随伴関手

alg-d
http://alg-d.com/math/

2013 年 11 月 25 日

定義. C, D を圏，$F\colon C \longrightarrow D$，$G\colon D \longrightarrow C$ を関手とする．$c \in C$，$d \in D$ に関して自然な同型 $\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \cong \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ が成り立つとき，F を G の左随伴関手，G を F の右随伴関手という．これを記号 $F \dashv G\colon C \longrightarrow D$ もしくは単に $F \dashv G$ で表す．

$F \dashv G\colon C \longrightarrow D$ を随伴とする．即ち $\mathrm{Hom}(Fc, d) \cong \mathrm{Hom}(c, Gd)$ である．ここで $d := Fc$ とすれば $\mathrm{Hom}(Fc, Fc) \cong \mathrm{Hom}(c, GFc)$ である．この同型で $\mathrm{id}_c \in \mathrm{Hom}(Fc, Fc)$ に対応する $\eta_c \in \mathrm{Hom}(c, GFc)$ が存在する．このようにして各 $c \in C$ に対して η_c を取ると，η は自然変換 $\mathrm{id}_C \longrightarrow GF$ となる．η を unit と呼ぶ．

同様にして $\mathrm{Hom}(FGd, d) \cong \mathrm{Hom}(Gd, Gd)$ により $\varepsilon_d \in \mathrm{Hom}(FGd, d)$ が定まる．ε は自然変換 $FG \longrightarrow \mathrm{id}$ となる．ε を counit と呼ぶ．

unit は次のような普遍性を持つ．

定義. C, D を圏，$c \in C$，$G\colon D \longrightarrow C$ を関手とする．以下を満たす組 $\langle d, f \rangle$ を c から G への普遍射という．

(1) d は D の対象である．
(2) f は C の射 $c \longrightarrow Gd$ である．
(3) 別の組 $\langle d', f' \rangle$ で上の条件を満たすものがあったとき，D の射 $g\colon d \longrightarrow d'$ が一意に存在して $Gg \circ f = f'$ となる．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & Gd \arrow[d, dotted, "Gg"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] & d \arrow[d, dotted, "g"] \\ & Gd' & d' \end{tikzcd}$$

命題 1. $F \dashv G\colon C \longrightarrow D$ を随伴とし，$\eta\colon \mathrm{id} \Longrightarrow GF$ を unit とする．このとき各 $c \in C$

に対して $\langle Fc, \eta_c \rangle$ は普遍射である．

証明. $f\colon c \longrightarrow Gd$ とする．同型 $\mathrm{Hom}_D(Fc,d) \cong \mathrm{Hom}_C(c,Gd)$ により $f \in \mathrm{Hom}(c,Gd)$ に対応する g$\in \mathrm{Hom}(Fc,d)$ を取る．まず $Gg \circ \eta_c = f$ を示す．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "f"'] & GFc \arrow[d, "Gg"] & Fc \arrow[d, "g"] \\ & Gd & d \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Hom}_D(Fc,d) \cong \mathrm{Hom}_C(c,Gd)$ の自然性により，次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(Fc,Fc) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "g\circ"] & \mathrm{Hom}(c,GFc) \arrow[d, "Gg\circ"] \\ \mathrm{Hom}(Fc,d) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}(c,Gd) \end{tikzcd}$$

故に $\mathrm{id}_{Fc} \in \mathrm{Hom}(Fc,Fc)$ の行き先を見れば $Gg \circ \eta_c = f$ である．

次に，$g'\colon Fc \longrightarrow d$ が $Gg' \circ \eta_c = f$ を満たすとする．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(Fc,Fc) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "g'\circ"] & \mathrm{Hom}(c,GFc) \arrow[d, "Gg'\circ"] \\ \mathrm{Hom}(Fc,d) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}(c,Gd) \end{tikzcd}$$

が可換であるから同型 $\mathrm{Hom}_D(Fc,d) \cong \mathrm{Hom}_C(c,Gd)$ により g' と $Gg' \circ \eta_c = f$ が対応する．故に $g' = g$ でなければならない． $\square$

実は，ある意味でこれの逆が成り立つ．即ち

定理 2. $G\colon D \longrightarrow C$ を関手として，各 $c \in C$ に対して普遍射 $\eta_c\colon c \longrightarrow Gd_c$ が存在するとする．このとき G は左随伴関手 F を持つ．更に，随伴 $F \dashv G$ の unit が η となる．

