Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

List of Listings

Introducción

En el año 1758, Euler publica un artículo que cubre diversas propiedades de los poliedros. El principal resultado de su artículo es la celebrada fórmula de Euler para poliedros convexos,

$$V - A + C = 2$$

donde V, A y C denotan respectivamente el número de vértices, aristas y caras del poliedro. La demostración de este resultado se basa en el hecho de que los poliedros convexos son homeomorfos a un sólido común, la bola cerrada. Si consideramos un poliedro irregular que sea homeomorfo a la esfera, este resultado sigue siendo válido.

Sin embargo, podemos encontrar poliedros que no verifiquen esta fórmula eliminando la condición de convexidad. Un ejemplo de poliedro que no verifica esta expresión es el tetrahemihexaedro, con 6 vértices, 12 aristas y 7 caras. Si computamos su valor $V - A + C$, obtenemos

$$6 - 12 + 7 = 1$$

El valor $V - A + C$ de un poliedro regular se denomina *característica de Euler* del poliedro.

Un espacio topológico $X \subset \mathbb{R}^n$ 2AN y Hausdorff es una superficie si, dado $p \in X$, existe un entorno abierto $U \subset X$ de p homeomorfo a una bola de $\mathbb{R}^2$. Desde un punto de vista geométrico, podemos decir que los puntos de X perciben el mundo en dos dimensiones, al igual que los personajes de la novela *Planilandia*. Algunas superficies pueden ser representadas utilizando poliedros regulares, que podemos clasificar en función de su característica de Euler. Cuando una superficie sea homeomorfa a algún poliedro regular, diremos que es poliédrica.

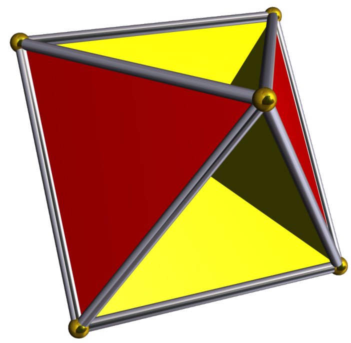

Figura 0.1: Tetrahemihexaedro regular. Algunas de sus caras se intersecan entre sí, haciendo que su topología sea diferente a la de la bola cerrada. Imagen: [**Tetra**].

A partir de un espacio topológico, podemos generar una familia de grupos abelianos llamados *grupos de homología*. Los grupos de homología nos permiten utilizar técnicas de álgebra conmutativa para conocer algunas de las propiedades topológicas de un espacio, permitiendo probar resultados que están fuera del alcance de la topología conjuntista. En particular, veremos una demostración del teorema del punto fijo de Brouwer, que establece la existencia de puntos fijos para cualquier aplicación continua entre conjuntos convexos.

Este texto está fuertemente basado en [**Vick94**], un texto dirigido a estudiantes de máster y doctorado (conocido en Estados Unidos como el *graduate level*), por lo que las explicaciones son más breves y muchos detalles se asumen triviales. Mi objetivo es adaptar estos textos, de forma que sean lo más asequible posible a estudiantes de 3º y 4º de carrera.

Dado que la información en [**Vick94**] está muy concentrada, se han tomado los dos primeros capítulos y convertido en partes. Se recomienda al lector tratar de entender y computar ejemplos antes de pasar a la parte siguiente.

La primera parte de este texto corresponde al capítulo 1, *Singular Homology Theory*, donde se introducen los grupos de homología singular y las sucesiones de Mayer-Vietoris. Las sucesiones de Mayer-Vietoris son la técnica básica para calcular los grupos de homología de un espacio topológico, y son válidas para cualquier espacio.

La segunda parte corresponde al capítulo 2, *Attaching Spaces with Maps*, donde se introducen los espacios CW-complejos y los grupos de homología celular. La homología celular es una forma más directa de computar los grupos de homología, pero requiere que nuestro espacio admita una estructura especial, la *estratificación por CW-complejos*.

Finalmente, los apéndices presentan información adicional que no es necesaria para poder seguir el texto, pero he considerado interesante y digma de discusión.

El objetivo de este texto es introducir al lector en la teoría de homología singular, y está dirigido principalmente a estudiantes de la *Universitat de València*. Como consecuencia, el lector se asume familiarizado con el contenido cubierto por las asignaturas de Estructuras algebraicas y Topología de segundo curso.

Homología singular de un espacio topológico

1 Grupos de homología singular

1.1. Símplices singulares

Decimos que una familia de puntos $S = \{x_0, \dots, x_p\} \subset \mathbb{R}^n$ es **afínmente independiente** si, dados $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{i=0}^{p} \lambda_i x_i = \sum_{i=0}^{p} \mu_i x_i; \qquad \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = \sum_{i=0}^{p} \mu_i$$

se verifica que $\lambda_i = \mu_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Proposition 1.1.1 *La familia de puntos $S = \{x_0, \dots, x_p\} \subset \mathbb{R}^n$ es afínmente independiente si y sólo si la familia de vectores*

$$T = \{x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0\}$$

es linealmente independiente.

