

# **Índice general**

**Índice de figuras**

**Índice de cuadros**

**List of Listings**

# Introducción

En el año 1758, Euler publica un artículo que cubre diversas propiedades de los poliedros. El principal resultado de su artículo es la celebrada fórmula de Euler para poliedros convexos,

$$V - A + C = 2$$

donde  $V$ ,  $A$  y  $C$  denotan respectivamente el número de vértices, aristas y caras del poliedro. La demostración de este resultado se basa en el hecho de que los poliedros convexos son homeomorfos a un sólido común, la bola cerrada. Si consideramos un poliedro irregular que sea homeomorfo a la esfera, este resultado sigue siendo válido.

Sin embargo, podemos encontrar poliedros que no verifiquen esta fórmula eliminando la condición de convexidad. Un ejemplo de poliedro que no verifica esta expresión es el tetrahemihexaedro, con 6 vértices, 12 aristas y 7 caras. Si computamos su valor  $V - A + C$ , obtenemos

$$6 - 12 + 7 = 1$$

El valor  $V - A + C$  de un poliedro regular se denomina *característica de Euler* del poliedro.

Un espacio topológico  $X \subset \mathbb{R}^n$  2AN y Hausdorff es una superficie si, dado  $p \in X$ , existe un entorno abierto  $U \subset X$  de  $p$  homeomorfo a una bola de  $\mathbb{R}^2$ . Desde un punto de vista geométrico, podemos decir que los puntos de  $X$  perciben el mundo en dos dimensiones, al igual que los personajes de la novela *Planilandia*. Algunas superficies pueden ser representadas utilizando poliedros regulares, que podemos clasificar en función de su característica de Euler. Cuando una superficie sea homeomorfa a algún poliedro regular, diremos que es poliédrica.

A partir de un espacio topológico, podemos generar una familia de grupos abelianos llamados *grupos de homología*. Los grupos de homología nos permiten utilizar técnicas de álgebra comutativa para conocer algunas de las propiedades topológicas de un espacio, permitiendo probar resultados que están fuera del alcance de la topología conjuntista. En particular, veremos una demostración del teorema del punto fijo de Brouwer, que establece la existencia de puntos fijos para cualquier aplicación continua entre conjuntos convexos.

Este texto está fuertemente basado en [Vick94], un texto dirigido a estudiantes de máster y doctorado (conocido en Estados Unidos como el *graduate level*), por lo que las explicaciones son más breves y muchos detalles se asumen triviales. Mi objetivo es adaptar estos textos, de forma que sean lo más asequible posible a estudiantes de 3º y 4º de carrera.

Dado que la información en [Vick94] está muy concentrada, se han tomado los dos primeros capítulos y convertido en partes. Se recomienda al lector tratar de entender y computar ejemplos antes de pasar a la parte siguiente.

La primera parte de este texto corresponde al capítulo 1, *Singular Homology Theory*, donde se introducen los grupos de homología singular y las

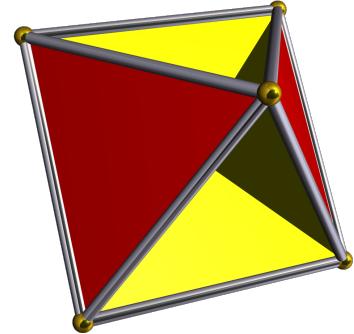


Figura 0.1: Tetrahemihexaedro regular. Algunas de sus caras se intersecan entre sí, haciendo que su topología sea diferente a la de la bola cerrada. Imagen: [Tetra].

sucesiones de Mayer-Vietoris. Las sucesiones de Mayer-Vietoris son la técnica básica para calcular los grupos de homología de un espacio topológico, y son válidas para cualquier espacio.

La segunda parte corresponde al capítulo 2, *Attaching Spaces with Maps*, donde se introducen los espacios CW-complejos y los grupos de homología celular. La homología celular es una forma más directa de computar los grupos de homología, pero requiere que nuestro espacio admita una estructura especial, la *estratificación por CW-complejos*.

Finalmente, los apéndices presentan información adicional que no es necesaria para poder seguir el texto, pero he considerado interesante y digna de discusión.

El objetivo de este texto es introducir al lector en la teoría de homología singular, y está dirigido principalmente a estudiantes de la *Universitat de València*. Como consecuencia, el lector se asume familiarizado con el contenido cubierto por las asignaturas de Estructuras algebraicas y Topología de segundo curso.

# **HOMOLOGÍA SINGULAR DE UN ESPACIO TOPOLÓGICO**

# 1 Grupos de homología singular

## 1.1. Símplices singulares

Decimos que una familia de puntos  $S = \{x_0, \dots, x_p\} \subset \mathbb{R}^n$  es **afínmente independiente** si, dados  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$  tales que

$$\sum_{i=0}^p \lambda_i x_i = \sum_{i=0}^p \mu_i x_i; \quad \sum_{i=0}^p \lambda_i = \sum_{i=0}^p \mu_i$$

se verifica que  $\lambda_i = \mu_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ .

**Proposition 1.1.1** *La familia de puntos  $S = \{x_0, \dots, x_p\} \subset \mathbb{R}^n$  es afínmente independiente si y sólo si la familia de vectores*

$$T = \{x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0\}$$

*es linealmente independiente.*

*Demostración.* Supongamos que  $S$  es afínmente independiente y sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  tales que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i (x_i - x_0) = 0 \iff \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = x_0 \sum_{i=1}^p \lambda_i \quad (1.1)$$

Definimos  $\lambda_0 = -\lambda_1 - \dots - \lambda_p$ . Por construcción, se verifica que  $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_p = \lambda_0 - \lambda_0 = 0$ . Aplicando (1.1),

$$0 = \sum_{i=1}^p \lambda_i (x_i - x_0) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i - x_0 \sum_{i=1}^p \lambda_i = \sum_{i=0}^p \lambda_i x_i$$

Por otro lado, también podemos escribir  $0 = 0x_0 + \dots + 0x_p$ . Dado que  $S$  es una familia afínmente independiente,  $\lambda_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Por tanto,  $T$  es linealmente independiente.

Recíprocamente, sean  $T$  una familia linealmente independiente y  $\mu_0, \alpha_0, \dots, \mu_p, \alpha_p \in \mathbb{R}$  tales que

$$\sum_{i=0}^p \mu_i x_i = \sum_{i=0}^p \alpha_i x_i; \quad \sum_{i=0}^p \mu_i = \sum_{i=0}^p \alpha_i$$

Combinando ambas igualdades, deducimos que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^p (\mu_i - \alpha_i)x_i = \sum_{i=0}^p (\mu_i - \alpha_i)x_i - 0x_0 = \\ &= \sum_{i=0}^p (\mu_i - \alpha_i)x_i - \left( \sum_{i=0}^p (\mu_i - \alpha_i) \right)x_0 = \\ &= \sum_{i=1}^p (\mu_i - \alpha_i)(x_i - x_0) \end{aligned}$$

Dado que  $T$  es linealmente independiente, se sigue que

$$\mu_i - \alpha_i = 0 \iff \mu_i = \alpha_i \quad (i = 1, \dots, p)$$

Sabiendo que la suma de todos los  $\mu_i$  es la misma que la de todos los  $\alpha_i$ , se sigue que  $\mu_0 = \alpha_0$ . Por tanto,  $S$  es afínmente independiente.  $\square$

Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto afínmente independiente y  $(a, b, c)$  una terna de elementos de  $S$  con  $a \neq b \neq c$ . Si  $S$  es afínmente independiente, debe pasar que los vectores  $a - b$  y  $b - c$  sean linealmente independientes.

Como  $a - b \neq 0$ , existe una recta afín  $L_1 \subset \mathbb{R}^n$  que tiene a  $a - b$  como vector director. De la misma forma, existe otra recta afín  $L_2 \subset \mathbb{R}^n$  que tiene a  $b - c$  como vector director. Por independencia lineal, se tiene que  $L_1$  no es paralelo a  $L_2$ , por lo que  $a \notin L_2$  y  $c \notin L_1$ .

Por tanto, un conjunto afínmente independiente es aquel en el que no hay tres puntos colineales.

**Definition 1.1.1** Un  $p$ -símplex es la envoltura convexa de una familia de puntos  $\{x_0, \dots, x_p\} \subset \mathbb{R}^n$  afínmente independientes. Dichos puntos reciben el nombre de vértices del símplex.

Sea  $A$  una familia de puntos afínmente independientes de  $\mathbb{R}^n$  y

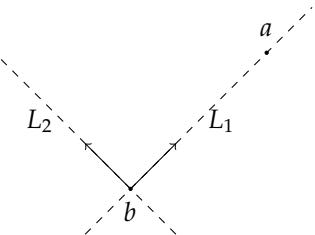
$$i: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$$

la inclusión. Se tiene que  $i(A)$  es una familia de puntos afínmente independiente de  $\mathbb{R}^m$ , por lo que los símplices de  $\mathbb{R}^n$  son también símplices en  $\mathbb{R}^m$ . Por tanto, no es necesario especificar dónde estamos considerando los símplices.

**Proposition 1.1.2** Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$  un  $p$ -símplex y  $\{x_0, \dots, x_p\}$  una familia afínmente independiente de puntos contenidos en  $S$ . Dado un punto  $x \in S$ , existe una familia única de escalares  $t_0, \dots, t_p \in [0, 1]$  tales que

$$x = \sum_{i=0}^p t_i x_i; \quad \sum_{i=0}^p t_i = 1$$

Por lo que una familia de vértices de un símplex es el equivalente a una base en un espacio vectorial.



**Figura 1.1:** La independencia afín es una forma de definir independencia lineal en conjuntos afines, donde los elementos son puntos y no vectores.

#### Envoluta convexa

Un  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  no vacío es convexo si, dados  $x, y \in C$ ,  $C$  contiene al segmento  $[x, y] = \{xt + y(1-t): t \in [0, 1]\}$ . Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es no vacío, se define su envoltura convexa como el menor subconjunto convexo que contiene a  $A$ ,

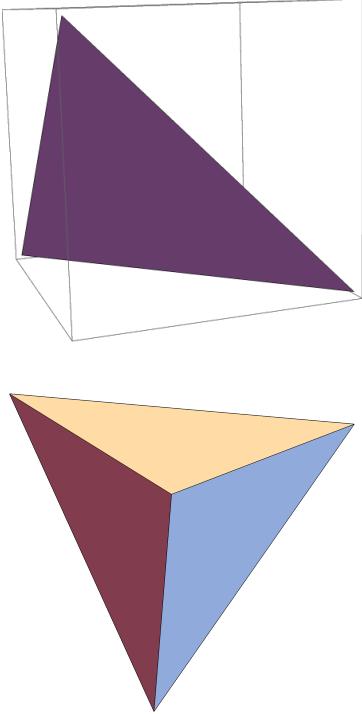
$$\text{Con}(A) = \bigcup_{x, y \in A} [x, y]$$

Decimos que un  $p$ -símplex está **ordenado** cuando se aplica una relación de orden determinada sobre sus vértices.

**Example 1.1.1** Sean  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (0, 1, 0)$  y  $c = (0, 0, 1)$ . La envoltura convexa de  $\{a, b, c\}$  es un 2-símplex, que denotaremos como  $\sigma$ . Si  $e_1 = a$ ,  $e_2 = b$  y  $e_3 = c$ , la relación de orden

$$e_i \leq e_j \iff i \leq j$$

hace que  $\sigma$  sea un 2-símplex ordenado.



**Figura 1.2:** Los triángulos y tetraedros constituyen ejemplos de simplices. Podemos crear una teoría de homología utilizando sólo simplices, pero se limitaría a espacios topológicos contenidos en  $\mathbb{R}^n$ .

Lujan18

Sea  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . La envoltura convexa de los puntos  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  es un  $n$ -símplex, que denotaremos como  $\sigma_n$ . Por 1.1.2, los puntos de  $\sigma_n$  son de la forma

$$(t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \quad t_1 + \dots + t_{n+1} = 1$$

Sea  $S = \{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^m$  una familia de puntos afínmente independientes: la aplicación continua

$$\begin{aligned} f: \sigma_n &\longrightarrow \text{Con}(S) \\ (t_0, \dots, t_n) &\longmapsto \sum_{i=0}^n t_i x_i \end{aligned} \tag{1.2}$$

establece una biyección entre  $\sigma_n$  y  $\text{Con}(S)$ . Dado que  $\sigma_n$  es compacto y  $\text{Con}(S)$  es un espacio de Hausdorff,  $f$  es un homeomorfismo, por lo que  $\text{Con}(S)$  es homeomorfo a  $\sigma_n$ .

De la observación anterior, se sigue que todo  $p$ -símplex de  $\mathbb{R}^{p+1}$  es homeomorfo a  $\sigma_p$ , por lo que podemos considerarlo como el representante canónico de todos los  $p$ -simplices. En consecuencia,  $\sigma_p$  recibe el nombre de  **$p$ -símplex estándar**.

**Example 1.1.2**

1. El conjunto  $\sigma_0$  es el singulete formado por el punto  $1 \in \mathbb{R}$ .
2. El conjunto  $\sigma_1$  es el segmento que une los puntos  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$ .
3. El conjunto  $\sigma_2$  es el triángulo de vértices  $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ .

Si nos limitamos a subespacios topológicos en  $\mathbb{R}^n$ , podemos crear una teoría de homología utilizando sólo simplices ([Lujan18]). Sin embargo, si queremos definir una teoría que cubra todos los espacios topológicos, necesitamos transportar el símplex utilizando aplicaciones continuas.

**Definition 1.1.2** Sea  $X$  un espacio topológico. Un  $p$ -símplex singular de  $X$  es una aplicación continua

$$\phi: \sigma_p \rightarrow X$$

**Example 1.1.3** Sea  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . La aplicación

$$\begin{aligned}\phi: \sigma_1 &\longrightarrow \mathbb{D} \\ (t_0, t_1) &\longmapsto e^{\pi i t_0}\end{aligned}\tag{1.3}$$

es un símplice singular, que envía al 1-símplex estándar en la mitad superior del 1-símplex mostrado en Figura 1.3. Notemos que  $\phi(\sigma_1)$  no es un segmento desde el punto de vista geométrico porque tiene curvatura no nula, pero sí lo es desde un punto de vista topológico, ya que  $\phi$  es un homeomorfismo y  $\sigma_1$  es un segmento.

Dado un  $p \in X$  y un espacio topológico  $Y$ , toda aplicación constante  $Cte_p: Y \rightarrow X$  se identifica con el 0-símplex singular  $\phi_p: \sigma_0 \rightarrow X$  que envía al punto 1 en  $p$ . De la misma forma, si  $I$  es un intervalo cerrado de  $\mathbb{R}$ , todo camino  $\alpha: I \rightarrow X$  se identifica con el 1-símplex singular

$$\begin{aligned}\psi: \sigma_1 &\longrightarrow X \\ (t_0, t_1) &\longmapsto \alpha(t_0)\end{aligned}\tag{1.4}$$

Sean  $X, Y$  espacios topológicos. Dada una aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  y un  $p$ -símplex singular  $\phi: \sigma_p \rightarrow X$ , la aplicación

$$f_{\#}(\phi) := f \circ \phi: \sigma_p \rightarrow Y$$

es un  $p$ -símplex singular en  $Y$  por ser composición de aplicaciones continuas. Esto hace que toda aplicación continua dé lugar a una aplicación que envía  $p$ -símplices singulares de  $X$  en  $p$ -símplices singulares de  $Y$ .

**Proposition 1.1.3**

1. Si  $\text{id}_X$  es la aplicación identidad,  $(\text{id}_X)_{\#}$  también es la aplicación identidad.
2. Si  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  son aplicaciones continuas,

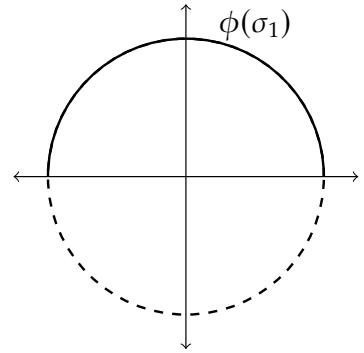
$$(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$$

Sea  $X$  un espacio topológico,  $\phi: \sigma_p \rightarrow X$  un  $p$ -símplex singular y  $0 \leq i \leq p$ . Se define la **cara  $i$ -ésima de  $\phi$**  como el  $(p-1)$ -símplex singular

$$\begin{aligned}\partial_{(i)}\phi: \sigma_{p-1} &\longrightarrow X \\ (t_0, \dots, t_{p-1}) &\longmapsto \phi(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1})\end{aligned}\tag{1.5}$$

**Example 1.1.4** Considérese el 2-símplex singular

$$\begin{aligned}\phi: \sigma_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x + 2, 2y + 2, 2z + 2)\end{aligned}\tag{1.6}$$



**Figura 1.3:** La curva  $\phi(\sigma_1)$  dada por el símplice singular  $\phi$  de 1.1.3. Los símplices singulares amoldan el símplice estándar al espacio de llegada usando su continuidad.

Las caras de  $\phi$  son los 1-símplices singulares

$$\begin{aligned}\partial_{(0)}\phi(u, v) &= \phi(0, u, v) = (2, 2u + 2, 2v + 2) \\ \partial_{(1)}\phi(u, v) &= \phi(u, 0, v) = (2u + 2, 2, 2v + 2) \\ \partial_{(2)}\phi(u, v) &= \phi(u, v, 0) = (2u + 2, 2v + 2, 2)\end{aligned}$$

Desde un punto de vista geométrico,  $\partial_{(i)}\phi(\sigma_1)$  son las caras del tetraedro  $\phi(\sigma_2)$  para  $i = 0, 1, 2$ .

## 1.2. Grupos libres

Sea  $G$  un grupo abeliano y  $n \in \mathbb{Z}$  un entero no nulo. Dado un  $g \in G$ , se define el producto  $ng$  como

$$\begin{aligned}ng &:= \sum_{j=0}^n g & ng &:= \sum_{j=0}^{-n} -g \\ (n > 0) && (n < 0)\end{aligned}$$

Si  $n = 0$ , se considera que  $0g = 0$  para todo  $g \in G$ .

Decimos que un subconjunto  $S \subset G$  es un **sistema generador** de  $G$  si, dado un  $g \in G$ , podemos hallar  $b_1, \dots, b_n \in S$  y enteros  $\mu_1, \dots, \mu_n$  tales que

$$g = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n$$

**Definition 1.2.1** Sea  $G$  un grupo abeliano. Un sistema generador  $B$  de  $G$  es una **base** si, dados  $b_1, \dots, b_n \in B$  y enteros  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0 \implies \lambda_i = 0 \quad (1.7)$$

Decimos que  $G$  es un **grupo libre** si admite una base.

**Example 1.2.1** Supongamos que  $\mathbb{Q}^+ = (\mathbb{Q}, +)$  es un grupo libre generado por un cierto conjunto  $B \subseteq \mathbb{Q}$ . Dados  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in B$ , se tiene que

$$cb \frac{a}{b} - ad \frac{c}{d} = 0$$

por lo que  $B$  está formado por un único elemento.

Sea  $p$  un número primo coprimo con  $b$ . Por ser  $\mathbb{Q}^+$  libre, existirá un entero  $\alpha$  tal que

$$\frac{1}{p} = \alpha \frac{a}{b}$$

pero esto implica que  $b = \alpha p a$ , en contradicción con la premisa de que  $p$  es coprimo con  $b$ . Por tanto,  $\mathbb{Q}^+$  no es un grupo libre.

### Aplicaciones nulas casi por todas partes

Sea  $A$  un conjunto no vacío. Decimos que una aplicación  $f: A \rightarrow \mathbb{Z}$  es **nula casi por todas partes** si podemos hallar un subconjunto  $B \subseteq A$  finito tal que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in A \setminus B$ .

**Proposition 1.2.1** Sea  $A \neq \emptyset$ . Se define el grupo libre generado por  $A$  como la familia  $\mathcal{F}(A)$  de todas las aplicaciones  $f: A \rightarrow \mathbb{Z}$  que se hacen cero casi por

todas partes. Entonces,  $\mathcal{F}(A)$  es un grupo libre dotado con la suma elemento a elemento.

*Demostración.* Dado un  $a \in A$ , se define  $\mathcal{X}_a: A \rightarrow \mathbb{Z}$  como

$$\mathcal{X}_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Notar que  $\mathcal{X}_a$  es una aplicación nula casi por todas partes, por lo que  $\mathcal{X}_a \in \mathcal{F}(A)$ . La base de  $\mathcal{F}(A)$  será el conjunto

$$X := \{\mathcal{X}_a : a \in A\} \subseteq \mathcal{F}(A)$$

Dada una aplicación  $f \in \mathcal{F}(A)$ , se define  $\tilde{f}$  como

$$\tilde{f} = \sum_{a \in A} f(a) \mathcal{X}_a$$

Dado un  $x \in A$ ,

$$\tilde{f}(x) = \sum_{a \in A} f(a) \mathcal{X}_a(x) = f(x) \underbrace{\mathcal{X}_x(x)}_{=1} + \sum_{a \neq x} f(a) \underbrace{\mathcal{X}_a(x)}_{=0} = f(x) \quad (1.8)$$

por lo que  $\tilde{f} = f$ . Por tanto, toda aplicación de  $\mathcal{F}(A)$  es combinación lineal de elementos de  $X$ , de forma que  $X$  es un sistema generador de  $\mathcal{F}(A)$ .

Sean  $\mu_1, \dots, \mu_n$  enteros y  $a_1, \dots, a_n \in A$  tales que  $\mu_1 \mathcal{X}_{a_1} + \dots + \mu_n \mathcal{X}_{a_n} = 0$ . Dado un  $1 \leq j \leq n$ ,

$$0 = \sum_{i=1}^n \mu_i \mathcal{X}_{a_i}(a_j) = \mu_j \underbrace{\mathcal{X}_{a_j}(a_j)}_{=1} + \sum_{i \neq j} \mu_i \underbrace{\mathcal{X}_{a_i}(a_j)}_{=0} = \mu_j$$

por lo que  $\mu_1, \dots, \mu_n = 0$ . Por tanto,  $X$  es una base.  $\square$

Por convenio, se considera que  $\{0\} = \mathcal{F}(\emptyset)$ .

**Example 1.2.2**  $\mathcal{F}(\mathbb{N})$  es el conjunto de todas las sucesiones  $(a_n)_{n=1}^\infty$  de  $\mathbb{Z}$  con  $a_n = 0$  para casi todo  $n \in \mathbb{N}$ . Es decir, el anillo de polinomios sobre  $\mathbb{Z}$ .

Notar que, si  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi: \mathcal{F}(A) &\longrightarrow \mathbb{Z}^n \\ f &\longmapsto (f(a_1), \dots, f(a_n)) \end{aligned} \quad (1.9)$$

es un isomorfismo de grupos.

### 1.3. Complejos de cadenas

**Definition 1.3.1** Un **grupo graduado** es una colección de grupos  $G = \{G_n : n \in \mathbb{Z}\}$ . Diremos que  $G$  es **abeliano** si todos los grupos  $G_n$  lo son.

Sean  $G, H$  grupos graduados. Un **homomorfismo graduado**  $f: G \rightarrow H$  es una colección de homomorfismos

$$f_i: G_i \rightarrow H_{i+r} \quad (i \in \mathbb{Z})$$

siendo  $r \in \mathbb{Z}$  un valor común para todos los  $f_i$ . Dicho entero se denomina **grado** de  $f$ .

### Subgrupo normal

Un subgrupo  $H \leq G$  es normal si, dados  $g \in G$  y  $n \in N$ ,  $ng = gm$  para algún  $m \in N$ . Esta condición es importante para poder garantizar que las clases del espacio cociente están bien definidas, pero se puede obviar cuando  $G$  es abeliano.

**Definition 1.3.2** Dos grupos graduados  $G, H$  son **isomorfos** si, dado un entero  $p$ , existe un isomorfismo  $f_p: G_p \rightarrow H_p$ . Al homomorfismo graduado  $f = \{f_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$  se le denomina **isomorfismo graduado**.

Si  $G, H$  son grupos graduados, decimos que  $H$  es un **subgrupo graduado** de  $G$  si, dado un entero  $n$ ,  $H_n \leq G_n$ . En particular, si  $H_n$  es un subgrupo normal para todo  $n$ , se define el **grupo graduado cociente** como

$$\frac{G}{H} := \left\{ \frac{G_i}{H_i} : i \in \mathbb{Z} \right\}$$

**Definition 1.3.3** Un **complejo de cadenas** es un par de la forma  $(C, d)$ , siendo  $C$  un grupo graduado y  $d$  un endomorfismo de grado -1 tal que

$$\text{Im } d_n \leq \ker d_{n-1}$$

La aplicación  $d$  recibe el nombre de **operador borde**.

Diremos que un complejo de cadenas  $(C, d)$  es **abeliano** si lo es  $C$ .

**Definition 1.3.4** Sean  $(C, d)$  y  $(C', d')$  dos complejos de cadenas. Una **aplicación de cadenas** es un homomorfismo graduado  $\Phi: C \rightarrow C'$  de grado 0 tal que el siguiente diagrama es comutativo para todo  $n$ :

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n \\ \downarrow \Phi_{n+1} & & \downarrow \Phi_n \\ C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n \end{array} \quad (1.10)$$

Sea  $(C, d)$  un complejo de cadenas. Se definen los grupos graduados

$$Z_*(C) := \ker d = \{\ker d_n : n \in \mathbb{Z}\}; \quad Z_n(C) := \ker d_n$$

$$B_*(C) := \text{Im } d = \{\text{Im } d_n : n \in \mathbb{Z}\}; \quad B_n(C) := \text{Im } d_n$$

Diremos que dos elementos  $p, q \in Z_n(C)$  son **homólogos** si  $p - q \in B_n(C)$ .

**Definition 1.3.5** Sea  $C$  un complejo de cadenas. Se definen el **grupo**

**graduado de homología** y el **grupo de homología** de orden  $n$  de  $C$  como

$$H_*(C) := \frac{Z_*(C)}{B_*(C)}; \quad H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)}$$

Diremos que dos complejos de cadenas tienen el mismo **tipo de homología** si sus grupos de homología son isomorfos.

Sea  $f: (C, d) \rightarrow (D, \partial)$  una aplicación de cadenas. Dado un  $c \in Z_n(C)$ ,

$$d_n(c) = 0 \implies \partial_n[f_n(c)] = f_{n-1}[d_n(c)] = f_{n-1}(0)$$

Como  $f_{n-1}$  es un homomorfismo de grupos,  $f_{n-1}(0) = 0$ , por lo que  $f_n(c) \in Z_n(D)$  y  $f_n[Z_n(C)] \leq Z_n(D)$ .

Análogamente,  $f_n(B_n(C)) \leq B_n(D)$ . Por tanto,  $f$  induce un homomorfismo entre grupos de homología,

$$f_*: H_*(C) \rightarrow H_*(D)$$

### 1.3.1. Grupos de homología

**Definition 1.3.6** Se define el **grupo de  $n$ -cadenas singulares**  $S_n(X)$  como el grupo libre generado por todos los simplices singulares  $\phi: \sigma_n \rightarrow X$ . Los elementos de  $S_n(X)$  reciben el nombre de  $n$ -cadenas singulares de  $X$ .

