3.6　コンビネータ理論

ラムダ計算の別の形式化である**コンビネータ理論**（combinatory logic）という体系を導入する．束縛変数を使わずに，次の 3 つの定数記号を導入して，λ 抽象と同等な仕組みを実現する．

$$\mathbf{I} \equiv \lambda x.x$$
$$\mathbf{K} \equiv \lambda xy.x$$
$$\mathbf{S} \equiv \lambda xyz.xz(yz)$$

定義 3.12. ：

1. コンビネータ理論が扱う式 **CL 式**（CL-term）を次のように定義する．
   (*a*) 変数は CL 式である．
   (*b*) **I**，**K**，**S** は CL 式である．
   (*c*) P と Q が CL 式ならば，(PQ) は CL 式である．
2. CL 式間の等式を次の形式体系 **CL** で定義する．

$$\mathbf{I}P = P \qquad \mathbf{K}PQ = P \qquad \mathbf{S}PQR = PR(QR)$$
$$\frac{P = Q}{PR = QR} \qquad \frac{P = Q}{RP = RQ}$$
$$P = P \qquad \frac{P = Q \quad Q = R}{P = R} \qquad \frac{P = Q}{Q = P}$$

CL 式 P と Q について，上の形式体系から $P = Q$ が導出可能なとき，$\mathbf{CL} \vdash P = Q$ と書く．∎

定義 3.13. コンビネータ理論における簡約を定義する．

1. CL 式間の二項関係 $\to_w$ を 次のように定義する．

$$\mathbf{I}P \to_w P \qquad \mathbf{K}PQ \to_w P \qquad \mathbf{S}PQR \to_w PR(QR)$$
$$P \to_w Q \;\Rightarrow\; PR \to_w QR$$
$$P \to_w Q \;\Rightarrow\; RP \to_w RQ$$

2. $P \equiv P_0 \to_w P_1 \to_w P_1 \to_w \cdots \to_w P_n \equiv Q$（$n \geq 0$）のとき $P \twoheadrightarrow_w Q$.
   $P \twoheadrightarrow_w Q$　：P は Q に**弱簡約**（weak reduction）される．
   $P \to_w Q$　：P は Q に *1* ステップで弱簡約される．
3. CL 式間の二項関係 $\leftrightarrow_w$ を

$$P \leftrightarrow_w Q \Leftrightarrow P \to_w Q \text{ あるいは } Q \to_w P$$

と定義し，

$$P \equiv P_0 \leftrightarrow_w P_1 \leftrightarrow_w \cdots \leftrightarrow_w P_n \equiv Q \quad (n \geq 0)$$

のとき，$P =_w Q$ と定義する．∎

- ラムダ計算と同様に，次の関係が成り立つ．

$$\mathbf{CL} \vdash P = Q \;\Leftrightarrow\; P =_w Q$$

3.6.1　コンビネータ理論における λ 抽象の仕組み

定義 3.14. CL 式 P と変数 x について，CL 式 $\lambda^* x.P$ を P の構造に関する帰納法で定義する．

$$\lambda^* x.x \equiv \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned}
\lambda^*x.P &\equiv \mathbf{K}P && (x \text{ が } P \text{ に現れないとき}) \\
\lambda^*x.(PQ) &\equiv \mathbf{S}(\lambda^*x.P)(\lambda^*x.Q) && (x \text{ が } (PQ) \text{ に現れているとき})
\end{aligned}$$

例　：

$$\begin{aligned}
\lambda^*x.(\lambda^*y.xy) &\equiv \lambda^*x.\mathbf{S}(\lambda^*y.x)(\lambda^*y.y) \\
&\equiv \lambda^*x.\mathbf{S}(\mathbf{K}x)\mathbf{I} \\
&\equiv \mathbf{S}(\mathbf{S}(\lambda^*x.\mathbf{S})(\mathbf{S}(\lambda^*x.\mathbf{K})(\lambda^*x.x)))(\lambda^*x.\mathbf{I}) \\
&\equiv \mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{KS})(\mathbf{S}(\mathbf{KK})\mathbf{I}))(\mathbf{KI})
\end{aligned}$$

次の命題は，λ^*x が λ 抽象と同等な働きをすることを示している．

命題 3.6. $(\lambda^*x.P)Q \to_w P[x := Q]$

証明： P の構造に関する帰納法による．

(場合 1)　$P \equiv x$ のとき，

$$(\lambda^*x.P)Q \equiv \mathbf{I}Q \to_w Q \equiv P[x := Q]$$

(場合 2)　x が P に含まれないとき，

$$(\lambda^*x.P)Q \equiv \mathbf{K}PQ \to_w P \equiv P[x := Q]$$

(場合 3)　$P \equiv P_1P_2$ で x が P に含まれるとき，

$$\begin{aligned}
(\lambda^*x.P)Q &\equiv \mathbf{S}(\lambda^*x.P_1)(\lambda^*x.P_2)Q \\
&\to_w (\lambda^*x.P_1)Q((\lambda^*x.P_2)Q) \\
&\twoheadrightarrow_w P_1[x := Q]P_2[x := Q] \\
&\equiv P[x := Q]
\end{aligned}$$