Demostración. Supongamos que S es afínmente independiente y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tales que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i (x_i - x_0) = 0 \iff \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = x_0 \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \tag{1.1}$$

Definimos $\lambda_0 = -\lambda_1 - \cdots - \lambda_p$. Por construcción, se verifica que $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_p = \lambda_0 - \lambda_0 = 0$. Aplicando (**??**),

$$0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (x_i - x_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i - x_0 \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i x_i$$

Por otro lado, también podemos escribir $0 = 0x_0 + \cdots + 0x_p$. Dado que S es una familia afínmente independiente, $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Por tanto, T es linealmente independiente.

Recíprocamente, sean T una familia linealmente independiente y $\mu_0, \alpha_0, \dots, \mu_p, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{i=0}^{p} \mu_i x_i = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i x_i; \qquad \sum_{i=0}^{p} \mu_i = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i$$

Combinando ambas igualdades, deducimos que

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=0}^{p}(\mu_i - \alpha_i)x_i &= \sum_{i=0}^{p}(\mu_i - \alpha_i)x_i - 0x_0 = \\ &= \sum_{i=0}^{p}(\mu_i - \alpha_i)x_i - \left(\sum_{i=0}^{p}(\mu_i - \alpha_i)\right)x_0 = \\ &= \sum_{i=1}^{p}(\mu_i - \alpha_i)(x_i - x_0) \end{aligned}$$

Dado que T es linealmente independiente, se sigue que

$$\mu_i - \alpha_i = 0 \iff \mu_i = \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, p)$$

Sabiendo que la suma de todos los μ_i es la misma que la de todos los α_i, se sigue que $\mu_0 = \alpha_0$. Por tanto, S es afínmente independiente. □

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto afínmente independiente y (a, b, c) una terna de elementos de S con $a \neq b \neq c$. Si S es afínmente independiente, debe pasar que los vectores $a - b$ y $b - c$ sean linealmente independientes.

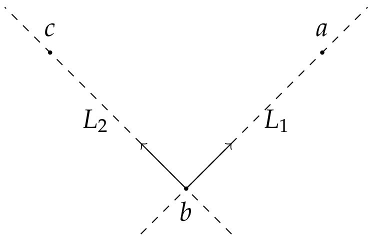

Figura 1.1: La independencia afín es una forma de definir independencia lineal en conjuntos afines, donde los elementos son puntos y no vectores.

Como $a - b \neq 0$, existe una recta afín $L_1 \subset \mathbb{R}^n$ que tiene a $a - b$ como vector director. De la misma forma, existe otra recta afín $L_2 \subset \mathbb{R}^n$ que tiene a $b - c$ como vector director. Por independencia lineal, se tiene que L_1 no es paralelo a L_2, por lo que $a \notin L_2$ y $c \notin L_1$.

Por tanto, un conjunto afínmente independiente es aquel en el que no hay tres puntos colineales.

Definition 1.1.1 *Un **p-símplice** es la envoltura convexa de una familia de puntos $\{x_0, \ldots, x_p\} \subset \mathbb{R}^n$ afínmente independientes. Dichos puntos reciben el nombre de **vértices** del símplice.*

Sea A una familia de puntos afínmente independientes de $\mathbb{R}^n$ y

$$i \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$$

la inclusión. Se tiene que $i(A)$ es una familia de puntos afínmente independiente de $\mathbb{R}^m$, por lo que los símplices de $\mathbb{R}^n$ son también símplices en $\mathbb{R}^m$. Por tanto, no es necesario especificar dónde estamos considerando los símplices.

Envoluta convexa

Un $C \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío es convexo si, dados $x, y \in C$, C contiene al segmento $[x, y] = \{xt + y(1-t) \colon t \in [0, 1]\}$. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es no vacío, se define su envoltura convexa como el menor subconjunto convexo que contiene a A,

$$Con(A) = \bigcup_{x,y \in A} [x, y]$$

Proposition 1.1.2 *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un p-símplice y $\{x_0, \ldots x_p\}$ una familia afínmente independiente de puntos contenidos en S. Dado un punto $x \in S$, existe una familia única de escalares $t_0, \ldots, t_p \in [0, 1]$ tales que*

$$x = \sum_{i=0}^{p} t_i x_i; \qquad \sum_{i=0}^{p} t_i = 1$$

Por lo que una familia de vértices de un símplice es el equivalente a una base en un espacio vectorial.

Decimos que un p-símplice está **ordenado** cuando se aplica una relación de orden determinada sobre sus vértices.

