証明： 定義から明らか.

命題 3.3. λ 式 M と N について，

$$[M, N] \equiv \lambda z.zMN$$

と定義し，

$$\mathbf{fst} \equiv \lambda x.x\ \mathbf{true}, \qquad \mathbf{snd} \equiv \lambda x.x\ \mathbf{false}$$

と定義すると，

$$\mathbf{fst}\ [M, N] = M \qquad \text{と} \qquad \mathbf{snd}[M, N] = N$$

が成り立つ．すなわち，$[M, N]$ は順序対.

証明： 定義から明らか.

3.3.4 関数の再帰定義

例 ： $\mathrm{fact}(n) = \mathbf{if}\ n = 0\ \mathbf{then}\ 1\ \mathbf{else}\ n * \mathrm{fact}(n-1)$

- 高階関数 F を

  $$F(f)(n) = \mathbf{if}\ n = 0\ \mathbf{then}\ 1\ \mathbf{else}\ n * f(n-1)$$

  と定義すると，fact は，次の等式を満たす f である．

  $$F(f) = f$$

  例 ：

  $$\begin{aligned} f(2) = F(f)(2) &= 2 * f(1) \\ 2 * F(f)(1) &= 2 * 1 * f(0) \\ 2 * 1 * F(f)(0) &= 2 * 1 * 1 = 2 \end{aligned}$$

- $F(f) = f$ を満たす f を F の**不動点**と呼ぶ.

命題 3.4. λ 式 $\mathbf{Y}$ を

$$\mathbf{Y} \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

と定義すると，任意の λ 式 M について，

$$M(\mathbf{Y}M) = \mathbf{Y}M$$

が成り立つ．すなわち，任意の λ 式について，その不動点が存在する.

- $\mathbf{Y}$ は，**不動点コンビネータ**（*fixed point combinator*）と呼ばれる.

証明：

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}M &= (\lambda x.M(xx))(\lambda x.M(xx)) \\ &= M((\lambda x.M(xx))(\lambda x.M(xx))) \\ &= M(\mathbf{Y}M) \end{aligned}$$

系 3.1. 任意の λ 式 M について，

$$H = \lambda x_1 ... x_n.M[h := H]$$

を満たす λ 式 H が存在する.
証明：$H \equiv \mathbf{Y}(\lambda h x_1 ... x_n.M)$ とおくと，命題 *3.4* によって，

$$H = (\lambda h x_1 ... x_n.M)H$$

したがって，$H = \lambda x_1 ... x_n.M[h := H]$ が得られる.

例： 階乗の計算

$$H_{\text{fact}} = \lambda x.\textbf{if}\ (\textbf{iszero}_c\ x)\ \textbf{then}\ c_1$$
$$\textbf{else}\ (\mathbf{A}_* x (H_{\text{fact}}(\textbf{pred}_c\ x)))$$

- 系 3.5.3 から，この等式を満たす λ 式 H_{fact} が存在するので，fact は，λ 式 H_{fact} で表される.

3.4 簡約

β 変換を，計算の観点から再考する.

- $(\lambda x.M)N$ から $M[x := N]$ への変換：
  記法 ： $(\lambda x.M)N \to M[x := N]$
  読み方 ： $(\lambda x.M)N$ は $M[x := N]$ へ**簡約**（reduction）される.
  例 ：

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_+\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{c}_1 &\equiv (\lambda)xypq.xp(ypq))\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1 \\
&\to (\lambda ypq.\mathbf{c}_2 p(ypq))\mathbf{c}_1 \\
&\to \lambda pq.\mathbf{c}_2 p(\mathbf{c}_1 pq) \\
&\to \lambda pq.(\lambda x.p^2(x))(\mathbf{c}_1 pq) \\
&\to \lambda pq.p^2(\mathbf{c}_1 pq) \\
&\to \lambda pq.p^2((\lambda x.px)q) \\
&\to \lambda pq.p^2(pq) \\
&\equiv \lambda pq.p^3(q) \\
&\equiv \mathbf{c}_3
\end{aligned}$$

- 簡約： ある式の部分式を別の式に置き換える操作. β 変換に関する簡約だけを扱うので，以降，$\to$ の代わりに $\to_\beta$ を使う.

