y $\partial d' = f(c')$. Dado que g es un epimorfismo, existe un $a \in D_{n+1}$ tal que $g(a) = e$. Como g es aplicación de cadenas,

$$g(\partial a) = \partial e = z - z' = g(d - d')$$

de donde se sigue que $d - d' - \partial a \in \ker g = \text{Im } f$. Podemos elegir entonces un $b \in C_n$ tal que $f(b) = d - d' - \partial a$. Usando que f es aplicación de cadenas,

$$f(\partial b) = \partial(d - d' - \partial a) = \partial(d - d') = f(c - c')$$

por lo que $\partial b - c - c' \in \ker f$.

Usando que f es inyectiva, concluimos que $c - c' = \partial b \in B_{n-1}(C)$. \square

Theorem 1.5.2 Sean C, D, E complejos de cadenas y

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$$

una sucesión exacta corta. Si $\Delta: H_*(E) \rightarrow H_*(C)$ es un homomorfismo de conexión,

$$H_n(C) \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C)$$

es una sucesión exacta larga.

Demostración. La demostración consiste en dos pasos: probar que $\text{Im } g_* = \ker \Delta$ y que $\text{Im } \Delta = \ker f_*$. Empecemos por la primera igualdad: dado un $[z] \in \text{Im } g_*$, existe un $d \in Z_n(D)$ tal que $[g(d)] = [z]$. Dado que g es aplicación de cadenas y z es un n -ciclo,

$$0 = \partial z = g(\partial d) \implies \partial d \in \ker g_* = \text{Im } f_*$$

Existirá un $c \in C_{n-1}$ de forma que $\partial d = f(c)$, por lo que $\Delta([z]) = [c]$. Por otro lado,

$$d \in Z_n(D) \implies \partial d = 0 \implies f(c) = 0$$

pero f es un monomorfismo, así que $c = 0$. Esto nos lleva a que $z \in \ker \Delta$.

Sea $[z] \in \ker \Delta$. Existe un $d \in D_n$ de forma que $g(d) = z$ y $f(c) = \partial d$. En particular, podemos tomar $c = 0$, ya que la clase de c será la del 0. Esto implica que

$$\partial d = 0 \implies d \in Z_n(D) \iff [d] \in H_n(D)$$

De aquí se sigue que $g_*([d]) = [g(d)] = [z]$.

Sea $[c] \in \text{Im } \Delta$. Existe un $z \in Z_n(E)$ tal que $[c] = \Delta([z])$, luego existirá un $d \in D_n$ de forma que $f(c) = d$ y $g(d) = z$. Ahora bien,

$$f(c) = \partial d \implies f(c) \in B_n(D) \iff [f(c)] = 0$$

Pero $[f(c)] = f_*([c])$, luego $[c] \in \ker f_*$.

Sea $[c] \in \ker f_*$. Sabemos que $f(c) \in B_n(D)$, luego existirá un $d \in D_n$ tal que $f(c) = \partial d$. Sea $z = g(d) \in E_n$. Como $\ker g = \text{Im } f$, $\partial z = g(\partial d) = (g \circ f)(c) = 0$. De aquí se tiene que $z \in Z_n(E)$ y

$$\Delta([z]) = [c] \implies [c] \in \text{Im } \Delta$$

□

2

Sucesiones de Mayer-Vietoris

2.1. Espacios de Mayer-Vietoris

Dado un espacio topológico X y una familia de subconjuntos $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de X , definimos

$$\mathring{\mathcal{U}} = \{\mathring{U} : U \in \mathcal{U}\}$$

Diremos que un par (X, \mathcal{U}) es un **espacio de Mayer-Vietoris** si $\mathring{\mathcal{U}}$ es un recubrimiento de X .

Sea (X, \mathcal{U}) un espacio de Mayer-Vietoris y $A \subseteq X$. Diremos que $\phi : \sigma_n \rightarrow X$ es un \mathcal{U} -símplex si $\phi(\sigma_n) \subset U$ para algún $U \in \mathcal{U}$. Dado un $n > 0$, definimos el grupo $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ como el subgrupo de $S_n(X)$ generado por los \mathcal{U} -símplices de X . Si ϕ es un \mathcal{U} -símplex y $0 \leq i \leq n$, observamos que

$$\partial_{(i)}\phi(\sigma_{n-1}) \subseteq \phi(\sigma_n)$$

por lo que las caras de un \mathcal{U} -símplex son de nuevo \mathcal{U} -símplices y $S_*^{\mathcal{U}}(X)$ es un subcomplejo de cadenas de $S_*(X)$. Además, la inclusión $i : S_*^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S_*(X)$ es claramente una aplicación de cadenas.

Sea (Y, \mathcal{V}) otro espacio de Mayer-Vietoris. Una aplicación $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ es una **aplicación de Mayer-Vietoris** si, dado un $U \in \mathcal{U}$, existe un $V \in \mathcal{V}$ tal que $f(U) \subseteq V$. Si f es una aplicación de Mayer-Vietoris y ϕ es un \mathcal{U} -símplex, existirá un $V \in \mathcal{V}$ tal que $f_*(\phi)(\sigma_p) \subseteq V$, por lo que f induce una aplicación de cadenas

$$f_* : S_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S_*^{\mathcal{V}}(Y)$$

Theorem 2.1.1 ([Vick94], Apéndice I) *Sea (X, \mathcal{U}) un espacio de Mayer-Vietoris. La aplicación $i_* : H_n(S_n^{\mathcal{U}}(X)) \rightarrow H_n(X)$ es un isomorfismo.*

Sea $\mathcal{U} = \{U, V\}$. Si denotamos como A (resp. B) al conjunto de n -símplices singulares sobre U (resp. V),

$$\begin{aligned} S_n(U) &= F(A); & S_n(X) &= F(A \cup B); \\ S_n(V) &= F(B); & S_n(U \cap V) &= F(A \cap B) \end{aligned}$$

Consideremos las aplicaciones $g : F(A \cap B) \rightarrow F(A) \oplus F(B)$ y $h : F(A) \oplus F(B) \rightarrow F(A \cup B)$ dadas por

$$g(\alpha) = (\alpha, -\alpha); \quad h(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$$

Es fácil ver que g es inyectivo y h es sobreyectivo.

2.1 Espacios de Mayer-Vietoris	27
2.2 Grupo de homología de S^1	29
2.2.1 Grupo de homología de S^n	31
2.3 Grupo de homología de la figura ocho	32
2.3.1 La rosa del topólogo	34
2.4 Grupo de homología del toro	35

Subcomplejo de cadenas

Sea $C = (C, d)$ un complejo de cadenas. Un subcomplejo de cadenas de C es un subgrupo graduado $C' \leq C$ tal que $d_n(C'_n) \leq C'_{n-1}$ para todo n .

Proposition 2.1.2 La secuencia

$$0 \longrightarrow S_n(U \cap V) \xrightarrow{g} S_n(U) \oplus S_n(V) \xrightarrow{h} S_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta.

Demostración. Por un lado, dado $c \in F(A \cap B)$,

$$(h \circ g)(c) = h(c, -c) = 0$$

por lo que $\text{Im } g \leq \text{Im } h$. Por otro lado, como h es sobreyectivo, existen $a \in F(A)$ y $b \in F(B)$ tales que

$$0 = h(a, b) = a + b \iff a = -b \in F(B)$$

Esto implica que $a \in F(A \cap B)$ y

$$(a, b) = (a, -a) = g(a)$$

por lo que $\ker h \leq \text{Im } g$. □

Definimos $S_*(U) \oplus S_*(V) := \{S_n(U) \oplus S_n(V) : n \in \mathbb{Z}\}$, de forma que la sucesión exacta anterior da lugar a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S_*(U \cap V) \xrightarrow{g} S_*(U) \oplus S_*(V) \xrightarrow{h} S_*^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

Vamos a aplicar el 1.5.2 para obtener una sucesión exacta en homología a partir de esta sucesión exacta corta. Para ello, observamos que

$$H_n(S_*(U) \oplus S_*(V)) \cong H_n(S_*(U)) \oplus H_n(S_*(V)) \cong H_n(U) \oplus H_n(V)$$

Además, el teorema 2.1.1 nos dice que $H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X)) \cong H_n(X)$.

Definition 2.1.1 Sea (X, \mathcal{U}) un espacio de Mayer-Vietoris con $\mathcal{U} = \{U, V\}$. Si $\Delta: H_*(X) \rightarrow H_*(U \cap V)$ es el homomorfismo de conexión, se define la **sucesión de Mayer-Vietoris** asociada a \mathcal{U} como la sucesión exacta

$$H_n(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{h_*} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V)$$

El siguiente resultado establece una condición suficiente para saber cuándo dos 1-simplices singulares son homólogos.

Lemma 2.1.3 Dados dos lazos homotópicos $f, g: [0, 1] \rightarrow X$, $[f] = [g]$.

Demostración. Como sabemos por el 1.2.2, f y g se identifican con 1-ciclos de X por ser caminos cerrados, por lo que $f, g \in Z_1(X)$. Sean

$$F: f \simeq g$$

y \sim la relación de equivalencia dada por $(t, 0) \sim (t, 1)$ con $t \in [0, 1]$. El espacio cociente $C = [0, 1]^2 / \sim$ describe un cilindro plano.

Consideremos la aplicación $F_C: C \rightarrow X$ inducida por F . Podemos identificar F con F_C , dado que f y g son lazos. Dividimos C en dos simplices orientados c_1 y c_2 , como se muestra en la Figura ??.

Sean $\alpha, \beta: \sigma_2 \rightarrow C$ los simplices singulares

$$\alpha(t_0, t_1, t_2) = [(t_0, t_1)]; \quad \beta(t_0, t_1, t_2) = [(t_0 + t_1, t_0 + t_2)]$$

Usando que $(t, 0) \sim (t, 1)$,

$$\begin{aligned} \partial(\beta - \alpha)(t_0, t_1) &= [(1, t_0)] - [(0, t_0)] + [(t_0, 0)] - [(t_0, 0)] = \\ &= [(1, t_0)] - [(0, t_0)] \end{aligned}$$

Si ahora consideramos $F_{\#}: S_*(C) \rightarrow S_*(X)$,

$$\begin{aligned} \partial[F_{\#}(\beta - \alpha)](t_0, t_1) &= F_{\#}[\partial(\beta - \alpha)](t_0, t_1) = \\ &= F(1, t_0) - F(0, t_0) = f(t_0) - g(t_0) \end{aligned}$$

Dado que $F_{\#}(\beta - \alpha) = F_{\#}(\beta) - F_{\#}(\alpha)$ es un 2-símplice singular de X , se deduce que $f - g \in B_1(X)$. Por tanto, f y g son caminos homólogos. \square

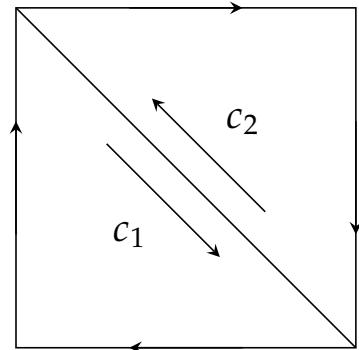


Figura 2.1: C queda dividido en dos triángulos, A y B , a los cuales asignamos orientaciones contrarias.

2.2. Grupo de homología de S^1

Sean $U = S^1 \setminus \{(1, 0)\}$ y $V = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$. El espacio $U \cap V$ es la unión disjunta de dos arcos de circunferencia, C_1 y C_2 , que son conjuntos arcoconexos. Aplicando la 1.3.3,

$$H_n(U \cap V) \cong H_n(C_1) \oplus H_n(C_2)$$

para todo $n \geq 0$.

En particular, el espacio puntual es un retracto por deformación fuerte de C_1 y C_2 . Usando el corolario 1.4.1 y el axioma de la dimensión,

$$H_n(C_1) \cong H_n(C_2) \cong H_n(\{\star\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Por otro lado, U y V son arcos de circunferencia, por lo que el mismo razonamiento nos lleva a que

$$H_n(U) \cong H_n(V) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Consideremos el siguiente tramo de la sucesión de Mayer-Vietoris asociada a este recubrimiento:

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(U) \oplus H_1(V) & \xrightarrow{h_1} & H_1(S^1) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_0(U \cap V) & & (2.1) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ 0 & \longrightarrow & H_1(S^1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & & \end{array}$$

Como la sucesión es exacta, $\text{Im } h_1 = 0$, luego $\ker_1 \Delta = \text{Im } h_1 = 0$, de forma que Δ es un monomorfismo. Se sigue que

$$H_1(S^1) \cong \text{Im } \Delta = \ker g_1 \leq H_0(U \cap V) \cong \mathbb{Z}^2$$

Como $H_1(S^1) \cong \ker g_*$, podemos calcular dicho grupo estudiando cómo se comporta el homomorfismo g_* .

Sea $w \in Z_0(U \cap V)$ y $[w]$ su clase módulo $B_0(U \cap V)$. Existirán $x, y \in U \cap V$, uno en cada componente conexa, y $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $[w] = [ax + by]$. Considérense las aplicaciones inclusión

$$i_*: H_0(U \cap V) \hookrightarrow H_0(U); \quad j_*: H_0(U \cap V) \hookrightarrow H_0(V)$$

Si $[w] \in \ker g_*$, se tiene que

$$0 = g_*([w]) = (i_*([w]), -j_*([w])) \iff \begin{cases} i_*([w]) = 0 \\ j_*([w]) = 0 \end{cases}$$

Pero $i_*([w]) \in H_0(U)$, por lo que $i_*([x])$ es homólogo a $i_*([y])$ y

$$0 = i_*([ax + by]) = i_*([ax + bx]) = (a + b)i_*([x]) \iff a + b = 0$$

De aquí se tiene entonces que los elementos de $\ker g_*$ son de la forma $[ax - ay]$ con $a \in \mathbb{Z}$. Por tanto,

$$H_1(S^1) = \ker g_* = \langle [x - y] \rangle \cong \mathbb{Z}$$

Sea $n > 1$. Se tiene la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{h_n} & H_n(S^1) & \xrightarrow{\Delta_n} & H_{n-1}(U \cap V) & & \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ 0 & \longrightarrow & H_n(S^1) & \longrightarrow & 0 & & \end{array} \quad (2.2)$$

Como esta sucesión es exacta, $\ker \Delta_n = \text{Im } h_n = 0$. Por el primer teorema de isomorfía,

$$H_n(S^1) \cong \frac{H_n(S^1)}{0} = \frac{H_n(S^1)}{\ker \Delta_n} \cong \text{Im } \Delta_n = 0$$

Theorem 2.2.1

$$H_n(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n < 2 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \quad \beta_n(S^1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n < 2 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\chi(S^1) = 1 - 1 = 0$$

Habíamos visto en el 1.4.5 que S^1 es una deformación de D^2 y un retracto de $D^2 \setminus \{(0, 0)\}$. En general, esto es válido para cualquier $p \in (D^2)^o$, no sólo para $p = (0, 0)$, pero S^1 **no** es un retracto de todo D^2 .

Supongamos que existe un retracto $r: D^2 \rightarrow S^1$: todo retracto induce un epimorfismo $r_*: H_1(D^2) \rightarrow H_1(S^1)$ en homología. El grupo $H_1(D^2)$ es 0 porque D^2 es un conjunto convexo, y acabamos de ver que $H_1(S^1)$ tiene rango 1. Dado que r_* es un epimorfismo, si llamamos α al generador de $H_1(S^1)$, existirá un $b \in H_1(D^2)$ tal que $r_*(b) = \alpha$.

Dado que $b \in H_1(D^2) = 0$, $b = 0$, por lo que $\alpha = r_*(b) = 0$. Pero eso es imposible, ya que α es el generador de un grupo no trivial. Por tanto, no existen retracciones de D^2 en S^1 .

2.2.1. Grupo de homología de S^n

La n -esfera se define como el conjunto $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de puntos x tales que $\|x\|^2 = 1$. Si $\mathcal{N} = (0, \dots, 0, 1)$ y $\mathcal{S} = (0, \dots, 0, -1)$, consideraremos el recubrimiento dado por $U = S^n \setminus \mathcal{N}$ y $V = S^n \setminus \mathcal{S}$.

Podemos ver S^{n-1} como el ecuador de S^n (i.e. el subespacio de S^n dado por $x_{n+1} = 0$), en cuyo caso la inclusión $i: S^{n-1} \hookrightarrow U \cap V$ es una equivalencia de homotopía y

$$H_*(U \cap V) \cong H_*(S^{n-1})$$

Por otro lado, U y V son contractos retráctiles, por lo que tienen el tipo de homología de un punto.

Supongamos por hipótesis de inducción que, para $n-1 \geq 1$,

$$H_m(S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0, n-1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Consideremos el siguiente tramo de la sucesión de Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccc} H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{h_n} & H_n(S^n) \\ & \downarrow \Delta_n & \\ H_{n-1}(U \cap V) & \xrightarrow{g_n} & H_{n-1}(U) \oplus H_{n-1}(V) \end{array} \quad (2.3)$$

Esta sucesión es equivalente a

$$0 \longrightarrow H_n(S^n) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow 0 \quad (2.4)$$

de donde se sigue que $\ker \Delta_n = 0$ y $H_n(S^n) \cong \text{Im } \Delta_n = H_{n-1}(S^{n-1})$.