Example 1.1.1 Sean $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$ y $c = (0, 0, 1)$. La envoltura convexa de $\{a, b, c\}$ es un 2-símplice, que denotaremos como σ. Si $e_1 = a$, $e_2 = b$ y $e_3 = c$, la relación de orden

$$e_i \leq e_j \iff i \leq j$$

hace que σ sea un 2-símplice ordenado.

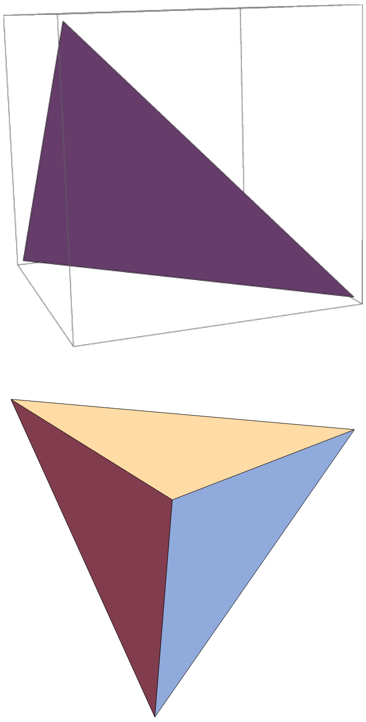

Figura 1.2: Los triángulos y tetraedros constituyen ejemplos de símplices. Podemos crear una teoría de homología utilizando sólo símplices, pero se limitaría a espacios topológicos contenidos en $\mathbb{R}^n$.

Sea $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. La envoltura convexa de los puntos $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ es un n-símplice, que denotaremos como σ_n. Por **??**, los puntos de σ_n son de la forma

$$(t_1, \ldots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \qquad t_1 + \cdots + t_{n+1} = 1$$

Sea $S = \{x_0, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}^m$ una familia de puntos afínmente independientes: la aplicación continua

$$\begin{aligned} f : \sigma_n &\longrightarrow Con(S) \\ (t_0, \ldots, t_n) &\longmapsto \sum_{i=0}^{n} t_i x_i \end{aligned}$$

establece una biyección entre σ_n y $Con(S)$. Dado que σ_n es compacto y $Con(S)$ es un espacio de Hausdorff, f es un homeomorfismo, por lo que $Con(S)$ es homeomorfo a σ_n.

De la observación anterior, se sigue que todo p-símplice de $\mathbb{R}^{p+1}$ es homeomorfo a σ_p, por lo que podemos considerarlo como el representante canónico de todos los p-símplices. En consecuencia, σ_p recibe el nombre de **p-símplice estándar**.

Example 1.1.2
1. El conjunto σ_0 es el singulete formado por el punto $1 \in \mathbb{R}$.
2. El conjunto σ_1 es el segmento que une los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$.
3. El conjunto σ_2 es el triángulo de vértices $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$.

Lujan18

Si nos limitamos a subespacios topológicos en $\mathbb{R}^n$, podemos crear una teoría de homología utilizando sólo símplices ([**Lujan18**]). Sin embargo, si queremos definir una teoría que cubra todos los espacios topológicos, necesitamos transportar el símplice utilizando aplicaciones continuas.

Definition 1.1.2 *Sea X un espacio topológico. Un **p-símplice singular** de X es una aplicación continua*

$$\phi : \sigma_p \to X$$

Example 1.1.3 Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. La aplicación

$$\begin{aligned} \phi\colon \sigma_1 &\longrightarrow \mathbb{D} \\ (t_0, t_1) &\longmapsto e^{\pi i t_0} \end{aligned}$$

es un símplice singular, que envía al 1-símplice estándar en la mitad superior del 1-símplice mostrado en Figura **??**. Notemos que $\phi(\sigma_1)$ no es un segmento desde el punto de vista geométrico porque tiene curvatura no nula, pero sí lo es desde un punto de vista topológico, ya que ϕ es un homeomorfismo y σ_1 es un segmento.

Dado un $p \in X$ y un espacio topológico Y, toda aplicación constante $\mathrm{Cte}_p\colon Y \to X$ se identifica con el 0-símplice singular $\phi_p\colon \sigma_0 \to X$ que envía al punto 1 en p. De la misma forma, si I es un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$, todo camino $\alpha\colon I \to X$ se identifica con el 1-símplice singular

$$\begin{aligned} \psi\colon \sigma_1 &\longrightarrow X \\ (t_0, t_1) &\longmapsto \alpha(t_0) \end{aligned}$$

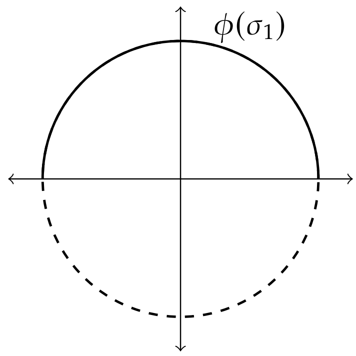

Figura 1.3: La curva $\phi(\sigma_1)$ dada por el símplice singular ϕ de **??**. Los símplices singulares amoldan el símplice estándar al espacio de llegada usando su continuidad.

