

**POLITECNICO DI MILANO**  
**V Facoltà di Ingegneria**  
**Corso di laurea in Ingegneria dell'Automazione**



# **Analisi della Dinamica di Veicoli Terrestri Sovra-Attuati**

Relatore: Prof. Sergio SAVARESI  
Correlatori: Dr. Matteo CORNO

Tesi di Laurea di:  
Donald SELMANAJ Matr. 750662

Anno Accademico 2011–2012



*Alla mia famiglia*



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Obiettivo della tesi . . . . .	3
1.2	Struttura della tesi . . . . .	5
1.3	Principali contributi innovativi . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Veicolo 4WD/4WS</b>	<b>11</b>
2.1	Gli pneumatici . . . . .	12
2.1.1	Contatto pneumatico strada . . . . .	12
2.1.2	Modello single corner . . . . .	17
2.1.3	Modello di pneumatico lineare . . . . .	20
2.2	Modello di body . . . . .	25
2.2.1	Forze totali lungo gli assi di veicolo . . . . .	27
2.2.2	Angoli di deriva degli pneumatici . . . . .	28
2.2.3	Modello veicolo 4WD/2WS . . . . .	30
2.3	Trasferimento di carico . . . . .	32
2.3.1	Trasferimento di carico longitudinale . . . . .	33
2.3.2	Trasferimento di carico trasversale . . . . .	35
2.3.3	Carico totale sulle ruote . . . . .	36
2.3.4	Effetto del trasferimento di carico sulle forze di pneu- matico . . . . .	37
2.4	Conclusioni . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Sterzata</b>	<b>41</b>
3.1	Modello a bicicletta . . . . .	42

## INDICE

---

3.2	Sterzata cinematica . . . . .	44
3.2.1	Veicolo con solo sterzo anteriore . . . . .	44
3.2.2	Veicolo con sterzo anteriore e posteriore . . . . .	46
3.3	Sterzata dinamica a regime . . . . .	48
3.3.1	Proprietà di sovra/sotto sterzata del veicolo . . . . .	51
3.4	Conclusioni . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Velocità massima in curva</b>	<b>57</b>
4.1	Soluzione del problema di massimo . . . . .	59
4.1.1	Senza trasferimento di carico . . . . .	59
4.1.2	Con trasferimento di carico . . . . .	60
4.2	Confronto tra 4WD/4WS e 4WD/2WS . . . . .	67
4.3	Confronto tra 4WD/4WS e FWD+RWD/FWS . . . . .	74
4.4	Stabilità alla velocità massima . . . . .	79
4.5	Configurazioni multiple . . . . .	85
4.5.1	Legame tra forze ai centri ruota e forze di veicolo . . . . .	85
4.6	Prestazioni massime senza trasferimento di carico . . . . .	92
4.7	Conclusioni . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Veicolo 6WD</b>	<b>99</b>
5.1	Modello di veicolo . . . . .	100
5.1.1	Gli pneumatici . . . . .	101
5.1.2	Angoli di deriva degli pneumatici . . . . .	102
5.2	Trasferimento di carico . . . . .	104
5.2.1	Trasferimento di carico longitudinale . . . . .	105
5.2.2	Trasferimento di carico trasversale . . . . .	106
5.2.3	Carico totale sulle ruote . . . . .	107
5.3	Controllabilità dell'assetto . . . . .	108
5.4	Prestazioni massime del veicolo . . . . .	111
5.5	Conclusioni . . . . .	117

<b>6 Conclusioni e sviluppi futuri</b>	<b>119</b>
6.1 Sviluppi futuri . . . . .	120
<b>A Espressioni complete</b>	<b>123</b>
A.1 Effetto del trasferimento di carico sulle forze di pneumatico . .	124
A.1.1 Veicolo 4WD/4WS . . . . .	124
A.1.2 Veicolo 6WD . . . . .	124
A.2 Effetto del trasferimento di carico sulle forze di veicolo . . . .	126
A.2.1 Veicolo 4WD/4WS . . . . .	126
A.2.2 Veicolo 6WD . . . . .	127
<b>B Allestimento veicoli di test</b>	<b>129</b>
B.1 Componenti . . . . .	130
B.1.1 Microcontrollore . . . . .	130
B.1.2 Piattaforma inerziale e modulo Bluetooth® . . . . .	130
B.1.3 Motore e azionamento . . . . .	131
B.1.4 Servomotore: attuatore di sterzo . . . . .	132
B.1.5 Segnale di comando dell'azionamento motore e del ser-	
vomotore . . . . .	133
B.1.6 Batterie . . . . .	134
B.1.7 Sensore di velocità di ruota . . . . .	135
B.2 Veicolo 4WD/4WS . . . . .	139
B.3 Veicolo 6WD . . . . .	141
<b>Bibliografia</b>	<b>143</b>

## INDICE

---



# Elenco delle tabelle

4.1	Ruota più carica . . . . .	93
B.1	Dati microcontrollore . . . . .	130
B.2	Dati motore . . . . .	132
B.3	Dati azionamento . . . . .	132
B.4	Dati servomotore . . . . .	133
B.5	Dati cella batteria . . . . .	135
B.6	Dati sensore hall . . . . .	135

## ELENCO DELLE TABELLE

---

# Elenco delle figure

2.1	Forze di contatto tra pneumatico e superficie stradale . . . . .	12
2.2	Forza longitudinale del pneumatico per diversi $\alpha$ . . . . .	14
2.3	Forza trasversale del pneumatico per diversi $\lambda$ . . . . .	15
2.4	Forza longitudinale del pneumatico per diversi carichi verticali	16
2.5	Forza trasversale del pneumatico per diversi carichi verticali .	16
2.6	Ellisse di pneumatico . . . . .	17
2.7	Modello single corner . . . . .	17
2.8	Sensitività alla velocità . . . . .	18
2.9	Sensitività al carico verticale . . . . .	19
2.10	Modello lineare: forza longitudinale . . . . .	21
2.11	Modello lineare: forza trasversale . . . . .	21
2.12	Confronto tra pneumatico lineare e non: coppia limitata . . . .	22
2.13	Confronto tra pneumatico lineare e non: coppia limitata . . . .	22
2.14	Confronto tra pneumatico lineare e non: coppia eccessiva . . .	23
2.15	Confronto tra pneumatico lineare e non: coppia eccessiva . . .	24
2.16	Veicolo 4WD/4WS . . . . .	25
2.17	Veicolo 4WD/4WS: angoli di deriva . . . . .	29
2.18	Veicolo 4WD/4WS: angoli di deriva, dettaglio ruota Front-Left	29
2.19	Differenza tra angolo di deriva reale ed approssimato . . . . .	30
2.20	Veicolo 4WD/4WS: curva a regime . . . . .	33
2.21	Veicolo 4WD/4WS: trasferimento di carico longitudinale . . .	34
2.22	Veicolo 4WD/4WS: trasferimento di carico trasversale . . . . .	35

## ELENCO DELLE FIGURE

---

3.1	Modello a bicicletta . . . . .	42
3.2	Sterzata cinematica: veicolo con sterzo anteriore . . . . .	45
3.3	Sterzata cinematica: veicolo con sterzo anteriore e posteriore	46
3.4	Sterzata dinamica di regime . . . . .	48
3.5	Sterzata dinamica di regime: equilibrio forze . . . . .	50
3.6	Guadagno della curvatura di regime: solo sterzo anteriore . . .	52
3.7	Guadagno della curvatura di regime: sterzo anteriore e posteriore	54
3.8	Guadagno della curvatura di regime: sterzo anteriore e posteriore	54
4.1	Forze trasversali del 4WD/2WS: slip angle di body rilevante . .	64
4.2	Forze trasversali del 4WD/2WS: slip angle di body piccolo . .	64
4.3	Forze trasversali del 4WD/4WS: slip angle di body negativo . .	65
4.4	Forze trasversali del 4WD/4WS: slip angle di body positivo . .	65
4.5	Velocità massima in curva: 4WD/4WS vs 4WD/2WS . . . . .	67
4.6	Ellissi di pneumatico: 4WD/4WS vs 4WD/2WS . . . . .	69
4.7	Slip angle ruote anteriori . . . . .	70
4.8	Slip angle ruote posteriori . . . . .	70
4.9	Angoli di sterzo delle ruote anteriori . . . . .	71
4.10	Angoli di sterzo delle ruote posteriori . . . . .	71
4.11	Slip longitudinali delle ruote anteriori . . . . .	72
4.12	Slip longitudinali delle ruote posteriori . . . . .	73
4.13	Velocità massima in curva: confronto fra le tre architetture . .	75
4.14	Ellissi di pneumatico: 4WD/4WS vs FWS . . . . .	76
4.15	Slip longitudinali delle ruote anteriori . . . . .	76
4.16	Slip longitudinali delle ruote posteriori . . . . .	77
4.17	Slip angle delle ruote anteriori . . . . .	77
4.18	Slip angle delle ruote posteriori . . . . .	78
4.19	Angoli di sterzo delle ruote anteriori . . . . .	78
4.20	Stabilità equilibri a velocità massima . . . . .	80
4.21	Ellissi di pneumatico: stabilità a velocità massima . . . . .	81
4.22	Stabilità a velocità massima: poli e zeri . . . . .	83
4.23	Veicolo 4WD/4WS: risposta ai disturbi . . . . .	84

## ELENCO DELLE FIGURE

---

4.24	Veicolo 4WD/2WS: risposta ai disturbi . . . . .	84
4.25	Configurazioni multiple: forze ai centri ruota . . . . .	86
4.26	Configurazioni multiple: ellissi pneumatici, $V = 15 \frac{m}{s}$ . . . . .	88
4.27	Configurazioni multiple: ellissi pneumatici, $V = 16 \frac{m}{s}$ . . . . .	89
4.28	Configurazioni multiple: ellissi pneumatici, $V = V_{max}$ . . . . .	89
4.29	Stabilità configurazioni multiple: ellissi pneumatici, $V = 15 \frac{m}{s}$ .	90
4.30	Stabilità configurazioni multiple: poli e zeri, $V = 15 \frac{m}{s}$ . . . . .	91
4.31	Velocità massima in curva di regime: con e senza trasferimento di carico . . . . .	92
4.32	4WD/4WS indice trasferimento di carico . . . . .	95
4.33	Carico ruote del 4WD/4WS a velocità massima in curva di redime . . . . .	95
5.1	Veicolo 6WD . . . . .	100
5.2	Veicolo 6wd: angoli di deriva . . . . .	103
5.3	Veicolo 6wd: angoli di deriva, dettaglio ruota 1L . . . . .	103
5.4	Veicolo 6WD: curva a regime . . . . .	104
5.5	Veicolo 6WD: trasferimento di carico longitudinale . . . . .	105
5.6	Veicolo 6WD: trasferimento di carico trasversale . . . . .	106
5.7	Veicolo 6WD: confronto velocità massima in curva . . . . .	112
5.8	Veicolo 6WD: ellissi di pneumatico . . . . .	113
5.9	Veicolo 6WD: slip angle di ruota (ruote anteriori, centrali e posteriori) . . . . .	114
5.10	Veicolo 6WD: slip longitudinali (ruote anteriori, centrali e po- steriori) . . . . .	114
5.11	Veicolo 6WD: dettaglio slip angle di ruota . . . . .	116
5.12	Veicolo 6WD: dettaglio slip longitudinali . . . . .	116
B.1	Microcontrollore . . . . .	130
B.2	Piattaforma inerziale e modulo Bluetooth® . . . . .	131
B.3	Motore e azionamento . . . . .	131
B.4	Attuatore dello sterzo . . . . .	133

## ELENCO DELLE FIGURE

---

B.5 Segnale di comando PWM . . . . .	134
B.6 Batteria di alimentazione . . . . .	135
B.7 Sensore hall . . . . .	136
B.8 Caratteristica sensore di velocità . . . . .	138
B.9 Risoluzione sensore di velocità . . . . .	138
B.10 Veicolo 4WS/4WD completo . . . . .	139
B.11 Veicolo 4WS/4WD: telaio e fissaggio batterie . . . . .	140
B.12 Veicolo 4WS/4WD: elettronica di controllo . . . . .	140
B.13 Veicolo 6WD completo . . . . .	141
B.14 Veicolo 6WD: telaio e fissaggio batterie . . . . .	142
B.15 Veicolo 6WD: elettronica di controllo . . . . .	142

# Capitolo 1

## Introduzione

Quando si parla di veicoli il pensiero va subito all'automobile di famiglia, quella che ci permette di andare in vacanza, quella ci permette di fare un viaggio o semplicemente di andare a lavoro. Le automobili utilizzate dalla maggior dei consumatori hanno un'architettura a sterzo anteriore con ruote posteriori non sterzanti e motore nella parte frontale del veicolo. La necessità di abbattere i costi di produzione hanno portato i costruttori a realizzare veicoli consumer sempre più simili tra loro con componenti standardizzati e in cui gran parte delle differenze è dovuta al design e all'estetica.

Negli ultimi anni, motivi economici ed ecologici stanno modificando il panorama della mobilità, soprattutto quello urbano, trasformando il veicolo di riferimento da pesante e a combustibile fossile a elettrico, leggero ed eco-friendly. In parallelo ai veicoli elettrici si stanno evolvendo anche i componenti che compongono un'automobile. Si va sempre di più verso l'utilizzo di componenti così detti by-wire, controllabili elettronicamente, eliminando la necessità di link meccanici che penalizzano fortemente il design e la sicurezza dei veicoli.

Veicoli elettrici e componenti by-wire stanno favorendo il proliferare di architetture avanzate, di cui 4WD/4WS (quattro ruote motrici e sterzanti) sembra la preferita, ma di certo non è l'unica. In generale si indicano con la sigla WD (wheel drive) le ruote motrici e con la sigla WS (wheel steer)

le ruote sterzanti: 4WD/2WS, quindi, indica un veicolo con quattro ruote motrici e due sterzanti, mentre 6WD indica un veicolo con sei ruote motrici e nessuna sterzante.

I veicoli classici sono stati abbondantemente studiati negli anni e le loro caratteristiche in termini di dinamica di veicolo, di affidabilità e di sicurezza sono ben note. Diversa è la situazione per i veicoli innovativi con controlli by-wire e architetture complesse, spesso costruiti basandosi su soluzioni empiriche. Molto va ancora fatto per comprendere la loro dinamica e i vantaggi che le variabili di controllo in più (sterzi e/o coppie) introducono, sia in termini di prestazioni che in termini di stabilità e controllabilità del veicolo. Un altro aspetto che va approfondito è quello dell'affidabilità degli attuatori by-wire: come rendere veicoli con tali componenti affidabili, senza ricorrere alla ridondanza degli attuatori stessi contenendo i costi (critici in ambito automotive).

In realtà anche per veicoli classici a combustione sono state introdotte negli anni architetture più complesse con ruote posteriori sterzanti, ma il loro scarso successo ne ha limitato la diffusione. L'azione dello sterzo posteriore è spesso limitata e le leggi di controllo vengono ricavate empiricamente.

In ambiti diversi da quello consumer, invece, la situazione è ben diversa. Particolari necessità di manovrabilità in settori specializzati, come quello agricolo, industriale e logistico, hanno portato all'uso di architetture con sterzo anteriore e posteriore e in certi casi con solo sterzo posteriore. Veicoli come trattori, rimorchi per il trasporto pesante, veicoli per cantieri e per la movimentazione merci in magazzino ne sono un esempio. In tali contesti le velocità di manovra sono basse (manovre simili a quelle di parcheggio), e la stabilità del veicolo non è un requisito stringente. Va da sé che l'utilizzo di architetture avanzate, in queste applicazioni, non richiede uno studio approfondito della dinamica di veicolo.



## 1.1 Obiettivo della tesi

Il lavoro di tesi è volto allo studio della dinamica e alla comprensione dei fenomeni che maggiormente la influenzano, per due particolari architetture di veicolo, 4WD/4WS e 6WD. Gli aspetti sui quali si può indagare sono innumerevoli: stabilità, controllabilità del veicolo e sensitività agli ingressi, prestazioni (in fase di curva e in fase di accelerazione), affidabilità, sicurezza. Nello studio a seguire si concentra l'attenzione su due di tali aspetti: *le prestazioni in curva dei veicoli e la loro controllabilità*.

- Per un veicolo 4WD/4WD, l'obiettivo principale è quello di comprendere quali vantaggi permette l'introduzione di sterzi e coppie indipendenti su tutte le ruote, rispetto ad un architettura classica. Si vuole capire se i vantaggi introdotti da tale architettura giustificano la maggiore complessità strutturale e i costi superiori.

Dal punto della controllabilità, si vuole studiare la caratteristica sottosterzante/sovrasterzante del veicolo e come essa può essere modificata avendo a disposizione lo sterzo delle ruote posteriori. Tale caratteristica esprime in maniera sintetica come risponde il veicolo ai comandi del guidatore alle diverse velocità e per un veicolo con solo sterzo anteriore è fissa e dipende essenzialmente dalle sue caratteristiche progettuali.

Sul fronte delle prestazioni si vuole capire qual'è la velocità massima raggiungibile dal veicolo in curva e come essa dipende dagli pneumatici e dagli ingressi a disposizione.

- La presenza degli sterzi incide di molto sulla struttura dei veicoli e sulla loro complessità, avere un veicolo con ruote solo motrici ne facilita la progettazione, la costruzione e permette di avere un veicolo intrinsecamente più affidabile con meno parti mobili.

Quindi, per un veicolo di tipo 6WD, si vuole comprendere quanto incide la mancanza dello sterzo sulla controllabilità, ovvero la possibilità di percorrere una stessa curva con diversi assetti, e le prestazioni di veicolo (velocità massima in curva).

Insieme agli obiettivi teorici, volti a comprendere il comportamento dei veicoli, vi sono anche quelli sperimentali. Per entrambe le architetture si vuole eseguire l'allestimento di due veicoli di prova per future prove e test da confrontare con i dati di simulazione.

I veicoli sono in scala, con dimensioni tipiche dei veicoli per competizioni da modellismo e i componenti che li costituiscono sono standardizzati e di facile reperibilità. Le fasi di allestimento, che dovranno essere svolte, sono le seguenti:

- (a) cablaggio e montaggio dei veicoli
- (b) scelta e montaggio dell'elettronica di controllo
- (c) scelta e montaggio dei sensori: sensori di velocità di ruota e piattaforma inerziale per la misura delle accelerazioni di veicolo

## 1.2 Struttura della tesi

Per il raggiungimento degli obiettivi sopra descritti la trattazione è stata suddivisa in 6 capitoli, ognuno con i seguenti contenuti:

### **CAPITOLO 2: Veicolo 4WD/4WS**

In questo capitolo si pongono le basi di alcuni concetti fondamentali per le trattazioni successive.

Viene analizzato dapprima il modello di pneumatico (e di ruota) e le sue peculiarità. Tale modello verrà in seguito integrato con i modelli di body delle varie architetture ottenendo un modello dell'intero veicolo (i modelli di body esprimono la dinamica in funzione delle forze esterne agenti sul veicolo, siano esse forze di pneumatico o di altro tipo).

Successivamente l'attenzione si focalizza sul modello di body del veicolo 4WD/4WS. Tale modello verrà scritto in una delle forme possibili, che ha il vantaggio di essere facilmente integrata col modello di pneumatico.

Infine si studia in fenomeno di trasferimento di carico, molto rilevante in fase di curva.

### **CAPITOLO 3: Sterzata**

Per lo studio della sterzata del veicolo si fa uso di un modello semplificato. Innanzitutto viene presentato il modello a bicicletta, ampiamente usato per lo studio della dinamica laterale dei veicoli e qui ampliato per tener conto dello sterzo delle ruote posteriori.

Si passa quindi allo studio della sterzata cinematica nella quale non si tiene conto della caratteristica di pneumatico, situazione che descrive bene le manovre in fase di parcheggio.

Si prosegue con lo studio della sterzata dinamica di regime. Tale studio porta ai risultati voluti sulla descrizione della caratteristica di sottosterzo/sovrasterzo per un veicolo 4WD/4WS confrontate con quelle di un veicolo classico.

## **CAPITOLO 4: Velocità massima in curva**

Si affronta in questo capitolo lo studio delle prestazioni del veicolo.

Innanzitutto viene presentato un metodo per il calcolo numerico della velocità massima del veicolo in curva. Il metodo sfrutta il modello completo di veicolo comprensivo della caratteristica di pneumatico ed è facilmente adattabile alle altre architetture presentate.

Si mostrano, quindi, i risultati ottenuti con il metodo menzionato applicato a tre diverse architetture: 4WD/4WS, 4WD/2WS e FWD+RWD/FWS.

Ai confronti sulle prestazioni massime segue un confronto sulla proprietà di stabilità a velocità massima tra un veicolo 4WD/4WS e un veicolo 4WD/2WS. Per ultimo si affronta il problema del trasferimento di carico. Si studia l'incidenza del trasferimento di carico sulle prestazioni del veicolo, nel caso in cui il legame carico-forze di pneumatico fosse lineare. Siccome tale legame non è lineare, ma presenta una saturazione, si introduce un indice che stimi la lontananza dalla zona di comportamento lineare del pneumatico (rispetto al carico verticale).

## **CAPITOLO 5: Veicolo 6WD**

Viene affrontata la modellistica di un veicolo a sei ruote motrici, mettendo in risalto gli aspetti differenti da un veicolo 4WD/4WS e riutilizzando quelli simili.

Quindi, si studia la controllabilità del veicolo in curva di regime. La mancanza di sterzi rende inutilizzabile per tale architettura il modello semplificato a bicicletta. Verrà quindi introdotto un procedimento che fa uso del modello completo di veicolo con l'ipotesi di pneumatici con caratteristica lineare.