Para $m > n$, el tramo

$$H_m(U) \oplus H_m(V) \xrightarrow{h_m} H_m(S^n) \xrightarrow{\Delta_m} H_{m-1}(U \cap V) \quad (2.5)$$

es equivalente a

$$0 \longrightarrow H_m(S^n) \xrightarrow{\Delta_m} 0 \quad (2.6)$$

por lo que $\ker \Delta_m = 0 = \text{Im } \Delta_m$ y $H_m(S^n) = 0$.

Para $m = 1$,

$$\begin{array}{ccc} H_1(U) \oplus H_1(V) & \xrightarrow{h_n} & H_1(S^n) \\ & \downarrow \Delta_1 & \uparrow h_0 \\ H_0(U \cap V) & \xrightarrow{g_0} & H_0(U) \oplus H_0(V) \end{array} \quad (2.7)$$

es equivalente a

$$0 \longrightarrow H_1(S^n) \xrightarrow{\Delta_m} \mathbb{Z} \xrightarrow{g_0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{h_0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (2.8)$$

Usando exactitud, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \cong \text{Im } h_0 &\cong \frac{\mathbb{Z}^2}{\ker h_0} \implies \ker h_0 \cong \mathbb{Z}; \\ \mathbb{Z} \cong \ker h_0 = \text{Im } g_0 &\cong \frac{\mathbb{Z}}{\ker g_0} \implies \ker g_0 = 0 \end{aligned}$$

por lo que

$$H_1(S^n) \cong \frac{H_1(S^n)}{\ker \Delta_1} \cong \text{Im } \Delta_1 = \ker g_0 = 0$$

Supongamos que $n > 2$: para $n > m > 1$,

$$H_m(U) \oplus H_m(V) \xrightarrow{h_m} H_m(S^n) \xrightarrow{\Delta_m} H_{m-1}(U \cap V) \quad (2.9)$$

es equivalente a

$$0 \longrightarrow H_m(S^n) \xrightarrow{\Delta_m} 0 \quad (2.10)$$

Por exactitud, $\ker \Delta_m = 0 = \text{Im } \Delta_m$ y $H_m(S^n) = 0$. Por tanto,

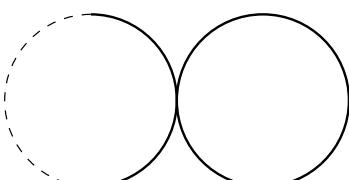
$$H_m(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0, n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Theorem 2.2.2

$$H_m(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0, n \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \beta_m(S^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0, n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

2.3. Grupo de homología de la figura ocho

Dados $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, sea $C(z, r)$ el conjunto de puntos $w \in \mathbb{C}$ tales que $|z-w| = r$. Definimos la figura 8 como la unión de las circunferencias tangentes $C(-1, 1)$ y $C(1, 1)$. La figura 8 define un espacio de Mayer-Vietoris tomando $U, V \subset \mathbb{8}$ de forma que S^1 sea un retracto for de deformación fuerte de ambos espacios (ver Figura 2.2).



En particular, $U \cap V$ serán dos arcos tangentes. Por construcción,

$$H_*(U) \cong H_*(V) \cong H_*(S^1)^2; \quad H_*(U \cap V) \cong H_*(\{\star\})$$

Figura 2.2: Figura ocho en línea discontinua, con un posible conjunto U dibujado en línea sólida gruesa.

Para $n > 1$, se tiene la sucesión exacta corta

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(U \cap V) & \xrightarrow{g_n} & H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{h_n} & H_n(\mathbb{8}) & \xrightarrow{\Delta_n} & H_{n-1}(U \cap V) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_n(\mathbb{8}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.11)$$

Por exactitud,

$$0 = \text{Im } h_n \cong \frac{H_n(\mathbb{8})}{\ker h_n} = \frac{H_n(\mathbb{8})}{\text{Im } g_n} \cong H_n(\mathbb{8})$$

Consideremos el siguiente tramo:

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(U \cap V) & \xrightarrow{g_1} & H_1(U) \oplus H_1(V) & \xrightarrow{h_1} & H_1(\mathbb{8}) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_0(U \cap V) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & H_1(\mathbb{8}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array} \quad (2.12)$$

Por exactitud,

$$\frac{H_1(\mathbb{8})}{\ker \Delta_1} \cong \text{Im } \Delta_1 = \ker g_0; \quad \ker \Delta_1 = \text{Im } h_1 \cong \frac{\mathbb{Z}^2}{\ker h_1} \cong \mathbb{Z}^2;$$

Es decir,

$$\ker g_0 \cong \frac{H_1(\mathbb{8})}{\mathbb{Z}^2} \quad (2.13)$$

Consideremos el siguiente tramo:

$$\begin{array}{ccccccc} H_0(U \cap V) & \xrightarrow{g_0} & H_0(U) \oplus H_0(V) & \xrightarrow{h_0} & H_0(\mathbb{8}) & \xrightarrow{\Delta_0} & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.14)$$

Por exactitud,

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \cong \ker \Delta_0 = \text{Im } h_0 \cong \frac{\mathbb{Z}^2}{\ker h_0} &\implies \ker h_0 \cong \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \cong \ker h_0 = \text{Im } g_0 \cong \frac{\mathbb{Z}}{\ker g_0} &\implies \ker g_0 = 0 \end{aligned}$$

Aplicando esta información en la ecuación (2.13), concluimos que $H_1(\mathbb{8}) \cong \mathbb{Z}^2$.

Theorem 2.3.1

$$H_n(\mathbb{8}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \quad \beta_n(\mathbb{8}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{X}(\mathbb{8}) = 1 - 2 = -1$$

2.3.1. La rosa del topólogo

La figura ocho se puede construir utilizando cocientes, lo que nos permite generalizar esta construcción. Sean $p \in \mathbb{R}^2$ y $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado. Si

$$R = \partial I \sqcup \partial I \sqcup \{p\}$$

la figura ocho antes descrita se puede representar como

$$\frac{I \sqcup \{p\} \sqcup I}{R}$$

Podemos extender esta construcción para añadir tantos lóbulos como queramos, de forma que conseguimos una figura llamada **rosa** o **búqué**.

Dado un $n > 0$, se define la rosa de n pétalos (B_n) como

$$\begin{aligned} J_1 &= I \sqcup \{p\}; & R_1 &= \{p\} \sqcup \partial I; & B_1 &= \frac{J_1}{R_1} \cong S^1; \\ J_2 &= J_1 \sqcup I; & R_2 &= R_1 \sqcup \partial I; & B_2 &= \frac{J_2}{R_2} \cong \mathbb{S}; \\ &\dots &&\dots &&\dots \\ J_n &= J_{n-1} \sqcup I; & R_n &= R_{n-1} \sqcup \partial I; & B_n &= \frac{J_n}{R_n} \end{aligned}$$

Esto crea una recurrencia que nos lleva a la definición de B_n .

Hasta ahora, sabemos que

$$H_n(B_1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \quad H_n(B_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Conjeturamos entonces que

$$H_n(B_p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}^p & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Conjunto estrellado
Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es estrellado si existe un $a_0 \in A$ tal que $[a_0, x] \subseteq A$ para todo $x \in A$. Un conjunto estrellado es un punto intermedio entre un conjunto contractil y un conjunto convexo. Típicos ejemplos de conjuntos estrellados incluyen el describir un conjunto estrellado, por lo que tiene el tipo de homología de símbolo asterisco y las letras X e Y.

Para $n > 1$,

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(U \cap V) & \xrightarrow{g_n} & H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{h_n} & H_n(B_{p+1}) & \xrightarrow{\Delta_n} & H_{n-1}(U \cap V) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_n(B_{p+1}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Por exactitud, $\ker \Delta_n = 0$ y $\text{Im } \Delta_n = H_{n-1}(U \cap V)$, por lo que Δ es un isomorfismo. Se sigue que

$$H_n(B_{p+1}) \cong H_{n-1}(U \cap V) = 0$$

Consideremos el siguiente tramo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_1(U \cap V) & \xrightarrow{g_1} & H_1(U) \oplus H_1(V) & \xrightarrow{h_1} & H_1(B_{p+1}) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_0(U \cap V) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{p+1} & \longrightarrow & H_1(B_{p+1}) & \longrightarrow & \mathbb{Z}
 \end{array} \quad (2.15)$$

Por exactitud,

$$\frac{H_1(B_{p+1})}{\ker \Delta_1} \cong \text{Im } \Delta_1 = \ker g_0; \quad \ker \Delta_1 = \text{Im } h_1 \cong \frac{\mathbb{Z}^{p+1}}{\ker h_1} \cong \mathbb{Z}^{p+1};$$

Es decir,

$$\ker g_0 \cong \frac{H_1(B_{p+1})}{\mathbb{Z}^{p+1}} \quad (2.16)$$

Consideremos el siguiente tramo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_0(U \cap V) & \xrightarrow{g_0} & H_0(U) \oplus H_0(V) & \xrightarrow{h_0} & H_0(B_{p+1}) & \xrightarrow{\Delta_0} & 0 \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
 \end{array} \quad (2.17)$$

Por exactitud,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Z} &\cong \ker \Delta_0 = \text{Im } h_0 \cong \frac{\mathbb{Z}^2}{\ker h_0} \implies \ker h_0 \cong \mathbb{Z} \\
 \mathbb{Z} &\cong \ker h_0 = \text{Im } g_0 \cong \frac{\mathbb{Z}}{\ker g_0} \implies \ker g_0 = 0
 \end{aligned}$$

Aplicando esta información en la ecuación (2.16), concluimos que $H_1(B_{p+1}) \cong \mathbb{Z}^{p+1}$. Esto confirma nuestra conjetura.

Theorem 2.3.2

$$\begin{aligned}
 H_n(B_p) &\cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}^p & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} & \beta_n(B_p) &= \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ p & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \\
 \mathcal{X}(B_p) &= 1 - p
 \end{aligned}$$

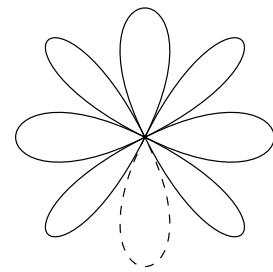


Figura 2.3: Rosa de 8 pétalos. La línea discontinua representa la adición de un nuevo pétalo.

2.4. Grupo de homología del toro

El **toro de Clifford** o **toro llano** se define como el espacio cociente

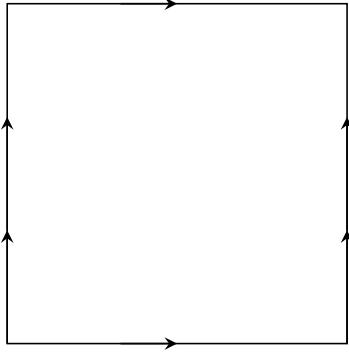
$$T = \frac{[0, 1]^2}{\sim}$$

donde \sim es la menor relación de equivalencia tal que $(t, 0) \sim (t, 1)$ y $(0, t) \sim (1, t)$ para todo $t \in [0, 1]$. Podemos inducir una estructura de

espacio de Mayer-Vietoris tomando los conjuntos

$$U = \left\{ [(x, y)] \in T : x > \frac{1}{3} \right\}; \quad V = \left\{ [(x, y)] \in T : y < \frac{2}{3} \right\};$$

Los conjuntos U , V y $U \cap V$ son cilindros, por lo que tienen el tipo de homología de S^1 .



Sea $n > 2$. Consideraremos la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(U \cap V) & \xrightarrow{g_n} & H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{h_n} & H_n(T) & \xrightarrow{\Delta_n} & H_{n-1}(U \cap V) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_n(T) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.18)$$

Al igual que en los ejemplos anteriores, $H_n(T) = 0$.

Para $n = 0$,

$$\begin{array}{ccccccc} H_0(U \cap V) & \xrightarrow{g_0} & H_0(U) \oplus H_0(V) & \xrightarrow{h_0} & H_0(T) & \xrightarrow{\Delta_0} & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.19)$$

Dado que esta sucesión es exacta, $\text{Im } h_0 = \ker \Delta_0 \cong \mathbb{Z}$ y $\text{Im } g_0 = \ker h_0 \cong \mathbb{Z}$, luego

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{Z}^2}{\ker h_0} &\cong \text{Im } h_0 \cong \mathbb{Z} \implies \ker h_0 \cong \mathbb{Z} \\ \frac{\mathbb{Z}}{\ker g_0} &\cong \text{Im } g_0 \cong \mathbb{Z} \implies \ker g_0 = 0 \end{aligned}$$

Pasemos a $n = 1$:

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(U \cap V) & \xrightarrow{g_1} & H_1(U) \oplus H_1(V) & \xrightarrow{h_1} & H_1(T) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_0(U \cap V) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & H_1(T) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array} \quad (2.20)$$

Dado que la sucesión es exacta, $\text{Im } \Delta_1 = \ker g_0 = 0$ y

$$H_1(T) = \ker \Delta_1 = \text{Im } h_1 \cong \frac{\mathbb{Z}^2}{\ker h_1} = \frac{\mathbb{Z}^2}{\text{Im } g_1} \quad (2.21)$$

Pasemos a $n = 2$:

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(U \cap V) & \xrightarrow{g_2} & H_2(U) \oplus H_2(V) & \xrightarrow{h_2} & H_2(T) & \xrightarrow{\Delta_2} & H_1(U \cap V) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_2(T) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array} \quad (2.22)$$

Una serie de operaciones basadas en la exactitud de esta secuencia nos lleva a que $H_2(T) \cong \ker g_1$, pero no podemos hallar $\ker g_1$ usando sólo exactitud. Necesitamos calcular $\ker g_1$ directamente.

Por definición, $g_1: H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1)^2$ se define como

$$g_1([c]) = ([c], [-c])$$

Sea $[c] \in \ker g_1$ y $x, y \in Z_1(S^1)$, $x \neq y$, tales que $[x]$ e $[y]$ son generadores de $H_1(S^1)$. Notemos que x e y son homólogos, ya que $H_1(S^1)$ tiene rango 1. Existen α, β enteros tales que

$$c = \alpha x + \beta y$$

Consideramos las inclusiones $i: U \cap V \hookrightarrow U$ y $j: U \cap V \hookrightarrow V$. Tenemos que

$$0 = g_1([c]) = ([c], -[c]) = (i_*[c], -j_*[c]) \iff \begin{cases} i_*([c]) \\ j_*([c]) = 0 \end{cases}$$

Dado que x e y son homólogos,

$$i_*([c]) = i_*([\alpha x + \beta y]) = i_*([\alpha x + \beta x]) = (\alpha + \beta)i_*([x]) = 0 \iff \alpha = -\beta$$

por lo que $H_2(T) \cong \ker g_1 \cong \mathbb{Z}$. Usando esta información y la identidad (2.21),

$$\text{Im } g_1 \cong \frac{\mathbb{Z}}{\ker g_1} = 0 \implies H_1(T) \cong \mathbb{Z}^2$$

Theorem 2.4.1

$$H_n(T) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 2 \end{cases} \implies \beta_n(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, 2 \\ 2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

$$\chi(T) = 1 - 2 + 1 = 0$$

Más adelante veremos que se pueden hallar los grupos de homología del toro de forma mucho más directa.

HOMOLOGÍA RELATIVA Y CELULAR

3

Grupos de homología relativa

Como vimos en el capítulo anterior, el grupo de homología de orden 1 de la rosa tiene un generador por cada pétalo. Esto parece decirnos que la acción de *añadir un pétalo* (**adjunción**) provoca la aparición de nuevos generadores. No obstante, diferentes adjunciones provocan diferentes alteraciones:

- Si pegamos sólo uno de los extremos del segmento a B_p y dejamos el otro libre, B_p es un retracto por deformación fuerte de la figura resultante, de forma que no aparecen nuevos generadores.
- Si lo pegamos por ambos lados, aparece un pétalo nuevo y un nuevo generador.

Dado un espacio topológico X y un subespacio $A \subseteq X$, el grupo de homología relativa estudia cómo A está pegado con su complementario, $X \setminus A$. Diremos que dos cadenas son *iguales módulo A* si su diferencia es una cadena en A . En particular, tendremos que una cadena será un *ciclo módulo A* si su borde está contenido en A .

3.1. Complejo de cadenas cociente

Definition 3.1.1 Sea (C, ∂) un complejo de cadenas y (D, ∂') un subcomplejo de cadenas, con D subgrupo normal de C . Se define el **complejo cociente** como el grupo graduado C/D dotado del operador borde

$$\begin{aligned} \frac{C_p}{D_p} &\longrightarrow \frac{C_{p-1}}{D_{p-1}} \\ \bar{c} &\longmapsto \overline{\partial c} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Si $\pi: C \rightarrow C/D$ es el epimorfismo canónico e $i: D \hookrightarrow C$ es la inclusión, la sucesión

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\pi} \frac{C}{D} \longrightarrow 0$$

es exacta. Según el 1.5.2, si podemos hallar un homomorfismo de conexión $\Delta: H_*(C/D) \rightarrow H_*(C)$, la sucesión

$$H_*(D) \xrightarrow{i_*} H_*(C) \xrightarrow{\pi_*} H_*(C/D) \xrightarrow{\Delta} H_*(C) \tag{3.2}$$

será exacta.

