圏論の味噌
— Category Theory 試訳版—

Steve Awodey・著
石井 大海・訳

2013 年 4 月 21 日

第二版序文

この『圏論の味噌』第二版は第一版に比べて次の二点で異なる。まず第一に、膨大な量の訂正と改訂が行われた。誤字修正や解説や証明の詳細の見直し、新たな図式の追加、そしてモノイダル圏についての新たな章の追加などがそれに当る。第二に、講義の教科書や自習用として便利なように新たに多くの演習問題を追加した。同じ目的で、幾つかの問題に関して解答を記載した。これらの解答に関しては、Spencer Breiner と Jason Reed に多大な感謝を捧げたい。

Steve Awodey

ピッツバーグ

2009 年 9 月

序文

圏論の教科書としては Mac Lane『圏論の基礎』が既にあるのに、なぜ今になって新たな教科書を書くのか？簡潔に云って、それは Mac Lane の本は働いている (そして意欲のある) 数学者向けの本だからである。30 年の年月を経て、圏論が多様な学科やカリキュラムに広まった今必要とされているのは、そうでない、万人向けの教科書である。

この本は私がここ十年おこなってきたカーネギー・メロン大学での圏論の講義から派生したものだ。その講義は計算機科学、数学、論理学を学ぶ学部生・院生を対象とした講義だった。

(未完。)

目次

第 1 章

圏

1.1　導入

圏論とは何か？まず例えるなら，圏論は（抽象的な）**函数の代数**を調べる数学的な学問である，ということが出来るだろう．群論が集合の順列の仕組みや幾何学の対称性の概念を抽象化したものであるのと同様に，圏論は幾つかの対象の間の函数の仕組みをかたどったものだ．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

圏論では，函数合成 $g \circ f$ を函数 g と f の「積」 の一種と見て，函数の集まりが成す「(抽象的な) 代数たち」を考えてゆく．圏とは単に，対象 $A, B, C, \ldots$ と射 $f : A \to B, g : B \to C, \ldots$ からなる代数的構造で，射の合成について閉じていて更に幾つかの性質を満たすものである．

圏論は抽象代数学の一分野であり，Felix Klein の**エルランゲン・プログラム**の伝統の下で発明された．エルランゲン・プログラムとは，異なる数学的構造を「適切な変換」の観点から捉えていこうという数学的な方法論である．圏論の一般的な概念は，ある種の「構造を保つ変換」とそのような変換を許す構造の特徴付けを与える．

圏論の発展は，大まかに次のような経緯を辿ってきた．

1945 年　Eilenberg and Mac Lane, “General theory of natural equivalence ” で圏の理論が初めて定式化される

1940 年代後半　主に代数的トポロジー (特にホモロジー) や抽象代数の分野で応用が見られる

1950 年代　A. Grothendieck らが代数幾何で圏論を用いて大きな成功を収める．

1960 年代　F.W. Lawvere らが圏を論理学に応用しはじめ，幾つかの深く驚くべき関連性を発見する．

1970 年代　既に計算機科学，言語学，認知科学，哲学など様々な分野への応用が現れている．

このように，圏論は実に多岐にわたる応用範囲を誇っている．実際，集合論のように数学の汎用的な言語としても使えるということが明らかにされている．このような幅広い応用分野のため，圏論によって，例えば論理学と幾何学などの異なる分野間の関連性が明らかになる，といったことがよく起こる．例えば，重要な概念である**随伴函手** (adjoint functor) の概念は，論理学においては存在量化子に対応し，位相幾何学では連続関数に沿った像の操作に対応している．圏論的な視点に立てば，実はこれらは本質的に同じ操作であるということが明らかになる．

随伴函手の概念は，読者がこの本を離れて他のより発展的な本で学ぶべき主な事項のひとつだ．随伴の概念は，厳密に圏論的な概念でありながら後に第一級の道具であることが明らかにされた．随伴は連続関数に比肩しうる概念である．

実際，圏論の発明者のひとりによれば，位相空間が連続函数についての洞察の為に発明されたように，圏は函手を定義するために発明された．函手の概念は自然変換 (natural transformation) を定義するために現れた，と話は続く．さらに続けて，自然変換は随伴を定義する為のものであるといったほうが良いかもしれない：

圏
函手
自然変換
随伴

これは実際，この本の良い要約になっている．

本題に入る前に，何故圏論がそれほどまでに幅広い応用範囲を誇っているのかについて説明させて貰いたい．さて，圏論とは函数の抽象的な理論であることは既に述べた．そうなれば，答えは簡単だ．

いたるところ函数あり!

そして函数あるところ圏がある．本当のところ，圏論は「抽象函数論」とか，或いは「アーチェリー」といったほうがもっと良いのかもしれない[*1]．

1.2　集合の函数

まず，集合の間の写像について見ていく．ここでは集合とは何かとか写像とは何かとかの説明はしないで，そういった概念を扱えるだけ知識を仮定する．それらは実際圏論を用いて定義することも出来るのだが，それはここでの目的ではない．

集合 A から B への写像 f は次のように書く：

$$f : A \to B$$

陽にいえば，これは A の任意の元に対して f の値が定義されており，その結果は全て B に属す，ということである．集合論の言葉を使えば，

$$\mathrm{range}(f) \subseteq B$$

[*1] 訳注：圏論では射 (arrow)=矢を沢山扱うから，という洒落であろう

ということである．

　更に，写像 $g : B \to C$ があったとき，

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

合成写像 $g \circ f : A \to C$ は次で与えられる：

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad a \in A \tag{1.1}$$

こうして定義された写像合成の演算「$\circ$」は結合的である．写像 $h : C \to D$ があるとする．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\ & C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

このとき，上図のように $h \circ g$ と $g \circ f$ が定義出来る．特に上図に示された二つの写像 $(h \circ g) \circ f$ と $h \circ (g \circ f)$ を見比べてみよう．定義から，これら二つの写像は常に等しいことがわかる．

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

何故ならば，(1.1) より任意の $a \in A$ に対し，

$$((h \circ g) \circ f)(a) = h(g(f(a))) = (h \circ (g \circ f))(a)$$

が成立するからである．

　ところで，上の議論は，二つの写像が等しいということの定義を与えてもいる．即ち，どんな引数に対しても同じ値を取れば二つの函数は等しいと見做すのである．

　最後に注意しておきたいのは，どんな集合 A についても恒等写像

$$1_A : A \to A$$

があって，次が成立していることである：

$$1_A(a) = a$$

　これらの恒等写像は，合成演算 $\circ$ について代数的な意味で「単位元」として振る舞う．つまり，任意の $f : A \to B$ について，

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

が成立している．

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[dr, "f \circ 1_A"'] & A \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "1_B \circ f"] & \\
& B \arrow[r, "1_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

抽象的な函数の概念として考察していきたいものは，合成写像や恒等写像などこれらででで全てである．なので，これらの物以外はいうなれば「捨象」してしまって，次節の定義を得る．

1.3　圏の定義

定義 1.1. **圏**は次の要素からなる．

- **対象**：$A, B, C, \ldots$
- **射**：$f, g, h, \ldots$
- 任意の射 f に対して，**ドメイン**（域，始域；*domain*），**コドメイン**（余域，終域；*codomain*）と呼ばれる対象，

  $$\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f)$$

  が与えられている．特に $A = \mathrm{dom}(f), B = \mathrm{cod}(f)$ のとき，

  $$f : A \to B$$

  と書く．
- 射 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ があるとき，即ち，

  $$\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$$

  なる二つの射があるとき，f と g の**合成射**

  $$g \circ f : A \to C$$

  が与えられている．
- 任意の対象 A について，**恒等射**

  $$1_A : A \to A$$

  が存在する．

これらの要素は次の条件を満たさなくてはならない：

- 結合律：任意の $f : A \to B,\ g : B \to C,\ h : C \to D$ について，

  $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- 単位律：任意の $f : A \to B$ について，

  $$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

これらの条件を満たすものは何でも圏であり，すぐに豊富な例を見ていく．強調しておきたいのは，第 1.2 節とは異なり，対象は集合でなくてもよいし，射も写像でなくてよいということである．この意味で，圏は函数，つまり「射」(「モルフィズム」と呼ばれることもある）とその合成演算のなす**抽象**代数である．群論に詳しければ，圏が群のある種の一般化になっている事に気付くかもしれない．

1.4 圏の例

1. 集合と写像からなる圏 **Sets** は既に第 1.2 節で見た．他に全ての有限集合とその間の写像からなる圏
$$\mathbf{Sets}_{\mathrm{fin}}$$
がある．
実際，このように対象となる集合や射となる写像を制限した圏は多くある．例えば，有限集合を対象，単射写像（1 対 1 写像）を射とするものを考えると，単射どうしの合成は再び単射となり，恒等写像は単射なのでこれも圏になる．
では，集合を対象とし，各点の逆像の元が高々二つである写像を射とした場合，これは圏になるだろうか？即ち，任意の $b \in B$ に対して，部分集合
$$f^{-1}(b) \subseteq A$$
が一つではなく高々二つの元を持つような写像 f を射とした場合はどうだろうか？更に，$f^{-1}(b)$ の元の個数が有限個とした場合，無限個とした場合はそれぞれどうだろうか？このように，集合と写像を制限した圏は実に沢山存在する．
2. 数学にでしばしば見られる圏のもうひとつ例は，**構造の入った集合**からなる圏である．つまり，さらに「構造」を持った集合とそれを「保存する」写像からなる圏である．そうした性質はそれぞれ独立に確かめることが出来るものとする．その種の例としては，以下の例がわかりやすいかもしれない：
   - 群と群の準同型
   - ベクトル空間と線型写像
   - グラフとグラフ準同型
   - 実数の集合 $\mathbb{R}$ と連続函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   - 開部分集合 $U \subseteq \mathbb{R}$ とその上で定義された連続函数 $f : U \to V \subseteq \mathbb{R}$
   - 位相空間と連続写像
   - 可微分多様体と滑らかな写像
   - 自然数の集合 $\mathbb{N}$ と任意の再帰函数 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$．または，連続函数の例と同じように，$U \subseteq \mathbb{N}$ で定義された部分再帰函数．
   - 半順序集合と単調写像

   上のうち幾つかはよくわからないかもしれないが，特に気にする必要はない．後ほど，上のうち幾つかを取り上げて詳しくみていく．次の例では，一番最後の例を取り上げてみよう．
3. 半順序集合 (partially ordered set)，あるいは略して *poset* とは，次を満たす二項関係 $a \leq_A b$ が入った集合のことである．任意の $a, b, c \in A$ について，
反射律 $a \leq_A a$

推移律 $a \leq_A b$ かつ $b \leq_A c$ ならば $a \leq_A c$

反対称律 $a \leq_A b$ かつ $b \leq_A a$ ならば $a = b$

例えば，実数全体 $\mathbb{R}$ は通常の順序 $x \leq y$ によって**線型**な順序が入った poset となる．即ち，任意の x, y に対して $x \leq y$ か $y \leq x$ かのどちらかが常に成立している．

poset A から poset B への射は単調写像

$$m : A \to B$$

である．単調写像とは，任意の $a, a' \in A$ について，

$$a \leq_A a' \text{ ならば } m(a) \leq m(a')$$

が成り立つような写像のことである．これを圏とするためにはどうすればいいだろうか？まず $1_A : A \to A$ が単調であることを確かめなくてはならないが，明らかに $a \leq_A a'$ ならば $a \leq_A a'$ が成り立つのでこれは正しい．また，$f : A \to B$ と $g : B \to C$ が単調のとき，$g \circ f : A \to C$ も再び単調写像となることも確かめなくてはならないが，これも成立する．何故なら，$a \leq a'$ ならば $f(a) \leq f(a')$，$f(a) \leq f(a')$ ならば $g(f(a)) \leq g(f(a'))$ が成立し，従って $(g \circ f)(a) \leq (g \circ f)(a')$ が成立するからである．以上より，poset と単調写像は圏 **Pos** をなす．

4. 今まで見てきた例は，**具体圏** (*concrete category*) と呼ばれる類のものだった．つまり，直感的には（何らかの構造を持った）集合を対象とし，その間の（構造を保つ）写像を射とする圏であった（この概念が必ずしも完全なものではないことを後で見る；注意 1.7 を参照）．しかし，圏論とは一体どういったものであるかを理解するひとつの方法は「元を使わずに考える」ことであり，元を射に置き換えて考えることである．そこで，このような考え方が単なる選択肢ではなく本質的な役割を果す例を見てみよう．

   圏 **Rel** を対象を集合，射を二項関係とする圏とする．つまり，射 $f : A \to B$ は任意の部分集合 $f \subseteq A \times B$ である．集合 A 上の恒等射は，恒等関係，

   $$1_A = \{\, (a, a) \in A \times A \mid a \in A \,\} \subseteq A \times A$$

   である．$R \subseteq A \times B$ と $S \subseteq B \times C$ が与えられたとき，その合成 $S \circ R$ は次で定義される：

   $$(a, c) \in S \circ R \iff \exists b.\, (a, b) \in R \,\&\, (b, c) \in S$$

   つまり，S と R の「関係積」を合成とする．これにより **Rel** が圏となることは演習問題とする（何をすべきか？）．

   射が「函数」とは限らない他の例としては，対象を有限集合 A, B, C として，射 $F : A \to B$ は自然数を係数とする行列 $(a_{ij})_{i<a, j<b}$ としたものである．ここで，$a = |A|$, $b = |B|$ であり，$|C|$ は集合 C の元の個数を表わす．射の合成は通常の行列の積，恒等射は通常の単位行列である．ここでの対象は単に行列積が定義されることを保証する役割をしているだけで，射である行列自身はその間の写像ではない．

5. **有限圏**

   勿論，対象が集合である必要性もない．ここではそのごく単純な例を見る．

- 圏 **1** は次のように表される．

$$*$$

これは唯ひとつの対象と，その上の恒等射のみからなる．図中では恒等射は省略されている．

- 圏 **2** は次である．

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r] & \star \end{tikzcd}$$

2 は二つの対象とその恒等射，そして対象の間の射をただひとつだけ持つ圏である．

- 圏 **3** は次である．

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r] \arrow[dr] & \star \arrow[d] \\ & \bullet \end{tikzcd}$$

三つの対象と必要な恒等射，一つめから二つめ，二つめから三つめ，一つめから三つめの対象への射がそれぞれちょうと一つずつある（従って最後の射は前二つの射の合成となる）．

- 圏 **0** は次の通り：

これは対象も射も持たない圏である．

上のように，以後必要の無い場合は恒等射を省略する．

有限圏を指定するのは簡単だ——対象を幾つか設定し，公理で要請される恒等射を加えて，合成が存在するように対象の間に射を描き入れればよい．また，その過程で循環が出来てしまったら，射が有限になるように，何らかの等式を置いて取り除かなくてはならない．例えば，次の例を考えてみよう：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

もし $gf = 1_A$ などとしてループを取り除かなければ，$gf, gfgf, gfgfgf, \ldots$ と射の合成が無限に行うことが出来てしまい，圏にはなるが**有限**圏にはならない．こうした状況については，この章の後半での自由圏について議論する際にまた検討する．

6. 次の標語は，圏論で重要なスローガンのひとつである．

　本当に重要なものは射だけだ！

という訳で，圏の間の射，或いは「写像」を考える必要がある．「圏の準同型」は「函手」と呼ばれる．

定義 1.2. 圏 $\mathbf{C}$ と $\mathbf{D}$ の間の**函手** (*functor*)

$$F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$$

とは対象を対象に，射を射に移すマップであって，次を満たすものである．

(a) $F(f : A \to B) = F(f) : F(A) \to F(B)$

(b) $F(1_A) = 1_{F(A)}$
(c) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

即ち，F は，ドメイン，コドメイン，恒等射と合成を保存するということである．函手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ はしたがって $\mathbf{C}$ の $\mathbf{D}$ の中での（ときたま歪んだ）描像を与える．

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
\mathbf{C} \arrow[dd, "F"'] & & C \\
 & & F(B) \arrow[d, "F(g)"] \\
\mathbf{D} & F(A) \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[r, "F(g \circ f)"'] & F(C)
\end{tikzcd}
$$

さて，期待する通りの方法で函手の合成が定義できることも，任意の圏 $\mathbf{C}$ は恒等函手 $1_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ を持つことも簡単に判るだろう．こうして我々は新たな圏の例として，全ての圏と函手からなる圏，即ち $\mathbf{Cat}$ を得る．

7. **プレ順序** (*preorder*；前順序とも[*2]) 集合とは，反射的かつ推移的な二項関係 $p \leq q$ が入った集合 P のことである．すなわち，$a \leq a$ が常に成立し，また $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$ が成立しているような集合である．任意のプレ順序集合 P は，P の元を対象とし，射を
$$a \to b \iff a \leq b \tag{1.2}$$
により一意的に定めてやることで圏と見做すことが出来る．$\leq$ に関する反射律と推移律の条件が P が実際に圏となることを保証しているのだ．
逆に，各対象の間に高々一つしか射を持たないような圏は，(1.2) によって対象間に二項関係 $\leq$ を定めてやることでプレ順序集合と見做すことが出来る．
8. Poset は自明にプレ順序の条件を満たし，更に反対称律：$a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$ を満たす．従って特に poset も圏となる．このような **poset 圏** は一般的な概念である．例として，任意の集合 X について，冪集合 $\mathcal{P}(X)$ は X の部分集合 U, V の包含関係 $U \subseteq V$ の下で poset となる．
Poset 圏 P, Q の間の函手 $F : P \to Q$ は何だろうか？ それは恒等射と合成を保つ写像で……そう，明らかにそれは既に見た単調写像である．圏を $p \leq q$ 以上の構造をもったある種の**一般化された poset** であると考えるのはしばしば便利である．したがって，その場合函手は単調写像の一般化と見做すことが出来る．
9. **位相空間の例：**X を位相空間，$\mathcal{O}(X)$ をその開集合系とすると，$\mathcal{O}(X)$ は包含関係について poset 圏になる．更に，任意の開集合 U に対して $x \leq y$ iff $x \in$

[*2] 訳注：「前順序」と「全順序」の音が区別できないため，以下では「プレ順序」を用いる．

U ならば $y \in U$ によって X の各点 $x, y \in X$ について**特殊化**順序を入れることで，X はプレ順序集合となる．つまり，開集合 U が x を含めば必ず y も含むとき， $x \leq y$ とするのである．もし X が十分に分離されていれば（「T_1」空間なら）順序は自明なものになってしまうが，そうでない場合が非常に興味深いものとなる．そうした例は例えば代数幾何や表示的意味論の理論で出て来る．T_0 空間がこの特殊化順序の下で実際に poset となることは演習問題とする．

10. **論理学の例：**ある論理の推論系が与えられた時，関連する**証明の圏**が存在する．証明の圏の対象は論理式：

$$\phi, \psi, \ldots$$

であり，ϕ から ψ への射は，ϕ を仮定して ψ を演繹する証明木：

$$\begin{array}{c} \phi \\ \hline \vdots \\ \hline \psi \end{array}$$

である（但し仮定 ϕ は推論の途中でキャンセルされないものとする）．射の合成は演繹の自明な合成で与えられ，これは明らかに結合的である（恒等射 1_ϕ は何か？）．証明の過程によって，

$$p : \phi \to \psi$$

は複数存在しうることに注意したい．この圏はとても豊かな構造を持っており，後ほど λ 計算と関連して再び取り上げる．

11. **計算機科学の例：**関数型プログラミング言語 L が与えられたとき，対象を L のデータ型，射を L の計算可能函数（「プロセス」,「手続き」,「プログラム」）とする圏を考えることが出来る．そうした二つのプログラム $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ の合成は，f の出力に g を適用することで与えられ，

$$g \circ f = f; g$$

などと書かれたりする．恒等射は「何もしない」プログラムである．

このような圏はプログラミング言語の表示的意味論の分野で基本的な考え方である．例えば，いま上で定義した圏を $\mathbf{C}(L)$ とすると，プログラミング言語 L の Scott 領域 $\mathbf{D}$ における表示的意味論とは，単に函手

$$S : \mathbf{C}(L) \to \mathbf{D}$$

のことである．ここで S は型に領域を，プログラムに連続写像を割り当てる函手である．この例と先程の例は，共に後で考察する「デカルト閉圏」の概念と関係がある．

12. X を集合とする．X の元を対象，射をそれらの恒等射のみとすることで，X を圏 $\mathbf{Dis}(X)$ と見做すことが出来る．このように射が恒等射だけである圏は**離散圏**と呼ばれる．離散圏は単に poset の特別な場合に過ぎないことに注意したい．

13. **モノイド** （**単位的半群**とも呼ばれる）とは，二項演算子 $\cdot : M \times M \to M$ と特別な「単位元」$u \in M$ を持つ集合 M であって，任意の $x, y, z \in M$ について，

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

かつ

$$u \cdot x = x = x \cdot u$$

を満たすものである．モノイドは対象がただ一つである圏と等価である．圏の射に当るものが M の元であり，特に恒等射に対応するものが単位元 u である．射の合成はモノイドの二項演算 $m \cdot n$ で与えられる．

モノイドはとても一般的な構造である．たとえば，$\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ と，加法と 0 についてのモノイドや，同じく乗法と 1 についてのモノイドなど，数からなるモノイドがある．それ以外にも，任意の集合 X について，X から X への写像全体の集合

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X, X)$$

も合成についてモノイドを成す．更に一般に，圏 $\mathbf{C}$ についてその対象 C 上の射全体

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, C)$$

も射の合成についてモノイドになる．

モノイドは構造の入った集合なので，モノイドを対象，モノイド構造を保存する写像を射とした圏 **Mon** がある．詳しくいえば，モノイド M から N への準同型 とは，写像 $h : M \to N$ であって，任意の $m, n \in M$ に対して，

$$h(m \cdot_M n) = h(m) \cdot_N h(n)$$

と

$$h(u_M) = u_N$$

を満たす物である．モノイド準同型 $f : M \to N$ は，M, N を圏と見做したときの函手と同じものであることに注意したい．この意味で，圏はモノイドの，函手は準同型の一般化になっている．

1.5　同型射

定義 1.3. 任意の圏 $\mathbf{C}$ について，射 $f : A \to B$ が**同型射** (*isomorphism*) であるとは，ある $\mathbf{C}$ の射 $g : B \to A$ が存在して，

$$g \circ f = 1_A \quad \text{かつ} \quad f \circ g = 1_B$$

が成り立つことである．逆射は一意なので（証明せよ!），$g = f^{-1}$ と書く．A と B の間に同型射が存在するとき，A は B と**同型** (*isomorphic*) であるといわれ，$A \cong B$ と書く．

この同型射の定義が，重要な概念の**抽象的・**圏論的な定義として採り上げる最初の例である．純粋に圏論的な概念だけを使い，射や対象についての他の追加的な情報を一切使っていないという意味において，これは抽象的な定義である．こうすることで，他のどんな圏であっても同じ定義を使うことが出来るという利点がある．例えば，集合（またはモノイド）としての同型を，**全単射**，つまり「1 対 1 かつ上への」写像（または準同型）として元に言及する形で定義することがある．集合やモノイドなどの場合，こうした定義は我々の圏論を用いた定義と同値である．一方，注意すべきなのは，例えば **Pos** では上の圏論

的な同型の定義はうまくゆくのに対し,「全単射な準同型」が存在するにもかかわらず同型でないような Poset が存在する．更にいえば，モノイドを圏と見做した場合のように，抽象的な定義**のみ**がきちんとした意味を持つような例は沢山ある．

定義 1.4. 群 G とは，任意の元 g に対してその逆元 g^{-1} が存在しているモノイドである．従って，G はただ一つの対象を持ち，全ての射が同型射であるような圏である．

自然数の全体 $\mathbb{N}$ は加法についても乗法についても群にならないが，$\mathbb{Z}$ は加法について，$\mathbb{Q}$ は乗法についてそれぞれ群を成す．任意の集合 X について，その自己同型（或いは「置換」），即ち同型射 $f : X \to X$ からなる群 $Aut(X)$ がある（合成「$\circ$」について閉じているのは何故か？）．集合 X の**置換群** (*group of permitations*) とは，部分集合 $G \subseteq Aut(X)$ であって，X の自己同型（のうちの幾つか）から成る群である．従って，G は次の条件を満たさなくてはらなない：

1. X 上の恒等写像 1_X を元に持つ
2. $g, g' \in G$ ならば $g \circ g' \in G$
3. $g \in G$ ならば $g^{-1} \in G$

群の準同型 $h : G \to H$ は単にモノイドとしての準同型であり，必然的に逆元も保存される（証明せよ）．

さて，抽象群に関する次の基礎的かつ古典的な定理について考えよう．

定理 (Cayley)**.** 任意の群 G はある置換群と同型である．

証明 (**概略**).