Per quanto riguarda lo studio delle prestazioni del veicolo, il metodo introdotto nel Capitolo 4 per il calcolo della velocità massima verrà adattato e applicato a tale architettura. Successivamente i suoi risultati saranno confrontati con quelli delle altre tre architetture.

## **CAPITOLO 6: Conclusioni e sviluppi futuri.**

In questa sezione conclusiva si riassumono gli obiettivi raggiunti e vengono proposti degli aspetti sui quali converrebbe indagare più a fondo in futuro.

## **APPENDICE A: Espressioni complete**

In questa appendice vengono scritte le espressioni complete omesse in alcuni dei passaggi precedenti

## **APPENDICE B: Allestimento veicoli di test**

Vengono presentati i veicoli di prova e il loro allestimento.

## 1.3 Principali contributi innovativi

Gli aspetti innovativi sviluppati possono essere riassunti nei seguenti tre punti:

- Studio della caratteristica di sottosterzo per un veicolo con sterzo anteriore e posteriore, il quale ha dimostrato che la risposta di un veicolo di questo tipo ai comandi del guidatore può essere modificata intervenendo sul rapporto tra sterzo anteriore e posteriore.  
Si è inoltre dimostrato che la caratteristica sottosterzante/sovrasterzante del veicolo non può essere modificata, quindi un veicolo sovrasterzante continua a presentare una velocità critica avvicinandosi alla quale si va verso una condizione di instabilità e per un veicolo sottosterzante la sensitività ai comandi si annulla per velocità infinita.  
I risultati di tale studio possono essere utilizzati per implementare un controllo della caratteristica di veicolo, che va ad intervenire sul rapporto tra sterzo anteriore e sterzo posteriore in funzione della velocità.
- Introduzione di un metodo per il calcolo numerico della velocità massima in curva di regime di un veicolo. Il metodo sfrutta il modello completo di veicolo, complessivo di pneumatici non lineari e i suoi vantaggi principali sono:
  - (a) Non è vincolato all'architettura di veicolo, perciò è facilmente adattabile ad architetture diverse da quelle già considerate.
  - (b) La sua implementazione in ambiente Matlab fa uso di funzioni standard.
  - (c) Il metodo permette un facile inserimento di vincoli sulle variabili di controllo che posso esprimere vincoli fisici del veicoli, come per esempio i limiti sugli angoli di sterzo delle ruote.
- Studio della controllabilità di regime di un veicolo 6WD. Per questa tipologia di veicoli il modello a bicicletta (largamente usato per lo studio

dei veicoli con ruote sterzanti) non è utilizzabile. È stato quindi realizzato un studio basato sul modello completo di veicolo, sotto l'ipotesi di pneumatici lineari. I risultati ottenuti esprimono un legame tra lo stato del veicolo e le variabili di controllo. Tale legame ha dimostrato come, nonostante le sei variabili di controllo, raggio di curva, slip angle di body e velocità di veicolo non sono controllabili indipendentemente l'una dall'altra.





# Capitolo 2

## Veicolo 4WD/4WS

In questo capitolo verrà presentato un modello che descrive la dinamica del veicolo 4WD/4WS e che tra l'altro terrà conto della dinamica longitudinale, ovvero sarà a velocità variabile.

Come primo passo viene introdotto il modello di pneumatico, utilizzato successivamente anche per il veicolo 6WD.

Verrà, quindi, presentato un modello non lineare della dinamica di body che tiene conto dei fenomeni e delle dinamiche interessanti per gli obiettivi che si è posti.

Infine si concentrerà l'attenzione sul fenomeno di trasferimento di carico. Si studierà un modello, che terrà conto del fenomeno, con le dovute ipotesi e semplificazioni.

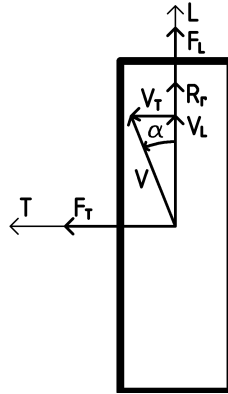
## 2.1 Gli pneumatici

Lo pneumatico è il componente principale nell'interazione tra veicolo e mondo esterno. Il suo comportamento e le sue caratteristiche influenzano fortemente il comportamento dell'intero veicolo.

I limiti dello pneumatico si traducono in limiti per il veicolo nelle varie condizioni di percorrenza e le non linearità presenti nello pneumatico sono quelle che maggiormente incidono sulle non linearità del sistema veicolo.

### 2.1.1 Contatto pneumatico strada

Le forze di attrito esercitate dallo pneumatico a terra sono scomponibili, sul piano di contatto, in due componenti: una in direzione longitudinale ( $F_L$ ) e una in direzione laterale ( $F_T$ ) rispetto all'asse dello pneumatico stesso.



**Figura 2.1:** Forze di contatto tra pneumatico e superficie stradale

Tali forze dipendono da molti fattori, quali: angolo di camber, superficie stradale, velocità ecc. D'ora in poi si concentrerà l'attenzione sulle tre variabili che maggiormente influenzano le forze scambiate dallo pneumatico.

$$F_L = F_L(\lambda, \alpha, F_Z)$$

$$F_T = F_T(\lambda, \alpha, F_Z)$$

Con  $\lambda, \alpha, F_Z$  definite come segue:

- $\lambda$ : lo *slittamento longitudinale relativo* (*slip longitudinale*) dello pneumatico rispetto al fondo stradale è definito come:

$$\lambda = -\frac{V_L - \omega R_r}{\max(|V_L|, |\omega R_r|)} \quad (2.1)$$

dove  $V_L$  è la velocità longitudinale del centro ruota,  $\omega$  è la velocità di rotazione della ruota e  $R_r$  è il raggio di ruota ( $\omega R_r$  è la velocità tangenziale della ruota nel punto di contatto).

In letteratura si possono trovare differenti definizioni dello slip longitudinale, con la definizione qui riportata lo slip è limitato nel range  $[-1, 1]$ . Valori positivi indicano la fase di accelerazione della ruota, mentre quelli negativi la fase di frenata. Slip pari a  $-1$  e  $1$  indicano rispettivamente la condizione di *frenata a ruota bloccata* e di *veicolo fermo con ruota in rotazione*. In entrambi i casi si parla di condizione di *puro slittamento*. Infine, si parla di condizione di *puro rotolamento* quando  $V_L = \omega R_r$  ovvero quando lo slip è nullo;

- $\alpha$ : l'*angolo di deriva o slip angle* dello pneumatico (Figura 2.1) è l'angolo che si forma tra il vettore velocità del centro ruota e l'asse longitudinale dello pneumatico.

$$\tan \alpha = \frac{V_T}{V_L} \quad (2.2)$$

- $F_Z$ : la *forza normale* esercitata sul mozzo della ruota dipende da parametri statici come la massa del veicolo e la posizione del baricentro e da parametri dinamici come il trasferimento di carico.

In letteratura, per dare un'espressione analitica alle funzioni  $F_L$  e  $F_T$ , si trovano modelli statici e dinamici, alcuni costruiti in modo empirico, altri derivati dal comportamento fisico.

Nella seguente trattazione viene utilizzato un modello di tipo esponenziale proposto in [2], secondo cui le forze dello pneumatico sono date dalle seguenti

espressioni:

$$F_L(\lambda, \alpha, F_Z) = F_Z k_L [\text{sign}(\lambda) a_L (1 - e^{\text{sign}(\lambda) b_L \lambda}) + c_L \lambda] \quad (2.3)$$

$$F_T(\lambda, \alpha, F_Z) = F_Z k_T [\text{sign}(\alpha) a_T (1 - e^{\text{sign}(\alpha) b_T \alpha}) + c_T \alpha]$$

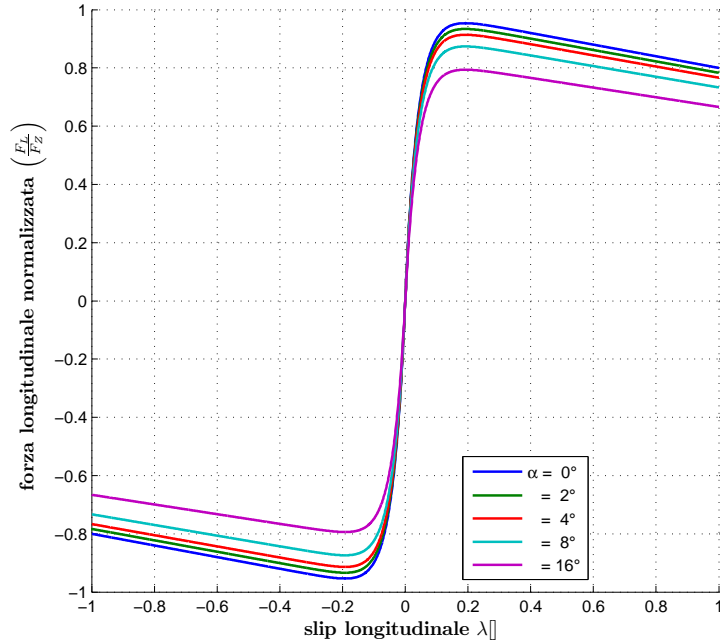
$a_L, b_L, c_L$  e  $a_T, b_T, c_T$  sono dei parametri da stimare sperimentalmente, mentre  $k_L$  e  $k_T$  esprimono l'accoppiamento tra la forza longitudinale e quella trasversale e sono dati da:

$$k_L = a_1 |\alpha| + 1$$

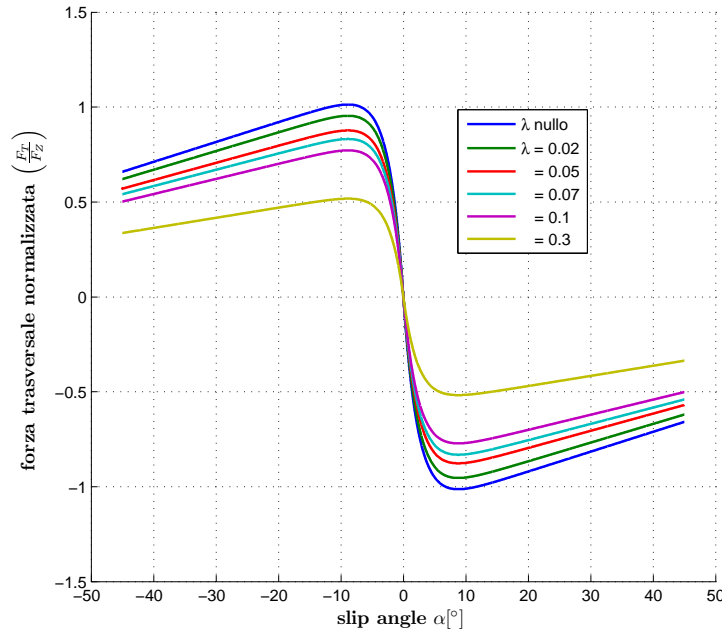
$$k_T = \frac{a_2 |\lambda| + 1}{a_3 |\lambda| + 1}$$

dove  $a_1, a_2, a_3$  sono sempre da determinare sperimentalmente.

Nelle Figura 2.2 e Figura 2.3 si possono notare gli andamenti delle due forze.



**Figura 2.2:** Forza longitudinale del pneumatico per diversi  $\alpha$

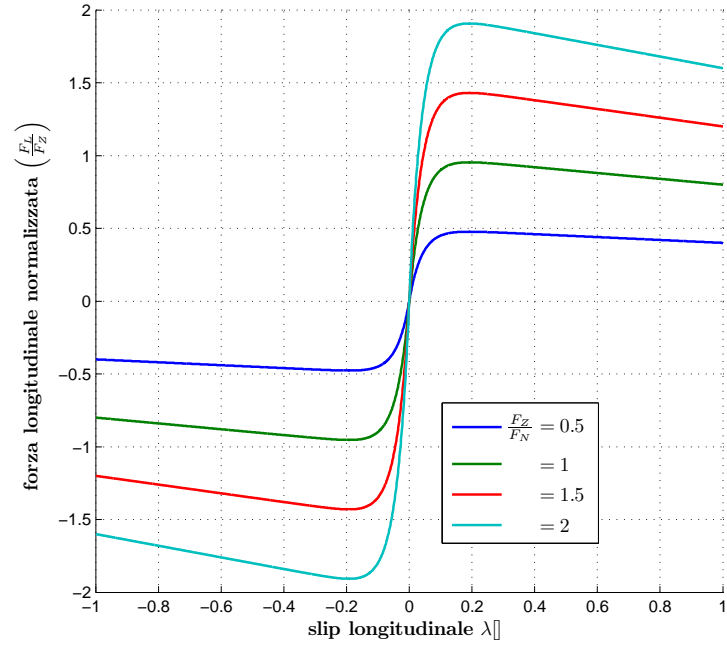


**Figura 2.3:** Forza trasversale del pneumatico per diversi  $\lambda$

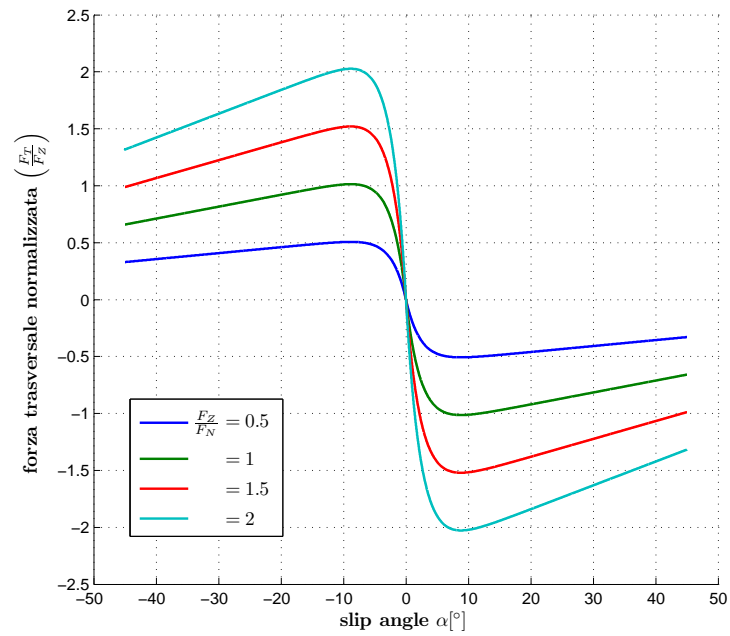
In entrambi i casi si può notare l'accoppiamento tra forza longitudinale e trasversale, all'aumentare dello slip angle, aumenta la forza trasversale e diminuisce quella longitudinale, viceversa all'aumentare dello slip longitudinale aumenta la forza longitudinale e diminuisce quella trasversale.

Uno dei vantaggi di tale modello è il legame lineare tra le forze e il carico verticale, come si può osservare nelle Figura 2.4 e Figura 2.5. È ben noto che tale legame è vero solo in un certo range del carico verticale, mentre per carichi eccessivi la caratteristica presenta una saturazione. Tale fenomeno può presentarsi in fase di brusche accelerazioni longitudinali e in fase di curvatura, in cui il trasferimento di carico comporta delle variazioni eccessive del carico verticale tra ruote esterne e ruote interne alla curva stessa.

Infine una rappresentazione sintetica delle caratteristiche di pneumatico è data dall'*ellisse di pneumatico*, nella Figura 2.6, che mostra le combinazioni  $F_L$ - $F_T$  per diverse combinazioni di slip longitudinale e slip angle assunte dal pneumatico.



**Figura 2.4:** Forza longitudinale del pneumatico per diversi carichi verticali



**Figura 2.5:** Forza trasversale del pneumatico per diversi carichi verticali

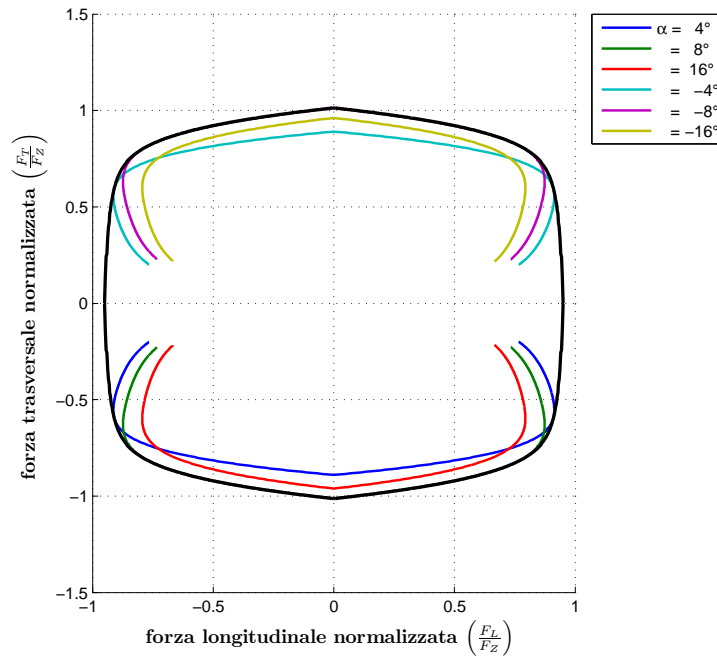


Figura 2.6: Ellisse di pneumatico

### 2.1.2 Modello single corner

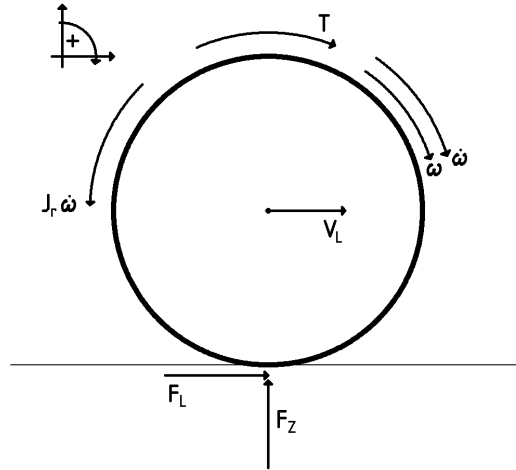


Figura 2.7: Modello single corner

È un modello che descrive la dinamica di ruota in cui  $\omega$  (*velocità angolare della ruota*) è la variabile di stato e  $T$  (*coppia motrice/frenante*) è la variabile

di controllo. La forza longitudinale ( $F_L$ ), prodotta dal contatto pneumatico-strada è quella precedentemente descritta nel modello di pneumatico e  $J_r$  è il momento d'inerzia della ruota.

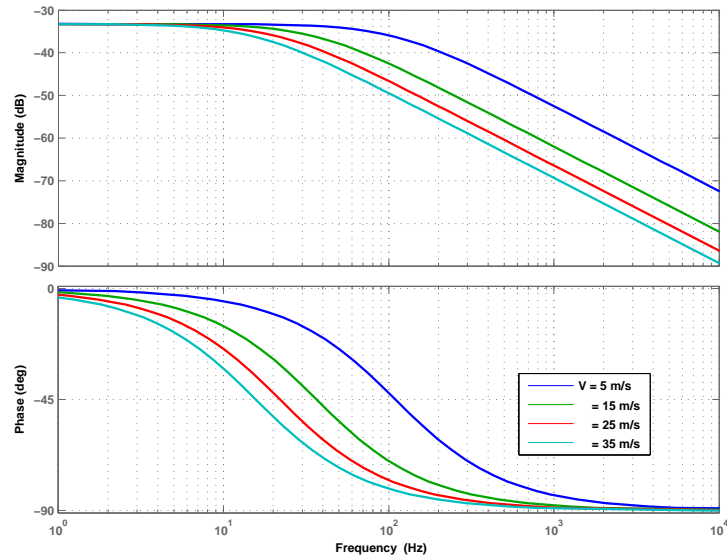
$V_L$  è la velocità del centro ruota e per il modello single corner è un ingresso esterno: dipende dal modello di veicolo considerato.

L'equazione della dinamica di ruota, quindi, la si ricava facilmente dalla Figura 2.7 ed è la seguente:

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J_r} (T - R_r F_L) \quad (2.4)$$

Il modello qui esposto va utilizzato insieme al modello di body del veicolo in questione per poter realizzare un simulatore dell'intero veicolo.

È interessante osservare come la ruota risponde alla coppia applicata nelle varie condizioni, osservando la FdT dalla coppia allo slip longitudinale al variare della velocità e del carico verticale (Figura 2.8 e Figura 2.9). All'aumentare

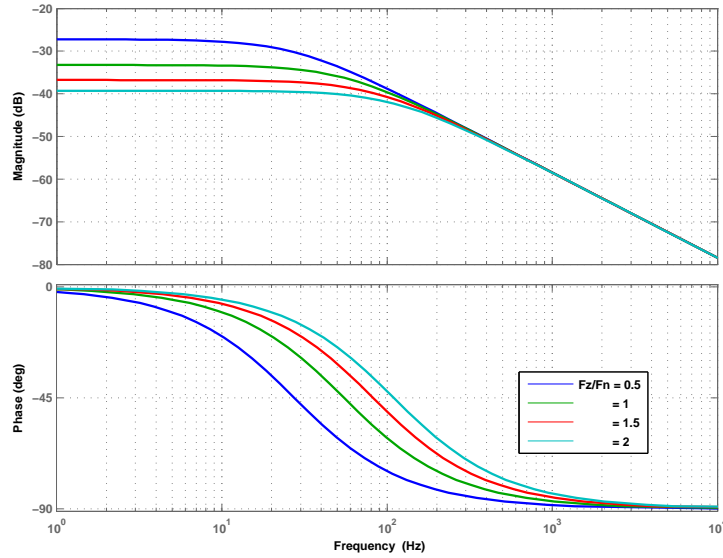


**Figura 2.8:** Sensitività alla velocità

della velocità la risposta da coppia a slip diventa più lenta il che significa che



anche la dinamica della forza longitudinale di contatto, generata dal pneumatico rallenta. Di conseguenza la dinamica longitudinale dell'intero veicolo rallenta. Al diminuire del carico verticale, aumenta il guadagno statico della



**Figura 2.9:** Sensibilità al carico verticale

FdT. Lo slip, quindi, raggiunge più velocemente il picco della caratteristica di pneumatico il che significa che lo pneumatico satura più facilmente per bassi carichi verticali.