Para construir el homomorfismo de conexión, sea $\bar{c} \in Z_n(C/D)$. Tenemos que

$$\overline{\partial c} = 0 \implies \partial c \in D_{n-1}$$

Como $\partial^2 c = 0$, $\partial c \in Z_{n-1}(D)$, luego $[\partial c] \in H_{n-1}(D)$. Definimos entonces el homomorfismo $\Delta_n: H_n(C/D) \rightarrow H_{n-1}(D)$ como

$$\Delta_n(\bar{c}) = [\partial c]$$

de forma que $\Delta = \{\Delta_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un homomorfismo de conexión.

3.1	Complejo de cadenas cociente	39
3.2	Homología singular relativa	41
3.3	Aplicaciones entre pares	43
3.3.1	Teorema de escisión	44
3.4	Grupo de homología reducida	45
3.4.1	Una fórmula para la homología reducida	47
3.4.2	Homología reducida y homología relativa	48
3.5	Homeomorfismo relativo	51

Tercer teorema de isomorfía

Sea C un grupo y D, E subgrupos normales de C . Si $E \leq D$, E es un subgrupo normal de D y

$$\frac{C}{D} \cong \frac{C/E}{D/E}$$

Lemma 3.1.1 (Teorema de isomorfía para grupos graduados) *Sea C un complejo de cadenas y E, D subcomplejos normales de C . Si E es un subcomplejo de D ,*

$$\frac{C}{D} \cong \frac{C/E}{D/E}$$

Demostración. Sea $p \in \mathbb{Z}$. Por definición de subcomplejo y subcomplejo normal, $D_p, E_p \trianglelefteq C_p$ y $E_p \leq D_p$. Por el tercer teorema de isomorfía, existe un isomorfismo

$$f_p: \frac{C_p}{D_p} \longrightarrow \frac{C_p/E_p}{D_p/E_p}$$

Si f es un homomorfismo graduado,

$$f: \frac{C}{D} \longrightarrow \frac{C/E}{D/E}$$

es un isomorfismo graduado por ser una colección de isomorfismos. Por tanto, C/D es isomorfo a $(C/E)/(D/E)$. \square

Sea C un complejo de cadenas y $E \leq D$ subcomplejos normales de C . Por el 3.1.1, existe un isomorfismo graduado $f: (C/E)/(D/E) \rightarrow C/D$. Si ahora consideramos el epimorfismo canónico

$$\pi: C/E \longrightarrow \frac{C/E}{D/E}$$

la aplicación

$$\Pi: \frac{C}{E} \xrightarrow{\pi} \frac{C/E}{D/E} \xrightarrow{f} \frac{C}{D}$$

es un epimorfismo graduado entre C/E y C/D . De aquí se obtiene la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \frac{D}{E} \xrightarrow{i} \frac{C}{E} \xrightarrow{\Pi} \frac{C}{D} \longrightarrow 0$$

Sea $p: D \rightarrow D/E$ el epimorfismo canónico. Este homomorfismo induce un homomorfismo de grado 0 en homología,

$$p_*: H_*(D) \longrightarrow H_*(D/E)$$

Si $\Delta: H_*(C/D) \rightarrow H_*(D)$ es el homomorfismo graduado (3.2),

$$\Delta': H_*(C/D) \xrightarrow{\Delta} H_*(D) \xrightarrow{p_*} H_*(D/E) \quad (3.3)$$

es un homomorfismo de conexión, por lo que el (??) nos dice que

$$H_n(D/E) \xrightarrow{i_*} H_n(C/E) \xrightarrow{\Pi_*} H_n(C/D) \xrightarrow{\Delta'} H_{n-1}(D/E) \quad (3.4)$$

es una sucesión exacta larga.

Sea C' otro complejo de cadenas, con $E' \leq D'$ subcomplejos normales de C' . Considérese una aplicación de cadenas $g: C \rightarrow C'$ tal que $g(D) \leq D'$

y $g(E) \leq E'$. Como acabamos de ver, se puede construir una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \frac{D'}{E'} \longrightarrow \frac{C'}{E'} \longrightarrow \frac{C'}{D'} \longrightarrow 0$$

que induce una sucesión exacta larga en homología similar a (3.4). Dado que g es una aplicación de cadenas, podemos conectar ambas sucesiones exactas usando g_* :

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(D/E) & \xrightarrow{i_*} & H_n(C/E) & \xrightarrow{\Pi_*} & H_n(C/D) & \xrightarrow{\Delta'} & H_{n-1}(D/E) \\ \downarrow g_* & & \downarrow g_* & & \downarrow g_* & & \downarrow g_* \\ H_n(D'/E') & \xrightarrow{\tilde{i}_*} & H_n(C'/E') & \xrightarrow{\tilde{\Pi}_*} & H_n(C'/D') & \xrightarrow{\tilde{\Delta}'} & H_{n-1}(D'/E') \end{array} \quad (3.5)$$

Por cómo está construida (3.4), se puede probar que cada uno de los cuadrados del diagrama anterior es comutativo. Se dice entonces que g_* es una **transformación natural** o que cumple la **hipótesis de naturalidad**.

3.2. Homología singular relativa

Definition 3.2.1 Un **par de espacios** es un par ordenado de la forma (X, A) , donde X es un espacio topológico y $A \subseteq X$.

Sea (X, A) un par de espacios y $n > 0$. Dado un $c \in S_n(X)$, existen n -símplices singulares $\phi_1, \dots, \phi_p: \sigma_n \rightarrow X$ y enteros μ_1, \dots, μ_p

$$c = \sum_{i=1}^p \mu_i \phi_i$$

Si $\phi_i(\sigma_n) \subseteq A$ para cada $i = 1, \dots, p$, se tiene entonces que $c \in S_n(A)$. De aquí se sigue que $S_n(A) \leq S_n(X)$.

Por otro lado, dado un $i = 0, \dots, n$,

$$\partial_{(i)}\phi(\sigma_{n-1}) \subset \phi(\sigma_n) \subset A \implies \partial_{(i)}\phi \in S_{n-1}(A)$$

por lo que $S_*(A)$ es un subcomplejo de cadenas de $S_*(X)$. En el lenguaje de la teoría de categorías, decimos que S_* es un *funtor covariante*, la que respeta el orden de las inclusiones.

Se define el **complejo de cadenas singulares de X módulo A** como el complejo cociente

$$S_*(X, A) := \frac{S_*(X)}{S_*(A)}$$

De la misma forma, se definen los grupos graduados

$$Z_*(X, A) := \frac{Z_*(X)}{Z_*(A)}; \quad B_*(X, A) := \frac{B_*(X)}{B_*(A)};$$

Definition 3.2.2 Sea (X, A) un par de espacios. Se define el **grupo n -ésimo**

de homología singular relativa de X módulo A como

Espacio cociente
<p>Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, X/A es el espacio resultante de identificar todos los puntos de A en uno. La topología del espacio cociente se toma de la proyección</p> $\pi: X \longrightarrow X/A$ <p>sea continua. En particular, X/A es abierto si y sólo si es abierto en X.</p>

$$H_n(X, A) := H_n(S_*(X, A)) = \frac{Z_n(X, A)}{B_n(X, A)}$$

Example 3.2.1 1. Sea X un cilindro con tapas, y A la unión de las dos tapas. Consideramos sobre X la circunferencia e , paralela a las anillas del cilindro, y un segmento f que conecta las dos componentes conexas de A .

Por un lado, el camino e es un ciclo en X por ser un lazo, y también lo es en (X, A) . Por otro lado, el segmento f no es un ciclo en X , pero sí lo es en (X, A) .

2. Sea X la esfera, y $c, d \subset X$ dos circunferencias paralelas. Si d es la circunferencia mayor, llamaremos A a la componente conexa de $X \setminus d$ que no contiene a c .

Usando el ??, c forma un ciclo en X por ser un lazo, por lo que $\partial c = 0$. Por cómo se define el operador borde del complejo de cadenas cociente,

$$\partial \bar{c} = \overline{\partial c} = 0$$

por lo que c forma un ciclo en (X, A) .

Sea e un camino que une c y d en X , y $\tilde{A} = A \cup d$. El camino e no es un ciclo en X porque no es un lazo, y tampoco es un ciclo en (X, \tilde{A}) . No obstante, sí es un ciclo en $(X, \tilde{A} \cup c)$.

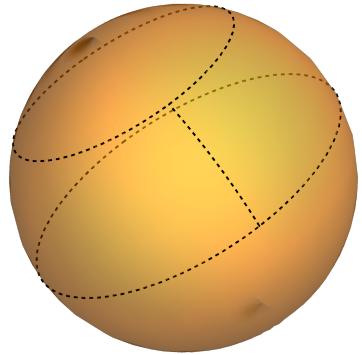
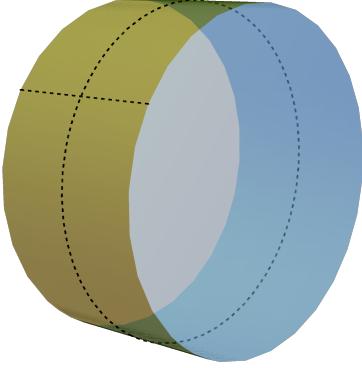


Figura 3.1: Esfera y cilindro del 3.2.1.

Definition 3.2.3 Sea (X, A) un par de espacios. Tomando $C = S_*(X)$ y $D = S_*(A)$ en la sucesión exacta (3.2), se obtiene la **sucesión exacta asociada al par** (X, A) :

$$H_*(A) \xrightarrow{i_*} H_*(X) \xrightarrow{\pi_*} H_*(X, A) \xrightarrow{\Delta} H_*(A)$$

Proposition 3.2.1 i_* es un isomorfismo si y sólo si $H_n(X, A) = 0$ para todo $n \geq 0$.

Una **tríada de espacios** es una terna (X, A, B) , donde (X, A) y (A, B) son pares de espacios.

Sea (X, A, B) una tríada de espacios. Tomando $D = S_*(A)$, $E = S_*(B)$ y $C = S_*(X)$ en (3.4), se obtiene la sucesión exacta larga

$$H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\Delta'} H_{n-1}(A, B)$$

donde i_* y j_* son los homomorfismos inducidos en homología por las inclusiones $i: S_*(A) \hookrightarrow S_*(X)$ y $j: S_*(B) \hookrightarrow S_*(A)$ y Δ' es la aplicación (3.3).

Recordemos que el grupo libre generado por el vacío es el grupo trivial, de forma que $S_*(\emptyset) = 0$. Esto nos permite establecer un isomorfismo natural entre $S_*(X)$ y $S_*(X, \emptyset)$:

$$\begin{aligned} S_*(X) &\longrightarrow S_*(X, \emptyset) \\ c &\longmapsto \bar{c} \end{aligned} \tag{3.6}$$

De la misma forma, se tiene que $S_*(X, A, \emptyset) \cong S_*(X, A)$ y $S_*(X) \cong$

$S_*(X, \emptyset, \emptyset)$.

3.3. Aplicaciones entre pares

Definition 3.3.1 Sean (X, A) e (Y, B) dos pares de espacios topológicos. Una aplicación de pares

$$f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

es una aplicación continua $f: X \longrightarrow Y$ tal que $f(A) \subseteq B$.

Si $\phi: \sigma_p \rightarrow X$ es un simplice singular tal que $\phi(\sigma_p) \subset A$ y $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ es una aplicación de pares, $(f \circ \phi)(\sigma_p) \subset B$, por lo que $f_{\#}(\phi)$ es un p -simplice singular de B . Dado que la elección de ϕ es arbitraria y los p -simplices singulares conforman una base de $S_*(A)$,

$$f_{\#}(S_*(A)) \subseteq S_*(B)$$

por lo que f induce una aplicación de cadenas

$$\begin{aligned} f_{\#}: S_*(X, A) &\longrightarrow S_*(Y, B) \\ \bar{c} &\longmapsto \overline{f(c)} \end{aligned} \tag{3.7}$$

que induce a su vez un homomorfismo entre los grupos de homología relativa,

$$\begin{aligned} f_*: H_*(X, A) &\longrightarrow H_*(Y, B) \\ [\bar{c}] &\longmapsto [\overline{f(c)}] \end{aligned} \tag{3.8}$$

Sean $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ aplicaciones entre pares de espacios. Decimos que f es **homotópica** a g si existe una aplicación entre pares de espacios $F: (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$. Observar que F , al ser aplicación de pares, se supone continua y verifica que $F(A \times I) \subset B$.

Theorem 3.3.1 Si $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ son homotópicas como aplicaciones de pares,

$$f_* = g_*: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(Y, B)$$

Tomando $A = \emptyset = B$, se obtiene el teorema de invarianza homotópica.

Demostración. Sean $i_0, i_1: (X, A) \rightarrow (X \times I, A \times I)$ las aplicaciones

$$i_0(x) = (x, 0); \quad i_1(x) = (x, 1)$$

Tenemos que $f = F \circ i_0$ y $g = F \circ i_1$. Para probar que $f_* = g_*$, basta con probar que $(i_0)_*$ e $(i_1)_*$ son homotópicas como aplicaciones de cadenas. La demostración es análoga al teorema de invarianza homotópica. \square

Example 3.3.1 Sean $X = [0, 1]$, $Y = S_1 \subset \mathbb{R}^2$, $A = \{0, 1\}$ y $B = \{(1, 0)\}$. Considérense las aplicaciones continuas $f, g: X \rightarrow Y$ definidas como

$$f(x) = e^{2\pi i x}; \quad g(x) = (1, 0)$$

Las aplicaciones f y g son homotópicas vía

$$F(x, t) = f(x)(1 - t) + t$$

y además $f(A) = g(A) = B$, pero no forman una homotopía de pares entre (X, A) e (Y, B) .

3.3.1. Teorema de escisión

Lemma 3.3.2 (Lema de los cinco, [FiveLemma]) *Sean $A_1, B_1, \dots, A_5, B_5$ grupos abelianos. Considérese el diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \delta \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array} \quad (3.9)$$

cuyas filas forman sucesiones exactas. Si α es un epimorfismo, β_1, β_2 son isomorfismos y δ es un monomorfismo, γ es un isomorfismo.

Theorem 3.3.3 (Teorema de escisión) *Sea (X, A) un par de espacios y $U \subset A$ tal que $\overline{U} \subset \overset{\circ}{A}$. La aplicación inclusión $i: (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo*

$$i_*: H_*(X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow H_*(X, A)$$



Figura 3.2: El teorema de escisión nos dice que la homología relativa de X módulo A sólo concierne a la frontera de A . La estructura global del espacio no es relevante. Imagen: [Hole].

Los homomorfismos

$$i: S_*^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S_*(X); \quad i': S_*^{\mathcal{U}'}(A) \hookrightarrow S_*(A)$$

forman isomorfismos entre los grupos de homología. Teniendo en cuenta que $S_*^{\mathcal{U}'}(A) \leq S_*^{\mathcal{U}}(X)$, la aplicación inclusión

$$j: S_*^{\mathcal{U}, \mathcal{U}'}(X, A) = \frac{S_*^{\mathcal{U}}(X)}{S_*^{\mathcal{U}'}(A)} \hookrightarrow \frac{S_*(X)}{S_*(A)} = S_*(X, A)$$

forma una aplicación de cadenas que da lugar al diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_*(S_*^{\mathcal{U}'}(A)) & \longrightarrow & H_*(S_*^{\mathcal{U}}) & \longrightarrow & H_*(S_*^{\mathcal{U}, \mathcal{U}'}(X, A)) & \longrightarrow & H_*(S_*^{\mathcal{U}'}(A)) \\
 \downarrow i'_* & & \downarrow i_* & & \downarrow j_* & & \downarrow i_* \\
 H_*(A) & \longrightarrow & H_*(X) & \longrightarrow & H_*(X, A) & \longrightarrow & H_*(A)
 \end{array} \tag{3.10}$$

Como i_* e i'_* son isomorfismos, el lema de los cinco nos garantiza que j_* es un isomorfismo, por lo que $S_*(X \setminus U, A \setminus U) \cong S_*^{\mathcal{U}, \mathcal{U}'}(X, A)$ y concluimos que

$$H_*(X, A) \cong H_*(S_*^{\mathcal{U}, \mathcal{U}'}(X, A)) \cong H_*(X \setminus U, A \setminus U)$$

□

Un detalle importante

Dados tres grupos abelianos A, B, C tales que $B + C \leq A + C$,

$$\frac{A + C}{B + C} \cong \frac{A}{B}$$

Example 3.3.2 1. Sea X la esfera de la Figura 3.1, A el área comprendida entre las dos circunferencias y $U \subset A$ una circunferencia paralela a ∂A . Tenemos que $X \setminus U$ son dos casquetes y $A \setminus U$ son dos bandas. Ahora bien, observar que

$$\frac{X \setminus U}{A \setminus U} \cong \frac{X}{A}$$

por lo que ambos espacios tienen el mismo tipo de homología.