1. まず，G の Cayley 表現 $\bar{G}$ を次の集合の置換群として定義する：集合は G 自身とし，任意の元 $g \in G$ に対して置換 $\bar{g} : G \to G$ を，任意の $h \in G$ に対して「左平行移動」
$$\bar{g}(h) = g \cdot h$$
で定義する．$\bar{g^{-1}}$ が $\bar{g}$ の逆写像になっているので，これは実際に順列となる．
2. 次に準同型 $i : G \to \bar{G}$ を $i(g) = \bar{g}$ で，$j : \bar{G} \to G$ を $j(\bar{g}) = g(u)$ で定義する．
3. 最後に $i \circ j = 1_{\bar{G}}$ と $j \circ i = 1_G$ を示す．

□

注意 1.5. Cayley の定理の証明には異なる二つのレベルの同型射が現れていることに注意せよ．まず **Sets** の同型射としての G の順列があり，群と群準同型のなす圏 **Groups** での同型射が G と $\bar{G}$ の間に存在するのである．

Cayley の定理の主張は，どんな抽象的な群も，ある集合の置換群として「具体的」に表現出来るということである．この定理は,「大きすぎない」任意の圏が「具体圏」としての表現を持つ，という形で一般化することが出来る（圏が「大きすぎ」ないことの技術的な定義は 1.8 節で詳しく見る）．

定理 1.6. 射の集合を持つ任意の圏 $\mathbf{C}$ は，集合を対象，その間の写像を射とする圏と同型である．

証明 (**概略**). 圏 $\mathbf{C}$ の Cayley 表現 $\bar{\mathbf{C}}$ を次の具体圏として定義する：

- 対象は，任意の $C \in \mathbf{C}$ に対し
$$\bar{C} = \{\, f \in C \mid \mathrm{cod}(f) = C \,\}$$
の形の集合.
- $\mathbf{C}$ の射 $g : C \to D$ に対応する射
$$g : \bar{C} \to \bar{D}$$
は，任意の $\bar{\mathbf{C}}$ の対象 $f : X \to C$ に対し $\bar{g}(f) = g \circ f$ で定義される写像.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g \circ f"] & \\
C \arrow[r, "g"'] & D
\end{tikzcd}$$

□

注意 1.7. この例は，集合圏における「具体」圏についての素朴な見方の **誤り**を教えてくれる．つまり，全ての圏がある種の函数や集合を射や対象として持つとは限らないが，どのような圏もそんな圏と同型なのである．従って，そうした圏だけが満たすような性質は圏論的には全く関係のないものに限られ，例えば射に影響しないような対象の特徴は捨て去られる（これは，実数の構成法に Dedekind 切断を用いるのか Cauchy 列を用いるのかの違いと似たようなものである)．「具体」圏の概念を理解するのに幾分ましな解釈は，どんな射 $f : C \to D$ も任意の「試験対象」T からの射 $x : T \to C$ との合成によって決定される，という考え方である．ここで「決定される」というのはそのような任意の x に対して $fx = gx$ ならば $f = g$ が 成立する，という意味である．これは，T による圏の表現を考察していること と同じである． この条件が第 2.2 節で定義される「終対象」T について成立 しているとき，その圏は「具体圏」であるとされる．一方，第 2 章で見るように，T として終対象以外の対象を取ったほうが良い場合もある．

圏 $\mathbf{C}$ が「射の集合をもつ」という条件が $\{\, f \in \mathbf{C} \mid \mathrm{cod}(f) = C \,\}$ が実際に集合になることを保証していることに注意したい． 第 1.8 節でこの点について立ち返る．

1.6　圏の構築

考察の対象となる圏のストックが沢山あるので，今度は既にある圏から新たな圏を構成する方法について考えることが出来る．

1. 二つの圏 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ の**直積**
$$\mathbf{C} \times \mathbf{D}$$
は，対象 $C \in \mathbf{C}, D \in \mathbf{D}$ について (C, D) の形を対象として持ち，射は $f : C \to C' \in \mathbf{C}, g : D \to D' \in \mathbf{D}$ に対して
$$(f, g) : (C, D) \to (C', D')$$

の形のものである．合成と恒等射は要素ごとに定義される．即ち：

$$(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g \circ g)$$
$$1_{(C,D)} = (1_C, 1_D)$$

圏の直積に対し，二つの自明な**射影函手**

$$\mathbf{C} \xleftarrow{\pi_1} \mathbf{C} \times \mathbf{D} \xrightarrow{\pi_2} \mathbf{D}$$

がある．$\pi_1(C, D) = C$ かつ $\pi_1(f, g) = f$ で定義され，π_2 も同様である．
群に慣れていれば，群 G, H を圏と見做したときの直積圏 $G \times H$ が通常の群としての直積と一致することに気が付くだろう．

2. 圏 $\mathbf{C}$ の**逆圏** (*opposite category*)（または「双対圏」(*dual category*)）$\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ は $\mathbf{C}$ と同じ対象を持ち，$\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ の射 $f : C \to D$ は $\mathbf{C}$ の射 $f : C \to D$ である．つまり，$\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ とは，$\mathbf{C}$ の射の向きを全てひっくり返した圏である．
$\mathbf{C}$ と $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ の対象・射を区別する記法があった方が便利なので，$\mathbf{C}$ の射 $f : C \to D$ に対応する $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ の射を，
$$f^* : D^* \to C^*$$
と書くことにする．この記法の下で，$\mathbf{C}$ の対応する操作を用いて $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ での合成と恒等射を次で定義することが出来る．
$$1_{C^*} = (1_C)^*$$
$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$$
従って，$\mathbf{C}$ での図式
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$
は $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ 内では次のようになる．
$$\begin{tikzcd} A^* & B^* \arrow[l, "f^*"'] \\ & C^* \arrow[ul, "f^* \circ g^*"] \arrow[u, "g^*"'] \end{tikzcd}$$
数学の「双対性」に関する定理の多くは，ある圏がある圏の双対圏（の部分圏）であるという事実を表現したものである．その種の例としては，後で扱う **Sets** が完備原子的ブール代数の圏の双対である，というようなものがある．

3. 圏 $\mathbf{C}$ の**射圏** (*arrow category*) $\mathbf{C}^{\to}$ とは，$\mathbf{C}$ の射を対象とし，$f : A \to B$ から $f' : A' \to B'$ への射 g は，次の「可換四角形」である．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "g_2"'] & B' \end{tikzcd}$$

ここで，g_1, g_2 は $\mathbf{C}$ の射．つまり，$\mathbf{C}^{\rightarrow}$ の射は次を満たすような射 g_1, g_2 の対 (g_1, g_2) である．

$$g_2 \circ f = f' \circ g_1$$

対象 $f : A \to B$ 上の恒等射 1_f は対 $(1_A, 1_B)$ で，射の合成は要素ごとに行えばよい．

$$(h_1, h_2) \circ (g_1, g_2) = (h_1 \circ g_1, h_2 \circ g_2)$$

読者はこの定義で上手くゆくことを，可換図式を書いて確認せよ．
以下の二つの函手があることも確認せよ．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} & \mathbf{C}^{\rightarrow} \arrow[l, "\mathbf{dom}"'] \arrow[r, "\mathbf{cod}"] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

4. 圏 $\mathbf{C}$ の対象 $C \in \mathbf{C}$ 上の**スライス圏** $\mathbf{C}/C$ とは，以下の対象・射を持つ圏である．
   - 対象：$\mathrm{cod}(f) = C$ なる任意の射 $f \in \mathbf{C}$
   - 射：$f : X \to C$ から $f' : X' \to C$ への射は，下の図式で表されるような $f' \circ a = f$ を満たす $\mathbf{C}$ の射 $a : X \to X'$．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[dl, "f'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

恒等射と合成については，射圏と同様に $\mathbf{C}$ のものを流用する．「基底対象 C を忘れる」函手 $U : \mathbf{C}/C \to \mathbf{C}$ が存在することを注意しておく．
$g : C \to D$ を $\mathbf{C}$ の任意の射としたとき，$g_*(f) = g \circ f$ で定義される合成函手

$$g_* : \mathbf{C}/C \to \mathbf{C}/D$$

が存在して，

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g \circ f"] & \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

$\mathbf{C}/C$ の射についても同様に定義されているものとする．実際，簡単に確認出来るように，スライス圏の構成法自体が函手

$$\mathbf{C}/(-) : \mathbf{C} \to \mathbf{Cat}$$

になっている．Cayley 表現が集合と写像の圏による $\mathbf{C}$ の表現を与えているのに対して，この函手は圏と函手からなる圏として $\mathbf{C}$ の表現を与えている．勿論，Cayley 表現とは，圏をその対象の集合に移す忘却函手 $U : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Sets}$ を $\mathbf{C}/(-)$ の後に合成したものに過ぎない．

もし，$\mathbf{C} = \mathbf{P}$ が poset 圏 で $p \in \mathbf{P}$ ならば，

$$\mathbf{P}/p \cong \downarrow(p)$$

となる．つまり，スライス圏 $\mathbf{P}/p$ は，$q \le p$ なる任意の $q \in \mathbf{P}$ からなる単項イデアル $\downarrow(p)$ となる．他のスライス圏の例はすぐ後で見ることになる．

圏 $\mathbf{C}$ の対象 C 下の**コスライス圏** $C/\mathbf{C}$ は，対象として $\mathrm{dom}(f) = C$ なる任意の $\mathbf{C}$ の射 f を，$f : C \to X$ から $f' : C \to X'$ への射として $h \circ f = f'$ なる射 $h : X \to X'$ を持つ圏である．読者は残りの定義をスライス圏からの類推で考えるべきである．また，コスライス圏をスライス圏と双対圏の言葉で定義するにはどうすればいいだろうか？

例 1.8. 基点つき集合 *(pointed set)* の圏 $\mathbf{Sets}_*$ は，集合 A とある点 $a \in A$ の組を対象とし，射 $f : (A, a) \to (B, b)$ を「基点を保つ」，つまり $f(a) = b$ を満たす写像 $f : A \to B$ とする圏である．これは，$\mathbf{Sets}$ の一点集合 $1 = \{*\}$ 下のコスライス圏と同型である．

$$\mathbf{Sets}_* \cong 1/\mathbf{Sets}$$

実際，写像 $a : 1 \to A$ は，A の元 と $a(*) = a \in A$ という形で一意に対応し，射 $f : (A, a) \to (B, b)$ は可換三角形と厳密に対応する．

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "b"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

1.7　自由圏

自由モノイド．　「文字」a, b, c,... の「アルファベット」 A，つまり集合

$$A = \{a, b, c, \ldots\}$$

から始めよう．A 上の**語**とは，次のような文字の有限列である．

$$\textit{thisword, categoriesarefun, asddjbnzzfj,} \ldots$$

空の語を表すのに “–” と書くことにする．A の「Kleene 閉包」とは次で定義される集合のことである．

$$A^* = \{A \text{ 上の語}\}$$

A^* 上の二項演算子 $*$ を，任意の語 $w, w' \in A^*$ に対して $w * w' = ww'$ で定義する．即ち，$*$ は**連結（連接）**操作である．この時演算 “$*$” は結合的であり，空語 “–” が単位元となるので，A^* はモノイドとなる．特に，A^* は A 上の**自由モノイド**と呼ばれる．任意

の元 $a \in A$ は長さ 1 の語と見做せることから，$i(a) = a$ で定義され，「生成元の埋め込み」と呼ばれる写像

$$i : A \to A^*$$

を得る．どんな $w \in A^*$ も，ある $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の $*$-積として $w = a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ と表せるという意味において，A の元は自由モノイドを「生成する」という．

さて，ここでいう「自由」とはどういう意味だろうか？「代数の初歩」のような本で，次のような記述を読んだことがある読者もいるかもしれない：

モノイド M が次の条件を満たす時，M は M の部分集合 A によって**自由に生成される** (*freely generated* by A) という．

1. 任意の元 $m \in M$ は A の元の積として表せる．即ち：

$$m = a_1 \cdot_M \ldots \cdot_M a_n, \quad a\_i \in A$$

2. M に「非自明な」関係が存在しない．つまり，$a_1 \ldots a_j = a'_1 \ldots a'_k$ なる等式が成立するならば，それはモノイドの公理から証明できなくてはならない．

最初の条件は「ゴミなし」，二つめの条件は「ノイズなし」と時々呼ばれたりする．つまり，A 上の自由モノイドとは，A を含みゴミもノイズも持たないモノイド，ということになる．この自由モノイドの定義をどう思うだろうか？

筆者としては，二番目の条件の中の「証明可能性」といった表現に異を唱えたい．もっと定義として精確な表現が存在する筈だ．圏論を用いれば，定義の意味を汲みつつ，より曖昧性のない精確な「自由」の定義を与えることができる．

まず，どんなモノイド N に対してもその台集合 $|N|$ があり，またモノイド準同型 $f : M \to N$ に対しても台写像 $|f| : |M| \to |N|$ を考えることが出来る．この対応が函手を与えることは簡単に確認できる．このような函手を「忘却函手 (forgetful functor)」という．すると，集合 A 上の自由モノイド $M(A)$ は，次の**普遍写像性** (*universal mapping property*, UMP) を満たすモノイドとして定義することが出来る！

$M(A)$ **の普遍写像性**

写像 $i : A \to |M(A)|$ があり，任意のモノイド N と写像 $f : A \to |N|$ が与えられたとき，$|\bar{f}| \circ i = f$ を満たすようなモノイド準同型 $\bar{f} : M(A) \to N$ が一意に存在する．つまり，次の可換図式が成立する．

Mon において：

$$\begin{tikzcd} M(A) \arrow[r, dotted, "\bar{f}"] & N \end{tikzcd}$$

Sets において：

$$\begin{tikzcd} {|M(A)|} \arrow[r, "|\bar{f}|"] & {|N|} \\ A \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

命題 1.9. A^* は A 上の自由モノイドの普遍写像性を持つ．

証明．$f : A \to |N|$ が与えられたとき，次の式で $\bar{f} : A^* \to N$ を定義する．

$$\begin{aligned} \bar{f}(-) &= u_N, \quad N \text{ の単位元} \\ \bar{f}(a_1 \dots a_i) &= f(a_1) \cdot_N \dots \cdot_N f(a_i) \end{aligned}$$

このとき，$\bar{f}$ は明らかに準同型であり，任意の $a \in A$ に対し

$$\bar{f}(a) = f(a)$$

を満たす．また，$g : A^* \to N$ が任意の $a \in A$ に対して $g(a) = f(a)$ を満たせば任意の $a_1 \dots a_i \in A$ に対し：

$$\begin{aligned} g(a_1 \dots a_i) &= g(a_1 * \dots * a_i) \\ &= g(a_1) \cdot_N \dots \cdot_N g(a_i) \\ &= f(a_1) \cdot_N \dots \cdot_N f(a_i) \\ &= \bar{f}(a_1) \cdot_N \dots \cdot_N \bar{f}(a_i) \\ &= \bar{f}(a_1 * \dots * a_i) \\ &= \bar{f}(a_1 \dots a_i) \end{aligned}$$

よって $g = \bar{f}$ となる． □

なぜ上の普遍写像性が自由モノイドの「ゴミなし」「ノイズなし」の意味を精確に表現出来ているのかについて考えよう．特に，普遍写像性の「存在」の部分が「ノイズなし」の曖昧な意図を捉えたものであり（生成元の代数的な組合せによる等式は，どんな写像の行き先でも，つまりどこでも成立しなくてはならないから），「一意性」の部分が「ゴミなし」のアイデアを精確化している（生成元の組合せによって表現されない余分な元があると，写像によって行き先が**異なる**可能性があり，一意性が破れてしまう）．

以上の普遍写像性を用いれば，A 上の自由モノイドが次の意味で同型を除いて一意であることが示すことが出来る．

命題 1.10. モノイド M, N と写像 $i : A \to |M|, j : A \to |N|$ が与えられ，それぞれ A 上の自由モノイドの普遍写像性を満たすとき，$|h|i = j$ かつ $|h^{-1}|j = i$ を満たすモノイド同型 $h : M \cong N$ が一意に存在する．

証明．M の普遍写像性と j から $|\bar{j}|i = j$ を満たす $\bar{j} : M \to N$ が，N の普遍写像性と i から $|\bar{i}|j = i$ を満たす $\bar{i} : N \to M$ がそれぞれ一意に存在する．その合成は準同型 $\bar{i} \circ \bar{j} : M \to M$ であり，$|\bar{i} \circ \bar{j}|i = i$ を満たす．今，特に $1_M : M \to M$ もこの性質を満たすので，M の普遍写像性の一意性より $\bar{i} \circ \bar{j} = 1_M$ がいえる．M と N の役割を交換すれば同様にして $\bar{j} \circ \bar{i} = 1_N$ を得る．

Mon において：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dotted, "\bar{j}"] & N \arrow[r, dotted, "\bar{i}"] & M \end{tikzcd}$$

Sets において：

$$\begin{tikzcd}
{|M|} \arrow[r, "|\bar{j}|"] & {|N|} \arrow[r, "|\bar{i}|"] & {|M|} \\
& A \arrow[ul, "i"] \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

□

たとえば，一点集合上の任意のモノイドは $\mathbb{N}$ の加法についての数モノイド（「生成元」は 1）と同型であることが容易にわかる．従って，モノイドとしての $\mathbb{N}$ は，自由モノイドの普遍写像性により同型を除いて一意に決定される．

自由圏．　今やったことを，モノイドだけではなく圏にも一般化しよう．圏には台集合のかわりに台グラフがあるので，まずはそこから見ていこう．

有向グラフ（*directed graph*）は頂点と向きを持った辺から成る．即ち各辺には始点（source）と終点（target）と呼ばれる頂点が与えられている．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "z"] \arrow[dr, "u"] & B \\
C \arrow[u, "x"] & D \arrow[u, "y"']
\end{tikzcd}$$

グラフは圏と同じような図式で描くことが出来るが，辺の合成や恒等射に当るようなものは存在しない．

したがって，グラフは二つの集合 E(Edges, 辺) と V(Vetrices, 頂点) および二つの写像 $s : E \to V$（source, 始点）と $t : E \to V$（target, 終点）からなる．よって，**Sets** においてグラフとは次の形をした対象と射をもつ構造物である．

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & V
\end{tikzcd}$$

さて，どんなグラフ G も，G 上の自由圏 $\mathbf{C}(G)$ を生成する．$\mathbf{C}(G)$ は G の頂点を対象に，G の**道**（*path*）を射に持つ圏である．ここで道とは，辺 $e_1, \dots, e_n$ の有限列であって，任意の $i = 1, \dots, n$ について $t(e_i) = s(e_{i+1})$ を満たすものである．

$$v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} v_2 \xrightarrow{e_3} \cdots \xrightarrow{e_n} v_n$$

今，

$$\mathrm{dom}(e_n \dots e_1) = s(e_1)$$
$$\mathrm{cod}(e_n \dots e_1) = t(e_n)$$

とし，合成を連結

$$e_n \dots e_1 \circ e'_m \dots e'_1 = e_n \dots e_1 e'_m \dots e'_1$$

で定める．任意の頂点 v に対して，「空の道」1_v が存在するので，これを v の恒等射とする．

もしグラフ G の頂点が一つだけであった場合，$\mathbf{C}(G)$ は単に G の辺の集合上の自由モノイドとなることに注意しよう．また，G が頂点のみを持ち辺を持たない場合，$\mathbf{C}(G)$ は G の頂点からなる離散圏となることも注意しておく．

「自由」の一般的な定義は後程みるので，今は $\mathbf{C}(G)$ も普遍写像性を持つことを見よう．まず，「忘却函手」

$$U : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Graphs}$$

を次の明らかな方法で定義する．$\mathbf{C}$ の台グラフは $\mathbf{C}$ の射を辺，対象を頂点として，$s = \mathrm{dom}, t = \mathrm{cod}$ で定めたグラフとなる．U の函手に対する作用も，$\mathbf{Graphs}$ の射を定義してしまえば明らかなものとなるだろう．

グラフの準同型とは，勿論「恒等射と合成の条件を抜いた函手」，即ち辺を辺に頂点を頂点に移し，始点と終点を保存するようなマップである．後々便利であるので，これを少し別の観点から説明してみたい．

まず，圏 $\mathbf{C}$ は次のような図式で説明できることに注意しよう：

$$\begin{tikzcd} C_2 \arrow[r, "\circ"] & C_1 \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{cod}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{dom}"'] & C_0 \arrow[l, "i" description] \end{tikzcd}$$

ここで C_0 は $\mathbf{C}$ の対象の集まり, C_1 は射の集まり, C_2 は $\{\, (f,g) \in C_1 \times C_1 \mid \mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g) \,\}$ なる集まり，i は恒等射を取る演算である．

この時，圏 $\mathbf{C}$ から $\mathbf{D}$ への函手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ は，二つの写像

$$F_0 : C_0 \to D_0$$
$$F_1 : C_1 \to D_1$$

の組であって，次の図式内で同じラベルがついた四角形を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd} C_2 \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "F_2"'] & C_1 \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{cod}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{dom}"'] \arrow[d, "F_1"] & C_0 \arrow[l, "i" description] \arrow[d, "F_0"] \\ D_2 \arrow[r, "\circ"] & D_1 \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{cod}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{dom}"'] & D_0 \arrow[l, "i" description] \end{tikzcd}$$

ただし，$F_2(f,g) = (F_1(f), F_1(g))$ である．

さて，それでは**グラフ準同型**

$$h : G \to H$$

について説明しよう．次の図式で s,t に関する二つの正方形をそれぞれ可換にする二つの写像，$h_0 : G_0 \to H_0$, $h_1 : G_1 \to H_1$ が必要である．

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, shift left, "t"] \arrow[r, shift right, "s"'] \arrow[d, "h_1"'] & G_0 \arrow[d, "h_0"] \\ H_1 \arrow[r, shift left, "t"] \arrow[r, shift right, "s"'] & H_0 \end{tikzcd}$$

これらの言葉を使えば，忘却函手

$$U : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Graphs}$$

は，圏

$$\begin{tikzcd} C_2 \arrow[r, "\circ"] & C_1 \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{cod}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{dom}"'] & C_0 \arrow[l, "i" description] \end{tikzcd}$$

を，その台グラフ

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, shift left, "\mathrm{cod}"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{dom}"'] & C_0 \end{tikzcd}$$

へと移すものとして理解出来る．U の函手への効果についても，同様に図式から幾つかの部分を消すことで説明することができる（チョークを使うとやりやすい）．以後，モノイドとの類推から圏 $\mathbf{C}$ の台グラフを $|\mathbf{C}| = U(\mathbf{C})$ と書くことにする．

すると，グラフ上の自由圏は次の普遍写像性を持つ．

$\mathbf{C}(G)$ の普遍写像性

グラフ準同型 $i : G \to |\mathbf{C}(G)|$ が存在して，任意の圏 $\mathbf{D}$ とグラフ準同型 $h : G \to |\mathbf{D}|$ が与えられたとき，$|\bar{h}| \circ i = h$ を満たす函手 $\bar{h} : \mathbf{C}(G) \to \mathbf{D}$ が一意に存在する．

Cat において：

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}(G) \arrow[r, dotted, "\bar{h}"] & \mathbf{D} \end{tikzcd}$$

Graphs において：

$$\begin{tikzcd} {|\mathbf{C}(G)|} \arrow[r, "|\bar{h}|"] & {|\mathbf{D}|} \\ G \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

頂点を一つだけ持つグラフ上の自由圏は，単に辺の集合上の自由モノイドになる．二つの頂点とその間にただ一つの辺のみを持つグラフ上の自由圏は有限圏 $\mathbf{2}$ である．次の形のグラフ

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "e"] & B \arrow[l, shift left, "f"] \end{tikzcd}$$

上の自由圏は，（恒等射の他に）無限に多くの射

$$e, f, ef, fe, efe, fef, efef, \ldots$$

を持つ．

1.8　基礎論：大きい，小さい，局所的に小さい

次のふたつの事を区別するところから始めよう：

(i) 数学の圏論的基礎付け
(ii) 圏論の数学的基礎付け

ひとつ目に関しては，圏論を集合論に代わって「数学の基礎」を提供する道具として用いることが出来る，ということをきいたことがあるかもしれない．それこそが正に一つめに当てはまるケースだが，これから我々がやろうとしていることではない．集合論では，「無限集合が存在する」などといった存在公理や，「どんな集合に対しても冪集合が存在する」といった導出公理を置くことから始めて，「全数学」を展開するのに原理的に十分な数学的対象（つまり集合）の宇宙を構成する．我々の，どんな射もドメインとコドメンを持つという圏論の公理は，どんな集合に対しても冪集合が存在する，といったような公理とは異なった理解が必要である！では，違いはなにか．集合論では——少なくとも通常考えられている範囲では——公理は特定のたった一つの集合宇宙に言及する（或いは決定する）ものと見做されている．対照的に，圏論の公理は何か（すなわち圏）の**定義**である．これはちょうど，群論や位相空間論の公理系が，興味のある対象の定義として使われているのと同じことである．一方，こういった体系では，「背景」や「基礎」となる体系，たとえば集合論や型理論などの存在を仮定している．こうした集合の理論を，一方で，圏論や他の方法によって決定することも可能である．

こうしてやっと，二つめの議論へと辿り着く．我々は，これからの議論では他の数学的対象と同じく圏も集合と写像を用いて何らかの形で表わされているとする．そして，圏論的（あるいは他の）方法による数学の基礎付けもありうる，という注意を気に留めておくにとどめよう．しかし，圏論ではしばしば集合論上の困難に遭遇することがよくある．それは主に大きさの問題である．いくつかの圏は，集合論の枠組みで捉えるには「大きすぎる」のだ．この問題は第 1.7 節で Cayley 表現について考察した際に既に遭遇している．その際は対象となる圏の射の集まりが集合であることを条件として課したのであった．一般的に，そうした制限を（群論などでもあるように）あまり気にせずに済ませたいが，たとえば「圏」**Sets** ですらちゃんとした圏にはならず，それはこれから考察してゆく幾つもの圏についても同様なのである．

こうした問題に対処する形式的な手法は色々とあり，Mac Lane の本で議論されている．我々の目下の目的では，次の区別が便利である．

定義 1.11. 圏 $\mathbf{C}$ が**小さな圏**であるとは，対象の集まり $\mathbf{C}_0$，射の集まり $\mathbf{C}_1$ がともに集合であることである．そうでない場合，$\mathbf{C}$ は**大きな圏**であるという．

たとえば，全ての有限圏は明らかに小さな圏であり，全ての有限集合と写像の圏 $\mathbf{Sets}_{\mathrm{fin}}$ も小さな圏である．（実際には，どの集合も他の有限集合のみからなること，つまり「遺伝的に有限である」という条件が必要となる．）一方で，poset のなす圏 **Pos** や群の圏 **Group**，すべての集合の圏 **Sets** は全て大きな圏である．**Cat** は小さな圏全体からなる圏であるとすると，それ自身は大きな圏となる．したがって，特に，**Cat** はそれ自身の対象とはならないので，ある読者は安心するだろう．

しかし，これでも全ての問題が解決されたわけたわけではない．例えば，大きな圏 **Group** と **Sets** について，一方から他方への函手全体からなる圏といった構造について後程考察しようとする（この「函手圏」は後で定義される）．しかし，こうした圏は小さくないので，これらを一般的な集合論で直接的に扱うことは出来ない（圏が「大きすぎ」てしまう）．したがって，こうした構造を扱うためには，更に洗練された「クラス」の理論が必要となる．これが単に技術的な基礎の問題に過ぎない場合については特に気にしないことにする（Mac Lane 本 I.6 節がこの問題を取り扱っている）．一方，次の概念はこの問題と関連する概念のなかでもとても便利な概念である．

定義 1.12. 圏 $\mathbf{C}$ が**局所的に小さい**とは，$\mathbf{C}$ の任意の対象 X, Y について，集まり $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y) = \{ f \in \mathbf{C}_1 \mid f : X \to Y \}$ が**集合である**ことである（このとき $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$ は **Hom 集合**と呼ばれる）．

事実，我々が考察する大きな圏の多くは局所的に小さな圏である．**Sets** は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X,Y) = Y^X$ でありこれは X から Y への写像全体の**集合**であるので小さな圏である．同様に，**Pos**， **Top**，**Group** なども局所的に小さな圏であり（**Cat** はどうか？），また任意の小さな圏はもちろん局所的に小さな圏である．

注意 1.13. **小さな**圏と**具体**圏を混同してはいけない．圏が具体圏であるとは，対象が何らかの（構造の入った）集合で，射が（或る種の）写像であることである．圏の**全ての対象の集まり**と全ての射の集まりが集合であるとき，圏は小さな圏であると呼ばれた．実数全体 $\mathbb{R}$ は poset 圏と見做せば小さな圏だが具体圏ではない．全ての poset からなる圏 **Pos** は具体圏だが小さくない．

1.9 演習問題

1. **Rel** の対象は集合，射 $A \to B$ は A から B への二項関係，即ち $R \subseteq A \times B$ である．集合 A 上の恒等射は，同値関係 $\{ \langle a,a \rangle \in A \times A \mid a \in A \}$ とする．また，**Rel** での射の合成は，

$$S \circ R = \{ \langle a,c \rangle \in A \times C \mid \exists b \, (\langle a,b \rangle \in R \,\&\, \langle b,c \rangle \in S) \}$$

で定める．但し $R \subseteq A \times B$， $S \subseteq B \times C$ とする．

（a）**Rel** が圏であることを示せ．

（b）次に，対象はそれ自身に，写像 $f : A \to B$ をそのグラフ，

$$G(f) = \{ \langle a,b \rangle \in A \times B \mid a \in A \}$$

に移す函手 $G : \mathbf{Sets} \to \mathbf{Rel}$ が存在することを示せ．

(c) 最後に，各関係 $R \subseteq A \times B$ を，次で定められる逆関係 $R^c \subseteq B \times A$ に移す函手 $C : \mathbf{Rel}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Rel}$ が存在することを示せ.

$$\langle a, b\rangle \in R^c \iff \langle b, a\rangle \in R$$

2. 次の圏同型がそれぞれ成立するかどうか考察せよ.
   (a) $\mathbf{Rel} \cong \mathbf{Rel}^{\mathrm{op}}$
   (b) $\mathbf{Sets} \cong \mathbf{Sets}^{\mathrm{op}}$
   (c) 集合 X を一つ固定する．$\mathcal{P}(X)$ を包含関係についての poset 圏とみなす ($\mathcal{P}(X)$ の射は，任意の $A, B \subseteq X$ に対して部分集合の包含関係 $A \subseteq B$ である)．このとき，$\mathcal{P}(X) \cong \mathcal{P}(X)^{\mathrm{op}}$ か？
3. (a) **Sets** の同型射は全単射と一致することを示せ.
   (b) **Monoids** の同型射は全単射準同型写像と一致することを示せ.
   (c) **Pos** での同型射は全単射単調写像とは一致**しない**ことを示せ.
4. X を位相空間とし，特殊化順序によって各点にプレ順序が入っているものとする．即ち，y が x を含む開集合に必ず含まれているとき，その時に限り $x \leq y$ とする．このとき，これがプレ順序となっていることを示し，X が T_0 空間（任意の異なる二点について，どちらか一方を含みもう一方を含まないような開集合が存在する）のとき X は poset となることを示せ．また，X が T_1 空間（任意の異なる二点に対し，一方を含み他方を含まないような開集合がそれぞれの点に対し存在する）であるとき，順序は自明となることを示せ.
5. 任意の圏 $\mathbf{C}$ に対し，対象 C 上のスライス圏から $\mathbf{C}$ への，「C を忘れる」函手 $U : \mathbf{C}/C \to \mathbf{C}$ を定義せよ．更に，$\mathbf{dom} \circ F = U$ となる函手 $F : \mathbf{C}/C \to \mathbf{C}^{\to}$ を見付けよ.
6. 圏 $\mathbf{C}$ の対象 C 下の「コスライス圏」$C/\mathbf{C}$ を，スライス圏 $\mathbf{C}/C$ と「双対圏」をとる操作 $-^{\mathrm{op}}$ を使って構成せよ.
7. $2 = \{a, b\}$ を異なる二つの元 a, b からなる任意の集合とする．函手 $F : \mathbf{Sets}/2 \to \mathbf{Sets} \times \mathbf{Sets}$ を $F(f : X \to 2) = (f^{-1}(a), f^{-1}(b))$ で定める．これは圏の同型射となっているか？また，2 ではなく一点集合 $1 = \{a\}$ の場合はどうか？
8. 任意の圏 $\mathbf{C}$ は，二項関係 $\leq$ を次で定めることでプレ順序 $P(\mathbf{C})$ を決定する.

   $$\text{射 } A \to B \text{ が存在するとき，その時に限り } A \leq B$$

   このとき，P が函手を定めることを，P の函手に対する動作を定義し函手の条件を満たすことを確かめることによって示せ．また，P がプレ順序集合を圏に埋め込む自明な函手の（片側）逆射になっていることを示せ.
9. 次のグラフ上の自由圏を，対象・射・合成を与えることで説明せよ.
   (a)

   $$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "e"] & b \end{tikzcd}$$

   (b)

   $$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "e"] & b \arrow[l, shift left, "f"] \end{tikzcd}$$

   (c)

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "g"'] & b \arrow[d, "f"] \\ & c \end{tikzcd}$$

(d)

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "e"] & b \arrow[l, shift left, "h"] \arrow[d, "f"] \\ & c \arrow[ul, "g"] \end{tikzcd}$$

10. 射をちょうど 6 本持つ自由圏はいくつあるか？それらを生成するグラフを描け.
11. 自由モノイド函手

$$M : \mathbf{Sets} \to \mathbf{Mon}$$

が存在することを，次の二通りの方法で示せ.