Sean X, Y espacios topológicos. Dada una aplicación continua $f\colon X \to Y$ y un p-símplice singular $\phi\colon \sigma_p \to X$, la aplicación

$$f_\#(\phi) := f \circ \phi\colon \sigma_p \to Y$$

es un p-símplice singular en Y por ser composición de aplicaciones continuas. Esto hace que toda aplicación continua dé lugar a una aplicación que envía p-símplices singulares de X en p-símplices singulares de Y.

Proposition 1.1.3
1. *Si* id_X *es la aplicación identidad,* $(\mathrm{id}_X)_\#$ *también es la aplicación identidad.*
2. *Si* $f\colon X \to Y$ *y* $g\colon Y \to Z$ *son aplicaciones continuas,*

$$(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$$

Sea X un espacio topológico, $\phi\colon \sigma_p \to X$ un p-símplice singular y $0 \le i \le p$. Se define la **cara i-ésima de** ϕ como el $(p-1)$-símplice singular

$$\begin{aligned} \partial_{(i)}\phi\colon \sigma_{p-1} &\longrightarrow X \\ (t_0, \ldots, t_{p-1}) &\longmapsto \phi(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{p-1}) \end{aligned}$$

Example 1.1.4 Considérese el 2-símplice singular

$$\begin{aligned} \phi\colon \sigma_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x+2, 2y+2, 2z+2) \end{aligned}$$

Las caras de ϕ son los 1-símplices singulares

$$\begin{aligned} \partial_{(0)}\phi(u,v) &= \phi(0,u,v) = (2, 2u+2, 2v+2) \\ \partial_{(1)}\phi(u,v) &= \phi(u,0,v) = (2u+2, 2, 2v+2) \\ \partial_{(2)}\phi(u,v) &= \phi(u,v,0) = (2u+2, 2v+2, 2) \end{aligned}$$

Desde un punto de vista geométrico, $\partial_{(i)}\phi(\sigma_1)$ son las caras del tetraedro $\phi(\sigma_2)$ para $i = 0, 1, 2$.

1.2. Grupos libres

Sea G un grupo abeliano y $n \in \mathbb{Z}$ un entero no nulo. Dado un $g \in G$, se define el producto ng como

$$ng := \sum_{j=0}^{n} g \qquad ng := \sum_{j=0}^{-n} -g$$
$$(n > 0) \qquad (n < 0)$$

Si $n = 0$, se considera que $0g = 0$ para todo $g \in G$.

Decimos que un subconjunto $S \subset G$ es un **sistema generador** de G si, dado un $g \in G$, podemos hallar $b_1, \dots, b_n \in S$ y enteros $\mu_1, \dots, \mu_n$ tales que
$$g = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \cdots + \mu_n b_n$$

Definition 1.2.1 *Sea G un grupo abeliano. Un sistema generador B de G es una **base** si, dados $b_1, \dots, b_n \in B$ y enteros $\lambda_1, \dots, \lambda_n$,*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0 \implies \lambda_i = 0 \tag{1.2}$$

*Decimos que G es un **grupo libre** si admite una base.*

Example 1.2.1 Supongamos que $\mathbb{Q}^+ = (\mathbb{Q}, +)$ es un grupo libre generado por un cierto conjunto $B \subseteq \mathbb{Q}$. Dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in B$, se tiene que

$$cb\frac{a}{b} - ad\frac{c}{d} = 0$$

por lo que B está formado por un único elemento.

Sea p un número primo coprimo con b. Por ser $\mathbb{Q}^+$ libre, existirá un entero α tal que
$$\frac{1}{p} = \alpha\frac{a}{b}$$

pero esto implica que $b = \alpha p a$, en contradicción con la premisa de que p es coprimo con b. Por tanto, $\mathbb{Q}^+$ no es un grupo libre.

Aplicaciones nulas casi por todas partes

Sea A un conjunto no vacío. Decimos que una aplicación f : … **la casi por todas parte**… hallar un subconjunto… tal que $f(x) = 0$ para t…

…upo libre generado por un conjunto

Proposition 1.2.1 *Sea $A \neq \emptyset$. Se define el grupo libre generado por A como la familia $\mathcal{F}(A)$ de todas las aplicaciones $f : A \longrightarrow \mathbb{Z}$ que se hacen cero casi por todas partes. Entonces, $\mathcal{F}(A)$ es un grupo libre dotado con la suma elemento a elemento.*