証明. $c \in C$ に対して一意に定まる普遍射 $\eta_c\colon c \longrightarrow Gd_c$ を使って $Fc := d_c$ と定める．射 $f\colon c \longrightarrow c'$ に対して射 $Ff\colon Fc \longrightarrow Fc'$ を，$\eta_c\colon c \longrightarrow GFc$ の普遍性から定まる射とする．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "f"'] & GFc \arrow[d, dotted, "GFf"] & Fc \arrow[d, dotted, "Ff"] \\ c' \arrow[r, "\eta_{c'}"'] & GFc' & Fc' \end{tikzcd}$$

この F は明らかに関手 $C \longrightarrow D$ になる．

$F \dashv G$ を示す．$c \in C$，$d \in D$ に対して $\varphi_{c,d}\colon \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ を $\varphi_{c,d}(f) := Gf \circ \eta_c$ と定める．

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "\varphi_{c,d}(f)"'] & GFc \arrow[d, dotted, "Gf"] & Fc \arrow[d, dotted, "f"] \\
& Gd & d
\end{tikzcd}$$

この φ は自然変換である．また普遍射の性質から明らかに $\varphi_{c,d}$ は全単射である．故に自然同型 $\varphi\colon \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \cong \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ が成り立つ． $\square$

同様なことが双対的に counit に対しても成り立つ．(省略)

このことから次のことが分かる．

定理 3. $G\colon D \longrightarrow C$ の左随伴は，存在するならば (同型を除いて) 一意である．即ち，$F \dashv G\colon C \longrightarrow D$ かつ $F' \dashv G\colon C \longrightarrow D$ ならば自然同型 $F \cong F'$ が存在する．

証明. $F \dashv G$ かつ $F' \dashv G$ とすれば, それぞれの unit を η, η' としたときに $\eta_c\colon c \longrightarrow GFc$ と $\eta'_c\colon c \longrightarrow GF'c$ が普遍射となるから，普遍射の普遍性により $Fc \cong F'c$ が分かる．この同型は c について自然だから $F \cong F'$ となる． $\square$

双対的に，右随伴も存在すれば一意である．

さて，$F \dashv G$ の unit $\eta\colon \mathrm{id} \Longrightarrow GF$ から自然変換 $\eta_G\colon G \Longrightarrow GFG$ が，counit $\varepsilon\colon FG \Longrightarrow \mathrm{id}$ から自然変換 $G\varepsilon\colon GFG \Longrightarrow G$ が得られる．このとき

命題 4. 合成 $G\varepsilon \circ \eta_G\colon G \Longrightarrow GFG \Longrightarrow G$ は $\mathrm{id}\colon G \Longrightarrow G$ に等しい．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & D \arrow[dr, "G"] & \\
& C \arrow[ur, "F"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta"] & C
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "G"'] & & D \arrow[dr, "G"] & \\
& C \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}"] & & C
\end{tikzcd}$$

証明. 定理 2 の証明で見たように，$f \in \mathrm{Hom}(c, Gd)$ に対して対応する $g \in \mathrm{Hom}(Fc, d)$ を取れば $Gg \circ \eta_c = f$ であった．ここで $c := Gd$，$f := \mathrm{id}_{Gd}$ と取れば $G\varepsilon_d \circ \eta_{Gd} = \mathrm{id}_{Gd}$ である．即ち $G\varepsilon \circ \eta_G = \mathrm{id}$. $\square$

双対的に，$\varepsilon_F \circ F\eta\colon F \Longrightarrow FGF \Longrightarrow F$ は $\mathrm{id}\colon F \Longrightarrow F$ に等しいことも分かる．

実は，これもある意味で逆が成り立つのである．即ち

定理 5. $F\colon C \longrightarrow D$，$G\colon D \longrightarrow C$ を関手，$\eta\colon \mathrm{id}_C \Longrightarrow GF$，$\varepsilon\colon FG \Longrightarrow \mathrm{id}_D$ を自然変換とする．$G\varepsilon \circ \eta_G = \mathrm{id}$，$\varepsilon_F \circ F\eta = \mathrm{id}$ が成り立つならば $F \dashv G$ である．