定義 3.6. λ 式間の二項関係： $\to_\beta$，$\twoheadrightarrow_\beta$，$=_\beta$

1. $\to_\beta$：
   (a) $(\lambda x.M)N \to M[x := N]$
   (b) $M \to_\beta N \Rightarrow LM \to_\beta LN$
   (c) $M \to_\beta N \Rightarrow ML \to_\beta NL$
   (d) $M \to_\beta N \Rightarrow \lambda x.M \to_\beta \lambda x.N$
2. $\twoheadrightarrow_\beta$ ： $M \equiv M_0 \to_\beta M_1 \to_\beta \cdots \to_\beta M_n \equiv N$ $(n \geq 0)$ のとき $M \twoheadrightarrow_\beta N$
3. $=_\beta$： 二項関係 $\leftrightarrow_\beta$ を “$M \leftrightarrow_\beta N \Leftrightarrow M \to_\beta N$ あるいは $N \to_\beta M$” と定義して，

$$M \equiv M_0 \leftrightarrow_\beta M_1 \leftrightarrow_\beta \cdots \leftrightarrow_\beta M_n \equiv N\ (n \geq 0)$$

   のとき， $M =_\beta N$ と定義する.

- $M \twoheadrightarrow N$ の読み方： M は N に β **簡約**（β-reduction）される.（このとき，$M \to_\beta N$ は，“M は N に **1 ステップで** β 簡約される” と読む）
- $M =_\beta N$ の読み方：M は N に β 変換可能である（$M =_\beta N$ は，形式体系 λ に一致).

$$\lambda \vdash M = N \Leftrightarrow M =_\beta N$$

定義 3.7. 1. $(\lambda x.M)N$ の形の λ 式を β **リデックス**（*β-redex*）と呼び，$M[x := N]$ をその**コントラクタム**（*contractum*）と呼ぶ.
2. β リデックスを部分式にもたない λ 式を β **正規形**（*β-normal form*）と呼ぶ.
3. λ 式 M について，ある β 正規形 N が存在して，$M =_\beta N$ のとき，M は β **正規形をもつ**，あるいは，**正規形をもつ**という.

正規形をもつ例　：$\mathbf{A}_+ \ \mathbf{c}_2 \ \mathbf{c}_1 \ \twoheadrightarrow_\beta \ \mathbf{c}_3$

正規形をもたない例　：

$$
\begin{aligned}
&(\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \to_\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \to_\beta \cdots \\
&(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx) \to_\beta (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx) \to_\beta \cdots
\end{aligned}
$$

β 簡約の仕方による例　：

$$
\begin{aligned}
&(\lambda yz.z)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx)) \to_\beta \lambda z.z \\
&(\lambda yz.z)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx)) \to_\beta (\lambda yz.z)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx)) \to_\beta \cdots
\end{aligned}
$$

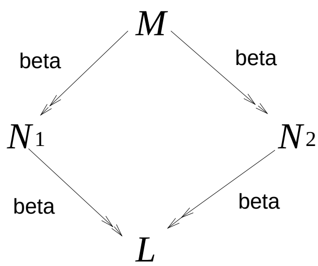
3.4.1　簡約戦略

- β リデックスが複数ある場合，β 簡約操作は 1 通りではない．$\Rightarrow$ β 正規形は 1 つに決まるのか?
  例： 2 通りの β 簡約が可能

$$
\begin{aligned}
(\lambda x.(\lambda y.yx)x)(\lambda z.z) &\to_\beta (\lambda x.xx)(\lambda z.z) \\
&\to_\beta (\lambda z.z)(\lambda z.z) \\
&\to_\beta \lambda z.z \\
(\lambda x.(\lambda y.yx)x)(\lambda z.z) &\to_\beta (\lambda y.y(\lambda z.z))(\lambda z.z) \\
&\to_\beta (\lambda z.z)(\lambda z.z) \\
&\to_\beta \lambda z.z
\end{aligned}
$$

定理 3.1. チャーチロッサー定理（*Church-Rosser theorem*）
$M \twoheadrightarrow_\beta N_1$ かつ $M \twoheadrightarrow N_2$ ならば，ある λ 式 L が存在して $N_1 \twoheadrightarrow_\beta L$ かつ $N_2 \twoheadrightarrow_\beta L$ が成り立つ． ∎

- M から β 簡約を始めて，N_1 と N_2 の異なる λ 式に到達しても，再び β 簡約で同一の λ 式 L に合流させることができることを意味している．
- この性質は，**チャーチ・ロッサー性**（*Church-Rosser property*）あるいは **合流性**（*confluence*）と呼ばれる．



- M が β 正規形をもてば，M から出発して β 簡約によって，正規形を得ることができる．$\Rightarrow$ β 簡約の各ステップで適切に選択しなかった場合，β 正規形に到達しないこともある．

$$
\begin{aligned}
(\lambda xy.y)((\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)) &\twoheadrightarrow_\beta (\lambda xy.y)((\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)) \\
&\twoheadrightarrow_\beta \cdots
\end{aligned}
$$