In realtà la dinamica di ruota presenta delle condizioni di instabilità, dovute alla caratteristica longitudinale del pneumatico. Ipotizziamo di fornire alla ruota una coppia costante e che la velocità del centro ruota sia costante:

- (a) *Coppia di entità limitata* ( $T < R_r F_{L,MAX}$ ): in tale condizione la forza longitudinale richiesta per equilibrare la coppia è inferiore al picco della caratteristica di pneumatico: l'accelerazione angolare della ruota è nulla e lo slip rimane costante.
- (b) *Coppia di entità eccessiva* ( $T > R_r F_{L,MAX}$ ): in tale condizione la forza longitudinale richiesta per equilibrare la coppia è superiore al picco della

caratteristica di pneumatico, quindi lo slip aumenterà fino a raggiungere la condizione di puro slittamento.

### 2.1.3 Modello di pneumatico lineare

In diverse situazioni, soprattutto nelle trattazioni analitiche dei modelli, è utile usare un modello semplificato del contatto pneumatico-strada. Linearizzando il modello precedente si ottiene:

$$\begin{aligned} F_L &= \left. \frac{\partial F_L}{\partial \lambda} \right|_{\bar{\lambda}=0} \lambda = C_\lambda \lambda \\ F_T &= \left. \frac{\partial F_T}{\partial \alpha} \right|_{\bar{\alpha}=0} \alpha = C_\alpha \alpha \end{aligned} \quad (2.5)$$

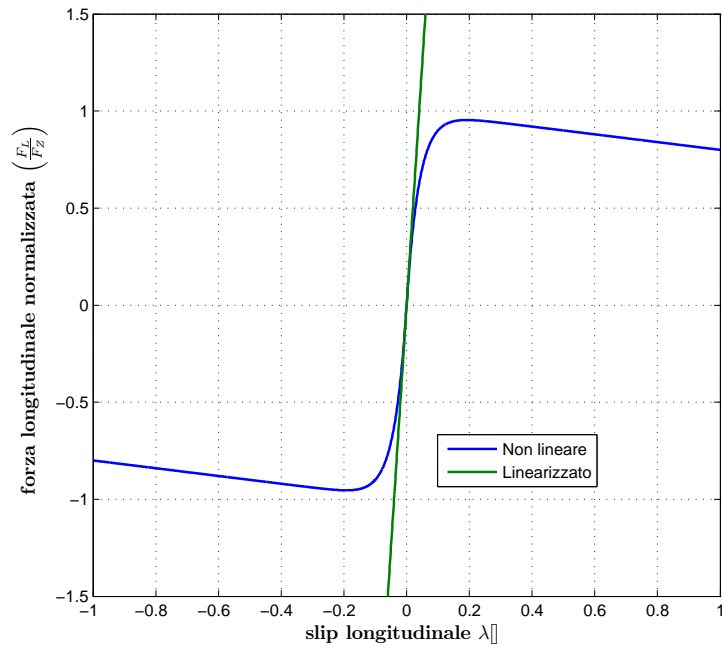
dove  $C_\lambda$  e  $C_\alpha$  sono dette rispettivamente *coefficiente di rigidezza longitudinale* e *coefficiente di rigidezza trasversale*.

Come si può notare dalle espressioni, tale modello non tiene conto dell'interazione tra slip longitudinale e trasversale, inoltre, *un modello di ruota con pneumatico lineare non presenta mai una condizione di instabilità*, non essendoci un limite superiore alle forze generate dallo pneumatico.

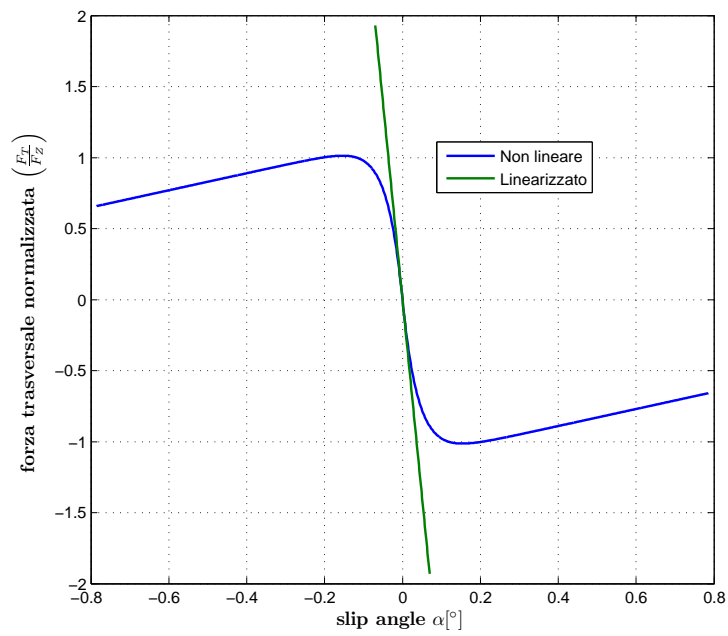
Nelle simulazioni sottostanti (Figura 2.12-Figura 2.15) si può notare la differenza in fase di accelerazione longitudinale tra un veicolo con pneumatici lineari ed un veicolo con pneumatici non lineari.

Nella simulazione di Figura 2.12 le ruote sono accelerate mediante una coppia limitata in modo da mantenere lo pneumatico non lineare in zona di linearità. Sia lo slip del pneumatico lineare che lo slip di quello non lineare presentano un comportamento stabile, portandosi ad un valore di regime. Lo stesso si può notare sulla caratteristica longitudinale del pneumatico (Figura 2.13), osservando che lo slip massimo raggiunto dal modello non lineare non supera il picco della caratteristica.

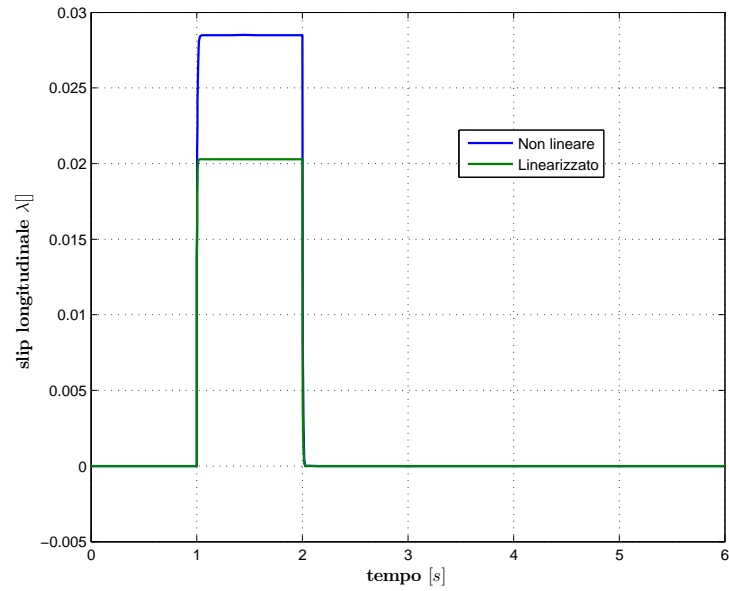
Nella simulazione di Figura 2.14, invece, le ruote sono accelerate mediante una coppia che porta lo pneumatico non lineare a superare il picco della caratteristica. In questo caso lo slip del pneumatico non lineare presenta un



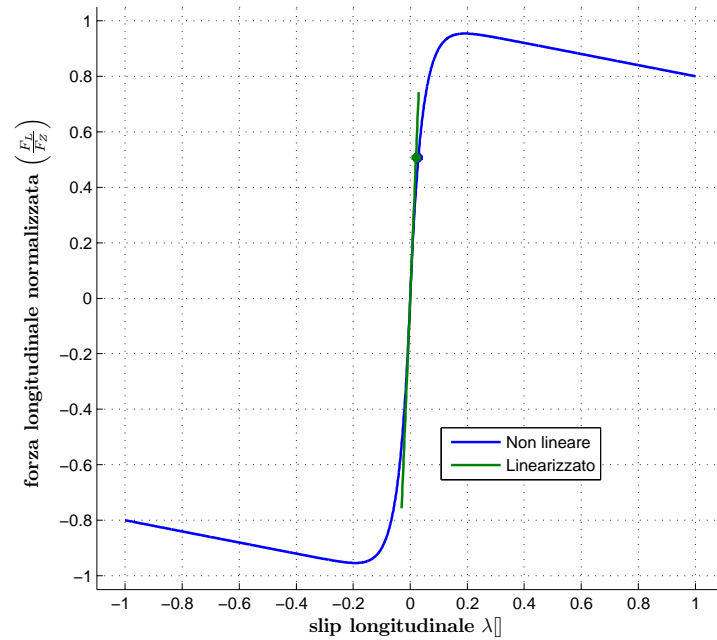
**Figura 2.10:** Modello lineare: forza longitudinale



**Figura 2.11:** Modello lineare: forza trasversale

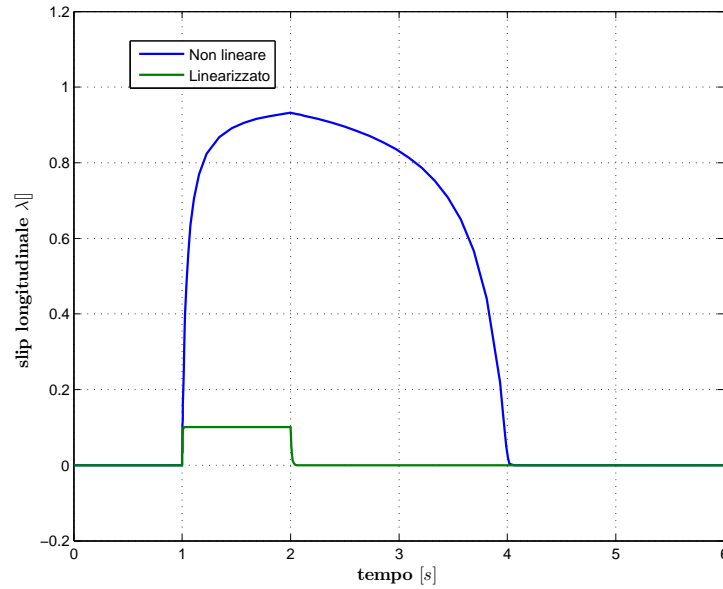


**Figura 2.12:** Confronto tra pneumatico lineare e non: coppia limitata



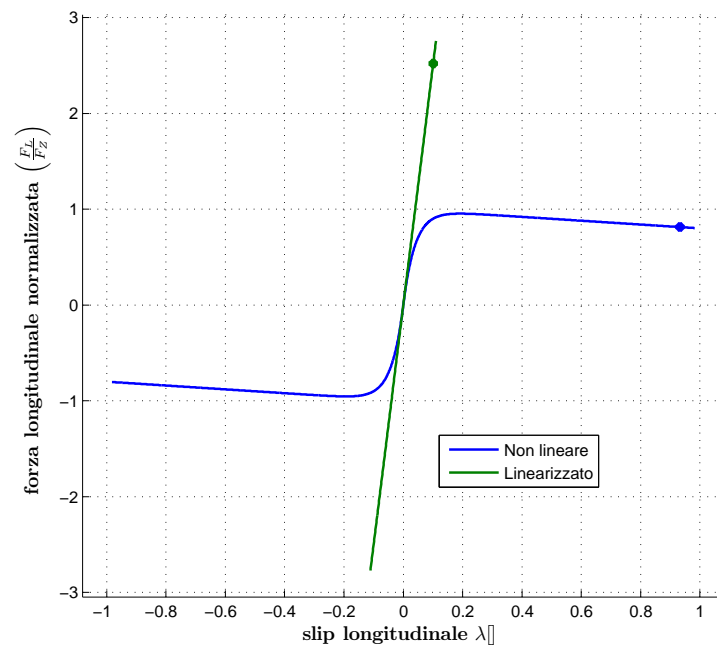
**Figura 2.13:** Confronto tra pneumatico lineare e non: coppia limitata

comportamento instabile, portandosi allo slip limite  $\lambda = 1$ . Lo stesso si può notare sulla caratteristica longitudinale del pneumatico (Figura 2.15).



**Figura 2.14:** Confronto tra pneumatico lineare e non: coppia eccessiva

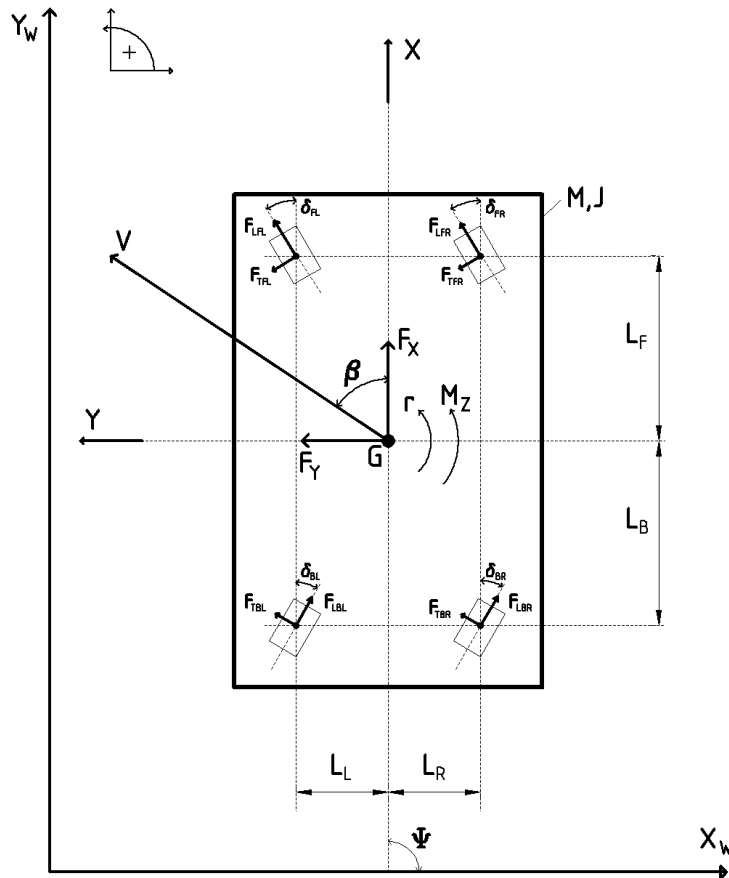
In tutte le simulazioni fin qui considerate, dopo  $t = 2$  s la coppia applicata è nulla, perciò le ruote decelerano e lo slip ritorna a 0.



**Figura 2.15:** Confronto tra pneumatico lineare e non: coppia eccessiva

## 2.2 Modello di body

Per la scrittura del modello di body si fa uso di principi primi. Sfruttando le relazioni di equilibrio dinamico in un sistema di riferimento solidale con il veicolo stesso, si ricava un modello dinamico nelle tre variabili di stato scelte.



**Figura 2.16:** Veicolo 4WD/4WS

Come si vedrà successivamente le variabili di stato scelte permettono di definire in modo comodo gli slip angle di ruota e di legare tra lo il modello single corner di ciascuna ruota e il modello che descrive la dinamica di body.

Le variabili di stato sono:

- (a)  $\beta$ : *slip angle di body*, è l'angolo compreso tra il vettore velocità del baricentro e l'asse longitudinale del veicolo ( $X$ );
- (b)  $r$ : velocità di imbardata o *yaw rate* ( $r = \dot{\Psi}$ );
- (c)  $V$ : modulo del vettore velocità del baricentro.

Ricavando l'espressione dell'accelerazione di veicolo (Figura 2.16), inizialmente nelle coordinate globali ( $X_W, Y_W$ ) e successivamente, per rotazione, nelle coordinate locali ( $X, Y$ ) solidali con il veicolo si ottiene:

$$\vec{a}_G = ae^{i\beta} + V \left( \dot{\beta} + r \right) e^{i\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)} \quad (2.6)$$

Le componenti dell'accelerazione lungo gli assi di veicolo sono:

$$\begin{aligned} a_{GX} &= a \cos(\beta) - V \left( \dot{\beta} + r \right) \sin(\beta) \\ a_{GY} &= a \sin(\beta) + V \left( \dot{\beta} + r \right) \cos(\beta) \end{aligned}$$

A questo punto la scrittura degli equilibri dinamici è immediata.

$$\begin{cases} F_X - Ma_{GX} = 0 \\ F_Y - Ma_{GY} = 0 \\ M_Z - Jr = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

$F_X$  e  $F_Y$  rappresentano rispettivamente la forza totale equivalente in direzione longitudinale agente sul veicolo e la forza totale equivalente agente lateralmente, mentre  $M_Z$  rappresenta il momento totale di rotazione attorno all'asse  $Z$  (perpendicolare al piano di veicolo).

Elaborando opportunamente le equazioni di equilibrio dinamico si arriva al modello finale che descrive la dinamica del veicolo:



$$\begin{cases} \dot{\beta} = -r - F_X \frac{\sin \beta}{MV} + F_Y \frac{\cos \beta}{MV} \\ \dot{r} = \frac{M_Z}{J} \\ a = F_X \frac{\cos \beta}{M} + F_Y \frac{\sin \beta}{M} \end{cases} \quad (2.8)$$

Il modello dato dalla 2.8 è un modello generico di veicolo in cui  $F_X, F_Y, M_Z$  sono date dalle forze generate dai pneumatici e verranno esplicitate di volta in volta in funzione dell'architettura di veicolo. Le forze di pneumatico a loro volta dipendono dallo stato e dagli ingressi, in un'architettura  $4WD/4WS$  gli ingressi sono rappresentati dalle quattro coppie e i quattro sterzi applicati alle ruote.

*In questa trattazione non si tiene conto di ulteriori forze esterne agenti sul veicolo, quali le forze aerodinamiche e si trascura la dinamica verticale influenzata dalla deformazione dei pneumatici e delle sospensioni.*

### 2.2.1 Forze totali lungo gli assi di veicolo

Le forze equivalenti lungo gli assi di veicolo generate dagli pneumatici sono:

$$\begin{aligned} F_{Xi} &= F_{Li} \cos(\delta_i) - F_{Ti} \sin(\delta_i) \\ F_{Yi} &= F_{Li} \sin(\delta_i) + F_{Ti} \cos(\delta_i) \end{aligned} \quad i=FL,FR,BL,BR \quad (2.9)$$

$FL, FR, BL, BR$  indicano rispettivamente la ruota Front-Left, Front-Right, Back-Left, Back-Right.

Quindi, le forze totali lungo gli assi di veicolo ( $F_X, F_Y$ ) sono date dalla somma delle forze di tutti gli pneumatici.

$$F_X = \sum_i F_{Xi} \quad F_Y = \sum_i F_{Yi} \quad (2.10)$$

Anche la scrittura della relazione che esprime il momento totale attorno all'asse  $Z$  diventa immediata:

$$\begin{aligned}
 M_Z = & L_F (F_{YFL} + F_{YFR}) - L_B (F_{YBL} + F_{YBR}) \\
 & + L_R (F_{XFR} + F_{XBR}) - L_L (F_{XFL} + F_{XBL})
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

### 2.2.2 Angoli di deriva degli pneumatici

Come detto precedentemente l'angolo di deriva è l'angolo formato dal vettore velocità del centro ruota e l'asse longitudinale della ruota. Il vettore velocità del centro ruota dipende dalla dinamica di body del veicolo ed è dato da due componenti:

- (a) Velocità: se il veicolo si muovesse in moto rettilineo, sui centri ruota si avrebbe lo stesso vettore di velocità del baricentro del veicolo;
- (b) Rotazione: la rotazione attorno al baricentro implica una componente aggiuntiva sui vettori di velocità del centro ruota. Tale componente può aumentare o diminuire lo slip angle di ruota in funzione della posizione della ruota stessa rispetto al baricentro.

Nella Figura 2.17 si possono notare le velocità dei vari centri ruota e i rispettivi angoli di deriva. È possibile, quindi, ricavare le espressioni delle componenti dei vettori velocità nei rispettivi assi di ruota, utili al calcolo dello slip angle in un simulatore completo del veicolo. In particolare si può notare come la componente introdotta dalla rotazione sia positiva sugli slip angle anteriori (Front) e negativa sugli slip angle posteriori (Back).