(a) 特に $M(X) = X^*$ として，その写像 $f : A \to B$ への作用

$$M(f) : M(A) \to M(B)$$

を，

$$M(f)(a_1 \dots a_k) = f(a_1) \dots f(a_k), \quad a_1, \dots a_k \in A$$

で定義せよ.

(b) 自由モノイドの普遍写像性のみを仮定して，それを用いて函手の写像への効果を決定し，これが函手となることを示せ.

上の二つの方法が互いにどう関係しているかを比較せよ.

12. 射を辺の列として定義したグラフ上の自由圏の普遍写像性を確かめよ．特に，$\mathbf{C}(G)$ をグラフ G 上の自由圏とし，グラフ準同型 $i : G \to U(\mathbf{C}(G))$ を，G の辺・頂点を，$\mathbf{C}(G)$ の対応する射・対象に移すものとする．このとき，任意の圏 $\mathbf{D}$ とグラフ準同型 $h : G \to U(\mathbf{D})$ に対し，函手

$$\bar{h} : \mathbf{C}(G) \to \mathbf{D}$$

が一意に存在し，

$$U(\bar{h}) \circ i = h$$

となることを示せ．ここで，$U : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Graph}$ は台グラフ函手である.

13. Cayley 表現を用いて，任意の小さな圏は，対象が集合で射がその間の写像であるような「具体圏」と同型であることを示せ.
14. 圏の概念は，射と対象という二つの構成要素によらずとも，ただひとつの要素，すなわち射のみによって定義することもできる．ドメイン・コドメインは，部分的に定義された合成演算に対し単位的に振る舞う射として定義される．これに関する Mac Lane『圏論の基礎』I.1 節の定義を読み，そこで言及されている練習問題を解いて二つの定義の同値性を示せ.

第 2 章

抽象的な構造

この章では，圏論的定義についての幾つかの注意喚起から始めたい．圏論的定義とは圏論的な言葉，つまり他の対象や射との関係のみによる性質の特徴付けである．そうした定義の仕方は，構造的であるとか，操作的，関係的，あるいはもしかしたら（内部的と対比して）外部的な定義であると呼ばれたりする．対象や射は，それらが圏の中で他とどう関係するかという役割のみによって，つまり構造の中での位置関係のみによって決まるのであって，それらが「何であるか」「何でできているか」については全く関係ないとするのがこの考え方である．以前に見た自由圏や自由モノイド，あるいは圏の構築といったものがそうした定義の例である．また，今後さらに多くの例を見ていく．以下では，とても単純な例から始める．我々はこれを**抽象的な特徴付け**と呼ぼう．そうした特徴付けを行なう基本的な方法は，普遍写像性を通してのものである，ということがわかるだろう．

2.1 エピとモノ

Sets において，写像 $f : A \to B$ は,

任意の $a, a' \in A$ に対し $f(a) = f(a')$ ならば $a = a'$ が成立するとき**単射**
任意の $b \in B$ に対しある $a \in A$ があって $f(a) = b$ が成立するとき**全射**

であるとそれぞれ呼ばれたことを思い出そう．これらの性質に対する抽象的特徴付けは，次の通りである．

定義 2.1. 任意の圏 $\mathbf{C}$ において，射 $f : A \to B$ が

モノ射であるとは，任意の射 $g, h : C \to A$ について $fg = fh$ ならば $g = h$ が,

$$C \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$$

エピ射であるとは，任意の射 $i, j : B \to D$ について $if = jf$ ならば $i = j$ が,

$$A \xrightarrow{f} B \underset{j}{\overset{i}{\rightrightarrows}} D$$

それぞれ成り立つことである．しばしば，f がモノ射のとき $f : A \rightarrowtail B$ と書き，f がエ

ピ射のとき $f : A \twoheadrightarrow B$ とかく[*1].

命題 2.2. 集合の間の写像 $f : A \to B$ は，f が単射であるとき，その時に限りモノ射となる．

証明. $f : A \rightarrowtail B$ とする．$a, a' \in A$ について $a \neq a'$ として，$\{x\}$ を適当な一点集合とする．ここで，

$$\bar{a}(x) = a,\ \bar{a'}(x) = a'$$

で定義される写像

$$\bar{a}, \bar{a'} : 1 \to A$$

を考える．今，f はモノ射なので，$\bar{a} \neq \bar{a'}$ より $f\bar{a} \neq f\bar{a'}$ である．従って，$f(a) = (f\bar{a})(x) \neq (f\bar{a'})(x) = f(a')$ となるので，f は単射である．

逆に，f を単射とし，写像 $g, h : C \to A$ について $g \neq h$，つまりある $c \in C$ について $g(c) \neq h(c)$ とする．f は単射なので，$f(g(c)) \neq f(h(c))$ となり，従って $fg \neq fh$ となる． □

例 2.3. モノイドなどの「構造の入った集合」からなる圏の多くでは，モノ射と「単射準同型」の概念は一致する．より精確にいえば，モノイド準同型 $h : M \to N$ はその台写像 $|h| : |M| \to |N|$ がモノ射であるときに限りモノ射となり，従って前の議論より単射となる．これを証明するため，h をモノとし，二つの異なる「元」$x, y : 1 \to |M|$ を取ろう（但し，$1 = \{*\}$ なる一点集合とする）．自由モノイド $M(1)$ の普遍写像性より対応する準同型 $\bar{x}, \bar{y} : M(1) \to M$ が存在する．また，h はモノ射なので，その合成射 $h \circ \bar{x}, h \circ \bar{y} : M(1) \to M \to N$ は異なる射となる．従って，再び $M(1)$ の普遍写像性より対応する「元」$hx, hy : 1 \to N$ もまた異なる．

$$\begin{tikzcd} M(1) \arrow[r, shift left, "\bar{x}"] \arrow[r, shift right, "\bar{y}"'] & M \arrow[r, "h"] & N \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & {|M|} \arrow[r, "|h|"] & {|N|} \end{tikzcd}$$

逆に，$|h| : |M| \to |N|$ がモノ射で，$f, g : X \to M$ が任意の異なる準同型であるとする．このとき，$|f|, |g| : |X| \to |M|$ は異なる写像であり，$|h|$ がモノ射であるので $|h| \circ |f|, |h| \circ |g| : |M| \to |N|$ も同様に異なる．$|h \circ f| = |h| \circ |f| \neq |h| \circ |g| = |h \circ g|$ であるので，従って $h \circ f \neq h \circ g$ でなくてはならない．

全く同じ状況が群や環，ベクトル空間，poset などでも成立する．この事実は，こうした対象からなる圏に自由モノイド $M(1)$ に相当する対象が存在することから従う．

例 2.4. *poset* $\mathbf{P}$ において，任意の射 $p \leq q$ はモノかつエピとなる．何故か？

[*1] 訳注：「モノである」ことを「モニック（monic）」，「エピである」ことを「エピック（epic）」という．

さて，今迄のと双対的に，**Sets** のエピ射は全射写像と一致する（演習問題！）．しかしそれとは対照的に，以下で見るように他のよく知られた圏ではエピ射が単に全射準同型であるとは限らない．

例 2.5. モノイドとその準同型からなる圏 **Mon** において，モニックな準同型

$$h : \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{Z}$$

が存在する．ここで，$\mathbb{N}$ は自然数の加法モノイド $(N, +, 0)$，$\mathbb{Z}$ は整数の加法モノイド $(Z, +, 0)$ である．この，集合の埋め込み $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ で得られる対応が， **Mon** においてはエピ射でもあることを，次の事実を示すことで証明しよう：

任意のモノイド準同型 $f, g : (\mathbb{Z}, +, 0) \to (M, *, u)$ が与えられた時，その N への制限が一致するとき，即ち $f|_N = g|_N$ となるとき $f = g$ となる．

まず始めに注意することは，

$$\begin{aligned} f(-n) &= f((-1)_1 + (-1)_2 + \cdots + (-1)_n) \\ &= f(-1)_1 * f(-1)_2 * \cdots * (-1)_n \end{aligned}$$

が成立し，g に関しても同様の事実が成立することである．したがって，上の議論は $f(-1) = g(-1)$ を示すことに帰着される．しかるに，

$$\begin{aligned} f(-1) &= f(-1) * u \\ &= f(-1) * g(0) \\ &= f(-1) * g(1 - 1) \\ &= f(-1) * g(1) * g(-1) \\ &= f(-1) * f(1) * g(-1) \\ &= f(-1 + 1) * g(-1) \\ &= f(0) * g(-1) \\ &= u * g(-1) \\ &= g(-1) \end{aligned}$$

よって示された．

注意すべきなのは，代数的観点からは，射 e がエピ射であるのは右側の e が簡約出来るとき，つまり $xe = ye$ ならば $x = y$ が成立するときのみであり，m がモノ射であるのも m が左簡約可能であるとき，つまり $mx = my$ ならば $x = y$ が成立するときに限られるということである．

命題 2.6. 任意の同型射はモニックかつエピックである．

証明. 次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & B \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "1"] & C \arrow[d, "e"] \\ & & B \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & D \end{tikzcd}$$

もし m が e を逆射とする同型射なら，$mx = my$ ならば $x = emx = emy = y$ が成立し，従って m はモノ射となる．同様にして，e は右簡約可能となり，従ってエピ射となる． □

Sets においては上の逆が成立する．つまり，モニックかつエピックな射は同型射となる．しかし，モノイドの例からもわかるとおり，これは一般には成立しない．

2.1.1　断面と引き込み

どんな同型射もモニックかつエピックであることは既に見た．より一般に，射

$$f : A \to B$$

が左逆射

$$g : B \to A,\ \ gf = 1_A$$

を持てば，同様の議論により f はモノ射，g はエピ射でなければならない．

定義 2.7. **分裂**（*split*）モノ射（エピ射）とは，左（右）逆射を持つ射のことである．射 $e : X \to A$ と $s : A \to X$ があって $es = 1_A$ を満たすとき，射 s は e の**断面**（**セクション**；*section*）または**分裂**（*splitting*）と呼ばれ，e は s の**引き込み**（**レトラクション**；*retraction*）と呼ばれる．このとき，対象 A は X の**レトラクト**（*retract*）と呼ばれる．

函手は恒等射を保つので**分裂**エピ射と**分裂**モノ射も保存される．上の例 2.5 でやったように **Mon** の忘却函手

$$\mathbf{Mon} \to \mathbf{Sets}$$

はエピ射 $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ を保存しないことと比較せよ．

例 2.8. **Sets** では，

$$\emptyset \rightarrowtail A$$

の形を除く任意のモノ射は分裂する．**任意のエピ射は分裂射である**という条件は，選択公理の圏論的表現になっている．エピ射

$$e : E \twoheadrightarrow X$$

について考えよう．この時，空でない集合の族

$$E_x = e^{-1}\{x\},\ \ x \in X$$

が存在する．この族 $(E_x)_{x\in X}$ に対する選択函数は，正に e の断面，すなわち $es = 1_X$ なる $s : X \to E$ である．何故なら，任意の $x \in X$ に対し，$s(x) \in E_x$ となるからである．

逆に，非空集合の族

$$(E_x)_{x\in X}$$

に対し，$E = \{\, (x, y) \mid x \in X, y \in E_x \,\}$ とし，エピ射 $e : E \twoheadrightarrow X$ を $(x, y) \mapsto x$ で定める．すると，e の断面 s は明らかに族に対する選択函数を決定している．

「対象の族」はある一つの射 $e : E \to X$ の「ファイバー」によって表現出来る．この考え方は上での議論より広い応用を持っており，7.10 で詳しく検討する．

「選択函数」の存在に関連する概念のひとつに「射影的」の概念がある．対象 P が**射影的**（*projective*）であるとは，任意のエピ射 $e : E \twoheadrightarrow X$ と射 $f : P \to X$ について，ある（一意とは限らない）射 $\bar{f} : P \to E$ があって，次の図式のように $e \circ \bar{f} = f$ となることである．

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "e"] \\ P \arrow[ur, dotted, "\bar{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

この状況を，f は e を**持ち上がる**（f *lifts across* e）などということがある．射影的対象へのエピ射は明らかに分裂射である．射影的対象はより「自由」な構造を持つと考えることができ，従って「より多くの射」を許容する．

選択公理は任意の集合が射影的であることを主張しており，そのことから代数系からなる圏の多く（全てではない！）では，自由対象もまた射影的であることがいえる．また，任意の圏において，射影的対象のレトラクトが再び射影的となることを読者は確かめるべきである．

2.2　始対象と終対象

それでは，圏 **Sets** の空集合や一点集合，および一般の圏における似た構造を持った対象の抽象的特徴付けを見ていこう．

定義 2.9. 任意の圏 $\mathbf{C}$ において，

対象 0 が**始対象**であるとは，どんな対象 C についても，それをコドメインに持つ射が一意に存在することである．

$$0 \longrightarrow C$$

対象 1 が**終対象**であるとは，どんな対象 C についても，それをドメインに持つ射が一意に存在することである．

$$C \longrightarrow 1$$

モノ射やエピ射の場合と同様，この定義においても或る種の「双対性」が成立していることに注意しよう．精確にいえば，$\mathbf{C}$ での終対象は正に $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ での始対象になっているのである．この双対性については，第**??**章で体系的に考察する．

まず手始めに，始対象や終対象の概念は単純な普遍写像性によって定義されるため，自由モノイドと同様に同型を除いて一意に決定されることを見よう．

命題 2.10. 始対象（終対象）は，（存在すれば）同型を除いて一意である．

Proof. 事実，もし C と C' が共に同じ圏の始対象（終対象）であれば，同型射 $C \to C'$

が**一意**に存在する．実際，0 と $0'$ をある圏 $\mathbf{C}$ の始対象とする．すると，次の図式より，0 と $0'$ は明らかに一意的に同型となることがわかる．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "1_0"'] & 0' \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "1_{0'}"] & \\
& 0 \arrow[r, "u"'] & 0'
\end{tikzcd}$$

終対象に関しては，上の議論を $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ に適用すればよい．　□

例 2.11.

1. **Sets** においては，空集合が始対象であり，任意の一元集合 $\{x\}$ が終対象となる．**Sets** は唯一つの始対象をもつのに対し，終対象は無数に存在することに注目しよう（これは $\mathbf{Sets} \cong \mathbf{Sets}^{\mathrm{op}}$ が成立するか，という問いの答えを与えている）．
2. **Cat** では，圏 $\mathbf{0}$（対象も射も持たない）が始対象，圏 $\mathbf{1}$（ひとつの対象とその恒等射を持つ）が終対象となる．
3. **Groups** では，単位群が始対象**かつ**終対象となっている（ベクトル空間と線形変換からなる圏や，モノイドとモノイド準同型からなる圏も同様である）．しかし，**Rings**（単位元を持つ可換環からなる圏）では，整数全体 $\mathbb{Z}$ が始対象となる（$0 = 1$ とした一元環が終対象である）．
4. **ブール代数**とは，特別な元 $0, 1$ と，「結び（*join*）」$a \vee b$，「交わり（*meet*）」$a \wedge b$ と呼ばれる二項演算，および「補元」を取る単項演算 $\neg b$ を持つ *poset* B のことである．これらの演算は次の条件を満たさなくてはならない．

$$\begin{aligned}
&0 \le a \\
&a \le 1 \\
a \le c \text{ かつ } b \le c \quad &\Longleftrightarrow \quad a \vee b \le c \\
c \le a \text{ かつ } c \le b \quad &\Longleftrightarrow \quad c \le a \wedge b \\
a \le \neg b \quad &\Longleftrightarrow \quad a \wedge b = 0 \\
&\neg\neg a = a
\end{aligned}$$

順序を用いずに等式関係のみを用いた同値な特徴付けもある．
ブール代数の典型的な例として，集合 X の部分集合全体からなる冪集合 $\mathcal{P}(X)$ に包含関係 $A \subseteq B$ を入れたものがある．この時のブール演算は，空集合 $0 = \emptyset$，全体集合 $1 = X$ として，和集合および共通部分を結びおよび交わり，相対補集合 $X - A$ を $\neg A$ とする．よく知られた特別な場合として，二元ブール代数 $\mathbf{2} = \{0, 1\}$（冪集合 $\mathcal{P}(1)$ と見ることができる）があり，選言（論理和），連言（論理積），否定などの論理演算をブール演算として元を「真理値」と見做すことがある．これは，ブール代数の圏 **BA** の始対象となる．**BA** は射としてブール準同型を持つ．すなわち，函手 $h : B \to B'$ は $h(0) = 0$, $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$ など追加的な構造を保つ．一元ブール代数（即ち $\mathcal{P}(0)$）が終対象となる．
5. *poset* では，始対象となるのは明らかに最小元のみであり，終対象も最大元のみである．したがって，例えば任意のブール代数は始対象と終対象の両方を持つ．明ら

かに，圏だからといって両方ともを持つ**必要はない**．例として，*poset* $(\mathbb{Z}, \leq)$ には始対象も終対象も存在しない．

6. 任意の圏 $\mathbf{C}$ と対象 $X \in \mathbf{C}$ について，恒等射 $1_X : X \to X$ はスライス圏 $\mathbf{C}/X$ の終対象であり，コスライス圏 $X/\mathbf{C}$ の始対象である．

2.3　一般化元

終対象および始対象に出入りする射について考察しよう．興味の対象となるのは明らかにその内でも限られたものだけだが，それらはとても重要となる．

集合 A が始対象への射 $A \to 0$ を持つのは A がそれ自身始対象であるときだけであり，poset についても同様のことがいえる．それに対して，モノイドや群については，始対象と終対象は一致するので，全ての対象は始対象への射を唯一つだけ持つ．

しかし，ブール代数の圏 $\mathbf{BA}$ では状況は完全に異なる．始ブール代数 $\mathbf{2}$ へのマップ $p : B \to \mathbf{2}$ は，B の**ウルトラフィルター**（*ultrafilter*）U と呼ばれるものと一意に対応する．ブール代数 B の**フィルター**（*filter*）とは，空でない部分集合 $F \subseteq B$ であって交わりについて上に閉じているものである：

$$
\begin{gathered}
a \in F \text{ かつ } a \leq b \text{ ならば } b \in F \\
a \in F \text{ かつ } b \in F \text{ ならば } a \wedge b \in F
\end{gathered}
$$

F を含むフィルター $F \subset F'$ が「真でない」，即ち B 全体に限られるとき，F は**極大**（*maximal*）であるといわれる．**ウルトラフィルター**とは，極大フィルターのことである．フィルター F は，任意の元 $b \in B$ に対し $b \in F$ か $\neg b \in F$ のどちらか一方のみが成立するとき，その時に限ってウルトラフィルターとなる．このことを示すのはさして難しいことではない（演習問題！）．さて，$p : B \to \mathbf{2}$ としたとき，$U_p = p^{-1}(1)$ によってウルトラフィルター $U_p \subset B$ を定めよう．また，ウルトラフィルター $U \subset B$ が与えられた時，$b \in U$ ならばその時に限って $p_U(b) = 1$ として，ブール準同型 $p_U : B \to \mathbf{2}$ を定めよう．こうした操作が互いに逆演算となっている事実から，これは容易に確かめることが出来る．ブール準同型 $p : B \to \mathbf{2}$ は，論理学において「真理表」を形成するのにも用いられる．実際，真理表の各列は，論理式からなるブール代数上のそのような準同型と対応している．

環準同型 $A \to \mathbb{Z}$ は，代数幾何において上と同様かつ同じくらい重要な役割を担っている．そうした準同型は，ウルトラフィルターの環論的な一般化である**素イデアル**の概念に対応している．

さて，では終対象からの射について考えよう．X を任意の集合とする．任意の $x \in X$ に対し，対応する終対象 $1 = \{*\}$ からの射 $\bar{x} : 1 \to X$ を $\bar{x}(*) = x$ によって定める．これにより，同型

$$X \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(1, X)$$

を得る．この対応は既に何度か使っているものである．似た状況は poset（あるいは位相空間）からなる圏でも成立する．つまり，射 $1 \to P$ は，poset（または空間）の台集合の元に対応するのである．終対象 1 を持つ任意の圏 $\mathbf{C}$ について，そうした射 $1 \to A$ は，しばしば A の**大域元**（*global elements*），**点**（*points*），または**定数**（*constants*）などと呼

ばれることがある．集合や poset，空間の圏において，一般の射 $f : A \to B$ は，A の各点にどう作用するかによって決定される．つまり，任意の点 $a : 1 \to A$ に対して，$fa = ga$ となるとき，二つの射 $f, g : A \to b$ は等しくなる．

しかし，注意すべきなのは，どんな場合でもこのような事が成立する訳ではないことである！モノイドの圏の対象 M には幾つの点が存在するだろうか？つまり，あるモノイド M が与えられたとき，$1 \to M$ の形の射は幾つあるだろうか？一つだけだ！では，ブール代数には幾つの点があるだろうか？

一般的に対象はその点によって決定される訳ではないので，**一般化元**（*generalized elements*）という道具立てを導入すると便利である．それは，（任意のドメイン X を持つ）任意の射

$$x : X \to A$$

である．これらは，**一般化元**あるいは**可変元**（*variable elements*）などと呼ばれる．計算機科学や論理学では，射 $1 \to A$ を定数あるいは閉じた項，一般の射 $X \to A$ を任意の項と見做すことが良くある．これらをまとめると次のようになる．

例 2.12.

1. **Pos** の射 $f, g : P \to Q$ を考える．すると，全ての $x : 1 \to P$ に対し $fx = gx$ となるとき，その時に限り $f = g$ となっている．この意味で，*poset* は射を分離するのに「十分に多くの点」を持っている．
2. 対照的に **Mon** では，モノイド M は唯一つの点しか持たないため，どんな準同型 $h, j : M \to N$ に対しても，全ての $x : 1 \to M$ で $hx = jx$ となってしまう．従って，モノイドは「十分に多くの点」を持っていない．
3. しかし，$\mathbf{C}$ を任意の圏とすると，任意の $f, g : C \to D$ に対し，全ての $x : X \to A$ について $fx = gx$ を満たすとき，その時に限り $f = g$ が成り立つ（何故か？）．従って，任意の対象は十分な一般化元を持つ．
4. 事実，ある「試験」対象 T を固定して，$T \to A$ の形の一般化元だけを考えれば十分であることがしばしばある．以下ではそれについて考察しよう．

一般化元は色々な条件を「テスト」するのに役立つ．例として，次の形の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "x'"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

f は，任意の x, x' に対し $x \neq x'$ なら $fx \neq fx'$ が成り立つとき，モニックなのであった．つまり，f は「一般化元について単射である」ということだ．

同様に一般の圏について，図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "\alpha"] \\ D \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

が可換かどうか，即ち $\alpha f = \beta g$ かどうかをテストするには，全ての一般化元 $x : X \to A$ に対し，$\alpha f x = \beta g x$ が成立するかどうかを確かめれば良い（特に $x = 1_A : A \to A$ とすればよい）.

