BINUS UNIVERSITY ONLINE LEARNING

People Innovation Excellence

Tugas Personal ke-1

(Minggu 2 / Sesi 2-3)

Limits & The Derivatives

1. Tentukanlah nilai limit-limit berikut (jika ada):.

   a. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{e^{x-2}}$

   b. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{x^2\tan 3x}$

   c. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{36x^2-25x+16}{9x^2-4x+1}}$

2. Diberikan fungsi $f(x)=\begin{cases} ax+6, & x<2 \\ ax^2-2x+3a, & x\geq 2 \end{cases}$.

   Tentukan nilai a sehingga $f(x)$ kontinu di $x=2$.

3. Tentukan derivatif (turunan) pertama dari fungsi-fungsi berikut :

   a. $y=\left(x^2+17\right)\left(x^3-3x+1\right)$

   b. $y=\dfrac{x^2+1}{x\sin x}$

   c. $y=\ln^2\left[\cos^2\left(x^2\right)\right]$

4. Tentukanlah $\dfrac{dy}{dx}$ jika diketahui persamaan implisit berikut:

   a. $x^3-2x^2y+3xy^2-4y^3=5$.

   b. $e^{5y+2}=y\cos\left(x^3-2\right)$

5. Hitunglah limit bentuk tak tentu berikut :

a. $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \ldots$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x \sin x}$

b. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x \cdot \ln \sin x = \ldots$

c. $\lim_{x \to 0} (x+1)^{\cot x} = \ldots$

People
Innovation
Excellence

1. Tentukanlah nilai limit-limit berikut (jika ada):.

a. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{e^{x-2}} = \frac{(2)-2}{e^{|2|-2}} = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 2x}{x^2 \tan 3x} = \frac{\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 2x}{x^3}}{\frac{x^2 \tan 3x}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 2x}{x^3}}{\frac{\tan 3x}{x}} = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$

c. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{36x^2-25x+16}{9x^2-4x+1}} = \sqrt{\frac{\lim_{x\to\infty} 36x^2-25x+16}{9x^2-4x+1}}$

$\text{¿}\sqrt{\frac{\lim_{x\to\infty} \frac{36x^2}{x^2} - \frac{25x}{x^2} + \frac{16}{x^2}}{\frac{9x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}}$

$\text{¿}\sqrt{\frac{36+0+0}{9+0+0}} = \frac{6}{3} = 2$

2. Diberikan fungsi $f(x) = \begin{cases} ax+6, & x<2 \\ ax^2 - 2x + 3a, & x \geq 2 \end{cases}$.

Tentukan nilai a sehingga $f(x)$ kontinu di $x=2$.

Jawab :

f(x) kontinu jika dan hanya jika $\begin{array}{c} x\to 2+\text{¿} f(x) \\ f(x) = \text{¿} \lim_{\text{¿}} \text{¿} \\ x\to 2-\text{¿}\text{¿} \\ \lim_{\text{¿}} \text{¿} \end{array}$ = L

$x\to 2+\text{¿} ax^2-2x+3a$

$ax+6 = \text{¿} \lim_{\text{¿}} \text{¿}$

$x\to 2-\text{¿}\text{¿}$

$\lim_{\text{¿}} \text{¿}$

$a(2)+6 = a(2)^2 - 2(2) + 3a$

$2a+6 = 4a-4+3a$

$5a = 10$

a = 2

3. Tentukan derivatif (turunan) pertama dari fungsi-fungsi berikut :

a. $y = (x^2+17)(x^3-3x+1)$

Jawab :

$Dx(x^2+17)(x^3-3x+1) = (x^2+17)(3x^2-3) + (x^3-3x+1)(2x)$

¿ $3x^4-3x^2+51x^2-51+2x^4-6x^2+2x$

¿ $5x^4+42x^2+2x-51$

b. $y=\frac{x^2+1}{x\sin x}$

x
$x+\sin$ ¿
$x\cos$ ¿
¿
¿
¿
Jawab : x
$x\sin$ ¿
¿
¿
$(x\,sinx)(2x)-(x^2+1)$ ¿
$Dx\left(\frac{x^2+1}{x\sin x}\right)=$ ¿

x
$x^3\cos x+x^2\sin x+x\cos x+\sin$ ¿
¿
¿
¿
x
$x\sin$ ¿
¿
¿
$x-$ ¿
$2x^2\sin$ ¿
¿¿

x
$x\sin$ ¿
¿
¿
¿
¿ $\frac{(x^2-1)\sin x-(x^3+x)\cos x}{¿}$

c. $y=\ln^2\left[\cos^2(x^2)\right]$

Jawab

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

$$\ln x$$

$$\ln x$$

$$\left[Cos^2\left(x^2\right)\right]' = -2x\ln^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

$$\cos^2 x$$

$$\left(x^2\right)'$$

$$\ln x$$

$$2x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

$$\cos^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

$$2\cos x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

$$\cos x$$

$$\ln x$$

$$2x$$

x
$(¿¿2)$
¿
$\cos^2 ¿$
¿
x
$(¿¿2)$
$2\cos ¿$
¿
(x^2)
$-\sin ¿ Dx(x^2)$
¿
¿
$\ln ¿$
$2¿$
¿¿