A partir los grupos de cadenas singulares, podemos definir el grupo graduado

$$S_*(X) = \{S_n(X) : n \geq 0\}$$

Para poder completar el grupo graduado, simplemente se considera que  $S_p(X) = 0$  para todo  $p < 0$ .

El objetivo de esta sección es definir un operador borde sobre  $S_*(X)$ , de forma que  $(S_*(X), \partial)$  forme una complejo de cadenas. Podemos extender el operador cara a  $S_n(X)$  tomando

$$\partial_{(j)} \left( \sum_{i=1}^n k_i \phi_i \right) = \sum_{i=1}^n k_i \partial_{(j)} \phi_i$$

Este proceso da lugar a  $n + 1$  operadores cara diferentes, pero ninguno de ellos define un operador borde.

**Definition 1.3.7** Se define el **operador borde**  $\partial: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  asociado a  $S_*(X)$  como

$$\partial = \sum_{j=0}^n (-1)^j \partial_{(j)}$$

**Theorem 1.3.1** Dado un espacio topológico  $X$ ,  $\text{Im } \partial \leq \ker \partial$ . Esto implica que  $(S_*(X), \partial)$  es un complejo de cadenas.

#### Ejercicio

Esta demostración se basa en la cuenta de la vieja, pero la naturaleza de los operadores cara pueden hacerlo engorroso de seguir. Antes de leer la prueba, intenta probarlo para  $n = 4$ . Si puedes hacerlo sin ayuda, puedes ignorar la prueba.

*Demostración.* Sea  $c \in S_n(X)$ . Dado que  $S_n(X)$  es un grupo libre y  $\partial$  es un homomorfismo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $c$  es un simplice singular  $\sigma_n \rightarrow X$ .

Por definición de  $\partial$ ,

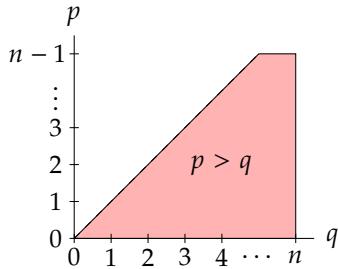
$$\partial^2 c = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \partial_{(p)}(\partial c) = \sum_{q=0}^n \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{p+q} \partial_{(p)} \partial_{(q)} c \quad (1.11)$$

Para continuar, necesitamos la siguiente identidad: dados  $0 \leq p, q \leq n$  con  $p < q - 1$ ,

$$\begin{aligned} \partial_{(p)} \partial_{(q)} c(t_0, \dots, t_{n-2}) &= \partial_{(q)} c(t_0, \dots, t_{p-1}, \overset{(p)}{0}, t_p, \dots, t_{n-2}) = \\ &= c(t_0, \dots, t_{p-1}, \overset{(p)}{0}, t_p, \dots, t_{q-2}, \overset{(q)}{0}, t_{q-1}, \dots, t_{n-2}) = \\ &= \partial_{(p)} c(t_0, \dots, t_{q-2}, \overset{(q-1)}{0}, t_{q-1}, \dots, t_{n-2}) = \\ &= \partial_{(q-1)} \partial_{(p)} c(t_0, \dots, t_{n-2}) \end{aligned}$$

Combinando ambas expresiones,

$$\partial^2 c \stackrel{(1.11)}{=} \sum_{q=1}^n \sum_{p < q-1} (-1)^{p+q} \partial_{(p)} \partial_{(q)} c + \sum_{q=0}^n \sum_{p > q} (-1)^{p+q} \partial_{(p)} \partial_{(q)} c$$



**Figura 1.4:** Gráfica auxiliar para visualizar el cambio de índices descrito en la ecuación (1.12).

Observemos que

$$\begin{aligned} \{(p, q) : q = 0, \dots, n, 0 \leq p < q\} &= \\ \{(q, p) : p = 0, \dots, n-1, p < q \leq n\} \quad (1.12) \end{aligned}$$

por lo que  $\partial^2 c$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} &\sum_{q=1}^n \sum_{p < q-1} (-1)^{p+q} \partial_{(q-1)} \partial_{(p)} c + \sum_{q=0}^n \sum_{p < q} (-1)^{p+q} \partial_{(p)} \partial_{(q)} c = \\ &= \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{p < q} (-1)^{p+q+1} \partial_{(q)} \partial_{(p)} c + \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q > p} (-1)^{p+q} \partial_{(q)} \partial_{(p)} c = \\ &= \sum_{q=0}^{n-1} \left( - \sum_{p < q} (-1)^{p+q} \partial_{(q)} \partial_{(p)} c + \sum_{p < q} (-1)^{p+q} \partial_{(q)} \partial_{(p)} c \right) = 0 \end{aligned}$$

□

Dado que  $S_*(X)$  es abeliano por definición, su grupo de homología asociado está bien definido. Además, como todo espacio topológico  $X$  define un grupo graduado  $S_*(X)$  de forma única, podemos introducir la siguiente notación sin ambigüedades:

$$Z_n(X) := Z_n(S_*(X)); \quad B_n(X) := B_n(S_*(X))$$

**Definition 1.3.8** Sea  $X$  un espacio topológico. Se define el **grupo de homología de orden  $n$**  asociado a  $X$  como

$$H_n(X) := H_n(S_*(X)) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$$

**Example 1.3.1** Sea  $f: [0, 1] \rightarrow X$  un camino. Se define el 1-símplice singular

$$\begin{aligned} \psi: \sigma_1 &\longrightarrow X \\ (t_0, t_1) &\longmapsto f(t_0) \end{aligned} \tag{1.13}$$

Se tiene entonces que  $\psi$  es un 1-ciclo si y sólo si

$$\partial\psi = 0 \iff \psi(0, 1) = \partial_{(0)}\psi = \partial_{(1)}\psi = \psi(1, 0)$$

Dado que  $\psi(0, 1) = f(0)$  y  $\psi(1, 0) = f(1)$ , un camino es un 1-ciclo si y sólo si  $f$  es un lazo.

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Habíamos definido una aplicación  $f_\#$  que convierte símplices de  $X$  en símplices de  $Y$ , al igual que el operador cara convertía  $n$ -símplices en  $(n - 1)$ -símplices. Podemos extender  $f_\#$  a todo el grupo de cadenas singulares de forma que la aplicación resultante sea un homomorfismo:

$$f_\# \left( \sum_{j=1}^k n_j \phi_j \right) = \sum_{j=1}^k n_j f_\#(\phi_j)$$

Esta aplicación recibe el nombre de **morfismo inducido en homología** por  $f$ .

**Proposition 1.3.2** Todo morfismo inducido por una aplicación continua es una aplicación de cadenas. Como consecuencia, si  $f: X \rightarrow Y$  es continua,  $f_\#$  induce una familia de homomorfismos

$$\begin{aligned} f_*: H_n(X) &\longrightarrow H_n(Y) \\ [x] &\longmapsto [f_\#(x)] \end{aligned} \tag{1.14}$$

para  $n \geq 0$ .

Dadas  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  continuas, deducimos de 1.1.3 y de este resultado que

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

Por tanto, deducimos que los grupos de homología son invariantes topológicos:

**Theorem 1.3.3** Sean  $X, Y$  espacios topológicos. Si  $f: X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo,  $f_*: H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$  es un isomorfismo para todo  $k \geq 0$ . Por tanto, el grupo de homología es un invariante topológico.

### 1.3.2. Interpretación geométrica

Sea  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  con la topología inducida por  $\mathbb{R}^2$ . El espacio  $\mathbb{R}^2$  no es homeomorfo a  $X$ ; sin embargo, no es posible probar este resultado utilizando sólo topología conjuntista. En esta sección, veremos cómo la teoría de homología nos permite probar que no existe un homeomorfismo entre  $\mathbb{R}^2$  y  $X$ .

Definimos un **camino orientado** en un espacio topológico  $X$  como una terna  $(\gamma; A, B)$ , siendo  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  un camino con  $\gamma(0) \neq \gamma(1)$  y  $A, B \in \gamma(\{0, 1\})$  con  $A \neq B$ . Diremos que  $(\gamma; A, B)$  está **orientado positivamente** (resp. **negativamente**) si  $A = \gamma(0)$  y  $B = \gamma(1)$ .

**Example 1.3.2** Sea  $\eta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  el camino dado por

$$\eta(t) = (\sin(\pi t), -\cos(\pi t))$$

La orientación negativa de  $\eta$  (que podemos ver en Figura 1.5) viene dada por  $A = \eta(1) = (0, 1)$  y  $B = \eta(0) = (0, -1)$ .

Consideremos los siguientes caminos positivamente orientados en  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned}\eta(t) &= (\sin(\pi t), -\cos(\pi t)); & \phi(t) &= (\cos(\pi t), \sin(\pi t)); \\ \mu(t) &= (2 \sin(\pi t), -\cos(\pi t));\end{aligned}$$

Los caminos  $\phi$  y  $\eta$  tienen orientaciones compatibles, y forman una circunferencia cuyo interior está contenido en  $\mathbb{R}^2$ . Por tanto, podemos hallar una cadena singular cuyo borde sea  $\phi + \eta$ . Si tomamos clases módulo  $B_1(\mathbb{R}^2)$ ,

$$\phi + \eta \in B_1(\mathbb{R}^2) \iff -[\eta] = [\phi]$$

Los caminos  $\eta$  y  $\mu$  forman una figura homotópica a una circunferencia, y sus orientaciones son compatibles. Podemos encontrar una cadena singular cuyo borde sea  $\phi + \mu$ . Tomando clases,

$$\phi + \mu \in B_1(\mathbb{R}^2) \iff [\phi] = -[\mu]$$

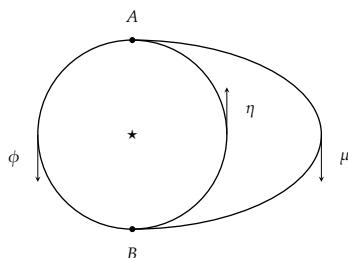


Figura 1.5: Varios caminos en  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.3.3. Característica de Euler

**Definition 1.3.9** Sea  $A$  un grupo abeliano. Se denomina **subgrupo de torsión** de  $A$  al subgrupo  $T$  formado por todos los elementos de orden finito

Considéremos ahora el plano perforado,  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . La aplicación  $\phi|_X + \eta|_X$  ya no forma el borde de una cadena singular, dado que los caminos encierran al punto  $(0, 0)$ , que no está. Por tanto, las clases de  $\phi|_X$  y  $\mu|_X$  serán diferentes. En cambio,  $\phi$  y  $\psi$  siguen siendo homólogas, porque sus orientaciones son compatibles y no contienen al punto que hemos quitado.

Dado que el grupo de homología es un invariante topológico, concluimos que  $\mathbb{R}^2$  no es homeomorfo a  $X$ .

de  $A$ . Decimos que  $A$  es **libre de torsión** si  $T = 0$ , y que  $A$  es un **grupo de torsión** si  $T = A$ .

Si  $T$  es el subgrupo de torsión de un cierto grupo abeliano  $A$ ,  $A/T$  es un grupo libre de torsión.

**Example 1.3.3** 1. El grupo aditivo  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  es un grupo de torsión: dado un  $\bar{p} \in \mathbb{Z}_n$ ,

$$n\bar{p} = \sum_{i=1}^{n|p|} \bar{1} = \sum_{i=1}^{|p|} \bar{n} = \sum_{i=1}^{|p|} 0 = 0$$

Por la misma razón, todo cuerpo de característica mayor que cero define un grupo de torsión.

2. El grupo aditivo  $\mathbb{Z}$  es un grupo libre de torsión porque no tiene divisores de cero: si  $n > 0$  y  $p \in \mathbb{Z}$  es tal que  $np = 0$ , necesariamente se cumple que  $p = 0$ .

**Example 1.3.4** Consideremos el grupo  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ . Dado un  $\bar{q} \in \mathbb{Z}_n$ ,

$$n(0, \bar{q}) = \sum_{i=1}^n (0, \bar{q}) = (0, n\bar{q}) = (0, 0)$$

por lo que el subgrupo de torsión de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$  contiene a  $\{0\} \times \mathbb{Z}_n$ . Sin embargo, si  $m > 0$  y  $p \in \mathbb{Z}$ ,

$$m(p, \bar{q}) = \sum_{i=1}^m (p, \bar{q}) = (mp, m\bar{q}) = (0, 0)$$

Ésto es tanto como decir que  $n$  divide a  $mq$  y  $p = 0$ . Por tanto, el subgrupo de torsión de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$  es  $\{0\} \times \mathbb{Z}_n$ .

Sea  $A$  un grupo abeliano y  $T$  el subgrupo de torsión de  $A$ , que es un subgrupo normal por ser  $A$  abeliano. Se define el **rango** de  $A$  como el mínimo número de generadores que posee  $A/T$ .

**Definition 1.3.10** Sea  $X$  un espacio topológico. Se define el  **$n$ -ésimo número de Betti**  $\beta_n(X)$  como el rango de  $H_n(X)$ . Si existe un  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\beta_p(X) = 0$  para todo  $p > k$ , se define la **característica de Euler** de  $X$  como

$$\chi(X) := \sum_{n=0}^k (-1)^n \beta_n(X)$$

## 1.4. Homología de un espacio arcoconexo

Sea  $X$  un espacio topológico arcoconexo. Dados dos puntos  $x, y \in X$ , existe un camino  $L_{x,y}: [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $L_{x,y}(0) = x$  y  $L_{x,y}(1) = y$ . Como vimos en 1.3.1,  $L_{x,y}$  induce un 1-símplice singular  $\phi: \sigma_1 \rightarrow X$ . En particular,  $L_{x,x} = \text{Cte}_x$  es una aplicación constante que queda totalmente determinada por  $x$ , por lo que podemos identificar  $x$  con  $L_{x,y}$ .

Dado que  $\text{Cte}_x \in S_0(X)$ , existirán  $x_1, \dots, x_n \in X$  y enteros  $\mu_1, \dots, \mu_n$  tales que

$$x \equiv \text{Cte}_x = \sum_{i=1}^n \mu_i \text{Cte}_{x_i} \equiv \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$$

Consideremos el último tramo del complejo de cadenas  $S_*(X)$ :

$$S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0 \quad (1.15)$$

Dado que  $\partial_0 = 0$ ,  $S_0(X) = Z_0(X)$  y podemos construir el siguiente homomorfismo entre  $S_0(X)$  y  $\mathbb{Z}$ :

$$\begin{array}{ccc} \beta: S_0(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n_1 x_1 + \cdots + n_p x_p & \longmapsto & n_1 + \cdots + n_p \end{array} \quad (1.16)$$

Como  $X \neq \emptyset$ ,  $\beta$  es epimorfismo, ya que  $p = \beta(px)$  para todo  $x \in X$ .

Sea  $\phi \in S_1(X)$ : como  $\partial$  es un homomorfismo de grado  $-1$ ,  $\partial\phi \in S_0(X)$ . En particular,  $\phi$  es una aplicación continua que depende de dos variables no negativas,  $t_0$  y  $t_1$ , cuya suma siempre es 1. Si computamos el operador borde,

$$\begin{aligned} \partial\phi &= \phi(0, t_0) - \phi(t_0, 0) = \phi(0, 1) - \phi(1, 0); \\ \beta(\partial\phi) &= \beta(\phi(0, 1) - \phi(1, 0)) = 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

por lo que  $\partial\phi \in \ker \beta$ . Si  $c = n_1\phi_1 + \cdots + n_p\phi_p$ ,

$$\beta(\partial c) = \beta(n_1\partial\phi_1 + \cdots + n_p\partial\phi_p) = n_1\beta(\partial\phi_1) + \cdots + n_p\beta(\partial\phi_p) = 0$$

Pero  $\partial c$  son los elementos de  $B_0(X)$ , por lo que  $B_0(X) \subseteq \ker \beta$ .

Recíprocamente, sea  $c \in \ker \beta$ : identificando cada punto con la aplicación constante que lleva a todo el espacio en ese punto, existirán  $x_1, \dots, x_k \in X$  tales que  $c = n_1 x_1 + \cdots + n_k x_k$ . Como  $X$  es arcoconexo, dado un  $x \in X$ , podemos construir la cadena singular  $d = n_1 L_{x,x_1} + \cdots + n_k L_{x,x_k}$  y

$$\partial d = \sum_{i=1}^p n_i (L_{x,x_i}(1) - L_{x,x_i}(0)) = \sum_{i=1}^k n_i x_i - x \sum_{i=1}^k n_i.$$

Como  $c \in \ker \beta$ , se sigue que

$$\sum_{i=1}^p n_i = \beta(c) = 0 \implies \partial d = \sum_{i=1}^p n_i x_i = c.$$

Dado un homomorfismo  $f: G \rightarrow H$ ,

$$\text{Im } f \cong \frac{G}{\ker f}$$

Por tanto,  $c \in B_0(X)$  y  $B_0(X) = \ker \beta$ . Aplicando el teorema de isomorfía,

$$H_0(X) = \frac{Z_0(X)}{B_0(X)} = \frac{S_0(X)}{\ker \beta} \cong \mathbb{Z}$$

**Proposition 1.4.1** Sea  $X$  un espacio topológico arcoconexo. El grupo  $H_0(X)$  tiene un único generador.

**Example 1.4.1** Sea  $X = \{\star\}$ . Dado un  $n \geq 0$ , existe un único  $n$ -símplice singular  $\phi_n : \sigma_n \rightarrow X$ , que es la aplicación constante. Las caras de la aplicación constante son la aplicación constante, por lo que

$$\partial\phi_n = \begin{cases} \phi_{n-1} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Dado que  $S_n(X) = \langle \phi_n \rangle$ , el operador borde  $\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  es un isomorfismo si  $n$  es par y cero si  $n$  es impar. Por tanto,  $H_n(X) = 0$  para todo  $n > 0$  y  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .

### 1.4.1. Sumas directas en homología

Sea  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  una familia de grupos abelianos. Se define el **producto directo** de los grupos  $G_\alpha$  como el grupo

$$G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha := \left\{ f : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \mid f(\alpha) \in G_\alpha \quad \forall \alpha \in A \right\}$$

Denotaremos a las aplicaciones  $f \in G$  como tuplas de la forma  $f = (f_\alpha)_{\alpha \in A} = \{f(\alpha)\}_{\alpha \in A}$ . Los elementos  $f_\alpha$  reciben el nombre de **componentes** de  $f$ .

**Example 1.4.2** Sea  $A = \{0, \dots, n\}$ . El producto directo

$$G = \prod_{\alpha \in A} \mathbb{Z}$$

es isomorfo al subgrupo de  $\mathbb{Z}[x]$  formado por polinomios de grado menor o igual que  $n$ , por lo que podemos identificar  $f \in G$  con un polinomio

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_n x^n$$

Tomando  $A = \mathbb{N}$ ,  $G$  es isomorfo al grupo aditivo  $\mathbb{Z}[x]$ . Sin embargo, también podemos verlo como el grupo de sucesiones en  $\mathbb{Z}$  junto con la suma.

**Definition 1.4.1** Sea  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  una familia de grupos abelianos con producto directo  $G$ . Se define la **suma directa** de  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  como el subgrupo  $H$  de  $G$  formado por las aplicaciones nulas casi por todas partes.

Cuando consideramos una familia finita de grupos abelianos, no hace falta distinguir entre la suma y el producto directo. La diferencia entre las sumas y los productos directos sólo se manifiesta cuando consideramos una familia infinita:

Una serie de potencias sobre  $\mathbb{Z}$  se define como una suma formal de la forma

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j \quad (f_j \in \mathbb{Z}) \quad (1.17)$$

La familia de todas las series de potencias sobre  $\mathbb{Z}$  se denota como  $\mathbb{Z}[[x]]$ .

Podemos ver  $\mathbb{Z}[[x]]$  como el producto directo de  $\mathbb{Z}$  consigo mismo una cantidad numerable de veces. Es claro que  $\mathbb{Z}[x]$  es un subgrupo de  $\mathbb{Z}[[x]]$ : la suma formal (1.17) es un polinomio si y sólo si  $f_j = 0$  para todo  $j$  mayor que un cierto  $j_0$ . Sin embargo, no todas las series de potencias son polinomios: no existe ningún polinomio que sea igual a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (1.18)$$

Como consecuencia de esta inclusión estricta,  $\mathbb{Z}[x]$  tiene propiedades que  $\mathbb{Z}[[x]]$  no cumple. Por ejemplo, todo elemento de  $\mathbb{Z}[x]$  da lugar a una función  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ , pero la suma formal (1.18) diverge en la topología estándar de  $\mathbb{Q}$  cuando  $x \geq 1$ .

Dada una familia de complejos de cadenas  $\{C^\alpha\}_{\alpha \in A}$ , se define el grupo graduado

$$C = \sum_{\alpha \in A} C^\alpha := \left\{ \sum_{\alpha \in A} C_p^\alpha : p \in \mathbb{Z} \right\}$$

Dado un  $c \in C_p$ , existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$  tales que  $c(\alpha) = 0$  para todo  $\alpha \in A \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Podemos entonces identificar  $c$  con un elemento  $(c^{\alpha_1}, \dots, c^{\alpha_n}) \in C_p^{\alpha_1} \oplus \dots \oplus C_p^{\alpha_n}$ . Si denotamos al operador borde de  $C^{\alpha_j}$  como  $\partial^{\alpha_j}$ ,

$$\left( \partial_p^{\alpha_1} c^{\alpha_1}, \dots, \partial_p^{\alpha_n} c^{\alpha_n} \right) \in C_{p-1}^{\alpha_1} \oplus \dots \oplus C_{p-1}^{\alpha_n}$$

Por tanto, definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \partial_p: C_p &\longrightarrow C_{p-1} \\ c &\longmapsto (\partial_p^{\alpha_1} c^{\alpha_1}, \dots, \partial_p^{\alpha_n} c^{\alpha_n}) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Dado que  $\partial_p$  actúa componente a componente, es inmediato que esta construcción da lugar a un operador borde.

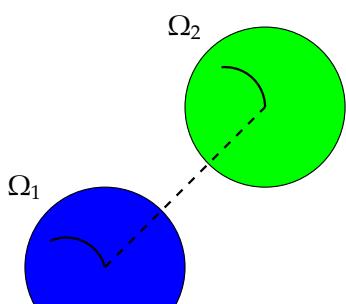
**Lemma 1.4.2** Dada una familia de complejos de cadenas  $\{C^\alpha\}_{\alpha \in A}$  con suma directa  $C$ ,

$$H_*(C) \cong \sum_{\alpha \in A} H_*(C^\alpha)$$

### 1.4.2. Descomposición en arcocomponentes

Supongamos  $\Omega$  es un espacio topológico formado por dos arcocomponentes,  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , como los que se muestran en Figura 1.6. Si  $f(x) \in \Omega_1$ , por continuidad,  $f(\sigma_p) \subseteq \Omega_1$ . De esta forma, todos los elementos de la base de  $H_p(\Omega)$  están en  $H_p(\Omega_1)$  o en  $H_p(\Omega_2)$ ; es decir,

$$H_p(\Omega) \cong H_p(\Omega_1) \oplus H_p(\Omega_2)$$



**Proposition 1.4.3** Sea  $X$  un espacio topológico y  $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$  la familia de arcocomponentes de  $X$ .

$$H_*(X) \cong \sum_{\alpha \in A} H_*(X_\alpha)$$

*Demostración.* Considérese la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi_k : \sum_{\alpha} S_k(X_\alpha) &\longrightarrow S_k(X) \\ (g_\alpha)_\alpha &\longmapsto \sum_{\alpha} g_\alpha \end{aligned} \quad (1.20)$$

Toda cadena singular  $g \in S_k(X)$  admite una descomposición única como combinación lineal de  $k$ -símplices singulares. Dado que cada símplice va a parar a una única componente conexa de  $X$ , se sigue que

$$\Psi_k(g) = \Psi_k(h) \implies g = h$$

por lo que  $\Psi_k$  es inyectiva.

Sea  $\phi : \sigma_k \rightarrow X$  un  $k$ -símplice singular. Las aplicaciones continuas preservan la arcoconexión, por lo que  $\phi(\sigma_k)$  está en alguna componente arcocompleja  $X_\alpha \subseteq X$ . Por tanto, podemos hallar un  $\phi_\alpha \in S_k(X_\alpha)$  tal que

$$\Psi_k(\phi_\alpha) = \phi$$

por lo que  $\Psi_k$  es sobreyectiva.

Dado  $g = (g_\alpha)_\alpha$ ,

$$\Psi_k(\partial g) = \Psi_k(\partial^\alpha g_\alpha) = \sum_{\alpha \in A} \partial^\alpha g_\alpha = \partial \sum_{\alpha \in A} g_\alpha = \partial \Psi_k(g)$$

Se sigue que  $\Psi$  es aplicación de cadenas y

$$H_*(X) = H_*[S_*(X)] \cong H_* \left[ \sum_{\alpha \in A} S_*(X_\alpha) \right]$$

Finalmente, aplicando 1.4.2,

$$H_* \left[ \sum_{\alpha \in A} S_*(X_\alpha) \right] \cong \sum_{\alpha \in A} H_*[S_*(X_\alpha)] = \sum_{\alpha \in A} H_*(X_\alpha)$$

□

Como consecuencia de este resultado, podemos asumir que todo espacio topológico es arcocomplejo.

Sea  $X_\alpha$  una arcocomponente de  $X$  y  $x, y \in Z_0(X_\alpha)$ . Si  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $ax + by \in Z_0(X_\alpha)$ . Teniendo en cuenta que

$$ax + by = ax + ay - ay + by = a(x - y) + y(a + b)$$

siendo  $x - y$  el borde de un 1-símplice y  $a + b$  un entero, se tiene que

$$[ax + by] = [a(x - y) + y(a + b)] = a[x - y] + (a + b)[y] = (a + b)[y]$$

Es decir,

$$H_0(X_\alpha) = \langle [y] \rangle \cong \mathbb{Z}$$

Si  $X$  tiene  $n$  arcocomponentes, existirán  $y_i \in H_0(X_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) tales que

$$H_0(X) = \sum_{\alpha=1}^n \langle [y_\alpha] \rangle \cong \sum_{i=1}^n \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^n$$

**Corollary 1.4.4** Si  $X$  tiene  $n$  arcocomponentes,

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^n$$

### 1.4.3. Homología de un conjunto convexo

El objetivo de este apartado es probar que todo conjunto convexo tiene el tipo de homología de un punto. Es decir: si  $X$  es un espacio convexo,

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}; \quad H_p(X) = 0 \quad (p > 0)$$

Ya sabemos que  $H_0(X)$  tiene un único generador. Por tanto, nos queda probar la segunda igualdad.

**Lemma 1.4.5** Sea  $X$  un conjunto convexo. Dado un simplice singular  $\phi: \sigma_p \rightarrow X$ , la aplicación  $T_p(\phi): \sigma_{p+1} \rightarrow X$  dada por

$$(t_0, \dots, t_{p+1}) \mapsto \begin{cases} (1-t_0)\phi\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_{p+1}}{1-t_0}\right) + t_0x & \text{si } t_0 < 1 \\ x & \text{si } t_0 = 1 \end{cases}$$

es un simplice singular.