証明. $c \in C$，$d \in D$ を取る．$\varphi_{cd}\colon \mathrm{Hom}(Fc, d) \longrightarrow \mathrm{Hom}(c, Gd)$ を $\varphi_{cd}(f) := Gf \circ \eta_c$ で定める．また，$\psi_{cd}\colon \mathrm{Hom}(c, Gd) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Fc, d)$ を $\psi_{cd}(g) := \varepsilon_d \circ Fg$ で定める．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "\varphi_{cd}(f)"'] & GFc \arrow[d, "Gf"] & Fc \arrow[d, "f"] \\
& Gd & d
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "g"] & Fc \arrow[d, "Fg"'] \arrow[dr, "\psi_{cd}(g)"] & \\
Gd & FGd \arrow[r, "\varepsilon_d"'] & d
\end{tikzcd}
$$

φ_{cd}，ψ_{cd} は自然変換である．

> $\because$) $k\colon c \longrightarrow c'$ を射とする．次の図式が可換であることを示す．
>
> $$
> \begin{tikzcd}
> \mathrm{Hom}(Fc, d) \arrow[r, "\varphi_{cd}"] & \mathrm{Hom}(c, Gd) \\
> \mathrm{Hom}(Fc', d) \arrow[u, "\circ Fk"] \arrow[r, "\varphi_{c'd}"'] & \mathrm{Hom}(c', Gd) \arrow[u, "\circ k"']
> \end{tikzcd}
> \qquad
> \begin{tikzcd}
> f \circ Fk \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd}"] & G(f \circ Fk) \circ \eta_c \\
> & Gf \circ \eta_{c'} \circ k \\
> f \arrow[uu, mapsto, "\circ Fk"] \arrow[r, mapsto, "\varphi_{c'd}"'] & Gf \circ \eta_{c'} \arrow[u, mapsto, "\circ k"']
> \end{tikzcd}
> $$
>
> その為には $GFk \circ \eta_c = \eta_{c'} \circ k$ を示せばよいが，これは η が自然変換であることより従う．
>
> $$
> \begin{tikzcd}
> c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "k"'] & GFc \arrow[d, "GFk"] \\
> c' \arrow[r, "\eta_{c'}"'] & GFc'
> \end{tikzcd}
> $$
>
> 同様の議論を他にも行うことにより，φ_{cd}，ψ_{cd} が自然変換であることが分かる．

定義により $\psi_{cd} \circ \varphi_{cd}(f) = \psi_{cd}(Gf \circ \eta_c) = \varepsilon_d \circ F(Gf \circ \eta_c) = \varepsilon_d \circ FGf \circ F\eta_c$ である．$\varepsilon\colon FG \Longrightarrow \mathrm{id}$ は自然変換だったから，次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
FGFc \arrow[r, "\varepsilon_{Fc}"] \arrow[d, "FGf"'] & Fc \arrow[d, "f"] \\
FGd \arrow[r, "\varepsilon_d"] & d
\end{tikzcd}
$$

即ち $\varepsilon_d \circ FGf = f \circ \varepsilon_{Fc}$ となる．仮定により $\varepsilon_F \circ F\eta = \mathrm{id}$ だったから $\psi_{cd} \circ \varphi_{cd}(f) = f \circ \varepsilon_{Fc} \circ F\eta_c = f$ である．故に $\psi_{cd} \circ \varphi_{cd} = \mathrm{id}$ となる．双対的に $\varphi_{cd} \circ \psi_{cd} = \mathrm{id}$ も成り立つ．故に $\varphi\colon \mathrm{Hom}(Fc, d) \cong \mathrm{Hom}(c, Gd)$ であり $F \dashv G$ である． $\square$

定理 6. 左随伴関手は余極限と交換する．即ち，$F \dashv G \colon C \longrightarrow D$ を随伴，J を添え字圏，$T \colon J \longrightarrow C$ を関手で $\operatorname{colim} T$ が存在するとする．この時 $\operatorname{colim}(F \circ T)$ も存在して $\operatorname{colim}(F \circ T) = F(\operatorname{colim} T)$ となる．

証明. $\eta \colon \mathrm{id} \Longrightarrow GF$ を unit とする．$\operatorname{colim} T$ が存在するから，次の図式がある．

$$
\begin{tikzcd}
Ti \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{colim} T \\
Tj \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$f_i \colon FTi \longrightarrow d$ $(i \in J)$ で可換となるものをとる．

$$
\begin{tikzcd}
FTi \arrow[d] \arrow[dr, "f_i"] & \\
FTj \arrow[r, "f_j"'] & d
\end{tikzcd}
$$

このとき次の図式が可換となるような $F(\operatorname{colim} T) \longrightarrow d$ が一意に存在することを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
FTi \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "f_i"] & \operatorname{colim} T \arrow[d, dotted] \\
FTj \arrow[ur] \arrow[r, "f_j"'] & d
\end{tikzcd}
$$