∎

- 定義 3.14 において，$\lambda^*x.x \equiv \mathbf{I}$ の代わりに，$\lambda^*x.x \equiv \mathbf{SKK}$ といても，命題 3.6 が成り立つ．

$$\mathbf{SKK}P \to_w \mathbf{K}P(\mathbf{K}P) \to_w P$$

3.6.2 ラムダ計算とコンビネータ理論

λ 式から CL 式と，CL 式から λ 式への変換を定義する．

定義 3.15.　*1.* λ 式 M について，CL 式 M_{CL} を M の構造に関する帰納法で定義する．

$$x_{CL} \equiv x \qquad (MN)_{CL} \equiv M_{CL}N_{CL} \qquad (\lambda x.M)_{CL} \equiv \lambda^*x.M_{CL}$$

2. CL 式 P について，λ 式 P_λ を P の構造に関する帰納法で定義する．

$$\begin{aligned}
&\mathbf{I}_\lambda \equiv \lambda x.x \qquad \mathbf{K}_\lambda \equiv \lambda xy.x \qquad \mathbf{S}_\lambda \equiv \lambda xyz.xz(yz) \\
&x_\lambda \equiv x \qquad (PQ)_\lambda \equiv P_\lambda Q_\lambda
\end{aligned}$$

∎

- 上記の変換を用いて，次が成り立てば，ラムダ計算とコンビネータ理論は本質的に同じである．
  1. $\lambda \vdash M = N \;\Leftrightarrow\; \mathbf{CL} \vdash M_{CL} = N_{CL}$
  2. $\mathbf{CL} \vdash P = Q \;\Leftrightarrow\; \lambda \vdash P_\lambda = Q_\lambda$

- 上記の式で，1 の $\Rightarrow$ と 2 の $\Leftarrow$ が成り立たない．例：

  1 の $\Rightarrow$　： $M \equiv \lambda x.(\lambda y.y)x$ ，　$N \equiv \lambda y.y$ のとき，

  $\lambda \vdash M = N$ は成り立つが，$M_{CL} \equiv \lambda^*x.\mathbf{I}x \equiv \mathbf{S}(\mathbf{KI})\mathbf{I}$，$N_{CL} \equiv \mathbf{I}$ なので，$\mathbf{CL} \vdash M_{CL} \neq N_{CL}$

2 の ⇐ ： $P \equiv \mathbf{S}(\mathbf{KI})\mathbf{I}$，$Q \equiv \mathbf{I}$ のとき，

$\lambda \vdash P_\lambda = Q_\lambda$ は成り立つが，$\mathbf{CL} \vdash P = Q$ は成り立たない．

$$\Downarrow$$

ラムダ計算の体系 λ の ξ 規則（$M = N \Rightarrow \lambda x.M = \lambda x.N$）に対応する規則がコンビネータ理論にない（$P = Q \not\Rightarrow \lambda^* x.P = \lambda^* x.Q$）

定義 3.16. 次の CL 式を**関数的**（*functional*）であると呼ぶ

$$\mathbf{I},\ \mathbf{K},\ \mathbf{S},\ \mathbf{K}P,\ \mathbf{S}P,\ \mathbf{S}PQ$$

コンビネータ理論 $\mathbf{CL}$ に次の ζ_β 規則を加えた体系を $\mathbf{CL} + (\zeta_\beta)$ で表す．

$$(\zeta_\beta)\frac{Px = Qx}{P = Q}$$

- x は，P や Q に含まれない．
- P と Q は関数的な CL 式（λ 式に直した場合に，$\lambda x.-$ に β 変換可能）． ∎

3.6.3 $\mathbf{CL} + (\zeta_\beta)$ とラムダ計算の体系

次の定理は，$\mathbf{CL} + (\zeta_\beta)$ とラムダ計算の体系が同等であることを示す．

定理 3.4. *1.* $\lambda \vdash (M_{CL})_\lambda = M$（実際 $(M_{CL})_\lambda) \twoheadrightarrow_\beta M$）

2. $\mathbf{CL} + (\zeta_\beta) \vdash (P_\lambda)_{CL} = P$

3. $\lambda \vdash M = N \Leftrightarrow \mathbf{CL} + (\zeta_\beta) \vdash M_{CL} = N_{CL}$

4. $\mathbf{CL} + (\zeta_\beta) \vdash P = Q \Leftrightarrow \lambda \vdash P_\lambda = Q_\lambda$

証明：

1. M の構造に関する帰納法．
2. P の構造に関する帰納法．

$P \equiv P_1P_2$ **のとき** ： 仮定から明らか．

$P \equiv \mathbf{K}$ **のとき** ： $(\mathbf{K}_\lambda)_{CL} \equiv (\lambda xy.x)_{CL} \equiv \lambda^* x.\mathbf{K}x \equiv \mathbf{S}(\mathbf{KK})\mathbf{I}$ なので，

$(\mathbf{K}_\lambda)_{CL}x \equiv \mathbf{S}(\mathbf{KK})\mathbf{I}x = \mathbf{KK}x(\mathbf{I}x) = \mathbf{K}x$