Il calcolo degli angoli di deriva mediante le componenti di velocità del centro ruota risulta poco maneggevole quando si ha la necessità di elaborare analiticamente il modello di veicolo. A tal proposito è interessante ricavare delle espressioni semplificate degli slip angle. Tale approssimazione riguarda in particolar modo la componente aggiuntiva dovuta alla rotazione del veicolo. L'espressione dello slip angle della ruota Front-Left si ricava facilmente osservando la Figura 2.18. Operando allo stesso modo anche per le altre ruote si ottiene:

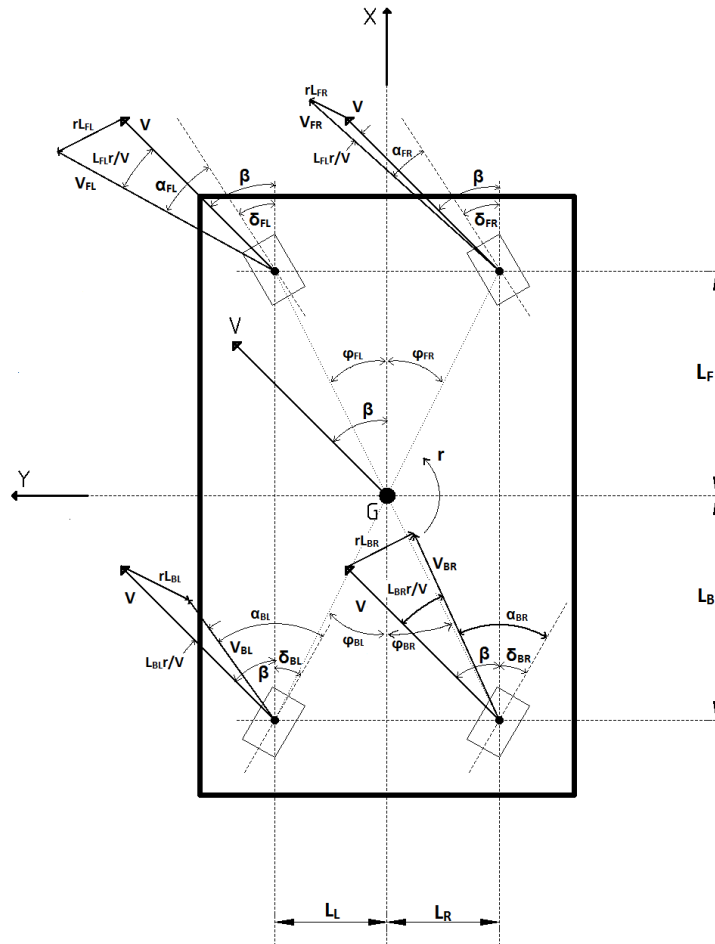


Figura 2.17: Veicolo 4WD/4WS: angoli di deriva

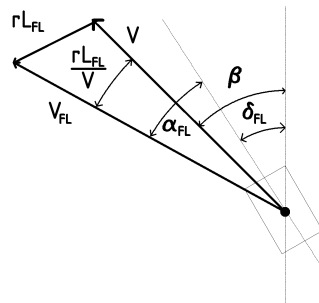
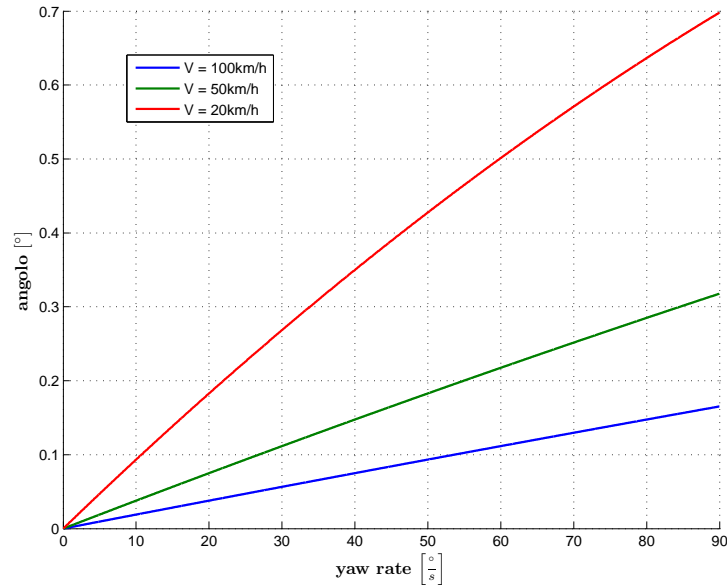


Figura 2.18: Veicolo 4WD/4WS: angoli di deriva, dettaglio ruota Front-Left

$$\begin{aligned}
 \alpha_{FL} &= \beta + L_{FL} \frac{r}{V} - \delta_{FL} & \alpha_{FR} &= \beta + L_{FR} \frac{r}{V} - \delta_{FR} \\
 \alpha_{BL} &= \beta - L_{BL} \frac{r}{V} - \delta_{BL} & \alpha_{BR} &= \beta - L_{BR} \frac{r}{V} - \delta_{BR}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

dove  $L_{FL}$ ,  $L_{FR}$ ,  $L_{BL}$  e  $L_{BR}$  rappresentano le distanze tra i centri ruota e il baricentro.

Nella Figura 2.19 si può osservare la differenza tra slip angle reale e slip angle approssimato per diverse velocità di veicolo, al variare della velocità di rotazione (*yaw rate*), mentre sterzo e slip angle di body sono mantenuti costanti. Anche nelle peggiori condizioni (velocità minima e yaw rate massimo) tale differenza rimane contenuta.



**Figura 2.19:** Differenza tra angolo di deriva reale ed approssimato

### 2.2.3 Modello veicolo 4WD/2WS

Uno dei vantaggi, che presenta il modello del veicolo 4WD/4WS scritto precedentemente, è la possibilità di essere scalato facilmente per architetture di veicolo più semplici. In particolare, volendo scrivere il modello di un veicolo

4WD/2WS (Four-Wheel Drive/Two-Wheel Steering), basta porre costantemente uguali a zero gli sterzi delle ruote posteriori, mantenendo inalterate le equazioni scritte per veicolo 4WD/4WS.

## 2.3 Trasferimento di carico

Nello studio del modello di pneumatico si è osservato come le forze scambiate dal pneumatico col terreno siano fortemente influenzate dal carico verticale. Ci si pone in questa sezione l'obiettivo di ricavare un modello che descriva più dettagliatamente il carico verticale sulle singole ruote.

Se il legame tra le forze di pneumatico fosse effettivamente lineare, il fenomeno di trasferimento di carico avrebbe un'influenza minore sulle prestazioni del veicolo in termini di accelerazione e velocità massima in curva, perché l'aderenza persa sugli pneumatici con carico inferiore a quello nominale viene recuperata in quelli più carichi. Nella realtà, la presenza della saturazione rispetto al carico verticale fa sì che tale recupero sia solo parziale, ragion per cui si cerca di limitare gli effetti di questo fenomeno nella progettazione dei veicoli (soprattutto quelli da competizione e quelli in cui sono richieste alte prestazioni).

Le differenze di carico tra le ruote sono dovute a diversi motivi, in seguito non tutti considerati. In particolare si trascurano i seguenti effetti:

- (a) Deformazione dei pneumatici e delle sospensioni;
- (b) Inclinazione del piano stradale.

Sotto queste ipotesi il fenomeno di trasferimento di carico è dovuto principalmente all'accelerazione del veicolo. Come si dimostrerà rigorosamente in seguito, la componente dell'accelerazione longitudinale al veicolo comporta una differenza di carico tra ruote anteriori e posteriori, mentre quella trasversale comporta una differenza tra ruote di sinistra e di destra.

Dal modello di veicolo sappiamo che tali componenti sono date da:

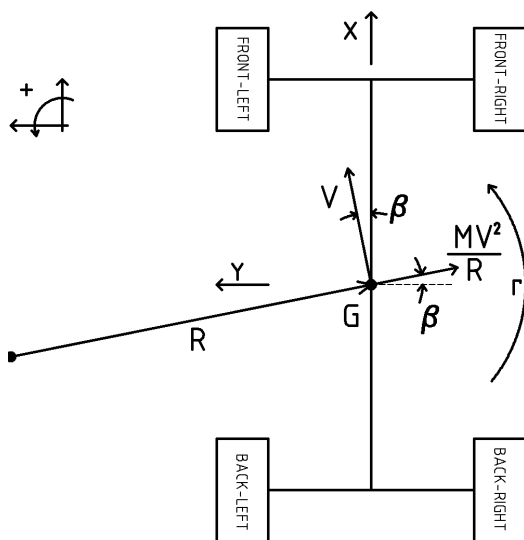
$$\begin{aligned} a_{GX} &= a \cos(\beta) - V \left( \dot{\beta} + r \right) \sin(\beta) \\ a_{GY} &= a \sin(\beta) + V \left( \dot{\beta} + r \right) \cos(\beta) \end{aligned}$$

In condizioni di curva a regime (Figura 2.20), caso sul quale si concentrerà l'attenzione per lo studio del trasferimento di carico, e ricordando che  $r = \frac{V}{R}$

tali componenti si riducono a:

$$\begin{aligned} a_{GX} &= -\frac{V^2}{R} \sin(\beta) \\ a_{GY} &= \frac{V^2}{R} \cos(\beta) \end{aligned} \quad (2.13)$$

dove  $R$  rappresenta il raggio della curva percorsa dal veicolo. Infatti, in tali condizioni le azioni degli pneumatici devono equilibrare la forza centrifuga, perpendicolare alla velocità.

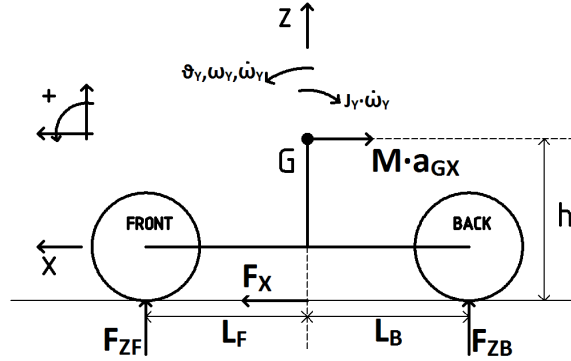


**Figura 2.20:** Veicolo 4WD/4WS: curva a regime

### 2.3.1 Trasferimento di carico longitudinale

La componente longitudinale comporta un trasferimento di carico tra ruote anteriori e posteriori. Per la conservazione del carico totale sulle ruote (equilibrio lungo l'asse  $Z$ ), che deve equilibrare il peso del veicolo si ha:

$$\begin{cases} F_{ZF} = 2F_{ZN} - \Delta F_{ZX} \\ F_{ZB} = 2F_{ZN} + \Delta F_{ZX} \end{cases}$$



**Figura 2.21:** Veicolo 4WD/4WS: trasferimento di carico longitudinale

Con  $F_{ZN}$  si intende il carico nominale presente sulla singola ruota in assenza di trasferimento, dato da:

$$F_{ZN} = \frac{Mg}{4}$$

mentre  $\Delta F_{ZX}$  rappresenta il trasferimento di carico tra ruote anteriori e posteriori.

Imponendo l'equilibrio lungo l'asse  $X$  e ricordando la 2.13 è possibile ricavare l'espressione della forza  $F_X$ :

$$F_X = -\frac{MV^2}{R} \sin(\beta)$$

Infine per avere un'espressione di  $\Delta F_{ZX}$  è necessario sfruttare l'equilibrio alla rotazione attorno l'asse  $Y$ . A tal proposito, le ipotesi considerate inizialmente ci permettono di trascurare il termine inerziale  $J_Y \dot{\omega}_Y$  ottenendo:

$$-F_X h - F_{ZF} L_F + F_{ZB} L_B = 0$$

Elaborando opportunamente tale espressione si ottiene l'espressione di  $\Delta F_{ZX}$ :



$$\Delta F_{ZX} = \frac{-Mh \frac{V^2}{R} \sin(\beta)}{L_F + L_B} + \frac{F_{ZN}(L_F - L_B)}{L_F + L_B} \quad (2.14)$$

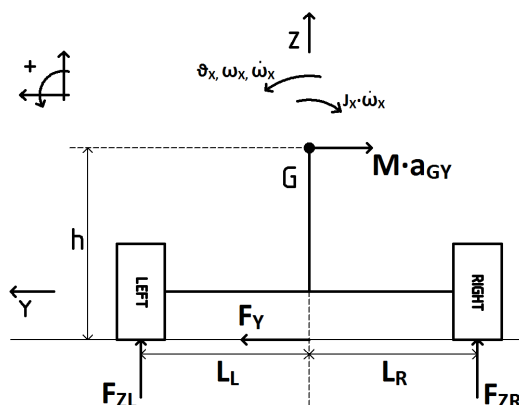
Nella 2.14 si possono notare due termini:

- (a)  $\frac{-Mh \frac{V^2}{R} \sin(\beta)}{L_F + L_B}$ : è un termine dinamico che dipende dallo stato del veicolo (curva, velocità e slip angle) e dall'altezza del baricentro ( $h$ ), uno dei motivi per cui nei veicoli da competizione si cerca di mantenere basso il baricentro;
- (b)  $\frac{F_{ZN}(L_F - L_B)}{L_F + L_B}$ : è un termine statico, funzione della posizione del baricentro e si annulla in un veicolo equilibrato.

*Infine bisogna ricordare che il trasferimento di carico che si ha sulla singola ruota è dato da  $\frac{\Delta F_{ZX}}{2}$ .*

### 2.3.2 Trasferimento di carico trasversale

Per la componente trasversale dell'accelerazione si segue lo stesso procedimento utilizzato per la componente longitudinale.



**Figura 2.22:** Veicolo 4WD/4WS: trasferimento di carico trasversale

Per la conservazione del carico totale sulle ruote si ha:

$$\begin{cases} F_{ZL} = 2F_{ZN} - \Delta F_{ZY} \\ F_{ZR} = 2F_{ZN} + \Delta F_{ZY} \end{cases}$$

in cui  $F_{ZN}$  ha la stessa espressione introdotta nel trasferimento di carico longitudinale.

Si sfrutta a questo punto l'equilibrio lungo l'asse  $Y$  ottenendo:

$$F_Y = \frac{MV^2}{R} \cos(\beta)$$

Quindi sfruttando le stesse ipotesi del caso longitudinale si può scrivere l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse  $X$ :

$$-F_Y h - F_{ZL} L_L + F_{ZR} L_R = 0$$

Infine l'espressione che da il trasferimento di carico trasversale tra ruote di destra e ruote di sinistra è:

$$\Delta F_{ZY} = \frac{Mh \frac{V^2}{R} \cos(\beta)}{L_L + L_R} + \frac{F_{ZN} (L_L - L_R)}{L_L + L_R} \quad (2.15)$$

Ancora una volta si hanno due termini, uno dinamico funzione dello stato del veicolo e della curva percorsa ed uno statico funzione della distribuzione di massa.

*Il trasferimento di carico che si ha sulla singola ruota è dato da  $\frac{\Delta F_{ZY}}{2}$ .*

### 2.3.3 Carico totale sulle ruote

Il carico totale sulle ruote sarà dato dal carico nominale ( $F_{ZN}$ ) sommato ai contributi del trasferimento di carico nei due assi. I contributi del trasferimento saranno uguali in modulo per tutte le ruote, ma il loro segno dipenderà dalla posizione della ruota rispetto al baricentro:

(a) Ruota Front-Left

$$F_{ZFL} = F_{ZN} - \frac{\Delta F_{ZX}}{2} - \frac{\Delta F_{ZY}}{2}$$

(b) Ruota Front-Right

$$F_{ZFR} = F_{ZN} - \frac{\Delta F_{ZX}}{2} + \frac{\Delta F_{ZY}}{2}$$

(c) Ruota Back-Left

$$F_{ZBL} = F_{ZN} + \frac{\Delta F_{ZX}}{2} - \frac{\Delta F_{ZY}}{2}$$

(d) Ruota Back-Right

$$F_{ZBR} = F_{ZN} + \frac{\Delta F_{ZX}}{2} + \frac{\Delta F_{ZY}}{2}$$

*In fase di curva a regime, la ruota più carica è quella posteriore esterna alla curva.*

### 2.3.4 Effetto del trasferimento di carico sulle forze di pneumatico

Sfruttando il legame lineare tra il carico sulla ruota e le forze che essa scambia con la superficie stradale è possibile ricavare analiticamente le variazioni delle forze di pneumatico dovute al fenomeno del trasferimento di carico.

Riprendendo le espressioni che danno le forze di pneumatico in funzione di *slip*, *slip angle di ruota* e *carico verticale*, la 2.3 può essere scritta come segue:

$$F_L(\lambda, \alpha, F_Z) = F_Z F_L(\lambda, \alpha, 1) = F_Z \mu_L(\lambda, \alpha)$$

$$F_T(\lambda, \alpha, F_Z) = F_Z F_T(\lambda, \alpha, 1) = F_Z \mu_T(\lambda, \alpha)$$

dove  $\mu_T$  e  $\mu_L$  sono detti rispettivamente coefficienti di attrito trasversale e longitudinale.

Tali espressioni vanno unite a quelle dei carichi sulle ruote scritte precedentemente. Per semplicità si presenta l'elaborazione delle espressioni nel caso della ruota Front-Left, mentre per le altre si mostra il risultato ottenuto alla stessa maniera.

Le espressioni che danno le forze di pneumatico della ruota Front-Left possono quindi essere scritte nella seguente forma:

$$\begin{aligned} F_{LFL} &= \left( F_{ZN} - \frac{\Delta F_{ZX}}{2} - \frac{\Delta F_{ZY}}{2} \right) \mu_L(\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \\ F_{TFL} &= \left( F_{ZN} - \frac{\Delta F_{ZX}}{2} - \frac{\Delta F_{ZY}}{2} \right) \mu_T(\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Le forze di pneumatico possono essere scomposte in tre parti, una dovuta al carico nominale e altre due dovute al trasferimento di carico. Generalizzando le espressioni della 2.16 si ha:

$$\begin{aligned} F_{Li} &= F_{Li,N} \pm a\Delta F_{Li,X} \pm b\Delta F_{Li,Y} \\ F_{Ti} &= F_{Ti,N} \pm a\Delta F_{Ti,X} \pm b\Delta F_{Ti,Y} \end{aligned} \quad \begin{matrix} i=FL,FR,BL,BR \end{matrix} \quad (2.17)$$

dove i parametri a e b valgono 1 o  $-1$  e dipendono da come il trasferimento di carico agisce sulla i-esima ruota.

$i$	$FL$	$FR$	$BL$	$BR$
$a$	$-1$	$-1$	$1$	$1$
$b$	$-1$	$1$	$-1$	$1$

Tali espressioni ritorneranno utili nello studio delle prestazioni massime del veicolo (Capitolo 4), dove verrà ricavato un'espressione simile per le forze totali lungo gli assi di veicolo, anch'esse scomponibili in tre parti: una dovuta al carico nominale e due dovute al trasferimento di carico.

*Le espressioni complete sono scritte in A.1.*

## 2.4 Conclusioni

Nel corso del capitolo è stato studiato un modello che descrive la dinamica di un veicolo 4WD/4WS ad architettura completa, facilmente scalabile anche per architetture più semplici.

In primo luogo è stato definito un modello per lo pneumatico, componente che maggiormente influenza la dinamica e le prestazioni dell'intero veicolo. È stato constatato che le forze che esso può scambiare con la strada sono limitate il che comporta dei limiti prestazionali per il veicolo.

In seguito si è concentrata l'attenzione sul fenomeno di trasferimento di carico. Le prestazioni dello pneumatico sono fortemente legate al carico verticale sulle ruote, da qui la necessità di un modello che descriva in maniera più accurata il carico sulle ruote. Come si è visto esso dipende dallo stato del veicolo (velocità, slip angle, yaw rate) e dalla distribuzione di masse.

Il modello è stato utilizzato per implementare un simulatore in ambiente Simulink e ritornerà utile nel Capitolo 4 in cui si studieranno le prestazioni del veicolo mediante metodi numerici applicati al modello completo, comprensivo di dinamica di body e dinamica non lineare di pneumatico.



# Capitolo 3

## Sterzata

Lo sterzo è la variabile di controllo più efficiente per il controllo della dinamica laterale del veicolo e l'obiettivo di questo capitolo è comprendere i vantaggi introdotti dalla possibilità di controllare lo sterzo delle ruote posteriori.

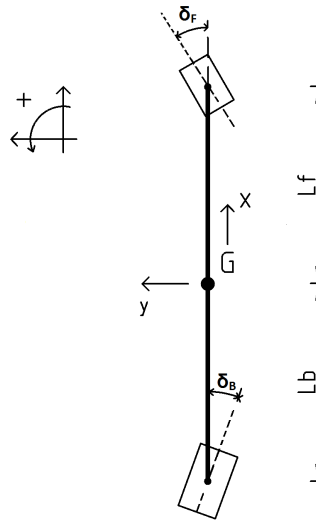
In una prima parte si introdurrà un modello semplificato del veicolo, *modello a bicicletta*, che, a differenza del modello completo, permette un'elaborazione analitica delle proprietà del modello. Inoltre, in questo modo si avrà un confronto immediato con le proprietà di un veicolo classico, presenti in letteratura e ricavate tramite lo stesso modello.

In seguito si studierà la sterzata cinematica del veicolo. Tale condizione di marcia si basa sull'ipotesi che le ruote si trovino in uno stato di puro rotolamento.

L'approccio utilizzato nella sterzata cinematica tornerà utile nello studio della sterzata dinamica. In quest'ultima parte si studierà la sterzata del veicolo, rilassando l'ipotesi di puro rotolamento e tenendo conto degli slip angle degli pneumatici. Da tale studio si arriverà a dei risultati significativi sulla proprietà di sotto/sovra sterzata del veicolo che verrà successivamente confrontata con quella di un veicolo classico.

### 3.1 Modello a bicicletta

Il modello a bicicletta è un modello semplificato di veicolo ampiamente utilizzato nello studio della dinamica laterale. Il grosso vantaggio di tale modello è quello di essere relativamente semplice, il che ne permette uno studio analitico. L'ipotesi principale sulla quale si basa il modello è quella di considerare uguale il comportamento tra le ruote di destra e quelle di sinistra. Lo schema che si ottiene, quindi, è quello di un semplice biciclo presentato in Figura 3.1.



**Figura 3.1:** Modello a bicicletta

Nonostante il suo utilizzo diffuso questo modello presenta dei limiti, tra questi vi è l'impossibilità di considerare la componente di trasferimento di carico laterale: in condizioni di curva a regime la differenza di carico tra le varie ruote è dovuta principalmente al trasferimento di carico in direzione laterale. Inoltre, tale modello non tiene conto degli effetti, sulla dinamica di veicolo, di coppie di tipo differenziale tra ruote di sinistra e ruote di destra. È ben noto che la possibilità di poter dare coppie differenziali viene sfruttata dai sistemi di controllo della stabilità del veicolo.

