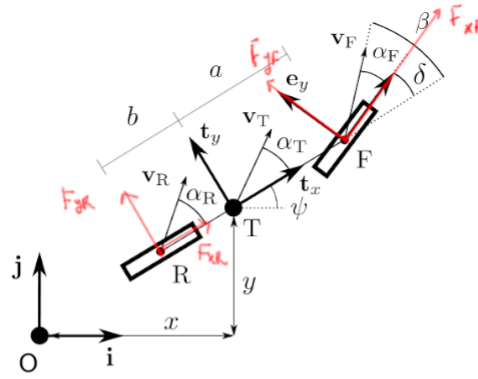


# Dynamic bicycle model

Alessio Russo, Carmelo Valore

June 8, 2020

## 1 Considerazioni caso senza banking



$$\begin{aligned} m_T \ddot{x} &= F_{x,F} \cos(\psi + \delta) + F_{x,R} \cos \psi - F_{y,F} \sin(\psi + \delta) - F_{y,R} \sin \psi \\ m_T \ddot{y} &= F_{x,F} \sin(\psi + \delta) + F_{x,R} \sin \psi + F_{y,F} \cos(\psi + \delta) + F_{y,R} \cos \psi \\ I_T \ddot{\psi} &= F_{x,F} a \sin \delta + F_{y,F} a \cos \delta - F_{y,R} b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_T \cos(\psi + \alpha_T) \\ \dot{y} &= v_T \sin(\psi + \alpha_T). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{v}_T \cos(\psi + \alpha_T) - v_T (\dot{\psi} + \dot{\alpha}_T) \sin(\psi + \alpha_T) \\ \ddot{y} &= \dot{v}_T \sin(\psi + \alpha_T) + v_T (\dot{\psi} + \dot{\alpha}_T) \cos(\psi + \alpha_T). \end{aligned}$$

\* \* \*

$$\begin{aligned} \dot{v}_T &= \frac{F_{x,F} \cos(\alpha_T - \delta) + F_{x,R} \cos \alpha_T + F_{y,F} \sin(\alpha_T - \delta) + F_{y,R} \sin \alpha_T}{m_T} \\ \dot{\alpha}_T &= \frac{-F_{x,F} \sin(\alpha_T - \delta) - F_{x,R} \sin \alpha_T + F_{y,F} \cos(\alpha_T - \delta) + F_{y,R} \cos \alpha_T - m_T v \dot{\psi}}{m_T v_T} \\ \ddot{\psi} &= \frac{F_{x,F} a \sin \delta + F_{y,F} a \cos \delta - F_{y,R} b}{I_T}. \end{aligned}$$

\* \* \*

Figure 1: Modello a bicicletta 3DOF (1)

$$\begin{array}{ll}
\dot{x}_1 = x & \dot{x}_1 = x_4 \cos(x_3 + x_5) \\
\dot{x}_2 = y & \dot{x}_2 = x_4 \sin(x_3 + x_5) \\
\dot{x}_3 = \psi & \dot{x}_3 = x_6 \\
\dot{x}_4 = v_T & \dot{x}_4 = \frac{F_{x,F} \cos(x_5 - \delta) + F_{x,R} \cos x_5 + F_{y,F} \sin(x_5 - \delta) + F_{y,R} \sin x_5}{m_T} \\
\dot{x}_5 = \alpha_T & \dot{x}_5 = \frac{-F_{x,F} \sin(x_5 - \delta) - F_{x,R} \sin x_5 + F_{y,F} \cos(x_5 - \delta) + F_{y,R} \cos \alpha_T - m_T x_4 x_6}{m_T x_4} \\
\dot{x}_6 = \dot{\psi} & \dot{x}_6 = \frac{F_{x,F} a \sin \delta + F_{y,F} a \cos \delta - F_{y,R} b}{I_T}
\end{array}$$

Figure 2: Modello a bicicletta 3DOF (2) - Rappresentazione nello spazio degli stati