- 簡約の各ステップにおけるリデックスの選び方を，**簡約戦略**（reduction strategy）と呼ぶ．

定義 3.8. 最左簡約（最左最外簡約）　：最も左にあり，最も外側の β リデックスをそのコントラクタムで置き換える簡約戦略を，**最左戦略**（*leftmost strategy*）と呼び，最左戦略に基づいた β 簡約を**最左簡約**（*leftmost reduction*）と呼ぶ．

適用順序簡約（最左最内簡約）　最も左にあり，最も内側の β リデックスをそのコントラクタムで置き換える簡約戦略を，**適用順序戦略**（*applicative order strategy*）と呼び，適用順序戦略に基づいた β 簡約を**適用順序簡約**（*applicative order reduction*）と呼ぶ．

値呼出し　：適用順序簡約で，λ 抽象内を評価しないものを**値呼出し**（*call by value*）と呼ぶ．

∎

定理 3.2. 正規化定理（*normalization theorem*）M が β 正規形 N をもてば，最左戦略で，N が求まる． ∎

- M の β 正規形は，存在すれば，最左戦略で見つかるので，最左簡約を**正規化簡約**（*normal reduction*）と呼ぶ．

3.4.2 チャーチ・ロッサーの定理から得られる結果

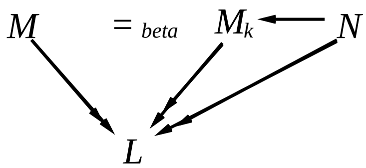
系 3.2. $M =_\beta N$ ならば，ある λ 式 L が存在して，$M \twoheadrightarrow_\beta L$ かつ $N \twoheadrightarrow_\beta L$

証明：

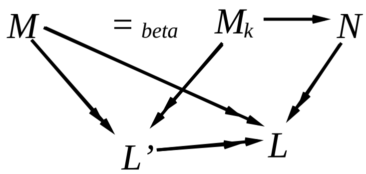
$M =_\beta N$ の定義から，$M \equiv M_0 \leftrightarrow_\beta M_1 \leftrightarrow_\beta \cdots \leftrightarrow_\beta M_n \equiv N$ であるので，n に関する帰納法で証明する．

1. $n = 0$ のとき，明らか．
2. $n = k$（$M =_\beta M_k \equiv N$）のとき成り立つとすると，$n = k+1$（$M_k \leftrightarrow_\beta M_{k+1}$）のとき，$M_k \rightarrow_\beta M_{k+1}$ と $M_k \leftarrow_\beta M_{k+1}$ に場合分けして考える．

   $M_k \leftarrow_\beta M_{k+1}$ ：仮定から，ある λ 式 L が存在して，$M \twoheadrightarrow_\beta L$ かつ $M_k \twoheadrightarrow_\beta L$ であり，$M_k \leftarrow_\beta M_{k+1}$ から，$M_{k+1} \rightarrow_\beta M_k \twoheadrightarrow_\beta L$．したがって，$M_{k+1} \twoheadrightarrow_\beta N$．



   $M_k \rightarrow_\beta M_{k+1}$ ：仮定から，ある λ 式 L' が存在して，$M \twoheadrightarrow_\beta L'$ かつ $M_k \twoheadrightarrow_\beta L'$．また，チャーチ・ロッサーの定理から，ある λ 式 L が存在して，$L' \twoheadrightarrow_\beta L$ かつ $N \twoheadrightarrow_\beta L$．したがって，$M \twoheadrightarrow_\beta L$．



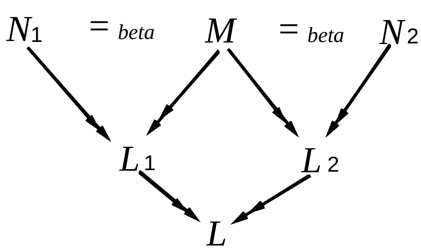
∎

系 3.3. *1.* 各 λ 式は，高々 *1* つの β 正規形をもつ．

2. λ 式 M が β 正規形 N をもてば，$M \twoheadrightarrow_\beta N$．

証明：

1. M が *2* つの正規形 N_1 と N_2 をもつと仮定すると，系 *3.2* から，ある λ 式 L_1 と L_2 が存在して，$M \twoheadrightarrow_\beta L_1$，$N_1 \twoheadrightarrow_\beta L_1$，$M \twoheadrightarrow_\beta L_2$，$N_2 \twoheadrightarrow_\beta L_2$．チャーチ・ロッサーの定理から，ある λ 式 L が存在して，$L_1 \twoheadrightarrow_\beta L$ かつ $L_2 \twoheadrightarrow_\beta L$ なので，$N_1 \twoheadrightarrow_\beta L$ かつ $N_2 \twoheadrightarrow_\beta L$．しかし，$N_1$ と N_2 は，β 正規形なので，$N_1 \equiv L \equiv N_2$．