まず，次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
Ti \arrow[r, "\eta_{Ti}"] \arrow[d] & GFTi \arrow[d] \arrow[dr, "Gf_i"] & \\
Tj \arrow[r, "\eta_{Tj}"'] & GFTj \arrow[r, "Gf_j"'] & Gd
\end{tikzcd}
$$

よって colim の普遍性により射 $\operatorname{colim} T \longrightarrow Gd$ が一意に存在する．

$$
\begin{tikzcd}
Ti \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \operatorname{colim} T \arrow[d, dotted] \\
Tj \arrow[ur] \arrow[r] & Gd
\end{tikzcd}
$$

よって $F(\operatorname{colim} T) \longrightarrow FGd \longrightarrow d$ が存在する．後はこの射の一意性を示せばよい．そ

の為に

$$
\begin{tikzcd}
FTi \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "f_i" near start] & F(\operatorname{colim} T) \arrow[d, "g"] \\
FTj \arrow[r, "f_j"'] \arrow[ur] & d
\end{tikzcd}
$$

が可換とすれば

$$
\begin{tikzcd}
Ti \arrow[r, "\eta_{Ti}"] \arrow[d] & GFTi \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "Gf_i" near start] & GF(\operatorname{colim} T) \arrow[d, "Gg"] \\
Tj \arrow[r, "\eta_{Tj}"'] & GFTj \arrow[r, "Gf_j"'] \arrow[ur] & Gd
\end{tikzcd}
$$

が可換となるから，$\operatorname{colim} T$ の普遍性により

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{colim} T \arrow[r, "\eta_{\operatorname{colim} T}"] \arrow[dr] & GF(\operatorname{colim} T) \arrow[d, "Gg"] \\
 & Gd
\end{tikzcd}
$$

が可換となる．ところで $\eta_{\operatorname{colim} T} \colon \operatorname{colim} T \longrightarrow GF(\operatorname{colim} T)$ は普遍射であるから，これが可換となるような g は一意である． □

双対的に，右随伴関手は極限と交換する．

以下，随伴の例を挙げる．

例． $\mathbf{Set}$ を集合の圏，k を体，$\mathbf{Vect}_k$ を k-線型空間の圏，$U \colon \mathbf{Vect}_k \longrightarrow \mathbf{Set}$ を忘却関手とする．$F \colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Vect}_k$ を集合 X に対して X で生成される k 上の線型空間を与える関手とすれば $F \dashv U$ である． □

例． $\mathbf{Grp}$ を群の圏，$U \colon \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ を忘却関手とする．$F \colon \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ を集合 X に対して X で生成される自由群を与える関手とすれば $F \dashv U$ である． □

例． $\mathbf{Ab}$ をアーベル群の圏，$U \colon \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を忘却関手とする．$F \colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ を集合 X に対して X で生成される自由アーベル群を与える関手とすれば $F \dashv U$ である． □

例． $\mathbf{Grp}$ を群の圏とする．$U \colon \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ を忘却関手とする．$F \colon \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ をアーベル化 $FG := G/[G, G]$ とすれば $F \dashv U$ である． □

例． R を可換環，R-$\mathbf{Mod}$ を R 加群の圏とする．$U \colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ を忘却関手とする．$F, G \colon \mathbf{Ab} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ を $F(A) := R \otimes_{\mathbb{Z}} A$, $G(A) := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, A)$ とすれば $F \dashv U \dashv G$

である． $\square$

例． $\mathbf{Top}$ を位相空間の圏，$U\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を忘却関手とする．$F\colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Top}$ を集合 X に対して離散位相空間 X を与える関手，$G\colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Top}$ を集合 X に対して密着位相空間 X を与える関手とすれば $F \dashv U \dashv G$ である． $\square$

例． $\mathbf{Monoid}$ をモノイドの圏，$\mathbf{Ring}$ を環の圏とする．$U\colon \mathbf{Ring} \longrightarrow \mathbf{Monoid}$ を忘却関手 (環に対して乗法モノイドを与える関手) とする．$F\colon \mathbf{Monoid} \longrightarrow \mathbf{Ring}$ を $M \in \mathbf{Monoid}$ に対して $\mathbb{Z}[M]$ を与える関手とすれば $F \dashv U$ である． $\square$