2. Sea X el toro de Clifford,

$$A = \{(x, y) \in X : 1/4 \leq x \leq 3/4\}$$

y $\star \in A$. El subespacio $X \setminus \{\star\}$ es un toro perforado. Podemos tomar el agujero y ensancharlo hasta quedarnos con dos *hilos de alambre* cruzados (que son los generadores de H_1). Esos hilos forman una figura ocho.

Por otro lado, $A \setminus \{\star\}$ es un cilindro perforado. Podemos tomar la perforación y ensancharla hasta quedarnos con las anillas de los bordes y un alambre que los une. Dicho alambre se puede retraer hasta que las dos anillas sean tangentes, formando una figura ocho.

3.4. Grupo de homología reducida

Sea X un espacio topológico. El camino constante $\alpha: X \rightarrow \{\star\}$ da lugar a un homomorfismo en homologías $\alpha_*: H_*(X) \rightarrow H_*(\{\star\})$. Se define el **grupo de homología reducida** $\tilde{H}_*(X)$ como el núcleo de α_* .

Si X es convexo, sabemos por el 1.3.4 que $H_n(X) = \{0\}$ para todo $n > 0$, por lo que $\tilde{H}_n(X) = \{0\}$. Aún así, no podemos decir nada del grupo de orden 0, porque $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

La homología reducida está creada para poder describir de forma más sencilla la homología de algunos espacios. Por ejemplo: todos los grupos de homología reducida del espacio puntual son triviales, y el único grupo de homología reducida no trivial de S^n es el de orden n , como veremos más adelante.

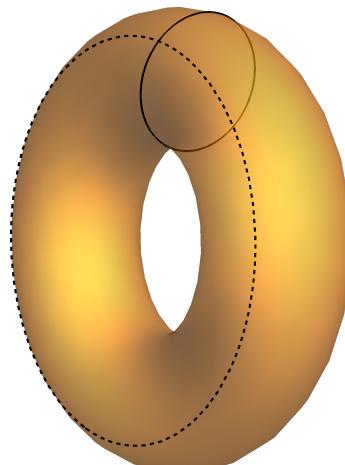


Figura 3.3: Generadores del grupo de homología de primer orden del toro.

En general, si un espacio es arcoconexo, su grupo de homología reducida de orden cero es trivial.

Proposition 3.4.1 *Sea X un espacio topológico no vacío con una cantidad finita de arcocomponentes. $\tilde{H}_0(X)$ es un grupo libre que verifica*

$$\text{rk}(\tilde{H}_0(X)) = \text{rk}(H_0(X)) - 1$$

Demostración. Sea c un 0-ciclo de X . Si llamamos X_1, \dots, X_n a las arcocomponentes de X , existirán $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$c = \sum_{i=1}^n a_i x_i; \quad x_i \in X_i$$

Dado que α es una aplicación constante, podemos llamar α_0 al valor que toma en todos sus puntos, de forma que

$$0 = \alpha_*([c]) = \sum_{i=1}^n a_i [\alpha(x_i)] = [\alpha_0] \sum_{i=1}^n a_i$$

De aquí se deduce que $[c] \in \ker \alpha_*$ si y sólo si

$$a_n = - \sum_{i=1}^{n-1} a_i$$

por lo que $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ forma un sistema generador libre de $\tilde{H}_0(X)$. Por tanto,

$$\tilde{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}^{n-1} \implies \text{rk}(\tilde{H}_0(X)) = n - 1 = \text{rk}(H_0(X)) - 1$$

□

Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Al igual que f induce un homomorfismo entre grupos de homología, queremos ver que f induce un homomorfismo entre grupos de homología reducida. Para ello, sean $\alpha: X \rightarrow \{\star\}, \beta: Y \rightarrow \{\star\}$ caminos constantes y $c = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ tal que $[c] \in \tilde{H}_n(X)$. Tenemos que

$$f_*([c]) = \sum_{i=1}^n a_i [f(x_i)] = \sum_{j=1}^m b_j [y_j]$$

Dado que las aplicaciones continuas llevan conjuntos arcoconexos en conjuntos arcoconexos,

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$$

Si $[c]$ está en $\ker \alpha_*$, la suma de todos los a_i es 0. Como la suma de los a_i es la misma que la de los b_j , esto es tanto como decir que $f_*([c])$ está en $\ker \beta_*$. Por tanto, $f_*(\ker \alpha_*) \subseteq \ker \beta_*$, de forma que f induce un homomorfismo entre los grupos de homología reducida de X e Y .

Example 3.4.1 Si X es un espacio contráctil, $\tilde{H}_*(X) = 0$.

3.4.1. Una fórmula para la homología reducida

Lema 3.4.2 (Lema de escisión) *Sean A, B, C grupos abelianos. Considerese la sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. B es suma directa de A con C ;
2. existe un homomorfismo $h: B \rightarrow A$ tal que $f \circ h = \text{id}_A$;
3. existe un homomorfismo $k: C \rightarrow B$ tal que $k \circ g = \text{id}_C$.

Proposition 3.4.3 *Dado un $p \in X$,*

$$\tilde{H}_*(X) \cong H_*(X, \{p\})$$

Demostración. Sea $i: \{p\} \hookrightarrow X$ la inclusión. La aplicación continua

$$\alpha: X \longrightarrow p$$

verifica que $\text{id}_{\{p\}} = \alpha \circ i$, por lo que $\{p\}$ forma un retracto de X e i_* es un monomorfismo.

Considerérese la sucesión exacta de homología generada por el par de espacios $(X, \{p\})$:

$$H_n(\{p\}) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, \{p\}) \xrightarrow{\Delta'} H_{n-1}(\{p\})$$

Como i_* es un monomorfismo, $\text{Im } \Delta' = \ker i_* = 0$. Por el primer teorema de isomorfía, $\text{Im } j_* = \ker \Delta' = H_n(X, p)$, por lo que j_* es sobreyectiva.

Dado que i_* es inyectiva y j_* es sobreyectiva, podemos pasar a definir una sucesión exacta corta en lugar de trabajar con una sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow H_n(\{p\}) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, \{p\}) \longrightarrow 0$$

Sabemos que $\alpha_* \circ i_* = \text{id}_{H_n(\{p\})}$, por lo que el lema de escisión nos garantiza que existe un homomorfismo

$$\beta: H_n(X, \{p\}) \rightarrow H_n(X)$$

tal que $j_* \circ \beta = \text{id}_{H_n(X, \{p\})}$. Esto es tanto como decir que β es inyectiva.

Se puede probar que $\text{Im } \beta = \ker \alpha_* = \tilde{H}_*(X)$, por lo que hemos hallado un isomorfismo entre $H_*(X, \{p\})$ y $\tilde{H}_*(X)$. \square

Sea X un espacio topológico con n componentes arcoconexas. Hasta ahora, sabemos que

$$\tilde{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$$

pero queda pregunta preguntarnos qué ocurre con los grupos de orden superior. Utilizando la 3.4.3, tenemos para cada $p > 0$ y el espacio

puntual \star que

$$\tilde{H}_p(X) \cong H_p(X, \star) = \frac{Z_p(X, \star)}{B_p(X, \star)} = \frac{Z_p(X)/Z_p(\star)}{B_p(X)/B_p(\star)}$$

Teniendo en cuenta que $Z_p(\star) = B_p(\star)$, estamos en condiciones de aplicar el tercer teorema de isomorfía:

$$\tilde{H}_p(X) \cong \frac{Z_p(X)/Z_p(\star)}{B_p(X)/B_p(\star)} = \frac{Z_p(X)/B_p(\star)}{B_p(X)/B_p(\star)} \cong \frac{Z_p(X)}{B_p(X)} = H_p(X)$$

De esta forma, llegamos a que el grupo de homología reducida sólo reduce el grupo de orden cero, cuya única función es contar el número de componentes conexas.

Corollary 3.4.4 *Sea X un espacio topológico con una cantidad finita de arcocomponentes.*

$$\tilde{H}_*(X) \cong \frac{H_*(X)}{H_*(\star)}$$

Example 3.4.2

$$\tilde{H}_*(B_p) \cong \frac{H_*(B_p)}{H_*(\star)} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^p & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

3.4.2. Homología reducida y homología relativa

Idea de la demostración

En el lema, nos proporcionan una aplicación cociente π que envía X en X_A de forma continua. Nuestro impulso inicial es definir $G = \pi \circ F \circ (\pi \times id_I)$. Entonces, diremos que un espacio topológico es de **tipo C_2** si es T_2 al mismo tiempo.

Lemma 3.4.5 *Sea (X, A) un par de espacios donde X es C_2 y A es cerrado en X . Considérese la aplicación cociente*

El problema es que $\pi \times id_I$ no está bien definido, por lo que tenemos que pensar en otra aplicación. La idea es definir una G tal que $G \circ \pi = (\pi \circ id_I)^{-1}$. Lo que queremos es que G sea $y = \pi(A) \in X/A$. Si A es retracto por deformación fuerte de X , $\{y\}$ es un retracto por deformación fuerte de $\pi(X) = X/A$.

$$\pi: X \rightarrow \frac{X}{A}$$

Demostración. Dado que A es un retracto por deformación fuerte de X , existe una homotopía $F: X \times I \rightarrow X$ tal que $F(x, 0) = x$ para todo $x \in X$, $F(a, t) = a$ para todo $a \in A$ y $t \in I$, y $F(X \times \{1\}) \subseteq A$.

Si $X_A = X/A$, queremos hallar una homotopía $G: X_A \times I \rightarrow X_A$ tal que $G([x], 0) = x$ para todo $x \in X_A$, $G(X_A \times \{1\}) = \{y\}$ y $G(y, t) = y$ para todo $t \in I$.

Sea $G: X_A \times I \rightarrow X_A$ la aplicación

$$G([x], t) = (\pi \circ F)(x, t)$$

Si $x \notin A$, la clase de x módulo A es el singulete formado por el propio punto x , por lo que G está bien definido en $X_A \setminus \{y\}$.

Si $x \in A$, sabemos que $F(a, t) = a$ para todo $t \in I$, por lo que

$$(\pi \circ F)(a, t) = \pi(a) \in \pi(A) = \{y\}$$

De esta forma, G está bien definida y que $G(y, t) = y$ para todo $t \in I$.

Sea $p \in X/A$. Si $x \in \pi^{-1}(p)$, sabemos que $F(x, 0) = x$, por lo que

$$\begin{aligned} G(p, 0) &= (\pi \circ F)(x, 0) = \pi(x) = p \\ G(p, 1) &= (\pi \circ F)(x, 1) \in \pi(A) = \{y\} \end{aligned}$$

Sólo nos queda ver que G es continua. Para ello, sea C un subconjunto cerrado de X/A . Por continuidad, $D = (\pi \circ F)^{-1}(C)$ es un subconjunto cerrado de $X \times I$. Como $X \times I$ es compacto, D es compacto. Por continuidad, $(\pi \times \text{id}_I)(D)$ es compacto. Por cómo se define G ,

$$G^{-1}(C) = (\pi \times \text{id}_I)(D) \subseteq X_A \times I$$

es compacto. Dado que $X_A \times I$ es un espacio de Hausdorff, $G^{-1}(C)$ es cerrado.

Dado que la elección de C es arbitraria, se sigue que G es continua. \square

Detalles de la prueba

- Una aplicación es continua si y sólo si la preimagen de todo cerrado es cerrada.
- Los subespacios cerrados de un compacto son compactos.
- La imagen de un compacto por una aplicación continua es compacta.
- Todo subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.

Lema 3.4.6 *Sea X un espacio C_2 . Dados dos cerrados disjuntos $C, D \subset X$, existen abiertos $U, V \subset X$ tales que U contiene a C , V contiene a D y $U \cap V = \emptyset$*

Demostración. Dados $x \in C$ e $y \in D$, como C y D son disjuntos, $x \neq y$. Como X es un espacio de Hausdorff, existen U_y, V_y abiertos tales que

$$x \in U_y; \quad y \in V_y; \quad U_y \cap V_y = \emptyset$$

Como D es un subespacio cerrado de un compacto, D es compacto, por lo que podemos hallar una familia finita de puntos $y_1, \dots, y_n \in D$ tales que $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$ forma un recubrimiento abierto de D .

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, podemos hallar un abierto $U_i \subseteq X$ tal que $U_i \cap V_{y_i} = \emptyset$ y $x \in U_i$. Se definen entonces

$$U_x = \bigcup_{i=1}^n U_i; \quad V_x = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$$

Notar que ambos conjuntos son abiertos y $U_x \cap V_x = \emptyset$.

Dado que C es un subespacio cerrado de un compacto, C es compacto, por lo que podemos hallar una familia finita de puntos x_1, \dots, x_m tales que $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\}$ forma un recubrimiento abierto de C .

Para terminar, considérense los abiertos

$$U = \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}; \quad V = \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$$

Se tiene por construcción que $D \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. \square

Lema 3.4.7 Sea X un espacio C_2 . Dado un cerrado A contenido en un abierto V , existe un abierto W tal que

$$A \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq V$$

Demostración. Considérense los cerrados A y $X \setminus V$. Por el lema anterior, existen abiertos U, W de X tales que $A \subseteq W$, $X \setminus V \subseteq U$ y $U \cap W = \emptyset$. Tenemos que $U \cap W = \emptyset$, por lo que

$$W \subseteq X \setminus U \subseteq V \implies \overline{W} \subset \overline{X \setminus U} = X \setminus U \subseteq V$$

□

Theorem 3.4.8 (Teorema del retracto) Sea X un espacio C_2 , A un subespacio cerrado de X y $\pi: (X, A) \rightarrow (X/A, \pi(A))$ una aplicación cociente. Si A es un retracto por deformación fuerte de algún entorno cerrado de A en X ,

$$H_*(X, A) \cong H_*(X/A, \pi(A)) \cong \tilde{H}_*(X/A)$$

Demostración. Considérese la sucesión exacta asociada a la tríada de espacios (X, U, A) :

$$H_*(U, A) \xrightarrow{i_*} H_*(X, A) \xrightarrow{j_*} H_*(X, U) \xrightarrow{\Delta'} H_*(U, A)$$

Dado que A es un retracto por deformación fuerte de U , $H_*(U, A) = 0$. Por exactitud, se sigue que $0 = \text{Im } i_* = \ker j_*$ y $\text{Im } j_* = \ker \Delta' = H_*(X, U)$. Por tanto,

$$H_*(X, A) \cong H_*(X, U)$$

Sabemos que X es un espacio C_2 y que A es cerrado. Como U es entorno de A , $A \subseteq \dot{U}$. Usando el 3.4.7, podemos hallar un abierto $V \subseteq X$ tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq \dot{U} \subseteq U$. Aplicando el teorema de escisión, la inclusión $i: (X \setminus V, U \setminus V) \hookrightarrow (X, U)$ induce un isomorfismo i_* . Se sigue que

$$H_*(X, U) \cong H_*(X \setminus V, U \setminus V)$$

Considérese la aplicación $p = \pi|_{X \setminus V}$. Como $A \subseteq V$, $\pi(x)$ sólo tiene un representante (el propio x), de forma que p es un homeomorfismo. Como $\pi(U \setminus V) = \pi(U) \setminus \pi(V)$, se sigue que

$$H_*(X \setminus V, U \setminus V) \cong H_*(X_A \setminus \pi(V), \pi(U) \setminus \pi(V))$$

Aplicando el teorema de escisión al par $(X_A, \pi(U))$, se obtiene el isomorfismo

$$H_*(X_A \setminus \pi(V), \pi(U) \setminus \pi(V)) \cong H_*(X_A, \pi(U))$$

Considérese la sucesión exacta asociada a la tríada de espacios $(X_A, \pi(U), \pi(A))$. Un procedimiento similar al que hemos desarrollado al inicio de la demostración nos lleva a concluir que

$$H_*(X_A, \pi(U)) \cong H_*(X_A, \pi(A))$$

□

3.5. Homeomorfismo relativo

Definition 3.5.1 Un *homeomorfismo relativo* es una aplicación continua entre pares de espacios $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ tal que

$$f: X \setminus A \longrightarrow Y \setminus B$$

es un homeomorfismo.

Example 3.5.1 1. Si $\mathcal{N} = (0, 0, 1) \in S^2$ y D^2 denota a la bola cerrada unidad de \mathbb{R}^2 , existe un homeomorfismo

$$f: D^2 \setminus \partial D^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{\mathcal{N}\}$$

De esta forma, f induce un homeomorfismo relativo entre los pares $(S^2, \{\mathcal{N}\})$ y $(D^2, \partial D^2)$.

2. Si $C = S^1 \times I$ es un cilindro y $\mathcal{S} = (0, 0, -1) \in S^2$, existe un homeomorfismo

$$g: S^1 \times \overset{\circ}{I} \longrightarrow S^2 \setminus \{\mathcal{N}, \mathcal{S}\}$$

que identifica al cilindro sin anillas con S^2

Theorem 3.5.1 (Teorema del homeomorfismo relativo) Sean X, Y espacios C_2 , $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ cerrados y $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ un homeomorfismo relativo. Si A es retracto por deformación fuerte de algún entorno compacto de A en X y B es retracto por deformación fuerte de algún entorno compacto de B en Y , f_* es un isomorfismo.