Infine, come si vedrà in seguito, tale modello è del tutto inappropriato per lo studio di un veicolo 6WD (o in generale con architettura a ruote non sterzan-



ti), visto che la sterzata è ottenuta mediante coppia differenziale tra ruote di destra e di sinistra.

Il modello del veicolo in Figura 3.1 è composto dalle stesse equazioni di body che descrivono il veicolo 4WD/4WS:

$$\begin{cases} \dot{\beta} = -r - F_X \frac{\sin \beta}{MV} + F_Y \frac{\cos \beta}{MV} \\ \dot{r} = \frac{M_Z}{J} \\ a = F_X \frac{\cos \beta}{M} + F_Y \frac{\sin \beta}{M} \end{cases}$$

Cambiano, quindi, le espressioni delle forze lungo gli assi e del momento totale di rotazione attorno all'asse  $Z$ . e sono date da:

$$F_X = 2[F_{LF} \cos(\delta_F) - F_{TF} \sin(\delta_F) + F_{LB} \cos(\delta_B) - F_{TB} \sin(\delta_B)]$$

$$F_Y = 2[F_{LF} \sin(\delta_F) + F_{TF} \cos(\delta_F) + F_{LB} \sin(\delta_B) + F_{TB} \cos(\delta_B)]$$

$$M_Z = 2L_F[F_{LF} \sin(\delta_F) + F_{TF} \cos(\delta_F)] - 2L_B[F_{LB} \sin(\delta_B) + F_{TB} \cos(\delta_B)]$$

Spesso, nello studio del modello a bicicletta, si trascura la dinamica longitudinale considerando costante la velocità ( $a = 0$ ) e si usa il modello lineare per descrivere le forze di pneumatico.

## 3.2 Sterzata cinematica

Per sterzata cinematica si intende il moto di un veicolo su una traiettoria curva determinata dal puro rotolamento delle ruote, per questo motivo, in condizioni di curvatura cinematica, gli angoli di deriva delle ruote sono nulli. Se ne ricava quindi che le ruote non possono esercitare forze trasversali per equilibrare la forza centrifuga, perciò la sterzata cinematica è una pura astrazione ed è possibile solo se la velocità tende a zero. La condizione reale che più si avvicina a tale astrazione è quella di sterzata in fase di parcheggio, situazione in cui la velocità è bassa e lo slip angle delle ruote è effettivamente ridotto.

Per le considerazioni menzionate sulla sterzata cinematica è chiaro come in tale studio non si faccia assolutamente riferimento alla caratteristica dei pneumatici, contrariamente a quello che verrà fatto nel caso della sterzata dinamica.

Le due ipotesi sulle quali si basa tale studio, sia per veicolo con solo sterzo anteriore che per quello con sterzo anteriore e posteriore, sono:

- (a) Raggio di curvatura grande rispetto al passo del veicolo;
- (b) Angoli di sterzo e di deriva piccoli.

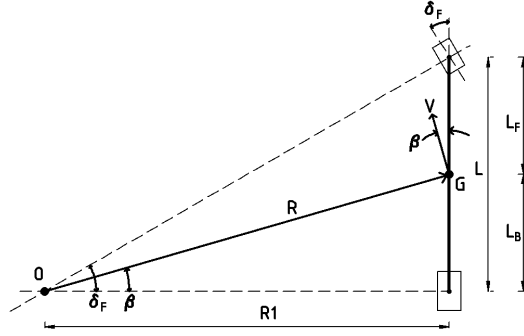
È inoltre conveniente introdurre da subito la curvatura, definita come l'inverso del raggio di curvatura, alla quale spesso si farà riferimento in questo e in altri capitoli.

$$C = \frac{1}{R}$$

### 3.2.1 Veicolo con solo sterzo anteriore

Si parte innanzitutto con il caso più semplice, lo studio della sterzata di un veicolo con solo sterzo anteriore (architettura classica).

Con riferimento allo schema di Figura 3.2, si può osservare che il centro di curvatura  $O$  si trova sull'intersezione delle due rette passanti per il centro



**Figura 3.2:** Sterzata cinematica: veicolo con sterzo anteriore

delle ruote, inoltre tali rette sono perpendicolari agli assi longitudinali delle ruote. Ciò implica che il centro di curvatura si troverà sempre su una retta fissa nel piano, quella passante per l'asse delle ruote posteriori e la distanza del centro  $O$  dal veicolo dipenderà dallo sterzo frontale. Al diminuire dello sterzo tale centro si allontana dal veicolo fino a raggiungere il caso limite in cui lo sterzo è nullo e il raggio di curvatura ( $R$ ) tende all'infinito.

Da considerazioni geometriche e dalle ipotesi introdotte precedentemente si ricava che:

$$R \approx R1 = L \frac{\cos(\delta_F)}{\sin(\delta_F)} \approx \frac{L}{\delta_F}$$

Da cui si può scrivere il *guadagno della curvatura della traiettoria*, che esprime il rapporto tra la curvatura della traiettoria percorsa dal veicolo e lo sterzo imposto.

$$\frac{1}{R\delta_F} = \frac{1}{L} \quad (3.1)$$

In condizioni cinematiche tale rapporto espresso dalla 3.1 rimane costante e dipende solo dal passo del veicolo. Un altro parametro interessante è il cosiddetto *guadagno dell'angolo di deriva*, che esprime lo slip angle assunto dal veicolo in funzione dello sterzo imposto. Dalla geometria di Figura 3.2 e dalle ipotesi si ha:

$$\beta = \arctan\left(\frac{L_B}{R1}\right) \approx \frac{L_B}{R}$$

Da cui si ricava:

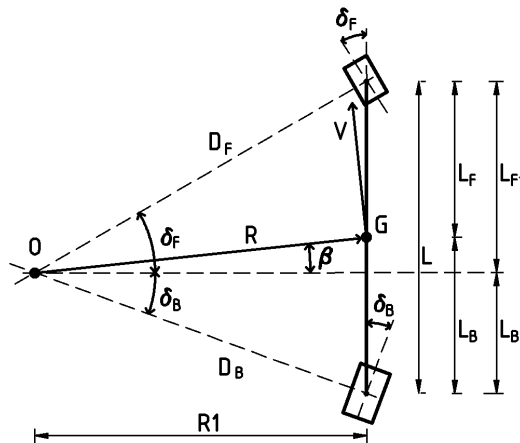
$$\frac{1}{\beta \delta_F} = \frac{L_B}{L} \quad (3.2)$$

Anche il guadagno dell'angolo di deriva, così come guadagno della curvatura della traiettoria, in condizioni di sterzata cinematica è determinato dalla geometria del veicolo ed è costante.

Le relazioni precedenti mostrano, inoltre, che tra la curvatura percorsa e l'angolo di deriva del veicolo esiste un legame determinato anch'esso dalle dimensioni del veicolo. In termini di controllabilità questo implica un limite, non potendo controllare indipendentemente le due variabili di stato.

### 3.2.2 Veicolo con sterzo anteriore e posteriore

Anche in questo caso si seguirà lo stesso percorso seguito per veicolo con solo sterzo anteriore.



**Figura 3.3:** Sterzata cinematica: veicolo con sterzo anteriore e posteriore

Una prima differenza si nota immediatamente osservando lo schema di Figura 3.3, in questo caso il centro della curva percorsa non è vincolato ad essere sulla retta passante per l'asse posteriore del veicolo. Esso può assumere una qualsiasi posizione nel piano, in funzione degli sterzi.

Ricordando ancora una volta le ipotesi fatte si ha:

$$R \approx R1 = \frac{L}{\tan(\delta_F) - \tan(\delta_B)} \approx \frac{L}{\delta_F - \delta_B}$$

da cui l'espressione della curvatura è data da:

$$\frac{1}{R} = \frac{\delta_F - \delta_B}{L} \quad (3.3)$$

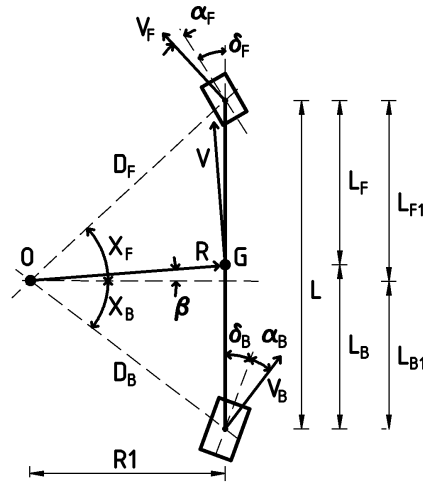
Allo stesso modo con qualche considerazione geometrica in più rispetto al caso con solo sterzo anteriore si giunge alla relazione dell'angolo di deriva del veicolo:

$$\beta = \frac{L_B}{R} + \delta_B \quad (3.4)$$

La 3.3 e la 3.4 mostrano un altro vantaggio dovuto allo sterzo posteriore: l'introduzione di una variabile di controllo in più permette di controllare in maniera indipendente raggio di curvatura e angolo di deriva del veicolo. Le potenzialità introdotte dallo sterzo posteriore verranno esaminate più a fondo nella sterzata dinamica a regime.

### 3.3 Sterzata dinamica a regime

Rilassando l'ipotesi introdotta per la sterzata cinematica, si tiene ora conto della caratteristica dei pneumatici. Inoltre, lo studio si concentra sul comportamento a regime del veicolo, in questo modo si hanno dei risultati simili a quelli presenti in letteratura per un veicolo classico, con i quali successivamente si farà il confronto. Lo schema di riferimento è quello di Figura 3.4 e



**Figura 3.4:** Sterzata dinamica di regime

le ipotesi delle quali si farà uso sono quelle elencate in seguito:

- (a) Raggio di curva molto più grande del passo del veicolo: condizione verosimile ad alte velocità:

$$R \gg L, L_B, L_{B1} \rightarrow R \approx R_1$$

- (b) Angoli di sterzo, angolo di deriva del veicolo e angoli di deriva delle ruote piccoli;
- (c) Caratteristica di pneumatico lineare, la complessità del modello esponenziale proposto nel Capitolo 2 obbliga tale scelta:

$$\begin{aligned} F_{Li} &= C_{\lambda i} \lambda_i \\ F_{Ti} &= C_{\alpha i} \alpha_i \end{aligned} \quad i=F,B$$

Va subito detto che, la definizione del modello di pneumatico presentata non esclude che i pneumatici dell'anteriore siano diversi da quelli del posteriore. In seguito si vedrà che tale aspetto incide di molto sulle proprietà del veicolo, motivo per cui non si può ipotizzare a priori che tutte le ruote siano uguali tra loro.

- (d) Si trascura l'interazione tra dinamica laterale e dinamica longitudinale del veicolo, ovvero si considerano agenti sulla dinamica laterale solo le forze trasversali. A fronte di questa ipotesi e dell'ipotesi precedente la dinamica longitudinale perde gran parte della sua importanza ai fini della sterzata e verrà quindi trascurata, considerando la velocità del veicolo costante.

Da considerazioni geometriche sullo schema proposto e dalle ipotesi introdotte si ricava che in curva a regime il legame tra gli sterzi imposti, gli angoli di deriva di ruota, la curva percorsa e la geometria di ruota è dato da:

$$\delta_F + \alpha_F - \delta_B - \alpha_B = \frac{L}{R} \quad (3.5)$$

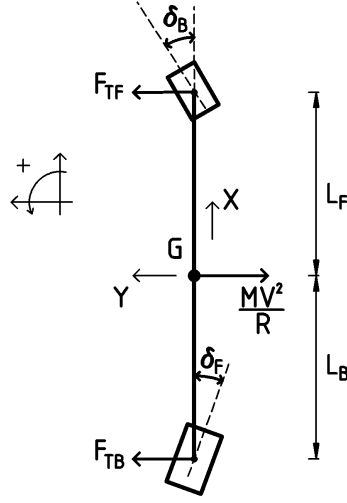
La 3.5 è l'equazione di partenza dalla quale si vuole ricavare l'espressione del raggio di curva e dell'angolo di deriva. Per fare ciò è necessario legare gli angoli di deriva di ruota alle forze agenti sul veicolo.

In curva, a regime, l'unica forza esterna agente sul veicolo, che deve essere equilibrata dalle forze esercitate dagli pneumatici, è quella centrifuga.

Per l'ultima delle ipotesi introdotte la scrittura del modello, corrispondente allo schema di Figura 3.5, è la seguente:

$$\begin{cases} F_{TF} + F_{TB} = \frac{MV^2}{R} \\ L_F F_{TF} - L_B F_{TB} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Da cui si possono ricavare le espressioni dei due slip angle di ruota.



**Figura 3.5:** Sterzata dinamica di regime: equilibrio forze

$$\alpha_F = -\frac{L_B MV^2}{C_{\alpha F} RL} \quad (3.7)$$

$$\alpha_B = -\frac{L_F MV^2}{C_{\alpha B} RL}$$

A questo punto l'ultimo passaggio da fare per ottenere le espressioni desiderate di raggio di curva e slip angle di body consiste nel mettere insieme la 3.5 e la 3.7, ottenendo:

- **Espressione della curvatura**

$$\frac{1}{R} = \frac{\delta_F - \delta_B}{L(1 + KV^2)} \quad (3.8)$$

In cui  $K$  è detta *costante di sottosterzo* ed è data da:

$$K = \frac{M}{L} \left( \frac{L_B}{C_{\alpha F}} - \frac{L_F}{C_{\alpha B}} \right) \quad (3.9)$$

- **Espressione dello slip angle di veicolo**

$$\beta = \frac{L_B}{R} - \frac{L_F MV^2}{C_{\alpha B} RL} + \delta_B \quad (3.10)$$



Anche in condizioni dinamiche di regime, la presenza dello sterzo posteriore permette di controllare in maniera indipendente la curvatura e lo slip angle di body. In condizioni dinamiche il raggio di curva che l'angolo di deriva dipendono dalla velocità e a velocità nulla i risultati coincidono con quelli ottenuti nella sterzata cinematica.

Le espressioni fin qui ottenute sono facilmente scalabili ad un veicolo classico con solo sterzo anteriore, basta infatti porre costantemente nullo lo sterzo posteriore ( $\delta_B = 0$ ).

### 3.3.1 Proprietà di sovra/sotto sterzata del veicolo

Si concentra adesso l'attenzione sull'espressione del raggio di curva, in particolare si vuole capire come esso dipende dalla velocità. Tale legame è strettamente legato al valore della costante di sottosterzo e si possono distinguere tre diverse situazioni:

(a) *Veicolo sottosterzante:  $K > 0$*

In un veicolo di questo tipo il guadagno della curvatura decresce con la velocità, ovvero al crescere della velocità lo sterzo, che si deve impostare per percorrere una curva di raggio  $R$ , cresce.

(b) *Veicolo neutro:  $K = 0$*

Un veicolo neutro presenta una caratteristica indipendente dalla velocità. Il guadagno di curvatura parte da quello statico e vi permane per qualsiasi velocità: ciò è vero sotto l'ipotesi di caratteristica lineare dei pneumatici. Se si tenesse conto della caratteristica esponenziale, che presenta un limite sulla forza trasversale e longitudinale, oltre una certa velocità il guadagno di curvatura inizierebbe a diminuire perché gli pneumatici non sarebbero più in grado di equilibrare la forza centrifuga.

(c) *Veicolo sovrasterzante:  $K < 0$*

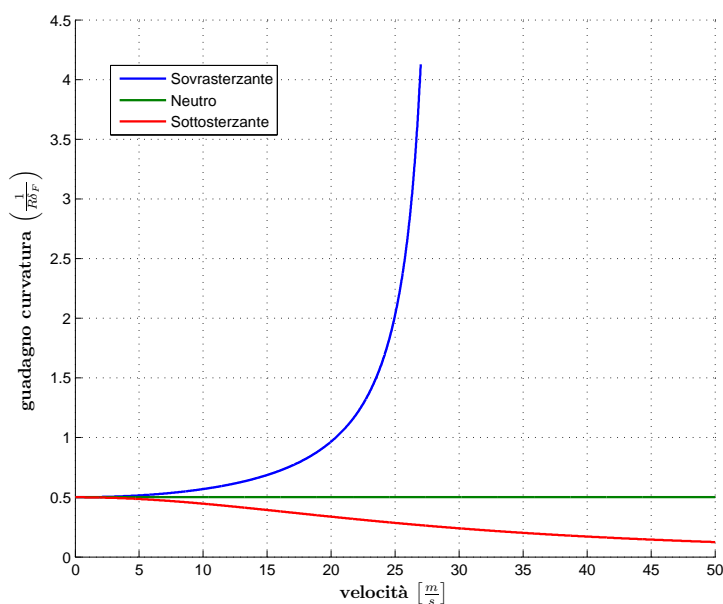
Come si può intuire, un veicolo di questo tipo presenta un comportamento opposto a quello sottosterzante. Per un veicolo sovrasterzante si definisce

velocità critica quella in corrispondenza della quale il guadagno della curvatura tende all'infinito.

$$V_{crit} = \sqrt{-\frac{1}{K}} \quad (3.11)$$

Avvicinandosi alla velocità critica si tende verso una condizione di instabilità. Infatti, in tale condizione il veicolo tende a sterzare senza che venga applicato alcun sterzo.

La Figura 3.6 mostra sinteticamente le tre situazioni descritte sopra per un veicolo a sterzo anteriore (gli andamenti corrispondono ad un veicolo con lunghezza pari a  $2m$  e  $K$  uguale a  $-1.2e^{-3}$  per il caso sovrasterzante e  $1.2e^{-3}$  per il caso sottosterzante)



**Figura 3.6:** Guadagno della curvatura di regime: solo sterzo anteriore

L'importanza del legame tra velocità e raggio di curva consiste nel fatto che tale legame esprime la risposta del veicolo ai comandi del guidatore: tipicamente un veicolo sovrasterzante presenta una maggiore reattività ai comandi, ma allo stesso tempo si porta più facilmente in uno stato di comportamento instabile.

In un veicolo classico tale andamento è fisso e dipende dalle proprietà del veicolo: posizione del baricentro e differenza tra le caratteristiche degli pneumatici anteriori e posteriori, entrambe caratteristiche non utilizzabili ai fini di un controllo attivo della dinamica.

Per un veicolo con sterzo posteriore e anteriore la situazione è diversa. Volendo ricavare un'espressione del guadagno di curvatura, nella sua definizione classica di rapporto tra curvatura e sterzo anteriore imposto, dalla 3.8 si ottiene:

$$\frac{1}{R\delta_F} = \frac{1 - \frac{\delta_B}{\delta_F}}{L(1 + KV^2)} \quad (3.12)$$

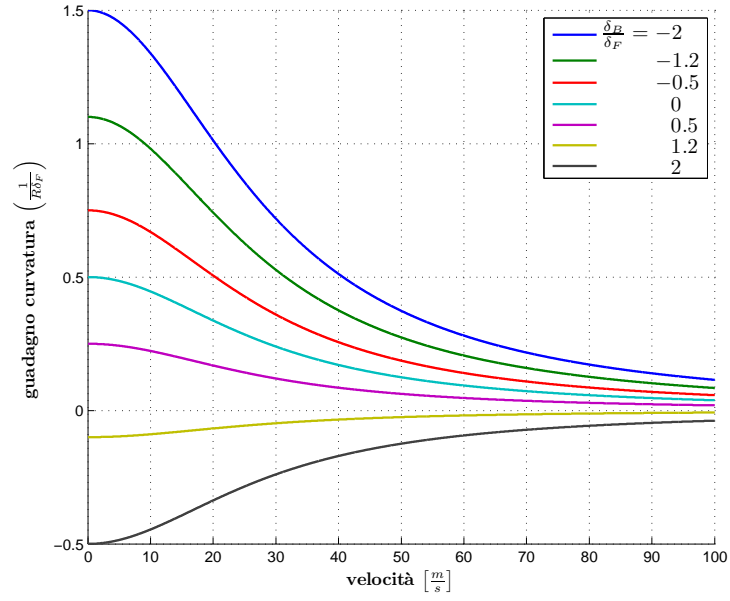
La 3.12 mostra come, in un veicolo con ambedue gli sterzi, sia possibile modificare il guadagno di curvatura in maniera dinamica intervenendo sul rapporto tra sterzo posteriore e anteriore. La situazione  $\delta_B/\delta_F = 1$  è da escludere a priori: rappresenta la situazione in cui tutte le ruote puntano nella stessa direzione e il veicolo non curva, ma trasla con un certo angolo di deriva.

Nella Figura 3.7 si può notare l'andamento del guadagno di curvatura di regime per un veicolo sottosterzante e per diversi rapporti tra sterzo posteriore e anteriore, mentre nella Figura 3.8 si può notare l'andamento per un veicolo sovrasterzante.

