CURVA INCLINATA

Sommario. Affrontiamo il problema dell'aderenza di un veicolo su una curva inclinata (come nella celebre 500 miglia di Indianapolis). Vedremo che la necessaria azione centripeta è dovuta all'azione di due forze, il sostegno e l'attrito. Poiché l'attrito tra le ruote e l'asfalto è di tipo statico, non possiamo stabilire a priori né la sua intensità né il suo segno. Stabiliremo una relazione tra la velocità di percorrenza della curva, l'angolo e il coefficiente di attrito tra le ruote e l'asfalto.

1. Formulazione del problema

Nelle curve di circuiti come la 500 miglia di Indianapolis l'inclinazione della strada aumenta man mano che si sale verso l'esterno; in questo problema supponiamo invece che l'inclinazione sia costante. Schematizziamo inoltre il veicolo come se fosse un blocco senza parti in moto relativo tra loro (in particolare le ruote).

Nella figura 1.1 è rappresentata una sezione della curva. Il punto P è il centro di massa del corpo e Q è il centro della curva, che supponiamo perfettamente circolare; la retta verticale che passa per Q, pertanto, è l'asse attorno al quale il corpo sta ruotando.

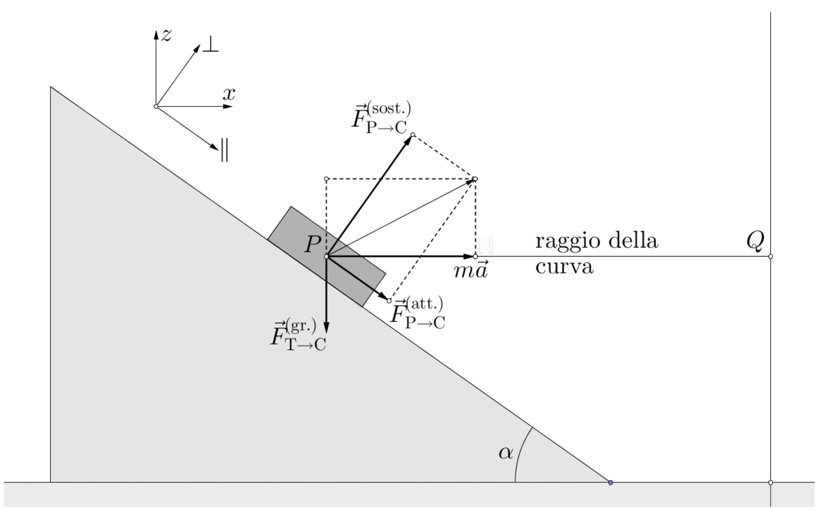

Figura 1.1. La risultante delle tre forze uguaglia il vettore $m\vec{a}$.

Sul corpo agiscono tre forze: il sostegno $\vec{F}^{(\mathrm{sost.})}_{\mathrm{P}\to\mathrm{C}}$ (perpendicolare al piano), l'attrito $\vec{F}^{(\mathrm{att.})}_{\mathrm{P}\to\mathrm{C}}$ (parallelo al piano) e la forza di gravità $\vec{F}^{(\mathrm{gr.})}_{\mathrm{T}\to\mathrm{C}}$ (verticale); l'intensità della forza di gravità è $\left\|\vec{F}^{(\mathrm{gr.})}_{\mathrm{T}\to\mathrm{C}}\right\| = mg$.

Accanto ad essi dobbiamo considerare il vettore $m\vec{a}$.

Sia il sostegno, sia l'attrito (che sono legati tra loro dal coefficiente di attrito) concorrono sia a determinare l'azione centripeta che consente al corpo di muoversi lungo la curva, sia a bilanciare la gravità; il problema è relativamente complesso e a priori non è possibile stabilire né l'intensità di queste forze né l'orientamento della forza di attrito[1]; intuiamo però che esiste una relazione tra il coefficiente di attrito minimo, necessario a garantire l'aderenza del veicolo alla strada, e gli altri parametri in gioco, ossia l'angolo, la velocità di percorrenza della curva e il suo raggio.

L'obbiettivo, pertanto, è stabilire questa relazione. La relazione deve risultare dall'applicazione del II principio di Newton, che in questo caso ci permette di scrivere due equazioni, una per ogni direzione indipendente del piano.