Demostración. Sean $\pi: X \rightarrow X/A$ y $\pi': Y \rightarrow Y/B$ aplicaciones cociente. Se define la aplicación $f': X/A \rightarrow Y/B$ como $f([x]) = \pi'(f(x))$. Es fácil ver que f' está bien definida y es continua, por lo que da lugar al siguiente diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ X/A & \xrightarrow{f'} & Y/B \end{array} \quad (3.11)$$

Dado que f es un homeomorfismo relativo, f' es una biyección entre X/A e Y/B . Como ambos son espacios C_2 , f' es un homeomorfismo, por lo que induce un isomorfismo entre $H_*(X/A)$ y $H_*(Y/B)$.

Tenemos entonces el diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_*(X, A) & \xrightarrow{f_*} & H_*(Y, B) \\ \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi'_* \\ H_*(X/A, \pi(A)) & \xrightarrow{f'_*} & H_*(Y/B, \pi'(B)) \end{array} \quad (3.12)$$

Sabemos por el 3.4.8 que π'_* y π_* son isomorfismos; además, acabamos de probar que f'_* es un isomorfismo. Como consecuencia, f_* es un isomorfismo. \square

4

Espacios CW-complejos

4.1. Espacio de adjunción

Definition 4.1.1 Sean X, Y espacios topológicos, $A \subset X$ un subespacio cerrado y $f: A \rightarrow Y$ una aplicación continua. Dados $x \in X$, $y \in Y$, escribiremos $x \sim y$ si $x \in A$ e $y = f(x)$. Se define el **espacio de adjunción o de pegamiento** como

$$X \cup_f Y := \frac{X \sqcup Y}{\sim}$$

Decimos que f es la **aplicación de adjunción o de pegamiento** de $X \cup_f Y$.

Si $Y = \{\star\}$, $f = \text{Cte}_\star$, por lo que $x \sim z$ para todos $x, z \in A$ y $X \cup_f Y = X/A$.

Lemma 4.1.1 La proyección canónica $p: X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$ verifica las siguientes condiciones:

1. $p(Y)$ es cerrado;
2. $p|_Y$ es un homeomorfismo sobre su imagen;
3. $p(X \setminus A)$ es abierto;
4. $p|_{X \setminus A}$ es un homeomorfismo sobre su imagen.

Como consecuencia, podemos considerar a Y y $X \setminus A$ como subespacios de $X \cup_f Y$.

Demostración. Como $X \sqcup Y$ es una unión disjunta de espacios topológicos, Y es un subespacio cerrado de $X \sqcup Y$. Además, A es cerrado en X si y sólo si lo es en $X \sqcup Y$, por lo que $A \cup Y$ es cerrado en $X \sqcup Y$. Pero $A \cup Y = p^{-1}[p(Y)]$, por lo que $p(Y)$ es cerrado.

Pasemos al segundo ítem: para ver que $p|_Y$ es un homeomorfismo sobre su imagen, necesitamos ver que es cerrada e inyectiva.

Sea $y \in Y$: si $y \notin f(A)$, se tiene de forma trivial que $p^{-1}([y]) = \{y\}$. Si $y \in f(A)$, podemos hallar un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Como $x \in A \subseteq X$, podemos hallar un $y' \in X \sqcup Y$ tal que $y \sim y'$. Si $y' \in Y$, $y = f(x) = y'$ y no hay nada que probar. Si asumimos que $y' \neq y$, $y' \in X$. Teniendo en cuenta que

$$(p|_Y)^{-1}([y]) = p^{-1}([y]) \cap Y$$

se sigue que $y' \notin (p|_Y)^{-1}([y])$, por lo que $p|_Y$ es inyectiva.

Para ver que $p|_Y$ es cerrada, sea C un subespacio cerrado de Y . Como $p(Y)$ es cerrado en $X \cup_f Y$, $p(C)$ es cerrado en $p(Y)$ si y sólo si lo es en $X \cup_f Y$. Ésto es tanto como decir que $p^{-1}[p(C)]$ es cerrado en $X \sqcup Y$.

Aplicaciones abiertas y cerradas

Una aplicación $f: X \rightarrow Y$ es abierta (resp. cerrada) si la imagen de un abierto (resp. cerrado) en X es abierto (resp. cerrado) en Y . Si f es biyectiva, su inversa será continua si y sólo si f es abierta o cerrada.

Observamos que

$$p^{-1}[p(C)] = f^{-1}(C) \sqcup C$$

por lo que $p^{-1}[p(C)]$ es una unión de cerrados. En consecuencia, $p(C)$ es cerrado en $p(Y)$, de donde se sigue que $p|_Y$ es una aplicación cerrada. Ésto concluye el segundo ítem.

Como A es cerrado en X , $X \setminus A$ es abierto en $X \sqcup Y$. Dado que $p^{-1}[p(X \setminus A)] = X \setminus A$, se sigue que $p(X \setminus A)$ es abierto en $X \cup_f Y$.

Pasemos al último ítem: dado un $x \in X \setminus A$, $p^{-1}(\{x\}) = \{x\}$, por lo que $p|_{X \setminus A}$ es inyectivo. Dado que p es continua, sólo necesitamos ver que es abierta para deducir la tesis.

Sea $U \subseteq X \setminus A$: como $p(X \setminus A)$ es abierto en $X \cup_f Y$, $p(U)$ será abierto en $p(X \setminus A)$ si y sólo si lo es en el espacio de adjunción, o equivalentemente, $p^{-1}[p(U)]$ es abierto en $X \sqcup Y$.

Dado que $U \subseteq X \setminus A$, se tiene que $U = p^{-1}[p(U)]$. Si U es abierto de $X \setminus A$

Primer axioma de numerabilidad será de $X \sqcup Y$, por lo que $p(U)$ es abierto en el espacio de adjunción, o equivalentemente, $p^{-1}[p(U)]$ es abierto de $X \sqcup Y$. Esto concluye la demostración. \square

Un espacio topológico X verifica el primer axioma de numerabilidad si, dado $p \in X$, existe un entorno U de p tal que los entornos numberables de p son unión de subconjuntos numerables de U . Un entorno U de p es unión de subconjuntos numerables de U si y sólo si contiene a un número numerable de entornos $V_\alpha : \alpha \in A$ tales que $V_\alpha \cap U \neq \emptyset$.

Demuestra. El espacio $X \cup_f Y$ es compacto por ser imagen de un espacio compacto (en este caso $X \sqcup Y$) por una aplicación continua (la proyección canónica $p : X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$).

Queremos ver que $X \cup_f Y$ es T_2 . Dado que $X \cup_f Y$ es un espacio cociente y X, Y son T_2 , basta ver que el conjunto

$$\{(x, y) \in (X \cup_f Y)^2 : y = f(x)\} = G(f)$$

La propiedad de Hausdorff en los cocientes

Dado que X e Y son 1AN, $(X \sqcup Y)^2$ es 1AN, por lo que $G(f)$ si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Sea W un espacio de Hausdorff y \sim una relación de equivalencia sobre los puntos de W . Si el conjunto $\{z_n\}$ es una sucesión de $G(f)$. Por compacidad de $X \sqcup Y$, existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}$ convergente a un cierto $z_0 \in X \sqcup Y$. Por definición de $\{(x, y) \in W^2 : y = f(x)\}$, existe una sucesión (x_k) de A tal que

es cerrado en W^2 , W/\sim es un espacio de Hausdorff.

$$z_{n_k} = (x_k, f(x_k))$$

Se tiene entonces que (x_k) converge a x_0 , que está en A por ser cerrado de X . Además, como f es continua, $f(x_k)$ converge a $f(x_0)$.

De esta forma, (z_{n_k}) converge a $(x_0, f(x_0)) \in G(f)$. Dado que $X \sqcup Y$ es T_2 , $z_0 = (x_0, f(x_0))$, por lo que $z_0 \in G(f)$. De aquí se sigue que $G(f)$ es cerrado. Por tanto, $X \cup_f Y$ es T_2 . \square

Lemma 4.1.3 Sean X, Y, W espacios C_2 , $A \subset X$ un subconjunto cerrado y $g : X \sqcup Y \rightarrow W$ una aplicación continua y sobreyectiva. Supongamos que,

para todo punto $w \in W$, se cumple que

$$g^{-1}(w) = \begin{cases} \text{un único punto de } X \setminus A \\ \vee \\ \{y\} \cup f^{-1}(y) \text{ para algún } y \in Y \end{cases}$$

Entonces, g induce un homeomorfismo entre W y $X \cup_f Y$.

Demostración. Sea $\partial: X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$ la proyección canónica. Se define la aplicación

$$\begin{aligned} \bar{g}: X \cup_f Y &\longrightarrow W \\ [x] &\longmapsto g(x) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Supongamos que \bar{g} está bien definida y es una biyección continua: por el ??, tenemos que $X \cup_f Y$ es de tipo C_2 . Como W es T_2 , se sigue que \bar{g} tiene inversa continua, por lo que es un homeomorfismo y el lema queda probado.

Empecemos por ver que \bar{g} está bien definida: sean $x_1, x_2 \in A$ elementos asociados y diferentes. Existirá un $y \in f(A)$ tal que $f(x_1) = y = f(x_2)$. Si $w = g(x_1)$, se tiene por hipótesis que

$$g^{-1}(w) = \{y\} \cup f^{-1}(y) \implies g(x_1) = w = g(x_2)$$

Si $x \in X \setminus A$, x sólo está asociado consigo mismo, de forma que \bar{g} está trivialmente bien definida. Dado que todas las antiimágenes por g de un cierto $w \in W$ están asociadas, \bar{g} es también inyectiva.

Veamos que \bar{g} es continua: si $C \subseteq W$ es cerrado, $g^{-1}(C)$ es cerrado en $X \sqcup Y$, por lo que $\pi^{-1}[g^{-1}(C)]$ es cerrado en $X \cup_f Y$. Notar que

$$\pi^{-1}[g^{-1}(C)] = \bar{g}^{-1}(C)$$

por lo que se sigue la continuidad de \bar{g} . \square

Sea $g: X \rightarrow W$ una aplicación continua y sobreyectiva entre espacios de tipo C_2 . Supongamos que existe un $w_0 \in W$ de forma que $A = g^{-1}(w_0)$ es un cerrado en X y $g^{-1}(w)$ es un único punto de $X \setminus A$ para todo $w \neq w_0$.

Si $\{\star\}$ es el espacio puntual, la aplicación constante $f: A \rightarrow \{\star\}$ es continua, y se verifica que $X \cup_f \{\star\}$ es homeomorfo a X/A . Por el 4.1.3, se tiene que

$$W \cong X \cup_f \{\star\} \cong X/A$$

Continuidad de la inversa

Si $f: X \rightarrow Y$ es una biyección continua, donde X es compacto e Y es de Hausdorff, f es un homeomorfismo.

Example 4.1.1 Sea $h: D^n \setminus S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo, $\mathcal{N} = (0, 0, \dots, 0, 1)$ y $S_+^n = S^n \setminus \mathcal{N}$. La **proyección estereográfica**, dada por

$$\begin{aligned} \Phi: S_+^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right) \end{aligned} \tag{4.2}$$

es un homeomorfismo. Una posible parametrización de h es

$$h(z) = \frac{z}{1 - \|z\|}$$

Se define la aplicación $g: D^n \rightarrow S^n$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \mathcal{N} & \text{si } x \in S^{n-1} \\ (\Phi^{-1} \circ h)(x) & \text{si } x \in D^n \setminus S^{n-1} \end{cases}$$

Se tiene entonces que g es continua y sobreyectiva por construcción.

Como $\mathcal{N} \in S^{n-1}$, $g^{-1}(\mathcal{N}) = \{\mathcal{N}\}$ es un cerrado en D^n . Dado que Φ y h son aplicaciones biyectivas, $g^{-1}(z)$ es un único punto para todo $z \neq \mathcal{N}$. Aplicando el lema 4.1.3, se tiene entonces que

$$S^n \cong \frac{D^n}{S^{n-1}}$$

que es la adjunción de D^n a un espacio puntual.

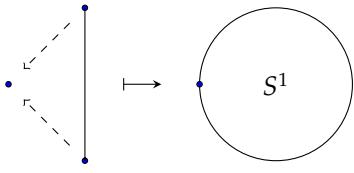


Figura 4.1: Conjunto S^1 construido como espacio de adjunción.

4.1.1. Células y adjunción

Supongamos que $X = D^n$ para algún $n > 0$ y $A = S^{n-1} = \partial D^n$. Decimos que el espacio

$$Y_f := D^n \cup_f Y$$

es la **adjunción de una n -célula** al espacio Y .

Example 4.1.2 En la figura Figura 4.1, vemos cómo $S^1 \cong \{\star\}_f$, siendo $f: \partial D^1 = \{0, 1\} \rightarrow \{\star\}$ la aplicación constante. En general, S^n se puede obtener como $\{\star\}_{f_n}$, siendo $f_n: \partial D^n \rightarrow \{\star\}$.

Lemma 4.1.4 Sea $f: S^{n-1} \rightarrow Y$ una aplicación continua. Si Y es un espacio C_2 , existe un entorno compacto U_f de Y en Y_f tal que Y es un retracto por deformación fuerte de U_f .

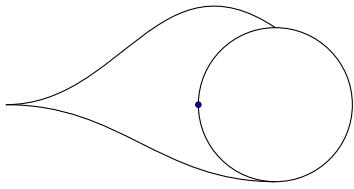


Figura 4.2: Podemos adjuntar nuevas células a las células preexistentes para recrear espacios más complejos.

Demostración. Sea $U = \{x \in D^n : \|x\| \geq 1/2\}$. El cerrado U es un entorno compacto de S^{n-1} en D^n . Definimos la homotopía $F: (U \sqcup Y) \times I \rightarrow U \sqcup Y$ como

$$F(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } x \in Y \\ (1-t)x + t \frac{x}{\|x\|} & \text{si } x \in U \end{cases}$$

Tenemos que F es una aplicación continua que verifica las siguientes propiedades:

1. $F(x, 0) = x$ para todo $x \in U \sqcup Y$.
2. $F(x, 1) \in S^{n-1} \sqcup Y$ para todo $x \in U \sqcup Y$.
3. $F(x, t) = x$ para todo $x \in S^{n-1} \sqcup Y$ y todo $t \in I$.

Se sigue que $S^{n-1} \sqcup Y$ es un retracto por deformación fuerte de $U \sqcup Y$.

Si $p: D^n \sqcup Y \rightarrow Y_f$ denota a la proyección canónica, se define U_f como la imagen de U mediante p . Queremos ver que Y es un retracto por

deformación fuerte de U_f en Y_f . Para ello, considérese la homotopía

$$\begin{aligned} G: U_f \times I &\longrightarrow U_f \\ ([x], t) &\longmapsto F(x, t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Es fácil ver que G está bien definida. Para ver que es continua, considérese el diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} (U \sqcup Y) \times I & \xrightarrow{F} & U \sqcup Y \\ \downarrow p \times \text{id}_I & & \downarrow p \\ U_f \times I & \xrightarrow{G} & U_f \end{array} \quad (4.4)$$

Dado que F y p son continuas, $G \times (p \times \text{id}_I) = p \circ F$ es continua, por lo que G es continua. De aquí se sigue que Y es un retracto por deformación fuerte de U_f . \square

Proposition 4.1.5 *Dada una aplicación continua $f: S^{n-1} \rightarrow Y$,*

$$H_p(Y_f, Y) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Demostración. Consideremos la composición

$$h: D^n \hookrightarrow D^n \sqcup Y \xrightarrow{p} Y_f$$

El espacio $D^n \setminus S^{n-1}$ es homeomorfo a $Y_f \setminus Y$, puesto que $Y_f = Y \cup_f D^n$, de forma que h induce un homeomorfismo relativo entre los pares (D^n, S^{n-1}) e (Y_f, Y) .

La esfera S^{n-1} es un retracto por deformación fuerte del entorno compacto $U = \{x \in D^n : \|x\| \geq 1/2\}$, y sabemos por el 4.1.4 que Y es un retracto por deformación fuerte de algún entorno U_f compacto de Y en Y_f . Por el teorema del homeomorfismo relativo (3.5.1), se tiene que

$$h_*: H_*(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_*(Y_f, Y)$$

es un isomorfismo.

Se tiene entonces que

$$H_*(Y_f, Y) \cong H_*(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_*(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

\square

Proposition 4.1.6 *Sea Y un espacio topológico y $f: S^{n-1} \rightarrow Y$ una aplicación continua. Si $f_*: \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(Y)$,*

1. $H_p(Y_f) \cong H_p(Y)$ para todo p distinto a n y $n - 1$;

2. $H_{n-1}(Y_f) \cong H_{n-1}(Y)/\text{Im } f_*$;
 3. la sucesión

$$0 \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(Y_f) \longrightarrow \ker f_* \longrightarrow 0 \quad (4.5)$$

es exacta.

