4.2 連続関数

命題 4.3. I を任意の集合，X_i（$i \in I$）を半順序集合 D の部分集合として，各 $i \in I$ について，$a_i = \sqcup X_i$ が存在したとする．また，$X = \cup\{x_i | i \in I\}$ とおく．このとき，$a = \sqcup\{a_i | i \in I\}$ が存在すれば，$a = \sqcup X$ が成り立つ．逆に，$b = \sqcup X$ が存在すれば，$b = \sqcup\{a_i | i \in I\}$ が成り立つ．

証明 ： 命題 *4.2* を使う．$a = \sqcup\{a_i | i \in I\}$ が存在すれば，任意の $c \in D$ について，

$$\begin{aligned} a \sqsubseteq c &\Leftrightarrow \forall i \in I.a_i \sqsubseteq c \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I.X_i \sqsubseteq c \\ &\Leftrightarrow X \sqsubseteq c \end{aligned}$$

したがって，$a = \sqcup X$ が成り立つ．また，$b = \sqcup X$ が存在すれば，任意の $c \in D$ について，

$$\begin{aligned} b \subseteq c &\Leftrightarrow X \sqsubseteq c \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I.X_i \sqsubseteq c \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I.a_i \sqsubseteq c \end{aligned}$$

したがって，$b = \sqcup\{a_i | i \in I\}$

cpo 上でプログラムを意味付けする．

- プログラム $\Rightarrow$ 領域 D から領域 D' への関数
- プログラムは D から D' への任意の関数を表すことができるか?
- プログラムを D から D' への関数 f とし，$a, b \in D$ とすると，

$$a \sqsubseteq b \Rightarrow f(a) \sqsubseteq f(b)$$

  が成り立つべき．

定義 4.8. D と D' を半順序集合として，関数 $f : D \to D'$ について，

$$\forall a \in D \forall D.a \sqsubseteq b \Rightarrow f(a) \sqsubseteq f(b)$$

が成り立つとき，f を**単調関数**（*monotone function*）と呼ぶ．

- プログラムが表す関数は単調である． ∎

- データ a_0，a_1，a_2，$\cdots$ が次を満たすなら，

$$a_0 \sqsubseteq a_1 \subseteq a_2 \sqsubseteq \cdots$$

  f が単調関数である場合，次を満たす．

$$f(a_0) \sqsubseteq f(a_1) \sqsubseteq f(a_2) \sqsubseteq \cdots$$

  ここで，f が次を満たすとすると，

$$f(\sqcup\{a_i | i = 0, 1, 2, ...\}) = \sqcup\{f(a_i) | i = 0, 1, 2, ...\}$$

  f は，連続関数と呼ばれる．

定義 4.9. D と D' を *cpo* として，関数 $f : D \to D'$ が連続（*continuous*）であるとは，任意の有向集合 $X \subseteq D$ について，$\{f(x) | x \in X\}$ の上限が存在して，

$$f(\sqcup X) = \sqcup\{f(x) | x \in X\}$$

が成り立つことである． ∎

$\boxed{\text{プログラムが表す領域上の関数は連続関数}}$

- cpo 上の連続関数は常に単調：$a \sqsubseteq b$ ならば，$\{a, b\}$ は有向集合である．f を連続であるとすると，

$$f(a) \sqsubseteq f(a) \sqcup f(b) = f(a \sqcup b) = f(b)$$

である．

注 ： 逆は成り立たない．

例：実数上の閉区間 $[0,1] = \{x \in \mathbf{R} | 0 \leq x \leq 1\}$ は，$\leq$ について cpo を成す．関数 $f : [0,1] \to [0,1]$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

とすると，1 に収束する元の列

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots < 1$$

について，$A = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$ は有向集合で $\sqcup A = 1$．すなわち，

$$f(\sqcup A) = 1$$

しかし，

$$\sqcup\{f(a_i) | i = 0, 1, 2, ...\} = 0$$

したがって，f は連続でない．

命題 4.4. **狭義の無限上昇列**を次のように定義するとき，

$$a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq a_2 \sqsubseteq \cdots \text{ で } a_i \neq a_{i+1} (i = 0, 1, 2, ...)$$