ここで，$(\mathbf{K}_\lambda)_{CL}$ と $\mathbf{K}$ は両方とも関数的．規則 (ζ_β) から，$(\mathbf{K}_\lambda)_{CL} = \mathbf{K}$．$P \equiv \mathbf{S}$，$P \equiv \mathbf{I}$ も同様．

3 の（⇒） $\lambda \vdash M = N$ の導出関する帰納法．

$M = N$ **が公理（β）である場合** ： $M \equiv (\lambda x.M_1)M_2 = M_1[x := M_2] \equiv N$

命題 *3.6* から，$M_{CL} \equiv (\lambda^* x.(M_1)_{CL})(M_2)_{CL} = (M_1)_{CL}[x := (M_2)_{CL}]$．

一般に，$X_{CL}[x := Y_{CL}] \equiv (X[x := Y])_{CL}$ なので，$(M_1)_{CL}[x := (M_2)_{CL}] = (M_1[x := M_2])_{CL}$．

$M = N$ **が公理（ξ）である場合** ： $\frac{M' = N'}{M \equiv \lambda x.M' \ \ N \equiv \lambda x N'}$ の場合を考える（他の場合は明らか）．

帰納法の仮定から，$\mathbf{CL} + (\zeta_\beta) \vdash M'_{CL} = N'_{CL}$．

命題 *3.6* から，$\mathbf{CL} + (\zeta_\beta) \vdash (\lambda^* x.M'_{CL})x = (\lambda^* x.N'_{CL})x$

ここで，$\lambda^* x.M'_{CL}$ と $\lambda^* x.N'_{CL}$ は，変数 x を含まず（$\lambda^* x.-$ の定義），関数的なので，規則 (ζ_β) から，

$$\mathbf{CL} + (\zeta_\beta) \vdash \lambda^* x.M'_{CL} = \lambda^* x.N'_{CL}$$

$M_{CL} \equiv \lambda^* x.M'_{CL}$ で，$N_{CL} \equiv \lambda^* x.N'_{CL}$ なので，$\mathbf{CL} + (\zeta_\beta) \vdash M_{CL} = N_{CL}$．

4 の（⇒） $\mathbf{CL} + (\zeta_\beta) \vdash P = Q$ の導出に関する帰納法．

$P = Q$ **が $\mathbf{K}$ に関する公理である場合** ： $P \equiv \mathbf{K}QR = Q$．

λ において，

$$P_\lambda \equiv (\lambda xy.x)Q_\lambda P_\lambda = Q_\lambda$$

他の場合も同様．

3 の（$\Leftarrow$） $\mathbf{CL} + (\zeta_\beta) \vdash M_{CL} = N_{CL}$ と仮定すると，*4* の（$\Rightarrow$）から，

$$\lambda \vdash (M_{CL})_\lambda = (N_{CL})_\lambda$$

1 から，$(M_{CL})_\lambda = M$ と $(N_{CL})_\lambda = N$ なので，

$$\lambda \vdash M = N$$

.

4 の（$\Leftarrow$） $\lambda \vdash P_\lambda = Q_\lambda$ と仮定すると，*3* の（$\Rightarrow$）から，

$$\mathbf{CL} + (\zeta_\beta) \vdash (P_\lambda)_{CL} = (Q_\lambda)_{CL}$$

2 から，$\mathbf{CL} + (\zeta_\beta)$ で $(P_\lambda)_{CL} = P$ と $(Q_\lambda)_{CL} = Q$ なので，

$$\mathbf{CL} + (\zeta_\beta) \vdash P = Q$$

∎

3.7 外延的ラムダ計算

外延性 ：同じ定義域と地域をもつ関数 f と g について，定義域のすべての要素 a について，$f(a) = g(a)$ が成り立つとき，f と g は同じ関数.

$\lambda + (ext)$ **体系** ：

$$(\mathrm{ext})\frac{Mx = Nx}{M = N}\ （ただし，x \notin \mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{FV}(N)）$$

$\lambda + (\eta)$ **体系** ：

$$(\eta)\lambda x.Mx = M\ （ただし，x \notin \mathrm{FV}(M)）$$

命題 3.7. $\lambda + (ext) \vdash M = N \ \Leftrightarrow\ \lambda + (\eta) \vdash M = N$

証明：

$\Rightarrow$ ： $x \notin \mathrm{FV}(M)$ とすると，$\lambda + (\mathrm{ext}) \vdash (\lambda x.Mx)x = Mx$ なので，
規則 *(ext)* によって，$\lambda + (\mathrm{ext}) \vdash \lambda x.Mx = M$.

$\Leftarrow$ ： $\lambda + (\eta) \vdash Mx = Nx$（$x \notin \mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{FV}(N)$）とすると，規則 ξ によって，

$$\lambda + (\eta) \vdash \lambda x.Mx = \lambda x.Nx$$

公理 (η) を用いて，$\lambda + (\eta) \vdash M = N$ を得る. ∎

注 ： 公理 (η) は，体系 λ において成り立たない. $\Rightarrow$ 外延的ラムダ計算（体系 $\lambda + (\eta)$）
例 ： $\lambda \vdash \lambda x.zx \neq z$