Demostración. Consideremos la sucesión exacta larga asociada al par de espacios (Y_f, Y) :

$$\dots \longrightarrow H_{p+1}(Y_f, Y) \longrightarrow H_p(Y) \xrightarrow{\beta} H_p(Y_f) \longrightarrow H_p(Y_f, Y) \longrightarrow \dots$$

Como vimos en el 4.1.2,

$$H_p(Y_f, Y) \cong \tilde{H}_p(S^n) \cong \tilde{H}_{p-1}(S^{n-1})$$

Para $p \neq n, n-1$, $\tilde{H}_p(S^n) = 0$, por lo que $\ker \beta = 0$ y $\text{Im } \beta = H_p(Y_f)$. Se sigue entonces la primera afirmación:

$$H_p(Y_f) \cong H_p(Y)$$

Para $p = n$ y $p = n-1$, se tiene la sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{H}_n(S^{n-1}) &\longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(Y_f) \xrightarrow{\beta} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} \\ &\xrightarrow{f_*} H_{n-1}(Y) \xrightarrow{\alpha} H_{n-1}(Y_f) \longrightarrow \tilde{H}_{n-2}(S^{n-1}) = 0 \end{aligned}$$

donde $\text{Im } \beta = \ker f_*$, $\text{Im } f_* = \ker \alpha$ y $\text{Im } \alpha = H_{n-1}(Y_f)$ por exactitud. Aplicando el primer teorema de isomorfía, se tiene la segunda afirmación:

$$H_{n-1}(Y_f) = \text{Im } \alpha \cong \frac{H_{n-1}(Y)}{\ker \alpha} = \frac{H_{n-1}(Y)}{\text{Im } f_*}$$

Ahora bien: como $\text{Im } \beta = \ker f_*$, la sucesión

$$0 \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(Y_f) \xrightarrow{\beta} \ker f_* \longrightarrow 0$$

es exacta, que es la tercera afirmación. \square

4.2. Espacios CW-complejos

Sean D_1^n, \dots, D_p^n una familia de n -células disjuntas con respectivas fronteras $S_1^{n-1}, \dots, S_p^{n-1}$. Dado un $1 \leq i \leq p$, considérese la aplicación continua

$$f_i: S_i^{n-1} \longrightarrow Y$$

siendo Y un espacio topológico arbitrario. Si $\mathcal{D}^n = D_1^n \sqcup \dots \sqcup D_p^n$ y $S^{n-1} = \partial \mathcal{D}^n = S_1^{n-1} \sqcup \dots \sqcup S_p^{n-1}$, definimos sobre $\mathcal{D}^n \sqcup Y$ la siguiente relación de equivalencia:

$$\forall x \in S_i^{n-1} \quad x \sim f_i(x); \quad i = 1, \dots, p$$

Definimos entonces el espacio

$$Y_{f_1, \dots, f_p} = \frac{\mathcal{D}^n \sqcup Y}{\sim}$$

Proposition 4.2.1 Sea (X, Y) un par de espacios C_2 . Si existe un homeomorfismo relativo

$$F: (\mathcal{D}^n, S^{n-1}) \longrightarrow (X, Y)$$

que sea una prolongación continua de f_1, \dots, f_p , entonces X es homeomorfo a Y_{f_1, \dots, f_p} .

Definition 4.2.1

1. Un CW-complejo finito de dimensión 0 es una colección finita de puntos $\{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^t$.
2. Sea Y un CW-complejo finito de dimensión $k \geq 0$. Un espacio topológico C_2 X es un CW-complejo finito de dimensión n si existen $f_i: S^{n-1} \longrightarrow Y, i = 1, \dots, s$, tales que X es homeomorfo a Y_{f_1, \dots, f_s} .

Hemos definido los CW-complejos de dimensión n como un proceso iterativo que da lugar a una serie de CW-complejos intermedios

$$X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X^n$$

Cada uno de los X^k se denomina **k -esqueleto** del CW-complejo. Notar que X^n es el CW-complejo completo.

Example 4.2.1 El 4.1.2 describe una construcción de S^2 como CW-complejo de forma que el 1-esqueleto y el 0-esqueleto son el mismo conjunto, porque no adjuntamos ninguna 1-célula a X^0 . Pero un CW-complejo puede admitir muchas estructuras diferentes.

Consideremos la siguiente estructura: sean

$$X^0 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (-1, 0, 0)\}$$

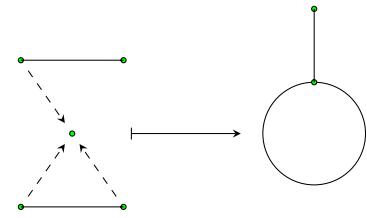
tres puntos del ecuador. Adjuntamos a X^0 tres 1-células, D_1^1, D_2^1 y D_3^1 , de forma que $S^1 \cong X^1$.

Finalmente, adjuntamos dos 2-células D_1^2 y D_2^2 a X^1 . Esto sería X^2 , que es homeomorfo a todo S^2 .

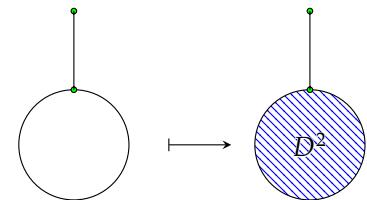
En general, podemos generar una descomposición de S^n de forma que cada k -esqueleto sea S^k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$); no obstante, en ese caso tendríamos que el 0-esqueleto son dos puntos, dado que

$$S^0 = \{x \in D^1 : \|x\| = 1\} = \{x \in [-1, 1] : |x| = 1\} = \{\pm 1\}$$

De esta forma, tenemos que un espacio topológico no induce una descomposición como CW-complejo de forma única. Si comparamos este proceso con el que seguimos en el 4.1.2, tenemos que no tienen el mismo número de células y sus 1-esqueletos no son homeomorfos, de forma que no son *estructuras equivalentes*.



(a) Usando 1-células, podemos construir un complejo de dimensión 1...



(b) ...y después añadir células de orden superior, creando figuras más complejas como una piruleta.

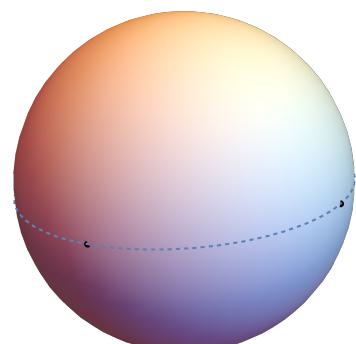


Figura 4.4: Espacio S^2 construido utilizando el 4.2.1.

Theorem 4.2.2 (Caracterización de CW-complejos finitos) *Un espacio topológico compacto X es un CW-complejo finito de dimensión n si y sólo si podemos hallar una sucesión de subespacios*

$$X^0 \subseteq X^1 \subseteq \cdots \subseteq X^n = X$$

y una partición de subconjuntos

$$\{D_i^k : k = 0, 1, \dots, n; i = 1, 2, \dots, r_k\}$$

(llamada descomposición celular) tales que

1. existe un homeomorfismo relativo

$$h: (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (\overline{D_i^k}, \overline{D_i^k} \setminus D_i^k)$$

para cada i y k ;

2. dado un $1 \leq k \leq n$, $\overline{D_i^k} \setminus D_i^k \subseteq X^{k-1}$.

Hagamos un par de incisos en este teorema.

- Observar que $\overline{D_i^k} \setminus (\overline{D_i^k} \setminus D_i^k) = D_i^k$. Aplicando el teorema anterior, se sigue que D_i^k es homeomorfo a una bola abierta de \mathbb{R}^k . Esto implica que las n -células son conexas, compactas y abiertas para todo $n > 0$.
- La condición de compactidad viene dada porque la adjunción de espacios compactos es compacto, pero ninguna de las otras condiciones garantizan que X sea compacto.

Example 4.2.2 1. Este teorema proporciona otra forma de ver que S^n admite una estructura de CW-complejo: para $n = 1$, sea $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Tenemos que $X = S^1$ admite una estructura de CW-complejo tomando

$$\begin{aligned} X^0 &= \{(1, 0)\}; & X^1 &= S^1; \\ D^0 &= \{(1, 0)\}; & D^1 &= f([0, 1]); \end{aligned}$$

Para $n = 2$, sea $g: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación

$$g(u, v) = (\cos(2\pi u) \cos(2\pi v), \cos(2\pi u) \sin(2\pi v), \sin(2\pi u))$$

Entonces, $Y = S^2$ admite una estructura de CW-complejo tomando

$$\begin{aligned} Y^0 &= \{(1, 0, 0)\}; & D^0 &= \{(1, 0, 0)\}; \\ Y^1 &= S^1 & D_1^2 &= g([0, 1] \times ([0, 3/4] \cup [3/4, 1])); \\ D^1 &= g([0, 1] \times \{0\}); & D_2^2 &= g([0, 1] \times ([1/4, 3/4])); \end{aligned}$$

2. El segmento I admite una estructura de CW-complejo dada por la descomposición celular $\{\{0\}, \{1\},]0, 1[\}$. En general, toda línea poligonal formada por una cantidad finita de segmentos admite una estructura trivial de CW-complejo.

Example 4.2.3 1. El conjunto $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ con la topología inducida por la métrica usual de \mathbb{R} no es un CW-complejo finito, porque no es compacto.

2. El **pendiente hawaiano** es un ejemplo de espacio topológico compacto que no tiene estructura de CW-complejo. Si $C(\alpha, \beta)$ denota la circunferencia de centro $\alpha \in \mathbb{R}^2$ y radio $\beta > 0$, se define el pendiente hawaiano como el espacio topológico

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} C(\alpha_n, \beta_n) \quad \left(\alpha_n = \left(\frac{1}{n}, 0 \right), \quad \beta_n = \frac{1}{n} \right)$$

Intuitivamente, esto se debe a que tiene una cantidad infinita de anillos, y cada uno tendría que ser una 1-célula independiente.

Proposition 4.2.3 *El producto de CW-complejos finitos es un CW-complejo finito.*

Demostración. Sean $\mathcal{C} = \{D_i^k : k = 0, 1, \dots, n; i = 1, 2, \dots, r_k\}$ y $\mathcal{D} = \{\Delta_j^\ell : j = 0, 1, \dots, m; \ell = 1, 2, \dots, r_j\}$ respectivas descomposiciones celulares de X e Y . Queremos ver que el conjunto

$$\mathcal{E} = \{U \times V : U \in \mathcal{C}, V \in \mathcal{D}\}$$

forma una descomposición celular de $X \times Y$.

Claramente, los elementos de \mathcal{E} son disjuntos dos a dos por construcción. Veamos que forman un recubrimiento de $X \times Y$:

$$X \times Y = \left(\bigcup_{U \in \mathcal{C}} U \right) \times \left(\bigcup_{V \in \mathcal{D}} V \right) = \bigcup_{U \in \mathcal{C}} \bigcup_{V \in \mathcal{D}} U \times V$$

Para demostrar este resultado, aplicaremos el 4.2.2: dados i, j, k, ℓ ,

$$\begin{aligned} U &= (\overline{D_i^k} \times \Delta_j^\ell) \setminus (D_i^k \times \hat{D}_j^\ell) = (\overline{D_i^k} \times \overline{\Delta_j^\ell}) \setminus (D_i^k \times \hat{D}_j^\ell) = \\ &= [(\overline{D_i^k} \setminus D_i^k) \times \overline{\Delta_j^\ell}] \cup [\overline{D_i^k} \times (\overline{\Delta_j^\ell} \setminus \Delta_j^\ell)] \end{aligned}$$

Sabemos por hipótesis que $(\overline{D_i^k} \setminus D_i^k) \subseteq X^{k-1}$ y $\overline{\Delta_j^\ell} \setminus \Delta_j^\ell \subseteq Y^{\ell-1}$, por lo que $U \subseteq (X \times Y)^{k+\ell-1}$. Esto prueba la primera condición.

Pasemos a la segunda: sean $U \in \mathcal{C}$ y $V \in \mathcal{D}$. Si

$$f: (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (\overline{U}, \overline{U} \setminus U); \quad g: (D^\ell, S^{\ell-1}) \rightarrow (\overline{V}, \overline{V} \setminus V)$$

son homeomorfismos relativos, se tiene que

$$f \times g: (D^{k+\ell}, S^{k+\ell-1}) \rightarrow (\overline{V} \times \overline{U}, (\overline{V} \times \overline{U}) \setminus (U \times V))$$

es un homeomorfismo relativo. \square

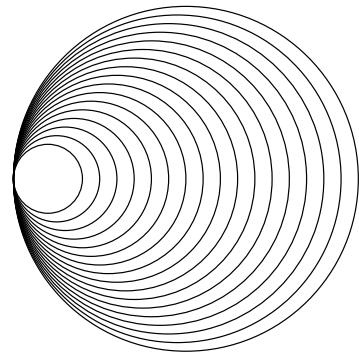


Figura 4.5: Primeras 16 iteraciones del pendiente hawaiano.

Example 4.2.4 1. El cilindro con bordes se define como $C = S^1 \times [0, 1]$. Podemos asignar una estructura de CW-complejo a C usando una estructura prefijada de S^1 y otra de $[0, 1]$:

$$[0, 1] \begin{cases} 0\text{-c\'elulas: } p = \{0\} \\ 1\text{-c\'elulas: } q = \{1\} \\ \alpha =]0, 1[\end{cases} \quad S^1 \begin{cases} 0\text{-c\'elulas: } r = \{(1, 0)\} \\ 1\text{-c\'elulas: } \beta = S^1 - r \end{cases}$$

Estas estructuras inducen la siguiente descomposición celular sobre el cilindro:

$$C \begin{cases} 0\text{-c\'elulas: } p \times r, q \times r \\ 1\text{-c\'elulas: } \alpha \times r, p \times \beta, q \times \beta \\ 2\text{-c\'elulas: } \alpha \times \beta \end{cases}$$

2. El toro se puede expresar como $S^1 \times S^1$, por lo que admite una estructura de CW-complejo finito.

Consideremos la siguiente descomposición celular de S^1 :

$$S^1 \begin{cases} 0\text{-c\'elulas: } p = \{(1, 0)\} \\ 1\text{-c\'elulas: } \alpha = S^1 - p \end{cases} \quad S^1 \begin{cases} 0\text{-c\'elulas: } r = \{(1, 0)\} \\ 1\text{-c\'elulas: } \beta = S^1 - r \end{cases}$$

Estas estructuras inducen la siguiente descomposición celular sobre el toro:

$$S^1 \times S^1 \begin{cases} 0\text{-c\'elulas: } p \times r \\ 1\text{-c\'elulas: } \alpha \times r, p \times \beta \\ 2\text{-c\'elulas: } \alpha \times \beta \end{cases}$$

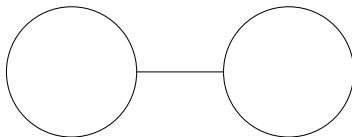


Figura 4.6: 1-esqueleto del cilindro. Observar que se puede retrazar en una figura ocho.

4.2.1. Subcomplejos

Sea X un CW-complejo finito y \mathcal{C} una descomposición celular de X . Decimos que un subespacio $A \subseteq X$ es un **subcomplejo** de X si, dado $D \in \mathcal{C}, D \cap A \neq \emptyset$ implica que $\overline{D} \subseteq A$. Esta condición se puede expresar como que A absorbe a todas las células con las que entra en contacto.

Todo subcomplejo de un cierto complejo X conforma un subespacio cerrado. Además, aplicando el 4.2.2, todo subcomplejo es un complejo en sí mismo. En particular, todos los k -esqueletos de X son subcomplejos.

Proposition 4.2.4 Si A es un subcomplejo de un CW-complejo finito X , A es un retracto por deformación fuerte de algún entorno compacto de A en X .

Demostración. Sea N el número de células que componen el espacio $X \setminus A$. Si $N = 0$, $X = A$, por lo que A es un retracto por deformación fuerte de X de forma trivial y se sigue la tesis por compacidad de X .

Si $N = 1$, existe una aplicación $f: S^{n-1} \rightarrow A$ continua tal que $X = A \cup_f D^n$. En tal caso, podemos limitarnos a aplicar el 4.1.4.

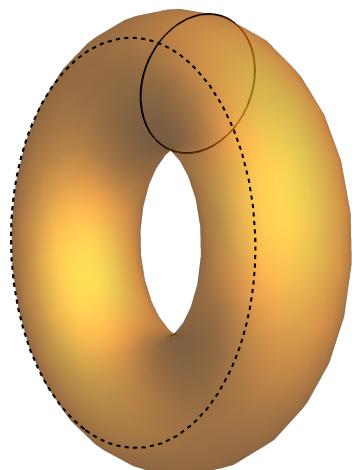


Figura 4.7: 1-esqueleto del toro.

Supongamos que el resultado es cierto para cualquier par de CW-complejos finitos (Y, B) tales que $Y \setminus B$ posee a lo sumo $N - 1$ células, y sea (X, A) un par de CW-complejos tales que $X \setminus A$ tiene exactamente N células. Si D_i^m es una célula de $X \setminus A$ de dimensión máxima, se define el subespacio $Y = X \setminus D_i^m$.

Queremos ver que Y es un subcomplejo de X . Como D_i^m es una célula de dimensión máxima, todas las células de $X \setminus A$ tienen dimensión m o menos; de esta forma, toda célula de X con dimensión mayor que m forma parte del subcomplejo A . En consecuencia, si D_j^k es una célula de Y , se tiene que $D_j^k \subset A$ ó $k \leq m$.