Demostración. Dado un $a \in A$, se define $\mathcal{X}_a : A \longrightarrow \mathbb{Z}$ como

$$\mathcal{X}_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Notar que $\mathcal{X}_a$ es una aplicación nula casi por todas partes, por lo que $\mathcal{X}_a \in \mathcal{F}(A)$. La base de $\mathcal{F}(A)$ será el conjunto

$$X := \{\mathcal{X}_a : a \in A\} \subseteq \mathcal{F}(A)$$

Dada una aplicación $f \in \mathcal{F}(A)$, se define $\tilde{f}$ como

$$\tilde{f} = \sum_{a \in A} f(a)\mathcal{X}_a$$

Dado un $x \in A$,

$$\tilde{f}(x) = \sum_{a \in A} f(a)\mathcal{X}_a(x) = f(x)\underbrace{\mathcal{X}_x(x)}_{=1} + \sum_{a \neq x} f(a)\underbrace{\mathcal{X}_a(x)}_{=0} = f(x) \tag{1.3}$$

por lo que $\tilde{f} = f$. Por tanto, toda aplicación de $\mathcal{F}(A)$ es combinación lineal de elementos de X, de forma que X es un sistema generador de $\mathcal{F}(A)$.

Sean $\mu_1, \ldots, \mu_n$ enteros y $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $\mu_1\mathcal{X}_{a_1} + \cdots + \mu_n\mathcal{X}_{a_n} = 0$. Dado un $1 \leq j \leq n$,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\mathcal{X}_{a_i}(a_j) = \mu_j\underbrace{\mathcal{X}_{a_j}(a_j)}_{=1} + \sum_{i \neq j}^{n} \mu_i\underbrace{\mathcal{X}_{a_i}(a_j)}_{=0} = \mu_j$$

por lo que $\mu_1, \ldots, \mu_n = 0$. Por tanto, X es una base. □

Por convenio, se considera que $\{0\} = \mathcal{F}(\emptyset)$.

Example 1.2.2 $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ es el conjunto de todas las sucesiones $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{Z}$ con $a_n = 0$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, el anillo de polinomios sobre $\mathbb{Z}$.

Notar que, si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{F}(A) &\longrightarrow \mathbb{Z}^n \\ f &\longmapsto (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos.

1.3. Complejos de cadenas

Definition 1.3.1 *Un* ***grupo graduado*** *es una colección de grupos $G = \{G_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Diremos que G es* ***abeliano*** *si todos los grupos G_n lo son.*

Sean G, H grupos graduados. Un **homomorfismo graduado** $f : G \longrightarrow H$ es una colección de homomorfismos

$$f_i : G_i \longrightarrow H_{i+r} \quad (i \in \mathbb{Z})$$

siendo $r \in \mathbb{Z}$ un valor común para todos los f_i. Dicho entero se denomina **grado** de f.

Definition 1.3.2 *Dos grupos graduados G, H son **isomorfos** si, dado un* … *ste un isomorfismo $f_p : G_p \longrightarrow H_p$. Al homomorfismo graduado* … *z se le denomina **isomorfismo graudado**.*

Subgrupo normal

Un subgrupo $H \leq G$ es normal si, dados $g \in G$ y $n \in N$, $ng = gm$ para algún $m \in N$. Esta condición es importante para poder garantizar que las clases del espacio cociente están bien definidas, pero se puede obviar cuando G es abeliano.

Si G, H son grupos graduados, decimos que H es un **subgrupo graduado** de G si, dado un entero n, $H_n \leq G_n$. En particular, si H_n es un subgrupo normal para todo n, se define el **grupo graduado cociente** como

$$\frac{G}{H} := \left\{ \frac{G_i}{H_i} : i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Definition 1.3.3 *Un **complejo de cadenas** es un par de la forma (G, ∂), siendo G un grupo graduado y ∂ un endomorfismo de grado -1 tal que*

$$\operatorname{Im} \partial_n \leq \ker \partial_{n-1}$$

*La aplicación ∂ recibe el nombre de **operador borde**.*

Diremos que un complejo de cadenas (C, d) es **abeliano** si lo es C.

Definition 1.3.4 *Sean (C, d) y (C', d') dos complejos de cadenas. Una **aplicación de cadenas** es un homomorfismo graduado $\Phi : C \longrightarrow C'$ de grado 0 tal que el siguiente diagrama es conmutativo para todo n:*

$$\begin{tikzcd} C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "\Phi_{n+1}"] & C_n \arrow[d, "\Phi_n"] \\ C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \end{tikzcd}$$

1.3.1. Grupo de homología asociado a un complejo de cadenas

Sea (C, d) un complejo de cadenas. Se definen los grupos graduados

$$Z_*(C) := \ker d = \{\ker d_n : n \in \mathbb{Z}\}; \qquad Z_n(C) := \ker d_n$$

$$B_*(C) := \operatorname{Im} d = \{\operatorname{Im} d_n : n \in \mathbb{Z}\}; \qquad B_n(C) := \operatorname{Im} d_n$$

Diremos que dos elementos $p, q \in Z_n(C)$ son **homólogos** si $p - q \in B_n(C)$.