*Demostración.* Veamos primero que  $T_p(\phi)$  está bien definida: si  $t_0 < 1$ ,

$$\sum_{j=0}^{p+1} t_j = 1 \iff \sum_{j=1}^{p+1} t_j = 1 - t_0 \iff \sum_{j=1}^{p+1} \frac{t_j}{1-t_0} = 1 \quad (1.21)$$

por lo que los puntos de la forma  $\frac{t_j}{1-t_0}$  están en  $\sigma_p$  y  $T_p(\phi)$  está bien definida.

Sea  $\tau_j = \frac{t_j}{1-t_0}$ . La aplicación  $T_p(\phi)$  es claramente continua en todos los puntos con  $t_0 < 1$  por ser composición de funciones continuas. Pasemos al caso  $t_0 = 1$ :

$$\begin{aligned} 0 \leq \|T_p(\phi)(t_0, \dots, t_{p+1}) - x\| &= \|(1-t_0)\phi(\tau_1, \dots, \tau_{p+1}) - (1-t_0)x\| \leq \\ &\leq (1-t_0)(\|\phi(\tau_1, \dots, \tau_{p+1})\| + \|x\|) \end{aligned}$$

Dado que  $\phi$  es continua y  $\sigma_p$  es compacto,  $\phi(\sigma_p)$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ , por lo que está acotado. Podemos encontrar un  $M > 0$  tal que  $\|\phi(\tau_1, \dots, \tau_{p+1})\|$ , por lo que

$$0 \leq \|T_p(\phi)(t_0, \dots, t_{p+1}) - x\| \leq (1-t_0)(M + \|x\|)$$

De estas desigualdades, concluimos que

$$\lim_{t_0 \rightarrow 1} T_p(\phi)(t_0, \dots, t_{p+1}) = x$$

y  $T_p(\phi)$  es un simplice singular.  $\square$

**Theorem 1.4.6** Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo. Dado un  $p > 0$ ,

$$H_p(X) = 0$$

*Demostración.* Dado un  $p$ -simplice singular  $\phi$ , sea  $T_p(\phi)$  el simplice definido en el lema 1.4.5. Queremos ver que

$$\phi = \partial T_p(\phi) + T_p(\partial\phi) \quad (1.22)$$

Por un lado,  $\partial T_p(\phi)(t_0, \dots, t_p) = \phi(t_0, \dots, t_p)$  por lo que  $\partial \circ T_p$  es la identidad. Por otro lado, dado  $i = 1, \dots, p+1$ ,

$$\begin{aligned} T_p(\partial_{(i-1)}\phi)(t_0, \dots, t_p) &= (1-t_0)(\partial_{(i-1)}\phi)(\tau_1, \dots, \tau_p) + t_0x = \\ &= (1-t_0)\phi(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, 0, \tau_{i-1}, \dots, \tau_p) + t_0x = \\ &= T_p(\phi)(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_p) = \\ &= \partial_{(i)}T_p(\phi)(t_0, \dots, t_p) \end{aligned}$$

de forma que  $\partial_{(i)}(T_p\phi) = T_p(\partial_{(i-1)}\phi)$ . Combinando ambas identidades,

$$\begin{aligned} \partial T(\phi) &= \partial_{(0)}T(\phi) + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \partial_{(i)}(T_p\phi) = \\ &= \phi + \sum_{i=0}^p (-1)^{i+1} T_p(\partial_{(i)}\phi) = \phi - \sum_{i=0}^p (-1)^i T_p(\partial_{(i)}\phi) \end{aligned}$$

de donde se sigue la identidad deseada.

Sea  $z \in Z_p(X)$ . Usando (1.22),  $z = \partial T_p(z) + T_p(\partial z) = \partial T_p(z)$ , por lo que  $z \in B_p(X)$  y

$$H_p(X) = \frac{B_p(X)}{Z_p(X)} = 0$$

$\square$

## 1.5. Homotopías en el grupo de homología

**Definition 1.5.1** Sea  $X$  un espacio topológico. Decimos que  $X$  es **contráctil** si existe un punto  $p \in X$  y una homotopía  $F_p$  tal que

$$F_p: \text{id}_X \simeq \text{Cte}_p$$

Sea  $X$  un espacio contráctil. Por definición, existe un punto  $p \in X$  y una homotopía  $F: X \times [0, 1] \rightarrow X$  tales que  $F: \text{id}_X \simeq \text{Cte}_p$ . Si ahora consideramos dos puntos  $x, y \in X$ , podemos construir el camino  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$

dado por

$$\alpha(t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } t < 1/2 \\ F(y, 1 - 2t) & \text{si } t \geq 1/2 \end{cases}$$

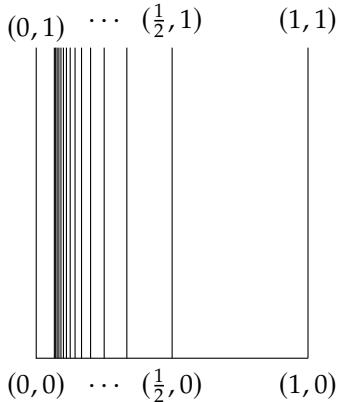
Observamos que  $F(x, 1) = p = F(y, 1)$ , de forma que  $\alpha$  es continua en  $t = 1/2$ . Por tanto, podemos hallar un camino que conecta todo par de puntos en  $X$ , de forma que  $X$  es arcoc conexo.

**Example 1.5.1** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo. Por ser convexo, dado un  $a \in A$ , el segmento  $[0, a]$  está contenido en  $A$ . Eso nos permite definir la aplicación continua

$$F: A \times I \longrightarrow A \quad (1.23)$$

$$(a, t) \longmapsto (1-t)a$$

por lo que  $F: \text{id}_A \simeq \text{Cte}_0$



**Figura 1.7:** Primeras 15 iteraciones del peine del topólogo. La iteración  $w$  añade el segmento correspondiente a  $x = 1/w$ .

**Example 1.5.2** Sea  $\text{III}$  (pronunciado *sh*) el peine del topólogo. Consideremos la aplicación continua

$$F: \text{III} \times I \longrightarrow \text{III} \quad (1.24)$$

$$(x, y, t) \longmapsto (x, (1-t)y)$$

y la proyección sobre el eje de abscisas,  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . La aplicación  $F$  es una homotopía que baja las púas de  $\text{III}$ :

$$F: \text{id}_{\text{III}} \simeq (\pi \times \text{Cte}_0)$$

Dado que  $\pi \simeq \text{Cte}_{(1,0)}$ ,  $\text{III}$  es un espacio contráctil.

**Definition 1.5.2** Un subespacio  $A$  de  $X$  es un **retracto débil** si podemos hallar una aplicación continua  $r: X \rightarrow A$  tal que  $r|_A \simeq \text{id}_A$ . Si podemos construir  $r$  de forma que  $r|_A = \text{id}_A$ , decimos que  $A$  es un **retracto fuerte** (o simplemente **retracto**) y  $r$  es una **retracción**.

Sea  $A$  un retracto de  $X$  y  $r: X \rightarrow A$  una retracción. Por definición de retracto, si  $i: A \hookrightarrow X$  es la inclusión,

$$r \circ i = \text{id}_A \implies \text{id}_{H_n(A)} = (1_A)_* = (r \circ i)_* = r_* \circ i_*$$

por lo que  $r_*$  es sobreyectiva e  $i_*$  es inyectiva.

**Example 1.5.3** Sea  $D^2$  la bola de centro  $p = (0, 0)$  y radio 1 de  $\mathbb{R}^2$ . Se considera la aplicación

$$r: D^2 - \{p\} \longrightarrow S^1 \quad (1.25)$$

$$x \longmapsto \frac{x}{\|x\|}$$

La aplicación  $r$  es continua por ser cociente de funciones continuas. Además,  $r|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$ . Se sigue que  $S^1$  es un retracto de  $D^2 - \{p\}$ .

**Example 1.5.4** ([Spanier66], p. 28) Sea  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  el cuadrado unidad en  $\mathbb{R}^2$ . La inclusión  $i: \text{III} \hookrightarrow X$  define un retracto débil. Sin embargo, se puede probar que  $\text{III}$  no es un retracto fuerte de  $X$ .

**Definition 1.5.3** Sea  $A$  un subespacio de  $X$ . Decimos que  $X$  es **deformable en  $A$**  si existe una aplicación continua  $r: X \rightarrow A$  llamada **deformación** tal que  $i \circ r \simeq \text{id}_X$ , siendo  $i: A \hookrightarrow X$  la inclusión.

Dado que  $i \circ r \simeq \text{id}_X$ ,  $i_*$  es sobreyectiva y  $r_*$  es inyectiva.

**Example 1.5.5** 1. Sea  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la proyección sobre el eje de abscisas. Tomando la aplicación  $r(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ , se tiene que  $r \circ \pi: D^2 \rightarrow S^1$  es una deformación. No obstante, si tomamos el punto  $(0, 1) \in S^1$ ,

$$(r \circ \pi)(0, 1) = r(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0) \neq (0, 1)$$

por lo que  $r \circ \pi$  no es una retracción.

2. Sea  $X$  un espacio contráctil a un cierto punto  $q$ . Si  $A$  es un subespacio de  $X$  que contiene a  $q$ , se tiene que  $\text{Cte}_q: X \rightarrow A$  es una deformación de  $X$  en  $A$  por definición de espacio contráctil. Por tanto,  $X$  es deformable en cualquier subespacio que contenga a  $q$ .

**Definition 1.5.4** Decimos que un subespacio  $A$  es un **retracto por deformación fuerte** de  $X$  si podemos hallar una homotopía  $F: X \times I \rightarrow X$  tal que

1. dado un  $x \in X$ ,  $F(x, 0) = x$ ;
2.  $F(X, 1) \subseteq A$ ;
3. dado un  $a \in A$  y un  $t \in I$ ,  $F(a, t) = a$ .

En particular, observamos que un retracto por deformación fuerte describe tanto una deformación (ítem 2) como una retracción (ítem 3).

**Example 1.5.6** El peine del topólogo no es un retracto por deformación fuerte del cuadrado unidad, ya que no es un retracto fuerte.

Sea  $i: A \hookrightarrow X$  la inclusión. Si  $A$  es un retracto por deformación de  $X$ ,  $X$  es deformable en  $A$  ( $i_*$  es un epimorfismo), pero  $A$  es un retracto de  $X$  ( $i_*$  es un monomorfismo). Por tanto, se tiene el siguiente corolario:

**Corollary 1.5.1** Los retractos por deformación fuerte no alteran el tipo de homología de un espacio topológico.

### 1.5.1. Homotopías de cadenas

Sean  $C$  y  $D$  complejos de cadenas, con  $f, g: C \rightarrow D$  aplicaciones de cadenas. Queremos hallar una condición suficiente para poder afirmar que  $f$  y  $g$  inducen el mismo homomorfismo entre  $H_p(C)$  y  $H_p(D)$ .

Una forma de comprobar esto es verificar que la aplicación de cadenas  $\alpha = f - g: C \rightarrow D$  induce el homomorfismo nulo en homologías:

$$f_* = g_* \iff \alpha_* = f_* - g_* = 0$$

Sea  $c \in Z_p(C) \leq C_p$ . Supongamos que existe un  $b \in D_{p+1}$  tal que  $\alpha(c) = \partial b$ . Por cómo se define  $B_p(D)$ , es inmediato que

$$\alpha_*([c]) = [\partial b] = 0 + B_p(D)$$

Existirá una homomorfismo  $S: C_p \rightarrow D_{p+1}$  tal que  $\alpha = \partial \circ S$ . Pero esta no es una aplicación de cadenas, por lo que no sabemos si va a inducir un homomorfismo entre los grupos de homología.

Como  $S$  es un homomorfismo,  $S(0) = 0$ ; así, si tomamos  $T = S|_{Z_p(C)}$ , se verifica que  $\alpha = \partial \circ T + T \circ \partial$ . Veamos que esta nueva definición de  $\alpha$  conmuta con el operador borde:

$$\begin{aligned} \partial \circ \alpha &= \partial^2 \circ T + \partial \circ T \circ \partial = \partial \circ T \circ \partial = \\ &= \partial \circ T \circ \partial + T \circ \partial^2 = \alpha \circ \partial \end{aligned}$$

Por construcción,  $\alpha_*$  es el homomorfismo nulo. Pero  $\alpha = f - g$ , por lo que hemos encontrado una condición suficiente para que  $f$  y  $g$  induzcan el mismo homomorfismo entre grupos de homología.

**Definition 1.5.5** Sean  $C$  y  $D$  complejos de cadenas. Dos aplicaciones de cadenas  $f, g: C \rightarrow D$  son **homotópicas** si existe un homomorfismo  $T: C \rightarrow D$  de grado 1 tal que

$$f - g = \partial \circ T + T \circ \partial$$

La aplicación  $T$  recibe el nombre de **homotopía de cadenas** entre  $f$  y  $g$ .

### 1.5.2. Aplicaciones homotópicas

**Theorem 1.5.2** (Teorema de invarianza homotópica de la homología)  
Dadas dos aplicaciones continuas  $f, g: X \rightarrow Y$  homotópicas,  $f_* = g_*$ .

*Demostración.* Sea  $F: X \times I \rightarrow Y$  una homotopía entre  $f$  y  $g$ . Se definen las aplicaciones  $\alpha, \beta: X \rightarrow X \times I$  dadas por las expresiones

$$\alpha(x) = (x, 0); \quad \beta(x) = (x, 1)$$

de forma que  $f = F \circ \alpha$  y  $g = F \circ \beta$ .

Supongamos que existe una homotopía de cadenas  $T: S_*(X) \rightarrow S_*(X \times I)$  entre  $\alpha$  y  $\beta$ .  $T$  induce una homotopía de cadenas entre  $f_\#$  y  $g_\#$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_\# - g_\# &= F_\# \circ \alpha_\# - F_\# \circ \beta_\# = F_\# \circ (\alpha_\# - \beta_\#) = \\ &= F_\# \circ (\partial \circ T + T \circ \partial) = (F_\# \circ \partial) \circ T + (F_\# \circ T) \circ \partial \end{aligned}$$

Como  $F_\#$  es una aplicación de cadenas,

$$\begin{aligned}(F_\# \circ \partial) \circ T + (F_\# \circ T) \circ \partial &= (\partial \circ F_\#) \circ T + (F_\# \circ T) \circ \partial = \\ &= \partial \circ (F_\# \circ T) + (F_\# \circ T) \circ \partial\end{aligned}$$

por lo que  $f_* = g_*$ , que es lo que queríamos probar. Por tanto, bastará con probar que  $T$  existe.

Sea  $\tau_n: \sigma_n \rightarrow \sigma_n$  la aplicación identidad. Procedemos a construir  $T$  de forma inductiva: supongamos que  $X = \sigma_0$ . El simplice  $\sigma_0$  es el espacio puntual formado por el punto 1, de forma que definimos la 0-cadena

$$c = \alpha_\#(\tau_0) - \beta_\#(\tau_0) = \alpha - \beta \in S_0(\sigma_0 \times I)$$

Como  $S_0(\sigma_0 \times I) = Z_0(\sigma_0 \times I)$ ,  $c$  es un 0-ciclo.

Dado que  $\sigma_0$  es un espacio puntual, podemos identificar  $\alpha$  con  $\alpha(1) = (1, 0)$  y  $\beta$  con  $\beta(1) = (1, 1)$ . Como  $\sigma_0 \times I$  es arcoconexo, existe un camino

$$b: I \rightarrow \sigma_0 \times I$$

tal que  $b(0) = (1, 0) \equiv \alpha$  y  $b(1) = (1, 1) \equiv \beta$ . Se sigue que  $c = \partial b$ . Definimos entonces  $T_{\sigma_0}(\tau_0) := b$ .

Si  $X$  es un espacio topológico arbitrario y  $\phi: \sigma_0 \rightarrow X$  un 0-simplice singular, definimos

$$T_X(\phi) := (\phi \times \text{id}_I)_\#(T_{\sigma_0}(\tau_0))$$

La aplicación  $T_X$  induce un homomorfismo de  $S_0(X)$  en  $S_1(X \times I)$  de forma única.

Sea  $X$  un espacio topológico arbitrario y  $n > 0$ . Supongamos construida para todo  $i < n$  una aplicación  $T_X: S_i(X) \rightarrow S_{i+1}(X \times I)$  que verifique las siguientes condiciones:

1.  $\partial \circ T_X + T_X \circ \partial = \alpha_\# - \beta_\# (\star)$ ,
2.  $T_X \circ h_\# = (h_\# \times 1_I) \circ T_X$  para toda aplicación continua  $h: X \rightarrow Y$ .

Dado un  $d \in S_n(\sigma_n)$ ,  $\partial d \in S_{n-1}(\sigma_n)$ , por lo que la cadena singular

$$c = \alpha_\#(d) - \beta_\#(d) - T_{\sigma_n}(\partial d) \quad (1.26)$$

está bien definida por hipótesis de inducción. Si calculamos  $\partial c$ ,

$$\begin{aligned}\partial c &= \partial \alpha_\#(d) - \partial \beta_\#(d) - \partial T_{\sigma_n}(\partial d) \stackrel{(*)}{=} \\ &= \partial \alpha_\#(d) - \partial \beta_\#(d) - \partial \alpha_\#(d) + \partial \beta_\#(d) + T_{\sigma_n}(\partial^2 d) = 0\end{aligned}$$

por lo que  $c \in Z_n(\sigma_n \times I)$ . Dado que  $\sigma_n \times I$  es convexo,

$$H_n(\sigma_n \times I) = 0 \iff Z_n(\sigma_n \times I) = B_n(\sigma_n \times I)$$

por lo que  $c \in B_n(\sigma_n \times I)$ . Existirá entonces un  $b \in S_{n+1}(\sigma_n \times I)$  tal que  $\partial b = c$ . Se define  $T_{\sigma_n}(d) = b$ .

Al igual que hicimos en el caso  $n = 0$ , definimos

$$T_X(\phi) = (\phi \times \text{id}_I)_\#(T_{\sigma_n}(\tau_n))$$

Nos queda ver que  $T_X$  verifica las dos condiciones descritas en la hipótesis de inducción.

Veamos que  $T_{\sigma_n}$  verifica la condición  $(\star)$ :

$$\begin{aligned}\partial T_{\sigma_n}(d) + T_{\sigma_n}(\partial d) &= \partial b + T_{\sigma_n}(\partial d) = c + T_{\sigma_n}(\partial d) \stackrel{(1.26)}{=} \\ &= \alpha_{\#}(d) - \beta_{\#}(d) - T_{\sigma_n}(\partial d) + T_{\sigma_n}(\partial d) = \\ &= \alpha_{\#}(d) - \beta_{\#}(d)\end{aligned}$$

Como la elección de  $d$  es arbitraria, se deduce que  $\partial \circ T_{\sigma_n} + T_{\sigma_n} \circ \partial = \alpha_{\#} - \beta_{\#}$ .

Sea  $\phi: \sigma_p \rightarrow X$  un  $p$ -símplice singular. Antes de probar la primera condición, notar que  $\phi_{\#}(\tau_n) = \phi \circ \tau_n = \phi$ , por lo que

$$(T_X \circ \phi_{\#})(\tau_n) = T_X(\phi) = (\phi \times 1_I)_{\#} T_{\sigma_n}(\tau_n) \quad (1.27)$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}\partial T_X(\phi) + T_X(\partial \phi) &= [\partial \circ (\phi \times \text{id}_I)_{\#} \circ T_{\sigma_n}](\tau_n) + (T_X \circ \partial \circ \phi_{\#})(\tau_n) = \\ &= [\partial \circ (\phi \times \text{id}_I)_{\#} \circ T_{\sigma_n}](\tau_n) + (T_X \circ \phi_{\#})(\partial \tau_n) \stackrel{(1.27)}{=} \\ &= [\partial \circ (\phi \times \text{id}_I)_{\#} \circ T_{\sigma_n}](\tau_n) + [(\phi \times 1_I)_{\#} \circ T_{\sigma_n}](\partial \tau_n) = \\ &= [(\phi \times \text{id}_I)_{\#} \circ \partial \circ T_{\sigma_n}](\tau_n) + [(\phi \times 1_I)_{\#} \circ T_{\sigma_n}](\partial \tau_n) = \\ &= [(\phi \times \text{id}_I)_{\#} \circ (\partial \circ T_{\sigma_n} + T_{\sigma_n} \circ \partial)](\tau_n) \stackrel{(\star)}{=} \\ &= (\phi \times \text{id}_I)_{\#}(\alpha_{\#} - \beta_{\#})(\tau_n)\end{aligned}$$

Observamos que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \sigma_n & \xrightarrow{\alpha} & \sigma_n \times I \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \times \text{id}_I \\ X & \xrightarrow{\alpha} & X \times I \end{array} \quad (1.28) \quad \begin{array}{ccc} \sigma_n & \xrightarrow{\beta} & \sigma_n \times I \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \times \text{id}_I \\ X & \xrightarrow{\beta} & X \times I \end{array} \quad (1.29)$$

son comutativos, por lo que también comutan cuando los convertimos en aplicaciones de cadenas. De aquí se sigue que

$$[(\phi \times \text{id}_I)_{\#} \circ (\alpha_{\#} - \beta_{\#})](\tau_n) = [(\alpha_{\#} - \beta_{\#}) \circ \phi_{\#}](\tau_n) = (\alpha_{\#} - \beta_{\#})(\phi)$$

por lo que  $\partial \circ T_X + T_X \circ \partial = \alpha_{\#} - \beta_{\#}$ .

Para la segunda condición, consideramos  $h: X \rightarrow W$  continua y  $\phi \in$

$S_n(X)$ :

$$\begin{aligned}
 T_W[h_\#(\phi)] &= (T_W \circ h_\# \circ \phi_\#)(\tau_n) = [T_W \circ (h \circ \phi)_\#](\tau_n) \stackrel{(1.27)}{=} \\
 &= [(h \circ \phi) \times \text{id}_I]_\#[T_{\sigma_n}(\tau_n)] = \\
 &= [(h \times \text{id}_I) \circ (\phi \times \text{id}_I)]_\#[T_{\sigma_n}(\tau_n)] = \\
 &= [(h \times \text{id}_I)_\# \circ (\phi \times \text{id}_I)_\#][T_{\sigma_n}(\tau_n)] \stackrel{(1.27)}{=} \\
 &= (h \times 1_I)[T_X(\phi)]
 \end{aligned}$$

por lo que se cumple la segunda condición.

De esta forma, se construye una homotopía de cadenas entre  $\alpha$  y  $\beta$ .  $\square$

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Decimos que  $f$  es una **equivalencia de homotopía** si existe una aplicación  $g: Y \rightarrow X$ , llamada **inversa homotópica**, tal que

$$f \circ g \simeq 1_Y; \quad g \circ f \simeq 1_X$$

**Corollary 1.5.3** Si  $f: X \rightarrow Y$  es una equivalencia de homotopía,

$$f_*: H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$$

es un isomorfismo de grado 0. En particular, si  $X$  es un espacio contráctil,

$$H_n(X) \cong H_n(\{\star\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

## 1.6. Sucesiones exactas

**Definition 1.6.1** Una colección de grupos y homomorfismos

$$G_0 \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_2} G_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_n} G_n$$

es una **sucesión exacta finita** si  $\text{Im } f_j = \ker f_{j+1}$  para todo  $j$ .

Si  $n = 4$  y  $G_0 = 0 = G_4$ , se obtiene una sucesión exacta finita de la forma

$$0 \rightarrow G_1 \xrightarrow{f_2} G_2 \xrightarrow{f_3} G_3 \rightarrow 0$$

En este caso, hablamos de **sucesión exacta corta**. Notar que, por definición de sucesión exacta,  $f_2$  es un monomorfismo (su núcleo es el grupo 0) y  $f_3$  es un epimorfismo (su imagen es todo  $G_3$ ).

**Definition 1.6.2** Una colección de grupos y homomorfismos

$$G_0 \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_2} G_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_n} G_n \xrightarrow{f_{n+1}} \dots$$

es una sucesión exacta larga si  $\text{Im } f_j = \ker f_{j+1}$  para todo  $j$ .

Sean  $C, D, E$  complejos de cadenas. Considérese la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0 \quad (1.30)$$

siendo  $f$  y  $g$  aplicaciones de cadenas de grado 0. Por ser aplicaciones de cadenas, dado un  $p \geq 0$ , podemos construir el diagrama

$$H_p(C) \xrightarrow{f_*} H_p(D) \xrightarrow{g_*} H_p(E)$$

Esta secuencia no es exacta, ya que  $f_*$  (resp.  $g_*$ ) podría no ser inyectiva (resp. sobreyectiva). Lo que sí se cumple es que  $\text{Im } f_* = \ker g_*$ .

Para ver esta identidad, sea  $c \in Z_p(C)$ . Usando que (1.30) es una secuencia exacta,

$$(g \circ f)_*([c]) = [(g \circ f)(c)] = 0$$

por lo que  $\text{Im } f_* \leq \ker g_*$ .

Análogamente, sea  $[z] \in \ker g_* \leq H_p(D)$ . Sabemos que  $[g(z)] = 0$ , por lo que  $g(z) = \partial d$  para algún  $d \in D_{p+1}$ . Como  $g: D_{p+1} \rightarrow E_{p+1}$  es sobreyectivo, podemos hallar un  $y \in D_{p+1}$  tal que  $d = g(y)$ . Dado que  $g$  es aplicación de cadenas,

$$g(z) = \partial d = \partial g(y) = g(\partial y) \implies z - \partial y \in \ker g$$

Usando  $\ker g = \text{Im } f$ , existirá un  $x \in C_p$  tal que  $z - \partial y = f(x)$ . Como  $[z] \in H_p(D)$ ,  $z \in Z_p(D)$ , luego

$$f(\partial x) = \partial f(x) = \partial z - \partial^2 y = 0 \implies \partial x \in \ker f$$

Pero  $f$  es un monomorfismo, luego  $\partial x = 0$  y  $x \in Z_p(C)$ . Esto nos permite tomar clases módulo  $B_p(C)$ : usando  $f(x) = z - \partial y$ ,

$$f_*([x]) = [z - \partial y] = [z]$$

Por tanto,  $[z] \in \text{Im } f_*$ , luego  $\ker g_* \leq \text{Im } f_*$ .

Para poder generar una sucesión exacta larga, vamos a introducir un homomorfismo  $\Delta: H_*(E) \rightarrow H_*(C)$  (llamado **homomorfismo de conexión**) que nos permita conectar  $H_n(D)$  con  $H_{n-1}(C)$ . El resultado será una secuencia exacta

$$\dots \xrightarrow{\Delta} H_n(C) \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C) \xrightarrow{f_*} \dots$$

Sea  $z \in Z_n(E)$ . Como  $g: D \rightarrow E$  es un epimorfismo de grado 0, existe un  $d \in D_n$  tal que  $z = g(d)$ . Como  $z \in \ker \partial$  y  $g$  es aplicación de cadenas,

$$g(\partial d) = 0 \implies \partial d \in \ker g = \text{Im } f$$

A su vez,  $f: C \rightarrow D$  es un homomorfismo de grado 0. Existirá un  $c \in C_{n-1}$  tal que  $\partial d = f(c)$ . Pero  $f$  es aplicación de cadenas inyectiva, por lo que

$$0 = \partial d = \partial f(c) = f(\partial c) \implies c \in \ker f = 0 \implies c \in Z_{n-1}(C)$$

Esto define una correspondencia  $\delta: z \mapsto c$  que depende implícitamente de  $d$ .