例 2.13. 一般化元は定数元よりも「更なる構造を明らかにする」のに役立てることが出来る．例として，次の *poset* X と A を考える．

$$X = \{x \le y, x \le z\}$$
$$A = \{a \le b \le c\}$$

すると，次で定義される順序を保つ全単射が存在する．

$$f(x) = a, \qquad f(y) = b, \qquad f(z) = c$$

f が圏 **Pos** でモニックかつエピックとなることを示すのは容易である．しかし，f は明らかに同型射ではない．X と A は「異なる構造を持つ」といいたい人もいるだろう．そして実際，それはこれらが非同型であるということから出て来る．しかし，両者が（他の射 $X \to A$ によって）同型**になることはない**ことを**証明する**にはどうすればよいだろう？一般的に，この種のことを示すのはとても難しい．

二つの対象が同型でないことを示すひとつの方法は「不変量」，即ち同型射によって保存される属性を使うことである．もし二つの対象が異なる不変量を持てば，それらが同型となることは出来ない．一般化元は不変量を定義するための簡単な手段を与える．例えば，X と A の大域元の個数は等しい．つまり，両者共に三つの元からなる集合である．しかし，その代わりに「試験対象」として *poset* $\mathbf{2} = \{0 \le 1\}$ をとり，そこからの射「$\mathbf{2}$-元」$\mathbf{2} \to X$ を考えてみよう．すると，X は $\mathbf{2}$-元を *5* つ持ち，A は *6* つ持つ．この数は不変量なので，二つの *poset* は同型にはなりえない．より詳しくいえば，任意の *poset* P に対して数不変量を次で定めることが出来る：

$$|\mathrm{Hom}(\mathbf{2}, P)| = \mathrm{Hom}(\mathbf{2}, P) \text{ の元の個数}$$

すると，$P \cong Q$ のとき $|\mathrm{Hom}(\mathbf{2}, P)| = |\mathrm{Hom}(\mathbf{2}, Q)|$ となることは容易に示せる．何故なら任意の同型

$$P \underset{j}{\overset{i}{\rightleftarrows}} Q$$

は，任意の $f : \mathbf{2} \to P$, $g : \mathbf{2} \to Q$ に対して i_*, j_* を

$$i_*(f) = if$$
$$j_*(g) = jg$$

で定めることにより，次の同型を与えるからである．

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{2}, P) \underset{j_*}{\overset{i_*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}(\mathbf{2}, Q)$$

じっさい，これは $\mathrm{Hom}(X, -)$ が函手を与え，函手は同型射を保つというごく一般的な事実の特殊な場合になっている．

例 2.14. 上の例のように，ある対象 T の「基づく」一般化元が特に「解明的（*revealing*）」であることがよくある．そうした元を幾何学的に捉えると，「A 内で T の形を取る図形」と見ることが出来る．*poset* の圏での射 $\mathbf{2} \to P$ は，P で $p \le p'$ の形を取る図形である，といった具合である．例えば，既に見てきた通りモノイドの圏では終対象からの射は何の役にも立たないが，一つの生成元上の自由モノイド $M(1)$ からの射を考えれば準同型を区別するのには十分である．つまり，$f, g : M \to M'$ が等しいことを示すには，そうした $M(1)$ からの射との合成が全て等しくなることを示せばよいのである．我々は $M(1) = \mathbb{N}$（自然数全体のモノイド）であることを知っているので，$M(1)$ に基づく一般化元 $M(1) \to M$ は，M 内で「$\mathbb{N}$ の形をしている図形」と考えることが出来る．事実，$M(1)$ の普遍写像性より，

$$|M| \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(1, |M|) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mon}}(M(1), M)$$

となるので，台集合 $|M|$ はそんな図形の集まり $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mon}}(\mathbb{N}, M)$ と（同型として）一致する．この意味において，モノイドからのマップは，モノイドの中で $\mathbb{N}$ の形をとる図形によって決定されるのである．

2.4　直積

次に，圏における二つの対象の直積が，圏論的にどう定義されるのかを見ていこう．この定義は，1950 年に Mac Lane によって初めて与えられた．圏論を使って基礎的な概念を定義した最初期の例であろう．

ここでの「定義」とは，今までも使ってきたように，圏の対象と射の言葉を用いた抽象的な特徴付けを意味する．以前も行ったように，これは普遍写像性を与えることでなされる．圏論ではよくあるように，この普遍写像性によって興味のある構造が同型を除いて一意に決定される．この章の後半では，そうした特徴付けに関する他の例を多くみてゆくことになる．

それでは，まず集合の直積について考えてみよう．集合 A と B が与えられたとき，A と B の**デカルト積** とは，順序対の集合

$$A \times B = \{\, (a, b) \mid a \in A,\, b \in B \,\}$$

である．ここで，

$$\pi_1(a, b) = a, \quad \pi_2(a, b) = b$$

で与えられる「座標射影」

$$A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$$

が存在することに注目しよう．そして実際，任意の元 $c \in A \times B$ について次が成り立つ．

$$c = (\pi_1 c, \pi_2 c)$$

この状況は，次の図式により簡潔に捉えることが出来る．

$$
\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, "a"'] \arrow[d, dotted, "{(a,b)}"] \arrow[dr, "b"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}
$$

元を一般化元で置き換えることにより，次の定義を得る．

定義 2.15. 任意の圏 $\mathbf{C}$ において，対象 A と B の**直積図式** は，対象 P と射

$$
\begin{tikzcd}
A & P \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & B
\end{tikzcd}
$$

から成り，次の普遍写像性を満たす．

次の形の図式

$$
\begin{tikzcd}
A & X \arrow[l, "x_1"'] \arrow[r, "x_2"] & B
\end{tikzcd}
$$

が与えられた時，次の図式を可換にする $u : X \to P$ が一意的に存在する．

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[d, dotted, "u"] \arrow[dr, "x_2"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B
\end{tikzcd}
$$

すなわち，$x_1 = p_1 u$, $x_2 = p_2 u$ を満たす．

注意 2.16. 他の普遍写像性と同様，この定義は二つの部分からなっている．

存在：　$x_1 = p_1 u$, $x_2 = p_2 u$ を満たすある $u : X \to U$ が存在する．
一意性：　任意の $v : X \to U$ について，$p_1 v = x_1$, $p_2 v = x_2$ ならば $v = u$ である．

命題 2.17. 直積は同型を除いて一意である．

Proof. 二つの A と B の直積

$$
\begin{tikzcd}
A & P \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & B \\
A & Q \arrow[l, "q_1"'] \arrow[r, "q_2"] & B
\end{tikzcd}
$$

があったとしよう．この時, Q は直積であるので, $i : P \to Q$ が一意に存在して, $q_1 \circ i = p_1$ かつ $q_2 \circ i = p_2$ を満たす．同様に P が直積であることから，一意な射 $j : Q \to P$ が存在し，$p_1 \circ j = q_1$ かつ $p_2 \circ j = q_2$ を満たす．

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, dotted, "i"] \arrow[dr, "p_2"] & \\
A & Q \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"'] \arrow[d, dotted, "j"] & B \\
 & P \arrow[ul, "p_1"] \arrow[ur, "p_2"'] &
\end{tikzcd}$$

合成すると，$p_1 \circ j \circ i = p_1, p_2 \circ j \circ i = p_2$ となる．ここで，$p_1 \circ 1_P = p_1, p_2 \circ 1_P = p_2$ も成立しているので，射の一意性の条件より $j \circ i = 1_P$ となり，同様にして，$i \circ j = 1_Q$ を得る．従って，$i : P \to Q$ は同型射となる． □

A と B が直積を持つとき，そのうちの一つを

$$A \xleftarrow{p_1} A \times B \xrightarrow{p_2} B$$

と書く．ここで，定義の X, x_1, x_2 が与えられたとき，

$$\langle x_1, x_2 \rangle \text{ で } u : X \to A \times B$$

を表わす．

しかし，注意すべきなのは，対象の組は圏の中で複数の異なる直積を持ちうる，ということである．例を挙げれば，直積 $A \times B, p_1, p_2$ とある同型射 $i : A \times B \to Q$ が与えられたとき，図式 $Q, p_1 \circ h, p_2 \circ h$ もまた A と B の直積となる．

さて，直積**への**射

$$f : X \to A \times B$$

は射の組

$$f_1 : X \to A, \quad f_2 : X \to B$$

と「同じもの」なのであった．したがって，そうした射のことは本質的に忘れてしまっても問題がない．なぜなら，そういった射は射の組によって一意的に決定されるからである．しかし，圏が積をもつとき，ある有用な概念を得ることが**できる**．つまり，直積**からの**射

$$g : A \times B \to Y$$

を考えることが出来る．このような g は「2 変数函数」である．つまり，任意の二つの一般化元 $f_1 : X \to A,\ f_2 : X \to B$ が与えられたとき，元 $g\langle f_1, f_2 \rangle : X \to Y$ を得ることが出来る．このような射 $g : A \times B \to Y$ は，射が直積へと入射する場合とは異なり，より基本的な形には「簡約可能（reducible）」ではない（念の為にいえば，これらは「カリー化」$\lambda f : A \to Y^B$ を通じて「冪」Y^B と関連している．詳細は第**??**章で扱う）．

2.5　直積の例

1. 集合のデカルト積は既に扱った．順序対 $\langle a, b\rangle$ に異なる定義を採用した場合，それぞれに対応する異なる集合
$$A \times B \quad と \quad A \times' B$$
を考えることが出来る．これらは共に直積（の一つ）であり，それぞれ同型となる．例えば，異なる定義の例として，以下のように取ることが出来る．
$$\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$
$$\langle a, b\rangle' = \langle\langle a\rangle, \langle a, b\rangle\rangle$$
2. モノイドや群のような「構造の入った集合」の直積は，しばしばその台集合の直積に**成分ごと**の演算を入れたものとして構成することが出来る．例えば，G, H が群のとき，$G \times H$ は台集合を $\{\, \langle g, h\rangle \mid g \in G, h \in H \,\}$ として，二項演算を，
$$\langle g, h\rangle \cdot \langle g', h'\rangle = \langle g \cdot g', h \cdot h'\rangle$$
単位元を
$$u = \langle u_G, u_H\rangle$$
逆元を
$$\langle g, h\rangle^{-1} = \langle g^{-1}, h^{-1}\rangle$$
で定めたものとして構成できる．射影準同型 $G \times H \to G$ (or H) は明らかに $\langle g, h\rangle \mapsto g$ (or h) である．
3. 同様に，$\mathbf{C}, \mathbf{D}$ が圏のとき，対象および射の組から成る圏
$$\mathbf{C} \times \mathbf{D}$$
も既に定義してあった．自明な射影函手と合わせれば，（もし $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ が小さければ）これは実際 **Cat** での直積となる．（このことを確かめよ．つまり，こうして定義された直積圏が直積の普遍写像性を満たすことを示せ．）
より特別な場合として，poset の直積およびモノイドの直積を，それぞれを圏と見做したときの直積として得ることが出来る．（確認：射影も写像の組から一意に得られる射も単調写像となること，また **Cat** において構成された poset の直積が **Pos** においても直積となっていることを示せ．**Mon** の場合も同様の考察を行え．）
4. P を poset として元 $p, q \in P$ の直積を考えよう．この時，射影
$$p \times q \leq p$$
$$p \times q \leq q$$
が存在しなくてはならない．また，任意の元 x に対して，
$$x \leq p \text{ かつ } x \leq q$$
が成立するなら，
$$x \leq p \times q$$

でなくてはならない．

この演算 $p \times q$ が何であるかわかるだろうか？それはいわゆる**下限** $p \times q = p \wedge q$ である．後程見てゆくように，他の順序論的概念も圏論の概念の特別な場合であることが多い．

5.（位相空間について幾らか知っている人向けの例.）二つの**位相空間** X, Y の通常の定義による直積空間が，位相空間と連続写像の圏 **Top** で実際に直積となることを示そう．そこで，位相空間 X, Y とその直積空間 $X \times Y$ および射影

$$X \xleftarrow{p_1} X \times Y \xrightarrow{p_2} Y$$

が与えられているとしよう．$O(X \times Y)$ [*2]は，$U \in O(X), V \in O(Y)$ に対して $U \times V$ の形の集合を開基として生成されることを思い出そう．つまり，任意の $W \in O(X \in Y)$ はそのような開基の和集合として表わすことが出来る．

- $p^{-1}U = U \times Y$ より明らかに p_1 は連続. [*3]
- 連続写像 $f_1 : Z \to X, f_2 : Z \to Y$ が与えられたとき，写像 $f : Z \to X \times Y$ を $f = \langle f_1, f_2 \rangle$ によって定める．あとは，f が連続であることを示せば良い．
- 任意の $W = \bigcup_i (U_i \times V_i) \in O(X \times Y)$ に対し，$f^{-1}(W) = \bigcup_i f^{-1}(U_i \times V_i)$ が成立する．よって，あとは $f^{-1}(U \times V)$ が開集合となることを示せばよい．ところで，

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= f^{-1}((U \times Y) \cap (X \times V)) \\ &= f^{-1}(U \times Y) \cap f^{-1}(X \times V) \\ &= f^{-1} \circ p_1^{-1}(U) \cap f^{-1} \circ p_2^{-1}(V) \\ &= (f_1)^{-1}(U) \cap (f_2)^{-1}(V) \end{aligned}$$

であり，また f_1, f_2 は連続よりその逆像 $(f_1)^{-1}(U), (f_2)^{-1}(V)$ は共に開集合となる．よって示された．

次の図式はこの状況を端的かつ簡潔に捉えたものとなっている．

$$\begin{tikzcd} & O(Z) & \\ O(X) \arrow[ur, "f_1^{-1}"] \arrow[r, "p_1^{-1}"'] & O(X \times Y) \arrow[u, dotted, "f^{-1}"'] & O(Y) \arrow[ul, "f_2^{-1}"'] \arrow[l, "p_2^{-1}"] \end{tikzcd}$$

6.（型理論に馴染みのある人向けの例.）（単純型付き）λ 計算のについて考えよう．λ 計算とは，「変数束縛」と函数の評価に基づいた，函数概念の明確化と操作のための形式系である．例として，実係数多項式 $x^2 + 2y$ を考えよう．λ 計算では，（各固定値 x に対する）函数 $y \mapsto x^2 + 2y$ を $\lambda y.x^2 + 2y$ と書き，函数 $x \mapsto (y \mapsto x^2 + 2y)$ を表わすのに $\lambda x.\lambda y.x^2 + 2y$ と書く．

形式的には，λ 計算は次の要素から成る．

- 型：$A \times B, A \to B, \ldots$（幾つかの基本型から生成される）

[*2] 訳注：ここでは空間 S の開集合系を $O(S)$ で表わしている．

[*3] 訳注：標準射影 p_1, p_2 を共に連続とする位相の中で最も弱いものとして積位相を定義することもある．その場合，ここの議論は自明となる．

- 項：

$$
\begin{aligned}
x, y, z, \ldots : A &\quad \text{（各型 } A \text{ に対する変数）} \\
a : A, b : B, \ldots : A &\quad \text{（ありうる幾つかの型付き定数）} \\
\langle a, b \rangle : A \times B &\quad (a : A, b : B) \\
\mathrm{fst}(c) : A &\quad (c : A \times B) \\
\mathrm{snd}(c) : B &\quad (c : A \times B) \\
ca : B &\quad (c : A \to B, a : A) \\
\lambda x.b : A \to B &\quad (x : A, b : B)
\end{aligned}
$$

- 等式：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{fst}(\langle a, b \rangle) &= a \\
\mathrm{snd}(\langle a, b \rangle) &= b \\
\langle \mathrm{fst}(c), \mathrm{snd}(c) \rangle &= c \\
(\lambda x.b)a &= b[a/x] \\
\lambda x.cx &= c \quad \text{（} x \text{ が } c \text{ に現れない場合）}
\end{aligned}
$$

項の二項関係 $a \sim b$（通常 $\beta\eta$-**同値性**と呼ばれる）は，上の等式から生成される同値関係に，束縛変数の付け替え

$$\lambda x.b = \lambda y.b[y/x] \quad \text{（} b \text{ に } y \text{ が現れない場合）}$$

を付け加えたものである．

そこで，型の圏 $\mathbf{C}(\lambda)$ は次のように定義される：

- 対象：型
- 射 $A \to B$：閉じた項 $c : A \to B$ を同値関係 $c \sim c'$ によって同一視したもの．
- 恒等射：$1_A = \lambda x.x$ （ただし $x : A$）
- 合成射：$c \circ b = \lambda x.c(bx)$

この圏が well-defined であることを見よう．

単位律：

$$
\begin{aligned}
c \circ 1_B &= \lambda x(c((\lambda y.y)x)) = \lambda x(cx) = c \\
1_A \circ c &= \lambda x((\lambda y.y)(cx)) = \lambda x(cx) = c
\end{aligned}
$$

結合律：

$$
\begin{aligned}
c \circ (b \circ a) &= \lambda x(c((b \circ a)x)) \\
&= \lambda x(c((\lambda y.b(ay))x)) \\
&= \lambda x(c(b(ax))) \\
&= \lambda x(\lambda y(c(by))(ax)) \\
&= \lambda x((c \circ b)(ax)) \\
&= (c \circ b) \circ a
\end{aligned}
$$

この圏は二項直積を持つ．実際，型 A, B が与えられているとし，

$$p_1 = \lambda z.\mathrm{fst}(z), \; p_2 = \lambda z.\mathrm{snd}(z) \quad (z : A \times B)$$

としよう．そして下図のような a, b が与えられているとする．

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[ld, "a"'] \arrow[d, dotted, "{(a,b)}"] \arrow[rd, "b"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B
\end{tikzcd}
$$

但し

$$(a, b) = \lambda x.\langle ax, bx\rangle$$

である．すると，

$$
\begin{aligned}
p_1 \circ (a, b) &= \lambda x(p_1((\lambda y.\langle ay, by\rangle)x)) \\
&= \lambda x(p_1\langle ax, bx\rangle) \\
&= \lambda x(ax) \\
&= a
\end{aligned}
$$

であり，同様に $p_2 \circ (a, b) = b$ となる．
最後に $c : X \to A \times B$ とすると

$$p_1 \circ c = a,\ p_2 \circ c = b$$

がありこの時，

$$
\begin{aligned}
(a, b) &= \lambda x.\langle ax, bx\rangle \\
&= \lambda x.\langle (p_1 \circ c)x, (p_2 \circ c)x\rangle \\
&= \lambda x.\langle (\lambda y(p_1(cy)))x, (\lambda y(p_2(cy)))x\rangle \\
&= \lambda x.\langle (\lambda y((\lambda z.\mathrm{fst}(z))(cy)))x, (\lambda y((\lambda z.\mathrm{snd}(z))(cy)))x\rangle \\
&= \lambda x.\langle \lambda y(\mathrm{fst}(cy))x, \lambda y(\mathrm{snd}(cy))x\rangle \\
&= \lambda x.\langle \mathrm{fst}(cx), \mathrm{snd}(cx)\rangle \\
&= \lambda x.cx \\
&= c
\end{aligned}
$$

となる．

注意 2.18. λ 計算にはもう一つ驚くべき解釈がある．すなわち，命題計算における証明概念の体系として解釈出来るのである．この対応は「Curry-Howard」対応として知られている．手短かにいえば，型を命題（$A \times B$ を連言（論理積），$A \to B$ を含意）として解釈し，項 $a : A$ を命題 A の証明と考えるのである．以下のような形の項の形成規則

$$\frac{a : A \qquad b : B}{\langle a, b\rangle : A \times B}$$

は，証明のラベルを帰納的に組み上げる方法を示した注釈付きの推論規則として読むことが出来る．そこで例えば，前提のキャンセルを角括弧で表わすことにすると，

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{[A] \qquad [B]}{A \times B}}{B \to (A \times B)}}{A \to (B \to (A \times B))}
$$

のような自然演繹の証明は，次のようにラベル付けすることが出来る．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x:A] \qquad [y:B]}{\langle x,y\rangle : A\times B}}{\lambda y.\langle x,y\rangle : B\to(A\times B)}}{\lambda x\lambda y.\langle x,y\rangle : A\to(B\to(A\times B))}$$

従って，最後の「証明項」$\lambda x\lambda y.\langle x,y\rangle$ は「命題」$A\to(B\to(A\times B))$ の証明の筋道を記録しており，同じ命題に対する異なる証明は異なる項を与えることがある．

結果として得られる論理と型理論の「同型」について言及されることがしばしばあるが，ここで我々が実際に扱っているのは，単に（1.4 節の例 10 で定義した）連言と含意を持つ命題計算の圏から λ 計算の圏への函手にすぎない．一般的に，証明の間に更に何らかの等式をおかない限り，この函手は同型射にはならない．

2.6　直積のある圏

$\mathbf{C}$ を，任意の対象の組が直積図式を持つ圏とする．下図のような直積を持った対象と射があったとしよう．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & A\times A' \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & A' \arrow[d, "f'"] \\
B & B\times B' \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"'] & B'
\end{tikzcd}$$

このとき，$f\times f' = \langle f\circ p_1, f'\circ p_2\rangle$ によって

$$f\times f' : A\times A' \to B\times B'$$

を定める．従って，下の図式の二つの長方形は可換となる．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & A\times A' \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, dotted, "f\times f'"] & A' \arrow[d, "f'"] \\
B & B\times B' \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"'] & B'
\end{tikzcd}$$

こうして，任意の二つの対象に対しその直積を選んでやることで，函手

$$\times : \mathbf{C}\times\mathbf{C}\to\mathbf{C}$$

を得る．これが函手となることは，直積の普遍写像性を使うことによって読者が簡単に確かめられるだろう．ある圏が任意の二つの対象に対する直積を持つとき，その圏は**二項直積を持つ**という．

似たような普遍写像性によって三項直積

$$A_1\times A_2\times A_3$$

も定義することが出来る（三つの射影 $p_i : A_1 \times A_2 \times A_3 \to A_i$ があって，任意の対象 X と三つの射 $x_i : X \to A_i$ に対し射 $u : X \to A_1 \times A_2 \times A_3$ が一意に存在して，$p_i u = x_i$ を満たす）．このような条件は明らかに任意個の因子に対して考えることが出来る．

一方で，もし圏が二項直積を持てば，明らかに二つ以上の因子からなる任意の有限直積を持つ．例えば，

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C$$

とすれば三項直積の普遍写像性は満たされる．他方，$A \times (B \times C)$ を定義として採用してもよい．この事実は，二項直積 $A \times B$ は同型を無視すれば結合律を満たすということを意味する．何故なら三項直積の普遍写像性より，

$$(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$$

が成立しなくてはならないからである．

終対象が「無項」直積 (nullary product) となっていることに注目しよう：

> ゼロ個の対象が与えられた時，ゼロ個の射影を持つ対象 1 があり，他の対象 X とゼロ個の射が与えられれば，射
>
> $$! : X \to 1$$
>
> が一意に存在して，特にどんな図式も可換にしない．

同様に，任意の対象 A はそれ自身を一度だけ乗じた，A の**単項直積** (*unary product*) である．

最後に，**任意の**集合 I で添字付けられた対象の族 $(C_i)_{i \in I}$ の直積を，無項，単項，二項，n 項直積からの類推によって「I 項直積」の普遍写像性を与えることで定義することが出来る．この精確な定式化は演習問題とする．

定義 2.19. 圏 $\mathbf{C}$ が**任意の有限直積を持つ**とは，終対象と任意の二項直積を持つ（従って任意の有限濃度の直積を持つ）ことである．圏 $\mathbf{C}$ が**任意の（小さな）直積を持つ**とは，$\mathbf{C}$ の対象から成る任意の集合が直積を持つことである．

2.7　Hom 集合

この節では，局所的に小さな圏のみを考えよう．

任意の圏 $\mathbf{C}$ について，対象 A, B が与えらえたとき，

$$\mathrm{Hom}(A, B) = \{\, f \in \mathbf{C} \mid f : A \to B \,\}$$

と書き，このような射の集合を *Hom* **集合**と呼んだことを思い出そう．$\mathbf{C}$ の任意の射 $g : B \to B'$ は写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(A, g) : \mathrm{Hom}(A, B) &\to \mathrm{Hom}(A, B') \\ (f : A \to B) &\mapsto (g \circ f : A \to B \to B') \end{aligned}$$

を引き起こすことに注意する．つまり，$\mathrm{Hom}(A,g) = g \circ f$ である[*4]．$\mathrm{Hom}(A,g)$ の代わりに g_* と書くこともある．つまり，

$$g_*(f) = g \circ f$$

である．

これが A の（共変）**表現可能函手** (*representable functor*) と呼ばれる函手

$$\mathrm{Hom}(A,-) : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}$$

を定めることを示そう．我々が示すべきことは，

$$\mathrm{Hom}(A, 1_X) = 1_{\mathrm{Hom}(A,X)}$$

と

$$\mathrm{Hom}(A, g \circ f) = \mathrm{Hom}(A,g) \circ \mathrm{Hom}(A,f)$$

の二つである．引数 $x : A \to X$ を取れば明らかに，

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(A, 1_X)(x) &= 1_X \circ x \\ &= x \\ &= 1_{\mathrm{Hom}(A,X)}(x)\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(A, g \circ f)(x) &= (g \circ f) \circ x \\ &= g \circ (f \circ x) \\ &= \mathrm{Hom}(A,g)(\mathrm{Hom}(A,f)(x))\end{aligned}$$

となる．

こうした表現可能函手については後程より慎重に学んでゆく．目下のところは，もうひとつの直積の定義の定式化を得るのに Hom 集合をどのように用いることが出来るかを見ていきたい．

任意の対象 P に対して，二つの射 $p_1 : P \to A$ および $p_2 : P \to B$ は集合

$$\mathrm{Hom}(P,A) \times \mathrm{Hom}(P,B)$$

の元 (p_1, p_2) を決定する．さて，任意の射

$$x : X \to P$$

が与えられたとき，その p_1 および p_2 との合成は，下図に示すような二つの射 $x_1 = p_1 \circ x : X \to A$ および $x_2 = p_2 \circ x : X \to B$ を与える．

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[d, "x"] \arrow[dr, "x_2"] & \\ A & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B \end{tikzcd}$$

[*4] 訳注：正しくは $\mathrm{Hom}(A,g)(f) = g \circ f$ と書くべき？

このようにして，

$$\vartheta_X(x) = (x_1, x_2) \tag{2.1}$$

で定義される写像

$$\vartheta_X = (\mathrm{Hom}(X, p_1), \mathrm{Hom}(X, p_2)) : \mathrm{Hom}(X, P) \to \mathrm{Hom}(X, A) \times \mathrm{Hom}(X, B)$$

を得る．この写像 ϑ_X により，直積であるための条件を次のように簡潔に表現することが出来る．

命題 2.20. 図式

$$A \xleftarrow[p_1]{} P \xrightarrow[p_2]{} B$$

が A と B の直積であるための必要十分条件は，(2.1) で与えられる自然な写像 ϑ_X が同型

$$\vartheta_X : \mathrm{Hom}(X, P) \cong \mathrm{Hom}(X, A) \times \mathrm{Hom}(X, B)$$

となっていることである．

Proof. 直積の普遍写像性を確かめよう．普遍写像性の主張はまさに任意の元 $(x_1, x_2) \in \mathrm{Hom}(X, A) \times \mathrm{Hom}(X, B)$ に対し，$x \in \mathrm{Hom}(X, P)$ が一意に存在し，$\vartheta_X(x) = (x_1, x_2)$ となるということである．従って ϑ_X は全単射となる． □

定義 2.21. $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ を二項直積を持つ圏とする．函手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が**二項直積を保存する**とは，F が $\mathbf{C}$ の任意の直積図式

$$A \xleftarrow[p_1]{} A \times B \xrightarrow[p_2]{} B$$

を $\mathbf{D}$ の直積図式

$$FA \xleftarrow[Fp_1]{} F(A \times B) \xrightarrow[Fp_2]{} FB$$

に移すことである．

F が直積を保存するのは，

$$F(A \times B) \cong FA \times FB$$

が「標準的な (canonical)」同型であるときのみであることがわかる．つまり，$\mathbf{D}$ の標準的な「比較射」

$$\langle Fp_1, Fp_2 \rangle : F(A \times B) \to FA \times FB$$

が同型射であるとき，その時に限って F は直積を保存する．

例えば，忘却函手 $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Sets}$ は二項直積を保存する．

系 2.22. $\mathbf{C}$ を直積を持つ圏とする．任意の $\mathbf{C}$ の対象 X に対し，（共変）表現可能函手

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -) : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}$$

は直積を保つ函手である．

Proof. 任意の $A, B \in \mathbf{C}$ に対し，上の命題 2.20 によって標準的な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, A \times B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, B)$$

が存在することがわかる． □

2.8　演習問題

1. 集合の間の写像は，全射である時，その時に限ってエピ射となることを示せ．また，**Sets** での同型射はモニックかつエピックな射と一致することを結論せよ．
2. 任意の poset 圏において，全ての射はモニックかつエピックとなることを示せ．
3. （逆射の一意性．）もし射 $f : A \to B$ が逆射 $g, g' : B \to A$ を持てば（つまり $g \circ f = 1_A, f \circ g = 1_B$ であり，g' についても同様とするとき），$g = g'$ となることを示せ．
4. 任意の圏 $\mathbf{C}$ における可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

について，次を示せ．

(a) もし f, g が同型射（あるいはモノ射，エピ射）の時，h も同型射（それぞれモノ射，エピ射）となる．

(b) h がモニックなら f もモニック．

(c) h がエピックなら g もエピック．

(d) h がモニックであっても g がモニックである必要はない（例を挙げよ）．

5. 任意の圏の射

$$f : A \to B$$

について，以下はすべて同値であることを示せ．

(a) f は同型射．

(b) f はモノ射かつ分裂エピ射．

(c) f は分裂モノ射かつエピ射．

(d) f は分裂モノ射かつ分裂エピ射．

6. グラフ準同型 $h : G \to H$ がモニックとなるのは，辺と頂点のそれぞれについて単射であるときだけであることを示せ．
7. 任意の圏において，射影的対象のレトラクトが再び射影的となることを示せ．
8. 任意の集合が（選択公理の下で）射影的であることを示せ．
9. poset の間のエピ射は（元に関して）全射であること，一元 poset $\mathbf{1}$ は射影的であることを示せ．
10. 任意の集合は，離散 poset と見做すことにより poset の圏で射影的対象となる事を示せ（いままでの演習問題を用いよ）．射影的でない poset の例をひとつ挙げよ．

任意の射影的な poset は離散的であり，したがって集合と同一視できることを示せ．全ての射影的な poset とその間の単調写像を考えることで，**Sets** は **Pos** の射影的対象からなる「充満部分圏」（と同型）であることを示せ．