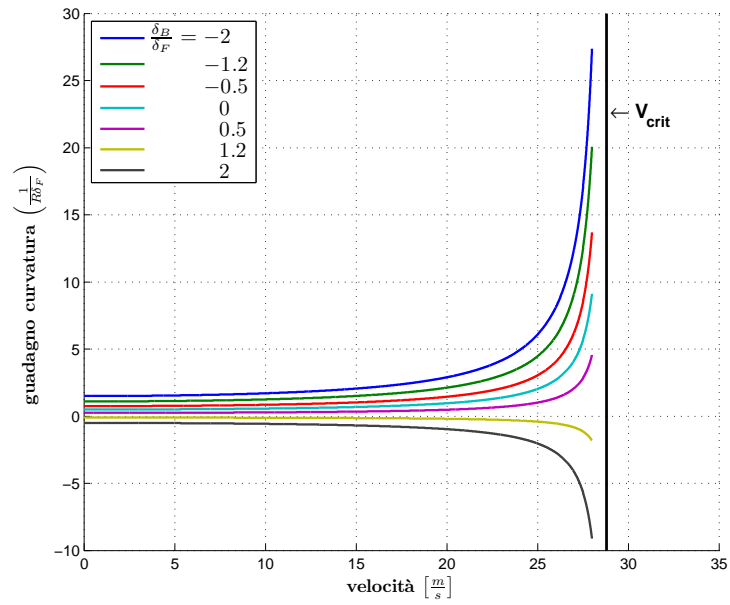
Quindi, un sistema di controllo che interviene sullo sterzo posteriore in funzione di quello anteriore con l'obiettivo di avere un determinato rapporto tra i due al variare della velocità, permette di avere un comportamento sovrasterzante o neutro su un veicolo sottosterzante e un comportamento sottosterzante o neutro su un veicolo sovrasterzante.

Tale controllabilità rimane comunque limitata ad un range di velocità, in particolare si ha che:

- (a) *Veicolo sovrasterzante*: comunque si intervenga sullo sterzo posteriore non è possibile modificare la velocità critica, che rimane una proprietà



**Figura 3.7:** Guadagno della curvatura di regime: sterzo anteriore e posteriore



**Figura 3.8:** Guadagno della curvatura di regime: sterzo anteriore e posteriore

del veicolo, e allo stesso tempo non si può evitare che il guadagno della curvatura di regime tenda all'infinito in prossimità della velocità critica.

- (b) *Veicolo sottosterzante*: anche in questo caso vi sono dei limiti, all'aumentare della velocità il guadagno tenderà a 0 qualunque sia il rapporto tra i due sterzi (fatta eccezione per il caso  $\frac{\delta_B}{\delta_F} = 1$ ).

## 3.4 Conclusioni

Nel seguente capitolo è stato introdotto un modello semplificato per lo studio della sterzata di un veicolo 4WD/4WS e di un veicolo con architettura 4WD/2WS. Sotto le ipotesi introdotte, sono state ricavate delle espressioni del raggio di curva e dello slip angle di veicolo a regime.

Successivamente è stato studiato l'andamento del guadagno della curvatura di regime, parametro significativo che esprime la risposta del veicolo ai comandi del guidatore. È stata introdotta la costante di sottosterzo e si è visto come da essa dipende il comportamento del veicolo.

Infine si sono studiati i vantaggi introdotti dallo sterzo posteriore: entro certi range di velocità lo sterzo posteriore permette di modificare la risposta di un veicolo, trasformando un veicolo con comportamento sovrasterzante in uno con comportamento sottosterzante e viceversa.

## Capitolo 4

### Velocità massima in curva

Nel capitolo precedente è stata studiata la risposta di un veicolo ad architettura completa 4WD/4WS ai comandi del guidatore e i vantaggi introdotti dallo sterzo posteriore. In questo capitolo si vuole capire quale sia la velocità massima in curva raggiungibile da un veicolo di questo tipo e gli eventuali vantaggi che si hanno rispetto ad un veicolo classico, in termini di prestazioni e/o stabilità.

In una prima parte verrà presentato un metodo per il calcolo numerico della velocità massima in curva a regime, basato sul modello completo con caratteristica di pneumatico non lineare. Uno dei vantaggi del metodo è quello di poter essere facilmente adattabile ad architetture più semplici ponendo opportuni vincoli tra le variabili di controllo.

Successivamente si confronteranno i risultati tra le varie tipologie di veicolo, in primo luogo un veicolo del tipo 4WD/2WS che ha la possibilità di dare coppia differenziale tra ruote di sinistra e ruote di destra e successivamente un veicolo di tipo FWD+RWD/FWS, in cui tale grado di libertà viene a mancare.

L'attenzione verrà, quindi, rivolta alle configurazioni multiple: data la curva di regime e l'assetto del veicolo, si vogliono calcolare le possibili combinazioni di ingressi con cui è possibile percorrerla.

Infine si valuterà l'influenza del fenomeno di trasferimento di carico sulle

prestazioni massime del veicolo in curva di regime.



## 4.1 Soluzione del problema di massimo

Quando si parla di prestazioni di veicoli è innanzitutto necessario specificare di quali si tratta (accelerazione su dritto, coppia massima alle ruote, velocità massima in curva ecc.) e in quali condizioni tali prestazioni vanno valutate. Per il problema in esame, le condizioni sotto le quali si vuole calcolare la velocità massima sono quelle di *curva a regime* con assetto (slip angle di body) assegnato. L'idea quindi è quella di sfruttare il modello di regime del veicolo.

Le ipotesi utilizzate sono due:

- Si usano gli slip angle si ruota approssimati

Ricordando che in curva a regime  $r = \frac{V}{R}$ , le espressioni della 2.12 possono essere riscritte nella seguente forma:

$$\begin{aligned}\alpha_{FL} &= \beta + \frac{L_{FL}}{R} - \delta_{FL} & \alpha_{FR} &= \beta + \frac{L_{FR}}{R} - \delta_{FR} \\ \alpha_{BL} &= \beta - \frac{L_{BL}}{R} - \delta_{BL} & \alpha_{BR} &= \beta - \frac{L_{BR}}{R} - \delta_{BR}\end{aligned}$$

in cui scompare la dipendenza dalla velocità.

- Si trascurano le dinamiche di ruota

A fronte di tale ipotesi le variabili di controllo non sono più le coppie ma gli slip longitudinali delle ruote che insieme agli sterzi e allo stato del veicolo (assegnato) permetteranno il calcolo delle forze di pneumatico.

### 4.1.1 Senza trasferimento di carico

Il modello di regime del veicolo lo si ricava facilmente dalla 2.8 ponendo le derivate uguali a 0, mentre  $F_X$ ,  $F_Y$  e  $M_Z$  hanno le stesse espressioni descritte nel Capitolo 2 e i carichi sugli pneumatici sono quelli nominali.

$$\begin{cases} 0 = -r - F_X \frac{\sin\beta}{MV} + F_Y \frac{\cos\beta}{MV} \\ 0 = M_Z \\ 0 = F_X \cos\beta + F_Y \sin\beta \end{cases} \quad (4.1)$$

La prima equazione impone il regime della dinamica laterale: le forze totali lungo gli assi di veicolo tali da rispettare l'equilibrio dello slip angle di body. La seconda equazione della 4.1 impone il regime della rotazione attorno all'asse  $Z$ : affinché la dinamica di rotazione (yaw rate) sia a regime il momento totale attorno a  $Z$  deve essere nullo mentre la terza equazione impone il regime della velocità.

Ricordando ancora una volta il legame tra yaw rate, velocità e raggio di curva, la prima equazione della 4.1 può essere scritta nella seguente forma:

$$V^2 = \frac{R}{M} (F_Y \cos \beta - F_X \sin \beta) \quad (4.2)$$

*La precedente espressione è quella principale sulla quale si basa il metodo numerico per il calcolo della velocità massima. L'algoritmo implementato, massimizza la velocità data dalla 4.2 agendo sugli otto ingressi (quattro sterzi e quattro slip) e usando la seconda e la terza equazione della 4.1 come vincoli.*

### 4.1.2 Con trasferimento di carico

Si vuole ora tener conto del trasferimento di carico, il quale a sua volta dipende dalla velocità. Le espressioni precedenti richiedono ulteriori elaborazioni per ricavare un'espressione esplicita della velocità, in quanto  $F_X$ ,  $F_Y$  e  $M_Z$  dipendono dal trasferimento di carico.

Ritornano quindi utili le espressioni della 2.17 nelle quali le forze di pneumatico sono espresse come somma di tre contributi: uno funzione del carico nominale e indipendente dalla velocità mentre gli altri due funzione del trasferimento di carico. Mettendo insieme tali espressioni (2.17) con quelle che esprimono le forze totali di veicolo ( $F_X$ ,  $F_Y$ ,  $M_Z$ ) in funzione delle forze di pneumatico (2.9 - 2.11) è possibile esprimere anche  $F_X$ ,  $F_Y$  e  $M_Z$  come somma di tre contributi, uno dovuto al carico nominale e due dovuti al trasferimento di carico.

$$\begin{aligned}
 F_X &= F_{XN} + \Delta F_{ZX} \Delta F_{X,X1} + \Delta F_{ZY} \Delta F_{X,Y1} \\
 F_Y &= F_{YN} + \Delta F_{ZX} \Delta F_{Y,X1} + \Delta F_{ZY} \Delta F_{Y,Y1} \\
 M_Z &= M_{ZN} + \Delta F_{ZX} \Delta M_{Z,X1} + \Delta F_{ZY} \Delta M_{Z,Y1}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

dove  $\Delta F_{ZX}$  e  $\Delta F_{ZY}$  rappresentano il trasferimento di carico lungo i due assi di veicolo e sono date rispettivamente dalla 2.14 e dalla 2.15.  $\Delta F_{X,X1}$ ,  $\Delta F_{Y,X1}$  e  $\Delta M_{Z,X1}$  rappresentano rispettivamente la variazione di  $F_X$ ,  $F_Y$  e  $M_Z$  dovuta ad una variazione unitaria del trasferimento di carico in direzione longitudinale mentre  $\Delta F_{X,Y1}$ ,  $\Delta F_{Y,Y1}$  e  $\Delta M_{Z,Y1}$  rappresentano le variazioni dovute ad una variazione unitaria del trasferimento di carico in direzione trasversale.

*Le espressioni complete di  $\Delta F_{X,X1}$ ,  $\Delta F_{Y,X1}$ ,  $\Delta M_{Z,X1}$  e  $\Delta F_{X,Y1}$ ,  $\Delta F_{Y,Y1}$ ,  $\Delta M_{Z,Y1}$  sono riportate A.2.*

A questo punto si ricordano le espressioni delle componenti del trasferimento di carico calcolate nel Capitolo 2:

$$\begin{aligned}
 \Delta F_{ZX} &= \frac{-Mh \frac{V^2}{R} \sin(\beta)}{L_F + L_B} + \frac{F_{ZN} (L_F - L_B)}{L_F + L_B} \\
 \Delta F_{ZY} &= \frac{Mh \frac{V^2}{R} \cos(\beta)}{L_L + L_R} + \frac{F_{ZN} (L_L - L_R)}{L_L + L_R}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Quindi, sfruttando il legame lineare tra forze di veicolo e trasferimento di carico, le espressioni della 4.3 e le espressioni della 4.4, è possibile rielaborare la prima equazione del modello di regime (4.1) per ottenere un'espressione esplicita della velocità.

$$V^2 = \frac{R}{M} \left[ \frac{\cos\beta (F_{YN} + K_{ZX}\Delta F_{Y,X1} + K_{ZY}\Delta F_{Y,Y1})}{1 + h \left( \frac{\Delta F_{X,Y1}\cos\beta\sin\beta}{L_R+L_L} - \frac{\Delta F_{X,X1}\sin^2\beta}{L_F+L_B} + \frac{\Delta F_{Y,X1}\cos\beta\sin\beta}{L_F+L_B} - \frac{\Delta F_{Y,Y1}\cos^2\beta}{L_R+L_L} \right)} - \frac{\sin\beta (F_{XN} + K_{ZX}\Delta F_{X,X1} + K_{ZY}\Delta F_{X,Y1})}{1 + h \left( \frac{\Delta F_{X,Y1}\cos\beta\sin\beta}{L_R+L_L} - \frac{\Delta F_{X,X1}\sin^2\beta}{L_F+L_B} + \frac{\Delta F_{Y,X1}\cos\beta\sin\beta}{L_F+L_B} - \frac{\Delta F_{Y,Y1}\cos^2\beta}{L_R+L_L} \right)} \right] \quad (4.5)$$

Dove  $K_{ZX}$  e  $K_{ZY}$  sono dei termini costanti e rappresentano il trasferimento di carico dovuto alla distribuzione di massa (nulli per un veicolo equilibrato)

$$K_{ZX} = F_{ZN} \frac{L_F - L_B}{L_F + L_B}$$

$$K_{ZY} = F_{ZN} \frac{L_L - L_R}{L_L + L_R}$$

La 4.5 è quindi l'espressione da massimizzare mentre le rimanenti due equazioni del modello di regime sono da usare come vincoli in cui le espressioni di  $F_X$ ,  $F_Y$  e  $M_Z$  tengono conto del trasferimento di carico.

Il metodo qui presentato è facilmente adattabile ad architetture più semplici ponendo dei vincoli sulle variabili di controllo, che si vanno ad aggiungere a quelli imposti dal modello di regime.

- Veicolo 4WD/2WS: è necessario imporre che gli sterzi delle ruote posteriori siano nulli.

$$\delta_i = 0 \quad i = BL, BR$$

- Veicolo FWD+RWD/FWS: oltre al vincolo di sterzi del posteriore nulli, è necessario imporre che gli slip destri siano uguali a quelli sinistri in modo da eliminare la possibilità di avere coppie differenziali sulle ruote.

$$\lambda_{FL} = \lambda_{FR} \quad \lambda_{BL} = \lambda_{BR}$$

Il metodo è stato implementato in ambiente Matlab e tra le funzioni messe a disposizione si è deciso di usare la funzione *fmincon* (contenuta nella libreria *Optimization Toolbox*), la quale permette di specificare facilmente i vincoli tra le variabili di controllo e quelli introdotti dal modello di regime ed inoltre può essere integrata con la libreria *Global Optimization Toolbox* che mette a disposizione funzioni per la ricerca globale del massimo. [4] e [5] sono due dei riferimenti sui quali si basa l'implementazione della *fmincon*.

Nelle sezioni successive verrà applicato il metodo presentato alle architetture proposte. Il confronto verrà effettuato mantenendo costante il raggio di curva e verrà calcolata la velocità massima raggiungibile a regime dal veicolo in esame, per diversi slip angle di body. Il raggio di curva scelto nei confronti che verranno successivamente è di  $30m$  e lo yaw rate corrispondente sarà positivo con le convenzioni scelte, quelle di Figura 2.16.

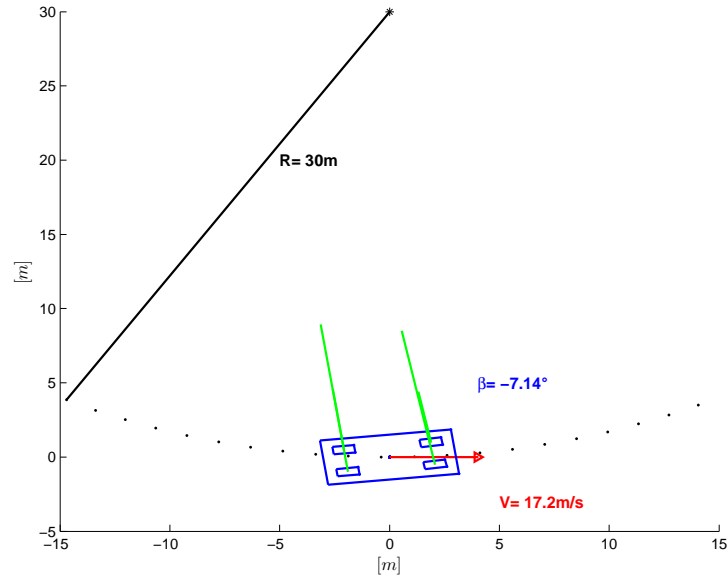
Come si vedrà in seguito, per i veicoli con solo sterzo anteriore il calcolo si limiterà a slip angle di body negativi. In assenza di sterzo, gli slip angle delle ruote posteriori sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\alpha_i = \beta - \frac{L_i}{R} \approx \beta \quad i = BL, BR$$

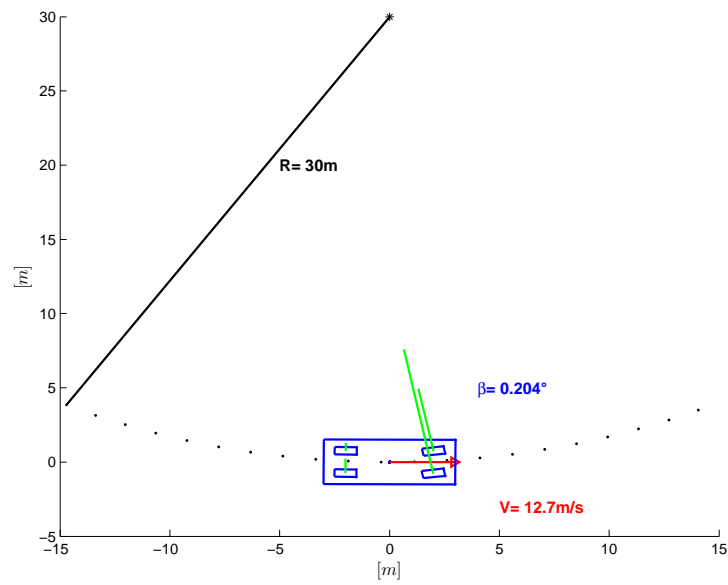
L'approssimazione fatta è accettabile perché ad alte velocità il raggio della curva percorsa è decisamente maggiore delle dimensioni del veicolo.

In queste condizioni, uno slip angle di body positivo comporta degli slip angle di ruota positivi e delle forze di pneumatico dirette in direzione opposta alla convenzione scelta. Questo comporterebbe la perdita di aderenza delle ruote posteriori.

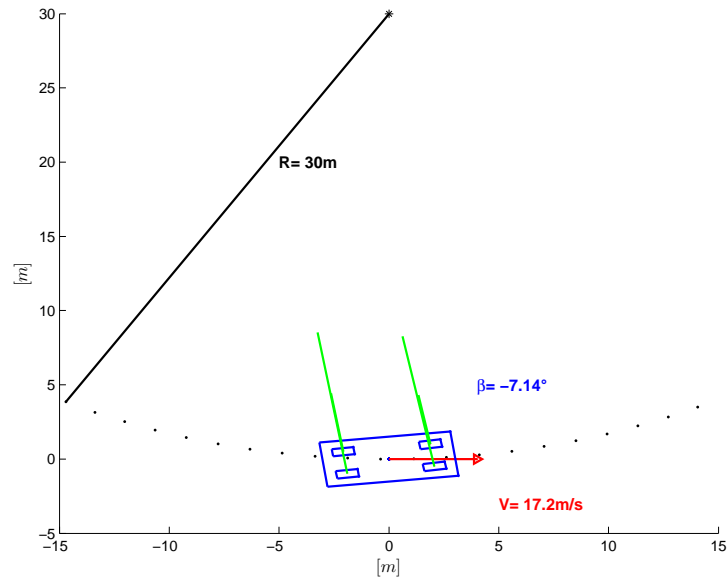
Graficamente tale aspetto può essere osservato in Figura 4.1 e in Figura 4.2, estratte da un animatore realizzato in ambiente Matlab. Le figure mostrano il veicolo 4WD/2WS percorrente una curva con raggio di  $30m$  a regime con due diversi assetti, il primo con un angolo di deriva di veicolo rilevante e il secondo con un angolo di deriva prossimo allo zero in cui le forze trasversali delle ruote posteriori sono pressoché nulle.



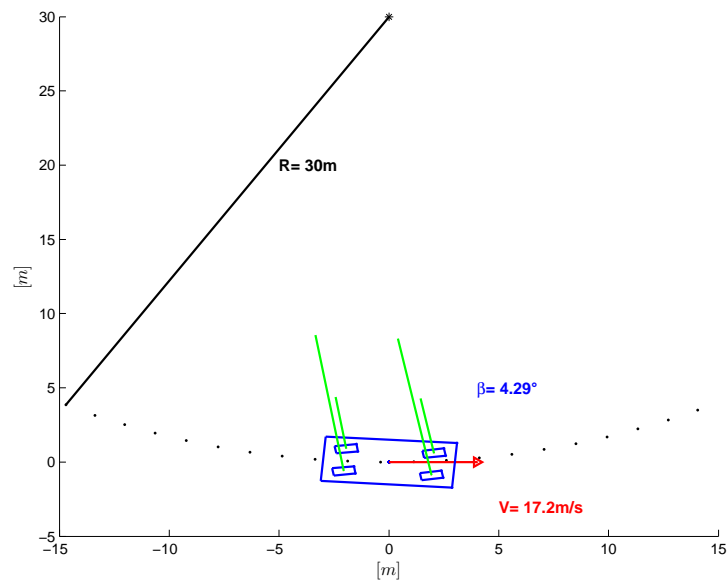
**Figura 4.1:** Forze trasversali del 4WD/2WS: slip angle di body rilevante



**Figura 4.2:** Forze trasversali del 4WD/2WS: slip angle di body piccolo



**Figura 4.3:** Forze trasversali del 4WD/4WS: slip angle di body negativo



**Figura 4.4:** Forze trasversali del 4WD/4WS: slip angle di body positivo

Diversa è la situazione per il veicolo 4WD/4WS, dove lo sterzo delle ruote posteriori permette di avere degli slip angle di ruota negativi anche in presenza di slip angle di body positivi, come si può osservare nella Figura 4.3 e nella Figura 4.4.

I risultati mostrano inoltre che le ruote esterne alla curva esercitano delle forze maggiori a causa del carico più grande a cui sono sottoposte, come previsto dal modello di trasferimento di carico.