狭義の無限上昇列を含まない D，D' を *cpo* として，すべての単調関数 $f : D \to D'$ は連続である．

証明 ：D の任意の有向部分集合 X について，$\sqcup X \in X$ が言えれば十分．
$\sqcup X \in X$ を仮定してみると，f は単調なので，任意の $x \in X$ について，$f(x) \sqsubseteq f(\sqcup X)$ であり，仮定から，$f(\sqcup X) \sqsubseteq \sqcup\{f(x) | x \in X\}$．したがって，$f(\sqcup X) = \sqcup\{f(x) | x \in X\}$ が成り立ち，f は連続となる．$\sqcup X \in X$ を次の背理法によって示す．$\sqcup X \notin X$ と仮定すると，任意の元を *1* つ選んで $a_0 \in X$ とする．$a_n \in X$ が定義されていると仮定して，a_{n+1} を定義する．$a_n \sqsubseteq \sqcup X \notin X$ なので，a_n は X の最大元ではない．したがって，$b \not\sqsubseteq a_n$ である b が存在して，$\{b, a_n\}$ の上界 $c \in X$ が存在する．この c を a_{n+1} と定義すると，$a_n \sqsubseteq a_{n+1}$ で $a_n \neq a_{n+1}$．したがって，X は狭義の無限上昇列を含む．これは仮定に反する． ∎

定理 4.1. （*cpo* 上の連続関数は，また *cpo* を成す）
D と D' を *cpo* としたとき，D から D' への連続関数全体を $[D \to D']$ と表し，次の半順序を導入する．

$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow \forall x \in D. f(x) \sqsubseteq g(x)$$

このとき，$[D \to D']$ は *cpo* となる．特に，$[D \to D']$ の有向部分集合 F の上限 $\sqcup F$ は，

$$(\sqcup F)(x) = \sqcup\{f(x) | f \in F\}$$

証明 ： D から D' への関数 $f_\perp$ を

$$f_\perp(x) = \perp$$

と定義すると，$f_\perp$ は $[D \to D'$ の最小限．F を $[D \to D']$ の有向部分集合とすると，各 $x \in D$ について $\{f(x) | f \in F\}$ は D' の有向部分集合であり，上限が存在する．そこで，関数 $g : D \to D'$ を

$$g(x) = \sqcup\{f(x) | f \in F\}$$

と定義すると，g が F の上限であることは，次ように示せる．任意の有向集合 $X \subseteq D$ いついて，

$$\begin{aligned} g(\sqcup X) &= \sqcup\{f(\sqcup X)|f \in F\} \\ &\quad \sqcup\{\sqcup\{f(x)|x \in X\}|f \in F\} \ f \text{ は連続} \\ &\quad \sqcup\{f(x)|x \in X \text{ かつ } f \in F\} \text{ 命題 } \mathit{4.3} \\ &= \sqcup\{\sqcup\{f(x)|f \in F\}|x \in X\} \\ &= \sqcup\{g(x)|x \in X\} \end{aligned}$$

したがって，g は連続である．さらに，任意の $h \in [D \to D']$ について，

$$\begin{aligned} g \sqsubseteq h &\Leftrightarrow \forall d \in D.g(d) \sqsubseteq h(d) \\ &\Leftrightarrow \forall d \in D.(\sqcup\{f(d)|f \in F\} \sqsubseteq h(d) \\ &\Leftrightarrow \forall d \in D\forall f \in F.f(d) \sqsubseteq h(d) \text{ 命題 } \mathit{4.2} \\ &\Leftrightarrow \forall f \in F.f \sqsubseteq h \end{aligned}$$

したがって，命題 *4.2* から，g は F の上限.