x
$(¿¿2)$
¿
$\cos^2 ¿$
¿
x
$(¿¿2)$
$2\cos ¿$
¿
(x^2)
$-\sin ¿(2x)$
¿
¿
$\ln ¿$
$2¿$
¿¿

x
$(¿¿2)$
¿
$\cos^2 ¿$
¿
(x^2)
$-\sin ¿$
¿
$(2x)$
¿
$\ln ¿$
$2¿$
¿¿

(x^2)
$\cos^2 ¿$
$¿ - 8x \tan (x^2) \ln ¿$

4. Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$ jika diketahui persamaan implisit berikut:

   a. $x^3 - 2x^2 y + 3xy^2 - 4y^3 = 5$.

Jawab:

$$\frac{d(x^3)}{dx}-\frac{d(2x^2y)}{dx}+\frac{d(3xy^2)}{dx}-\frac{d(4y^3)}{dx}=\frac{d(5)}{dx}$$

$$3x^2-\left((2x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(4x)(y)\right)+\left((3x)\left(2y\frac{dy}{dx}\right)+(3)(y^2)\right)-\left(12y^2\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$3x^2-4xy+3y^2+\frac{dy}{dx}(3x2y-2x^2-12y^2)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4xy-3y^2-3x^2}{3x2y-2x^2-12y^2}$$

b. $e^{5y+2}=y\cos(x^3-2)$

Jawab :

$$\frac{d(e^{5y+2})}{dx}=\frac{d(y\cos(x^3-2))}{dx}$$

$$\frac{d(e^{5y+2})}{dx}=\frac{d(y\cos(x^3-2))}{dx}$$

$$e^{5y+2}\frac{d(5y+2)}{dx}=-\sin(x^3-2)(3x^2)\cos(x^3-2)\left(\frac{dy}{dx}\right)+y¿$$

$$5e^{5y+2}\left(\frac{dy}{dx}\right)-\cos(x^3-2)\left(\frac{dy}{dx}\right)=-2x^2y\sin(x^3-2)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)(¿¿5y+2-\cos(x^3-2))=-2x^2y\sin(x^3-2)5e¿$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x^2y\sin(x^3-2)}{5e^{5y+2}-\cos(x^3-2)}$$

5. Hitunglah limit bentuk tak tentu berikut :

a. $\lim_{x\to}\frac{x}{e^x}=\ldots$

Jawab:

Karena bentuk fungsi tersebut jika dilimitkan pada x menuju tak hingga berbentuk tak pasti atau *undefined* maka fungsi tersebut bisa memakai dalil l'hopital.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x\sin x}$$

b. $x^{\sin x}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x^{\sin x}$

Jawab:

Karena fungsi tersebut membentuk 0/0 jika limit x mendekati pi/2 maka fugnsi tersebut bisa menggunakan dalil l'hopital

$$\ln\left(\tan x^{\sin x}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{\tan x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}$$

$$\sin x.\ln\tan x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{1}{\sin x}\left(\frac{\cos x}{-csc^2 x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cot x}{-csc^2 x}\right)=\frac{0}{-1}=0$$

c. $\lim_{x\to 0}(x+1)^{\cot x}=\ldots$

jawab:

$$\lim_{x\to 0}(x+1)^{\cot x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(x+1)^{\cot x}} = \lim_{x\to 0} e^{\cot x \ln(x+1)}$$

Dengan memakai teorema limit komposit

Teorema E **Teorema Limit Komposit**

Jika $\lim_{x\to c} g(x) = L$ dan jika f kontinu di L, maka

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = f(L)$$

Khususnya, jika g kontinu di c dan f kontinu di $g(c)$, maka fungsi komposit $f \circ g$ kontinu di c.

$$e^{\lim_{x\to 0}\cot x \ln(x+1)} = e^{\frac{\lim_{x\to 0}(\ln(x+1))}{\frac{1}{\cot(x)}}}$$

Pada bagian $\frac{\lim_{x\to 0}(\ln(x+1))}{\frac{1}{\cot(x)}}$ menggunakan dalil L'hopital karena jika dilimitkan x menuju 0 akan menghasilkan 0/0, maka

$$\frac{\lim_{x\to 0}(\ln(x+1))}{\frac{1}{\cot(x)}}=\frac{\lim_{x\to 0}(\ln(x+1))}{\tan(x)}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}}{sec^2 x}=\frac{1}{1}=1$$

Didapatkan $\frac{\lim_{x\to 0}(\ln(x+1))}{\frac{1}{\cot(x)}}$ menghasilkan 1, dan $\frac{(\ln(x+1))}{\frac{1}{\cot(x)}}$ kontinu di 0.

Jika dilihat fungsi f(x) pada soal adalah e^x kontinu di 1, maka dapat dicari nilai dari e^x dengan dilimitkan x menuju 1

$\lim_{x\to 1} e^x$ = e

Nilai dari $\lim_{x\to 0}(x+1)^{\cot x}$ adalah e

Nama : Farid Hidayat

NIM : 2201846911

Jurusan : Teknik Industri

People
Innovation
Excellence