Si $D_j^k \subset A$, $\overline{D_j^k} \subseteq A$ por ser A un subcomplejo de X , de forma que

$$D_i^m \cap \partial D_j^k \subseteq D_i^m \cap A = \emptyset$$

En cambio, si $k \leq m$, se tiene por 4.2.2 que

$$\partial D_j^k = \overline{D_j^k} \setminus D_j^k \subseteq X^{k-1}$$

Dado que $k - 1 < m$, se cumple una vez más que $D_i^m \cap \partial D_j^k = \emptyset$. Se sigue que Y es subcomplejo de X .

Dado que A es un subcomplejo de X y $D_i^m \subset X \setminus A$, $A \cap D_i^m = \emptyset$, por lo que es un subcomplejo de Y . Como Y tiene una célula menos que X , el par (Y, A) verifica la hipótesis de inducción, por lo que existe un entorno U_1 compacto de A en X tal que A es un retracto por deformación fuerte de U_1 .

Sea $f: S^{m-1} \rightarrow Y$ una aplicación continua tal que $X = Y \cup_f D^m$. Podemos hallar un homeomorfismo relativo

$$\phi: (D^m, S^{m-1}) \rightarrow (\overline{D_i^m}, \overline{D_i^m} \setminus D_i^m)$$

que extienda a f de forma continua. Como U_1 es compacto en Y y ϕ es un homeomorfismo, $\phi^{-1}(U_1)$ es un compacto de $S^{m-1} \subset D^m$. Si

$$\begin{aligned} r: D^m \setminus \{0\} &\longrightarrow S^{m-1} \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|} \end{aligned} \tag{4.6}$$

es la retracción radial, el conjunto

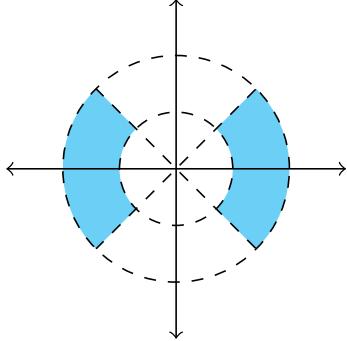
$$V = \{\phi(x) : x \in D^m, \|x\| \geq 1/2, r(x) \in \phi^{-1}(U_1)\}$$

también es compacto.

Veamos cómo se construye el conjunto V : las células se adhieren al CW-complejo por el borde, por lo que podemos pensar que la aplicación ϕ abomba D^m para darle forma de hemisferio y pegarlo a Y por la línea del ecuador. Se tiene entonces que $X = Y \cup \phi(D^m)$ (ver Figura ??).

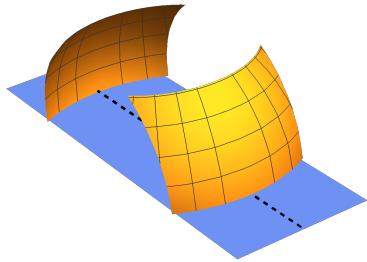
Dado que $Y \cap \phi(D^m) = f(S^{m-1})$, $\phi^{-1}(U_1) = f^{-1}(U_1)$ está contenido en S^{m-1} . En particular, x no tiene por qué estar en $\phi^{-1}(U_1)$, por lo que lo retraemos mediante una aplicación adicional. Finalmente, elegimos sólo los puntos que están entre las esferas concéntricas de radios $1/2$ y 1 (ver Figura 4.8a).

El conjunto $U_1 \cap V$ es un retracto por deformación de V , y A es un retracto por deformación de U_1 , de forma que A será un retracto por deformación de $U_1 \cup V$ (ver Figura 4.8c).



(a) El conjunto $\phi^{-1}(V)$ corresponde a la región coloreada. $\phi^{-1}(U_1)$ son los puntos de la región coloreada que recaen sobre la esfera de radio 1.

(b) Representación de los conjuntos A , U_1 y la bola $\phi(D^m)$ en Y .



(c) Podemos retrajar V (superficies arqueadas) en U_1 (banda plana) y U_1 en A (línea discontinua).

Figura 4.8: Pasos ilustrados de la demostración.

Ya sabemos que $U_1 \cup V$ se puede retrajar en A . Dado que es unión de compactos, es trivialmente compacto, de forma que habremos terminado la demostración si podemos probar que $U_1 \cup V$ es entorno en X de A .

Sea $y \in \text{Int}_Y(U_1)$. Si $y \notin V$, $y \in \text{Int}_X(U_1)$ (representado como una banda en la ilustración ??), por lo que también estará en $\text{Int}_X(U_1 \cup V)$.

Si $y \in V$, se tiene que $y \in \overline{D_i^m} \setminus D_i^m = \phi(D^m \setminus \partial D^m) = f(S^{m-1})$. Por otro lado, $\phi^{-1}(\text{Int}_Y(U_1))$ es un abierto de S^{m-1} que contiene a $\phi^{-1}(y)$ (por cómo se define V), de forma que

$$\phi^{-1}(y) \in \text{Int}_{S^{m-1}} \phi^{-1}(V) \implies y \in \text{Int}_{\overline{D_i^m}}(V)$$

Dado que D_i^m es una célula de X , se sigue que $y \in \text{Int}_X(U_1 \cup V)$.

Como U_1 es un entorno de A en Y ,

$$A \subseteq \text{Int}_Y(U_1) \subseteq \text{Int}_X(U_1 \cup V)$$

por lo que $U_1 \cup V$ es entorno de A en X . Pero eso es lo que nos quedaba por demostrar. \square

4.3. Grupos de homología celular

Corollary 4.3.1 Si X es un CW-complejo finito y X^k es el k -esqueleto de X ,

$$H_j(X^k, X^{k-1}) = 0 \quad \forall j \neq k$$

Además, $H_k(X^k, X^{k-1})$ es un grupo abeliano libre con un generador por cada k -célula de X , conocido como el **grupo de homología celular** de orden k .

Demostración. Sabemos que X^{k-1} es un subcomplejo de X^k . Por la proposición anterior, existe un entorno compacto $U \subseteq X^k$ de X^{k-1} tal que X^{k-1} es un retracto por deformación fuerte de U .

Como X es un CW-complejo finito, podemos hallar un homeomorfismo relativo

$$\phi : (\mathcal{D}^k, S^{k-1}) \longrightarrow (X^k, X^{k-1})$$

utilizando los homeomorfismos h que nos proporciona el teorema de caracterización de CW-complejos finitos. Aplicando el teorema del homeomorfismo relativo, se sigue que

$$\begin{aligned} H_*(X^k, X^{k-1}) &\cong H_*(\mathcal{D}^k, S^{k-1}) \cong \sum_{i=1}^r H_*(D_i^k, S_i^{k-1}) \\ &\cong \sum_{i=1}^r \tilde{H}_*(S^k) \cong \tilde{H}_*(S^k)^r \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^r & \text{si } p = k \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \end{aligned}$$

\square

Example 4.3.1 Vamos a calcular la homología de la rosa de p pétalos utilizando los grupos de homología celular. Por la proposición 4.1.6,

$$H_j(B_p) \cong H_j(\{\star\}) = 0$$

para todo $j > 1$. Para $j = 1$,

$$H_1(B_p) \cong \tilde{H}_1(B_p) \cong H_1(B_p, \{\star\})$$

Dado que $\{\star\}$ es el 0-esqueleto de B_p , que tiene p 1-células, se tiene que dicho grupo es isomorfo a \mathbb{Z}^p .

4.4. Homología de la n -rosa

Para $j = 1, \dots, p$, sea $f_j: \partial D^n \rightarrow \{\star\}$ la aplicación constante. Se define la n -rosa de p pétalos como la adjunción

$$X = B_p^n = \{\star\}_{f_1, \dots, f_p}$$

Por el corolario 4.3.1, sabemos que $H_n(X^n, X^{n-1}) \cong \mathbb{Z}^p$ y $H_m(X^n, X^{n-1}) = 0$ para todo $m \neq n, 0$. Sin embargo, $X^{n-1} = X^0 = \{\star\}$, por lo que

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^p &\cong H_n(X, X^{n-1}) = \tilde{H}_n(X); \\ 0 &= H_m(X, X^{n-1}) = \tilde{H}_m(X); \quad (m \neq n) \end{aligned}$$

Theorem 4.4.1

$$\tilde{H}_m(B_p^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^p & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

Al igual que pasaba con la 1-rosa, cada pétalo que adjuntamos aporta un nuevo generador, sólo que en este caso es la clase de un n -símplice singular.

4.4.1. Rosa mixta

¿Qué pasaría si mezcláramos pétalos de diferentes dimensiones? Intuitivamente, cada pétalo de dimensión k debería añadir un generador de orden k .

Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Si $f: \{\star\} \rightarrow \{\star\}$ es la identidad, definimos

$$B_\alpha := \{\star\} \cup_f B_{\alpha_1}^1 \cup_f B_{\alpha_2}^2 \cup_f \cdots \cup_f B_{\alpha_n}^n$$

siendo $B_0^k = \{\star\}$.

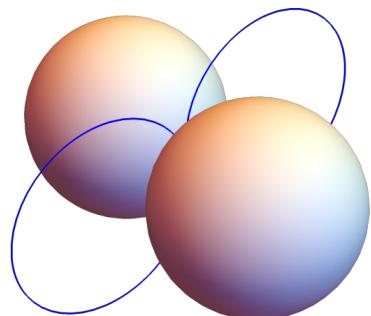


Figura 4.9: Ejemplo de rosa mixta $B_{(2,2)}$.

Theorem 4.4.2^a Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$H_m(B_\alpha) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0 \\ \mathbb{Z}^{\alpha_i} & \text{si } m = i \\ 0 & \text{si } m > n \end{cases}$$

^a Este resultado está basado en una conversación que tuve con mi directora del TFG, pero no pensé en añadirlo en su momento.

Idea de la demostración

- Probamos que la tesis se cumple cuando la rosa tiene k_1 pétalos de dimensión 1 (ya lo hemos hecho).
- Suponemos que la tesis se cumple cuando la rosa tiene k_1 pétalos de dimensión 1, k_2 pétalos de dimensión 2, y así hasta dimensión $n - 1$.
- Probamos que, como consecuencia, la tesis se cumple cuando añadimos k_n pétalos de dimensión n .

Esta prueba puede ser conceptualmente engorrosa, así que es recomendable tratar de hacer primero ejemplos para $n = 2, 3, 4$.

Demostración. Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, procedemos por inducción sobre n . Si $n = 1$, B_α es una 1-rosa de α_1 pétalos, y la tesis se cumple por 4.4.1.

Sea $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, y $X = B_{\alpha'}$. Supongamos que la tesis se cumple para X y sean $f_i: S^{n-1} \rightarrow \{\star\}$ aplicaciones constantes. Tenemos entonces que

$$B_\alpha = X_{f_1 \dots f_{\alpha_n}}$$

Por la 4.1.6, si $(f_i)_*: \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(\{\star\}) = \{0\}$, se cumple lo siguiente:

1. Para todo $p \neq n, n - 1$,

$$H_p(X_{f_1 \dots f_{\alpha_n}}) = H_p(X)$$

Por hipótesis de inducción, $H_p(X) \cong \mathbb{Z}^{\alpha_p}$ cuando $p < n - 1$ y $\{0\}$ cuando $p > n - 1$.

2. Como $(f_i)_*$ va a parar a $\{0\}$ para todo i , $\text{Im}(f_i)_* = \{0\}$ y

$$\begin{aligned} H_{n-1}(X_{f_1 \dots f_{\alpha_n}}) &\cong \frac{H_{n-1}(X_{f_1 \dots f_{\alpha_{n-1}}})}{\text{Im}(f_{\alpha_n})_*} \cong H_{n-1}(X_{f_1 \dots f_{\alpha_{n-1}}}) \cong \\ &\cong \frac{H_{n-1}(X_{f_1 \dots f_{\alpha_{n-2}}})}{\text{Im}(f_{\alpha_{n-1}})_*} \cong H_{n-1}(X_{f_1 \dots f_{\alpha_{n-2}}}) \cong \\ &\cong \dots \cong H_{n-1}(X) \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción una vez más, ésto es $\mathbb{Z}^{\alpha_{n-1}}$.

El tercer ítem requiere que hagamos inducción sobre el número de pétalos de dimensión n^* . Dado un espacio Y arbitrario, sabemos por la 4.1.6 que la secuencia

$$0 \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(Y_f) \longrightarrow \ker f_* \longrightarrow 0$$

es exacta. En particular, $\ker f_* = \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ por el , por lo que

$$\mathbb{Z} \cong \frac{H_n(Y_f)}{H_n(Y)} \tag{4.7}$$

En este caso, $H_n(X) = \{0\}$ por hipótesis de inducción, por lo que $H_n(X_{f_1}) \cong \mathbb{Z}$.

^{*} Al principio, pensé que era necesario tratar este resultado como una *doble inducción*, así que decidí leer sobre el tema. Si bien he conseguido reducirlo a una inducción aislada dentro de otra, creo que es un tema interesante, así que he decidido escribir un pequeño apéndice sobre el tema.

Supongamos que $H_n(X_{f_1 \dots f_{\alpha_n-1}}) \cong \mathbb{Z}^{\alpha_n-1}$. Usando (4.7), concluimos que

$$H_n(X_{f_1 \dots f_{\alpha_n}}) \cong H_n(X_{f_1 \dots f_{\alpha_n-1}}) \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{\alpha_n}$$

concluyendo así ambas inducciones. Se sigue la tesis. \square

5 Homología de las superficies compactas

5.0.1 Homología del n -toro ⁶⁸
 5.0.2 Espacio proyectivo real ⁶⁹

Según el teorema de clasificación de superficies compactas, toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a S^2 , a la suma conexa de n toros o a la suma conexa de n planos proyectivos. Entre otras cosas, eso hace que las componentes conexas de una superficie sean arcoconexas, dado que la arcoconexión es una propiedad topológica.

Si llamamos S_1, \dots, S_n a las componentes conexas de S , se tiene que

$$H_*(S) \cong \sum_{i=1}^n H_*(S_i)$$

por lo que podemos suponer a efectos de homología que S es arcoconexa.

Por limitaciones de tiempo, nos restringiremos al caso de las superficies orientables, que es más breve.

Suma conexa de variedades

Sea X un espacio topológico Hausdorff y 2AN. Decimos que X es una

n -variedad si, dado $p \in X$, existe un entorno abierto $U \subset X$ de p que sea homeomorfo a una bola abierta de \mathbb{R}^n . Dadas dos n -variedades X y Y , se

definen las sumas conexas

Figura 5.1.

$X \# Y = (X \setminus U) \cup (Y \setminus V)$.

Si eliminamos el interior de T_n , la figura resultante será B_{2n}^1 .

Si consideramos una aplicación $f: S^1 \rightarrow B_{2n}^1$ tal que

$f: \partial U \rightarrow \partial V$ continua.

Homología del n -toro

El n -toro (que denotaremos como T_n) se define como la suma conexa de n toros. Podemos hacer la suma conexa de los representantes llanos, \mathbb{R}^n . Dadas dos n -variedades X y Y , se

definen las sumas conexas

Figura 5.1.

$$c_j = (f \circ \gamma) \left(\frac{j-1}{2n}, \frac{j}{2n} \right)$$

Ejercicio

Comprueba que la cadena singular c que estamos definiendo verifica que $f([c]) = 0$ para $n = 1, 2$. Para $n = 2$, puedes usar la Figura 5.1.

Vamos a estudiar la aplicación $f_*: \tilde{H}_1(S^1) \rightarrow H_1(B_{2n}^1)$. El grupo $\tilde{H}_1(S^1)$ para $n = 2$, puedes usar la Figura 5.1. tiene un único generador, $[c]$. Como representante c , podemos elegir como referencia; para $n = 1, 3$, es bueno dibujar el n -toro y elegir cualquier camino que dé una vuelta completa a S^1 (si no da una vuelta completa, lo podemos contraer en un punto, por lo que está en la clase del 0). En particular, podemos elegir

$$c = \phi_1 + \phi_2 - (\phi_3 + \phi_4) + \dots + \phi_{2n-3} + \phi_{2n-2} - (\phi_{2n-1} + \phi_{2n})$$

donde $\phi_j(\sigma_1) = c_j$. Esta elección verifica que $f([c]) = 0$. Por tanto,

$$\text{Im } f_* = \{0\}; \quad \ker f_* = \tilde{H}_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

Por la proposición ??, $H_p(T_n) \cong H_p(B_{2n}^1) = 0$ para todo $p > 2$ y $H_1(T_n) \cong H_1(B_{2n}^1) \cong \mathbb{Z}^{2n}$. Sólo nos queda calcular el grupo de homología de orden 2:

$$0 \longrightarrow H_2(B_{2n}^1) \longrightarrow H_2(T_n) \longrightarrow \tilde{H}_1(S^1) \longrightarrow 0$$

Dado que $H_2(B_{2n}^1) = 0$, se tiene por exactitud que

$$H_2(T_n) \cong \tilde{H}_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

De esta forma,

$$H_n(T_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{2n} & \text{si } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Theorem 5.0.1 Sea S una superficie compacta y orientable con α componentes conexas. Existe un $n \geq 0$ tal que

$$H_q(S) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{2n\alpha} & \text{si } q = 1 \\ \mathbb{Z}^\alpha & \text{si } q = 0, 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

El valor n se denomina **género** de la superficie.