## 2 Considerazioni caso con banking

Nelle seguenti equazioni abbiamo considerato i vettori delle forze come vettori nello spazio e non più semplicemente solo sul piano XY inerziale. Abbiamo considerato che le forze longitudinali e laterali del veicolo siano complanari e giacenti su un piano parallelo al piano inclinato definito dalla strada. All'interno di queste equazioni dunque, abbiamo considerato vari angoli quali  $\Omega$ ,  $\Gamma$  e  $\Delta$  (figure 4, 5, 6). In particolare:  $\Omega$  rappresenta l'angolo tra i vettori diretti come le forze laterali del veicolo e il piano XY inerziale;  $\Gamma$  rappresenta l'angolo tra i vettori diretti come le forze longitudinali del veicolo e il piano XY inerziale;  $\Delta$  è funzione della posizione del veicolo lungo la pista. Abbiamo usato i primi due angoli per proiettare le forze sul piano XY inerziale. Da notare che  $\Gamma$  e  $\Omega$  sono funzioni dell'angolo di banking  $\gamma$ , della posizione del veicolo all'interno della pista (espresso tramite  $\Delta$ ) e dello yaw angle  $\psi$ .

### 2.1 Su sistema di riferimento inerziale

#### Equilibri rispetto x e y inerziali

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} = & F_{xR} \cos(\Gamma) \cos(\psi) - F_{yR} \cos(\Omega) \sin(\psi) + \\
& + F_{xF} \cos(\delta) \cos(\Gamma) \cos(\psi) - F_{xF} \sin(\delta) \cos(\Omega) \sin(\psi) + \\
& - F_{yF} \sin(\delta) \cos(\Gamma) \cos(\psi) - F_{yF} \cos(\delta) \cos(\Omega) \sin(\psi) + \\
& - F_N \sin(\gamma) \cos(\Delta)
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
m\ddot{y} = & F_{xR} \cos(\Gamma) \sin(\psi) + F_{yR} \cos(\Omega) \cos(\psi) + \\
& + F_{xF} \cos(\delta) \cos(\Gamma) \sin(\psi) + F_{xF} \sin(\delta) \cos(\Omega) \cos(\psi) + \\
& - F_{yF} \sin(\delta) \cos(\Gamma) \sin(\psi) + F_{yF} \cos(\delta) \cos(\Omega) \cos(\psi) + \\
& + F_N \sin(\gamma) \sin(\Delta)
\end{aligned}$$

**Equilibrio momento sul piano xy (yaw), rispetto al centro di massa**

$$I_T \ddot{\psi} = -F_{yR} \cos(\Omega) b + F_{xF} \sin(\delta) \cos(\Omega) a + F_{yF} \cos(\delta) \cos(\Omega) a \quad (2)$$

**Forza normale**

$$F_N = mg \cos(\gamma) \quad (3)$$

**Calcolo  $\Gamma$  e  $\Omega$  funzioni del banking  $\gamma$**

$$\begin{aligned} \Gamma &= \gamma \cos(\Delta + \frac{\pi}{2} - \psi) \\ \Omega &= \gamma \sin(\Delta + \frac{\pi}{2} - \psi) \end{aligned} \quad (4)$$

## 2.2 Su sistema di riferimento solidale al veicolo

**Equazioni cambio riferimento - velocità**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_T \cos(\alpha_T) \cos(\Gamma) \cos(\psi) - v_T \sin(\alpha_T) \cos(\Omega) \sin(\psi) \\ \dot{y} &= v_T \cos(\alpha_T) \cos(\Gamma) \sin(\psi) + v_T \sin(\alpha_T) \cos(\Omega) \cos(\psi) \end{aligned} \quad (5)$$