11. A を集合とする．このとき，A-モノイドを台集合への写像 $m : A \to U(M)$ を持ったモノイド M として定義する．A-モノイドの射 $h : (M, m) \to (N, n)$ は（可換三角形）$U(h) \circ m = n$ を満たすモノイド準同型 $h : M \to N$ である．自明な恒等射および合成射とあわせて，これにより A-モノイドからなる圏 A-**Mon** を定義することが出来る．

    A-**Mon** の始対象は A 上の自由モノイド $M(A)$ と同じものであることを示せ．（ヒント：それぞれの普遍写像性を比較せよ.）

12. 任意のブール代数 B について，ブール準同型 $h : B \to \mathbf{2}$ は B のウルトラフィルターと正確に対応していることを示せ．

13. 二項直積を持つ任意の圏において，

$$A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$$

    を直接的に示せ．

14. (a) 任意の添字集合 I について，I で添字付けられた圏の対象の族 $(X_i)_{i \in I}$ の積 $\prod_{i \in I} X_i$ を，二項直積（つまり $I = 2$ の場合）を一般化した普遍写像性を与えることで定義せよ．

    (b) X を任意の集合として，各 $i \in I$ に対し $X_i = X$ で定めた「定数族」を考える．**Sets** において，$f : I \to X$ なる写像全体からなる集合 X^I が上の普遍写像性を持つことを示せ．すなわち，

$$X^I \cong \prod_{i \in I} X$$

    を示せ．

15. 圏 $\mathbf{C}$ と対象 A, B が与えられたとする．ここで圏 $\mathbf{C}_{A,B}$ を，対象を $x_1 : X \to A$, $x_2 : X \to B$ なる (X, x_1, x_2) とし，射 $f : (X, x_1, x_2) \to (Y, y_1, y2)$ は $y_1 \circ f = x_1$ かつ $y_2 \circ f = x_2$ を満たす射 $f : X \to Y$ であるような圏とする．

    $\mathbf{C}_{A,B}$ は，A, B が $\mathbf{C}$ で直積を持つとき，そのときにに限り終対象を持つことを示せ．

16. λ 計算の型の圏 $\mathbf{C}(\lambda)$ において, 直積函手 $A, B \mapsto A \times B$ を直接決定せよ．また, 任意に固定した型 A に対して, 型 X を $A \to X$ に移す函手 $A \to (-) : \mathbf{C}(\lambda) \to \mathbf{C}(\lambda)$ が存在することを示せ．

17. 直積を持つ任意の圏 $\mathbf{C}$ において，射 $f : A \to B$ の**グラフ** をモノ射

$$\Gamma(f) = \langle 1_A, f \rangle : A \rightarrowtail A \times B$$

    で定める（これがモノ射となるのは何故か？）．特に $\mathbf{C} = \mathbf{Sets}$ のとき，これが第 1 章で定義した二項関係の圏 **Rel** への函手 $\Gamma : \mathbf{Sets} \to \mathbf{Rel}$ を定めることを示せ．（実際の二項関係 $R(f) \subseteq A \times B$ を得るには $\Gamma(f) : A \rightarrowtail A \times B$ の像を取ればよい.）

18. モノイドから集合への忘却函手 $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Sets}$ が表現可能函手であることを示せ．U は任意の（小さな）直積を保つことを導け．

第 3 章

双対性

これまでに，始対象と終対象，エピ射とモノ射というような，ある種の「双対性」を示す定義の例を幾つかみてきた．今度は，そうした双対性をより体系的に考察していこう．幾分自明な第一印象に反し，それこそが正に数学的構造に対する圏論的なアプローチの深く強力な側面なのである．

3.1 双対性原理

手始めに，圏の形式的な定義をもう一度振り返っておこう．圏とは，対象 $A, B, C, \ldots$ と射 $f, g, h, \ldots$ という二つの構成要素，そして四つの演算 $\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f), 1_A, g \circ f$ があって，次の七つの公理を満たす物であった．

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{dom}(1_A) = A & & \mathrm{cod}(1_A) = A \\ f \circ 1_{\mathrm{dom}(f)} = f & & 1_{\mathrm{cod}(f)} \circ f = f \\ \mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f) & & \mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}(g) \\ h \circ (g \circ f) & = & (h \circ g) \circ f \end{array} \tag{3.1}$$

ここで，演算「$g \circ f$」は，

$$\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f)$$

のときのみ定義される．よって，$\circ$ を含む等式には，$\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f) \Rightarrow \mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f)$ のように，この条件が適切な形で現れなくてはならない．

さて，Σ を圏の初等的な言語による文とすると，次の置換

$$\begin{gathered} f \circ g \text{ を } g \circ f \\ \mathrm{cod} \text{ を } \mathrm{dom} \\ \mathrm{dom} \text{ を } \mathrm{cod} \end{gathered}$$

によって「双対文」Σ^* を作ることが出来る．この Σ^* も再び well-formed な文となることは簡単に示せる．次に，圏の公理を一切使わずに，Σ から Δ を導くことが出来たとする．即ち，$\Sigma \Rightarrow \Delta$ としよう．すると，上の対応によって置換された項は単なる未定義定数として扱うことが出来るので，明らかに $\Sigma^* \Rightarrow \Delta^*$ が成り立つ．ところで，圏論の (3.1) による公理系 (CT) は，

$$\mathrm{CT}^* = \mathrm{CT}$$

が成立するという意味において，それ自身「自己双対的」であることに注目しよう．すると，次の**双対性原理**を得る．

命題 3.1 (形式的な双対性)**.** 圏論の言語による任意の文 Σ について，Σ が圏の公理のみから従うなら，その双対文 Σ^* も同様に従う．つまり，

$$\mathrm{CT} \Rightarrow \Sigma \text{ ならば } \mathrm{CT} \Rightarrow \Sigma^*$$

が成立する．

　より概念的な見方をしてみよう．文 Σ がある対象と射の図式を含むとする．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

すると，双対文 Σ^* は，その図式の射の向きと合成順を逆にしたものを含むことに注目しよう．

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "f"'] \\ & C \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "f \circ g"] \end{tikzcd}$$

圏 $\mathbf{C}$ の逆圏 $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ を思い出せば，Σ の $\mathbf{C}$ での解釈は，自動的に Σ^* の $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ での解釈を与えていることがわかる．

　さて，文 Σ が任意の圏 $\mathbf{C}$ で成立するとしよう．すると，Σ は任意の圏 $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ でも成立し，従って Σ^* 任意の圏 $(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ で成立する．しかし，任意の圏 $\mathbf{C}$ について，

$$(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathbf{C} \tag{3.2}$$

であるので，結局 Σ^* も任意の圏 $\mathbf{C}$ で成立することがわかる．従って，次の概念的な形の双対性原理を得る．

命題 3.2 (概念的な双対性原理)**.** 圏論に関する文 Σ が任意の圏で成立すれば，その双対文 Σ^* も任意の圏で成立する．

「終対象は同型を除いて一意である」といったような単純な，或いは自明な文しかこの種の双対性の影響を受けないように見えるかもしれないが，実際にはそれ以上の物である．これから見てゆくように，圏論的な双対性はとても強力で重要な現象であることがわかる．射影幾何学での点と線の間の双対性のように，一つの証明から二つの定理を生む，「見返り」を効果的に倍増する物なのである．

　そうした双対性は，任意の圏に関する主張を考える時だけではなく，むしろ「積の図式である」といったような抽象的な構造や性質の定義に対して，その双対を考えるときにも現れる．双対的な構造や性質は，合成順を入れ替えて「ドメイン」「コドメイン」を取り替えることによって得られる．（或いは，元の性質を逆圏で解釈することによっても同等の物が得られる．）3.2 節では，そういった種類の例を見る．

3.2　余積

この章では，積の例とその双対概念が何であるかを考えてゆこう．初めに，積の定義を思い出そう．

定義 3.3. 図式 $A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$ が A と B の**積**であるとは，任意の Z と $A \xleftarrow{z_1} Z \xrightarrow{z_2} B$ に対し，

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "z_1"'] \arrow[d, dotted, "u"] \arrow[dr, "z_2"] & \\
A & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B
\end{tikzcd}
$$

に示すような $p_i \circ u = z_i$ を見たす $u : Z \to P$ が一意に存在することである．

さて，この双対となる主張は何だろうか？

図式 $A \xrightarrow{q_1} Q \xleftarrow{q_2} B$ が A と B の「双対積」であるとは，任意の Z と $A \xrightarrow{z_1} Z \xleftarrow{z_2} B$ に対し，

$$
\begin{tikzcd}
 & Z & \\
A \arrow[ur, "z_1"] \arrow[r, "q_1"'] & Q \arrow[u, dotted, "u"] & B \arrow[ul, "z_2"'] \arrow[l, "q_2"]
\end{tikzcd}
$$

に示すような $u \circ q_i = z_i$ を見たす $u : Q \to Z$ が一意に存在することである．実際，これらは**余積（coproduct）**と呼ばれる．このように接頭辞「余 (co-)」によって双対概念であることを示すという規約がある．通常，余積は $A \xrightarrow{q_1} A + B \xleftarrow{q_2} B$ と書き，一意射 $u : A + B \to Z$ を $[f, g]$ と書く．「余射影」$i_1 : A \to A + B$ と $i_2 : B \to A + B$ は，通常**挿入射（入射；injection）**と呼ばれる．無論，挿入射は「単射的 (injective)」である必要はない．

従って，対象の余積は逆圏での積と一致する．もちろん，この対応によって余積の例を多く得ることも出来る．しかし，他のもっと親しみのある例には何があるのだろうか？

例 3.4. **Sets** において，二つの集合の余積 $A + B$ はその非交和 *(disjoint union)* であり，例えば次のように構成できる．

$$A + B = \{\, (a, 1) \mid a \in A \,\} \cup \{\, (b, 2) \mid b \in B \,\}$$

ここで，挿入射は

$$i_1(a) = (a, 1) \quad i_2(b) = (b, 2)$$

である．ここで，

$$
\begin{tikzcd}
& Z & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "q_1"'] & A+B \arrow[u, dotted, "{[f,g]}"'] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "q_2"]
\end{tikzcd}
$$

のように任意の写像 f, g が与えられたとき，$[f, g]$ を次で定める．

$$[f,g](x,\delta) = \begin{cases} f(x) & \delta = 1 \\ g(x) & \delta = 2 \end{cases}$$

このとき，$h \circ i_1 = f$ かつ $h \circ i_2 = g$ となる h があれば，任意の $(x, \delta) \in A+B$ について，

$$h(x,\delta) = [f,g](x,\delta)$$

とならなければならないことは簡単に計算できる．

Sets において，任意の有限集合 A は，

$$A \cong 1 + 1 + \cdots + 1 \ \ (n \text{ 回})$$

のように余積で表せることに注意しよう（但し，$n = \mathrm{card}(A)$）．これは，写像 $f : A \to Z$ が各 $a \in A$ に対する $f(a)$ の値によって一意に決定されることによる．従って，

$$\begin{aligned} A &\cong \{a_1\} + \{a_2\} + \cdots + \{a_n\} \\ &\cong 1 + 1 + \cdots + 1 \ \ (n \text{ 回}) \end{aligned}$$

が成立する．この類推で，単純に $2 = 1+1, 3 = 1+1+1$ などとしばしば略記する．

例 3.5. $M(A), M(B)$ を集合 A, B 上の**自由**モノイドとするとき，**Mon** でのこれらの余積を，

$$M(A) + M(B) \cong M(A+B)$$

として構成することが出来る．これは，$A+B$ 上の語を考えることで直接的に証明することもできるが，図式

$$
\begin{tikzcd}
& N & \\
M(A) \arrow[ur] \arrow[r] & M(A+B) \arrow[u, dotted] & M(B) \arrow[ul] \arrow[l] \\
A \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[r] & A+B \arrow[u, "\eta_{A+B}"'] & B \arrow[u, "\eta_B"'] \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

を用いて抽象的に議論することも出来る．但し，各 η は対応する生成元の埋め込みである．$M(A), M(B), A+B$ および $M(A+B)$ の普遍写像性によって，$M(A+B)$ が

$M(A)+M(B)$ に必要な普遍写像性を持つことがわかる．ここで，$M(A)$ と $M(B)$ の余積 $M(A)+M(B)$ の元は，台集合の元の余積**ではなく**，単にそれらの生成元の余積 $A+B$ から**生成されている**ことに注意しよう．必ずしも自由とは限らない任意のモノイドにの余積については，すぐ後で考察する．

上の例は，自由モノイド函手 $M : \mathbf{Sets} \to \mathbf{Mon}$ が余積を保存することを示している．これは，後程考察するより一般的な現象の一例であり，既に見た忘却函手 $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Sets}$ が表現可能函手であり従って積を保存する事実と関連している．

例 3.6. **Top** において，二つの空間の余積

$$X+Y$$

は，それらの非交和に $\mathcal{O}(X+Y) \cong \mathcal{O}(X) \times \mathcal{O}(Y)$ によって位相を入れたものになる．これは，離散空間の $\mathcal{O}(X) = \mathcal{P}(X) \cong 2^X$ のパターンに従ったものであることに注意しよう．つまり，離散空間については実際に，

$$\mathcal{O}(X+Y) \cong 2^{X+Y} \cong 2^X \times 2^Y \cong \mathcal{O}(X) \times \mathcal{O}(Y)$$

が成立する．

これと関連する事実は，二つの冪集合ブール代数 $\mathcal{P}(A)$ と $\mathcal{P}(B)$ の積が再び冪集合となること，即ち A と B の余積の冪集合となることである：

$$\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A+B)$$

このことを確かめるのは演習問題とする．

poset の余積も，台集合の余積と同じように「隣同士に並べておく」ことによって得られる．では，区別された始元 0 を持つ「根付き *(rooted)*」*poset* の場合はどうだろうか？そのような *poset* と 0 を保存する単調写像の圏 $\mathbf{Pos}_0$ では，そのような *poset* A, B の余積を，*poset* の圏 **Pos** での余積 $A+B$ で異なる 0 を「同一視」した

$$A +_{\mathbf{Pos}_0} B \cong (A +_{\mathbf{Pos}} B)/``0_A = 0_B''$$

として構成できる．すぐ後で，こうした同一視（同値関係の商）を「コイコライザ」として説明する方法を見る．

例 3.7. P を *poset* とし，任意に一つ固定する．二元 $p, q \in P$ の P での余積は何だろうか？

$$p \le p+q \quad q \le p+q$$

が成り立たねばならず，更に

$$p \le z \text{ かつ } q \le z$$

ならば，

$$p+q \le z$$

でなければならない．よって，$p+q = p \vee q$ は p と q の「結び *(join)*」あるいは「最小上界」である．

例 3.8. 1.4 節の例 10 で出て来た論理学における演繹系の**証明の圏**では，通常の自然演繹の選言の導入・除去規則から余積が出て来る．特に，導入規則

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$$

が射 $i_1 : \varphi \to \varphi \vee \psi$ と $i_2 : \psi \to \varphi \vee \psi$ を定め，除去規則

$$\frac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \vartheta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \vartheta\end{matrix}}{\vartheta}$$

が二つの射 $p : \varphi \to \vartheta, q : \psi \to \vartheta$ に対する $[p, q] : \varphi \vee \psi \to \vartheta$ を与える．しかし，射の同値性を証明の同値性として定義しているため，必要な等式

$$[p, q] \circ i_1 = p \quad [p, q] \circ i_2 = q \tag{3.3}$$

は明らかに成立しない．余積を得るためには，上のような等式と，任意の $r : \varphi \vee \psi \to \vartheta$ に対する補足的な等式

$$[r \circ i_1, r \circ i_2] = r \tag{3.4}$$

から生成される同値関係による同値類を経由することで，等式が成立するように「強制」しなくてはならない（直観的には，そのような「脇道」を省略したときに同じと見做せるような証明を全て同一視してやる，ということである）．証明の同値類を射とした新たな圏では，射 $[p, q]$ も (3.3) を満たすような**一意的な**射となるので，実際に $\varphi \vee \psi$ は余積となる．

（注意 2.18 の *Curry-Howard* 対応を通して）この例と密接に関連しているのは，通常 case 項を用いて定式化される，λ 計算の直和型である．これらは 2.5 節で定義した**型の圏**での余積となっている．

例 3.9. 任意の二つのモノイド A, B は，

$$A + B = M(|A| + |B|)/\sim$$

の形の余積を持つ．これまでと同様，自由モノイド $M(|A| + |B|)$ は A, B の台集合の非交和上の文字列（語），すなわち A と B の両方の元からなる文字列であり，また同値関係 $v \sim w$ は，次の等式群を含む最小の同値関係である．

$$\begin{aligned}
(\ldots x u_A y \ldots) &= (\ldots x y \ldots) \\
(\ldots x u_B y \ldots) &= (\ldots x y \ldots) \\
(\ldots a a' \ldots) &= (\ldots a \cdot a' \ldots) \\
(\ldots b b' \ldots) &= (\ldots b \cdot b' \ldots)
\end{aligned}$$

（もし同値関係で集合を割るということの復習が必要であれば，以後の記述を飛ばして **??** 節の冒頭を先に読んで頂きたい.）単位元は，もちろん空語の同値類 $[-]$ である（これは $[u_A]$ および $[u_B]$ に等しい）．同値類の積は，期待される通りの方法，即ち

$$[x \ldots y] \cdot [x' \ldots y'] = [x \ldots y x' \ldots y']$$

によって定められる．余積の挿入射 $i_A : A \to A + B$ と $i_B : B \to A + B$ は，単に

$$i_A(a) = [a], \quad i_B(b) = [b]$$

であり，これらが準同型となることは容易に確かめられる．モノイド M への準同型 $f : A \to M$ と $g : B \to M$ が与えられたとき，一意的な射

$$[f, g] : A + B \to M$$

は次のようにして得られる．まず，写像

$$[|f|, |g|] : |A| + |B| \to |M|$$

を，自由モノイド $M(|A| + |B|)$ 上の準同型 $[f, g]'$ に拡張する．

$$\begin{tikzcd}
|A| + |B| \arrow[r, "{[|f|, |g|]}"] & |M| \\
M(|A| + |B|) \arrow[r, "{[f, g]'}"] \arrow[d] & M \\
M(|A| + |B|)/\sim \arrow[ur, dotted, "{[f, g]}"'] &
\end{tikzcd}$$

すると，$[f, g]'$ は「同値関係 $\sim$ を保つ」こと，即ち $M(|A| + |B|)$ で $v \sim w$ が成り立てば $[f, g]'(v) = [f, g]'(w)$ となることがわかる．したがって，写像 $[f, g]'$ は商集合へと拡張でき，求める写像 $[f, g] : M(|A| + |B|)/\sim \to M$ を得る．（この写像が $hi_A = f$ かつ $hi_B = g$ を満たす一意な準同型となるのは何故か？）従ってまとめれば，

$$A + B \cong M(|A| + |B|)/\sim$$

を得る．

この構成は，**Groups** での余積を与えるのにも用いることが出来る．通常，**Groups** での余積は，他の「代数」，つまり演算の入った集合と同様に A と B の**自由積**と呼ばれ，$A \oplus B$ などと書く．再び，自由モノイドのときと同様に，$A + B$ の台集合は集合としての A, B の余積とは一致しない（忘却函手 $\mathbf{Mon} \to \mathbf{Sets}$ は余積を保存しない）．

例 3.10. アーベル群 A, B について，自由積 $A \oplus B$ はアーベル群であるとは限らない．勿論，更に $A \oplus B$ の商を取ることでアーベル群の圏 $\mathbf{A}$ の余積になるようにすることは出来るが，より便利な（かつ重要な）表示法があるので，以下ではそれを見てゆこう．

自由積 $A \oplus B$ の語は，更に可換性の条件

$$(a_1 b_1 a_2 b_2) \sim (a_1 a_2 \ldots b_1 b_2 \ldots)$$

を満たさなればならないので，語を入れ換えて，全ての a を語の先頭，b を末尾に持ってくることが出来る．ところが，更に

$$(a_1 a_2 \ldots b_1 b_2 \ldots) = (a_1 + a_2 + \ldots + b_1 + b_2 + \ldots)$$

が既に成立しているので，実際には元の対 (a,b) が与えられているのと等価である．従って，余積の台集合として，**積**

$$|A+B| = |A\times B|$$

を取ることが出来る．挿入射には準同型

$$\begin{aligned} i_A(a) &= (a, 0_B)\\ i_B(b) &= (0_A, b)\end{aligned}$$

を用いる．このとき，任意の準同型 $A \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} B$ が与えられたとき，$[f,g] : A+B \to X$ を次で定義することが出来る．

$$[f,g](a,b) = f(a) +_X g(b)$$

この定義で実際うまくゆくことは簡単にわかるだろう（演習問題！）．

更に，台**集合**が一致するだけではなく，アーベル群の積と余積は，実際に**群**として同型になるのである．

命題 3.11. アーベル群の圏 **Ab** において，二項余積と積の間には自然な同型

$$A+B \cong A\times B$$

が存在する．

Proof. 射 $\vartheta : A+B \to A\times B$ を定義する為には，射 $A \to A\times B$（と $B\to A\times B$）が必要であり，従って射 $A \to A$ と $A\to B$（そして $B\to A$ と $B \to B$）が必要となる．そこで，それぞれに対応するものとして $1_A : A\to A$ と零準同型 $0_B : A \to B$（および $0_A : B\to A$ と $1_B : B \to B$）を取る．これらを全て合わせて，

$$\vartheta = [\langle 1_A, 0_B\rangle, \langle 0_A, 1_B\rangle] : A+B \to A\times B$$

を得る．ここで任意の $(a,b)\in A+B$ を取れば，

$$\begin{aligned}\vartheta(a,b) &= [\langle 1_A, 0_B\rangle, \langle 0_A, 1_B\rangle](a,b)\\ &= \langle 1_A, 0_B\rangle(a) + \langle 0_A, 1_B\rangle](b)\\ &= (1_A(a), 0_B(a)) + (0_A(b), 1_B(a))\\ &= (a, 0_B) + (0_A, b)\\ &= (a+0_A, 0_B+b)\\ &= (a,b)\end{aligned}$$

となる．□

この事実は *MacLane* によって最初に確認され，二つのアーベル群（そして加群やベクトル空間など関連する構造）の間の平行な射 $f,g : A \to B$ の二項加法演算へと繋がる概念であることが示された．事実，特定のアーベル群 A の群構造は，A への射に対する演算から復元することが出来るのである．より一般に，そうした射の間の加法演算の存在は，**Ab** のような「アーベル圏」と呼ばれる圏の抽象的説明の土台として用いることが出来る．アーベル圏は公理的ホモロジー論と相性がよい．

積の場合とちょうど同様に，空の余積を考えることが出来，それは始対象 0 である．また，複数因子の余積も定義出来るし，二つの射の余積

$$f + f' : A + A' \to B + B'$$

も定義できて，そこから二項余積を持つ圏 $\mathbf{C}$ 上の余積函手 $+ : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ が導出される．こうした事実は，すべて双対性から簡単に出て来るものである．つまり，双対概念を逆圏で考えることによって出てくる．同様にして，次の命題が得られる．

命題 3.12. 余積は同型を除き一意である．

Proof. 双対性と「同型射」の双対は「同型射」であるという事実を使えばよい．　□

ちょうど同じようにして，二項直積は同型を同一視すれば結合的であることも示すことが出来る．

よって，今後は，ある双対概念が元の概念と似た（しかし双対的な）性質を持つこと示すのに，一度新たな概念を導入してそれを単純に観察することに帰着されることが一般的となる．*3.3* および *3.4* 節では，更にもうひとつこの種の例を見ていく．

3.3　イコライザ

この節では，また別の抽象的特徴付けについて考察する．今回見てゆくのは，実数値函数の零点集合といったような等式によって定義された「代数多様体」や，準同型写像の核などに共通な性質の一般化である．これは，集合論の分出公理に似たようなものでもある．

定義 3.13. 任意の圏 $\mathbf{C}$ において，二つの平行な射

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

が与えられているとする．このとき，f と g の**イコライザ** (*equalizer*) とは，対象 E と射 $e : E \to A$ から成り，以下が普遍的に成り立つことである：

$$f \circ e = g \circ e$$

つまり，$f \circ z = g \circ z$ を見たすような $z : Z \to A$ が与えられたとき，$e \circ u = z$ となるような射 $u : Z \to E$ が一意的に存在するということである．それはちょうど次の図のように表すことが出来る．

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ Z \arrow[u, dotted, "u"] \arrow[ur, "z"'] & & \end{tikzcd}$$

では，幾つか単純な例を見てみよう．

例 3.14. 次のような函数 $f, g : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}$ があったとする．

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= x^2 + y^2 \\
g(x, y) &= 1
\end{aligned}
$$

今，これらのイコライザを，例えば **Top** で取るとしよう．それは部分空間

$$
S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\} \hookrightarrow \mathbb{R}^2
$$

であり，つまりは xy 平面上の単位円である．任意の「一般化元」$z : Z \to \mathbb{R}^2$ について，二つの射影とそれぞれ合成してやることで $z = \langle z_1, z_2 \rangle$ なる二つの「元」$z_1, z_2 : Z \to R$ を得ることが出来る．また，これらについて

$$
\begin{aligned}
f(z) = g(z) &\iff z_1^2 + z_2^2 = 1 \\
&\iff \text{“}\langle z_1, z_2 \rangle = z \in S\text{”}
\end{aligned}
$$

が成立する．ここで，最終行は実際には包含写像 $i : S \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ を介した因数分解 $z = \bar{z} \circ i$ が存在しているということを意味いしている．次の図式がこの状況をよく表している．

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, shift left, "x^2 + y^2"] \arrow[r, shift right, "1"'] & \mathbb{R} \\
Z \arrow[u, dotted, "\bar{z}"] \arrow[ur, "z"'] & &
\end{tikzcd}
$$

包含写像 i はモニックなので，このような因数分解がもし存在すれば一意であり，従って $S \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ は実際に f と g のイコライザとなる．

例 3.15. 同様に，**Sets** における任意の写像 $f, g : A \rightrightarrows B$ のイコライザは，等式的に定義される部分集合

$$
\{ x \in A \mid f(x) = g(x) \} \hookrightarrow A
$$

から A への包含写像である．この議論は先程のものと本質的に同じものである．

ここで，どんな部分集合 $U \subseteq A$ もこのような「等式的な」形で書き下せること，つまり，任意の部分集合はある二つの写像のイコライザとして表せるということに注意したい．実際，これはごく自然な方法によって確かめることが出来る．まず，

$$
2 = \{ \top, \bot \}
$$

とし，これを「真理値」の集合と考える．つづいて，$x \in A$ に対し，

$$
\chi_U(x) = \begin{cases} \top & x \in U \\ \bot & x \notin U \end{cases}
$$

で定められる**特性函数** *(characteristic function)*

$$
\chi_U : A \to 2
$$

を考える．このとき，

$$
U = \{ x \in A \mid \chi_U(x) = \top \}
$$

が成立する．よって，次の図式がイコライザとなる．

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] & A \arrow[r, shift left, "T!"] \arrow[r, shift right, "\chi_U"'] & 2 \end{tikzcd}$$

ここで，$T! = T\circ! : U \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{T} 2$ である．

更に，任意の写像

$$\varphi : A \to 2$$

に対し，「代数多様体」（すなわち等式による部分集合）

$$V_\varphi = \{\, x \in A \mid \varphi(x) = \top \,\}$$

を考えることができ，これもまたイコライザとなる．（φ を A 上の「命題函数」と考えることで，部分集合 $V_\varphi \subseteq A$ は分出公理が保証する φ の「外延」と見做すことが出来る．）

さて，これらの操作 χ_U, V_φ が互いに逆演算となっていることは次のように容易にわかる．

$$\begin{aligned} V_{\chi_U} &= \{\, x \in A \mid \chi_U(x) = \top \,\} \\ &= \{\, x \in A \mid x \in U \,\} \\ &= U \end{aligned}$$

また，任意の $U \subseteq A$ について，任意の $\varphi : A \to 2$ が与えられれば，

$$\begin{aligned} \chi_{V_\varphi}(x) &= \begin{cases} \top & x \in V_\varphi \\ \bot & x \notin V_\varphi \end{cases} \\ &= \begin{cases} \top & \varphi(x) = \top \\ \bot & \varphi(x) = \bot \end{cases} \\ &= \varphi(x) \end{aligned}$$

以上のようにイコライザを取ることを通して，お馴染の同型

$$\mathrm{Hom}(A, 2) \cong \mathcal{P}(A)$$

を得ることができる．

写像のイコライザとして部分集合を取ることが出来るという事実は，更に一般的な現象の特別な場合にすぎない．

命題 3.16. 任意の圏において，もし $e : E \to A$ が何らかの射の組のイコライザであれば，e はモノ射である．

Proof. 以下の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ Z \arrow[u, shift left, "x"] \arrow[u, shift right, "y"'] \arrow[ur, "z"'] & & \end{tikzcd}$$

ここで，e は f と g のイコライザであるとする．$ex = ey$ を仮定して，$x = y$ を示す．$z = ex = ey$ とおく．すると，$fz = fex = gey = gz$ となり，従って $eu = z$ なる $u : Z \to E$ が**一意的に**存在する．よって，$ex = z$ および $ey = z$ から $x = u = y$ が従う． □

例 3.17. *poset* の圏やモノイドの圏など他の多くの圏において，二つの射 $f, g : A \rightrightarrows B$ のイコライザは上のように台写像のイコライザを取ることで構成できる．つまり，f と g が一致する元（$f(x) = g(x)$ となる元）$x \in A$ からなる部分集合 $A(f = g) \supseteq A$ を取り，A の構造を $A(f = g)$ に制限してやればよいのである．例えば，*poset* に対しては A の順序を $A(f = g)$ に制限したものを，位相空間に対しては部分空間位相をそれぞれ取ってやればよい．

モノイドの圏では，部分集合 $A(f = g)$ は A の演算により再びモノイドとなるので，包含写像は準同型写像となる．何故ならば，$f(u_A) = u_B = g(u_A)$ であること，また $f(a) = g(a)$ かつ $f(a') = g(a')$ ならば $f(a \cdot a') = f(a) \cdot f(a') = g(a) \cdot g(a') = g(a \cdot a')$ となることから，$A(f = g)$ は単位元を持ち積について閉じることがわかるからである．

例えば，特にアーベル群であれば，

$$f(x) = g(x) \iff (f - g)(x) = 0$$

という事実を用いて上とは異なった説明を考えることが出来る．f と g のイコライザは準同型 $(f - g)$ と零準同型 $0 : A \to B$ のイコライザと同じものになるので，従って任意の準同型 $h : A \to B$ に対して $A(h, 0) \rightarrowtail A$ の形のイコライザを考えれば充分である．この A の部分群を h の**核** *(kernel)* と呼び，$\ker(h)$ と書く．以上から，イコライザ

$$\ker(f - g) \hookrightarrow A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

を得る．準同型の核は群の研究の根幹を成す重要な概念であり，第**??**章で詳しく考察する．

3.4　コイコライザ

コイコライザは同値関係による商の概念の一般化である．そこで，既に何度か使ってきたこの概念を復習することから始めよう．まず，集合 X 上の**同値関係** (*equivalence relation*) とは，次の三条件を満たす二項関係 $x \sim y$ のことであったことを思い出そう．

反射律：$x \sim x$
対称律：$x \sim y \implies y \sim x$
推移律：$x \sim y$ かつ $y \sim z \implies x \sim z$

同値関係が与えられたとき，元 $x \in X$ の**同値類** (*equivalence class*)$[x]$ を

$$[x] = \{\, y \in X \mid x \sim y \,\}$$

によって定める．すると，種々の異なる同値類 $[x]$ は X の**分割** (*partition*) を与える．つまり，各元 y はそのような同値類のうちただ一つだけに属し，即ちそれが $[y]$ である

（示せ！）.