2. N は M の β 正規形なので，$M =_\beta N$．したがって，系 *3.2* から，ある λ 式 L が存在して，$M \twoheadrightarrow_\beta L$ かつ $N \twoheadrightarrow_\beta L$．しかし，$N$ は β 正規形なので $L \equiv N$．すなわち，$M \twoheadrightarrow_\beta N$． ∎

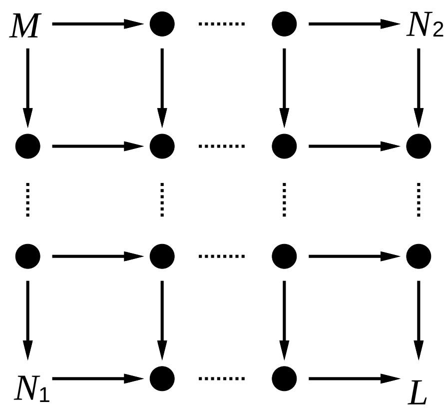
系 3.4. $\lambda \vdash M = N$ を満たさない λ 式 M と N が少なくとも *1* 組存在する（形式体系 λ は**無矛盾**（*consistent*）であるという）．

証明 ： 例えば，$\lambda x.x = \lambda xy.y$ は，形式体系 λ から導出できない．もし，導出できたと仮定すると，$\lambda x.x =_\beta \lambda xy.y$．しかし，$\lambda x.x$ と $\lambda xy.y$ は β 正規形であり，系 *3.3* の *1* に矛盾．

3.4.3 チャーチ・ロッサーの定理の証明

補題 3.1. $\rightarrow_R$ を λ 式間の二項関係とし，$M \equiv M_0 \rightarrow_R M_1 \rightarrow_R \cdots \rightarrow_R M_n \equiv M$ $(n \geq 0)$ のとき，$M \twoheadrightarrow_R N$ と書くことにする．このとき，$\twoheadrightarrow_R$ が，

1. $M \rightarrow_R N_1$ かつ $M \rightarrow_R N_2$ ならば，ある λ 式 L が存在して，$N_1 \rightarrow_R L$ かつ $N_2 \rightarrow_R L$ を満たすならば，$\rightarrow_R$ はチャーチ・ロッサー性を満たす．すなわち，
2. $M \twoheadrightarrow_R N_1$ かつ $M \twoheadrightarrow_R N_2$ ならば，ある L が存在して，$N_1 \twoheadrightarrow_R L$ かつ $N_2 \twoheadrightarrow_R L$.



証明 ： $\rightarrow_\beta$ が，補題 *3.1* を満たせば，証明はできたことになるが，$\rightarrow_\beta$ はこの性質を満たさない．そこで，$\rightarrow_\beta$ を基に，$\rightarrow_p$ を次のように定義する．

定義 3.9.
1. $M_1 \rightarrow_p N_1$，$M_1 \rightarrow_p N_2 \Rightarrow (\lambda x.M_1)M_2 \rightarrow_p N_1[x := N_2]$
2. $M_1 \rightarrow_p N_1$，$M_2 \rightarrow_p N_2 \Rightarrow M_1M_2 \rightarrow_p N_1N_2$
3. $M_1 \rightarrow_p N_1 \Rightarrow \lambda x.M_1 \rightarrow_p \lambda x.N_1$
4. $x \rightarrow_p x$

- $\rightarrow_p$ は，λ 式に含まれる複数の β リデックスを，一度にコントラクタムに置き換えることを意味する．

補題 3.2. $M \rightarrow_p M'$ かつ $N \rightarrow_p N'$ ならば，$M[x := N] \rightarrow_p M'[x := N']$.
証明： $M \rightarrow_p$ に関する帰納法を用いる．

1. $M \equiv (\lambda z.M_1)M_2 \rightarrow_p M_1'[z := M_2'] \equiv M'$（$M_1 \rightarrow_p M_1'$ かつ $M_2 \rightarrow_p M_2'$）のとき，仮定から，

$$M_1[x := N] \rightarrow_p M_1'[x := N'],\ M_2[x := N] \rightarrow_p M_2'[x := N']$$