4.3 不動点意味論

再帰的に定義された関数をどう扱うか.

$$\mathrm{fact}(x) = \textbf{if } x = 0 \textbf{ then } 1 \textbf{ else } x * \mathrm{fact}(x-1)$$

の階乗を求める関数を基に，$\Phi_{\mathrm{fact}} : [\mathbf{N} \to \mathbf{N}] \to [\mathbf{N} \to \mathbf{N}]$ を，

$$\Phi_{\mathrm{fact}}(f)(x) = \textbf{if } x = 0 \textbf{ then } 1 \textbf{ else } x * f(x-1)$$

と定義する．定義中に用いられている部分関数 $f(x_1, ..., x_n)$ は，どれか 1 つの引数が未定義になれば，式全体が未定義になるものとする．**if-then-else** は，

$$\textbf{if } L \textbf{ then } M \textbf{ else } N = \begin{cases} M & (L\text{ が真}) \\ N & (L\text{ が偽}) \\ \textbf{undef} & (L\text{ が未定義}) \end{cases}$$

と定義する.

注 1 ：$[\mathbf{N} \to \mathbf{N}]$ の最小元は，いたるところが未定義の部分関数で $\emptyset$

注 2 ：関数 $f^n : X \to X$ を

$$f^n(x) = f(f(...(f(x))...))$$

と定義.

$\Phi^n_{\mathrm{fact}}(\emptyset)$ **は次の部分関数** ：

$$\Phi^0_{\mathrm{fact}}(\emptyset)(x) = \textbf{undef}$$
$$\Phi^1_{\mathrm{fact}}(\emptyset)(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ \textbf{undef} & (x \geq 1) \end{cases}$$
$$\Phi^2_{\mathrm{fact}}(\emptyset)(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 1 & (x = 1) \\ \textbf{undef} & (x \geq 2) \end{cases}$$
$$\Phi^3_{\mathrm{fact}}(\emptyset)(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 1 & (x = 1) \\ 2 & (x = 2) \\ \textbf{undef} & (x \geq 3) \end{cases}$$
$$\cdots$$
$$\Phi^n_{\mathrm{fact}}(\emptyset)(x) = \begin{cases} x! & (0 \leq x < n) \\ \textbf{undef} & (x \geq n) \end{cases}$$

$\Phi^n_{\mathrm{fact}}(\emptyset)$ は，fact の再帰呼出しを途中まで展開した fact_n と一致.

$$\Phi^*_{\mathrm{fact}} = \sqcup\{\Phi^n_{\mathrm{fact}}(\emptyset) | n \in \mathbf{N}\}$$

は，再帰的定義に関する次の等式を満たす.

$$\Phi_{\mathrm{fact}}(\Phi^*_{\mathrm{fact}}) = \Phi^*_{\mathrm{fact}}$$

- 一般に，cpo 上の連続関数 f は不動点をもつことが証明できる.

定理 4.2. （最小不動点定理）
D を cpo，f を D から D への連続関数とすると，$a \in D$ が存在して次の 2 つの条件が成り立つ.

1. $f(a) = a$,
2. $f(b) = b$ ならば $a \sqsubseteq b$

すなわち，a は f の最小不動点である． 特に，

$$a = \sqcup\{f^n(\bot) | n \in \mathbf{N}\}$$

証明　： D は cpo なので，最小限 $\perp \in D$ が存在する．また，f は単調なので，

$$\perp \sqsubseteq f(\perp) \sqsubseteq f^2(\perp) \sqsubseteq \cdots$$

したがって，

$$A = \{f^n(\perp) | n = 0, 1, 2, ...\}$$

は，有向集合であり，上限 $\sqcup A$ が存在する．$\sqcup A$ は，f の不動点であることを示す．

$$\begin{aligned} f(\sqcup A) &= f(\sqcup\{f^n(\perp) | n = 0, 1, 2, ...\}) \\ &= \sqcup\{f(f^n(\perp)) | n = 0, 1, 2, ...\} \quad f \text{ の連続性} \\ &= \sqcup\{f^n(\perp) | n = 0, 1, 2, ...\} \\ &= \sqcup A \end{aligned}$$

また，$b \in D$ を f の任意の不動点，すなわち $f(b) = b$ とすると，$\perp \sqsubseteq b$ なので，各 $n \geq 0$ について，$f^n(\perp) \sqsubseteq f^n(b) = b$. したがって，$\sqcup A \sqsubseteq b$. ∎