同値関係は，ある性質を共通に持つ元（例えば同じ色であるとか）から得られると考えることがある．すると，同値類 $[x]$ はそうした性質として見做すことが出来，その意味で「抽象的な対象」（赤や青などの色それ自身など）と見ることが出来る．こうした手法は「抽象化による定義」として知られている．例えば，実数を有理数の Cauchy 列から構成する方法や，有限集合から有限基数を構成する方法の説明として用いられる．

全ての同値類の集合

$$X/\sim = \{\, [x] \mid x \in X \,\}$$

は X の $\sim$ による**商** (*quotient*) としばしば呼ばれる．商集合は，同値な元 $x \sim y$ の違いを「捨象」したいときに X の代わりに使われる．何故なら，

$$[x] = [y] \iff x \sim y$$

が成立するので，$X/\sim$ では $x \sim y$ を満たす元（だけ）が同一視されるからである．ここで，x を $[x]$ に移す**商写像** (*quotient mapping*)

$$q : X \to X/\sim$$

の持つ性質に注目してみよう．写像 $f : X \to Y$ は，f が同値関係を保つときに限り，つまり $x \sim y$ ならば $f(x) = f(y)$ が成り立つときに限り，下図のように q に沿って拡張することが出来るのである．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "f"'] & X/\sim \arrow[d, dotted] \\ & Y \end{tikzcd}$$

それでは，イコライザの双対概念であるコイコライザについて考えよう．

定義 3.18. 圏 $\mathbf{C}$ の平行な射 $f, g : A \to B$ の**コイコライザ** (*coequalizer*) とは，Q と次の図式に示すような $qf = qg$ を満たすような普遍射 $q : B \to Q$ の組のことである．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "z"'] & Q \arrow[d, dotted, "u"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

つまり，任意の Z と $zf = zg$ を見たす $z : B \to Z$ が与えられたとき，$uq = z$ なる射 $u : Q \to Z$ が一意に存在することである．

まず，双対性から $\mathbf{C}$ のイコライザ q は $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ でイコライザとなり，命題 3.16 からモニックとなるので，従って q は $\mathbf{C}$ でエピックとなることがわかる．

命題 3.19. もし $q : B \to Q$ がある射の組のコイコライザであれば，q はエピ射である．

従って，コイコライザ $q : B \twoheadrightarrow Q$ は，$f(a) = g(a)$ によって（もし「元」$a \in A$ があれば）同じ元からの行き先を全て「同一視」して，B を「つぶした」ものと考えることができる．単につぶすだけではなく，そうした同一視を保ちつつ任意の Z へと移せるように，B を限りなく小さく「極小」になるようにつぶしたものである．

例 3.20. $R \subseteq X \times X$ を集合 X 上の同値関係として，図式

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "r_1"] \arrow[r, shift right, "r_2"'] & X \end{tikzcd}$$

を考えよう．ここで，r_1, r_2 は $R \subseteq X \times X$ の包含写像の二つの射影

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "r_2"] & \\ X & X \times X \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & X \end{tikzcd}$$

である．

このとき，$x \mapsto [x]$ で定める商射影

$$\pi : X \to X/R$$

は r_1 と r_2 のコイコライザとなる．次の図式に示すような $f : X \to Y$ が与えられたとする．

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "r_1"] \arrow[r, shift right, "r_2"'] & X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & X/R \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & & Y \end{tikzcd}$$

すると，既にみたように，f が R を保存すれば，即ち $(x, x') \in R$ ならば $f(x) = f(x')$ が成立するならば，

$$\bar{f}\pi(x) = f(x)$$

を見たすような写像 $\bar{f}$ が存在する．ところが，$f \circ r_1(x, x') = f(x)$ かつ $f \circ r_2(x, x') = f(x')$ が $(x, x') \in R$ について成立するので，この条件は結局 $f \circ r_1 = f \circ r_2$ ということを述べていることになる．更に，π はエピ射なので，もしそのような $\bar{f}$ が存在すれば必然的に一意である．

Sets における任意の二本の平行射 $f, g : A \rightrightarrows B$ のコイコライザは，各 $x \in A$ に対して $f(x) = g(x)$ の形の等式から生成される同値関係で B を割ったものとして得られる．この詳細は演習問題としよう．

例 3.21. 例 3.6 では，**根つき** *poset* P と Q の余積を，まず *poset* の圏で $P + Q$ をとり，二つの異なる零元 0_P と 0_Q を（つまり挿入射によるそれぞれの像を）「同一視」することで構成した．今や，この「同一視」は *poset* の圏でのコイコライザ

$$1 \overset{0_P}{\underset{0_Q}{\rightrightarrows}} P+Q \longrightarrow X+Q/(0_P=0_Q)$$

として説明することが出来る．これは明らかに**根つき** *poset* の余積の普遍写像性を持つ．

位相幾何学でも，（例えば区間の端点を同一視して円をつくるように）点を「同一視」したり，（平面上の領域からトーラスを構成するように）部分空間を「同一視」したりする．こうした例や，多くの似たような「貼り付け」による構成はコイコライザとして説明することが出来る．**Top** では，写像の平行対 $f, g : X \to Y$ のコイコライザは Y の商空間として構成できる（演習を参照）．

例 3.22 (代数の表示)**.** 群やモノイドのような「代数系」，つまり（有限引数の）演算が入った集合からなる任意の圏を考えよう．後で，そうした圏は任意の集合に対する自由代数を持ち，任意の射の平行対に対するコイコライザを持つことを示す（モノイドの圏がコイコライザを持つことは演習問題を見よ）．こうした事実を用いて，代数系の**生成元** *(generator)* と**関係式** *(relations)* による**表示** *(presentation)* を決定することができる．例えば，次が与えられたとしよう：

$$\begin{array}{l}\text{生成元} : x, y, z \\ \text{関係式} : xy = z, y^2 = 1\end{array} \tag{3.5}$$

こうした生成元と関係式による代数系を構築するために，自由代数

$$F(3) = F(x, y, z)$$

から始めて，次に写像のコイコライザ

$$F(1) \overset{xy}{\underset{z}{\rightrightarrows}} F(3) \xrightarrow{q} Q$$

を取ることで，関係式 $xy = z$ が成立するように「強制」しよう．ここで，$F(1)$ の生成元を v としたとき，$v \mapsto a$ によって写像 $F(1) \to A$ が元 $a \in A$ に対応するという事実を使った．また，同様にして等式 $y^2 = 1$ に対しても，コイコライザ

$$F(1) \overset{q(y^2)}{\underset{q(1)}{\rightrightarrows}} Q \longrightarrow Q'$$

を取ってやればよい．この二つの手順は同時に行うことが出来る．

$$F(2) = F(1) + F(1)$$

$$F(2) \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} F(3)$$

とする．ここで，$f = [xy, y^2], g = [z, 1]$ である．すると f と g のコイコライザ $q : F(3) \to Q$ は両方の等式が成立するように「強制」する．それは Q で

$$q(x)q(y) = q(z), q(y)^2 = 1$$

が成立するという意味でである．更に，仮定した等式から導かれる等式以外には，どんな余分な関係も生成元の間には成立しない．最後の言明を精確にいえば，任意の代数 A と

三つの生成元 $a, b, c \in A$ が与えられていて，$ab = c$ かつ $b^2 = 1$ を満たすとき，Q の普遍写像性から

$$u(x) = a, u(y) = b, u(z) = c$$

を満たす準同型 $u : Q \to A$ が一意的に存在するということである．したがって，Q の生成元の間で成立する他の等式も，仮定した式 *(3.5)* が成立する他の代数でも成立する．準同型 u も等式を保存するので，この意味において，Q は仮定した等式を満たす三つの生成元からなる「普遍」代数 *(universal algebra)* である．これは次のように書いたほうがわかりやすいかもしれない．

$$Q \cong F(x, y, z)/(xy = z, y^2 = 1)$$

より一般に，有限表示

$$\begin{array}{l} \text{生成元} : g_1, \ldots, g_n \\ \text{関係式} : l_1 = r_1, \ldots, l_m = r_m \end{array} \tag{3.6}$$

が与えられたとき（但し l_i および r_i は生成元と演算によって書かれた任意の項とする），その表示によって決定される代数はコイコライザ

$$\begin{tikzcd} F(m) \arrow[r, shift left, "l"] \arrow[r, shift right, "r"'] & F(n) \arrow[r] & Q = F(n)/(l = r) \end{tikzcd}$$

となる．ここで $l = [l_1, \ldots, l_m]$ かつ $r = [r_1, \ldots, r_m]$ である．更に，このような（有限）自由代数の間のコイコライザは, 明らかに生成元と関係式による（有限）表示と見做すことが出来る．こうした方法で与えることの出来る代数は**有限表示を持つ** *(finitely presented)* といわれる．

注意 3.23. 表示は一意的ではない．同じ代数に対して，生成元と関係式による二つの異なる表示 $F(n)/(l = r)$ と $F(n')/(l' = r')$ で

$$F(n)/(l = r) \cong F(n')/(l' = r')$$

となるようなものを得ることが出来る．例えば，$F(n)/(l = r)$ が与えられたとき，異なる表現として，生成元 g_{n+1} と関係式 $g_n = g_{n+1}$ を新たに付け加えられたものを考える事ができる．論理学を公理化する方法が沢山あるのとちょうど同じように，与えられた代数に対し，一般に異なる多くの表現を考えることが出来る．

先程の議論では，実際には有限性の条件を使っていない．事実，**任意の**生成元の集合 G と関係式の集合 R は，同様にしてコイコライザ

$$\begin{tikzcd} F(R) \arrow[r, shift left, "r_1"] \arrow[r, shift right, "r_2"'] & F(G) \arrow[r] & Q = F(G)/(r_1 = r_2) \end{tikzcd}$$

を取ることで代数を与える．実際，どんな代数も生成元と関係式によって「表示」することが出来る．つまり，自由代数の間のコイコライザとして表示出来るのである．特に，次のモノイドに関する命題が成立し，群などの他の代数系に関しても同様な命題が成り立つ．

命題 3.24. どんなモノイド M に対しても，集合 R と G があり，次のコイコライザ図式が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
F(R) \arrow[r, shift left, "r_1"] \arrow[r, shift right, "r_2"'] & F(G) \arrow[r] & M
\end{tikzcd}
$$

ここで，$F(R)$ と $F(G)$ は自由モノイドであり，従って，$M \cong F(G)/(r_1 = r_2)$ ととなる．

Proof. 任意のモノイド N に対し，N の元の集合上の自由モノイドを $TN = M(|N|)$ と書く（従って T が函手となることに注意しよう）．恒等射 $1_{|N|} : |N| \to |N|$ によって引き起こされる準同型

$$
\begin{aligned}
\pi : TN &\to N \\
\pi(x_1, \ldots, x_n) &= x_1 \cdot \ldots \cdot x_n
\end{aligned}
$$

が存在する．（ここでは明確化のため TN の元を文字列 $x_1 \ldots x_n$ ではなく，タプル $(x_1, \ldots, x_n)$ の形で書いた．）T を M に二回適用して，次の図式に示す射 π と ε を得る．

$$
\begin{tikzcd}
T^2M \arrow[r, shift left, "\varepsilon"] \arrow[r, shift right, "\mu"'] & TM \arrow[r, "\pi"'] & M
\end{tikzcd}
\tag{3.7}
$$

ここで $T^2M = TTM$ かつ $\mu = T\pi$ である．はっきりといえば，T^2M の元は M の元のタプルのタプル，つまり $((x_1, \ldots, x_n), \ldots, (z_1, \ldots, z_m))$ であり，準同型 ε と μ は次の効果を持つ．

$$
\begin{aligned}
\varepsilon((x_1, \ldots, x_n), \ldots, (z_1, \ldots, z_m)) &= (x_1, \ldots, x_n, \ldots, z_1, \ldots, z_m) \\
\mu((x_1, \ldots, x_n), \ldots, (z_1, \ldots, z_m)) &= (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n, \ldots, z_1 \cdot \ldots \cdot z_m)
\end{aligned}
$$

手短かにいえば，ε は TM の積を，μ は M の積を使っている．

ここで，明らかに $\pi \circ \varepsilon = \pi \circ \mu$ である．(3.7) がモノイドのコイコライザとなることを示そう．そのために，モノイド N と $h\varepsilon = h\mu$ なる準同型 $h : TM \to N$ が与えられたとしよう．すると，任意のタプル $(x, \ldots, z)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
h(x, \ldots, z) &= h\varepsilon((x, \ldots, z)) \\
&= h\mu((x, \ldots, z)) \\
&= h(x \cdot \ldots \cdot z)
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

が成立する．今，$i : |M| \to |TM|$ を生成元の埋め込みとして，次の図式に示すように $\bar{h} = h \circ i$ と定義しよう．

$$
\begin{tikzcd}
T^2M \arrow[r, shift left, "\varepsilon"] \arrow[r, shift right, "\mu"'] & TM \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[dr, "h"'] & M \arrow[l, shift left, dotted, "i"] \arrow[d, "h \circ i"] \\
& & N
\end{tikzcd}
$$

すると，

$$
\begin{aligned}
\bar{h}\pi(x, \ldots, z) &= hi\pi(x, \ldots, z) \\
&= h(x \cdot \ldots \cdot z) \\
&= h(x, \ldots, z) \qquad \text{(3.8) より}
\end{aligned}
$$

$\bar{h}$ が準同型となることは簡単な演習問題として読者に残しておこう　□

3.5　演習問題

1. 任意の圏 $\mathbf{C}$ で，

$$A \xrightarrow[c_1]{} C \xleftarrow[c_2]{} B$$

が余積図式となるのは，任意の対象 Z に対して写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(C, Z) &\to \mathrm{Hom}(A, Z) \times \mathrm{Hom}(B, Z) \\ f &\mapsto \langle f \circ c_1, f \circ c_2 \rangle \end{aligned}$$

が同型となるとき，その時に限ることを示せ．直積での対応する事実と双対性を用いよ．

2. 自由モノイド函手 M が余積を保つことを詳しく示せ．つまり，任意の集合 A, B について，

$$M(A) + M(B) \cong M(A + B) \qquad (\text{標準的 (canonically)})$$

を示せ．教科書でほのめかした通り，余積 $A + B$ と $M(A) + M(B)$ および自由モノイドの普遍写像性を使え．

3. 教科書で説明した，モノイドの余積 $A + B$ を自由モノイド $M(|A| + |B|)$ の商とする構成法が，実際にモノイドの圏での余積を与えていることを確かめよ．

4. 二つの冪集合ブール代数 $\mathcal{P}(A)$ および $\mathcal{P}(B)$ の直積が再び冪集合となること，すなわち集合 A と B の余積の冪集合となることを示せ．

$$\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \cong \mathcal{P}(A + B)$$

（ヒント：射影 $\pi_1 : \mathcal{P}(A + B) \to \mathcal{P}(A)$ および $\pi_2 : \mathcal{P}(A + B) \to \mathcal{P}(B)$ を決定し，これらが直積の普遍写像性を持つことを確かめよ．）

5. 選言の導入規則と除去規則を持つ自然演繹系における証明からなる圏を考えよう．任意の $p : A \to C, q : B \to C$ と $r : A + B \to C$ に対し，等式

$$[p, q] \circ i_1 = p, \qquad [p, q] \circ i_2 = q$$
$$[r \circ i_1, r \circ i_2] = r$$

によって証明を同一視する．これらの等式によって生成される（つまり一方の証明から上のような「脇道」をすべて取り除いて他方が得られたとき，二つの証明は等しくなるような）同値関係による証明の同値類を経由して得られる圏が，実際に余積を持つことを示せ．

6. モノイドの圏は全てのイコライザと全ての有限直積を持つことを確かめ，アーベル群の圏についても同様のことを確かめよ．

7. 余積を持つ任意の圏について，二つの射影的対象の余積は再び射影的となることを確かめよ．

8. 射影性の概念を双対化し，圏における**単射的** (injective) 対象を定義せよ．poset の間の写像は元について単射であるとき，その時に限ってモノ射となることを示せ．単射的な poset とそうでない poset の例をそれぞれ与えよ．

9. $\bar{h}$ が実際に準同型となることを示して，教科書の命題 3.24 の証明を完成させよ．
10. 教科書の命題 3.24 の証明により，任意のモノイドは自由モノイドのコイコライザ $T^2M \rightrightarrows TM \to M$ としての表示を持つことが示された．特にこの形のコイコライザは忘却函手 **Mon** $\to$ **Sets** によって保存されることを示せ．
11. 次の方法でコイコライザを構成することで，**Sets** は任意のコイコライザを持つことを示せ．任意の射の平行対のコイコライザ

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r] & Q = B/(f = g) \end{tikzcd}$$

を，任意の $x \in A$ について $(f(x), g(x))$ の対で生成される，B 上の適切な同値関係 R による B の商を取ることで構成せよ．（そうした対を全て含むようなすべての同値関係の共通部分として R を定義せよ．）
12. 根つき poset の圏，即ち最小元 0 を持つ poset と 0 を保つ単調写像の圏で余積を構成する際に言及した余積-コイコライザ構成を確かめよ．特に，そうした二つの poset の余積 $P +_0 Q$ は，poset の圏でのコイコライザ

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "0_P"] \arrow[r, shift right, "0_Q"'] & P + Q \arrow[r] & P +_0 Q \end{tikzcd}$$

として構成出来ることを示せ．（poset の圏は全てのコイコライザを持つ事実が与えられたとして示してもよい．）
13. 次の手順に従って，モノイドの圏は全てのコイコライザを持つことを示せ．
    1. 任意のモノイド準同型の組 $f, g : M \to N$ が与えられたとき，次の二つの N 上の同値関係は一致することを示せ．
       (a) $n \sim n' \Leftrightarrow$ 任意のモノイド X と準同型 $h : N \to X$ について，$hf = hg$ ならば $hn = hn'$ が成り立つ
       (a) 任意の $m \in M$ について $fm \sim gm$ および
       $$n \sim n' \text{かつ } m \sim m' \Rightarrow n \cdot m \sim n' \cdot m'$$
       が成立するような N 上の同値関係 $\sim$ すべての共通部分
    2. $\sim$ を (1) で定義した同値関係とする．このとき，$[n] \cdot [m] = [n \cdot m]$ によって商集合 $N/\sim$ はモノイドとなり，射影 $N \to N/\sim$ が f と g のコイコライザとなることを示せ．
14. 集合の圏で次について考察せよ：
    (a) 写像 $f : A \to B$ が与えられたとき，写像 $f \circ p_1, f \circ p_2 : A \times A \to B$ のイコライザを A 上の（二項）関係として説明し，同値関係となることを示せ（これは f の**核** (*kernel*) と呼ばれる）．
    (b) 同値関係 R による商写像 $A \to A/R$ の核は R それ自身であることを示せ．
    (c) **任意の**二項関係 $R \subseteq A \times A$ に対し，$\langle R \rangle$ を R で生成される A 上の同値関係（R を含む最小の A 上の同値関係）とする．このとき，商写像 $A \to A/\langle R \rangle$ は二つの射影 $R \rightrightarrows A$ のコイコライザとなることを示せ．
    (d) 以上の議論を用いて，集合 A 上の任意の二項関係 R に対し，R で生成される同値関係 $\langle R \rangle$ は，R の二つの射影のコイコライザの核として特徴付けられる

ことを示せ．

15. 次のようにして **Top** でコイコライザを構成せよ．二つの写像の平行対 $f, g : X \rightrightarrows Y$ が与えられたとき，商空間 $q : Y \to Q$ を，(i) 写像 $|q| : |Y| \to |Q|$ を得るために **Sets** で $|f|$ と $|g|$ のコイコライザを取り，次に (ii)$|Q|$ に商位相を入れる．つまり，$q^{-1}(V) \subseteq Y$ が開集合のとき，その時にかぎって $V \subseteq Q$ を開集合と定める．これは明らかに射影 $|q|$ を連続にする位相の中で最も精しい位相である．

第 4 章

群と圏

この章では，群と圏の間の多種多様な関係について見る．ここで扱われている基本的な群論の知識が既にあれば，今までに学んだ圏論的な構成の直感を得ることが出来るし，もしなければ圏論の応用として群論の基礎を学ぶことになる．ここでは．ここでは，群と圏の関係について，次の異なる三つの側面に焦点を当てる．

1. 圏の中の群
2. 群の圏
3. 圏としての群

4.1 圏の中の群

既に見たように，群の概念は対象の自己同型の抽象化として得られる．特に具体的な場合には，群 G を圏 $\mathbf{C}$ のある対象 X について，ある種の射 $g : X \to X$ の集まり

$$G \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X)$$

として構成することが出来る．一方，抽象的な群の概念を，圏の中である種の構造を持った対象として直接的に説明することも出来る．このより巧妙な[*1]「圏における群」の概念もまた，とても有用なものであることが判明する．

$\mathbf{C}$ を有限直積を持つ群とする．$\mathbf{C}$ における群の概念は，本質的には $\mathbf{Sets}$ における通常の群の概念を一般化したものになっている．

定義 4.1. $\mathbf{C}$ での**群** (*group*) とは，

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "m"] & G & G \arrow[l, "i"'] \\
& 1 \arrow[u, "u"] &
\end{tikzcd}$$

の形の対象と射からなり，次の条件を満たすものである．

1. m は結合的である．つまり，次の図式が可換となる．

[*1] 訳注 : subtle のいい訳語が思い付かない…….

$$\begin{tikzcd}
(G\times G)\times G \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d, "m\times 1"'] & & G\times(G\times G) \arrow[d, "1\times m"] \\
G\times G \arrow[dr, "m"'] & & G\times G \arrow[dl, "m"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

ここで，$\cong$ は直積の標準的な結合律同型である．

2. u は m に関する単位元である．つまり，次の図式の二つの三角形が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\langle u, 1_G\rangle"] \arrow[d, "\langle 1_G, u\rangle"'] \arrow[dr, "1_G"'] & G\times G \arrow[d, "m"] \\
G\times G \arrow[r, "m"'] & G
\end{tikzcd}$$

ここで，「定数射」$u! : G \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{u} G$ を u と書いた．

3. i は m についての逆元を与える．即ち，次の図式の両側が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[d, "1_G\times i"'] & G \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "u"] & G\times G \arrow[d, "i\times 1_G"] \\
G\times G \arrow[r, "m"'] & G & G\times G \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

ただし，$\Delta = \langle 1_G, 1_G\rangle$ である．

これらの図式が可換になるという条件は，任意の（一般化）元

$$x, y, z : Z \to G$$

に対し，次の見慣れた条件が成立することと同値であることに注意しよう．

$$\begin{aligned}
m(m(x,y),z) &= m(x,m(y,z)) \\
m(x,u) &= x = m(u,x) \\
m(x,ix) &= u = m(ix,x)
\end{aligned}$$

定義 4.2. $\mathbf{C}$ における群の**準同型** $h : G \to H$ とは，次の条件を満たす $\mathbf{C}$ の射

$$h : G \to H$$

のこと．

1. h は m を保つ：

$$
\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "h \times h"] \arrow[d, "m"'] & H \times H \arrow[d, "m"] \\
G \arrow[r, "h"'] & H
\end{tikzcd}
$$

2. h は u を保つ：

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "h"] & H \\
1 \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "u"'] &
\end{tikzcd}
$$

3. h は i を保つ：

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & H \arrow[d, "i"] \\
G \arrow[r, "h"'] & H
\end{tikzcd}
$$

自明な恒等射と合成により，$\mathbf{C}$ における群は圏を成し，

$$\mathrm{Group}(\mathbf{C})$$

と書く．

例 4.3. 圏の内部群は，よく知られた追加的な構造を持つ群の概念を捉えたものとなっている．

- 通常の意味での群は，**Sets** における群である．
- 位相群は，位相空間の圏 **Top** における群である．
- （部分）順序群は，*poset* の成す圏 **Pos** における群である（この時，通常逆元演算 i が順序を**反転する**ことを要求する．つまり，$i : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{C}$ となることを要求する）．