**Equazioni cambio riferimento - accelerazione**

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{v}_T \cos(\alpha_T) \cos(\Gamma) \cos(\psi) - v_T \sin(\alpha_T) \cos(\Gamma) \cos(\psi) \dot{\alpha}_T + \\ &\quad - v_T \cos(\alpha_T) \sin(\Gamma) \cos(\psi) \dot{\Gamma} - v_T \cos(\alpha_T) \cos(\Gamma) \sin(\psi) \dot{\psi} + \\ &\quad - \dot{v}_T \sin(\alpha_T) \cos(\Omega) \sin(\psi) - v_T \cos(\alpha_T) \cos(\Omega) \sin(\psi) \dot{\alpha}_T + \\ &\quad + v_T \sin(\alpha_T) \sin(\Omega) \sin(\psi) \dot{\Omega} - v_T \sin(\alpha_T) \cos(\Omega) \cos(\psi) \dot{\psi} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \dot{v}_T \cos(\alpha_T) \cos(\Gamma) \sin(\psi) - v_T \sin(\alpha_T) \cos(\Gamma) \sin(\psi) \dot{\alpha}_T + \\ &\quad - v_T \cos(\alpha_T) \sin(\Gamma) \sin(\psi) \dot{\Gamma} + v_T \cos(\alpha_T) \cos(\Gamma) \cos(\psi) \dot{\psi} + \\ &\quad + \dot{v}_T \sin(\alpha_T) \cos(\Omega) \cos(\psi) + v_T \cos(\alpha_T) \cos(\Omega) \cos(\psi) \dot{\alpha}_T + \\ &\quad - v_T \sin(\alpha_T) \sin(\Omega) \cos(\psi) \dot{\Omega} - v_T \sin(\alpha_T) \cos(\Omega) \sin(\psi) \dot{\psi} \end{aligned}$$

**Derivate di  $\Gamma$  e  $\Omega$**

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} &= \dot{\psi} \gamma \sin(\Delta + \frac{\pi}{2} - \psi) \dots [-\dot{\Delta} \gamma \sin(\Delta + \frac{\pi}{2} - \psi)] \\ \dot{\Omega} &= -\dot{\psi} \gamma \cos(\Delta + \frac{\pi}{2} - \psi) \dots [+ \dot{\Delta} \gamma \cos(\Delta + \frac{\pi}{2} - \psi)] \\ \dot{\Delta} &= \dots \text{todo} \dots \end{aligned} \quad (7)$$

**Accelerazione longitudinale dopo il cambio del sistema di riferimento**

$$\begin{aligned}
& -F_A + \dot{\Omega}v_T \cos(\Gamma) \sin(\Omega) + F_{xR} \cos(\Gamma) \cos(\Omega) \cos(\alpha_T) + \\
& + F_{yR} \cos(\Gamma) \cos(\Omega) \sin(\alpha_T) + F_{xF} \cos(\Gamma) \cos(\Omega) \cos(\alpha_T) \cos(\delta) + \\
& - F_{yF} \cos(\Gamma) \cos(\Omega) \cos(\alpha_T) \sin(\delta) + F_{yF} \cos(\Gamma) \cos(\Omega) \cos(\delta) \sin(\alpha_T) + \\
& + \dot{\Gamma}v_T \cos(\Omega) \sin(\Gamma) \cos(\alpha_T)^2 + F_{xF} \cos(\Gamma) \cos(\Omega) \sin(\alpha_T) \sin(\delta) + \\
& - \dot{\Omega}v_T \cos(\Gamma) \sin(\Omega) \cos(\alpha_T)^2 - \dot{\psi}v_T \cos(\Gamma)^2 \cos(\alpha_T) \sin(\alpha_T) + \\
& + \dot{\psi}v_T \cos(\Omega)^2 \cos(\alpha_T) \sin(\alpha_T) + \\
& - F_N \cos(\Delta) \cos(\Omega) \cos(\alpha_T) \cos(\psi) \sin(\gamma) + \\
& + F_N \cos(\Delta) \cos(\Gamma) \sin(\alpha_T) \sin(\gamma) \sin(\psi) + \\
& + F_N \cos(\Gamma) \sin(\Delta) \cos(\psi) \sin(\alpha_T) \sin(\gamma) + \\
& + F_N \cos(\Omega) \sin(\Delta) \cos(\alpha_T) \sin(\gamma) \sin(\psi) \\
\dot{v}_T = & \frac{\cos(\Gamma) \cos(\Omega) (m \cos(\alpha_T)^2 - \cos(\alpha_T)^2 + 1)}{\hspace{10em}} \tag{8}
\end{aligned}$$