**Proposition 1.6.1** La aplicación  $\Delta: H_*(Z) \longrightarrow H_*(C)$  dada por  $\Delta([z]) = [\delta c]$  está bien definida y es un homomorfismo.

*Demostración.* Sean  $z, z' \in Z_n(E)$  con  $z - z' \in B_n(E)$ . Existe un  $e \in E_{n+1}$  tal que  $\partial e = z - z'$ .

Sean  $d, d' \in D_n$  tales que  $g(d) = z$  y  $g(d') = z'$ , y sean  $c, c' \in C_n$  tales que  $\partial d = f(c)$  y  $\partial d' = f(c')$ . Dado que  $g$  es un epimorfismo, existe un  $a \in D_{n+1}$  tal que  $g(a) = e$ . Como  $g$  es aplicación de cadenas,

$$g(\partial a) = \partial e = z - z' = g(d - d')$$

de donde se sigue que  $d - d' - \partial a \in \ker g = \text{Im } f$ . Podemos elegir entonces un  $b \in C_n$  tal que  $f(b) = d - d' - \partial a$ . Usando que  $f$  es aplicación de cadenas,

$$f(\partial b) = \partial(d - d' - \partial a) = \partial(d - d') = f(c - c')$$

por lo que  $\partial b - c - c' \in \ker f$ .

Usando que  $f$  es inyectiva, concluimos que  $c - c' = \partial b \in B_{n-1}(C)$ .  $\square$

**Theorem 1.6.2** Sean  $C, D, E$  complejos de cadenas y

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$$

una sucesión exacta corta. Si  $\Delta: H_*(E) \rightarrow H_*(C)$  es un homomorfismo de conexión,

$$H_n(C) \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C)$$

es una sucesión exacta larga.

*Demostración.* La demostración consiste en dos pasos: probar que  $\text{Im } g_* = \ker \Delta$  y que  $\text{Im } \Delta = \ker f_*$ . Empecemos por la primera igualdad: dado un  $[z] \in \text{Im } g_*$ , existe un  $d \in Z_n(D)$  tal que  $[g(d)] = [z]$ . Dado que  $g$  es aplicación de cadenas y  $z$  es un  $n$ -ciclo,

$$0 = \partial z = g(\partial d) \implies \partial d \in \ker g_* = \text{Im } f_*$$

Existirá un  $c \in C_{n-1}$  de forma que  $\partial d = f(c)$ , por lo que  $\Delta([z]) = [c]$ . Por otro lado,

$$d \in Z_n(D) \implies \partial d = 0 \implies f(c) = 0$$

pero  $f$  es un monomorfismo, así que  $c = 0$ . Esto nos lleva a que  $z \in \ker \Delta$ .

Sea  $[z] \in \ker \Delta$ . Existe un  $d \in D_n$  de forma que  $g(d) = z$  y  $f(c) = \partial d$ . En particular, podemos tomar  $c = 0$ , ya que la clase de  $c$  será la del 0. Esto implica que

$$\partial d = 0 \implies d \in Z_n(D) \iff [d] \in H_n(D)$$

De aquí se sigue que  $g_*([d]) = [g(d)] = [z]$ .

Sea  $[c] \in \text{Im } \Delta$ . Existe un  $z \in Z_n(E)$  tal que  $[c] = \Delta([z])$ , luego existirá un  $d \in D_n$  de forma que  $f(c) = d$  y  $g(d) = z$ . Ahora bien,

$$f(c) = \partial d \implies f(c) \in B_n(D) \iff [f(c)] = 0$$

Pero  $[f(c)] = f_*([c])$ , luego  $[c] \in \ker f_*$ .

Sea  $[c] \in \ker f_*$ . Sabemos que  $f(c) \in B_n(D)$ , luego existirá un  $d \in D_n$  tal que  $f(c) = \partial d$ . Sea  $z = g(d) \in E_n$ . Como  $\ker g = \text{Im } f$ ,  $\partial z = g(\partial d) = (g \circ f)(c) = 0$ . De aquí se tiene que  $z \in Z_n(E)$  y

$$\Delta([z]) = [c] \implies [c] \in \text{Im } \Delta$$

□

# Sucesiones de Mayer-Vietoris

## 2.1. Espacios de Mayer-Vietoris

Dado un espacio topológico  $X$  y una familia de subconjuntos  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$  de  $X$ , definimos

$$\mathring{\mathcal{U}} = \{\mathring{U} : U \in \mathcal{U}\}$$

Diremos que un par  $(X, \mathcal{U})$  es un **espacio de Mayer-Vietoris** si  $\mathring{\mathcal{U}}$  es un recubrimiento de  $X$ .

Sea  $(X, \mathcal{U})$  un espacio de Mayer-Vietoris y  $A \subseteq X$ . Diremos que  $\phi : \sigma_n \rightarrow X$  es un  $\mathcal{U}$ -símplex si  $\phi(\sigma_n) \subset U$  para algún  $U \in \mathcal{U}$ . Dado un  $n > 0$ , definimos el grupo  $S_n^{\mathcal{U}}(X)$  como el subgrupo de  $S_n(X)$  generado por los  $\mathcal{U}$ -símplices de  $X$ . Si  $\phi$  es un  $\mathcal{U}$ -símplex y  $0 \leq i \leq n$ , observamos que

$$\partial_{(i)}\phi(\sigma_{n-1}) \subseteq \phi(\sigma_n)$$

por lo que las caras de un  $\mathcal{U}$ -símplex son de nuevo  $\mathcal{U}$ -símplices y  $S_*^{\mathcal{U}}(X)$  es un subcomplejo de cadenas de  $S_*(X)$ . Además, la inclusión  $i : S_*^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S_*(X)$  es claramente una aplicación de cadenas.

Sea  $(Y, \mathcal{V})$  otro espacio de Mayer-Vietoris. Una aplicación  $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$  es una **aplicación de Mayer-Vietoris** si, dado un  $U \in \mathcal{U}$ , existe un  $V \in \mathcal{V}$  tal que  $f(U) \subseteq V$ . Si  $f$  es una aplicación de Mayer-Vietoris y  $\phi$  es un  $\mathcal{U}$ -símplex, existirá un  $V \in \mathcal{V}$  tal que  $f_*(\phi)(\sigma_p) \subseteq V$ , por lo que  $f$  induce una aplicación de cadenas

$$f_* : S_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S_*^{\mathcal{V}}(Y)$$

**Theorem 2.1.1 ([Vick94], Apéndice I)** Sea  $(X, \mathcal{U})$  un espacio de Mayer-Vietoris. La aplicación  $i_* : H_n(S_n^{\mathcal{U}}(X)) \rightarrow H_n(X)$  es un isomorfismo.

Sea  $\mathcal{U} = \{U, V\}$ . Si denotamos como  $A$  (resp.  $B$ ) al conjunto de  $n$ -símplices singulares sobre  $U$  (resp.  $V$ ),

$$\begin{aligned} S_n(U) &= F(A); & S_n(X) &= F(A \cup B); \\ S_n(V) &= F(B); & S_n(U \cap V) &= F(A \cap B) \end{aligned}$$

Consideremos las aplicaciones  $g : F(A \cap B) \rightarrow F(A) \oplus F(B)$  y  $h : F(A) \oplus F(B) \rightarrow F(A \cup B)$  dadas por

$$g(\alpha) = (\alpha, -\alpha); \quad h(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$$

Es fácil ver que  $g$  es inyectivo y  $h$  es sobreyectivo.

### Subcomplejo de cadenas

Sea  $C = (C, d)$  un complejo de cadenas. Un subcomplejo de cadenas de  $C$  es un subgrupo graduado  $C' \leq C$  tal que  $d_n(C'_n) \leq C'_{n-1}$  para todo  $n$ .

**Proposition 2.1.2** La secuencia

$$0 \longrightarrow S_n(U \cap V) \xrightarrow{g} S_n(U) \oplus S_n(V) \xrightarrow{h} S_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta.

*Demostración.* Por un lado, dado  $c \in F(A \cap B)$ ,

$$(h \circ g)(c) = h(c, -c) = 0$$

por lo que  $\text{Im } g \leq \text{Im } h$ . Por otro lado, como  $h$  es sobreyectivo, existen  $a \in F(A)$  y  $b \in F(B)$  tales que

$$0 = h(a, b) = a + b \iff a = -b \in F(B)$$

Esto implica que  $a \in F(A \cap B)$  y

$$(a, b) = (a, -a) = g(a)$$

por lo que  $\ker h \leq \text{Im } g$ . □

Definimos  $S_*(U) \oplus S_*(V) := \{S_n(U) \oplus S_n(V) : n \in \mathbb{Z}\}$ , de forma que la sucesión exacta anterior da lugar a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S_*(U \cap V) \xrightarrow{g_*} S_*(U) \oplus S_*(V) \xrightarrow{h_*} S_*^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

Vamos a aplicar el 1.6.2 para obtener una sucesión exacta en homología a partir de esta sucesión exacta corta. Para ello, observamos que

$$H_n(S_*(U) \oplus S_*(V)) \cong H_n(S_*(U)) \oplus H_n(S_*(V)) \cong H_n(U) \oplus H_n(V)$$

Además, el teorema 2.1.1 nos dice que  $H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X)) \cong H_n(X)$ .

**Definition 2.1.1** Sea  $(X, \mathcal{U})$  un espacio de Mayer-Vietoris con  $\mathcal{U} = \{U, V\}$ . Si  $\Delta: H_*(X) \rightarrow H_*(U \cap V)$  es el homomorfismo de conexión, se define la **sucesión de Mayer-Vietoris** asociada a  $\mathcal{U}$  como la sucesión exacta

$$H_n(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{h_*} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V)$$

El siguiente resultado establece una condición suficiente para saber cuándo dos 1-simplices singulares son homólogos.

**Lemma 2.1.3** Dados dos lazos homotópicos  $f, g: [0, 1] \rightarrow X$ ,  $[f] = [g]$ .

*Demostración.* Como sabemos por el 1.3.1,  $f$  y  $g$  se identifican con 1-ciclos de  $X$  por ser caminos cerrados, por lo que  $f, g \in Z_1(X)$ . Sean

$$F: f \simeq g$$

y  $\sim$  la relación de equivalencia dada por  $(t, 0) \sim (t, 1)$  con  $t \in [0, 1]$ . El espacio cociente  $C = [0, 1]^2 / \sim$  describe un cilindro plano.

Consideremos la aplicación  $F_C: C \rightarrow X$  inducida por  $F$ . Podemos identificar  $F$  con  $F_C$ , dado que  $f$  y  $g$  son lazos. Dividimos  $C$  en dos simplices orientados  $c_1$  y  $c_2$ , como se muestra en la Figura ??.

Sean  $\alpha, \beta: \sigma_2 \rightarrow C$  los simplices singulares

$$\alpha(t_0, t_1, t_2) = [(t_0, t_1)]; \quad \beta(t_0, t_1, t_2) = [(t_0 + t_1, t_0 + t_2)]$$

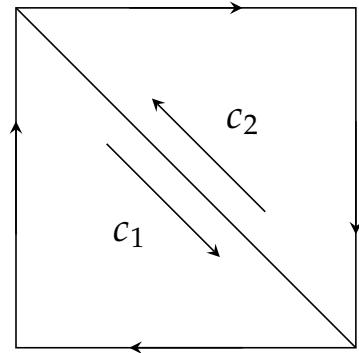
Usando que  $(t, 0) \sim (t, 1)$ ,

$$\begin{aligned} \partial(\beta - \alpha)(t_0, t_1) &= [(1, t_0)] - [(0, t_0)] + [(t_0, 0)] - [(t_0, 0)] = \\ &= [(1, t_0)] - [(0, t_0)] \end{aligned}$$

Si ahora consideramos  $F_{\#}: S_*(C) \rightarrow S_*(X)$ ,

$$\begin{aligned} \partial[F_{\#}(\beta - \alpha)](t_0, t_1) &= F_{\#}[\partial(\beta - \alpha)](t_0, t_1) = \\ &= F(1, t_0) - F(0, t_0) = f(t_0) - g(t_0) \end{aligned}$$

Dado que  $F_{\#}(\beta - \alpha) = F_{\#}(\beta) - F_{\#}(\alpha)$  es un 2-símplice singular de  $X$ , se deduce que  $f - g \in B_1(X)$ . Por tanto,  $f$  y  $g$  son caminos homólogos.  $\square$



**Figura 2.1:**  $C$  queda dividido en dos triángulos,  $A$  y  $B$ , a los cuales asignamos orientaciones contrarias.

## 2.2. Grupo de homología de $S^1$

Sean  $U = S^1 \setminus \{(1, 0)\}$  y  $V = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$ . El espacio  $U \cap V$  es la unión disjunta de dos arcos de circunferencia,  $C_1$  y  $C_2$ , que son conjuntos arcoconexos. Aplicando la 1.4.3,

$$H_n(U \cap V) \cong H_n(C_1) \oplus H_n(C_2)$$

para todo  $n \geq 0$ .

En particular, el espacio puntual es un retracto por deformación fuerte de  $C_1$  y  $C_2$ . Usando el corolario 1.5.1 y el axioma de la dimensión,

$$H_n(C_1) \cong H_n(C_2) \cong H_n(\{\star\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Por otro lado,  $U$  y  $V$  son arcos de circunferencia, por lo que el mismo razonamiento nos lleva a que

$$H_n(U) \cong H_n(V) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Consideremos el siguiente tramo de la sucesión de Mayer-Vietoris asociada a este recubrimiento:

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(U) \oplus H_1(V) & \xrightarrow{h_1} & H_1(S^1) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_0(U \cap V) & & (2.1) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ 0 & \longrightarrow & H_1(S^1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & & \end{array}$$

Como la sucesión es exacta,  $\text{Im } h_1 = 0$ , luego  $\ker \Delta = \text{Im } h_1 = 0$ , de forma que  $\Delta$  es un monomorfismo. Se sigue que

$$H_1(S^1) \cong \text{Im } \Delta = \ker g_1 \leq H_0(U \cap V) \cong \mathbb{Z}^2$$

Como  $H_1(S^1) \cong \ker g_*$ , podemos calcular dicho grupo estudiando cómo se comporta el homomorfismo  $g_*$ .

Sea  $w \in Z_0(U \cap V)$  y  $[w]$  su clase módulo  $B_0(U \cap V)$ . Existirán  $x, y \in U \cap V$ , uno en cada componente conexa, y  $a, b \in \mathbb{Z}$  tales que  $[w] = [ax + by]$ . Considérense las aplicaciones inclusión

$$i_*: H_0(U \cap V) \hookrightarrow H_0(U); \quad j_*: H_0(U \cap V) \hookrightarrow H_0(V)$$

Si  $[w] \in \ker g_*$ , se tiene que

$$0 = g_*([w]) = (i_*([w]), -j_*([w])) \iff \begin{cases} i_*([w]) = 0 \\ j_*([w]) = 0 \end{cases}$$

Pero  $i_*([w]) \in H_0(U)$ , por lo que  $i_*([x])$  es homólogo a  $i_*([y])$  y

$$0 = i_*([ax + by]) = i_*([ax + bx]) = (a + b)i_*([x]) \iff a + b = 0$$

De aquí se tiene entonces que los elementos de  $\ker g_*$  son de la forma  $[ax - ay]$  con  $a \in \mathbb{Z}$ . Por tanto,

$$H_1(S^1) = \ker g_* = \langle [x - y] \rangle \cong \mathbb{Z}$$

Sea  $n > 1$ . Se tiene la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{h_n} & H_n(S^1) & \xrightarrow{\Delta_n} & H_{n-1}(U \cap V) & & \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ 0 & \longrightarrow & H_n(S^1) & \longrightarrow & 0 & & \end{array} \quad (2.2)$$

Como esta sucesión es exacta,  $\ker \Delta_n = \text{Im } h_n = 0$ . Por el primer teorema de isomorfía,

$$H_n(S^1) \cong \frac{H_n(S^1)}{0} = \frac{H_n(S^1)}{\ker \Delta_n} \cong \text{Im } \Delta_n = 0$$

### Theorem 2.2.1

$$H_n(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n < 2 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \quad \beta_n(S^1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n < 2 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\chi(S^1) = 1 - 1 = 0$$

Habíamos visto en el 1.5.5 que  $S^1$  es una deformación de  $D^2$  y un retracto de  $D^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . En general, esto es válido para cualquier  $p \in (D^2)^o$ , no sólo para  $p = (0, 0)$ , pero  $S^1$  **no** es un retracto de todo  $D^2$ .

Supongamos que existe un retracto  $r: D^2 \rightarrow S^1$ : todo retracto induce un epimorfismo  $r_*: H_1(D^2) \rightarrow H_1(S^1)$  en homología. El grupo  $H_1(D^2)$  es 0 porque  $D^2$  es un conjunto convexo, y acabamos de ver que  $H_1(S^1)$  tiene rango 1. Dado que  $r_*$  es un epimorfismo, si llamamos  $\alpha$  al generador de  $H_1(S^1)$ , existirá un  $b \in H_1(D^2)$  tal que  $r_*(b) = \alpha$ .

Dado que  $b \in H_1(D^2) = 0$ ,  $b = 0$ , por lo que  $\alpha = r_*(b) = 0$ . Pero eso es imposible, ya que  $\alpha$  es el generador de un grupo no trivial. Por tanto, no existen retracciones de  $D^2$  en  $S^1$ .

### 2.2.1. Grupo de homología de $S^n$

La  $n$ -esfera se define como el conjunto  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  de puntos  $x$  tales que  $\|x\|^2 = 1$ . Si  $\mathcal{N} = (0, \dots, 0, 1)$  y  $\mathcal{S} = (0, \dots, 0, -1)$ , consideraremos el recubrimiento dado por  $U = S^n \setminus \mathcal{N}$  y  $V = S^n \setminus \mathcal{S}$ .

Podemos ver  $S^{n-1}$  como el ecuador de  $S^n$  (i.e. el subespacio de  $S^n$  dado por  $x_{n+1} = 0$ ), en cuyo caso la inclusión  $i: S^{n-1} \hookrightarrow U \cap V$  es una equivalencia de homotopía y

$$H_*(U \cap V) \cong H_*(S^{n-1})$$

Por otro lado,  $U$  y  $V$  son contractos retráctiles, por lo que tienen el tipo de homología de un punto.

Supongamos por hipótesis de inducción que, para  $n-1 \geq 1$ ,

$$H_m(S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0, n-1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Consideremos el siguiente tramo de la sucesión de Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccc} H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{h_n} & H_n(S^n) \\ & \downarrow \Delta_n & \\ H_{n-1}(U \cap V) & \xrightarrow{g_n} & H_{n-1}(U) \oplus H_{n-1}(V) \end{array} \quad (2.3)$$

Esta sucesión es equivalente a

$$0 \longrightarrow H_n(S^n) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow 0 \quad (2.4)$$

de donde se sigue que  $\ker \Delta_n = 0$  y  $H_n(S^n) \cong \text{Im } \Delta_n = H_{n-1}(S^{n-1})$ .

Para  $m > n$ , el tramo

$$H_m(U) \oplus H_m(V) \xrightarrow{h_m} H_m(S^n) \xrightarrow{\Delta_m} H_{m-1}(U \cap V) \quad (2.5)$$

es equivalente a

$$0 \longrightarrow H_m(S^n) \xrightarrow{\Delta_m} 0 \quad (2.6)$$

por lo que  $\ker \Delta_m = 0 = \text{Im } \Delta_m$  y  $H_m(S^n) = 0$ .

Para  $m = 1$ ,

$$\begin{array}{ccc} H_1(U) \oplus H_1(V) & \xrightarrow{h_n} & H_1(S^n) \\ & \downarrow \Delta_1 & \uparrow h_0 \\ H_0(U \cap V) & \xrightarrow{g_0} & H_0(U) \oplus H_0(V) \end{array} \quad (2.7)$$

es equivalente a

$$0 \longrightarrow H_1(S^n) \xrightarrow{\Delta_m} \mathbb{Z} \xrightarrow{g_0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{h_0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (2.8)$$

Usando exactitud, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \cong \text{Im } h_0 &\cong \frac{\mathbb{Z}^2}{\ker h_0} \implies \ker h_0 \cong \mathbb{Z}; \\ \mathbb{Z} \cong \ker h_0 = \text{Im } g_0 &\cong \frac{\mathbb{Z}}{\ker g_0} \implies \ker g_0 = 0 \end{aligned}$$

por lo que

$$H_1(S^n) \cong \frac{H_1(S^n)}{\ker \Delta_1} \cong \text{Im } \Delta_1 = \ker g_0 = 0$$

Supongamos que  $n > 2$ : para  $n > m > 1$ ,

$$H_m(U) \oplus H_m(V) \xrightarrow{h_m} H_m(S^n) \xrightarrow{\Delta_m} H_{m-1}(U \cap V) \quad (2.9)$$

es equivalente a

$$0 \longrightarrow H_m(S^n) \xrightarrow{\Delta_m} 0 \quad (2.10)$$

Por exactitud,  $\ker \Delta_m = 0 = \text{Im } \Delta_m$  y  $H_m(S^n) = 0$ . Por tanto,

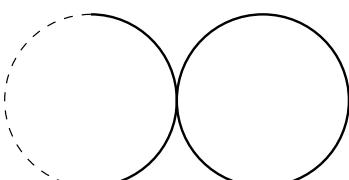
$$H_m(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0, n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

### Theorem 2.2.2

$$H_m(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0, n \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \beta_m(S^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0, n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

## 2.3. Grupo de homología de la figura ocho

Dados  $z \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ , sea  $C(z, r)$  el conjunto de puntos  $w \in \mathbb{C}$  tales que  $|z-w| = r$ . Definimos la figura 8 como la unión de las circunferencias tangentes  $C(-1, 1)$  y  $C(1, 1)$ . La figura 8 define un espacio de Mayer-Vietoris tomando  $U, V \subset \mathbb{8}$  de forma que  $S^1$  sea un retracto for de deformación fuerte de ambos espacios (ver Figura 2.2).



En particular,  $U \cap V$  serán dos arcos tangentes. Por construcción,

$$H_*(U) \cong H_*(V) \cong H_*(S^1)^2; \quad H_*(U \cap V) \cong H_*(\{\star\})$$

**Figura 2.2:** Figura ocho en línea discontinua, con un posible conjunto  $U$  dibujado en línea sólida gruesa.

Para  $n > 1$ , se tiene la sucesión exacta corta

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(U \cap V) & \xrightarrow{g_n} & H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{h_n} & H_n(\mathbb{8}) & \xrightarrow{\Delta_n} & H_{n-1}(U \cap V) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_n(\mathbb{8}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.11)$$

Por exactitud,

$$0 = \text{Im } h_n \cong \frac{H_n(\mathbb{8})}{\ker h_n} = \frac{H_n(\mathbb{8})}{\text{Im } g_n} \cong H_n(\mathbb{8})$$

Consideremos el siguiente tramo:

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(U \cap V) & \xrightarrow{g_1} & H_1(U) \oplus H_1(V) & \xrightarrow{h_1} & H_1(\mathbb{8}) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_0(U \cap V) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & H_1(\mathbb{8}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array} \quad (2.12)$$

Por exactitud,

$$\frac{H_1(\mathbb{8})}{\ker \Delta_1} \cong \text{Im } \Delta_1 = \ker g_0; \quad \ker \Delta_1 = \text{Im } h_1 \cong \frac{\mathbb{Z}^2}{\ker h_1} \cong \mathbb{Z}^2;$$

Es decir,

$$\ker g_0 \cong \frac{H_1(\mathbb{8})}{\mathbb{Z}^2} \quad (2.13)$$

Consideremos el siguiente tramo:

$$\begin{array}{ccccccc} H_0(U \cap V) & \xrightarrow{g_0} & H_0(U) \oplus H_0(V) & \xrightarrow{h_0} & H_0(\mathbb{8}) & \xrightarrow{\Delta_0} & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.14)$$

Por exactitud,

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \cong \ker \Delta_0 = \text{Im } h_0 \cong \frac{\mathbb{Z}^2}{\ker h_0} &\implies \ker h_0 \cong \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \cong \ker h_0 = \text{Im } g_0 \cong \frac{\mathbb{Z}}{\ker g_0} &\implies \ker g_0 = 0 \end{aligned}$$

Aplicando esta información en la ecuación (2.13), concluimos que  $H_1(\mathbb{8}) \cong \mathbb{Z}^2$ .

### Theorem 2.3.1

$$H_n(\mathbb{8}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \quad \beta_n(\mathbb{8}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{X}(\mathbb{8}) = 1 - 2 = -1$$

### 2.3.1. La rosa del topólogo

La figura ocho se puede construir utilizando cocientes, lo que nos permite generalizar esta construcción. Sean  $p \in \mathbb{R}^2$  y  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo cerrado y acotado. Si

$$R = \partial I \sqcup \partial I \sqcup \{p\}$$

la figura ocho antes descrita se puede representar como

$$\frac{I \sqcup \{p\} \sqcup I}{R}$$

Podemos extender esta construcción para añadir tantos lóbulos como queramos, de forma que conseguimos una figura llamada **rosa** o **búqué**.

Dado un  $n > 0$ , se define la rosa de  $n$  pétalos ( $B_n$ ) como

$$\begin{aligned} J_1 &= I \sqcup \{p\}; & R_1 &= \{p\} \sqcup \partial I; & B_1 &= \frac{J_1}{R_1} \cong S^1; \\ J_2 &= J_1 \sqcup I; & R_2 &= R_1 \sqcup \partial I; & B_2 &= \frac{J_2}{R_2} \cong \mathbb{S}; \\ &\dots &&\dots &&\dots \\ J_n &= J_{n-1} \sqcup I; & R_n &= R_{n-1} \sqcup \partial I; & B_n &= \frac{J_n}{R_n} \end{aligned}$$

Esto crea una recurrencia que nos lleva a la definición de  $B_n$ .

Hasta ahora, sabemos que

$$H_n(B_1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \quad H_n(B_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Conjeturamos entonces que

$$H_n(B_p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}^p & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Consideraremos entonces la rosa de  $p+1$  pétalos,  $B_{p+1}$ . Definimos el espacio de Mayer-Vietoris donde  $B_p$  es un retracto por deformación fuerte de  $U$  y  $S^1$  es un retracto por deformación fuerte de  $V$ . Observamos que  $U \cap V$  describe un conjunto estrellado, por lo que tiene el tipo de homología de un punto.