Definition 1.3.5 *Sea C un complejo de cadenas. Se definen el **grupo***

***graduado de homología** y el **grupo de homología** de orden n de C como*

$$H_*(C) := \frac{Z_*(C)}{B_*(C)}; \qquad H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)}$$

*Diremos que dos complejos de cadenas tienen el mismo **tipo de homología** si sus grupos de homología son isomorfos.*

Sea $f : (C, d) \longrightarrow (D, \partial)$ una aplicación de cadenas. Dado un $c \in Z_n(C)$,

$$d_n(c) = 0 \implies \partial_n[f_n(c)] = f_{n-1}[d_n(c)] = f_{n-1}(0)$$

Como f_{n-1} es un homomorfismo de grupos, $f_{n-1}(0) = 0$, por lo que $f_n(c) \in Z_n(D)$ y $f_n[Z_n(C)] \leq Z_n(D)$.

Análogamente, $f_n(B_n(C)) \leq B_n(D)$. Por tanto, f induce un homomorfismo entre grupos de homología,

$$f_* : H_*(C) \longrightarrow H_*(D)$$

1.3.2. El grupo de las cadenas singulares

Definition 1.3.6 *Se define el grupo de n-**cadenas singulares** $S_n(X)$ como el grupo libre generado por todos los símplices singulares $\phi : \sigma_n \longrightarrow X$. Los elementos de $S_n(X)$ reciben el nombre de* n-cadenas singulares *de X.*

A partir los grupos de cadenas singulares, podemos definir el grupo graduado

$$S_*(X) = \{S_n(X) : n \geq 0\}$$

Para poder completar el grupo graduado, simplemente se considera que $S_p(X) = 0$ para todo $p < 0$.

El objetivo de esta sección es definir un operador borde sobre $S_*(X)$, de forma que $(S_*(X), \partial)$ forme una complejo de cadenas. Podemos extender el operador cara a $S_n(X)$ tomando

$$\partial_{(j)}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \phi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i\, \partial_{(j)} \phi_i$$

Este proceso da lugar a $n + 1$ operadores cara diferentes, pero ninguno de ellos define un operador borde.

Definition 1.3.7 *Se define el **operador borde** $\partial : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$ asociado a $S_*(X)$ como*

$$\partial = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \partial_{(j)}$$

Theorem 1.3.1 *Dado un espacio topológico X,* $\operatorname{Im} \partial \leq \ker \partial$. *Esto implica que $(S_*(X), \partial)$ es un complejo de cadenas.*

Ejercicio

Esta demostración se basa en la cuenta de la vieja, pero la naturaleza de los operadores cara pueden hacerlo engorroso de seguir. Antes de leer la prueba, intenta probarlo para $n = 4$. Si puedes hacerlo sin ayuda, puedes ignorar la prueba.

Demostración. Sea $c \in S_n(X)$. Dado que $S_n(X)$ es un grupo libre y ∂ es un homomorfismo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que c es un símplice singular $\sigma_n \longrightarrow X$.

Por definición de ∂,

$$\partial^2 c = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \partial_{(p)}(\partial c) = \sum_{q=0}^{n} \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{p+q} \partial_{(p)} \partial_{(q)} c \tag{1.4}$$

Para continuar, necesitamos la siguiente identidad: dados $0 \leq p, q \leq n$ con $p < q-1$,

$$\begin{aligned} \partial_{(p)}\partial_{(q)} c(t_0, \dots, t_{n-2}) &= \partial_{(q)} c(t_0, \dots, t_{p-1}, \overset{(p)}{0}, t_p, \dots, t_{n-2}) = \\ &= c(t_0, \dots, t_{p-1}, \overset{(p)}{0}, t_p, \dots, t_{q-2}, \overset{(q)}{0}, t_{q-1}, \dots, t_{n-2}) = \\ &= \partial_{(p)} c(t_0, \dots, t_{q-2}, \overset{(q-1)}{0}, t_{q-1}, \dots, t_{n-2}) = \\ &= \partial_{(q-1)} \partial_{(p)} c(t_0, \dots, t_{n-2}) \end{aligned}$$

Combinando ambas expresiones,

$$\partial^2 c \overset{(??)}{=} \sum_{q=1}^{n} \sum_{p<q-1} (-1)^{p+q} \partial_{(p)} \partial_{(q)} c + \sum_{q=0}^{n} \sum_{p>q} (-1)^{p+q} \partial_{(p)} \partial_{(q)} c$$

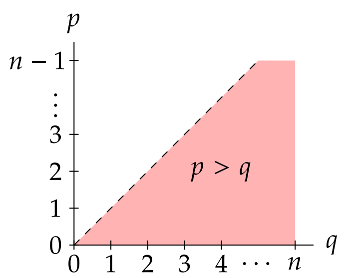

Figura 1.4: Gráfica auxiliar para visualizar el cambio de índices descrito en la ecuación (**??**).