2. Le equazioni di Newton

Per scrivere le equazioni di Newton dobbiamo esprimere questi vettori in termini delle loro componenti. Ci sono due possibilità:

(1) se scegliamo invece gli assi $\|\perp$

$$\vec{F}^{(\mathrm{gr.})}_{\mathrm{T}\to\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}^{(\mathrm{sost.})}_{\mathrm{P}\to\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}^{(\mathrm{att.})}_{\mathrm{P}\to\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} \mathcal{S} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m\vec{a} = \begin{pmatrix} m\frac{v^2}{r}\cos\alpha \\ m\frac{v^2}{r}\sin\alpha \end{pmatrix}$$

in questo caso il sostegno e l'attrito hanno una rappresentazione semplice, gli altri due no. Le grandezze $\mathcal{N}$ ed $\mathcal{S}$ sono incognite ($\mathcal{S}$ potrà risultare negativa).

(2) se scegliamo gli assi xz i quattro vettori si scrivono così:

$$\vec{F}^{(\mathrm{gr.})}_{\mathrm{T}\to\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}^{(\mathrm{sost.})}_{\mathrm{P}\to\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}\sin\alpha \\ \mathcal{N}\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}^{(\mathrm{att.})}_{\mathrm{P}\to\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}\cos\alpha \\ -\mathcal{S}\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$m\vec{a} = \begin{pmatrix} m\frac{v^2}{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mentre la gravità e il vettore $m\vec{a}$ hanno una sola componente non nulla, l'attrito e il sostegno hanno entrambe le componenti non nulle;

Le equazioni di Newton possono essere riferite a qualunque sistema di assi coordinati: resta solo da scegliere qual è quello opportuno.

La prima opzione è la migliore, perché il sostegno e l'attrito sono incognite del problema.

[1]Possiamo supporre che esista una velocità limite, al di sopra della quale l'attrito è orientato verso l'interno della curva, mentre per velocità più basse deve essere orientato verso l'esterno.

Vediamo infatti che rispetto agli assi xz le equazioni sono

$$\begin{aligned}
[\mathrm{II}, x] \quad & m\frac{v^2}{r} = \mathcal{N}\sin\alpha + \mathcal{S}\cos\alpha \\
[\mathrm{II}, z] \quad & 0 = \mathcal{N}\cos\alpha - \mathcal{S}\sin\alpha \\
[\text{attrito}] \quad & |\mathcal{S}| \le \mu\,|\mathcal{N}|
\end{aligned}$$

mentre rispetto agli assi $\|\perp$ otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{aligned}
[\mathrm{II}, \|] \quad & m\frac{v^2}{r}\cos\alpha = \mathcal{S} + mg\sin\alpha \\
[\mathrm{II}, \perp] \quad & m\frac{v^2}{r}\sin\alpha = \mathcal{N} - mg\cos\alpha \\
[\text{attrito}] \quad & |\mathcal{S}| \le \mu\,|\mathcal{N}|
\end{aligned}$$

(la legge dell'attrito è la stessa in entrambi i casi). Nel primo sistema di equazioni possiamo isolare immediatamente attrito e sostegno, ottenendo così

$$\mathcal{S} = mg\left(\sin\alpha - \frac{v^2}{rg}\cos\alpha\right) \tag{2.1}$$

$$\mathcal{N} = mg\left(\cos\alpha + \frac{v^2}{rg}\sin\alpha\right) \tag{2.2}$$

$$|\mathcal{S}| \le \mu\,|\mathcal{N}| \tag{2.3}$$

Per affrontare il problema dobbiamo ora sostituire le espressioni per $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{N}$ nella legge dell'attrito.

3. Conclusioni

Introduciamo un nuovo parametro, γ, che esprime il rapporto tra l'accelerazione centripeta e la gravità:

$$\gamma \overset{\text{def}}{=} \frac{v^2}{rg}$$

Questo rapporto compare in problemi analoghi, ad esempio quello di determinare l'inclinazione di una moto che percorre una curva di raggio costante.