Para  $n > 1$ ,

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(U \cap V) & \xrightarrow{g_n} & H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{h_n} & H_n(B_{p+1}) & \xrightarrow{\Delta_n} & H_{n-1}(U \cap V) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_n(B_{p+1}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Por exactitud,  $\ker \Delta_n = 0$  y  $\text{Im } \Delta_n = H_{n-1}(U \cap V)$ , por lo que  $\Delta$  es un isomorfismo. Se sigue que

$$H_n(B_{p+1}) \cong H_{n-1}(U \cap V) = 0$$

#### Conjunto estrellado

Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  es estrellado si existe un  $a_0 \in A$  tal que  $[a_0, x] \subseteq A$  para todo  $x \in A$ . Un conjunto estrellado es un punto intermedio entre un conjunto contráctil y un conjunto convexo. Típicos ejemplos de conjuntos estrellados incluyen el símbolo asterisco y las letras X e Y.

Consideremos el siguiente tramo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_1(U \cap V) & \xrightarrow{g_1} & H_1(U) \oplus H_1(V) & \xrightarrow{h_1} & H_1(B_{p+1}) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_0(U \cap V) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{p+1} & \longrightarrow & H_1(B_{p+1}) & \longrightarrow & \mathbb{Z}
 \end{array} \quad (2.15)$$

Por exactitud,

$$\frac{H_1(B_{p+1})}{\ker \Delta_1} \cong \text{Im } \Delta_1 = \ker g_0; \quad \ker \Delta_1 = \text{Im } h_1 \cong \frac{\mathbb{Z}^{p+1}}{\ker h_1} \cong \mathbb{Z}^{p+1};$$

Es decir,

$$\ker g_0 \cong \frac{H_1(B_{p+1})}{\mathbb{Z}^{p+1}} \quad (2.16)$$

Consideremos el siguiente tramo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_0(U \cap V) & \xrightarrow{g_0} & H_0(U) \oplus H_0(V) & \xrightarrow{h_0} & H_0(B_{p+1}) & \xrightarrow{\Delta_0} & 0 \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
 \end{array} \quad (2.17)$$

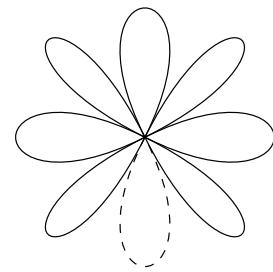
Por exactitud,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Z} &\cong \ker \Delta_0 = \text{Im } h_0 \cong \frac{\mathbb{Z}^2}{\ker h_0} \implies \ker h_0 \cong \mathbb{Z} \\
 \mathbb{Z} &\cong \ker h_0 = \text{Im } g_0 \cong \frac{\mathbb{Z}}{\ker g_0} \implies \ker g_0 = 0
 \end{aligned}$$

Aplicando esta información en la ecuación (2.16), concluimos que  $H_1(B_{p+1}) \cong \mathbb{Z}^{p+1}$ . Esto confirma nuestra conjetura.

### Theorem 2.3.2

$$\begin{aligned}
 H_n(B_p) &\cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}^p & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} & \beta_n(B_p) &= \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ p & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \\
 \mathcal{X}(B_p) &= 1 - p
 \end{aligned}$$



**Figura 2.3:** Rosa de 8 pétalos. La línea discontinua representa la adición de un nuevo pétalo.

## 2.4. Grupo de homología del toro

El **toro de Clifford** o **toro llano** se define como el espacio cociente

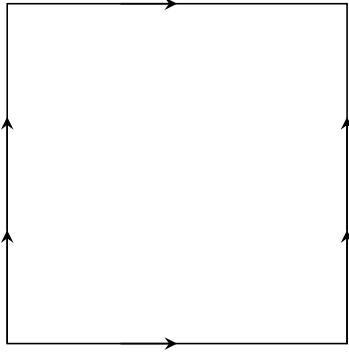
$$T = \frac{[0, 1]^2}{\sim}$$

donde  $\sim$  es la menor relación de equivalencia tal que  $(t, 0) \sim (t, 1)$  y  $(0, t) \sim (1, t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Podemos inducir una estructura de

espacio de Mayer-Vietoris tomando los conjuntos

$$U = \left\{ [(x, y)] \in T : x > \frac{1}{3} \right\}; \quad V = \left\{ [(x, y)] \in T : y < \frac{2}{3} \right\};$$

Los conjuntos  $U$ ,  $V$  y  $U \cap V$  son cilindros, por lo que tienen el tipo de homología de  $S^1$ .



Sea  $n > 2$ . Consideramos la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(U \cap V) & \xrightarrow{g_n} & H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{h_n} & H_n(T) & \xrightarrow{\Delta_n} & H_{n-1}(U \cap V) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_n(T) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.18)$$

Al igual que en los ejemplos anteriores,  $H_n(T) = 0$ .

Para  $n = 0$ ,

$$\begin{array}{ccccccc} H_0(U \cap V) & \xrightarrow{g_0} & H_0(U) \oplus H_0(V) & \xrightarrow{h_0} & H_0(T) & \xrightarrow{\Delta_0} & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.19)$$

Dado que esta sucesión es exacta,  $\text{Im } h_0 = \ker \Delta_0 \cong \mathbb{Z}$  y  $\text{Im } g_0 = \ker h_0 \cong \mathbb{Z}$ , luego

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{Z}^2}{\ker h_0} &\cong \text{Im } h_0 \cong \mathbb{Z} \implies \ker h_0 \cong \mathbb{Z} \\ \frac{\mathbb{Z}}{\ker g_0} &\cong \text{Im } g_0 \cong \mathbb{Z} \implies \ker g_0 = 0 \end{aligned}$$

Pasemos a  $n = 1$ :

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(U \cap V) & \xrightarrow{g_1} & H_1(U) \oplus H_1(V) & \xrightarrow{h_1} & H_1(T) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_0(U \cap V) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & H_1(T) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array} \quad (2.20)$$

Dado que la sucesión es exacta,  $\text{Im } \Delta_1 = \ker g_0 = 0$  y

$$H_1(T) = \ker \Delta_1 = \text{Im } h_1 \cong \frac{\mathbb{Z}^2}{\ker h_1} = \frac{\mathbb{Z}^2}{\text{Im } g_1} \quad (2.21)$$

Pasemos a  $n = 2$ :

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(U \cap V) & \xrightarrow{g_2} & H_2(U) \oplus H_2(V) & \xrightarrow{h_2} & H_2(T) & \xrightarrow{\Delta_2} & H_1(U \cap V) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_2(T) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array} \quad (2.22)$$

Una serie de operaciones basadas en la exactitud de esta secuencia nos lleva a que  $H_2(T) \cong \ker g_1$ , pero no podemos hallar  $\ker g_1$  usando sólo exactitud. Necesitamos calcular  $\ker g_1$  directamente.

Por definición,  $g_1: H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1)^2$  se define como

$$g_1([c]) = ([c], [-c])$$

Sea  $[c] \in \ker g_1$  y  $x, y \in Z_1(S^1)$ ,  $x \neq y$ , tales que  $[x]$  e  $[y]$  son generadores de  $H_1(S^1)$ . Notemos que  $x$  e  $y$  son homólogos, ya que  $H_1(S^1)$  tiene rango 1. Existen  $\alpha, \beta$  enteros tales que

$$c = \alpha x + \beta y$$

Consideramos las inclusiones  $i: U \cap V \hookrightarrow U$  y  $j: U \cap V \hookrightarrow V$ . Tenemos que

$$0 = g_1([c]) = ([c], -[c]) = (i_*[c], -j_*[c]) \iff \begin{cases} i_*([c]) \\ j_*([c]) = 0 \end{cases}$$

Dado que  $x$  e  $y$  son homólogos,

$$i_*([c]) = i_*([\alpha x + \beta y]) = i_*([\alpha x + \beta x]) = (\alpha + \beta)i_*([x]) = 0 \iff \alpha = -\beta$$

por lo que  $H_2(T) \cong \ker g_1 \cong \mathbb{Z}$ . Usando esta información y la identidad (2.21),

$$\text{Im } g_1 \cong \frac{\mathbb{Z}}{\ker g_1} = 0 \implies H_1(T) \cong \mathbb{Z}^2$$

#### Theorem 2.4.1

$$H_n(T) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 2 \end{cases} \implies \beta_n(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, 2 \\ 2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

$$\chi(T) = 1 - 2 + 1 = 0$$

Más adelante veremos que se pueden hallar los grupos de homología del toro de forma mucho más directa.

# **HOMOLOGÍA RELATIVA Y CELULAR**

# 3

## Grupos de homología relativa

Como vimos en el capítulo anterior, el grupo de homología de orden 1 de la rosa tiene un generador por cada pétalo. Esto parece decirnos que la acción de *añadir un pétalo* (**adjunción**) provoca la aparición de nuevos generadores. No obstante, diferentes adjunciones provocan diferentes alteraciones:

- Si pegamos sólo uno de los extremos del segmento a  $B_p$  y dejamos el otro libre,  $B_p$  es un retracto por deformación fuerte de la figura resultante, de forma que no aparecen nuevos generadores.
- Si lo pegamos por ambos lados, aparece un pétalo nuevo y un nuevo generador.

Dado un espacio topológico  $X$  y un subespacio  $A \subseteq X$ , el grupo de homología relativa estudia cómo  $A$  está pegado con su complementario,  $X \setminus A$ . Diremos que dos cadenas son *iguales módulo A* si su diferencia es una cadena en  $A$ . En particular, tendremos que una cadena será un *ciclo módulo A* si su borde está contenido en  $A$ .

### 3.1. Complejo de cadenas cociente

**Definition 3.1.1** Sea  $(C, \partial)$  un complejo de cadenas y  $(D, \partial')$  un subcomplejo de cadenas, con  $D$  subgrupo normal de  $C$ . Se define el **complejo cociente** como el grupo graduado  $C/D$  dotado del operador borde

$$\begin{aligned} \frac{C_p}{D_p} &\longrightarrow \frac{C_{p-1}}{D_{p-1}} \\ \bar{c} &\longmapsto \overline{\partial c} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Si  $\pi: C \rightarrow C/D$  es el epimorfismo canónico e  $i: D \hookrightarrow C$  es la inclusión, la sucesión

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\pi} \frac{C}{D} \longrightarrow 0$$

es exacta. Según el 1.6.2, si podemos hallar un homomorfismo de conexión  $\Delta: H_*(C/D) \rightarrow H_*(C)$ , la sucesión

$$H_*(D) \xrightarrow{i_*} H_*(C) \xrightarrow{\pi_*} H_*(C/D) \xrightarrow{\Delta} H_*(C) \tag{3.2}$$

será exacta.

Para construir el homomorfismo de conexión, sea  $\bar{c} \in Z_n(C/D)$ . Tenemos que

$$\overline{\partial c} = 0 \implies \partial c \in D_{n-1}$$

Como  $\partial^2 c = 0$ ,  $\partial c \in Z_{n-1}(D)$ , luego  $[\partial c] \in H_{n-1}(D)$ . Definimos entonces el homomorfismo  $\Delta_n: H_n(C/D) \rightarrow H_{n-1}(D)$  como

$$\Delta_n(\bar{c}) = [\partial c]$$

de forma que  $\Delta = \{\Delta_n : n \in \mathbb{Z}\}$  es un homomorfismo de conexión.

**Tercer teorema de isomorfía**

Sea  $C$  un grupo y  $D, E$  subgrupos normales de  $C$ . Si  $E \leq D$ ,  $E$  es un subgrupo normal de  $D$  y

$$\frac{C}{D} \cong \frac{C/E}{D/E}$$

**Lemma 3.1.1** (Teorema de isomorfía para grupos graduados) *Sea  $C$  un complejo de cadenas y  $E, D$  subcomplejos normales de  $C$ . Si  $E$  es un subcomplejo de  $D$ ,*

$$\frac{C}{D} \cong \frac{C/E}{D/E}$$

*Demostración.* Sea  $p \in \mathbb{Z}$ . Por definición de subcomplejo y subcomplejo normal,  $D_p, E_p \trianglelefteq C_p$  y  $E_p \leq D_p$ . Por el tercer teorema de isomorfía, existe un isomorfismo

$$f_p: \frac{C_p}{D_p} \longrightarrow \frac{C_p/E_p}{D_p/E_p}$$

Si  $f$  es un homomorfismo graduado,

$$f: \frac{C}{D} \longrightarrow \frac{C/E}{D/E}$$

es un isomorfismo graduado por ser una colección de isomorfismos. Por tanto,  $C/D$  es isomorfo a  $(C/E)/(D/E)$ .  $\square$

Sea  $C$  un complejo de cadenas y  $E \leq D$  subcomplejos normales de  $C$ . Por el 3.1.1, existe un isomorfismo graduado  $f: (C/E)/(D/E) \rightarrow C/D$ . Si ahora consideramos el epimorfismo canónico

$$\pi: C/E \longrightarrow \frac{C/E}{D/E}$$

la aplicación

$$\Pi: \frac{C}{E} \xrightarrow{\pi} \frac{C/E}{D/E} \xrightarrow{f} \frac{C}{D}$$

es un epimorfismo graduado entre  $C/E$  y  $C/D$ . De aquí se obtiene la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \frac{D}{E} \xrightarrow{i} \frac{C}{E} \xrightarrow{\Pi} \frac{C}{D} \longrightarrow 0$$

Sea  $p: D \rightarrow D/E$  el epimorfismo canónico. Este homomorfismo induce un homomorfismo de grado 0 en homología,

$$p_*: H_*(D) \longrightarrow H_*(D/E)$$

Si  $\Delta: H_*(C/D) \rightarrow H_*(D)$  es el homomorfismo graduado (3.2),

$$\Delta': H_*(C/D) \xrightarrow{\Delta} H_*(D) \xrightarrow{p_*} H_*(D/E) \quad (3.3)$$

es un homomorfismo de conexión, por lo que el (??) nos dice que

$$H_n(D/E) \xrightarrow{i_*} H_n(C/E) \xrightarrow{\Pi_*} H_n(C/D) \xrightarrow{\Delta'} H_{n-1}(D/E) \quad (3.4)$$

es una sucesión exacta larga.

Sea  $C'$  otro complejo de cadenas, con  $E' \leq D'$  subcomplejos normales de  $C'$ . Considérese una aplicación de cadenas  $g: C \rightarrow C'$  tal que  $g(D) \leq D'$

y  $g(E) \leq E'$ . Como acabamos de ver, se puede construir una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \frac{D'}{E'} \longrightarrow \frac{C'}{E'} \longrightarrow \frac{C'}{D'} \longrightarrow 0$$

que induce una sucesión exacta larga en homología similar a (3.4). Dado que  $g$  es una aplicación de cadenas, podemos conectar ambas sucesiones exactas usando  $g_*$ :

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(D/E) & \xrightarrow{i_*} & H_n(C/E) & \xrightarrow{\Pi_*} & H_n(C/D) & \xrightarrow{\Delta'} & H_{n-1}(D/E) \\ \downarrow g_* & & \downarrow g_* & & \downarrow g_* & & \downarrow g_* \\ H_n(D'/E') & \xrightarrow{\tilde{i}_*} & H_n(C'/E') & \xrightarrow{\tilde{\Pi}_*} & H_n(C'/D') & \xrightarrow{\tilde{\Delta}'} & H_{n-1}(D'/E') \end{array} \quad (3.5)$$

Por cómo está construida (3.4), se puede probar que cada uno de los cuadrados del diagrama anterior es comutativo. Se dice entonces que  $g_*$  es una **transformación natural** o que cumple la **hipótesis de naturalidad**.

## 3.2. Homología singular relativa

**Definition 3.2.1** Un **par de espacios** es un par ordenado de la forma  $(X, A)$ , donde  $X$  es un espacio topológico y  $A \subseteq X$ .

Sea  $(X, A)$  un par de espacios y  $n > 0$ . Dado un  $c \in S_n(X)$ , existen  $n$ -símplices singulares  $\phi_1, \dots, \phi_p: \sigma_n \rightarrow X$  y enteros  $\mu_1, \dots, \mu_p$

$$c = \sum_{i=1}^p \mu_i \phi_i$$

Si  $\phi_i(\sigma_n) \subseteq A$  para cada  $i = 1, \dots, p$ , se tiene entonces que  $c \in S_n(A)$ . De aquí se sigue que  $S_n(A) \leq S_n(X)$ .

Por otro lado, dado un  $i = 0, \dots, n$ ,

$$\partial_{(i)}\phi(\sigma_{n-1}) \subset \phi(\sigma_n) \subset A \implies \partial_{(i)}\phi \in S_{n-1}(A)$$

por lo que  $S_*(A)$  es un subcomplejo de cadenas de  $S_*(X)$ . En el lenguaje de la teoría de categorías, decimos que  $S_*$  es un *funtor covariante*, la que respeta el orden de las inclusiones.

Se define el **complejo de cadenas singulares de  $X$  módulo  $A$**  como el complejo cociente

$$S_*(X, A) := \frac{S_*(X)}{S_*(A)}$$

De la misma forma, se definen los grupos graduados

$$Z_*(X, A) := \frac{Z_*(X)}{Z_*(A)}; \quad B_*(X, A) := \frac{B_*(X)}{B_*(A)};$$

**Definition 3.2.2** Sea  $(X, A)$  un par de espacios. Se define el **grupo  $n$ -ésimo**

Espacio cociente
<p>Si <math>X</math> es un espacio topológico y <math>A \subset X</math>, <math>X/A</math> es el espacio resultante de identificar todos los puntos de <math>A</math> en uno. La topología de un espacio cociente se toma de forma que la proyección</p> $\pi: X \longrightarrow X/A$ <p>sea continua. En particular, <math>U \subset X/A</math> es abierto si y sólo si <math>\pi^{-1}(U)</math> es abierto en <math>X</math>.</p>

de homología singular relativa de  $X$  módulo  $A$  como

$$H_n(X, A) := H_n(S_*(X, A)) = \frac{Z_n(X, A)}{B_n(X, A)}$$

**Example 3.2.1** 1. Sea  $X$  un cilindro con tapas, y  $A$  la unión de las dos tapas. Consideramos sobre  $X$  la circunferencia  $e$ , paralela a las anillas del cilindro, y un segmento  $f$  que conecta las dos componentes conexas de  $A$ .

Por un lado, el camino  $e$  es un ciclo en  $X$  por ser un lazo, y también lo es en  $(X, A)$ . Por otro lado, el segmento  $f$  no es un ciclo en  $X$ , pero sí lo es en  $(X, A)$ .

2. Sea  $X$  la esfera, y  $c, d \subset X$  dos circunferencias paralelas. Si  $d$  es la circunferencia mayor, llamaremos  $A$  a la componente conexa de  $X \setminus d$  que no contiene a  $c$ .

Usando el ??,  $c$  forma un ciclo en  $X$  por ser un lazo, por lo que  $\partial c = 0$ . Por cómo se define el operador borde del complejo de cadenas cociente,

$$\partial \bar{c} = \overline{\partial c} = 0$$

por lo que  $c$  forma un ciclo en  $(X, A)$ .

Sea  $e$  un camino que une  $c$  y  $d$  en  $X$ , y  $\tilde{A} = A \cup d$ . El camino  $e$  no es un ciclo en  $X$  porque no es un lazo, y tampoco es un ciclo en  $(X, \tilde{A})$ . No obstante, sí es un ciclo en  $(X, \tilde{A} \cup c)$ .

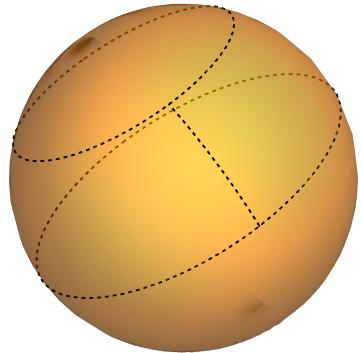
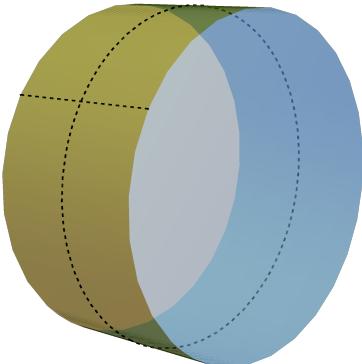


Figura 3.1: Esfera y cilindro del 3.2.1.

**Definition 3.2.3** Sea  $(X, A)$  un par de espacios. Tomando  $C = S_*(X)$  y  $D = S_*(A)$  en la sucesión exacta (3.2), se obtiene la **sucesión exacta asociada al par**  $(X, A)$ :

$$H_*(A) \xrightarrow{i_*} H_*(X) \xrightarrow{\pi_*} H_*(X, A) \xrightarrow{\Delta} H_*(A)$$

**Proposition 3.2.1**  $i_*$  es un isomorfismo si y sólo si  $H_n(X, A) = 0$  para todo  $n \geq 0$ .

Una **tríada de espacios** es una terna  $(X, A, B)$ , donde  $(X, A)$  y  $(A, B)$  son pares de espacios.

Sea  $(X, A, B)$  una tríada de espacios. Tomando  $D = S_*(A)$ ,  $E = S_*(B)$  y  $C = S_*(X)$  en (3.4), se obtiene la sucesión exacta larga

$$H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\Delta'} H_{n-1}(A, B)$$

donde  $i_*$  y  $j_*$  son los homomorfismos inducidos en homología por las inclusiones  $i: S_*(A) \hookrightarrow S_*(X)$  y  $j: S_*(B) \hookrightarrow S_*(A)$  y  $\Delta'$  es la aplicación (3.3).

Recordemos que el grupo libre generado por el vacío es el grupo trivial, de forma que  $S_*(\emptyset) = 0$ . Esto nos permite establecer un isomorfismo natural entre  $S_*(X)$  y  $S_*(X, \emptyset)$ :

$$\begin{aligned} S_*(X) &\longrightarrow S_*(X, \emptyset) \\ c &\longmapsto \bar{c} \end{aligned} \tag{3.6}$$

De la misma forma, se tiene que  $S_*(X, A, \emptyset) \cong S_*(X, A)$  y  $S_*(X) \cong$

$S_*(X, \emptyset, \emptyset)$ .

### 3.3. Aplicaciones entre pares

**Definition 3.3.1** Sean  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  dos pares de espacios topológicos. Una aplicación de pares

$$f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

es una aplicación continua  $f: X \longrightarrow Y$  tal que  $f(A) \subseteq B$ .

Si  $\phi: \sigma_p \rightarrow X$  es un simplice singular tal que  $\phi(\sigma_p) \subset A$  y  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  es una aplicación de pares,  $(f \circ \phi)(\sigma_p) \subset B$ , por lo que  $f_{\#}(\phi)$  es un  $p$ -simplice singular de  $B$ . Dado que la elección de  $\phi$  es arbitraria y los  $p$ -simplices singulares conforman una base de  $S_*(A)$ ,

$$f_{\#}(S_*(A)) \subseteq S_*(B)$$

por lo que  $f$  induce una aplicación de cadenas

$$\begin{aligned} f_{\#}: S_*(X, A) &\longrightarrow S_*(Y, B) \\ \bar{c} &\longmapsto \overline{f(c)} \end{aligned} \tag{3.7}$$

que induce a su vez un homomorfismo entre los grupos de homología relativa,

$$\begin{aligned} f_*: H_*(X, A) &\longrightarrow H_*(Y, B) \\ [\bar{c}] &\longmapsto [\overline{f(c)}] \end{aligned} \tag{3.8}$$

Sean  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  aplicaciones entre pares de espacios. Decimos que  $f$  es **homotópica** a  $g$  si existe una aplicación entre pares de espacios  $F: (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$  tal que  $F(x, 0) = f(x)$  y  $F(x, 1) = g(x)$ . Observar que  $F$ , al ser aplicación de pares, se supone continua y verifica que  $F(A \times I) \subset B$ .

**Theorem 3.3.1** Si  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  son homotópicas como aplicaciones de pares,

$$f_* = g_*: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(Y, B)$$

Tomando  $A = \emptyset = B$ , se obtiene el teorema de invarianza homotópica.

*Demostración.* Sean  $i_0, i_1: (X, A) \rightarrow (X \times I, A \times I)$  las aplicaciones

$$i_0(x) = (x, 0); \quad i_1(x) = (x, 1)$$

Tenemos que  $f = F \circ i_0$  y  $g = F \circ i_1$ . Para probar que  $f_* = g_*$ , basta con probar que  $(i_0)_*$  e  $(i_1)_*$  son homotópicas como aplicaciones de cadenas. La demostración es análoga al teorema de invarianza homotópica.  $\square$

**Example 3.3.1** Sean  $X = [0, 1]$ ,  $Y = S_1 \subset \mathbb{R}^2$ ,  $A = \{0, 1\}$  y  $B = \{(1, 0)\}$ . Considérense las aplicaciones continuas  $f, g: X \rightarrow Y$  definidas como

$$f(x) = e^{2\pi i x}; \quad g(x) = (1, 0)$$

Las aplicaciones  $f$  y  $g$  son homotópicas vía

$$F(x, t) = f(x)(1 - t) + t$$

y además  $f(A) = g(A) = B$ , pero no forman una homotopía de pares entre  $(X, A)$  e  $(Y, B)$ .

### 3.3.1. Teorema de escisión

**Lemma 3.3.2** (Lema de los cinco, [FiveLemma]) *Sean  $A_1, B_1, \dots, A_5, B_5$  grupos abelianos. Considérese el diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \delta \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array} \quad (3.9)$$

cuyas filas forman sucesiones exactas. Si  $\alpha$  es un epimorfismo,  $\beta_1, \beta_2$  son isomorfismos y  $\delta$  es un monomorfismo,  $\gamma$  es un isomorfismo.

**Theorem 3.3.3** (Teorema de escisión) *Sea  $(X, A)$  un par de espacios y  $U \subset A$  tal que  $\overline{U} \subset \overset{\circ}{A}$ . La aplicación inclusión  $i: (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$  induce un isomorfismo*

$$i_*: H_*(X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow H_*(X, A)$$



**Figura 3.2:** El teorema de escisión nos dice que la homología relativa de  $X$  módulo  $A$  sólo concierne a la frontera de  $A$ . La estructura global del espacio no es relevante. Imagen: [Hole].

Los homomorfismos

$$i: S_*^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S_*(X); \quad i': S_*^{\mathcal{U}'}(A) \hookrightarrow S_*(A)$$

forman isomorfismos entre los grupos de homología. Teniendo en cuenta que  $S_*^{\mathcal{U}'}(A) \leq S_*^{\mathcal{U}}(X)$ , la aplicación inclusión

$$j: S_*^{\mathcal{U}, \mathcal{U}'}(X, A) = \frac{S_*^{\mathcal{U}}(X)}{S_*^{\mathcal{U}'}(A)} \hookrightarrow \frac{S_*(X)}{S_*(A)} = S_*(X, A)$$

forma una aplicación de cadenas que da lugar al diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_*(S_*^{\mathcal{U}'}(A)) & \longrightarrow & H_*(S_*^{\mathcal{U}}) & \longrightarrow & H_*(S_*^{\mathcal{U}, \mathcal{U}'}(X, A)) & \longrightarrow & H_*(S_*^{\mathcal{U}'}(A)) \\
 \downarrow i'_* & & \downarrow i_* & & \downarrow j_* & & \downarrow i_* \\
 H_*(A) & \longrightarrow & H_*(X) & \longrightarrow & H_*(X, A) & \longrightarrow & H_*(A)
 \end{array} \tag{3.10}$$

Como  $i_*$  e  $i'_*$  son isomorfismos, el lema de los cinco nos garantiza que  $j_*$  es un isomorfismo, por lo que  $S_*(X \setminus U, A \setminus U) \cong S_*^{\mathcal{U}, \mathcal{U}'}(X, A)$  y concluimos que

$$H_*(X, A) \cong H_*(S_*^{\mathcal{U}, \mathcal{U}'}(X, A)) \cong H_*(X \setminus U, A \setminus U)$$

□

#### Un detalle importante

Dados tres grupos abelianos  $A, B, C$  tales que  $B + C \leq A + C$ ,

$$\frac{A + C}{B + C} \cong \frac{A}{B}$$

**Example 3.3.2** 1. Sea  $X$  la esfera de la Figura 3.1,  $A$  el área comprendida entre las dos circunferencias y  $U \subset A$  una circunferencia paralela a  $\partial A$ . Tenemos que  $X \setminus U$  son dos casquetes y  $A \setminus U$  son dos bandas. Ahora bien, observar que

$$\frac{X \setminus U}{A \setminus U} \cong \frac{X}{A}$$

por lo que ambos espacios tienen el mismo tipo de homología.