*Per entrambi i veicoli sono state omesse le forze longitudinali e sono stati ingranditi i veicoli al fine di rendere i risultati più leggibili.*

***Nei confronti a venire si farà uso dell'algoritmo di calcolo della velocità massima che tiene conto del trasferimento di carico.***

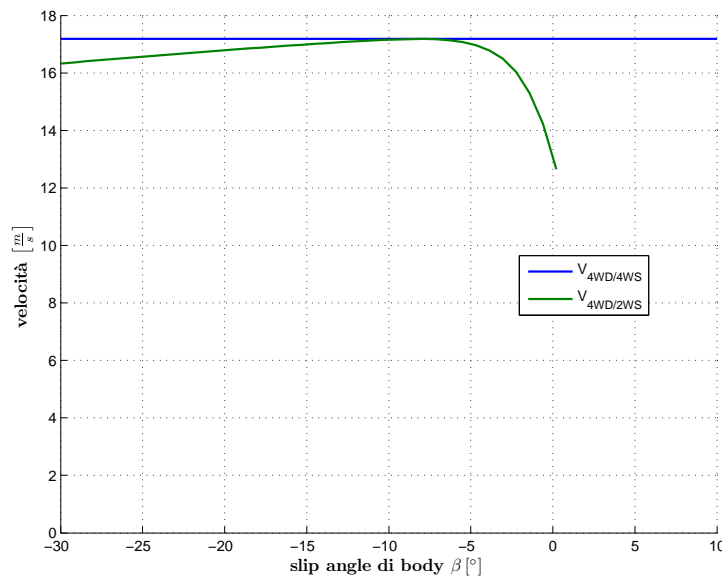


## 4.2 Confronto tra 4WD/4WS e 4WD/2WS

Il primo confronto è quello tra un veicolo 4WD/4WS e 4WD/2WS. Ricapitolando le variabili di controllo sulle quali l'algoritmo andrà ad intervenire sono:

- Veicolo 4WD/4WS: *otto variabili di controllo*
  - (a) 4 slip longitudinali indipendenti tra loro
  - (b) 4 angoli di sterzo indipendenti tra loro
- Veicolo 4WD/2WS: *sei variabili di controllo*
  - (a) 4 slip longitudinali indipendenti tra loro
  - (b) angolo di sterzo della ruota Front-Left
  - (c) angolo di sterzo della ruota Front-Right

Nella Figura 4.5 si può notare la velocità massima del veicolo calcolata per diversi slip angle di body con l'algoritmo presentato.



**Figura 4.5:** Velocità massima in curva: 4WD/4WS vs 4WD/2WS

L'andamento della velocità mostra due aspetti fondamentali.

Innanzitutto il risultato è in linea con quanto ricavato nel Capitolo 3, dove si è dimostrato (sul modello semplificato a bicicletta) come la presenza dello sterzo posteriore permette di controllare indipendentemente slip angle di body e raggio di curva, fissata la velocità. In questo caso il raggio di curva è fisso, quindi velocità e slip angle di body per un veicolo 4WD/4WS possono essere controllati indipendentemente, facendo sì che per tale veicolo la velocità massima raggiungibile in curva di regime sia indipendente dallo slip angle di body assunto, ma dipenda essenzialmente dalle proprietà degli pneumatici.

In secondo luogo si nota come un veicolo con solo sterzo anteriore può comunque raggiungere la medesima velocità massima raggiungibile con un veicolo con sterzi sull'anteriore e sul posteriore. Per un veicolo 4WD/2WS tale velocità è raggiungibile solo in corrispondenza di un determinato slip angle di body. *Tale angolo corrisponde all'angolo in cui la caratteristica di pneumatico presenta forza trasversale massima.*

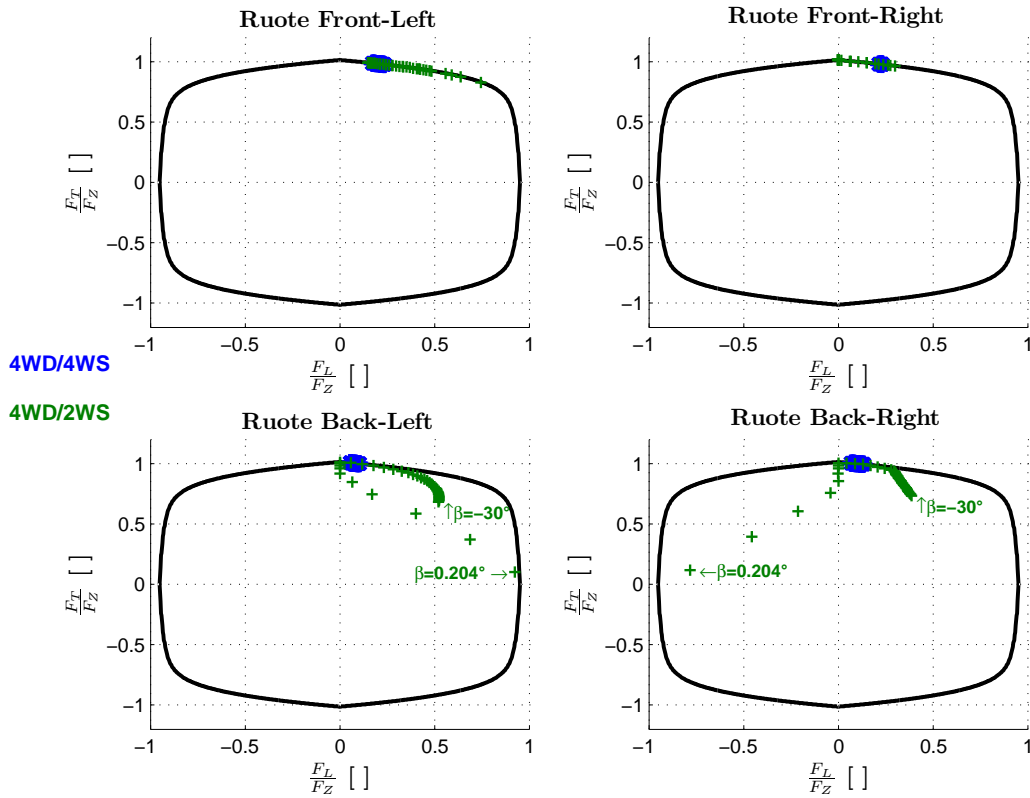
In termini di prestazioni, le differenze tra le due architetture possono essere colmate da un guidatore sufficientemente bravo, che sia in grado di mantenere lo slip angle del veicolo in corrispondenza del picco della caratteristica di pneumatico.

La Figura 4.6 mostra come vengono sfruttati gli pneumatici, ovvero quale combinazione  $F_L - F_T$  permette di avere la velocità massima nei vari slip angle di body considerati. L'andamento di Figura 4.5 rappresenta una curva di punti di equilibrio del sistema. Per ognuno di questi equilibri, in Figura 4.6 vengono mostrate la forza longitudinale normalizzata e la forza trasversale normalizzata generate dagli pneumatici.

Il vantaggio introdotto dallo sterzo posteriore consiste nel fatto che esso permette di poter controllare gli slip angle delle ruote posteriori indipendentemente dallo slip angle di body, mantenendoli in corrispondenza della forza trasversale massima.

Nel veicolo con solo sterzo anteriore lo slip angle delle ruote posteriori se-

gue quello di body e quando quest'ultimo arriva a zero la forza trasversale generata dalle ruote posteriori tende a zero secondo la caratteristica di pneumatico. Per le ruote anteriori, avendo a disposizione lo sterzo come variabile di controllo è possibile mantenersi ad alte forze trasversali per qualsiasi slip angle di veicolo.



**Figura 4.6:** Ellissi di pneumatico: 4WD/4WS vs 4WD/2WS

La Figura 4.7 e la Figura 4.8 mostrano l'andamento degli slip angle di ruota, concorde con le considerazioni menzionate prima.

La Figura 4.9 e la Figura 4.10 mostrano gli angoli di sterzo necessari per ottenere gli slip angle di ruota fissi sul picco della caratteristica di pneumatico. La differenza tra gli angoli di sterzo dell'anteriore e angoli di sterzo del posteriore è necessaria ad avere il raggio di curva di regime (imposto) e anche questo risultato è in linea con quelli ottenuti nel Capitolo 3 dove si è mostrato che il raggio di curva di regime (dato dal modello a bicicletta) dipende dalla

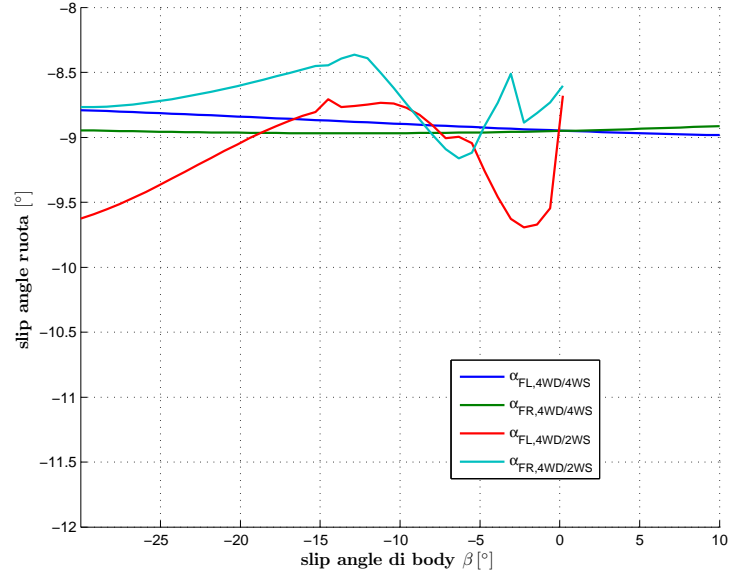


Figura 4.7: Slip angle ruote anteriori

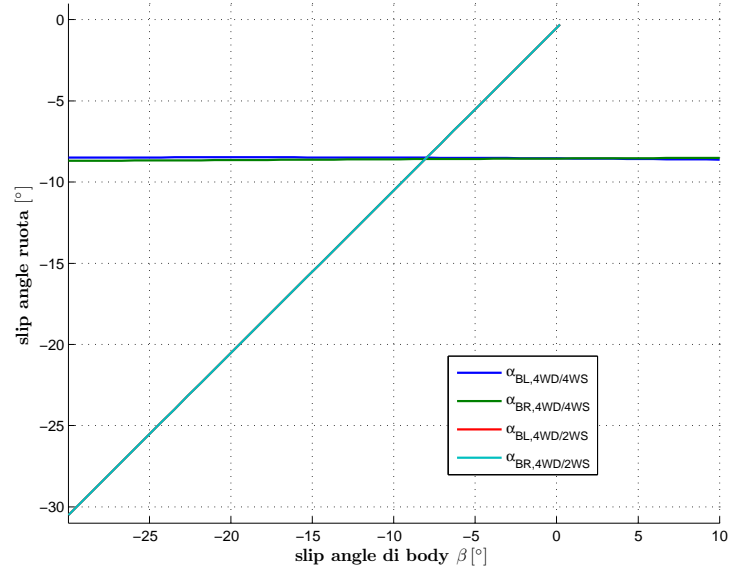
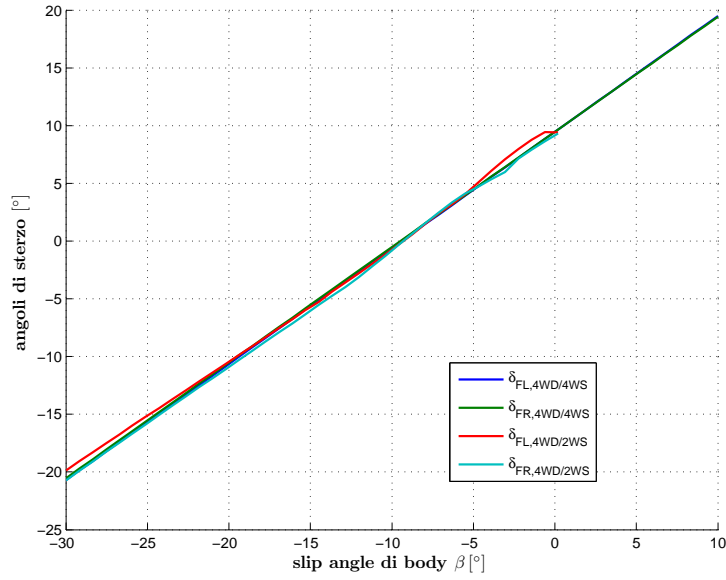
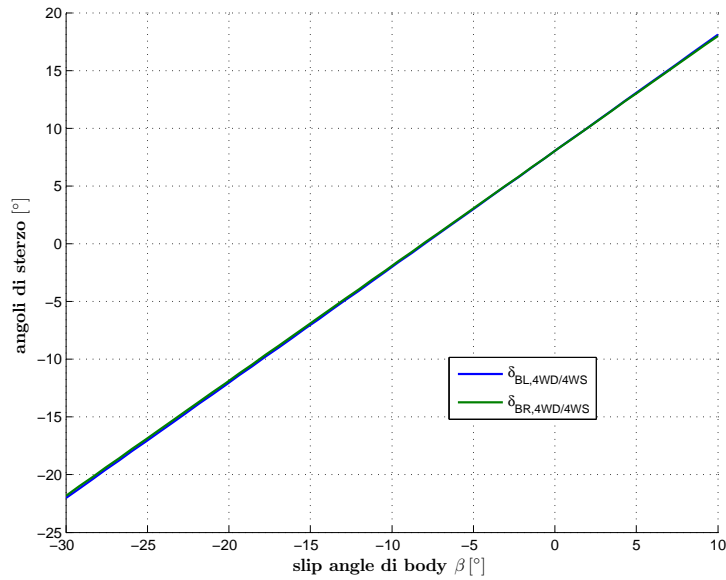


Figura 4.8: Slip angle ruote posteriori

differenza tra l'angolo sterzo anteriore e l'angolo di sterzo posteriore.



**Figura 4.9:** Angoli di sterzo delle ruote anteriori

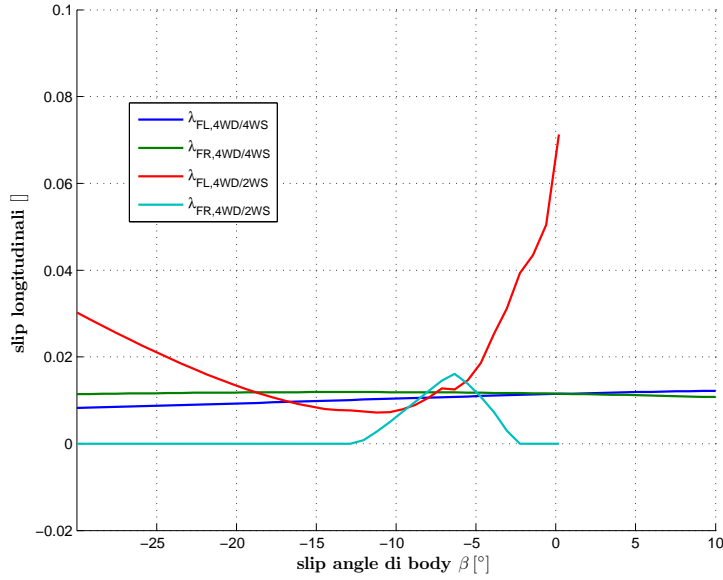


**Figura 4.10:** Angoli di sterzo delle ruote posteriori

Inoltre, l'andamento degli sterzi mostra che, per un veicolo 4WD/4WS, l'algoritmo non sfrutta affatto la possibilità di avere sterzi diversi tra ruote di

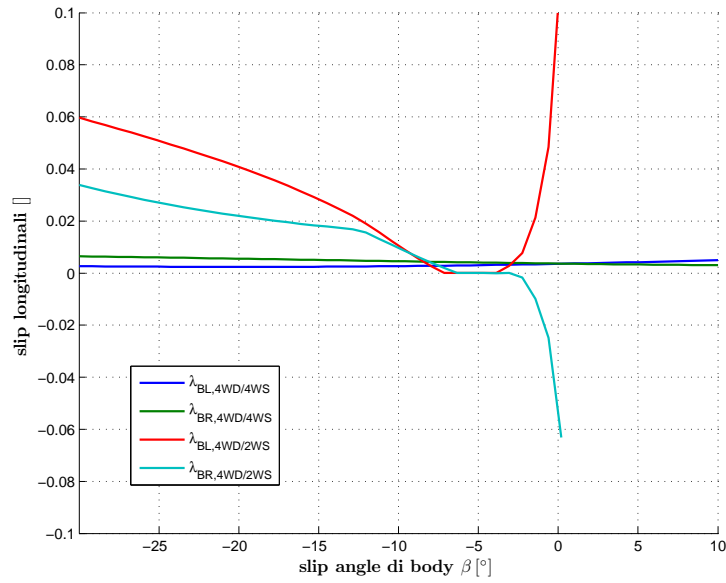
sinistra e di destra. In particolare lo sterzo della ruota Front-Left coincide con quello della ruota Front-Right per ogni slip angle di body considerato ( $\delta_{FL} = \delta_{FR}$ ) e lo sterzo della ruota Back-Left coincide con quello della ruota Back-Right ( $\delta_{BL} = \delta_{BR}$ ). Ai fini delle prestazioni massime in curva quindi questo grado di libertà aggiuntivo è del tutto irrilevante.

Per quanto riguarda gli slip longitudinali delle ruote, il loro andamento è mostrato nella Figura 4.11 e nella Figura 4.12. Gli slip sono tali da mantenere costante la velocità e compensare la decelerazione che si ha in fase di sterzata.



**Figura 4.11:** Slip longitudinali delle ruote anteriori

Va notato inoltre che, per il veicolo 4WD/2WS, l'algoritmo sceglie gli slip in modo da avere delle forze longitudinali differenziali tra ruote di destra e di sinistra (generando un momento attorno all'asse  $Z$ ), quando lo slip angle di body si allontana da quello ottimo. Quando le ruote posteriori del 4WD/2WS perdono aderenza, a causa dello slip angle di veicolo, il momento totale attorno all'asse  $Z$  ( $M_Z$ ) tende ad essere maggiore di zero. Per questo motivo il momento dovuto agli slip longitudinali scelti dall'algoritmo è minore di zero (slip ruote di sinistra maggiore dello slip delle ruote di destra). In questa ma-



**Figura 4.12:** Slip longitudinali delle ruote posteriori

nera si compensa la perdita di aderenza delle ruote posteriori e si rispetta il vincolo imposto dal regime della rotazione.

### 4.3 Confronto tra 4WD/4WS e FWD+RWD/FWS

Si affronta ora il confronto tra un veicolo completo e un veicolo in cui manca la possibilità di fornire coppia differenziale tra ruote di destra e di sinistra. Inoltre, si elimina la possibilità di avere sterzi diversi tra le ruote anteriori. La scelta di tale architettura non è casuale, essa è molto simile all'architettura della maggior parte dei veicoli consumer in circolazione. Il differenziale attivo, componente che permette di avere coppia diversa tra ruote di destra e di sinistra, è tipicamente presente solo nei veicoli di fascia alta.

Ricapitolando, le variabili di controllo a disposizione per le due architetture sono:

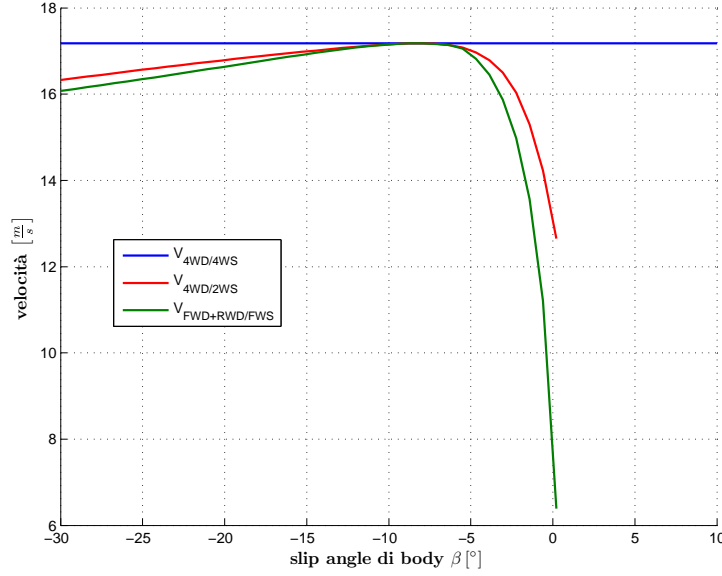
- Veicolo 4WD/4WS: *otto variabili di controllo*
  - (a) 4 slip longitudinali indipendenti tra loro
  - (b) 4 angoli di sterzo indipendenti tra loro
- Veicolo FWD+RWD/FWS: *tre variabili di controllo*
  - (a) angolo di sterzo delle ruote anteriori
  - (b) slip longitudinale uguale per le ruote anteriori
  - (c) slip longitudinale uguale per le ruote posteriori

*Da qui in avanti, con la sigla FWS si farà riferimento al veicolo FWD+RWD/FWS.*

Partendo con la velocità massima in curva, la Figura 4.13 mostra il risultato di un veicolo FWS messo a confronto con quello di un veicolo 4WD/4WS e di un veicolo 4WD/2WS. L'impossibilità di avere coppie differenziali tra ruote di destra e di sinistra penalizza il veicolo FWS rispetto ad un veicolo 4WD/2WS, soprattutto per bassi slip angle di body, tratto in cui tale possibilità viene maggiormente sfruttata dall'algoritmo.



Anche in questo caso l'andamento mostra che la bravura del conducente permetterebbe di raggiungere la medesima velocità massima raggiungibile dalle altre due architetture.



**Figura 4.13:** Velocità massima in curva: confronto fra le tre architetture

Osservando lo sfruttamento degli pneumatici scelto dall'algoritmo nella Figura 4.14, si nota la mancanza di coppia differenziale sulle ruote. È interessante osservare come, per slip angle di body piccoli, l'algoritmo pone a zero gli slip delle ruote posteriori. L'aspetto critico in curva è proprio la forza trasversale delle ruote posteriori, chiedere forze longitudinali significa ridurre tale forza e siccome non si possono dare coppie differenziali la scelta migliore la si ottiene ponendo slip longitudinali posteriori nulli. In questo modo il regime della dinamica longitudinale è rispettato agendo solo sugli pneumatici anteriori. Tale andamento è chiaramente visibile anche nella Figura 4.16.