Osserviamo che la grandezza $\mathcal{N}$ è sempre positiva, mentre $\mathcal{S}$ può essere negativa. L'espressione per la forza di attrito, eq. 2.1 permette di stabilire il segno della componente orizzontale dell'attrito:

$$\mathcal{S} \ge 0 \Rightarrow \gamma \le \tan\alpha$$

Per togliere il valore assoluto alla 2.1 dobbiamo distinguere i due casi, $\gamma \le \tan\alpha$ e $\gamma > \tan\alpha$; teniamo conto di questa osservazione e sostituiamo le equazioni 2.1 e 2.2 nella 2.3, per ottenere la relazione tra il valore minimo di μ necessario per garantire l'aderenza ed il parametro γ:

$$\mu_{\min}(\gamma) = \begin{cases} \frac{\tan\alpha - \gamma}{1+\gamma\tan\alpha} & (\gamma \le \tan\alpha) \\ \frac{\gamma - \tan\alpha}{1+\gamma\tan\alpha} & (\gamma > \tan\alpha) \end{cases} \tag{3.1}$$

Questa funzione è rappresentata nel grafico di fig. 3.1.

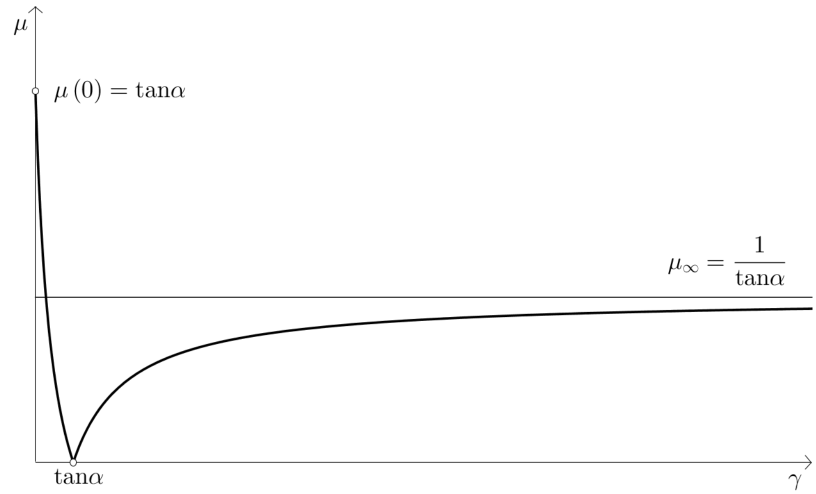

FIGURA 3.1. In questo grafico $\tan\alpha > 1$; nel caso $\tan\alpha < 1$ l'asintoto orizzontale è più alto del punto di interesezione della curva con l'asse dell ordinate (N.B. la scala dei due assi, per motivi di praticità, è diversa).

(1) Vediamo che $\mu_{\min} = \tan\alpha$ se l'automobile è ferma ($\gamma = 0$), il che coincide con il risultato elementare per l'equilibrio di un corpo su un piano inclinato.
(2) In tutto l'intervallo di velocità in cui $0 \leq \gamma \leq \tan\alpha$ sappiamo che $\mathcal{S} < 0$ e vediamo dal grafico che il valore di $\mu_{\min}$ decresce gradualmente fino a 0: in questo caso particolare l'automobile potrebbe mantenere la traiettoria anche se non vi fosse aderenza; l'esperienza mostra che questa è una situazione molto pericolosa, in cui è difficile controllare il veicolo in caso di correzioni di traiettoria: sarebbe interessante trovare una schematizzazione del problema un po' meno ingenua che consenta di prevedere questa instabilità.
(3) Quando la velocità aumenta oltre il valore critico $v_c = \sqrt{rg\tan\alpha}$ il coefficiente di attrito minimo aumenta gradualmente, ma vediamo che si stabilizza asintoticamente sul valore $1/\tan\alpha$: ciò significa che nel limite di questa schematizzazione con questo coefficiente di attrito, o con valori superiori, l'automobile potrebbe rimanere in traiettoria muovendosi a velocità arbitrariamente grandi (perché?).

4. Approfondimenti

Si suggeriscono qui alcuni spunti per approfondire le questioni esposte.
(1) Costruite il grafico di figura 3.1 con il programma Geogebra.
(2) Rappresentate il grafico della funzione 3.1 nel caso $\tan\alpha < 1$.
(3) Studiate la dinamica della valvola di Watt (utilizzata nelle locomotive a vapore).
(4) Studiate il problema di una moto che percorre una traiettoria circolare a velocità costante.