例． $\mathbf{Ring}_*$ を基点付き環の圏とする．即ち対象は環 A と $a \in A$ の組 $\langle A, a\rangle$ で，射 $\langle A, a\rangle \longrightarrow \langle B, b\rangle$ は環準同型 $f\colon A \longrightarrow B$ で $f(a) = b$ を満たすもの，とする．$U\colon \mathbf{Ring}_* \longrightarrow \mathbf{Ring}$ を忘却関手とする．$F\colon \mathbf{Ring} \longrightarrow \mathbf{Ring}_*$ を環 R に対して多項式環 $R[x]$ を与える関手とすれば $F \dashv U$ である． $\square$

例． $\mathbf{Dom}$ を整域の圏，$\mathbf{Field}$ を体の圏とする．$U\colon \mathbf{Field} \longrightarrow \mathbf{Dom}$ を忘却関手，$\mathrm{Quot}\colon \mathbf{Dom} \longrightarrow \mathbf{Field}$ を整域 D に対して商体 $\mathrm{Quot}(D)$ を与える関手とすれば $\mathrm{Quot} \dashv U$ である． $\square$

例． $\mathbf{LocRing}$ を局所環の圏，$\mathbf{Hensel}$ を Hensel 環の圏とする．$U\colon \mathbf{Hensel} \longrightarrow \mathbf{LocRing}$ を忘却関手，$F\colon \mathbf{LocRing} \longrightarrow \mathbf{Hensel}$ を Hensel 化とすれば $F \dashv U$ である． $\square$

例． $\mathbf{Latt}$ を束の圏とする．$U\colon \mathbf{Latt} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を忘却関手とする．$F\colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Latt}$ を $X \in \mathbf{Set}$ に対して X で生成される自由束を与える関手とすれば $F \dashv U$ である． $\square$

例． $\mathbf{CptHaus}$ をコンパクト Hausdorff 空間の圏，$U\colon \mathbf{CptHaus} \longrightarrow \mathbf{Top}$ を忘却関手とする．U の左随伴関手 $SC\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{CptHaus}$ が Stone-Čech コンパクト化である． $\square$

例． X を位相空間，$\mathbf{PSh}(X)$ を X 上の前層の圏，$\mathbf{Sh}(X)$ を X 上の層の圏とする．$U\colon \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{PSh}(X)$ を忘却関手とする．$F\colon \mathbf{PSh}(X) \longrightarrow \mathbf{Sh}(X)$ を層化とすれば $F \dashv U$ である． $\square$

例． $\mathbf{Ban}_1$ を Banach 空間と linear contraction がなす圏とする．$B\colon \mathbf{Ban}_1 \longrightarrow \mathbf{Set}$ を単位球体を与える関手とする．B は左随伴関手を持つ． $\square$

例． X, Y を集合，$f\colon X \longrightarrow Y$ を写像とする．このとき順像 $f\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$，逆像

$f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ は関手である．また $f_!\colon \mathcal{P}(X) \ni A \longmapsto Y \setminus f(X \setminus A) \in \mathcal{P}(Y)$ も関手である．このとき $f \dashv f^{-1} \dashv f_!$ が成り立つ． □

例. 圏 **Idem** を次のように定める．$\mathrm{Ob}(\mathbf{Idem}) := \{\langle X, v\rangle \mid X$ は集合，$v\colon X \longrightarrow X$ は冪等 $\}$ として $\langle X, v\rangle$，$\langle Y, w\rangle$ の間の射は $f\colon X \longrightarrow Y$ で $w \circ f = f \circ v$ を満たすものとする．$F\colon \mathbf{Idem} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を $F(\langle X, v\rangle) := X$，$G\colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Idem}$ を $G(X) := \langle X, \mathrm{id}_X\rangle$ で定めれば $F \dashv G$ かつ $G \dashv F$ である． □

例. C を圏とし，C は直積，直和を持つとする．$\Delta\colon C \longrightarrow C \times C$ を対角埋込関手とする．$\Pi\colon C \times C \longrightarrow C$ を直積 $\Pi(a, b) = a \Pi b$，$\amalg\colon C \times C \longrightarrow C$ を直和$\amalg(a, b) = a \amalg b$ とすれば$\amalg \dashv \Delta \dashv \Pi$ である． □

例. $F \dashv G\colon C \longrightarrow D$ とする．U を圏とする．このとき $G^{-1} \dashv F^{-1}\colon U^C \longrightarrow U^D$ である．

証明. $F \dashv G$ の unit，counit から自然に $G^{-1} \dashv F^{-1}$ の unit，counit が得られる． □

参考文献

[1] Saunders Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, 2nd ed. 1978 版 (1998)