一般性を失うことなく，$z \notin \mathrm{FV}(N)$ と仮定して，

$$\begin{aligned} M[x := N] &\equiv (\lambda z.M_1[x := N])(M_2[x := N]) \\ &\rightarrow_p (M_1'[x := N'])[z := M_2'[x := N']] \\ &\equiv M'[x := N'] \end{aligned}$$

2. $M \equiv M_1M_2 \rightarrow_p M_1'M_2' \equiv M'$ （$M_1 \rightarrow_p M_1'$ かつ $M_2 \rightarrow_p M_2'$）のとき，仮定から，

$$M_1[x := N] \rightarrow_p M_1'[x := N'],\ M_2[x := N] \rightarrow_p M_2'[x := N']$$

したがって，

$$\begin{aligned} M[x := N] &\equiv (M_1[x := N])(M_2[x := N]) \\ &\rightarrow_p (M_1'[x := N'])(M_2'[x := N']) \\ &\equiv M'[x := N'] \end{aligned}$$

3. $M \equiv \lambda z.M_1 \to_p \lambda z.M_1' \equiv M'$ $(M_1 \to_p M_1')$ のとき，場合 *2* と同様.

4. $M \equiv z \to_p z \equiv M'$ $(x \not\equiv z)$ のとき，
$$M[x := N] \equiv z \to_p z \equiv M'[x := N']$$

5. $M \equiv x \to_p x \equiv M'$ のとき，
$$M[x := N] \equiv N \to_p N' \equiv M'[x := N']$$

∎

補題 3.3. $M \to_p N_1$ かつ $M \to_p N_2$ ならば，ある λ 式 L が存在して，$N_1 \to_p L$ かつ $N_2 \to_p L$

証明： 各 λ 式 M について λ 式 M^* を M の構造に関する帰納法で定義する.

$$\begin{aligned}((\lambda x.M_1)M_2)^* &\equiv M_1^*[x := M_2^*] \\ (M_1M_2)* &\equiv M_1^*M_2^* \\ &\quad (M_1 \text{ は } \lambda x.M_3 \text{ の形をしていない }) \\ (\lambda x.M_1)^* &\equiv \lambda x.M_1^* \\ x^* &\equiv x\end{aligned}$$

- M^* は，M 中のすべての β リデックスをコントラクタムで置き換えた λ 式.
- $M \to_p N$ ならば $N \to_p M^*$ を証明できれば，$M \to_p N_1$ かつ $M \to_p N_2$ ならば，$N_1 \to_p M^*$ かつ $N_2 \to_p M^*$ が言える.

$M \to_p N$ の導出に関する帰納法で $N \to_p M^*$ を証明.

1. $M \equiv (\lambda x.M_1)M_2 \to_p N_1[x := N_2] \equiv N$（$M_2 \to_p N_1$ かつ $M_2 \to_p N_2$）のとき，仮定から，
$$N_1 \to_p M_1^* \text{ かつ } N_2 \to_p M_2^*$$
したがって，補題 *3.2* から，
$$N \equiv N_1[x := N_2] \to_p M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$$

2. $M \equiv M_1M_2 \to_p N_1N_2 \equiv N$ （$M_1 \to_p N_1$ かつ $M_2 \to_p N_2$）のとき，仮定から，
$$N_1 \to_p M_1^* \text{ かつ } N_2 \to_p M_2^*$$
したがって，
$$N \equiv N_1N_2 \to_p M_1^*M_2^* \equiv M^*$$

3. $M \equiv \lambda x.M_1 \to_p \lambda x.N_1 \equiv N$ $(M_1 \to_p N_1)$ のとき，場合 *2* と同様.

4. $M \equiv x \to_p x \equiv N$ のとき，$N \equiv x \to_p x \equiv M^*$ ∎

補題 3.1 と 補題 3.3 から， $M \twoheadrightarrow_p N_1$ かつ $M \twoheadrightarrow_p N_2$ ならば，ある L が存在して，$N_1 \twoheadrightarrow_p L$ かつ $N_2 \twoheadrightarrow_p L$. また，$X \twoheadrightarrow_p Y$ と $X \twoheadrightarrow_\beta Y$ は同値. したがって，$M \twoheadrightarrow_\beta N_1$ かつ $M \twoheadrightarrow_\beta N_2$ ならば，ある L が存在して，$N_1 \twoheadrightarrow_\beta L$ かつ $N_2 \twoheadrightarrow_\beta L$. ∎