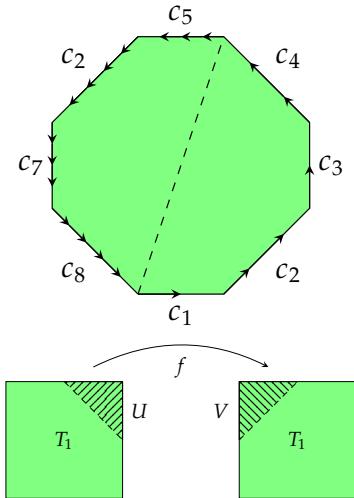


Figura 5.1: Bitoro llano. Los lados con el mismo número de cabezas de flecha se identifican entre sí. La línea discontinua separa los dos toros que lo conforman.

5.0.2. Espacio proyectivo real

Definition 5.0.1 Dados $v, w \in S^n$, diremos que $v \sim w$ si $w = \pm v$. Definimos el espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n$ como el cociente S^n / \sim .

El espacio proyectivo real se puede entender como el espacio topológico cuyos puntos son las rectas de \mathbb{R}^{n+1} que pasan por cero. Una forma de entender $\mathbb{R}P^n$ es como el menor espacio compacto que contiene a \mathbb{R}^n como subespacio.

¿Qué significa que \mathbb{R}^n sea subespacio de $\mathbb{R}P^n$?

Sea $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ la proyección canónica. Dado un punto $[x] \in \mathbb{R}P^n$, $\pi^{-1}([x]) = \{x, -x\}$. Decimos entonces que S^n cubre a $\mathbb{R}P^n$ dos veces.

Sea B^n la bola abierta unidad de \mathbb{R}^n . La aplicación $f: \mathbb{R}^n \rightarrow B^n$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}$$

es un homeomorfismo. Por otro lado,

$$\begin{aligned} g: B^n &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto (x, \sqrt{1 - \|x\|^2}) \end{aligned} \tag{5.1}$$

es un homeomorfismo que envía a B^n en el hemisferio norte de S^n (menos el ecuador). Si $E_+^n = g(B^n)$, $\pi|_{E_+^n}$ es un homeomorfismo (observa que S^n es compacto y $\mathbb{R}P^n$ es Hausdorff). Si conectamos todas estas aplicaciones, obtenemos

$$h: \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} B^n \xrightarrow{g} E_+^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}P^n \tag{5.2}$$

Una consecuencia de nuestro proceso es que h es un homeomorfismo sobre su imagen; sin embargo, no es sobreyectiva, por lo que su imagen es un subespacio de $\mathbb{R}P^n$. Ya que \mathbb{R}^n es homeomorfo a $h(\mathbb{R}^n)$, decimos por asociación que \mathbb{R}^n es un subespacio de $\mathbb{R}P^n$.

Otra posible interpretación, más en línea con la geometría sintética, es que $\mathbb{R}P^n$ es una extensión de \mathbb{R}^n donde todo par de rectas paralelas se cruzan en *el infinito*. Esta interpretación da lugar a la geometría proyectiva, cuyo objetivo es diseñar técnicas geométricas que no dependan de la perspectiva. Los lectores interesados pueden ver una aplicación de geometría proyectiva en [Numberphile].

Numberphile

Podemos identificar S^n con el subespacio de S^{n+1} de ecuación $x_{n+2} = 0$ (el ecuador), en cuyo caso tenemos la inclusión $i: S^n \hookrightarrow S^{n+1}$. Esta aplicación induce una inclusión sobre los cocientes,

$$j: \mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$$

En el cuadro anterior, vimos que la aplicación $\pi \circ g$ lleva a B^{n+1} en un subespacio de $\mathbb{R}P^{n+1}$. Dado que $D^{n+1} = \overline{B^{n+1}}$, $\pi \circ g$ induce una aplicación sobreyectiva $G: D^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$, que a su vez da lugar a

$$G \cup j: D^{n+1} \cup \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$$

Dado un $p \in \mathbb{R}P^{n+1}$, $G^{-1}(p)$ puede ser un único punto de $D^{n+1} \setminus S^n$ o un par $\{x, -x\}$ en S^n . Usando el 4.1.3, concluimos que $\mathbb{R}P^{n+1}$ es homeomorfo al espacio de adjunción $\mathbb{R}P_\pi^n$.

Para $n = 1$, $\mathbb{R}P^1$ es homeomorfo a S^1 , por lo que ambos espacios tienen el mismo tipo de homología. Para $n = 2$, la proyección canónica $\pi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ induce una aplicación en homología $\pi_*: \tilde{H}_1(S^1) \rightarrow H_1(\mathbb{R}P^1)$.

Sean $\alpha, \beta: I \rightarrow S^1$ las aplicaciones

$$\alpha(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t); \quad \beta(t) = \alpha(t + 1);$$

Podemos identificar α y β con 1-símplices singulares, en cuyo caso $[\alpha + \beta]$ es un generador de $\tilde{H}_1(S^1)$. Usando propiedades de trigonometría elemental, observamos que $\pi \circ \alpha = \pi \circ \beta$, por lo que

$$\pi_*([\alpha + \beta]) = 2[\alpha]$$

y $\text{Im } \pi_* \cong 2\mathbb{Z}$. Usando que $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \times 2\mathbb{Z}$,

$$2\mathbb{Z} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\ker \pi_*} \cong \frac{2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2}{\ker \pi_*}$$

luego $\ker \pi_* \cong \mathbb{Z}_2$.

Usando la 4.1.6, vemos que $H_p(\mathbb{R}P^2) = 0$ para $p > 2$ y

$$H_1(\mathbb{R}P^2) \cong \frac{H_1(S^1)}{\text{Im } \pi_*} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2$$

Para $n = 2$, usaremos la exactitud del diagrama

$$0 \longrightarrow H_2(S^1) \longrightarrow H_2(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow \ker \pi_* \longrightarrow 0 \quad (5.3)$$

que es equivalente a

6

Dos generalizaciones del toro

6.1. $W = S^2 \times S^1$

El toro de Clifford se define como $S^1 \times S^1$, pero podemos reemplazar una de las dos copias de S^1 por S^2 para obtener una 3-variedad. Como veremos, esta variedad tiene característica de Euler 0, pero no es homeomorfa a S^3 porque sus grupos de homología no son los mismos.

Considérese la aplicación

$$f: \mathbb{C} e^{2\pi i t}$$

Se define el siguiente recubrimiento de W :

$$U = S^2 \times f([0, 3/4]); \quad V = S^2 \times f([1/2, 5/4])$$

S^2 es un retracto por deformación de U y de V , por lo que $H_*(U) \cong H_*(S^2) \cong H_*(V)$. Además, $S^2 \sqcup S^2$ es un retracto por deformación fuerte de $U \cap V$, por lo que

$$H_*(U \cap V) \cong H_*(S^2)^2$$

Consideremos la sucesión de Mayer-Vietoris asociada al par $\{U, V\}$: dado un $n > 3$,

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(U \cap V) & \xrightarrow{g_n} & H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{h_n} & H_n(W) & \xrightarrow{\Delta_n} & H_{n-1}(U \cap V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & H_n(W) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Por exactitud, tenemos que h_n es un isomorfismo, por lo que $H_n(W) \cong H_n(U) \oplus H_n(V) = 0$. Pasemos a calcular $H_1(W)$:

$$\begin{array}{ccccccc} H_0(U \cap V) & \xrightarrow{g_0} & H_0(U) \oplus H_0(V) & \xrightarrow{h_0} & H_0(W) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Dado que $H_0(W) \cong \mathbb{Z}$, $\text{Im } h_0 \cong \mathbb{Z}$, por lo que $\text{Im } g_0 = \ker h_0 \cong \mathbb{Z}$ y $\ker g_0 \cong \mathbb{Z}$ en consecuencia.

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(U) \oplus H_1(V) & \xrightarrow{h_1} & H_1(W) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_0(U \cap V) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & H_1(W) & \rightarrow & \mathbb{Z}^2 & & \end{array}$$

Por exactitud, se tiene que $\text{Im } \Delta_1 = \ker g_0 \cong \mathbb{Z}$ y que $\ker \Delta_1 = \text{Im } h_1 = 0$. De aquí se sigue que

$$H_1(W) \cong \mathbb{Z}$$

Nos falta calcular $H_2(W)$ y $H_3(W)$. Para ello, consideraremos la siguiente descomposición de $S^2 \times S^1$:

$$U' = \{(x, y, z) \in S^2 : z \geq -1/2\}; \quad U = U' \times S^1$$

$$V' = \{(x, y, z) \in S^2 : z \leq 1/2\}; \quad V = V' \times S^1$$

Se tiene que $S^1 \times S^1 = T$ es un retracto por deformación de $U \cap V$, por lo que $H_*(U \cap V) \cong H_*(T)$. Además, S^1 es un retracto por deformación de U y V , por lo que

$$H_*(U) \cong H_*(S^1) \cong H_*(V)$$

Considérese el siguiente tramo de la sucesión de Mayer-Vietoris asociada al par $\{U, V\}$:

$$\begin{array}{ccccccc} H_3(U) \oplus H_3(V) & \xrightarrow{h_3} & H_3(W) & \xrightarrow{\Delta_3} & H_2(U \cap V) & \xrightarrow{g_3} & H_2(U) \oplus H_2(V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & H_3(W) & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Por exactitud, se tiene que Δ_3 es un isomorfismo entre $H_2(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$ y $H_3(W)$, por lo que

$$H_3(W) \cong \mathbb{Z}$$

Sólo queda por calcular el grupo de orden 2: la aplicación

$$h_0 : H_0(U) \oplus H_0(V) \longrightarrow H_0(W)$$

es un epimorfismo, por lo que su imagen es isomorfa a \mathbb{Z} y su núcleo es también isomorfo a \mathbb{Z} (por el primer teorema de isomorfía).

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(U) \oplus H_1(V) & \xrightarrow{h_1} & H_1(W) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_0(U \cap V) & \xrightarrow{g_0} & H_0(U) \oplus H_0(V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z}^2 \end{array}$$

Sabemos que $\text{Im } g_0 = \ker h_0 \cong \mathbb{Z}$, de forma que $\text{Im } \Delta_1 = \ker g_0 = 0$. De aquí se sigue que $\text{Im } h_1 = \ker \Delta_1 \cong \mathbb{Z}$, por lo que $\ker h_1 \cong \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(U) \oplus H_2(V) & \xrightarrow{h_2} & H_2(W) & \xrightarrow{\Delta_2} & H_1(U \cap V) & \xrightarrow{g_1} & H_1(U) \oplus H_1(V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & H_2(W) & \rightarrow & \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{Z}^2 \end{array}$$

Dado que $\text{Im } g_1 = \ker h_1 \cong \mathbb{Z}$, $\text{Im } \Delta_2 = \ker g_1 \cong \mathbb{Z}$. También se tiene que $\ker \Delta_2 = \text{Im } h_2 = 0$ por exactitud, de forma que

$$H_2(W) \cong \frac{H_2}{\ker \Delta_2} \cong \text{Im } \Delta_2 \cong \mathbb{Z}$$

Concluimos que

$$H_n(W) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n < 4 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \implies \chi(W) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

Es decir, que la característica de Euler del espacio W coincide con la de S^3 , pero sus grupos de homología no son isomorfos. Dado que el grupo de homología es un invariante topológico, se tiene que S_3 no es homeomorfo a W .

6.2. $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$

Considérese la siguiente descomposición de T^3 , siendo f la aplicación del ejemplo anterior:

$$U = T \times f([0, 3/4]); \quad V = T \times f([1/2, 5/4])$$

Se tiene que T es un retracto por deformación de U y de V , por lo que $H_*(U) \cong H_*(T) \cong H_*(V)$. Por otro lado, $U \cap V = T \sqcup T$, por lo que

$$H_*(U \cap V) \cong H_*(T)^2$$

Para $n > 3$, la sucesión de Mayer-Vietoris asociada al par $\{U, V\}$ da lugar a la siguiente sucesión exacta corta:

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(U \cap V) & \xrightarrow{g_n} & H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{h_n} & H_n(T^3) & \xrightarrow{\Delta_n} & H_{n-1}(U \cap V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & H_n(T^3) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Por exactitud, se tiene que $H_n(T^3) \cong H_n(T)^2 = 0$. Sólo necesitamos calcular los casos $n = 1, 2, 3$.

$$\begin{array}{ccccccc} H_0(U \cap V) & \xrightarrow{g_0} & H_0(U) \oplus H_0(V) & \xrightarrow{h_0} & H_0(T^3) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Dado que $H_0(W) \cong \mathbb{Z}$, $\text{Im } h_0 \cong \mathbb{Z}$, por lo que $\text{Im } g_0 = \ker h_0 \cong \mathbb{Z}$ y $\ker g_0 \cong \mathbb{Z}$ en consecuencia.

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(U) \oplus H_1(V) & \xrightarrow{h_1} & H_1(T^3) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_0(U \cap V) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbb{Z}^4 & \rightarrow & H_1(T^3) & \rightarrow & \mathbb{Z}^2 & & \end{array}$$

Se tiene por exactitud que $\text{Im } \Delta_1 = \ker g_0 \cong \mathbb{Z}$. Por el primer teorema de isomorfía,

$$\frac{H_1(T^3)}{\ker \Delta_1} \cong \mathbb{Z}$$

Necesitamos determinar el núcleo de Δ_1 manualmente; no obstante, podemos calcular la imagen de h_1 en su lugar, que es más sencillo.

Recordemos cómo se define h_1 :

$$h_1 H_1(T)^2 H_1(T^3)([\alpha], [\beta])[\alpha] + [\beta]$$

Dado que $H_1(T)$ tiene dos generadores, existen 1-ciclos $a, b \in Z_1(T)$ y enteros $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ tales que

$$[\alpha] + [\beta] = \lambda_1[a] + \mu_1[b] + \lambda_2[a] + \mu_2[b]$$

De aquí se sigue que

$$\ker \Delta_1 = \text{Im } h_1 = \{\lambda[a] + \mu[b] : \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^2$$

por lo que $H_1(T^3) \cong \mathbb{Z}^3$.

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(U) \oplus H_2(V) & \xrightarrow{h_2} & H_2(T^3) & \xrightarrow{\Delta_2} & H_1(U \cap V) & \xrightarrow{g_1} & H_1(U) \oplus H_1(V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & H_2(T^3) & \rightarrow & \mathbb{Z}^4 & \rightarrow & \mathbb{Z}^4 \end{array}$$

Como $\text{Im } h_1 \cong \mathbb{Z}^2$, se tiene que $\text{Im } g_1 = \ker h_1 \cong \mathbb{Z}^2$, por lo que $\text{Im } \Delta_2 = \ker g_1 \cong \mathbb{Z}^2$. Aplicando el primer teorema de isomorfía una vez más,

$$\frac{H_2(T^3)}{\ker \Delta_2} \cong \mathbb{Z}^2$$

Una vez más, calcularemos el grupo $\text{Im } h_2$ para poder continuar.

En este caso, el dominio de h_2 es $H_2(T)^2$. $H_2(T)$ tiene rango 1, por lo que es un subgrupo cíclico; esto quiere decir que todos sus elementos son de la forma $\mu[a]$, siendo $a \in Z_2(T) - B_2(T)$. Por tanto, si $\alpha, \beta \in H_2(T)$,

$$h_2(\alpha, \beta) = \alpha + \beta = (\mu_1 + \mu_2)[a]$$

para algunos μ_1, μ_2 enteros. De aquí se sigue que $\ker \Delta_2 = \text{Im } h_2$ es él mismo un monógeno, por lo que es isomorfo a \mathbb{Z} . Como consecuencia, $H_2(T^3) \cong \mathbb{Z}^3$.

El grupo de orden 3 ya no requiere manipulaciones algebraicas; puede computarse utilizando exactitud.

$$\begin{array}{ccccccc} H_3(U) \oplus H_3(V) & \xrightarrow{h_3} & H_3(T^3) & \xrightarrow{\Delta_3} & H_2(U \cap V) & \xrightarrow{g_3} & H_2(U) \oplus H_2(V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & H_3(T^3) & \rightarrow & \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{Z}^2 \end{array}$$

Tenemos que

$$\text{Im } h_2 \cong \mathbb{Z} \implies \text{Im } g_2 \cong \ker h_2 \cong \mathbb{Z} \implies \text{Im } \Delta_3 = \ker g_2 \cong \mathbb{Z}$$

Pero $\ker \Delta_3 = 0$ por exactitud, por lo que se concluye que $H_3(T^3) \cong \text{Im } \Delta_3 \cong \mathbb{Z}$. Por tanto,

$$H_n(T^3) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 3 \\ \mathbb{Z}^3 & \text{si } n = 1, 2 \\ 0 & \text{si } n > 3 \end{cases} \implies \chi(T^3) = 1 - 3 + 3 - 1 = 0$$

Tal y como habíamos predicho, la característica de Euler de T^3 coincide

con la de S^3 . No obstante, al igual que en el caso de la variedad W , tenemos que $H_*(T^3) \neq H_*(S^3)$, por lo que no son variedades homeomorfas. Pero eso es lo que queríamos demostrar. \square

APÉNDICES