**Body slip rate dopo il cambio del sistema di riferimento**

$$\begin{aligned}
& \dot{\psi}v_T \cos(\Omega)^2 \cos(\alpha_T)^2 - \dot{\psi}v_T \cos(\Omega)^2 + \\
& - F_{xR} \cos(\Gamma) \cos(\Omega) \sin(\alpha_T) + \\
& + F_{yR} m \cos(\Gamma) \cos(\Omega) \cos(\alpha_T) + \\
& - F_{xF} \cos(\Gamma) \cos(\Omega) \cos(\delta) \sin(\alpha_T) + \\
& + F_{yF} \cos(\Gamma) \cos(\Omega) \sin(\alpha_T) \sin(\delta) + \\
& - m \dot{\psi}v_T \cos(\Gamma)^2 \cos(\alpha_T)^2 \\
& + F_{xF} m \cos(\Gamma) \cos(\Omega) \cos(\alpha_T) \sin(\delta) + \\
& - \dot{\Gamma}v_T \cos(\Omega) \sin(\Gamma) \cos(\alpha_T) \sin(\alpha_T) + \\
& + F_N \cos(\Delta) \cos(\Omega) \cos(\psi) \sin(\alpha_T) \sin(\gamma) + \\
& - F_N \cos(\Omega) \sin(\Delta) \sin(\alpha_T) \sin(\gamma) \sin(\psi) + \\
& + F_{yF} m \cos(\Gamma) \cos(\Omega) \cos(\alpha_T) \cos(\delta) + \\
& + \dot{\Omega} m v_T \cos(\Gamma) \sin(\Omega) \cos(\alpha_T) \sin(\alpha_T) + \\
& + F_N m \cos(\Delta) \cos(\Gamma) \cos(\alpha_T) \sin(\gamma) \sin(\psi) + \\
& + F_N m \cos(\Gamma) \sin(\Delta) \cos(\alpha_T) \cos(\psi) \sin(\gamma) \\
\dot{\alpha}_T = & \frac{v_T \cos(\Gamma) \cos(\Omega) (m \cos(\alpha_T)^2 - \cos(\alpha_T)^2 + 1)}{\hspace{10em}} \tag{9}
\end{aligned}$$