例えば，実数全体 $\mathbb{R}$ は加法について位相群かつ順序群を成す．これは，加法演算 $x+y$ と加法逆元演算 $-$ が連続かつ順序を保つ（$-$ は順序を逆転する）写像となっているからである．$\mathbb{R}$ は乗法 $x \cdot y$ について，も位相「半群」になるが，乗法逆元演算 $1/x$ は 0 で連続でない（更には定義すらされていない！）．

例 4.4. 群のなす圏 **Groups** における群 G があったとする．つまり，G は群準同型 $m : G \times G \to G$ など，定義 *4.1* に挙げた準同型を持つ群であるとする．これを，より初等的な言葉で分析してみよう．群 G の積，つまり台集合 $|G|$ 上の積を $x \circ y$，準同型による積 m を $x \star y$ と書くことにしよう．m が直積群 $G \times G$ から G への準同型であることから，特に任意の $g, h \in G \times G$ に対し，$m(g \circ h) = m(g) \circ m(h)$ がいえる．ここで $g = (g_1, g_2), h = (h_1, h_2)$ であることと，$G \times G$ の積 $\circ$ は成分ごとの積であったことを

思い出せば，上の関係式は次のように書ける．

$$(g_1 \circ h_1) \star (g_2 \circ h_2) = (g_1 \star g_2) \circ (h_1 \star h_2) \tag{4.1}$$

$\circ$ と $\star$ に関する単位元をそれぞれ 1° と $1^\star$ と書こう．次の命題は「*Eckmann-Hilton* 論法」と呼ばれる物で，ホモトピー論の分野で最初に用いられた．

命題 4.5. 集合 G が二つの二項演算 $\circ, \star : G \times G \to G$ とその単位元 $1^\circ, 1^\star$ を持ち (4.1) を満たすとき，次が成立する．

1. $1^\circ = 1^\star$
2. $\circ = \star$
3. 演算 $\circ = \star$ は可換

Proof. はじめに，次が成立する．

$$\begin{aligned} 1^\circ &= 1^\circ \circ 1^\circ \\ &= (1^\circ \star 1^\star) \circ (1^\star \star 1^\circ) \\ &= (1^\circ \circ 1^\star) \star (1^\star \circ 1^\circ) \\ &= 1^\star \star 1^\star \\ &= 1^\star \end{aligned}$$

よって，以下 $1^\circ = 1 = 1^\star$ と書く．次に，

$$x \circ y = (x \star 1) \circ (1 \star y) = (x \circ 1) \star (1 \circ y) = x \star y$$

がいえるので，$x \circ y = x \cdot y = x \star y$ と書ける．最後に，

$$x \cdot y = (1 \cdot x) \cdot (y \cdot 1) = (1 \cdot y) \cdot (x \cdot 1) = y \cdot x$$

となる． □

以上より，次を得る．

系 4.6. 群のなす圏における群対象は *Abel* 群と一致する．

Proof. **Groups** における群が Abel 群となることはちょうど今示したので，あとは任意の Abel 群が準同型による群演算を持つことを示せばよい．これは簡単な演習問題とする． □

注意 4.7. この論法では，群の構造のすべてを使っている訳ではないことに注意しよう．実際，モノイドの圏におけるモノイドについても同じ結果が成立し，それらは可換モノイドと一致する．

例 4.8. 圏内部の代数的構造に関する更なる例は，（狭義）**モノイド圏**によって与えられる．

定義 4.9. 狭義モノイド圏（*strict monoidal category*；厳密モノイド圏，強モノイド圏，ストリクトモノイダル圏とも）[*2]とは，函手的な二項演算 $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ を持つ次のよ

[*2] 訳注：訳語として何を充てるかはまだ決定ではないので，意見求む．「ストリクトモノイダル圏」は『圏論の基礎』，「厳密モノイド圏」は檜山さん，それ以外は Wikipedia から引っ張ってきました．あんまり「厳密」という言葉を他の数学用語で見かけないような気がするので，悩ましいところです．あと「モノイド圏」とするか「モノイダル圏」とするかもむずかしい．

うな圏 $\mathbf{C}$ である．まず，$\otimes$ は結合的であり：

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C \tag{4.2}$$

また，$\otimes$ に関して単位元として振る舞う対象 I を持つ：

$$I \otimes C = C = C \otimes I \tag{4.3}$$

狭義モノイド圏は，**Cat** におけるモノイド対象と完全に同じものである．基底圏が poset P である例には，結び $x \vee y$ と終対象 1 によるものと，交わり $x \wedge y$ と 0 によるものが含まれる（P がこうした構造を持つことを仮定している）．また，単調写像 $f : P \to P$ の集まり $\mathrm{End}(P)$ に各点ごとの順序を入れた poset は，$\otimes$ として合成 $g \circ f$ を，単位元として 1_P を取ればこれも狭義モノイド圏となる．離散モノイド圏，即ち基底圏が離散圏であるようなものは，明らかに単なる普通の（**Sets** における）モノイドである．一方，ただ一つの対象を持つモノイド圏はモノイダルなモノイドとなり，先の注意 4.7 により，可換モノイドと一致する．

複数の射と対象を持つ真の圏を基底圏とするより一般のモノイド圏は余り見られない．そうした構造は少なくはないが，典型的には (4.2) と (4.3) で要求されている条件は，「同型を除いて」でしか成立しない．そうしたものの例としては，直積 $A \times B$ や余積 $A + B$，ベクトル空間や環上の加群・多元環などのテンソル積が挙げられる（線型論理の証明がなす圏も更んある例を与える）．このより一般的な（狭義とは限らない）モノイド圏の概念には，「同型を除く」概念を精密化するのに必要な「自然同型」の概念を（第**??**章で）学んだ後に再び立ち返る．

poset ではない**狭義の**モノイド圏の基本的な例は，有限順序数 $0, 1, 2, \cdots$ の圏 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{fin}}$ によって与えられる．有限順序数は，集合論によって，

$$0 = \emptyset,$$
$$n + 1 = \{\, 0, \cdots, n \,\}$$

と表現出来る．射は，単にこれらの間の任意の写像である．モノイド積 $m \otimes n$ は $m + n$ であり，0 がその単位元となる．期待通りの方法で精密化出来るという意味で，この例は実際に「一つの対象上の自由モノイド圏」となっている．

論理学の用語を使えば，圏の内部群の概念は，**Sets** に限らず有限直積を持つ任意の圏で「群論に対するモデルを与えることが出来る」と云うことに対応している．よって，例えば λ-計算の型の圏も有限直積を持つので，**λ-計算における群**の概念を定義することが出来る．勿論，モノイドや環のような，二項演算と等式によって与えられる代数理論についても同様のことがいえる．否定や含意，量化子など他の論理演算を含むような理論は，直積以外の更に追加的な構造を持つ圏においてモデルを与えることが出来る．これが，**圏論的意味論**と呼ばれるもののおおまかな説明である．こうした意味論は，ある種の直観主義論理の理論のように，**Sets** によるモデル化だけでは不十分な理論に有用である．

4.2　群のなす圏

G, H を（**Sets** における）群とし，

$$h : G \to H$$

を群準同型とする．h の**核**（*kernel*）は，イコライザ

$$\ker(h) = \{\, g \in G \mid h(g) = u \,\} \longrightarrow G \underset{u}{\overset{h}{\rightrightarrows}} H$$

によって定義される．ここで u によって，定数準同型

$$u! = G \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{u} H$$

を表した．この構成によって，上の図式がイコライザとなることは既に見た．

$\ker(h)$ が**部分群**であることに注目しよう．特に，$\ker(h)$ は**正規部分群**（*normal subgroup*）である．つまり，任意の $k \in \ker(h)$ に対し，

$$g \cdot k \cdot g^{-1} \quad \forall g \in G$$

が成立する（ただし積記法を用いた）．さて，$N \overset{i}{\rightarrowtail} G$ を**任意の**正規部分群とするとき，N に属する $g \in G$ だけを u に移すような（「N をつぶす」）コイコライザ

$$N \underset{u}{\overset{i}{\rightrightarrows}} G \xrightarrow{\pi} G/N$$

を次のようにして構成することが出来る．まず，G/N は「N の coset」とする．つまり，G/N は任意の $g \in G$ に対し，

$$g \sim h \iff g \cdot h^{-1} \in N$$

に関する同値類 $[g]$ を元にもつものとする（$\sim$ が同値関係となることは演習問題！）．このとき，剰余群 G/N の積は，

$$[x] \cdot [y] = [x \cdot y]$$

で与えられる．これは，N が正規部分群であることから次のようにして well-defined であることがわかる．今，u, v が任意に与えられており，$x \sim u, y \sim v$ であるとする．定義より

$$x \cdot y \sim u \cdot v \iff (x \cdot y) \cdot (u \cdot v)^{-1} \in N$$

である．右辺を変形すると，

$$\begin{aligned}
(x \cdot y) \cdot (u \cdot v)^{-1} &= x \cdot y \cdot v^{-1} \cdot u^{-1} \\
&= x \cdot (u^{-1} \cdot u) \cdot y \cdot v^{-1} \cdot u^{-1} \\
&= (x \cdot u^{-1}) \cdot (u \cdot (y \cdot v^{-1}) \cdot u^{-1})
\end{aligned}$$

となり，最後の式は明らかに N に属するので，$x \cdot y \sim u \cdot v$ が云える．

それでは，先程の図式が実際にコイコライザとなることを示そう．まず，$n \cdot u = n$ から $[n] = [u]$ が成立するので，

$$\pi \circ i = \pi \circ u!$$

が明らかに成立する．今，N をつぶすような（任意の $n \in N$ に対し $f(n) = u$ となるような）準同型 f が与えられていると仮定しよう．このとき，次のような「因数分解」 $\bar{f}$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/N \arrow[ur, dotted, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

を，

$$\bar{f}[g] = f(g)$$

により定めることが出来る．$x \sim y$ から $f(x) = f(y)$ が云えれば，この定義は well-defined となる．しかるに，$x \sim y$ から $f(x \cdot y^{-1}) = u$ が云えるので，

$$f(x) = f(x \cdot y^{-1} \cdot y) = f(x \cdot y^{-1}) \cdot f(y) = u \cdot f(y) = f(y)$$

となるのでこれは well-defined となる．更に，π はエピ射であるので，$\bar{f}$ は $\pi\bar{f} = f$ を満たす一意な射となる．こうして，次の古典的な**群の準同型定理**の大半は示されたことになる．

定理 4.10. 任意の群の準同型 $h : G \to H$ は，核と呼ばれる正規部分群 $\ker(h) = h^{-1}(H)$ を持ち，次が成立する．

　$N \subseteq G$ を任意の正規部分群とすると，$N \subseteq \ker(h)$ であるための必要十分条件は，$\bar{h} \circ \pi = h$ を満たすような（必然的に一意な）準同型 $\bar{h} : G/N \to H$ が存在することである：

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/N \arrow[ur, dotted, "\bar{h}"'] & \end{tikzcd}$$

Proof. あとは条件を満たすような因数分解 $\bar{h}$ が存在すれば，$N \subseteq \ker(h)$ となることを示せばよい．しかし，これは $\pi(N) = \{[u_G]\}$ であることから明らかである．よって，$h(n) = \bar{h}\pi(n) = \bar{h}([n]) = u_H$ □

　最後に，上の定理で $N = \ker(h)$ とおき，$[x], [y] \in G/\ker(h)$ を任意に取れば，

$$\begin{aligned} \bar{h}([x]) = \bar{h}([y]) &\Rightarrow h(x) = h(y) \\ &\Rightarrow h(xy^{-1}) = u \\ &\Rightarrow xy^{-1} \in \ker(h) \\ &\Rightarrow x \sim y \\ &\Rightarrow [x] = [y] \end{aligned}$$

となるので，$\bar{h}$ は単射となる．よって，次の結論を得る．

系 4.11. 任意の群準同型 $h : G \to H$ は，単射準同型が次にくる[*3]商として次のように因数分解される．

[*3] “quotient followed by injective homomorphism” を簡潔かつ適切に訳せていない……．

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/\ker(h) \arrow[ur, "\bar{h}"'] & \end{tikzcd}$$

従って，$\bar{h} : G/\ker(h) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(h) \subseteq H$ は h の像である部分群 $\mathrm{im}(h)$ の上への同型へとなる．

よって，特に h は，その核が自明であるとき（$\ker(h) = \{u\}$ であるとき），その時に限って単射となる．

準同型 $h : G \to H$ の核に対する双対概念に，余核 $c : H \to C$ がある．これは，$c \circ h = u$ が成立するという意味で「h をつぶす」普遍的な方法である．核がイコライザの特別な場合であるのと同じように，余核はコイコライザの特別な場合である．余核の詳細は演習問題に譲る．

4.3　圏としての群

群は圏であることを思い出そう．特に，群とは対象を唯一つ持ち，全ての射が同型射であるような圏である．群 G, H を圏と見做したとき，それらの間の函手

$$F : G \to H$$

を考えることが出来る．群の間の函手は，明らかに群準同型と同じものである．

では，群 G から，他の必ずしも群とは限らない圏 $\mathbf{C}$ への函手 $R : G \to \mathbf{C}$ とは何だろうか？もし $\mathbf{C}$ が（有限次元）ベクトル空間と線形変換からなる圏であれば，このような函手は群論の専門家が「線型表現」と呼んでいるものと恰度同じものである．G の元は $\mathbf{C}$ で特定の対象上の自己同型となる．例えば，置換表現とは単に $\mathbf{Sets}$ への函手に過ぎない．

さて，準同型の核や正規部分群による剰余群の概念を群から圏へと一般化し，群の準同型定理の圏論的な類似を与えよう．

定義 4.12. 圏 $\mathbf{C}$ 上の**合同関係**（*congruence*）とは，次を満たすような射の同値関係 $f \sim g$ のことである．

1. $f \sim g$ ならば $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g), \mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g)$ が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

2. $f \sim g$ ならば，任意の射 $a : A \to X, b : Y \to B$ に対し，$bfa \sim bga$ となる．

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "a"] & \bullet \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \bullet \arrow[r, "b"] & \bullet \end{tikzcd}$$

ただし，$\mathrm{dom}(f) = X = \mathrm{dom}(g)$ かつ $\mathrm{cod}(f) = Y = \mathrm{cod}(g)$ である．

$\sim$ を圏 $\mathbf{C}$ 上の合同関係としたとき，**合同圏**（*congruence category*）$\mathbf{C}^{\sim}$ を次のように定める．

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{C}^{\sim})_0 &= \mathbf{C}_0 \\
(\mathbf{C}^{\sim})_1 &= \{\, \langle f, g\rangle \mid f \sim g \,\} \\
\tilde{1}_C &= \langle 1_C, 1_C\rangle
\end{aligned}
$$

合同条件を用いれば，この合成が well-defined であることは用意に確かめられる．

次の自明な二つの射影函手が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C}^{\sim} \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}
$$

そこで，**商圏**（*quotient category*）$\mathbf{C}/{\sim}$ を次のようにして構成しよう．

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{C}/{\sim})_{\mathbf{0}} &= \mathbf{C}_0 \\
(\mathbf{C}/{\sim})_{\mathbf{1}} &= (\mathbf{C}_1)/{\sim}
\end{aligned}
$$

射は，各 $f \in \mathbf{C}_1$ について $[f]$ の形であり，$1_{[C]} = [1_C]$ かつ $[g] \circ [f] = [g \circ f]$ と定める．合同条件を用いれば，これも well-defined となる．

次の図式をコイコライザとするような商函手（quotient functor）$\pi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}/{\sim}$ が明らかに存在する．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C}^{\sim} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathbf{C} \arrow[r, "\pi"] & \mathbf{C}/{\sim}
\end{tikzcd}
$$

群の場合については既に十分に見た．

この構成によって，ある函手に対するコイコライザを作る方法に演習問題で触れる．以下では，この構成を群の場合に類似的な「圏の準同型定理」の証明に使う方法を見よう．

圏 $\mathbf{C}$ および $\mathbf{D}$ と函手

$$F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$$

が与えられたとしよう．すると，次のようにして， F から $\mathbf{C}$ 上の合同関係 $\sim_F$ を決定することが出来る．

$$f \sim_F g \iff \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g), \mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g), F(f) = F(g)$$

これが**実際に**合同関係となることは簡単に確認出来るだろう．

さて，合同圏を

$$\ker(F) = \mathbf{C}^{\sim_F} \rightrightarrows \mathbf{C}$$

と書き，これを F の**核圏**（*kernel category*）と呼ぶことにしよう．

すると，商圏

$$\mathbf{C}/{\sim_F}$$

は次の普遍写像性（UMP）を持つ．

定理 4.13. 任意の函手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ は，$\mathbf{C}$ 上の合同関係 $\sim_F$ により決定される核圏 $\ker(F)$ を持ち，次の性質を満たす．任意の $\mathbf{C}$ 上の合同関係 $\sim_F$ が与えられた時，

$f \sim g \Rightarrow f \sim_F g$ であることと，次に示すような因数分解 $\tilde{F} : \mathbf{C}/_{\sim} \to \mathbf{D}$ が存在することは同値.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbf{D} \\ \mathbf{C}/_{\sim} \arrow[ur, dotted, "\tilde{F}_1"'] & \end{tikzcd}$$

群の場合とちょうど同様に，上の定理で $\mathbf{C}^{\sim} = \ker(F)$ と置くことで因数分解定理が得られる.

系 4.14. どんな函手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ も，$F = \tilde{F} \circ \pi$ の形に因数分解される.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbf{D} \\ \mathbf{C}/\ker(F) \arrow[ur, dotted, "\tilde{F}_1"'] & \end{tikzcd}$$

ここで，π は対象に関して全単射かつ hom 集合について全射であり，$\tilde{F}$ は hom 集合について単射（即ち「忠実」）である：

$$\tilde{F}_{A,B} : \mathrm{Hom}(A, B) \rightarrowtail \mathrm{Hom}(FA, FB) \qquad (\forall A, B \in \mathbf{C}/\ker(F))$$

4.4 有限表示圏

最後に，生成元と関係式によって表示される圏について考察しよう.

有限グラフ G 上の自由圏 $\mathbf{C}(G)$ から初めて，

$$(g_1 \circ \ldots \circ g_n) = (g_1' \circ \ldots \circ g_m')$$

の形の関係式の有限集合 Σ について考えよう（ただし，$g_i \in G$ であり，$\mathrm{dom}(g_n) = \mathrm{dom}(g_m')$ かつ $\mathrm{cod}(g_1) = \mathrm{cod}(g_1')$ とする）．つまり，Σ は $\mathbf{C}(G)$ で同じ「端点」と「方向」をもつ二つの「辺」を同一視するような関係式の有限集合である．次に，Σ に含まれるすべての関係式 $g = g'$ について $g \sim g'$ を見たすような最小の合同関係 $\sim$ を $\sim_\Sigma$ とする．これは，合同関係の族の共通部分が再び合同関係となることから確かに存在する．この合同関係による剰余ことで，**有限表示圏**（*finitely presented category*）の概念を得る.

$$\mathbf{C}(G, \Sigma) = \mathbf{C}(G)/_{\sim_\Sigma}$$

これは群の有限表示の完全なる類似であり，頂点を唯一つだけ持つグラフの場合が群の有限表示である．すると，$\mathbf{C}(G, \Sigma)$ の普遍写像性は，既にみた群の場合の明らかな類似になっている.

特に，$\mathbf{C}(G, \Sigma)$ には「G 型の図式」が含まれている．つまり，任意の $g = g' \in \Sigma$ について $i(g) = i(g')$ が成立するようなグラフ準同型 $i : G \to |\mathbf{C}(G, \Sigma)|$ が存在する．更に，G 型の図式を持つ任意の圏 $\mathbf{D}$ が与えられた時（つまりグラフ準同型 $h : G \to |\mathbf{D}|$ が与え

られ，各 $g = g' \in \Sigma$ について $h(g) = h(g')$ が成立する時)，$|\bar{h}| \circ i = h$ を見たすような函手 $\bar{h} : \mathbf{C}(G, \Sigma) \to \mathbf{D}$ が一意に存在する．

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbf{C}(G) \arrow[d] \\ & \mathbf{C}(G, \Sigma) \end{tikzcd}$$

群の表示とちょうど同じように，$\mathbf{C}(G, \Sigma)$ の構成法も二つの函手のコイコライザとして説明出来る．実際，射 $f, f' \in \mathbf{C}$ があって，$\sim$ を $f \sim f'$ を満たす $\mathbf{C}$ 上の最小の合同関係とする．この時図式

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}(\mathbf{2}) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f'"'] & \mathbf{C} \arrow[r, "q"] & \mathbf{C}/\!\sim \end{tikzcd}$$

について考えよう．但し，$\mathbf{2}$ は二つと頂点とその間に唯一つの辺を持つグラフであり，f, f' はグラフの生成辺をそれぞれ同名の射へと移す一意な函手，q は商圏への標準的な函手とする．すると，q は f および f' のコイコライザとなる．これを示すために，

$$df = df'$$

を満たす任意の函手 $d : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ を取ろう．$\mathbf{C}(\mathbf{2})$ がグラフ $\bullet \xrightarrow{x} \bullet$ 上の自由圏であることから，

$$d(f) = d(f(x)) = d(f'(x)) = d(f')$$

が成立する．従って，$\langle f, f' \rangle \in \ker(d)$ となるので，$\sim \subseteq \ker(d)$ となる（$\sim$ が $f \sim f'$ を満たす最小の合同関係であることから従う）．よって，準同型定理により $d = \bar{d} \circ q$ を見たす函手 $\bar{d} : \mathbf{C}/\!\sim \to \mathbf{D}$ が存在する．

関係式が二つ以上ある場合には，有限表示代数の場合（例 3.22）と同様に $\mathbf{2}$ を $n \times \mathbf{2}$ で置き換え，自由圏 $\mathbf{C}(\mathbf{2})$ を

$$\mathbf{C}(n \times \mathbf{2}) = n \times \mathbf{C}(\mathbf{2}) = \mathbf{C}(\mathbf{2}) + \ldots + \mathbf{C}(\mathbf{2})$$

で置き換えればよい．

例 4.15. 一意的に同型な二つの対象を持つ圏は，有限圏であるがループ（循環）を持たないことから，いかなるグラフ上でも自由とは**ならない**．しかし，グラフ

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

と関係式

$$gf = 1_A \quad fg = 1_B$$

によって有限表示**できる**．

同様に，恒等ではない射 $f : \bullet \to \bullet$ を唯一つだけ持ち，

$$f \circ f = 1 \quad \text{または} \quad f \circ f = f$$

のいずれかを満たすような有限表示圏が存在する．最初の場合からは，群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が得られる．二つ目の例は「冪等」である（しかし群にはならない）．事実，任意の巡回群

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$$

は，このようなグラフ $f : \star \to \star$ と関係式 $f^n = 1$ によって表現することが出来る．

勿論，複数の対象を持つおゆな有限表示圏も存在する．こうした圏は，頂点が対象を与え，辺が射を生成するような有限グラフと，辺による道に関する有限個の等式によって得られる．

4.5　演習問題

1. 群 G を，唯一つの対象を持ち，全ての射が同型射であるような圏と見做し，G 上の圏論的な合同関係 $\sim$ が，正規部分群 $N \subseteq G$（によって決定される G 上の同値関係）と全く同じものであることを示せ．つまり，両者は同型対応することを示せ．更に，商圏 $G/\!\sim$ と剰余群 G/N が一致することも示せ．群の準同型定理は，圏のものの特別な場合であることを導け．
2. 集合 I 上のスライス圏 $\mathbf{Sets}/I$ における群対象について考察せよ．そのような群 G は，各 $i \in I$ について $G_i = G^{-1}(i)$ とすることで I を添字にもつ（通常の）群の族 G_i を定めることを示せ．これによって，それぞれ I で添字付けられた群と準同型の族からなる圏への函手 $\mathbf{Groups}(\mathbf{Sets}/I) \to \mathbf{Groups}^I$ が定まることを示せ．
3. 任意の Abel 群は準同型による群演算を持つことを示して，群のなす圏における群対象が Abel 群と一致することの証明を完成させよ．
4. Eckmann-Hilton 論法を用いて，群の成す圏におけるモノイドは内部群となることを示せ．
5. Abel 群の準同型 $f : A \to B$ が与えられたとき，余核 $c : B \to C$ を B の部分群 $\mathrm{im}(f) \subseteq B$ による剰余として定義する．
   (a) 余核が次の普遍写像性を持つことを示せ．$c \circ f = 0$ であり，もし準同型 $g : B \to G$ が $g \circ f = 0$ を満たすなら，g は c によって $g = u \circ c$ と一意に分解される．
   (b) 余核が特別な種類のコイコライザであることを示し，余核を用いて任意のコイコライザを構成せよ．
   (c) 余核の核をとり，$f : A \to B$ がそれによって分解されることを示せ．更に，その核は $f : A \to B$ の像（と同型）であることを示せ．このことより，余核によって決定される $f : A \to B$ の分解は，核をとることによって決定される分解と一致することを示せ．
6. 次に示すような圏 $\mathbf{3}$ について，異なる四つの有限表示を与えよ．

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \arrow[d] \\ & 3 \end{tikzcd}$$

3 は自由圏か？

7. **C** 上の合同関係 $\sim$ と，次に示すような **C** の射が与えられているとする．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f'"'] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & C \end{tikzcd}$$

このとき，$f \sim f'$ かつ $g \sim g'$ ならば $g \circ f \sim g' \circ f'$ となる事を示せ．

8. 任意の $C \in \mathbf{C}$ について $FC = GC$ となるような函手 $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が与えられているとし，**D** 上の合同関係を次の条件によって定める．

$$\begin{aligned} f \sim g \quad \text{iff} \quad & \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \,\&\, \mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g) \\ & \&\, \forall \mathbf{E} \forall H : \mathbf{D} \to \mathbf{E} : HF = HG \Rightarrow H(f) = H(g) \end{aligned}$$

これが実際に合同関係となることを示せ．更に，$\mathbf{D}/\!\sim$ が F と G のコイコライザとなっていることを示せ．

9. $\mathbf{Ord}_{\mathrm{fin}}$ が，実際に一つの対象上の自由モノイド圏になっていることを確かめよ．

第 5 章

極限と余極限

この章では，まず今までに見た定義と関連する話題として，部分対象と引き戻しという概念を簡単に議論する．これらの使い方に関して学ぶことも目的の一つではあるが，すぐにこれらの概念が必要になるから，というのが主な理由である．続いて，一般的な極限の概念を定義し，より体系的に調べてゆく．今までに出て来た抽象的特徴付けの多くは，極限の特別な場合である．勿論，その双対として余極限という概念もあり，こちらも多くの興味深い応用がある．第 **??** 章でもう一つ基礎的な概念を手短かに学んだ後,「高次圏論」とでも呼ぶべき話題へと移っていく．

5.1 部分対象

集合 X の部分集合 $U \subseteq X$ はイコライザとして表現出来，そのイコライザは常にモノ射となることを見た．よって，モノ射を部分集合の一般化とみなすことは自然なことである．つまり， **Groups** でのモノ射は部分群，**Top** でのモノ射は部分空間としてみなせる，等といった具合である．

大まかな考え方は次の通りである．ある種の構造を持った集合（以後,「ガジェット」と呼ぶことにする）から成る圏 $\mathbf{C}$ のモノ射

$$m : M \rightarrowtail X$$

が与えられているとする．この時，m の像による部分**集合**（$m(M)$ などとも書かれる）

$$\{\, m(y) \mid y \in M \,\} \subseteq X$$

は，しばしば m を介して M と同型となる X の部分ガジェットとなる．

$$m : M \xrightarrow{\sim} m(M) \subseteq X$$

より一般的に，像を取るための台写像が存在しないような圏であっても，$m : M \rightarrowtail X$ それ自身が X の「一部分」を決定していると考えることが出来る．

定義 5.1. 圏 $\mathbf{C}$ における対象 X の**部分対象**（*subobject*）とは，モノ射

$$m : M \rightarrowtail X$$

のことである．X の部分対象 m, m' について，その間の射 $f : m \to m'$ は，$\mathbf{C}/X$ の射

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "m"'] & M' \arrow[d, "m'"] \\ & X \end{tikzcd}$$