2. Sea  $X$  el toro de Clifford,

$$A = \{(x, y) \in X : 1/4 \leq x \leq 3/4\}$$

y  $\star \in A$ . El subespacio  $X \setminus \{\star\}$  es un toro perforado. Podemos tomar el agujero y ensancharlo hasta quedarnos con dos *hilos de alambre* cruzados (que son los generadores de  $H_1$ ). Esos hilos forman una figura ocho.

Por otro lado,  $A \setminus \{\star\}$  es un cilindro perforado. Podemos tomar la perforación y ensancharla hasta quedarnos con las anillas de los bordes y un alambre que los une. Dicho alambre se puede retraer hasta que las dos anillas sean tangentes, formando una figura ocho.

## 3.4. Grupo de homología reducida

Sea  $X$  un espacio topológico. El camino constante  $\alpha: X \rightarrow \{\star\}$  da lugar a un homomorfismo en homologías  $\alpha_*: H_*(X) \rightarrow H_*(\{\star\})$ . Se define el **grupo de homología reducida**  $\tilde{H}_*(X)$  como el núcleo de  $\alpha_*$ .

Si  $X$  es convexo, sabemos por el 1.4.6 que  $H_n(X) = \{0\}$  para todo  $n > 0$ , por lo que  $\tilde{H}_n(X) = \{0\}$ . Aún así, no podemos decir nada del grupo de orden 0, porque  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .

La homología reducida está creada para poder describir de forma más sencilla la homología de algunos espacios. Por ejemplo: todos los grupos de homología reducida del espacio puntual son triviales, y el único grupo de homología reducida no trivial de  $S^n$  es el de orden  $n$ , como veremos más adelante.

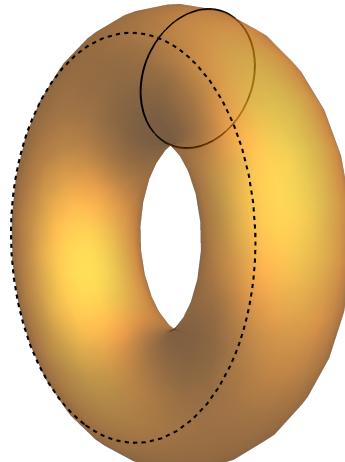


Figura 3.3: Generadores del grupo de homología de primer orden del toro.

En general, si un espacio es arcoconexo, su grupo de homología reducida de orden cero es trivial.

**Proposition 3.4.1** *Sea  $X$  un espacio topológico no vacío con una cantidad finita de arcocomponentes.  $\tilde{H}_0(X)$  es un grupo libre que verifica*

$$\text{rk}(\tilde{H}_0(X)) = \text{rk}(H_0(X)) - 1$$

*Demostración.* Sea  $c$  un 0-ciclo de  $X$ . Si llamamos  $X_1, \dots, X_n$  a las arcocomponentes de  $X$ , existirán  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  tales que

$$c = \sum_{i=1}^n a_i x_i; \quad x_i \in X_i$$

Dado que  $\alpha$  es una aplicación constante, podemos llamar  $\alpha_0$  al valor que toma en todos sus puntos, de forma que

$$0 = \alpha_*([c]) = \sum_{i=1}^n a_i [\alpha(x_i)] = [\alpha_0] \sum_{i=1}^n a_i$$

De aquí se deduce que  $[c] \in \ker \alpha_*$  si y sólo si

$$a_n = - \sum_{i=1}^{n-1} a_i$$

por lo que  $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$  forma un sistema generador libre de  $\tilde{H}_0(X)$ . Por tanto,

$$\tilde{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}^{n-1} \implies \text{rk}(\tilde{H}_0(X)) = n - 1 = \text{rk}(H_0(X)) - 1$$

□

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Al igual que  $f$  induce un homomorfismo entre grupos de homología, queremos ver que  $f$  induce un homomorfismo entre grupos de homología reducida. Para ello, sean  $\alpha: X \rightarrow \{\star\}, \beta: Y \rightarrow \{\star\}$  caminos constantes y  $c = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$  tal que  $[c] \in \tilde{H}_n(X)$ . Tenemos que

$$f_*([c]) = \sum_{i=1}^n a_i [f(x_i)] = \sum_{j=1}^m b_j [y_j]$$

Dado que las aplicaciones continuas llevan conjuntos arcoconexos en conjuntos arcoconexos,

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$$

Si  $[c]$  está en  $\ker \alpha_*$ , la suma de todos los  $a_i$  es 0. Como la suma de los  $a_i$  es la misma que la de los  $b_j$ , esto es tanto como decir que  $f_*([c])$  está en  $\ker \beta_*$ . Por tanto,  $f_*(\ker \alpha_*) \subseteq \ker \beta_*$ , de forma que  $f$  induce un homomorfismo entre los grupos de homología reducida de  $X$  e  $Y$ .

**Example 3.4.1** Si  $X$  es un espacio contráctil,  $\tilde{H}_*(X) = 0$ .

### 3.4.1. Una fórmula para la homología reducida

**Lema 3.4.2** (Lema de escisión) *Sean  $A, B, C$  grupos abelianos. Considerese la sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

*Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $B$  es suma directa de  $A$  con  $C$ ;
2. existe un homomorfismo  $h: B \rightarrow A$  tal que  $f \circ h = \text{id}_A$ ;
3. existe un homomorfismo  $k: C \rightarrow B$  tal que  $k \circ g = \text{id}_C$ .

**Proposition 3.4.3** *Dado un  $p \in X$ ,*

$$\tilde{H}_*(X) \cong H_*(X, \{p\})$$

*Demostración.* Sea  $i: \{p\} \hookrightarrow X$  la inclusión. La aplicación continua

$$\alpha: X \longrightarrow p$$

verifica que  $\text{id}_{\{p\}} = \alpha \circ i$ , por lo que  $\{p\}$  forma un retracto de  $X$  e  $i_*$  es un monomorfismo.

Considerérese la sucesión exacta de homología generada por el par de espacios  $(X, \{p\})$ :

$$H_n(\{p\}) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, \{p\}) \xrightarrow{\Delta'} H_{n-1}(\{p\})$$

Como  $i_*$  es un monomorfismo,  $\text{Im } \Delta' = \ker i_* = 0$ . Por el primer teorema de isomorfía,  $\text{Im } j_* = \ker \Delta' = H_n(X, p)$ , por lo que  $j_*$  es sobreyectiva.

Dado que  $i_*$  es inyectiva y  $j_*$  es sobreyectiva, podemos pasar a definir una sucesión exacta corta en lugar de trabajar con una sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow H_n(\{p\}) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, \{p\}) \longrightarrow 0$$

Sabemos que  $\alpha_* \circ i_* = \text{id}_{H_n(\{p\})}$ , por lo que el lema de escisión nos garantiza que existe un homomorfismo

$$\beta: H_n(X, \{p\}) \rightarrow H_n(X)$$

tal que  $j_* \circ \beta = \text{id}_{H_n(X, \{p\})}$ . Esto es tanto como decir que  $\beta$  es inyectiva.

Se puede probar que  $\text{Im } \beta = \ker \alpha_* = \tilde{H}_*(X)$ , por lo que hemos hallado un isomorfismo entre  $H_*(X, \{p\})$  y  $\tilde{H}_*(X)$ .  $\square$

Sea  $X$  un espacio topológico con  $n$  componentes arcoconexas. Hasta ahora, sabemos que

$$\tilde{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$$

pero queda pregunta preguntarnos qué ocurre con los grupos de orden superior. Utilizando la 3.4.3, tenemos para cada  $p > 0$  y el espacio

puntual  $\star$  que

$$\tilde{H}_p(X) \cong H_p(X, \star) = \frac{Z_p(X, \star)}{B_p(X, \star)} = \frac{Z_p(X)/Z_p(\star)}{B_p(X)/B_p(\star)}$$

Teniendo en cuenta que  $Z_p(\star) = B_p(\star)$ , estamos en condiciones de aplicar el tercer teorema de isomorfía:

$$\tilde{H}_p(X) \cong \frac{Z_p(X)/Z_p(\star)}{B_p(X)/B_p(\star)} = \frac{Z_p(X)/B_p(\star)}{B_p(X)/B_p(\star)} \cong \frac{Z_p(X)}{B_p(X)} = H_p(X)$$

De esta forma, llegamos a que el grupo de homología reducida sólo reduce el grupo de orden cero, cuya única función es contar el número de componentes conexas.

**Corollary 3.4.4** *Sea  $X$  un espacio topológico con una cantidad finita de arcocomponentes.*

$$\tilde{H}_*(X) \cong \frac{H_*(X)}{H_*(\star)}$$

#### Example 3.4.2

$$\tilde{H}_*(B_p) \cong \frac{H_*(B_p)}{H_*(\star)} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^p & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

### 3.4.2. Homología reducida y homología relativa

#### Idea de la demostración

En el lema, nos proporcionan una aplicación cociente  $\pi$  que envía  $X$  en  $X_A$  de forma continua, por lo que nuestro impulso inicial sería definir

$$G = \pi \circ F \circ (\pi \times \text{id}_I)^{-1}$$

El problema es que  $\pi^{-1}$  no está bien definido, por lo que tampoco lo va a estar  $(\pi \times \text{id}_I)^{-1}$ . Lo que haremos será definir una  $G$  tal que

$$G \circ \pi = (\pi \circ \text{id}_I) \circ F$$

En lo sucesivo, diremos que un espacio topológico es de **tipo  $C_2$**  si es compacto y  $T_2$  al mismo tiempo.

**Lemma 3.4.5** *Sea  $(X, A)$  un par de espacios donde  $X$  es  $C_2$  y  $A$  es cerrado en  $X$ . Considérese la aplicación cociente*

$$\pi: X \rightarrow \frac{X}{A}$$

*y sea  $y = \pi(A) \in X/A$ . Si  $A$  es retracto por deformación fuerte de  $X$ ,  $\{y\}$  es un retracto por deformación fuerte de  $\pi(X) = X/A$ .*

*Demostración.* Dado que  $A$  es un retracto por deformación fuerte de  $X$ , existe una homotopía  $F: X \times I \rightarrow X$  tal que  $F(x, 0) = x$  para todo  $x \in X$ ,  $F(a, t) = a$  para todo  $a \in A$  y  $t \in I$ , y  $F(X \times \{1\}) \subseteq A$ .

Si  $X_A = X/A$ , queremos hallar una homotopía  $G: X_A \times I \rightarrow X_A$  tal que  $G([x], 0) = x$  para todo  $x \in X_A$ ,  $G(X_A \times \{1\}) = \{y\}$  y  $G(y, t) = y$  para todo  $t \in I$ .

Sea  $G: X_A \times I \rightarrow X_A$  la aplicación

$$G([x], t) = (\pi \circ F)(x, t)$$

Si  $x \notin A$ , la clase de  $x$  módulo  $A$  es el singulete formado por el propio punto  $x$ , por lo que  $G$  está bien definido en  $X_A \setminus \{y\}$ .

Si  $x \in A$ , sabemos que  $F(a, t) = a$  para todo  $t \in I$ , por lo que

$$(\pi \circ F)(a, t) = \pi(a) \in \pi(A) = \{y\}$$

De esta forma,  $G$  está bien definida y que  $G(y, t) = y$  para todo  $t \in I$ .

Sea  $p \in X/A$ . Si  $x \in \pi^{-1}(p)$ , sabemos que  $F(x, 0) = x$ , por lo que

$$\begin{aligned} G(p, 0) &= (\pi \circ F)(x, 0) = \pi(x) = p \\ G(p, 1) &= (\pi \circ F)(x, 1) \in \pi(A) = \{y\} \end{aligned}$$

Sólo nos queda ver que  $G$  es continua. Para ello, sea  $C$  un subconjunto cerrado de  $X/A$ . Por continuidad,  $D = (\pi \circ F)^{-1}(C)$  es un subconjunto cerrado de  $X \times I$ . Como  $X \times I$  es compacto,  $D$  es compacto. Por continuidad,  $(\pi \times \text{id}_I)(D)$  es compacto. Por cómo se define  $G$ ,

$$G^{-1}(C) = (\pi \times \text{id}_I)(D) \subseteq X_A \times I$$

es compacto. Dado que  $X_A \times I$  es un espacio de Hausdorff,  $G^{-1}(C)$  es cerrado.

Dado que la elección de  $C$  es arbitraria, se sigue que  $G$  es continua.  $\square$

#### Detalles de la prueba

- Una aplicación es continua si y sólo si la preimagen de todo cerrado es cerrada.
- Los subespacios cerrados de un compacto son compactos.
- La imagen de un compacto por una aplicación continua es compacta.
- Todo subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.

**Lema 3.4.6** *Sea  $X$  un espacio  $C_2$ . Dados dos cerrados disjuntos  $C, D \subset X$ , existen abiertos  $U, V \subset X$  tales que  $U$  contiene a  $C$ ,  $V$  contiene a  $D$  y  $U \cap V = \emptyset$*

*Demostración.* Dados  $x \in C$  e  $y \in D$ , como  $C$  y  $D$  son disjuntos,  $x \neq y$ . Como  $X$  es un espacio de Hausdorff, existen  $U_y, V_y$  abiertos tales que

$$x \in U_y; \quad y \in V_y; \quad U_y \cap V_y = \emptyset$$

Como  $D$  es un subespacio cerrado de un compacto,  $D$  es compacto, por lo que podemos hallar una familia finita de puntos  $y_1, \dots, y_n \in D$  tales que  $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$  forma un recubrimiento abierto de  $D$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , podemos hallar un abierto  $U_i \subseteq X$  tal que  $U_i \cap V_{y_i} = \emptyset$  y  $x \in U_i$ . Se definen entonces

$$U_x = \bigcup_{i=1}^n U_i; \quad V_x = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$$

Notar que ambos conjuntos son abiertos y  $U_x \cap V_x = \emptyset$ .

Dado que  $C$  es un subespacio cerrado de un compacto,  $C$  es compacto, por lo que podemos hallar una familia finita de puntos  $x_1, \dots, x_m$  tales que  $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\}$  forma un recubrimiento abierto de  $C$ .

Para terminar, considérense los abiertos

$$U = \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}; \quad V = \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$$

Se tiene por construcción que  $D \subseteq V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .  $\square$

**Lema 3.4.7** Sea  $X$  un espacio  $C_2$ . Dado un cerrado  $A$  contenido en un abierto  $V$ , existe un abierto  $W$  tal que

$$A \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq V$$

*Demostración.* Considérense los cerrados  $A$  y  $X \setminus V$ . Por el lema anterior, existen abiertos  $U, W$  de  $X$  tales que  $A \subseteq W$ ,  $X \setminus V \subseteq U$  y  $U \cap W = \emptyset$ . Tenemos que  $U \cap W = \emptyset$ , por lo que

$$W \subseteq X \setminus U \subseteq V \implies \overline{W} \subset \overline{X \setminus U} = X \setminus U \subseteq V$$

□

**Theorem 3.4.8** (Teorema del retracto) Sea  $X$  un espacio  $C_2$ ,  $A$  un subespacio cerrado de  $X$  y  $\pi: (X, A) \rightarrow (X/A, \pi(A))$  una aplicación cociente. Si  $A$  es un retracto por deformación fuerte de algún entorno cerrado de  $A$  en  $X$ ,

$$H_*(X, A) \cong H_*(X/A, \pi(A)) \cong \tilde{H}_*(X/A)$$

*Demostración.* Considérese la sucesión exacta asociada a la tríada de espacios  $(X, U, A)$ :

$$H_*(U, A) \xrightarrow{i_*} H_*(X, A) \xrightarrow{j_*} H_*(X, U) \xrightarrow{\Delta'} H_*(U, A)$$

Dado que  $A$  es un retracto por deformación fuerte de  $U$ ,  $H_*(U, A) = 0$ . Por exactitud, se sigue que  $0 = \text{Im } i_* = \ker j_*$  y  $\text{Im } j_* = \ker \Delta' = H_*(X, U)$ . Por tanto,

$$H_*(X, A) \cong H_*(X, U)$$

Sabemos que  $X$  es un espacio  $C_2$  y que  $A$  es cerrado. Como  $U$  es entorno de  $A$ ,  $A \subseteq \dot{U}$ . Usando el 3.4.7, podemos hallar un abierto  $V \subseteq X$  tal que  $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq \dot{U} \subseteq U$ . Aplicando el teorema de escisión, la inclusión  $i: (X \setminus V, U \setminus V) \hookrightarrow (X, U)$  induce un isomorfismo  $i_*$ . Se sigue que

$$H_*(X, U) \cong H_*(X \setminus V, U \setminus V)$$

Considérese la aplicación  $p = \pi|_{X \setminus V}$ . Como  $A \subseteq V$ ,  $\pi(x)$  sólo tiene un representante (el propio  $x$ ), de forma que  $p$  es un homeomorfismo. Como  $\pi(U \setminus V) = \pi(U) \setminus \pi(V)$ , se sigue que

$$H_*(X \setminus V, U \setminus V) \cong H_*(X_A \setminus \pi(V), \pi(U) \setminus \pi(V))$$

Aplicando el teorema de escisión al par  $(X_A, \pi(U))$ , se obtiene el isomorfismo

$$H_*(X_A \setminus \pi(V), \pi(U) \setminus \pi(V)) \cong H_*(X_A, \pi(U))$$

Considérese la sucesión exacta asociada a la tríada de espacios  $(X_A, \pi(U), \pi(A))$ . Un procedimiento similar al que hemos desarrollado al inicio de la demostración nos lleva a concluir que

$$H_*(X_A, \pi(U)) \cong H_*(X_A, \pi(A))$$

□

### 3.5. Homeomorfismo relativo

**Definition 3.5.1** Un *homeomorfismo relativo* es una aplicación continua entre pares de espacios  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  tal que

$$f: X \setminus A \longrightarrow Y \setminus B$$

es un homeomorfismo.

**Example 3.5.1** 1. Si  $\mathcal{N} = (0, 0, 1) \in S^2$  y  $D^2$  denota a la bola cerrada unidad de  $\mathbb{R}^2$ , existe un homeomorfismo

$$f: D^2 \setminus \partial D^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{\mathcal{N}\}$$

De esta forma,  $f$  induce un homeomorfismo relativo entre los pares  $(S^2, \{\mathcal{N}\})$  y  $(D^2, \partial D^2)$ .

2. Si  $C = S^1 \times I$  es un cilindro y  $\mathcal{S} = (0, 0, -1) \in S^2$ , existe un homeomorfismo

$$g: S^1 \times \overset{\circ}{I} \longrightarrow S^2 - \{\mathcal{N}, \mathcal{S}\}$$

que identifica al cilindro sin anillas con  $S^2$

**Theorem 3.5.1** (Teorema del homeomorfismo relativo) Sean  $X, Y$  espacios  $C_2$ ,  $A \subseteq X$  y  $B \subseteq Y$  cerrados y  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  un homeomorfismo relativo. Si  $A$  es retracto por deformación fuerte de algún entorno compacto de  $A$  en  $X$  y  $B$  es retracto por deformación fuerte de algún entorno compacto de  $B$  en  $Y$ ,  $f_*$  es un isomorfismo.

*Demostración.* Sean  $\pi: X \rightarrow X/A$  y  $\pi': Y \rightarrow Y/B$  aplicaciones cociente. Se define la aplicación  $f': X/A \rightarrow Y/B$  como  $f([x]) = \pi'(f(x))$ . Es fácil ver que  $f'$  está bien definida y es continua, por lo que da lugar al siguiente diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ X/A & \xrightarrow{f'} & Y/B \end{array} \quad (3.11)$$

Dado que  $f$  es un homeomorfismo relativo,  $f'$  es una biyección entre  $X/A$  e  $Y/B$ . Como ambos son espacios  $C_2$ ,  $f'$  es un homeomorfismo, por lo que induce un isomorfismo entre  $H_*(X/A)$  y  $H_*(Y/B)$ .

Tenemos entonces el diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_*(X, A) & \xrightarrow{f_*} & H_*(Y, B) \\ \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi'_* \\ H_*(X/A, \pi(A)) & \xrightarrow{f'_*} & H_*(Y/B, \pi'(B)) \end{array} \quad (3.12)$$

Sabemos por el 3.4.8 que  $\pi'_*$  y  $\pi_*$  son isomorfismos; además, acabamos de probar que  $f'_*$  es un isomorfismo. Como consecuencia,  $f_*$  es un isomorfismo.  $\square$

# 4

## Espacios CW-complejos

### 4.1. Espacio de adjunción

**Definition 4.1.1** Sean  $X, Y$  espacios topológicos,  $A \subset X$  un subespacio cerrado y  $f: A \rightarrow Y$  una aplicación continua. Dados  $x \in X, y \in Y$ , escribiremos  $x \sim y$  si  $x \in A$  e  $y = f(x)$ . Se define el **espacio de adjunción o de pegamiento** como

$$X \cup_f Y := \frac{X \sqcup Y}{\sim}$$

Decimos que  $f$  es la **aplicación de adjunción o de pegamiento** de  $X \cup_f Y$ .

Si  $Y = \{\star\}$ ,  $f = \text{Cte}_\star$ , por lo que  $x \sim z$  para todos  $x, z \in A$  y  $X \cup_f Y = X/A$ .

**Lemma 4.1.1** La proyección canónica  $p: X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$  verifica las siguientes condiciones:

1.  $p(Y)$  es cerrado;
2.  $p|_Y$  es un homeomorfismo sobre su imagen;
3.  $p(X \setminus A)$  es abierto;
4.  $p|_{X \setminus A}$  es un homeomorfismo sobre su imagen.

Como consecuencia, podemos considerar a  $Y$  y  $X \setminus A$  como subespacios de  $X \cup_f Y$ .

*Demostración.* Como  $X \sqcup Y$  es una unión disjunta de espacios topológicos,  $Y$  es un subespacio cerrado de  $X \sqcup Y$ . Además,  $A$  es cerrado en  $X$  si y sólo si lo es en  $X \sqcup Y$ , por lo que  $A \cup Y$  es cerrado en  $X \sqcup Y$ . Pero  $A \cup Y = p^{-1}[p(Y)]$ , por lo que  $p(Y)$  es cerrado.

Pasemos al segundo ítem: para ver que  $p|_Y$  es un homeomorfismo sobre su imagen, necesitamos ver que es cerrada e inyectiva.

Sea  $y \in Y$ : si  $y \notin f(A)$ , se tiene de forma trivial que  $p^{-1}([y]) = \{y\}$ . Si  $y \in f(A)$ , podemos hallar un  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ .

Como  $x \in A \subseteq X$ , podemos hallar un  $y' \in X \sqcup Y$  tal que  $y \sim y'$ . Si  $y' \in Y$ ,  $y = f(x) = y'$  y no hay nada que probar. Si asumimos que  $y' \neq y$ ,  $y' \in X$ . Teniendo en cuenta que

$$(p|_Y)^{-1}([y]) = p^{-1}([y]) \cap Y$$

se sigue que  $y' \notin (p|_Y)^{-1}([y])$ , por lo que  $p|_Y$  es inyectiva.

Para ver que  $p|_Y$  es cerrada, sea  $C$  un subespacio cerrado de  $Y$ . Como  $p(Y)$  es cerrado en  $X \cup_f Y$ ,  $p(C)$  es cerrado en  $p(Y)$  si y sólo si lo es en  $X \cup_f Y$ . Ésto es tanto como decir que  $p^{-1}[p(C)]$  es cerrado en  $X \sqcup Y$ .

#### Aplicaciones abiertas y cerradas

Una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es abierta (resp. cerrada) si la imagen de un abierto (resp. cerrado) en  $X$  es abierto (resp. cerrado) en  $Y$ . Si  $f$  es biyectiva, su inversa será continua si y sólo si  $f$  es abierta o cerrada.

Observamos que

$$p^{-1}[p(C)] = f^{-1}(C) \sqcup C$$

por lo que  $p^{-1}[p(C)]$  es una unión de cerrados. En consecuencia,  $p(C)$  es cerrado en  $p(Y)$ , de donde se sigue que  $p|_Y$  es una aplicación cerrada. Ésto concluye el segundo ítem.

Como  $A$  es cerrado en  $X$ ,  $X \setminus A$  es abierto en  $X \sqcup Y$ . Dado que  $p^{-1}[p(X \setminus A)] = X \setminus A$ , se sigue que  $p(X \setminus A)$  es abierto en  $X \cup_f Y$ .

Pasemos al último ítem: dado un  $x \in X \setminus A$ ,  $p^{-1}(\{x\}) = \{x\}$ , por lo que  $p|_{X \setminus A}$  es inyectivo. Dado que  $p$  es continua, sólo necesitamos ver que es abierta para deducir la tesis.

Sea  $U \subseteq X \setminus A$ : como  $p(X \setminus A)$  es abierto en  $X \cup_f Y$ ,  $p(U)$  será abierto en  $p(X \setminus A)$  si y sólo si lo es en el espacio de adjunción, o equivalentemente,  $p^{-1}[p(U)]$  es abierto en  $X \sqcup Y$ .

Dado que  $U \subseteq X \setminus A$ , se tiene que  $U = p^{-1}[p(U)]$ . Si  $U$  es abierto de  $X \setminus A$  también lo será de  $X \sqcup Y$ , por lo que  $p(U)$  es abierto en el espacio de adjunción. Ésto concluye la demostración.  $\square$

#### Primer axioma de numerabilidad

Un espacio topológico  $X$  verifica el primer axioma de numerabilidad si, dado  $p \in X$ , existe una base de entornos numerable de  $X$ . Una base de entornos de  $p$  es una familia de entornos  $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$  tal que, dado un entorno  $U \subseteq X$  de  $p$ ,  $U$  contiene al menos a un  $V_\alpha$ .

**Lema 4.1.2** Sean  $X, Y$  espacios de tipo  $C_2$ . Si  $X$  e  $Y$  cumplen el primer axioma de numerabilidad,  $X \cup_f Y$  es de tipo  $C_2$ .

*Demuestra*. El espacio  $X \cup_f Y$  es compacto por ser imagen de un espacio compacto (en este caso  $X \sqcup Y$ ) por una aplicación continua (la proyección canónica  $p : X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$ ).