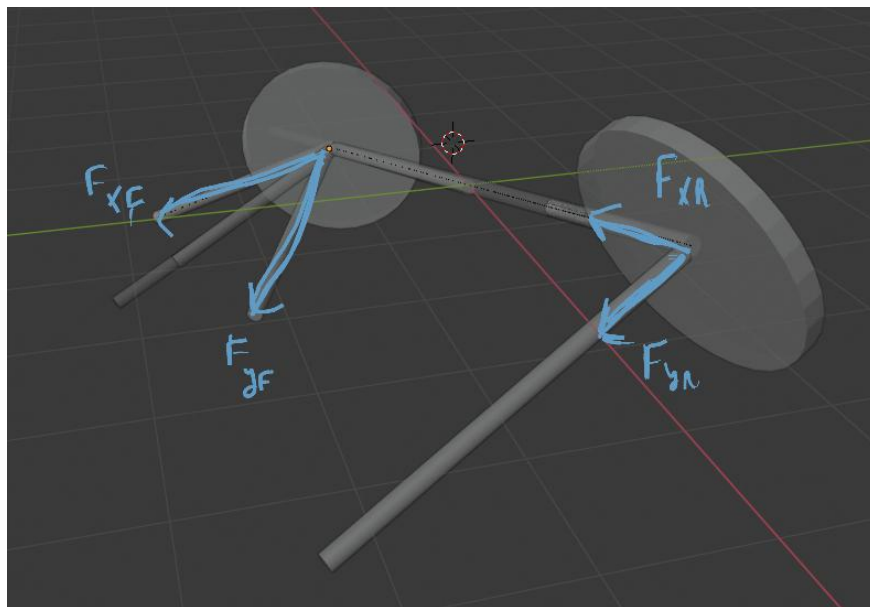


Figure 3: Rappresentazione forze nello spazio

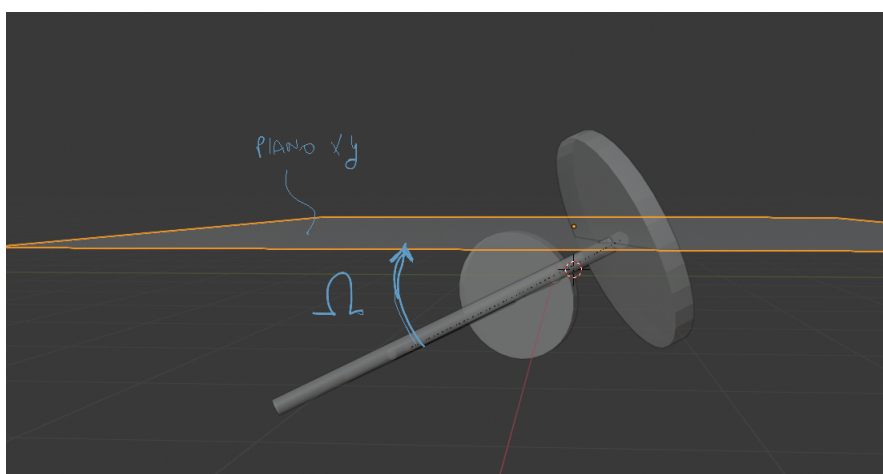


Figure 4: Angolo  $\Omega$  visualizzato nello spazio

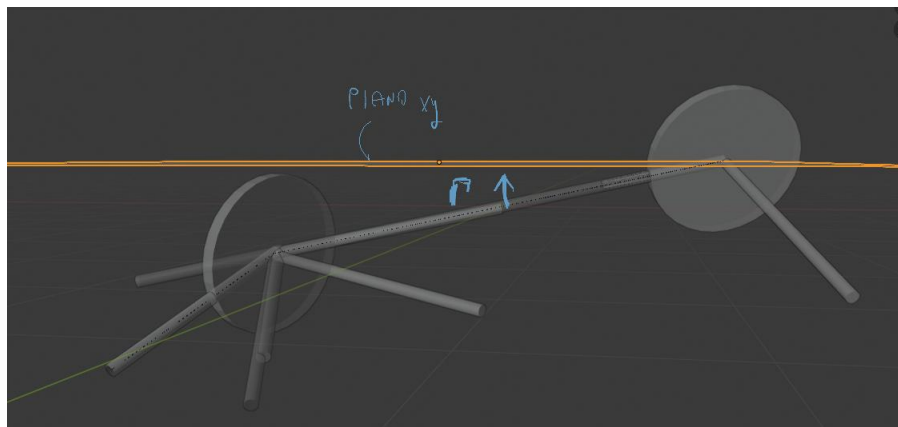


Figure 5: Angolo  $\Gamma$  visualizzato nello spazio

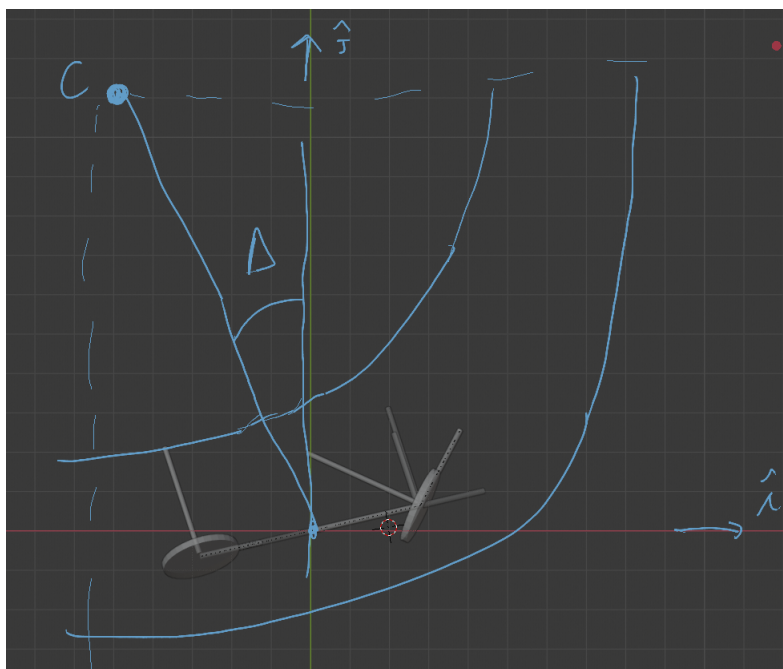


Figure 6: Visione dall'alto dell'angolo  $\Delta$