である．以上より，X の $\mathbf{C}$ における部分対象から成る圏

$$\mathrm{Sub}_{\mathbf{C}}(X)$$

が得られる．

定義より，m' がモノ射であることから上の図式を満たすような射 f は高々一つしか存在しない．よって，$\mathrm{Sub}_{\mathbf{C}}(X)$ はプレ順序圏となる．部分対象の**包含関係**を次で定める．

$$m \subseteq m' \text{ iff } f : m \to m' \text{が存在する}$$

最後に，m, m' が部分対象として同型であるとき，つまり $m \subseteq m'$ かつ $m' \subseteq m$ であるとき，m と m' は**同値**（*equivalent*）であるといい，$m \equiv m'$ と書く．この状況は，次の図式の二つの三角形を可換にするような f と f' が存在するときにのみ起こる．

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, shift right, "f"'] \arrow[dr, "m"'] & M' \arrow[l, shift right, "f'"'] \arrow[d, "m'"] \\ & X \end{tikzcd}$$

上の図式において，$m = m'f = mf'f$ であり，m がモノ射であることから $f'f = 1_M$ となり，同様に $ff' = 1_{M'}$ となる．よって，f を介して $M \cong M'$ となる．このことから，**同値な部分対象は同型なドメインを持つ**ことがわかる．モノ射 $m : M \rightarrowtail X$ が明らかなとき，記法と言語を濫用して，M を部分対象と呼ぶことがある．

注意 5.2. プレ順序集合

$$\mathrm{Sub}_{\mathbf{C}}(X)$$

を同値関係 $\equiv$ で割って poset にすると便利なことがしばしばある．このとき部分対象は互いに包含するという関係によるモノ射の同値類となる．

Sets では，こちらの部分対象の概念の下で，同型

$$\mathrm{Sub}_{\mathbf{Sets}}(X) \cong P(X)$$

が得られる．つまり，任意の部分対象を部分集合により一意に表現することが出来る．「部分対象」と云った際に，それがモノ射によるものであるのか，その同値類によるものであるのかはその都度明らかにすることにし，両方の概念を用いることにする．

$M' \subseteq M$ のとき，図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & M' \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

に示すような f はモノ射となることに注意すれば，M' は M の部分対象となることがわかる．よって，モノ射同士の合成は再びモノ射となることから，合成による函手

$$\mathrm{Sub}(M) \to \mathrm{Sub}(M')$$

が得られる．

X の一般化元

$$z : Z \to X$$

の言葉を使って，そうした一般化元と部分対象 $m : M \rightarrowtail X$ の間の**局所的な所属関係**（*local membership*）

$$z \in_X M$$

を次のように定めることが出来る．

$$z \in_X M \text{ iff } z = mf \text{ となる } f : Z \to M \text{ が存在する}$$

m がモノ射であることより，もし z が f により上のように分解されるなら，それは一意に決定される．

例 5.3. イコライザ

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

を考えると，これは次の性質を満たす部分対象 E となっている．

$$z \in_A \iff f(z) = g(z)$$

よって， E は $f(z) = g(z)$ となる一般化元 $z : Z \to A$ からなる部分対象と見做すことが出来る．次のように書くと示唆的である．

$$E = \{ z \in Z \mid f(z) = g(z) \} \subseteq A$$

となる．圏論的論理学では，このような部分集合に対する体系を与えることで，こうした直観を精密化する方法を開発出来る．

5.2 引き戻し

引き戻しの概念は，数学や論理学で直積と同じくらい非常によく現れるものの一つである．これは，共通部分と逆像の一般化になっている．

定義から始めよう．

定義 5.4. 圏 $\mathbf{C}$ で，下図のように $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g)$ なる射が与えられているとする．

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"'] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

このとき，f と g の**引き戻し**（*pullback*）とは，$fp_1 = gp_2$ を満たす普遍的な射の組

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & A \\ B & \end{tikzcd}$$

のことである．つまり，$fz_1 = gz_2$ を見たすような任意の射 $z_1 : Z \to A$ と $z_2 : Z \to B$ が与えられたとき，$z_1 = p_1 u$ かつ $z_2 = p_2 u$ となるような射 $u : Z \to P$ が一意に存在する，ということである．この状態を表したのが次の図式である．

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, "z_1"] \arrow[ddr, "z_2"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

直積のような記号で引き戻しを書くこともある．

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dotted, "\langle z_1, z_2 \rangle"] \arrow[drr, "z_1"] \arrow[ddr, "z_2"'] & & \\ & A \times_C B \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

引き戻しは，普遍写像性により定められるので，明らかに同型を除いて一意である．つまり，射の組に対して二つの引き戻しが与えられた時，それらの間の一意な射は互いに逆射となっている．

一般化元の言葉を用いれば，任意の $z \in A \times_C B$ は $fz_1 = gz_2$ なる z_1, z_2 によって $z = \langle z_1, z_2 \rangle$ と表せる．これにより，

$$A \times_C B = \{\, \langle z_1, z_2 \rangle \in A \times B \mid fz_1 = gz_2 \,\}$$

は，$f \circ \pi_1$ と $g \circ \pi_2$ のイコライザにより定まる $A \times B$ の部分対象であるかのように考えることが出来る．実際，そうなっている．

命題 5.5. 直積とイコライザを持つ圏において，射の角

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

が与えられているとする．e を $f\pi_1$ と $g\pi_2$ のイコライザし，$p_1 = \pi_1, p_2 = \pi_2 e$ とおいて，次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "e"] \arrow[drr, "p_2"] \arrow[ddr, "p_1"'] & & \\ & A \times B \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[d, "\pi_1"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

このとき，E, p_1, p_2 は f と g の引き戻しとなる．逆に，E, p_1, p_2 が f と g の引き戻しであるとき，射

$$e = \langle p_1, p_2 \rangle : E \to A \times B$$

は $f\pi_1$ と $g\pi_2$ のイコライザとなる．

Proof. $fz_1 = gz_2$ となるような

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "z_2"] \arrow[d, "z_1"'] & B \\ A & \end{tikzcd}$$

を取る．$\langle z_1, z_2 \rangle : Z \to A \times B$ が取れるので，

$$f\pi_1 \langle z_1, z_2 \rangle = fz_1 = gz_2 = g\pi_2 \langle z_1, z_2 \rangle$$

となる．よって，$eu = \langle z_1, z_2 \rangle$ となるイコライザへの射 $u : Z \to E$ が存在する．このことから，

$$p_1 u = \pi_1 eu = \pi_1 \langle z_1, z_2 \rangle = z_1$$

かつ

$$p_2 u = \pi_2 eu = \pi_2 \langle z_1, z_2 \rangle = z_2$$

となる．もし $u' : Z \to E$ も $p_i u' = z_i, i = 1, 2$ を満たすなら， $\pi_i eu' = z_i$ となるので，$eu' = \langle z_1, z_2 \rangle = eu$ が云え，e がモノ射であることから $u = u'$ となる．

逆も同様に示せる． □

系 5.6. 圏 $\mathbf{C}$ が二項直積を持つならば，$\mathbf{C}$ は引き戻しも持つ．

以上の議論から，**Sets** での引き戻しを直積の部分集合として陽に構成することが出来る．

$$\{\, \langle a, b \rangle \mid fa = gb \,\} = A \times_C B \hookrightarrow A \times B$$

例 5.7. 函数 $f : A \to B$ と部分集合 $V \subseteq B$ を取る．通常通り，

$$f^{-1}(V) = \{\, a \in A \mid f(a) \in V \,\} \subseteq A$$

とし，図式

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(V) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "j"'] & V \arrow[d, "i"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

を考える．ここで，i, j は標準的な包含写像であり，$\bar{f}$ は f の $f^{-1}(V)$ への制限の自明な分解である（$a \in f^{-1}(V) \Rightarrow f(a) \in V$ より）．

この図式は引き戻しとなる（任意の $z : Z \to A$ に対し $z \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow fz \in V$ に注意）．よって，逆像

$$f^{-1}(V) \subseteq A$$

は引き戻しとして**同型を除いて一意に**決定される．

前の例が示唆する通り，引き戻しを用いて **Sets** 以外の圏で逆像を定義することが出来る．事実，任意の圏において引き戻し

$$\begin{tikzcd} A \times_M B \arrow[r] \arrow[d, "m'"'] & M \arrow[d, "m"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

が与えられたとき，m がモニックならば m' もモニックとなる（演習問題！）．

よって，$f : A \to B$ をひとつ固定すれば，引き戻しを取ることにより，写像

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathrm{Sub}(B) &\to \mathrm{Sub}(A) \\ m &\mapsto m' \end{aligned}$$

が誘導されることが判る．そこで，次の章では f^{-1} が函手となることを示し，f^{-1} が部分対象の同値性を保つこと，即ち，

$$M \equiv N \Rightarrow f^{-1}(M) \equiv f^{-1}(N)$$

が成立することを示そう．

5.3　引き戻しの性質

まずは次の単純な補題から始めよう．この補題はいたるところで出て来る．

補題 5.8 (Two-pullbacks)**.** 引き戻しを持つ圏において，次の可換図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h''"'] & E \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h'"] & D \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}
$$

1. 二つの正方形が共に引き戻しであれば，外側の長方形も引き戻しとなる．即ち，

$$A \times_B (B \times_C D) \cong A \times_C D$$

2. 右側の正方形と外側の長方形が引き戻しなら，左側の正方形も引き戻しとなる．

Proof. 図式追跡. □

系 5.9. 可換三角形の引き戻しは可換三角形となる．特に，次の「プリズム図式」の右端のような可換三角形が与えられたとする．

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[rr, "h_\alpha"] \arrow[dr, dotted, "\gamma'"] \arrow[dd, "\alpha'"'] & & A \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd, "\alpha"'] & \\
& B' \arrow[rr, "h_\beta"] \arrow[dl, "\beta'"] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\
C' \arrow[rr, "h"'] & & C &
\end{tikzcd}
$$

このとき，任意の $h : C' \to C$ に対し，もし左端のような引き戻し α', β' が構成出来れば，図のような γ' が一意に存在して，左の三角形と上部の四角形を可換とする．特に，上の四角形は引き戻しとなる．

Proof. Two-pullback 補題を使う. □

命題 5.10. 引き戻しは函手である．即ち，引き戻しを持つ圏 $\mathbf{C}$ の任意の射 $h : C' \to C$ に対し，

$$(A \xrightarrow{\alpha} C) \mapsto (C' \times_C A \xrightarrow{\alpha'} C')$$

で定められる函手

$$h^* : \mathbf{C}/C \to \mathbf{C}/C'$$

が存在する．ここで，α' は h に沿った α の引き戻しであり，$\gamma : \alpha \to \beta$ に対する作用は前の系によって与えられているものとする．

Proof. 確かめるべきことは次の二つである．

$$
\begin{aligned}
&h^* : (1_X) = 1_{h^* X} \\
&h^*(g \circ f) = h^*(g) \circ h^*(f)
\end{aligned}
$$

これらは two-pullbacks の補題を繰り返し適用することで確認できる．例えば，最初の条件を示すために次の図式を考えよう．

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "h'"'] \arrow[d, "1_{A'}"'] & A \arrow[d, "1_A"] \\ A' \arrow[r, "h'"'] \arrow[d, "\alpha'"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ C' \arrow[r, "h"'] & C \end{tikzcd}$$

下の正方形が引き戻しであれば，明らかに外側の長方形も引き戻しとなり，従って上部の正方形も引き戻しとなる．よって，

$$h^*1_\alpha = 1_{\alpha'} = 1_{h^*\alpha}$$

□

系 5.11. $\mathbf{C}$ を引き戻しを持つ圏とする．任意の $\mathbf{C}$ の射 $f : A \to B$ に対し，圏と函手に関する次の図式を得る

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sub}(A) \arrow[d] & \mathrm{Sub}(B) \arrow[l, "f^{-1}"'] \arrow[d] \\ \mathbf{C}/A & \mathbf{C}/B \arrow[l, "f^*"] \end{tikzcd}$$

f^{-1} が f^* を部分圏 $\mathrm{Sub}(B)$ へ制限したものとして定義されているため，この図式は可換である．よって，特に f^{-1} の函手性より，

$$M \subseteq N \Rightarrow f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N)$$

が成立する．以上より，$M \equiv N$ ならば $f^{-1}(M) \equiv f^{-1}(N)$ が従う．よって，f^{-1} は同値類上でも定義することが出来る．

$$f^{-1}/\equiv : \mathrm{Sub}(B)/\equiv \to \mathrm{Sub}(A)/\equiv$$

例 5.12. **Sets** での引き戻しを考える．

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

このとき，

$$E = \{ \langle a, b \rangle \mid f(a) = g(b) \}$$

は，イコライザ

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "{\langle f', g' \rangle}"] & A \times B \arrow[r, shift left, "f\pi_1"] \arrow[r, shift right, "g\pi_2"'] & C \end{tikzcd}$$

として構成出来ることは既に見た．

ここで，$B = 1, C = 2 = \{\perp, \top\}, g = \top : 1 \to 2$ とすると，イコライザ

$$E \xrightarrow{\langle f', g' \rangle} A \times 1 \underset{g\pi_2}{\overset{f\pi_1}{\rightrightarrows}} 2$$

は，既に「命題函数」 $f : A \to 2$ の「外延」として説明したものだ．したがって，部分集合 $U \subseteq A$ とその特性函数 $\xi_U : A \to 2$ との関係を引き戻しによって言い換えることが出来る．

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "!"] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ A \arrow[r, "\xi_U"'] & 2 \end{tikzcd}$$

函数 $\varphi : A \to 2$ に対し「外延」

$$V_\phi = \{\, x \in A \mid \varphi(x) = \top \,\}$$

を与える同型

$$2^A \cong \mathcal{P}(A)$$

は引き戻しとして正確に説明出来る．

$$V_\phi = \{\, x \in A \mid \varphi(x) = \top \,\} = \varphi^{-1}(\top)$$

さて，任意の函数

$$f : B \to A$$

が与えられたとき，上の例でやったように引き戻しとして誘導される逆像演算

$$f^{-1} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$$

を考える．外延 V_φ を取り，次の二つの引き戻しからなる図式を考える．

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(V_\varphi) \arrow[r] \arrow[d] & V_\varphi \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "\varphi"'] & 2 \end{tikzcd}$$

すると（*two-pullbacks* の補題より），

$$f^{-1}(V_\varphi) = f^{-1}(\varphi^{-1}(\top)) = (\varphi f)^{-1}(\top) = V_{\varphi f}$$

を得る．これは論理学的には，命題関数 φ に出現する A 上の変数 x を f によって置換することが，f に沿った対応する外延の引き戻し

$$f^{-1}(\{\, x \in A \mid \varphi(x) = \top \,\}) = \{\, y \in B \mid \varphi(f(y)) = \top \,\}$$

をとる操作としてモデル化出来る，という事実と対応している．

任意の函数 $f : A \to B$ に対し，

$$\begin{tikzcd} 2^A \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "2^f"'] & \mathcal{P}(A) \arrow[d, "f^{-1}"] \\ 2^B \arrow[r, "\cong"'] & \mathcal{P}(B) \end{tikzcd}$$

が可換となることは既に示した．ここで，$2^f : 2^A \to 2^B$ は前への合成 $2^f(g) = g \circ f$ である．このような状況を，同型

$$2^A \cong \mathcal{P}(A)$$

は A において**自然** *(natural)* である，お云う．この条件は，単に各対象について同型が存在するという条件よりも明らかに遥かに強いものになっている．こうした「自然性」は後程体系的に考察していくことになる．実際，この概念は圏論が発生する契機となった現象の一つである．

例 5.13. I を添字の集合とし，I で添字付けられた集合族

$$(A_i)_{i \in I}$$

を考えよう．任意の函数 $\alpha : J \to I$ が与えられたとき，「α によって添字を付け替える」ことで得られる集合族

$$(A_{\alpha(j)})_{j \in J}$$

が存在する．この添字の付け直しも引き戻しを用いて説明することが出来る．特に，各集合 A_i に対し，値 i を取る定数函数 $p_i : A_i \to I$ を取り，余積の上に誘導される函数

$$p = [p_i] : \coprod_{i \in I} A_i \to I$$

を考える．添字をつけ直した族 $(A_{\alpha(j)})_{j \in J}$ は，次の図式に示すような α に沿った引き戻しとして得られる．

$$\begin{tikzcd} \coprod_{j \in J} A_{\alpha(j)} \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & \coprod_{i \in I} A_i \arrow[d, "p"] \\ J \arrow[r, "\alpha"'] & I \end{tikzcd}$$

ここで，q は $(A_{\alpha(j)})_{j \in J}$ に関する p と同様な添字射影である．言い換えれば，

$$J \times_I (\coprod_{i \in I} A_i) \cong \coprod_{j \in J} A_{\alpha(j)}$$

が成立するということである．詳細の確認は，読者への教育的な演習問題とする．

5.4　極限

直積，イコライザ，そして引き戻しの概念が互いに無関係な物ではないことを見てきた．それらの間の正確な関係を述べたのがこの命題である．

命題 5.14. 圏が有限直積とイコライザを持つ必要十分条件は，その圏が引き戻しと終対象を持つことである．

Proof. 有限直積とイコライザから引き戻しと終対象を構成する方法については既に見た．逆を示すため，$\mathbf{C}$ を引き戻しと終対象 1 を持つ圏とする．

- 次の図式に示すように，任意の対象 A, B について，明らかに $A \times B \cong A \times_1 B$ が成立する．

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

- 任意の射 $f, g : A \to B$ に対し，そのイコライザ $e : E \to A$ は次のような引き戻しと構成できる．

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"'] & B \arrow[d, "\Delta = \langle 1_B, 1_B \rangle"] \\ A \arrow[r, "\langle f, g \rangle"'] & B \times B \end{tikzcd}$$

一般化元を用いて言い換えれば，

$$E = \{\, (a, b) \mid \langle f, g \rangle (a) = \Delta(b) \,\}$$

となる．ここで，$\langle f, g \rangle (a) = \langle fa, ga \rangle$ かつ $\Delta(b) = (b, b)$ である．よって，

$$\begin{aligned} E &= \{\, \langle a, b \rangle \mid f(a) = b = g(a) \,\} \\ &= \{\, a \mid f(a) = g(a) \,\} \end{aligned}$$

となり，これが示したかったことである．

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

が実際にイコライザとなることは，簡単な図式追跡によって示せる．

□

直積，終対象，引き戻し，そしてイコライザは全てこれから考察する一般的な**極限** (*limit*) の概念の特殊な場合である．まずは準備的な定義が必要である．

定義 5.15. $\mathbf{J}, \mathbf{C}$ を圏とする．$\mathbf{C}$ の **J-型の図式**とは，函手

$$D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$$

のことである．「添字圏」$\mathbf{J}$ の対象を小文字で $i, j, \ldots$ と表し，$D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ の値を $D_i, D_j, \ldots$ などとかく．

図式 D への**錐** (*cone*) とは，$\mathbf{C}$ の対象 C と各対象 $j \in \mathbf{J}$ に関する $\mathbf{C}$ の射

$$c_j : C \to D_j$$

であり，$\mathbf{J}$ の各射 $\alpha : i \to j$ について次の三角形を可換とする物のことである．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "c_j"] \arrow[d, "c_i"'] & D_j \\ D_i \arrow[ur, "D_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

錐の**射**

$$\vartheta : (C, c_j) \to (C', c'_j)$$

とは，次の三角形を可換にする $\mathbf{C}$ の射である．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[dr, "c_j"'] & C' \arrow[d, "c'_j"] \\ & D_j \end{tikzcd}$$

つまり，全ての $j \in \mathbf{J}$ に対し，$c_j = c'_j \circ \vartheta$ が成立することである．以上から，D への錐から成る自明な圏

$$\mathbf{Cone}(D)$$

を得る．

図式 D を「$\mathbf{J}$ の $\mathbf{C}$ での描像」と考えている．そのような D への錐とは，D を底面とした複数の側面を持ったピラミッドであり，その間の射は，その頂点間の射である．（ここで読者は何か図を描いてみること！）

定義 5.16. 図式 $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ の**極限** (*limit*) とは，$\mathbf{Cone}(D)$ の終対象のことである．**有限極限**とは，有限の添字圏 $\mathbf{J}$ 上の図式に対する極限のことである．

極限はしばしば

$$p_i : \varprojlim_j D_j \to D_i$$

の形で書かれる．定義を読み下すと，図式 D の極限は次のような普遍写像性を持つ：任意の D への錐 (C, c_j) が与えられたとき，一意な射 $u : C \to \varprojlim_j D_j$ が存在して，任意の j について

$$p_j \circ u = c_j$$

が成立する．したがって，極限を与える錐 $(\varprojlim_j D_j, p_j)$ は図式に「最も近い」錐と考えることが出来，実際他の錐 (C, c_j) は頂点の射 $u : C \to \varprojlim_j D_j$ を合成するだけで極限錐から得ることが出来る．

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, dotted, "u"] \arrow[dr, "c_i"'] \arrow[drrr] & & \varprojlim_j D_j \arrow[dl] \arrow[dr, "p_j"] & \\
& D_i \arrow[rr, "D_\alpha"'] & & D_j
\end{tikzcd}$$

例 5.17. $\mathbf{J} = \{1, 2\}$ を二つの対象を持ち，恒等射以外に射を持たない離散圏とする．図式 $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ は対象 $D_1, D_2 \in \mathbf{C}$ の組である．D 上の錐は射の対

$$D_1 \xleftarrow{c_1} C \xrightarrow{c_2} D_2$$

を持つ $\mathbf{C}$ の対象 C である．そして，D の極限はそうした錐の終対象，即ち $\mathbf{C}$ における D_1 と D_2 の**直積**

$$D_1 \xleftarrow{p_1} D_1 \times D_2 \xrightarrow{p_2} D_2$$

である．よってこの場合

$$\varprojlim_j D_j \cong D_1 \times D_2$$

が成立する．

例 5.18. $\mathbf{J}$ を次の圏とする．

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

$\mathbf{J}$ 型の図式は，

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[r, shift left, "D_\alpha"] \arrow[r, shift right, "D_\beta"'] & D_2
\end{tikzcd}$$

のようになり，錐は射の組

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[r, shift left, "D_\alpha"] \arrow[r, shift right, "D_\beta"'] & D_2 \\
C \arrow[u, "c_1"] \arrow[ur, "c_2"'] &
\end{tikzcd}$$

であり，$D_\alpha c_1 = c_2$ かつ $D_\beta c_1 = c_2$ を満たすもの，つまり $D_\alpha c_1 = D_\beta c_1$ となるものである．よって， D に対応する極限は D_α, D_β の**イコライザ**である．

例 5.19. もし $\mathbf{J}$ が空圏なら，図式 $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ は唯一つだけ存在し，従ってその極限は $\mathbf{C}$ の**終対象**となる．

$$\varprojlim_{j \in \mathbf{0}} D_j \cong 1$$

例 5.20. $\mathbf{J}$ が有限圏

$$
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

のとき，次の形の図式

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

の極限は，単に f と g の引き戻しであることがわかる．

$$\varprojlim_j D_j \cong A \times_C B$$

以上から，次の命題の半分は示せたことになる．

命題 5.21. 圏が任意の有限極限を持つ必要十分条件は，有限直積とイコライザを持つことである（前の命題より，それぞれ引き戻しと終対象を持つこと，と云っても同値である）．

ここで，任意の有限図式 $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ が $\mathbf{C}$ において極限を持つとき，$\mathbf{C}$ は**任意の有限極限を持つ**と云う．

Proof. 任意の有限極限は有限直積とイコライザから構成出来ることを示す必要がある．

$$D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$$

を有限図式とする．最初の近似として，対象の集合 $\mathbf{J}_0$ 上の直積

$$\prod_{i \in \mathbf{J}_0} D_i \tag{5.1}$$

を取ってみると，正しい方向の射 $p_j : \prod_{i \in \mathbf{J}_0} D_i \to D_j$ が得られる．しかし，これらは図式 D の射 $D_\alpha : D_i \to D_j$ と常に可換となるとは限らない．そこで，直積とイコライザから引き戻しを構成した時と同様にして，全ての射（集合 $\mathbf{J}_1$）上の直積 $\prod_{(\alpha: i \to j) \in \mathbf{J}_1} D_j$ と二本の特別な射

$$
\begin{tikzcd}
\prod_i D_i \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & \prod_{\alpha: i \to j} D_j
\end{tikzcd}
$$

を考えよう．ここで，ϕ, ψ は対象の直積の図式における射の作用を記録したものである．特に，ϕ と ψ を，二番目の直積の射影 π_α との合成を

$$\pi_\alpha \circ \phi = \phi_\alpha = \pi_{\mathrm{cod}(\alpha)}$$
$$\pi_\alpha \circ \psi = \psi_\alpha = D_\alpha \circ \pi_{\mathrm{dom}(\alpha)}$$

に取ることにより定める（ここで，$\pi_{\mathrm{cod}(\alpha)}, \pi_{\mathrm{dom}(\alpha)}$ は最初の直積からの射影である）．

今，直積 (5.1) の部分対象で図式 D の射が可換となるようなものを得る為に，イコライザ

$$E \xrightarrow{e} \prod_i D_i \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha:i\to j} D_j$$

を取る．$e_i = \pi_i \circ e$ とした時，(E, e_i) が D の極限となることを示す．そのために，射 $c: C \to \prod_i D_i$ を任意に取り，$c_i = \pi_i \circ c$ に対して $c = \langle c_i \rangle$ と表すことにする．射の族 $(c_i : C \to D_i)$ は $\phi c = \psi c$ となる時，その時に限り D への錐となることに注目しよう．実際，

$$\phi \langle c_i \rangle = \psi \langle c_i \rangle$$

となる必要十分条件は，任意の α に対し，

$$\pi_\alpha \phi \langle c_i \rangle = \pi_\alpha \psi \langle c_i \rangle$$

となることである．しかし，

$$\pi_\alpha \phi \langle c_i \rangle = \phi_\alpha \langle c_i \rangle = \pi_{\mathrm{cod}(\alpha)} \langle c_i \rangle = c_j$$

であり，

$$\pi_\alpha \psi \langle c_i \rangle = \psi_\alpha \langle c_i \rangle = D_\alpha \circ \pi_{\mathrm{dom}(\alpha)} \langle c_i \rangle = D_\alpha c_i$$

であった．以上から，$\phi c = \psi$ となる必要十分条件は任意の $\alpha : i \to j$ に対し $c_j = D_\alpha \circ c_i$ となることであり，即ち，$(c_i : C \to D_i)$ が主張通り錐となることである．以上から，(E, e_i) が錐であることと，任意の錐 $(c_i : C \to D_i)$ が $\phi \langle c_i \rangle = \psi \langle c_i \rangle$ となる射 $\langle c_i \rangle : C \to \prod_i D_i$ を与えることが従う．よって，E による $\langle c_i \rangle$ の一意的な分解 $u : C \to E$ が存在し，これは明らかに錐の射となる． □

上の証明では，ある種類の直積の存在以外には有限性の条件を使っていないので，本質的に同じ証明により次の系が得られる．

系 5.22. 圏がある濃度の任意の極限を持つ必要十分条件は，その圏と同じ濃度の直積とイコライザを持つことである．ここで，$\mathbf{C}$ が濃度 κ の極限（直積）を持つとは，$\mathrm{card}(\mathbf{J}_1) \leq \kappa$ なる任意の図式 $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ の極限（κ 個の対象の任意の直積）を持つことである．

錐と極限の概念は，当然**余錐** (*cocone*) と**余極限** (*colimit*) の概念に双対化できる．よって，次の双対的な定理が得られる．

定理 5.23. 圏 $\mathbf{C}$ が有限の余極限を持つ必要十分条件は，有限余積とコイコライザ（又は押し出しと始対象）を持つことである．$\mathbf{C}$ が大きさ κ の任意の余極限を持つ必要十分条件は，$\mathbf{C}$ がコイコライザと大きさ κ の余積を持つことである．

5.5　極限の保存

5.6　余極限

5.7　演習問題

索引