Queremos ver que  $X \cup_f Y$  es  $T_2$ . Dado que  $X \cup_f Y$  es un espacio cociente y  $X, Y$  son  $T_2$ , basta ver que el conjunto

$$\{(x, y) \in (X \cup_f Y)^2 : y = f(x)\} = G(f)$$

es cerrado. Dado que  $X$  e  $Y$  son 1AN,  $(X \sqcup Y)^2$  es 1AN, por lo que  $G(f)$  será cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Sea  $(z_n)$  una sucesión de  $G(f)$ . Por compacidad de  $X \sqcup Y$ , existe una subsucesión  $(z_{n_k})$  convergente a un cierto  $z_0 \in X \sqcup Y$ . Por definición de  $G(f)$ , existe una sucesión  $(x_k)$  de  $A$  tal que

$$z_{n_k} = (x_k, f(x_k))$$

Se tiene entonces que  $(x_k)$  converge a  $x_0$ , que está en  $A$  por ser cerrado de  $X$ . Además, como  $f$  es continua,  $f(x_k)$  converge a  $f(x_0)$ .

De esta forma,  $(z_{n_k})$  converge a  $(x_0, f(x_0)) \in G(f)$ . Dado que  $X \sqcup Y$  es  $T_2$ ,  $z_0 = (x_0, f(x_0))$ , por lo que  $z_0 \in G(f)$ . De aquí se sigue que  $G(f)$  es cerrado. Por tanto,  $X \cup_f Y$  es  $T_2$ .  $\square$

#### La propiedad de Hausdorff en los cocientes

Sea  $W$  un espacio de Hausdorff y  $\sim$  una relación de equivalencia sobre los puntos de  $W$ . Si el conjunto

$$\{(x, y) \in W^2 : x \sim y\}$$

es cerrado en  $W^2$ ,  $W/\sim$  es un espacio de Hausdorff.

**Lema 4.1.3** Sean  $X, Y, W$  espacios  $C_2$ ,  $A \subset X$  un subconjunto cerrado y  $g : X \sqcup Y \rightarrow W$  una aplicación continua y sobreyectiva. Supongamos que,

para todo punto  $w \in W$ , se cumple que

$$g^{-1}(w) = \begin{cases} \text{un único punto de } X \setminus A \\ \vee \\ \{y\} \cup f^{-1}(y) \text{ para algún } y \in Y \end{cases}$$

Entonces,  $g$  induce un homeomorfismo entre  $W$  y  $X \cup_f Y$ .

*Demostración.* Sea  $\partial: X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$  la proyección canónica. Se define la aplicación

$$\begin{aligned} \bar{g}: X \cup_f Y &\longrightarrow W \\ [x] &\longmapsto g(x) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Supongamos que  $\bar{g}$  está bien definida y es una biyección continua: por el ??, tenemos que  $X \cup_f Y$  es de tipo  $C_2$ . Como  $W$  es  $T_2$ , se sigue que  $\bar{g}$  tiene inversa continua, por lo que es un homeomorfismo y el lema queda probado.

Empecemos por ver que  $\bar{g}$  está bien definida: sean  $x_1, x_2 \in A$  elementos asociados y diferentes. Existirá un  $y \in f(A)$  tal que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Si  $w = g(x_1)$ , se tiene por hipótesis que

$$g^{-1}(w) = \{y\} \cup f^{-1}(y) \implies g(x_1) = w = g(x_2)$$

Si  $x \in X \setminus A$ ,  $x$  sólo está asociado consigo mismo, de forma que  $\bar{g}$  está trivialmente bien definida. Dado que todas las antiimágenes por  $g$  de un cierto  $w \in W$  están asociadas,  $\bar{g}$  es también inyectiva.

Veamos que  $\bar{g}$  es continua: si  $C \subseteq W$  es cerrado,  $g^{-1}(C)$  es cerrado en  $X \sqcup Y$ , por lo que  $\pi^{-1}[g^{-1}(C)]$  es cerrado en  $X \cup_f Y$ . Notar que

$$\pi^{-1}[g^{-1}(C)] = \bar{g}^{-1}(C)$$

por lo que se sigue la continuidad de  $\bar{g}$ .  $\square$

Sea  $g: X \rightarrow W$  una aplicación continua y sobreyectiva entre espacios de tipo  $C_2$ . Supongamos que existe un  $w_0 \in W$  de forma que  $A = g^{-1}(w_0)$  es un cerrado en  $X$  y  $g^{-1}(w)$  es un único punto de  $X \setminus A$  para todo  $w \neq w_0$ .

Si  $\{\star\}$  es el espacio puntual, la aplicación constante  $f: A \rightarrow \{\star\}$  es continua, y se verifica que  $X \cup_f \{\star\}$  es homeomorfo a  $X/A$ . Por el 4.1.3, se tiene que

$$W \cong X \cup_f \{\star\} \cong X/A$$

#### Continuidad de la inversa

Si  $f: X \rightarrow Y$  es una biyección continua, donde  $X$  es compacto e  $Y$  es de Hausdorff,  $f$  es un homeomorfismo.

**Example 4.1.1** Sea  $h: D^n \setminus S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  un homeomorfismo,  $\mathcal{N} = (0, 0, \dots, 0, 1)$  y  $S^n_+ = S^n \setminus \mathcal{N}$ . La **proyección estereográfica**, dada por

$$\begin{aligned} \Phi: S^n_+ &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \left( \frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right) \end{aligned} \tag{4.2}$$

es un homeomorfismo. Una posible parametrización de  $h$  es

$$h(z) = \frac{z}{1 - \|z\|}$$

Se define la aplicación  $g: D^n \rightarrow S^n$  dada por

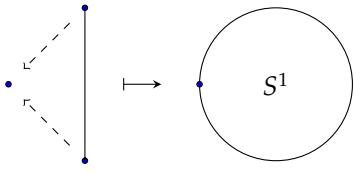
$$g(x) = \begin{cases} \mathcal{N} & \text{si } x \in S^{n-1} \\ (\Phi^{-1} \circ h)(x) & \text{si } x \in D^n \setminus S^{n-1} \end{cases}$$

Se tiene entonces que  $g$  es continua y sobreyectiva por construcción.

Como  $\mathcal{N} \in S^{n-1}$ ,  $g^{-1}(\mathcal{N}) = \{\mathcal{N}\}$  es un cerrado en  $D^n$ . Dado que  $\Phi$  y  $h$  son aplicaciones biyectivas,  $g^{-1}(z)$  es un único punto para todo  $z \neq \mathcal{N}$ . Aplicando el lema 4.1.3, se tiene entonces que

$$S^n \cong \frac{D^n}{S^{n-1}}$$

que es la adjunción de  $D^n$  a un espacio puntual.



**Figura 4.1:** Conjunto  $S^1$  construido como espacio de adjunción.

#### 4.1.1. Células y adjunción

Supongamos que  $X = D^n$  para algún  $n > 0$  y  $A = S^{n-1} = \partial D^n$ . Decimos que el espacio

$$Y_f := D^n \cup_f Y$$

es la **adjunción de una  $n$ -célula** al espacio  $Y$ .

**Example 4.1.2** En la figura Figura 4.1, vemos cómo  $S^1 \cong \{\star\}_f$ , siendo  $f: \partial D^1 = \{0, 1\} \rightarrow \{\star\}$  la aplicación constante. En general,  $S^n$  se puede obtener como  $\{\star\}_{f_n}$ , siendo  $f_n: \partial D^n \rightarrow \{\star\}$ .

**Lemma 4.1.4** Sea  $f: S^{n-1} \rightarrow Y$  una aplicación continua. Si  $Y$  es un espacio  $C_2$ , existe un entorno compacto  $U_f$  de  $Y$  en  $Y_f$  tal que  $Y$  es un retracto por deformación fuerte de  $U_f$ .

*Demostración.* Sea  $U = \{x \in D^n : \|x\| \geq 1/2\}$ . El cerrado  $U$  es un entorno compacto de  $S^{n-1}$  en  $D^n$ . Definimos la homotopía  $F: (U \sqcup Y) \times I \rightarrow U \sqcup Y$  como

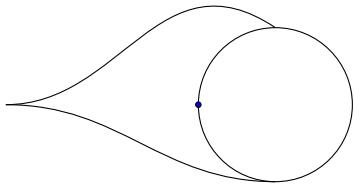
$$F(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } x \in Y \\ (1-t)x + t \frac{x}{\|x\|} & \text{si } x \in U \end{cases}$$

Tenemos que  $F$  es una aplicación continua que verifica las siguientes propiedades:

1.  $F(x, 0) = x$  para todo  $x \in U \sqcup Y$ .
2.  $F(x, 1) \in S^{n-1} \sqcup Y$  para todo  $x \in U \sqcup Y$ .
3.  $F(x, t) = x$  para todo  $x \in S^{n-1} \sqcup Y$  y todo  $t \in I$ .

Se sigue que  $S^{n-1} \sqcup Y$  es un retracto por deformación fuerte de  $U \sqcup Y$ .

Si  $p: D^n \sqcup Y \rightarrow Y_f$  denota a la proyección canónica, se define  $U_f$  como la imagen de  $U$  mediante  $p$ . Queremos ver que  $Y$  es un retracto por



**Figura 4.2:** Podemos adjuntar nuevas células a las células preexistentes para recrear espacios más complejos.

deformación fuerte de  $U_f$  en  $Y_f$ . Para ello, considérese la homotopía

$$\begin{aligned} G: U_f \times I &\longrightarrow U_f \\ ([x], t) &\longmapsto F(x, t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Es fácil ver que  $G$  está bien definida. Para ver que es continua, considérese el diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} (U \sqcup Y) \times I & \xrightarrow{F} & U \sqcup Y \\ \downarrow p \times \text{id}_I & & \downarrow p \\ U_f \times I & \xrightarrow{G} & U_f \end{array} \quad (4.4)$$

Dado que  $F$  y  $p$  son continuas,  $G \times (p \times \text{id}_I) = p \circ F$  es continua, por lo que  $G$  es continua. De aquí se sigue que  $Y$  es un retracto por deformación fuerte de  $U_f$ .  $\square$

**Proposition 4.1.5** *Dada una aplicación continua  $f: S^{n-1} \rightarrow Y$ ,*

$$H_p(Y_f, Y) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

*Demostración.* Consideremos la composición

$$h: D^n \hookrightarrow D^n \sqcup Y \xrightarrow{p} Y_f$$

El espacio  $D^n \setminus S^{n-1}$  es homeomorfo a  $Y_f \setminus Y$ , puesto que  $Y_f = Y \cup_f D^n$ , de forma que  $h$  induce un homeomorfismo relativo entre los pares  $(D^n, S^{n-1})$  e  $(Y_f, Y)$ .

La esfera  $S^{n-1}$  es un retracto por deformación fuerte del entorno compacto  $U = \{x \in D^n : \|x\| \geq 1/2\}$ , y sabemos por el 4.1.4 que  $Y$  es un retracto por deformación fuerte de algún entorno  $U_f$  compacto de  $Y$  en  $Y_f$ . Por el teorema del homeomorfismo relativo (3.5.1), se tiene que

$$h_*: H_*(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_*(Y_f, Y)$$

es un isomorfismo.

Se tiene entonces que

$$H_*(Y_f, Y) \cong H_*(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_*(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$\square$

**Proposition 4.1.6** *Sea  $Y$  un espacio topológico y  $f: S^{n-1} \rightarrow Y$  una aplicación continua. Si  $f_*: \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(Y)$ ,*

1.  $H_p(Y_f) \cong H_p(Y)$  para todo  $p$  distinto a  $n$  y  $n - 1$ ;

2.  $H_{n-1}(Y_f) \cong H_{n-1}(Y)/\text{Im } f_*$ ;  
 3. la sucesión

$$0 \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(Y_f) \longrightarrow \ker f_* \longrightarrow 0 \quad (4.5)$$

es exacta.

*Demostración.* Consideremos la sucesión exacta larga asociada al par de espacios  $(Y_f, Y)$ :

$$\dots \longrightarrow H_{p+1}(Y_f, Y) \longrightarrow H_p(Y) \xrightarrow{\beta} H_p(Y_f) \longrightarrow H_p(Y_f, Y) \longrightarrow \dots$$

Como vimos en el 4.1.2,

$$H_p(Y_f, Y) \cong \tilde{H}_p(S^n) \cong \tilde{H}_{p-1}(S^{n-1})$$

Para  $p \neq n, n-1$ ,  $\tilde{H}_p(S^n) = 0$ , por lo que  $\ker \beta = 0$  y  $\text{Im } \beta = H_p(Y_f)$ . Se sigue entonces la primera afirmación:

$$H_p(Y_f) \cong H_p(Y)$$

Para  $p = n$  y  $p = n-1$ , se tiene la sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{H}_n(S^{n-1}) &\longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(Y_f) \xrightarrow{\beta} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} \\ &\xrightarrow{f_*} H_{n-1}(Y) \xrightarrow{\alpha} H_{n-1}(Y_f) \longrightarrow \tilde{H}_{n-2}(S^{n-1}) = 0 \end{aligned}$$

donde  $\text{Im } \beta = \ker f_*$ ,  $\text{Im } f_* = \ker \alpha$  y  $\text{Im } \alpha = H_{n-1}(Y_f)$  por exactitud. Aplicando el primer teorema de isomorfía, se tiene la segunda afirmación:

$$H_{n-1}(Y_f) = \text{Im } \alpha \cong \frac{H_{n-1}(Y)}{\ker \alpha} = \frac{H_{n-1}(Y)}{\text{Im } f_*}$$

Ahora bien: como  $\text{Im } \beta = \ker f_*$ , la sucesión

$$0 \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(Y_f) \xrightarrow{\beta} \ker f_* \longrightarrow 0$$

es exacta, que es la tercera afirmación.  $\square$

## 4.2. Espacios CW-complejos

Sean  $D_1^n, \dots, D_p^n$  una familia de  $n$ -células disjuntas con respectivas fronteras  $S_1^{n-1}, \dots, S_p^{n-1}$ . Dado un  $1 \leq i \leq p$ , considérese la aplicación continua

$$f_i: S_i^{n-1} \longrightarrow Y$$

siendo  $Y$  un espacio topológico arbitrario. Si  $\mathcal{D}^n = D_1^n \sqcup \dots \sqcup D_p^n$  y  $S^{n-1} = \partial \mathcal{D}^n = S_1^{n-1} \sqcup \dots \sqcup S_p^{n-1}$ , definimos sobre  $\mathcal{D}^n \sqcup Y$  la siguiente relación de equivalencia:

$$\forall x \in S_i^{n-1} \quad x \sim f_i(x); \quad i = 1, \dots, p$$

Definimos entonces el espacio

$$Y_{f_1, \dots, f_p} = \frac{\mathcal{D}^n \sqcup Y}{\sim}$$

**Proposition 4.2.1** Sea  $(X, Y)$  un par de espacios  $C_2$ . Si existe un homeomorfismo relativo

$$F: (\mathcal{D}^n, S^{n-1}) \longrightarrow (X, Y)$$

que sea una prolongación continua de  $f_1, \dots, f_p$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y_{f_1, \dots, f_p}$ .

**Definition 4.2.1**

1. Un CW-complejo finito de dimensión 0 es una colección finita de puntos  $\{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^t$ .
2. Sea  $Y$  un CW-complejo finito de dimensión  $k \geq 0$ . Un espacio topológico  $C_2$   $X$  es un CW-complejo finito de dimensión  $n$  si existen  $f_i: S^{n-1} \longrightarrow Y, i = 1, \dots, s$ , tales que  $X$  es homeomorfo a  $Y_{f_1, \dots, f_s}$ .

Hemos definido los CW-complejos de dimensión  $n$  como un proceso iterativo que da lugar a una serie de CW-complejos intermedios

$$X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X^n$$

Cada uno de los  $X^k$  se denomina  **$k$ -esqueleto** del CW-complejo. Notar que  $X^n$  es el CW-complejo completo.

**Example 4.2.1** El 4.1.2 describe una construcción de  $S^2$  como CW-complejo de forma que el 1-esqueleto y el 0-esqueleto son el mismo conjunto, porque no adjuntamos ninguna 1-célula a  $X^0$ . Pero un CW-complejo puede admitir muchas estructuras diferentes.

Consideremos la siguiente estructura: sean

$$X^0 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (-1, 0, 0)\}$$

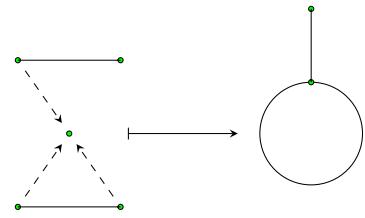
tres puntos del ecuador. Adjuntamos a  $X^0$  tres 1-células,  $D_1^1, D_2^1$  y  $D_3^1$ , de forma que  $S^1 \cong X^1$ .

Finalmente, adjuntamos dos 2-células  $D_1^2$  y  $D_2^2$  a  $X^1$ . Esto sería  $X^2$ , que es homeomorfo a todo  $S^2$ .

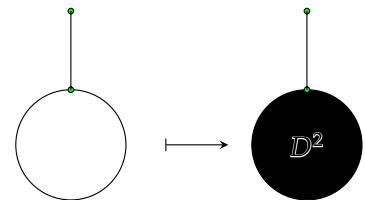
En general, podemos generar una descomposición de  $S^n$  de forma que cada  $k$ -esqueleto sea  $S^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ); no obstante, en ese caso tendríamos que el 0-esqueleto son dos puntos, dado que

$$S^0 = \{x \in D^1 : \|x\| = 1\} = \{x \in [-1, 1] : |x| = 1\} = \{\pm 1\}$$

De esta forma, tenemos que un espacio topológico no induce una descomposición como CW-complejo de forma única. Si comparamos este proceso con el que seguimos en el 4.1.2, tenemos que no tienen el mismo número de células y sus 1-esqueletos no son homeomorfos, de forma que no son *estructuras equivalentes*.



(a) Usando 1-células, podemos construir un complejo de dimensión 1...



(b) ...y después añadir células de orden superior, creando figuras más complejas como una piruleta.

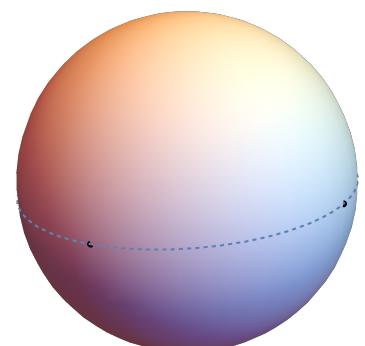


Figura 4.4: Espacio  $S^2$  construido utilizando el 4.2.1.

**Theorem 4.2.2** (Caracterización de CW-complejos finitos) *Un espacio topológico compacto  $X$  es un CW-complejo finito de dimensión  $n$  si y sólo si podemos hallar una sucesión de subespacios*

$$X^0 \subseteq X^1 \subseteq \cdots \subseteq X^n = X$$

*y una partición de subconjuntos*

$$\{D_i^k : k = 0, 1, \dots, n; i = 1, 2, \dots, r_k\}$$

*(llamada descomposición celular)* tales que

1. existe un homeomorfismo relativo

$$h: (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (\overline{D_i^k}, \overline{D_i^k} \setminus D_i^k)$$

*para cada  $i$  y  $k$ ;*

2. dado un  $1 \leq k \leq n$ ,  $\overline{D_i^k} \setminus D_i^k \subseteq X^{k-1}$ .

Hagamos un par de incisos en este teorema.

- Observar que  $\overline{D_i^k} \setminus (\overline{D_i^k} \setminus D_i^k) = D_i^k$ . Aplicando el teorema anterior, se sigue que  $D_i^k$  es homeomorfo a una bola abierta de  $\mathbb{R}^k$ . Esto implica que las  $n$ -células son conexas, compactas y abiertas para todo  $n > 0$ .
- La condición de compactidad viene dada porque la adjunción de espacios compactos es compacto, pero ninguna de las otras condiciones garantizan que  $X$  sea compacto.

**Example 4.2.2** 1. Este teorema proporciona otra forma de ver que  $S^n$  admite una estructura de CW-complejo: para  $n = 1$ , sea  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  la aplicación  $f(t) = (\cos t, \sin t)$ . Tenemos que  $X = S^1$  admite una estructura de CW-complejo tomando

$$\begin{aligned} X^0 &= \{(1, 0)\}; & X^1 &= S^1; \\ D^0 &= \{(1, 0)\}; & D^1 &= f([0, 1]); \end{aligned}$$

Para  $n = 2$ , sea  $g: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación

$$g(u, v) = (\cos(2\pi u) \cos(2\pi v), \cos(2\pi u) \sin(2\pi v), \sin(2\pi u))$$

Entonces,  $Y = S^2$  admite una estructura de CW-complejo tomando

$$\begin{aligned} Y^0 &= \{(1, 0, 0)\}; & D^0 &= \{(1, 0, 0)\}; \\ Y^1 &= S^1 & D_1^2 &= g([0, 1] \times ([0, 3/4] \cup [3/4, 1])); \\ D^1 &= g([0, 1] \times \{0\}); & D_2^2 &= g([0, 1] \times ([1/4, 3/4])); \end{aligned}$$

2. El segmento  $I$  admite una estructura de CW-complejo dada por la descomposición celular  $\{\{0\}, \{1\}, ]0, 1[\}$ . En general, toda línea poligonal formada por una cantidad finita de segmentos admite una estructura trivial de CW-complejo.

**Example 4.2.3** 1. El conjunto  $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  con la topología inducida por la métrica usual de  $\mathbb{R}$  no es un CW-complejo finito, porque no es compacto.

2. El **pendiente hawaiano** es un ejemplo de espacio topológico compacto que no tiene estructura de CW-complejo. Si  $C(\alpha, \beta)$  denota la circunferencia de centro  $\alpha \in \mathbb{R}^2$  y radio  $\beta > 0$ , se define el pendiente hawaiano como el espacio topológico

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} C(\alpha_n, \beta_n) \quad \left( \alpha_n = \left( \frac{1}{n}, 0 \right), \quad \beta_n = \frac{1}{n} \right)$$

Intuitivamente, esto se debe a que tiene una cantidad infinita de anillos, y cada uno tendría que ser una 1-célula independiente.

**Proposition 4.2.3** *El producto de CW-complejos finitos es un CW-complejo finito.*

*Demostración.* Sean  $\mathcal{C} = \{D_i^k : k = 0, 1, \dots, n; i = 1, 2, \dots, r_k\}$  y  $\mathcal{D} = \{\Delta_j^\ell : j = 0, 1, \dots, m; \ell = 1, 2, \dots, r_j\}$  respectivas descomposiciones celulares de  $X$  e  $Y$ . Queremos ver que el conjunto

$$\mathcal{E} = \{U \times V : U \in \mathcal{C}, V \in \mathcal{D}\}$$

forma una descomposición celular de  $X \times Y$ .

Claramente, los elementos de  $\mathcal{E}$  son disjuntos dos a dos por construcción. Veamos que forman un recubrimiento de  $X \times Y$ :

$$X \times Y = \left( \bigcup_{U \in \mathcal{C}} U \right) \times \left( \bigcup_{V \in \mathcal{D}} V \right) = \bigcup_{U \in \mathcal{C}} \bigcup_{V \in \mathcal{D}} U \times V$$

Para demostrar este resultado, aplicaremos el 4.2.2: dados  $i, j, k, \ell$ ,

$$\begin{aligned} U &= (\overline{D_i^k} \times \Delta_j^\ell) \setminus (D_i^k \times \hat{D}_j^\ell) = (\overline{D_i^k} \times \overline{\Delta_j^\ell}) \setminus (D_i^k \times \hat{D}_j^\ell) = \\ &= [(\overline{D_i^k} \setminus D_i^k) \times \overline{\Delta_j^\ell}] \cup [\overline{D_i^k} \times (\overline{\Delta_j^\ell} \setminus \Delta_j^\ell)] \end{aligned}$$

Sabemos por hipótesis que  $(\overline{D_i^k} \setminus D_i^k) \subseteq X^{k-1}$  y  $\overline{\Delta_j^\ell} \setminus \Delta_j^\ell \subseteq Y^{\ell-1}$ , por lo que  $U \subseteq (X \times Y)^{k+\ell-1}$ . Esto prueba la primera condición.

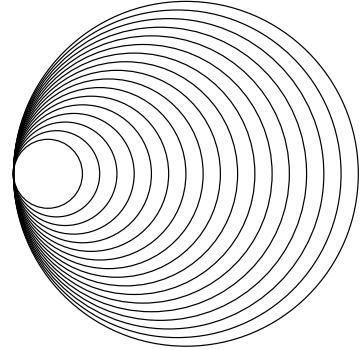
Pasemos a la segunda: sean  $U \in \mathcal{C}$  y  $V \in \mathcal{D}$ . Si

$$f: (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (\overline{U}, \overline{U} \setminus U); \quad g: (D^\ell, S^{\ell-1}) \rightarrow (\overline{V}, \overline{V} \setminus V)$$

son homeomorfismos relativos, se tiene que

$$f \times g: (D^{k+\ell}, S^{k+\ell-1}) \rightarrow (\overline{V} \times \overline{U}, (\overline{V} \times \overline{U}) \setminus (U \times V))$$

es un homeomorfismo relativo.  $\square$



**Figura 4.5:** Primeras 16 iteraciones del pendiente hawaiano.

**Example 4.2.4** 1. El cilindro con bordes se define como  $C = S^1 \times [0, 1]$ . Podemos asignar una estructura de CW-complejo a  $C$  usando una estructura prefijada de  $S^1$  y otra de  $[0, 1]$ :

$$[0, 1] \begin{cases} \text{0-células: } p = \{0\} \\ \text{1-células: } q = \{1\} \\ \text{1-células: } \alpha = ]0, 1[ \end{cases} \quad S^1 \begin{cases} \text{0-células: } r = \{(1, 0)\} \\ \text{1-células: } \beta = S^1 - r \end{cases}$$

Estas estructuras inducen la siguiente descomposición celular sobre el cilindro:

$$C \begin{cases} \text{0-células: } p \times r, q \times r \\ \text{1-células: } \alpha \times r, p \times \beta, q \times \beta \\ \text{2-células: } \alpha \times \beta \end{cases}$$

2. El toro se puede expresar como  $S^1 \times S^1$ , por lo que admite una estructura de CW-complejo finito.

Consideremos la siguiente descomposición celular de  $S^1$ :

$$S^1 \begin{cases} \text{0-células: } p = \{(1, 0)\} \\ \text{1-células: } \alpha = S^1 - p \end{cases} \quad S^1 \begin{cases} \text{0-células: } r = \{(1, 0)\} \\ \text{1-células: } \beta = S^1 - r \end{cases}$$

Estas estructuras inducen la siguiente descomposición celular sobre el toro:

$$S^1 \times S^1 \begin{cases} \text{0-células: } p \times r \\ \text{1-células: } \alpha \times r, p \times \beta \\ \text{2-células: } \alpha \times \beta \end{cases}$$

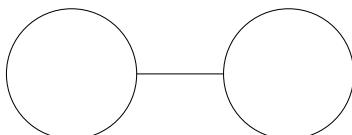


Figura 4.6: 1-esqueleto del cilindro. Observar que se puede retrajar en una figura ocho.