Obseremos que

$$\begin{aligned} \{(p,q) \colon q = 0, \dots, n,\ 0 \leq p < q\} &= \\ &\{(q,p) \colon p = 0, \dots, n-1,\ p < q \leq n\} \end{aligned} \tag{1.5}$$

por lo que $\partial^2 c$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} &\sum_{q=1}^{n} \sum_{p<q-1} (-1)^{p+q} \partial_{(q-1)} \partial_{(p)} c + \sum_{q=0}^{n} \sum_{p<q} (-1)^{p+q} \partial_{(p)} \partial_{(q)} c = \\ &= \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{p<q} (-1)^{p+q+1} \partial_{(q)} \partial_{(p)} c + \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q>p} (-1)^{p+q} \partial_{(q)} \partial_{(p)} c = \\ &= \sum_{q=0}^{n-1} \left(- \sum_{p<q} (-1)^{p+q} \partial_{(q)} \partial_{(p)} c + \sum_{p<q} (-1)^{p+q} \partial_{(q)} \partial_{(p)} c \right) = 0 \end{aligned}$$

□

Dado que $S_*(X)$ es abeliano por definición, su grupo de homología asociado está bien definido. Además, como todo espacio topológico X define un grupo graduado $S_*(X)$ de forma única, podemos introducir la siguiente notación sin ambigüedades:

$$Z_n(X) := Z_n(S_*(X)); \qquad B_n(X) := B_n(S_*(X))$$

Definition 1.3.8 *Sea X un espacio topológico. Se define el* ***grupo de homología de orden*** n ***asociado a*** X *como*

$$H_n(X) := H_n(S_*(X)) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$$

Example 1.3.1 Sea $f\colon [0,1] \longrightarrow X$ un camino. Se define el 1-símplice singular

$$\begin{aligned} \psi\colon \sigma_1 &\longrightarrow X \\ (t_0, t_1) &\longmapsto f(t_0) \end{aligned}$$

Se tiene entonces que ψ es un 1-ciclo si y sólo si

$$\partial\psi = 0 \iff \psi(0,1) = \partial_{(0)}\psi = \partial_{(1)}\psi = \psi(1,0)$$

Dado que $\psi(0,1) = f(0)$ y $\psi(1,0) = f(1)$, un camino es un 1-ciclo si y sólo si f es un lazo.

1.3.3. Morfismo inducido en homología

Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Habíamos definido una aplicación $f_\#$ que convierte símplices de X en símplices de Y, al igual que el operador cara convertía n-símplices en $(n-1)$-símplices. Podemos extender $f_\#$ a todo el grupo de cadenas singulares de forma que la aplicación resultante sea un homomorfismo:

$$f_\#\left(\sum_{j=1}^{k} n_j\phi_j\right) = \sum_{j=1}^{k} n_j f_\#(\phi_j)$$

Esta aplicación recibe el nombre de **morfismo inducido en homología** por f.

Proposition 1.3.2 *Todo morfismo inducido por una aplicación continua es una aplicación de cadenas. Como consecuencia, si $f\colon X \longrightarrow Y$ es continua, $f_\#$ induce una familia de homomorfismos*

$$\begin{aligned} f_*\colon H_n(X) &\longrightarrow H_n(Y) \\ [x] &\longmapsto [f_\#(x)] \end{aligned}$$

para $n \geq 0$.

Dadas $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$ continuas, deducimos de **??** y de este resultado que

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

Por tanto, deducimos que los grupos de homología son invariantes topológicos:

Theorem 1.3.3 *Sean X, Y espacios topológicos. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo, $f_* \colon H_k(X) \longrightarrow H_k(Y)$ es un isomorfismo para todo $k \geq 0$. Por tanto, el grupo de homología es un invariante topológico.*

1.4. Interpretación geométrica de los grupos de homología

Sea $X = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ con la topología inducida por $\mathbb{R}^2$. El espacio $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a X; sin embargo, no es posible probar este resultado utilizando sólo topología conjuntista. En esta sección, veremos cómo la teoría de homología nos permite probar que no existe un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y X.

Definimos un **camino orientado** en un espacio topológico X como una terna $(\gamma; A, B)$, siendo $\gamma \colon [0,1] \to X$ un camino con $\gamma(0) \neq \gamma(1)$ y $A, B \in \gamma(\{0,1\})$ con $A \neq B$. Diremos que $(\gamma; A, B)$ está **orientado positivamente** (resp. **negativamente**) si $A = \gamma(0)$ y $B = \gamma(1)$.