#### 4.2.1. Subcomplejos

Sea  $X$  un CW-complejo finito y  $\mathcal{C}$  una descomposición celular de  $X$ . Decimos que un subespacio  $A \subseteq X$  es un **subcomplejo** de  $X$  si, dado  $D \in \mathcal{C}, D \cap A \neq \emptyset$  implica que  $\overline{D} \subseteq A$ . Esta condición se puede expresar como que  $A$  absorbe a todas las células con las que entra en contacto.

Todo subcomplejo de un cierto complejo  $X$  conforma un subespacio cerrado. Además, aplicando el 4.2.2, todo subcomplejo es un complejo en sí mismo. En particular, todos los  $k$ -esqueletos de  $X$  son subcomplejos.

**Proposition 4.2.4** Si  $A$  es un subcomplejo de un CW-complejo finito  $X$ ,  $A$  es un retracto por deformación fuerte de algún entorno compacto de  $A$  en  $X$ .

*Demostración.* Sea  $N$  el número de células que componen el espacio  $X \setminus A$ . Si  $N = 0$ ,  $X = A$ , por lo que  $A$  es un retracto por deformación fuerte de  $X$  de forma trivial y se sigue la tesis por compacidad de  $X$ .

Si  $N = 1$ , existe una aplicación  $f: S^{n-1} \rightarrow A$  continua tal que  $X = A \cup_f D^n$ . En tal caso, podemos limitarnos a aplicar el 4.1.4.

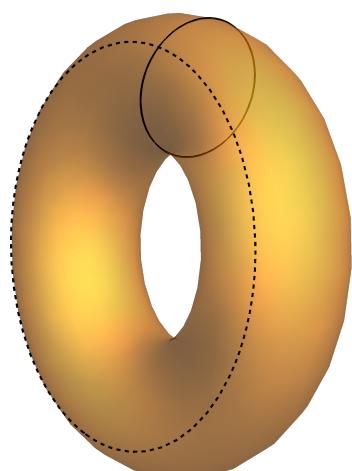


Figura 4.7: 1-esqueleto del toro.

Supongamos que el resultado es cierto para cualquier par de CW-complejos finitos  $(Y, B)$  tales que  $Y \setminus B$  posee a lo sumo  $N - 1$  células, y sea  $(X, A)$  un par de CW-complejos tales que  $X \setminus A$  tiene exactamente  $N$  células. Si  $D_i^m$  es una célula de  $X \setminus A$  de dimensión máxima, se define el subespacio  $Y = X \setminus D_i^m$ .

Queremos ver que  $Y$  es un subcomplejo de  $X$ . Como  $D_i^m$  es una célula de dimensión máxima, todas las células de  $X \setminus A$  tienen dimensión  $m$  o menos; de esta forma, toda célula de  $X$  con dimensión mayor que  $m$  forma parte del subcomplejo  $A$ . En consecuencia, si  $D_j^k$  es una célula de  $Y$ , se tiene que  $D_j^k \subset A$  ó  $k \leq m$ .

Si  $D_j^k \subset A$ ,  $\overline{D_j^k} \subseteq A$  por ser  $A$  un subcomplejo de  $X$ , de forma que

$$D_i^m \cap \partial D_j^k \subseteq D_i^m \cap A = \emptyset$$

En cambio, si  $k \leq m$ , se tiene por 4.2.2 que

$$\partial D_j^k = \overline{D_j^k} \setminus D_j^k \subseteq X^{k-1}$$

Dado que  $k - 1 < m$ , se cumple una vez más que  $D_i^m \cap \partial D_j^k = \emptyset$ . Se sigue que  $Y$  es subcomplejo de  $X$ .

Dado que  $A$  es un subcomplejo de  $X$  y  $D_i^m \subset X \setminus A$ ,  $A \cap D_i^m = \emptyset$ , por lo que es un subcomplejo de  $Y$ . Como  $Y$  tiene una célula menos que  $X$ , el par  $(Y, A)$  verifica la hipótesis de inducción, por lo que existe un entorno  $U_1$  compacto de  $A$  en  $X$  tal que  $A$  es un retracto por deformación fuerte de  $U_1$ .

Sea  $f: S^{m-1} \rightarrow Y$  una aplicación continua tal que  $X = Y \cup_f D^m$ . Podemos hallar un homeomorfismo relativo

$$\phi: (D^m, S^{m-1}) \rightarrow (\overline{D_i^m}, \overline{D_i^m} \setminus D_i^m)$$

que extienda a  $f$  de forma continua. Como  $U_1$  es compacto en  $Y$  y  $\phi$  es un homeomorfismo,  $\phi^{-1}(U_1)$  es un compacto de  $S^{m-1} \subset D^m$ . Si

$$\begin{aligned} r: D^m \setminus \{0\} &\longrightarrow S^{m-1} \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|} \end{aligned} \tag{4.6}$$

es la retracción radial, el conjunto

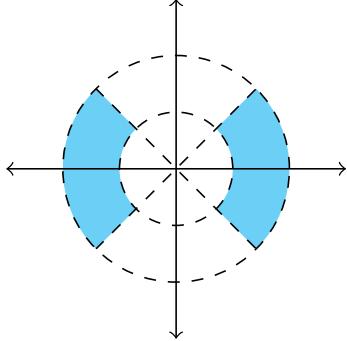
$$V = \{\phi(x) : x \in D^m, \|x\| \geq 1/2, r(x) \in \phi^{-1}(U_1)\}$$

también es compacto.

Veamos cómo se construye el conjunto  $V$ : las células se adhieren al CW-complejo por el borde, por lo que podemos pensar que la aplicación  $\phi$  abomba  $D^m$  para darle forma de hemisferio y pegarlo a  $Y$  por la línea del ecuador. Se tiene entonces que  $X = Y \cup \phi(D^m)$  (ver Figura ??).

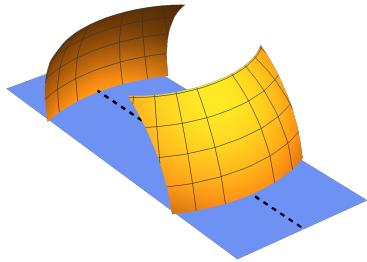
Dado que  $Y \cap \phi(D^m) = f(S^{m-1})$ ,  $\phi^{-1}(U_1) = f^{-1}(U_1)$  está contenido en  $S^{m-1}$ . En particular,  $x$  no tiene por qué estar en  $\phi^{-1}(U_1)$ , por lo que lo retraemos mediante una aplicación adicional. Finalmente, elegimos sólo los puntos que están entre las esferas concéntricas de radios  $1/2$  y  $1$  (ver Figura 4.8a).

El conjunto  $U_1 \cap V$  es un retracto por deformación de  $V$ , y  $A$  es un retracto por deformación de  $U_1$ , de forma que  $A$  será un retracto por deformación de  $U_1 \cup V$  (ver Figura 4.8c).



(a) El conjunto  $\phi^{-1}(V)$  corresponde a la región coloreada.  $\phi^{-1}(U_1)$  son los puntos de la región coloreada que recaen sobre la esfera de radio 1.

(b) Representación de los conjuntos  $A$ ,  $U_1$  y la bola  $\phi(D^m)$  en  $Y$ .



(c) Podemos retrajar  $V$  (superficies arqueadas) en  $U_1$  (banda plana) y  $U_1$  en  $A$  (línea discontinua).

Figura 4.8: Pasos ilustrados de la demostración.

Ya sabemos que  $U_1 \cup V$  se puede retrajar en  $A$ . Dado que es unión de compactos, es trivialmente compacto, de forma que habremos terminado la demostración si podemos probar que  $U_1 \cup V$  es entorno en  $X$  de  $A$ .

Sea  $y \in \text{Int}_Y(U_1)$ . Si  $y \notin V$ ,  $y \in \text{Int}_X(U_1)$  (representado como una banda en la ilustración ??), por lo que también estará en  $\text{Int}_X(U_1 \cup V)$ .

Si  $y \in V$ , se tiene que  $y \in \overline{D_i^m} \setminus D_i^m = \phi(D^m \setminus \partial D^m) = f(S^{m-1})$ . Por otro lado,  $\phi^{-1}(\text{Int}_Y(U_1))$  es un abierto de  $S^{m-1}$  que contiene a  $\phi^{-1}(y)$  (por cómo se define  $V$ ), de forma que

$$\phi^{-1}(y) \in \text{Int}_{S^{m-1}} \phi^{-1}(V) \implies y \in \text{Int}_{\overline{D_i^m}}(V)$$

Dado que  $D_i^m$  es una célula de  $X$ , se sigue que  $y \in \text{Int}_X(U_1 \cup V)$ .

Como  $U_1$  es un entorno de  $A$  en  $Y$ ,

$$A \subseteq \text{Int}_Y(U_1) \subseteq \text{Int}_X(U_1 \cup V)$$

por lo que  $U_1 \cup V$  es entorno de  $A$  en  $X$ . Pero eso es lo que nos quedaba por demostrar.  $\square$

### 4.3. Grupos de homología celular

**Corollary 4.3.1** Si  $X$  es un CW-complejo finito y  $X^k$  es el  $k$ -esqueleto de  $X$ ,

$$H_j(X^k, X^{k-1}) = 0 \quad \forall j \neq k$$

Además,  $H_k(X^k, X^{k-1})$  es un grupo abeliano libre con un generador por cada  $k$ -célula de  $X$ , conocido como el **grupo de homología celular** de orden  $k$ .

*Demostración.* Sabemos que  $X^{k-1}$  es un subcomplejo de  $X^k$ . Por la proposición anterior, existe un entorno compacto  $U \subseteq X^k$  de  $X^{k-1}$  tal que  $X^{k-1}$  es un retracto por deformación fuerte de  $U$ .

Como  $X$  es un CW-complejo finito, podemos hallar un homeomorfismo relativo

$$\phi : (\mathcal{D}^k, S^{k-1}) \longrightarrow (X^k, X^{k-1})$$

utilizando los homeomorfismos  $h$  que nos proporciona el teorema de caracterización de CW-complejos finitos. Aplicando el teorema del homeomorfismo relativo, se sigue que

$$\begin{aligned} H_*(X^k, X^{k-1}) &\cong H_*(\mathcal{D}^k, S^{k-1}) \cong \sum_{i=1}^r H_*(D_i^k, S_i^{k-1}) \\ &\cong \sum_{i=1}^r \tilde{H}_*(S^k) \cong \tilde{H}_*(S^k)^r \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^r & \text{si } p = k \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \end{aligned}$$

$\square$

**Example 4.3.1** Vamos a calcular la homología de la rosa de  $p$  pétalos utilizando los grupos de homología celular. Por la proposición 4.1.6,

$$H_j(B_p) \cong H_j(\{\star\}) = 0$$

para todo  $j > 1$ . Para  $j = 1$ ,

$$H_1(B_p) \cong \tilde{H}_1(B_p) \cong H_1(B_p, \{\star\})$$

Dado que  $\{\star\}$  es el 0-esqueleto de  $B_p$ , que tiene  $p$  1-células, se tiene que dicho grupo es isomorfo a  $\mathbb{Z}^p$ .

## 4.4. Homología de la $n$ -rosa

Para  $j = 1, \dots, p$ , sea  $f_j: \partial D^n \rightarrow \{\star\}$  la aplicación constante. Se define la  $n$ -rosa de  $p$  pétalos como la adjunción

$$X = B_p^n = \{\star\}_{f_1, \dots, f_p}$$

Por el corolario 4.3.1, sabemos que  $H_n(X^n, X^{n-1}) \cong \mathbb{Z}^p$  y  $H_m(X^n, X^{n-1}) = 0$  para todo  $m \neq n, 0$ . Sin embargo,  $X^{n-1} = X^0 = \{\star\}$ , por lo que

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^p &\cong H_n(X, X^{n-1}) = \tilde{H}_n(X); \\ 0 &= H_m(X, X^{n-1}) = \tilde{H}_m(X); \quad (m \neq n) \end{aligned}$$

### Theorem 4.4.1

$$\tilde{H}_m(B_p^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^p & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

Al igual que pasaba con la 1-rosa, cada pétalo que adjuntamos aporta un nuevo generador, sólo que en este caso es la clase de un  $n$ -símplice singular.

### 4.4.1. Rosa mixta

¿Qué pasaría si mezcláramos pétalos de diferentes dimensiones? Intuitivamente, cada pétalo de dimensión  $k$  debería añadir un generador de orden  $k$ .

Sea  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ . Si  $f: \{\star\} \rightarrow \{\star\}$  es la identidad, definimos

$$B_\alpha := \{\star\} \cup_f B_{\alpha_1}^1 \cup_f B_{\alpha_2}^2 \cup_f \cdots \cup_f B_{\alpha_n}^n$$

siendo  $B_0^k = \{\star\}$ .

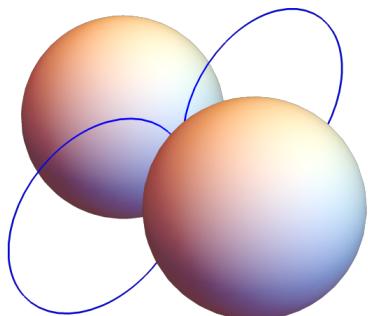


Figura 4.9: Ejemplo de rosa mixta  $B_{(2,2)}$ .

**Theorem 4.4.2<sup>a</sup>** Dado  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,

$$H_m(B_\alpha) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0 \\ \mathbb{Z}^{\alpha_i} & \text{si } m = i \\ 0 & \text{si } m > n \end{cases}$$

<sup>a</sup> Este resultado está basado en una conversación que tuve con mi directora del TFG, pero no pensé en añadirlo en su momento.

#### Idea de la demostración

- Probamos que la tesis se cumple cuando la rosa tiene  $k_1$  pétalos de dimensión 1 (ya lo hemos hecho).
- Suponemos que la tesis se cumple cuando la rosa tiene  $k_1$  pétalos de dimensión 1,  $k_2$  pétalos de dimensión 2, y así hasta dimensión  $n - 1$ .
- Probamos que, como consecuencia, la tesis se cumple cuando añadimos  $k_n$  pétalos de dimensión  $n$ .

Esta prueba puede ser conceptualmente engorrosa, así que es recomendable tratar de hacer primero ejemplos para  $n = 2, 3, 4$ .

*Demostración.* Si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , procedemos por inducción sobre  $n$ . Si  $n = 1$ ,  $B_\alpha$  es una 1-rosa de  $\alpha_1$  pétalos, y la tesis se cumple por 4.4.1.

Sea  $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ , y  $X = B_{\alpha'}$ . Supongamos que la tesis se cumple para  $X$  y sean  $f_i: S^{n-1} \rightarrow \{\star\}$  aplicaciones constantes. Tenemos entonces que

$$B_\alpha = X_{f_1 \dots f_{\alpha_n}}$$

Por la 4.1.6, si  $(f_i)_*: \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(\{\star\}) = \{0\}$ , se cumple lo siguiente:

1. Para todo  $p \neq n, n - 1$ ,

$$H_p(X_{f_1 \dots f_{\alpha_n}}) = H_p(X)$$

Por hipótesis de inducción,  $H_p(X) \cong \mathbb{Z}^{\alpha_p}$  cuando  $p < n - 1$  y  $\{0\}$  cuando  $p > n - 1$ .

2. Como  $(f_i)_*$  va a parar a  $\{0\}$  para todo  $i$ ,  $\text{Im}(f_i)_* = \{0\}$  y

$$\begin{aligned} H_{n-1}(X_{f_1 \dots f_{\alpha_n}}) &\cong \frac{H_{n-1}(X_{f_1 \dots f_{\alpha_{n-1}}})}{\text{Im}(f_{\alpha_n})_*} \cong H_{n-1}(X_{f_1 \dots f_{\alpha_{n-1}}}) \cong \\ &\cong \frac{H_{n-1}(X_{f_1 \dots f_{\alpha_{n-2}}})}{\text{Im}(f_{\alpha_{n-1}})_*} \cong H_{n-1}(X_{f_1 \dots f_{\alpha_{n-2}}}) \cong \\ &\cong \dots \cong H_{n-1}(X) \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción una vez más, ésto es  $\mathbb{Z}^{\alpha_{n-1}}$ .

El tercer ítem requiere que hagamos inducción sobre el número de pétalos de dimensión  $n^*$ . Dado un espacio  $Y$  arbitrario, sabemos por la 4.1.6 que la secuencia

$$0 \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(Y_f) \longrightarrow \ker f_* \longrightarrow 0$$

es exacta. En particular,  $\ker f_* = \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$  por el , por lo que

$$\mathbb{Z} \cong \frac{H_n(Y_f)}{H_n(Y)} \tag{4.7}$$

En este caso,  $H_n(X) = \{0\}$  por hipótesis de inducción, por lo que  $H_n(X_{f_1}) \cong \mathbb{Z}$ .

<sup>\*</sup> Al principio, pensé que era necesario tratar este resultado como una *doble inducción*, así que decidí leer sobre el tema. Si bien he conseguido reducirlo a una inducción aislada dentro de otra, creo que es un tema interesante, así que he decidido escribir un pequeño apéndice sobre el tema.

Supongamos que  $H_n(X_{f_1 \dots f_{\alpha_n-1}}) \cong \mathbb{Z}^{\alpha_n-1}$ . Usando (4.7), concluimos que

$$H_n(X_{f_1 \dots f_{\alpha_n}}) \cong H_n(X_{f_1 \dots f_{\alpha_n-1}}) \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{\alpha_n}$$

concluyendo así ambas inducciones. Se sigue la tesis.  $\square$

# 5

# Homología de las superficies compactas

Según el teorema de clasificación de superficies compactas, toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a  $S^2$ , a la suma conexa de  $n$  toros o a la suma conexa de  $n$  planos proyectivos. Entre otras cosas, eso hace que las componentes conexas de una superficie sean arcoconexas, dado que la arcoconexión es una propiedad topológica.

Si llamamos  $S_1, \dots, S_n$  a las componentes conexas de  $S$ , se tiene que

$$H_*(S) \cong \sum_{i=1}^n H_*(S_i)$$

por lo que podemos suponer a efectos de homología que  $S$  es arcoconexa.

Por limitaciones de tiempo, nos restringiremos al caso de las superficies orientables, que es más breve.

## 5.0.1. Homología del $n$ -toro

El  $n$ -toro (que denotaremos como  $T_n$ ) se define como la suma conexa de  $n$  toros. Podemos hacer la suma conexa de los representantes llanos, en cuyo caso obtenemos una superficie como la que se puede ver en la Figura ??.

Si eliminamos el interior de  $T_n$ , la figura resultante será  $B_{2n}^1$ . Si  $\gamma(t) = e^{2\pi i \theta}$ , consideraremos una aplicación  $f: S^1 \rightarrow B_{2n}^1$  tal que

$$c_j = (f \circ \gamma) \left( \frac{j-1}{2n}, \frac{j}{2n} \right)$$

es igual a cada uno de los pétalos de  $B_{2n}^1$ , con  $j = 1, \dots, 2n$ . Tenemos entonces que  $T_n = (B_{2n})_f$  (ver Figura ??).

Vamos a estudiar la aplicación  $f_*: \tilde{H}_1(S^1) \rightarrow H_1(B_{2n}^1)$ . El grupo  $\tilde{H}_1(S^1)$  tiene un único generador,  $[c]$ . Como representante  $c$ , podemos elegir cualquier camino que dé una vuelta completa a  $S^1$  (si no da una vuelta completa, lo podemos contraer en un punto, por lo que está en la clase del 0). En particular, podemos elegir

$$c = \phi_1 + \phi_2 - (\phi_3 + \phi_4) + \dots + \phi_{2n-3} + \phi_{2n-2} - (\phi_{2n-1} + \phi_{2n})$$

donde  $\phi_j(\sigma_1) = c_j$ . Esta elección verifica que  $f([c]) = 0$ . Por tanto,

$$\text{Im } f_* = \{0\}; \quad \ker f_* = \tilde{H}_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

Por la proposición ??,  $H_p(T_n) \cong H_p(B_{2n}^1) = 0$  para todo  $p > 2$  y  $H_1(T_n) \cong H_1(B_{2n}) \cong \mathbb{Z}^{2n}$ . Sólo nos queda calcular el grupo de homología de orden 2:

$$0 \longrightarrow H_2(B_{2n}^1) \longrightarrow H_2(T_n) \longrightarrow \tilde{H}_1(S^1) \longrightarrow 0$$

Dado que  $H_2(B_{2n}^1) = 0$ , se tiene por exactitud que

$$H_2(T_n) \cong \tilde{H}_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

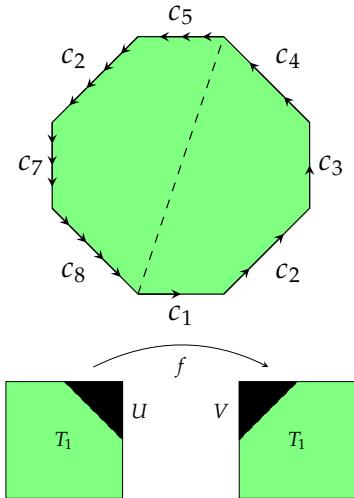
De esta forma,

$$H_n(T_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{2n} & \text{si } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

**Theorem 5.0.1** Sea  $S$  una superficie compacta y orientable con  $\alpha$  componentes conexas. Existe un  $n \geq 0$  tal que

$$H_q(S) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{2n\alpha} & \text{si } q = 1 \\ \mathbb{Z}^\alpha & \text{si } q = 0, 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

El valor  $n$  se denomina **género** de la superficie.



**Figura 5.1:** Bitoro llano. Los lados con el mismo número de cabezas de flecha se identifican entre sí. La línea discontinua separa los dos toros que lo conforman.

## 5.0.2. Espacio proyectivo real

**Definition 5.0.1** Dados  $v, w \in S^n$ , diremos que  $v \sim w$  si  $w = \pm v$ . Definimos el espacio proyectivo real  $\mathbb{R}P^n$  como el cociente  $S^n / \sim$ .

El espacio proyectivo real se puede entender como el espacio topológico cuyos puntos son las rectas de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que pasan por cero. Una forma de entender  $\mathbb{R}P^n$  es como el menor espacio compacto que contiene a  $\mathbb{R}^n$  como subespacio.

### ¿Qué significa que $\mathbb{R}^n$ sea subespacio de $\mathbb{R}P^n$ ?

Sea  $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  la proyección canónica. Dado un punto  $[x] \in \mathbb{R}P^n$ ,  $\pi^{-1}([x]) = \{x, -x\}$ . Decimos entonces que  $S^n$  cubre a  $\mathbb{R}P^n$  dos veces.

Sea  $B^n$  la bola abierta unidad de  $\mathbb{R}^n$ . La aplicación  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow B^n$  dada por

$$f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}$$

es un homeomorfismo. Por otro lado,

$$\begin{aligned} g: B^n &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto \left( x, \sqrt{1 - \|x\|^2} \right) \end{aligned} \tag{5.1}$$

es un homeomorfismo que envía a  $B^n$  en el hemisferio norte de  $S^n$  (menos el ecuador). Si  $E_+^n = g(B^n)$ ,  $\pi|_{E_+^n}$  es un homeomorfismo (observa que  $S^n$  es compacto y  $\mathbb{R}P^n$  es Hausdorff). Si conectamos todas estas aplicaciones, obtenemos

$$h: \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} B^n \xrightarrow{g} E_+^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}P^n \tag{5.2}$$

Una consecuencia de nuestro proceso es que  $h$  es un homeomorfismo sobre su imagen; sin embargo, no es sobreyectiva, por lo que su imagen es un subespacio de  $\mathbb{R}P^n$ . Ya que  $\mathbb{R}^n$  es homeomorfo a  $h(\mathbb{R}^n)$ , decimos por asociación que  $\mathbb{R}^n$  es un subespacio de  $\mathbb{R}P^n$ .

Otra posible interpretación, más en línea con la geometría sintética, es que  $\mathbb{R}P^n$  es una extensión de  $\mathbb{R}^n$  donde todo par de rectas paralelas se cruzan en *el infinito*. Esta interpretación da lugar a la geometría proyectiva, cuyo objetivo es diseñar técnicas geométricas que no dependan de la perspectiva. Los lectores interesados pueden ver una aplicación de geometría proyectiva en [Numberphile].

Podemos identificar  $S^n$  con el subespacio de  $S^{n+1}$  de ecuación  $x_{n+2} = 0$  (el ecuador), en cuyo caso tenemos la inclusión  $i: S^n \hookrightarrow S^{n+1}$ . Esta aplicación induce una inclusión sobre los cocientes,

$$j: \mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$$

En el cuadro anterior, vimos que la aplicación  $\pi \circ g$  lleva a  $B^{n+1}$  en un subespacio de  $\mathbb{R}P^{n+1}$ . Dado que  $D^{n+1} = \overline{B^{n+1}}$ ,  $\pi \circ g$  induce una aplicación sobreyectiva  $G: D^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$ , que a su vez da lugar a

$$G \cup j: D^{n+1} \cup \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$$

Dado un  $p \in \mathbb{R}P^{n+1}$ ,  $G^{-1}(p)$  puede ser un único punto de  $D^{n+1} \setminus S^n$  o un par  $\{x, -x\}$  en  $S^n$ . Usando el 4.1.3, concluimos que  $\mathbb{R}P^{n+1}$  es homeomorfo al espacio de adjunción  $\mathbb{R}P_\pi^n$ .

Para  $n = 1$ ,  $\mathbb{R}P^1$  es homeomorfo a  $S^1$ , por lo que ambos espacios tienen el mismo tipo de homología. Para  $n = 2$ , la proyección canónica  $\pi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$  induce una aplicación en homología  $\pi_*: \tilde{H}_1(S^1) \rightarrow H_1(\mathbb{R}P^1)$ .

Sean  $\alpha, \beta: I \rightarrow S^1$  las aplicaciones

$$\alpha(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t); \quad \beta(t) = \alpha(t + 1);$$

Podemos identificar  $\alpha$  y  $\beta$  con 1-símplices singulares, en cuyo caso  $[\alpha + \beta]$  es un generador de  $\tilde{H}_1(S^1)$ . Usando propiedades de trigonometría elemental, observamos que  $\pi \circ \alpha = \pi \circ \beta$ , por lo que

$$\pi_*([\alpha + \beta]) = 2[\alpha]$$

y  $\text{Im } \pi_* \cong 2\mathbb{Z}$ . Usando que  $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \times 2\mathbb{Z}$ ,

$$2\mathbb{Z} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\ker \pi_*} \cong \frac{2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2}{\ker \pi_*}$$

luego  $\ker \pi_* \cong \mathbb{Z}_2$ .

Usando la 4.1.6, vemos que  $H_p(\mathbb{R}P^2) = 0$  para  $p > 2$  y

$$H_1(\mathbb{R}P^2) \cong \frac{H_1(S^1)}{\text{Im } \pi_*} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2$$

Para  $n = 2$ , usaremos la exactitud del diagrama

$$0 \longrightarrow H_2(S^1) \longrightarrow H_2(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow \ker \pi_* \longrightarrow 0 \quad (5.3)$$

que es equivalente a