Example 1.4.1 Sea $\eta \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el camino dado por

$$\eta(t) = (\sin(\pi t), -\cos(\pi t))$$

...ción negativa de η (que podemos ver en Figura ??) viene ... $= \eta(1) = (0,1)$ y $B = \eta(0) = (0,-1)$.

Caminos compatibles

Diremos que dos caminos orientados $(\alpha; A_1, B_1)$ y $(\beta; A_2, B_2)$ en X son **compatibles** si el camino $\gamma \colon [0,1] \to X$ dado por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es continuo y $B_1 = A_2$. Por ejemplo, los caminos ϕ y η de Figura ?? son compatibles.

Consideremos los siguientes caminos positivamente orientados en $\mathbb{R}^2$:

$$\eta(t) = (\sin(\pi t), -\cos(\pi t)); \qquad \phi(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t));$$
$$\mu(t) = (2\sin(\pi t), -\cos(\pi t));$$

Los caminos ϕ y η tienen orientaciones compatibles, y forman una circunferencia cuyo interior está contenido en $\mathbb{R}^2$. Por tanto, podemos hallar una cadena singular cuyo borde sea $\phi + \eta$. Si tomamos clases módulo $B_1(\mathbb{R}^2)$,

$$\phi + \eta \in B_1(\mathbb{R}^2) \iff -[\eta] = [\phi]$$

Los caminos η y μ forman una figura homotópica a una circunferencia, y sus orientaciones son compatibles. Podemos encontrar una cadena singular cuyo borde sea $\phi + \mu$. Tomando clases,

$$\phi + \mu \in B_1(\mathbb{R}^2) \iff [\phi] = -[\mu]$$

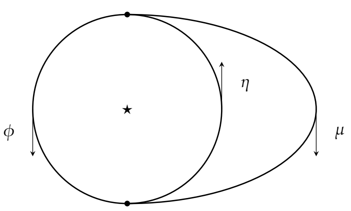

Figura 1.5: Varios caminos en $\mathbb{R}^2$.

Consieremos ahora el plano perforado, $X = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. La aplicación $\phi|_X + \eta|_X$ ya no forma el borde de una cadena singular, dado que los caminos encierran al punto $(0,0)$, que no está. Por tanto, las clases de $\phi|_X$ y $\mu|_X$ serán diferentes. En cambio, ϕ y ψ siguen siendo homólogas, porque sus orientaciones son compatibles y no contienen al punto que hemos quitado.

Dado que el grupo de homología es un invariante topológico, concluimos que $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a X.

1.5. Característica de Euler

Definition 1.5.1 *Sea A un grupo abeliano. Se denomina **subgrupo de torsión** de A al subgrupo T formado por todos los elementos de orden finito de A. Decimos que A es **libre de torsión** si $T = 0$, y que A es un **grupo de torsión** si $T = A$.*

Si T es el subgrupo de torsión de un cierto grupo abeliano A, A/T es un grupo libre de torsión.

Example 1.5.1

1. El grupo aditivo $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un grupo de torsión: dado un $\overline{p} \in \mathbb{Z}_n$,
$$n\overline{p} = \sum_{i=1}^{n|p|} \overline{1} = \sum_{i=1}^{|p|} \overline{n} = \sum_{i=1}^{|p|} 0 = 0$$
Por la misma razón, todo cuerpo de característica mayor que cero define un grupo de torsión.
2. El grupo aditivo $\mathbb{Z}$ es un grupo libre de torsión porque no tiene divisores de cero: si $n > 0$ y $p \in \mathbb{Z}$ es tal que $np = 0$, necesariamente se cumple que $p = 0$.

Example 1.5.2 Consideremos el grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$. Dado un $\overline{q} \in \mathbb{Z}_n$,
$$n(0, \overline{q}) = \sum_{i=1}^{n} (0, \overline{q}) = (0, n\overline{q}) = (0, 0)$$
por lo que el subgrupo de torsión de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ contiene a $\{0\} \times \mathbb{Z}_n$. Sin embargo, si $m > 0$ y $p \in \mathbb{Z}$,
$$m(p, \overline{q}) = \sum_{i=1}^{m} (p, \overline{q}) = (mp, m\overline{q}) = (0, 0)$$
Ésto es tanto como decir que n divide a mq y $p = 0$. Por tanto, el subgrupo de torsión de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ es $\{0\} \times \mathbb{Z}_n$.

Sea A un grupo abeliano y T el subgrupo de torsión de A, que es un subgrupo normal por ser A abeliano. Se define el **rango** de A como el mínimo número de generadores que posee A/T.

Definition 1.5.2 *Sea X un espacio topológico. Se define el **n-ésimo número de Betti** $\beta_n(X)$ como el rango de $H_n(X)$. Si existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_p(X) = 0$ para todo $p > k$, se define la **característica de Euler** de X como*
$$\mathcal{X}(X) := \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \beta_n(X)$$

Homología relativa y celular

APÉNDICES