Per quanto riguarda gli slip angle di ruota (Figura 4.17 e Figura 4.18), le differenze del veicolo FWS con il veicolo 4WD/2WS si notano sulle ruote anteriori, mentre gli slip angle delle ruote posteriori seguono lo slip angle di body. In particolare per piccoli slip angle di body l'algoritmo limita la forza laterale delle ruote anteriori per rispettare il regime di rotazione del veicolo.

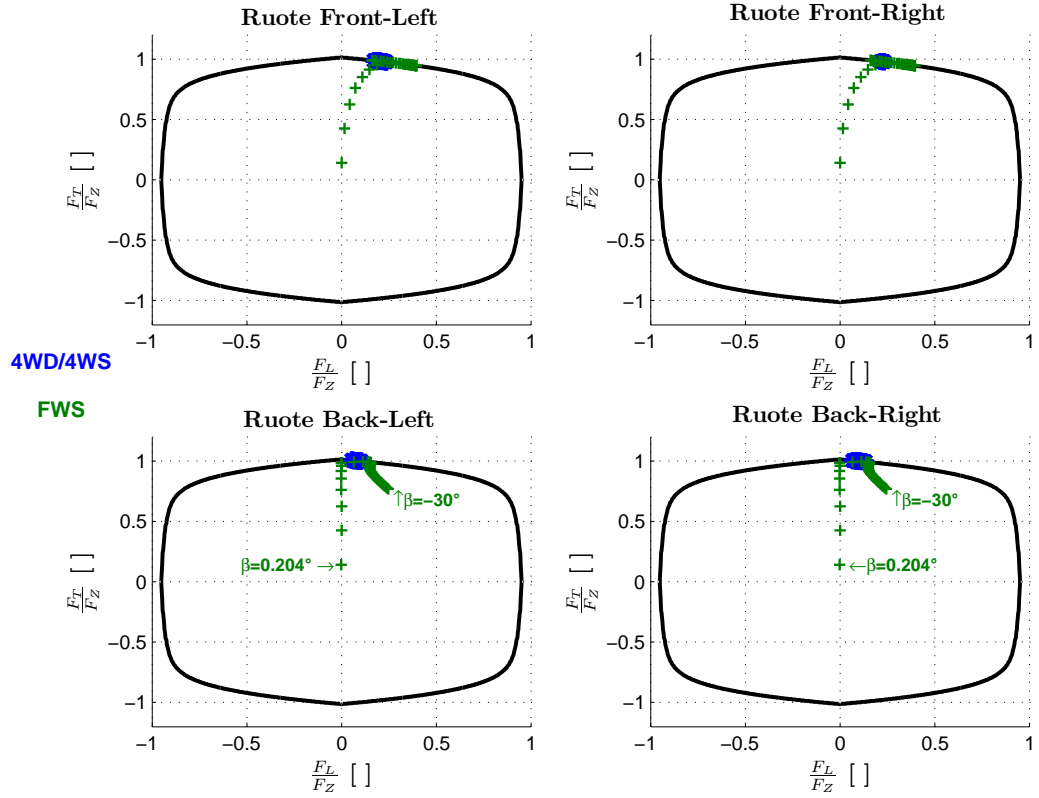


Figura 4.14: Ellissi di pneumatico: 4WD/4WS vs FWS

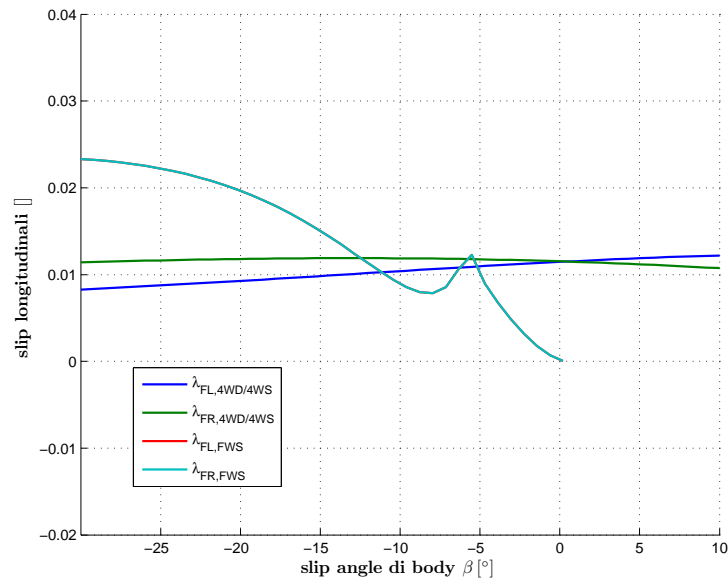
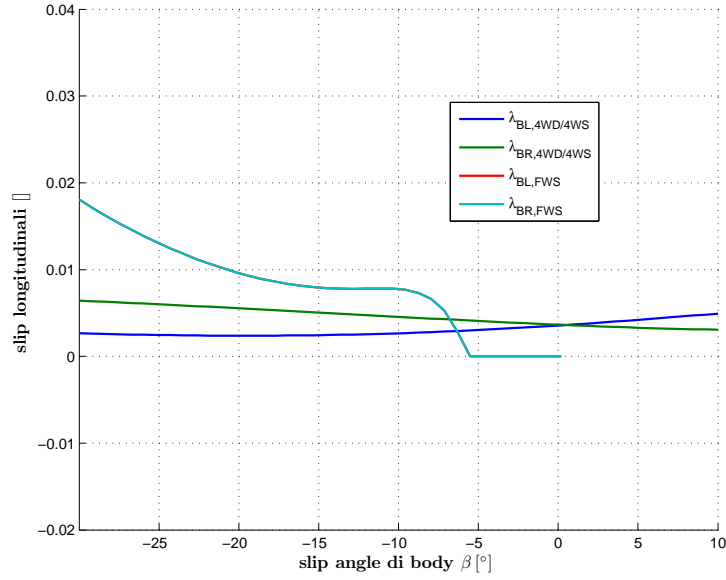
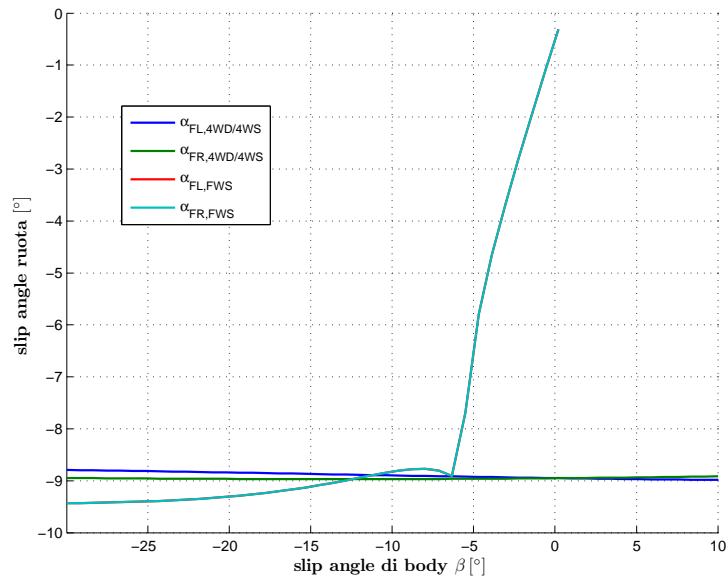


Figura 4.15: Slip longitudinali delle ruote anteriori

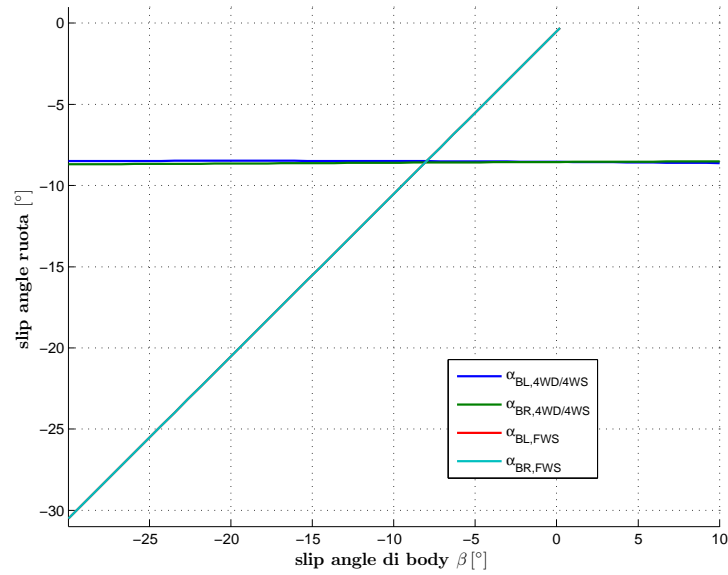


**Figura 4.16:** Slip longitudinali delle ruote posteriori

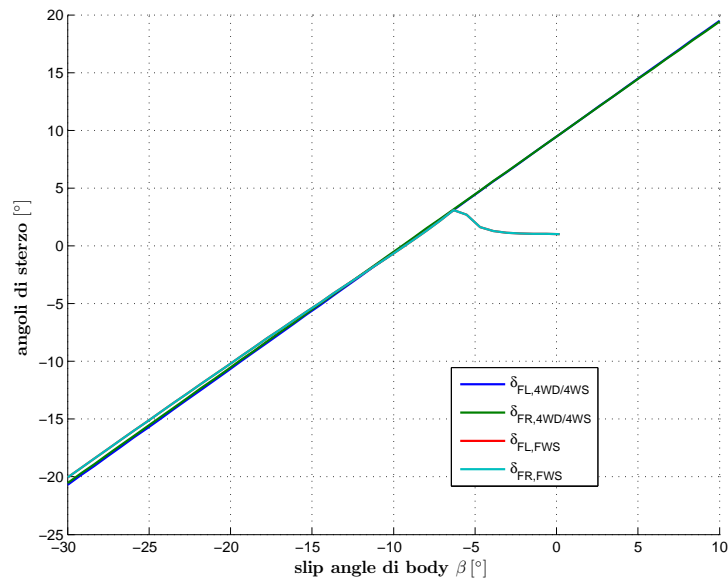
Infine, lo sterzo delle ruote anteriori è mostrato in Figura 4.19, mentre l'andamento dello sterzo delle ruote posteriori del veicolo 4WD/4WS coincide con quello presentato in 4.2.



**Figura 4.17:** Slip angle delle ruote anteriori



**Figura 4.18:** Slip angle delle ruote posteriori



**Figura 4.19:** Angoli di sterzo delle ruote anteriori

## 4.4 Stabilità alla velocità massima

I risultati di 4.2 e 4.3 hanno mostrato che un veicolo con solo sterzo anteriore può raggiungere le stesse prestazioni massime di un veicolo con quattro ruote sterzanti indipendenti, se controllato adeguatamente.

Si vuole ora capire se la presenza dello sterzo posteriore introduce dei vantaggi sul fronte della stabilità. Per fare ciò si studierà la stabilità degli equilibri a velocità massima, studiando la stabilità del modello linearizzato.

Il modello di veicolo dato dalla 2.8, considerando anche i modelli di pneumatico, è del tipo:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (4.6)$$

con  $x$  (vettore di stato) e  $u$  (vettore degli ingressi) definiti dalle seguenti:

$$x = \begin{bmatrix} \beta & r & V \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} \lambda_{FL} & \lambda_{FR} & \lambda_{BL} & \lambda_{BR} & \delta_{FL} & \delta_{FR} & \delta_{BL} & \delta_{BR} \end{bmatrix}$$

Quindi il modello linearizzato è dato da:

$$\delta \dot{x}(t) = [A] \delta x(t) + [B] \delta u(t)$$

in cui le matrici  $A$  e  $B$  sono definite nella consueta maniera:

$$A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \quad B = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}$$

Dalla teoria dei sistemi è risaputo che la stabilità e l'instabilità del sistema linearizzato dipendono dagli autovalori della matrice  $A$  e implicano rispettivamente la stabilità e l'instabilità del sistema non lineare.

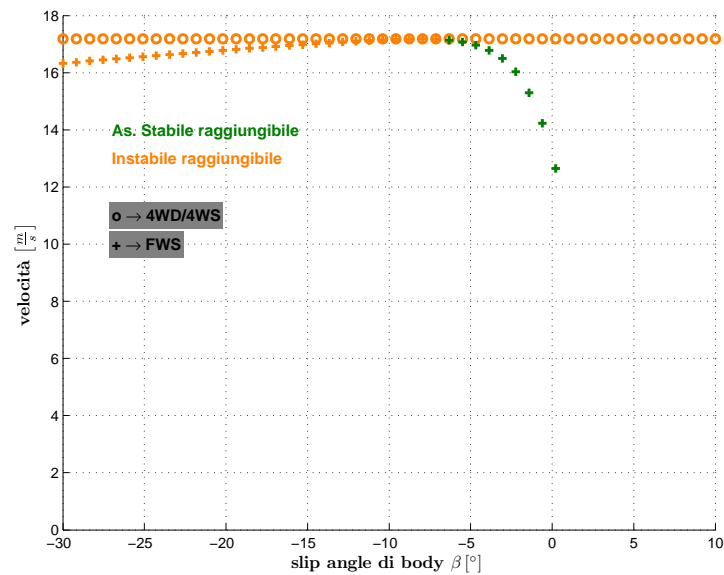
La proprietà di raggiungibilità di un dato equilibrio ci permette di concludere che è possibile portare il veicolo da uno stato iniziale nullo (veicolo fermo) allo stato di equilibrio considerato (curva e assetto di equilibrio) mediante un

opportuna scelta degli ingressi. Essa può essere valutata mediante il rango della matrice di raggiungibilità (la raggiungibilità implica la controllabilità) definita come:

$$M_r = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Se il rango di  $M_r$  è uguale a  $n$  (dimensione dello spazio di stato) la proprietà è verificata. In ambiente Matlab la matrice di raggiungibilità è calcolabile mediante la funzione *ctrb*.

La Figura 4.20 mostra i risultati dello studio di stabilità applicato ai punti di equilibrio presentati nel confronto tra 4WD/4WS e 4WD/2WS, il raggio di curva è costante pari a  $30m$ , lo slip angle di body varia nel range  $[-30^\circ, 10^\circ]$  e la velocità è quella massima calcolata nel confronto.

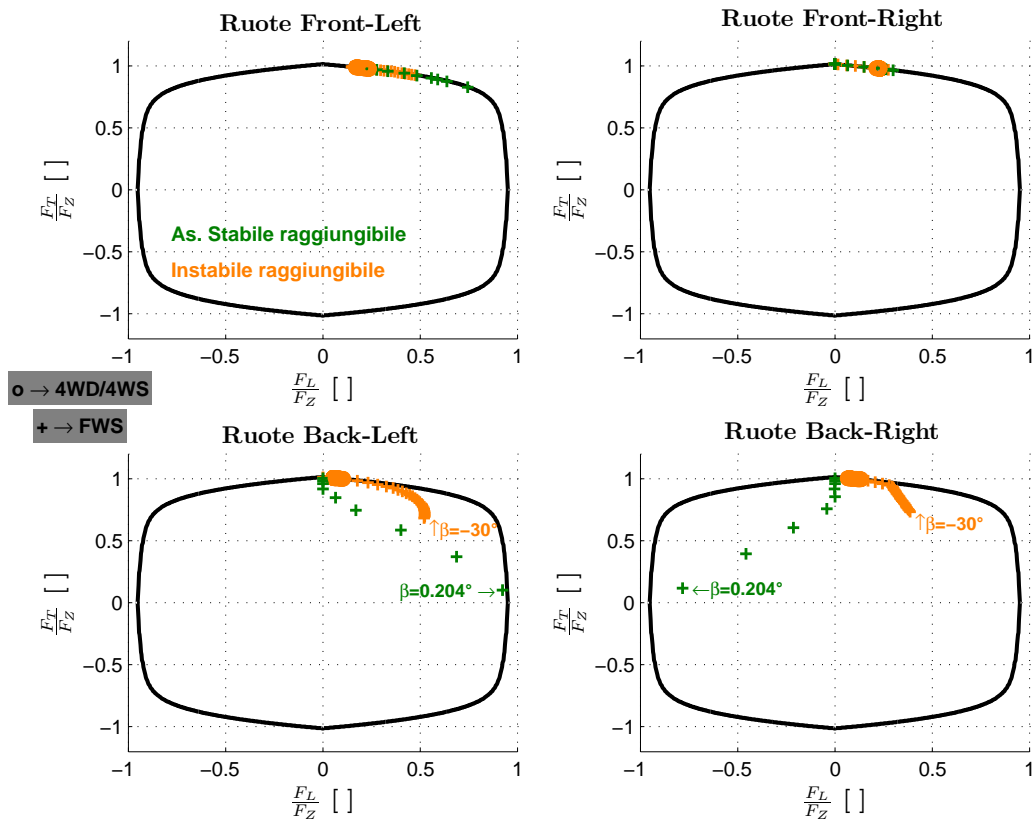


**Figura 4.20:** Stabilità equilibri a velocità massima

I risultati mostrano innanzitutto che tutti gli equilibri a velocità massima sono raggiungibili.

Per quanto riguarda il veicolo 4WD/2WS, esso presenta un comportamento asintoticamente stabile per bassi slip angle di body (minori del picco della

caratteristica di pneumatico) e instabile altrove. La stabilità è mantenuta fino in prossimità della velocità massima e ciò indica che la velocità massima raggiungibile può essere raggiunta conservando la stabilità e la raggiungibilità del veicolo. Tali risultati sono visualizzati anche sugli ellissi di pneumatico in Figura 4.21.



**Figura 4.21:** Ellissi di pneumatico: stabilità a velocità massima

È, inoltre, interessante osservare come variano i poli e gli zeri del sistema al variare dello slip angle di body. Dalla Figura 4.22 si possono ottenere le seguenti considerazioni:

- (a) *Dinamica longitudinale:* il polo della dinamica longitudinale permane in prossimità dell'origine per qualsiasi slip angle di body. Questo avviene sia per il veicolo 4WD/4WS che per quello 4WD/2WS. In prima approssimazione l'accelerazione del veicolo è data dalla somma delle forze

longitudinali, le quali, se si trascura l'accoppiamento tra slip e slip angle di pneumatico, dipendendo dallo slip longitudinale. Per questo motivo la FdT dagli slip longitudinali alla velocità è data da un integratore, mentre l'effetto degli sterzi è trascurabile.

- (b) *Poli del veicolo 4WD/4WS*: i poli del sistema che rappresenta il veicolo 4WD/4WS rimangono invariati al variare dello slip angle e così anche le proprietà di stabilità del veicolo. Osservando con più attenzione gli ellissi di pneumatico si nota che anche la combinazione  $F_L - F_T$  degli pneumatici non varia con lo slip angle.

*Questo ci porta alla conclusione che le proprietà di stabilità di un veicolo dipendono essenzialmente dalle proprietà dei suoi pneumatici e da come essi vengono sfruttati.*

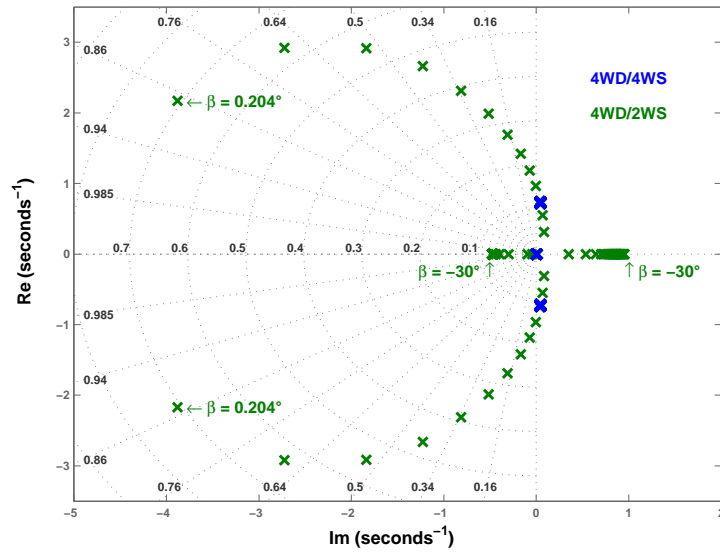
- (c) *Dinamica laterale e di rotazione del 4WD/2WS*: i poli di tali dinamiche partono da un comportamento instabile per  $\beta = -30^\circ$  (uno reale negativo e l'altro reale positivo) per arrivare ad essere complessi coniugati con parte reale negativa per piccoli slip angle di body. Quando lo slip angle di body si avvicina a quello a velocità massima, il punto di utilizzo degli pneumatici del 4WD/2WS si avvicina a quello del veicolo 4WD/4WS e allo stesso tempo i poli del 4WD/2WS si avvicinano a quelli del 4WD/4WS. Questa è un'ulteriore conferma del fatto che le proprietà di stabilità del veicolo sono strettamente legate ai suoi pneumatici.

Va, inoltre, detto che nella forma considerata (avendo trascurato le dinamiche di ruota) il sistema non presenta zeri invarianti.

Infine tali risultati possono essere verificati anche in simulazione. La Figura 4.23 e la Figura 4.24 mostrano le simulazioni dei due veicoli, ciascuno in due equilibri, uno con slip angle di body rilevante e uno con slip angle piccolo, inferiore al picco della caratteristica. I veicoli vengono disturbati al tempo  $t = 1s$  mediante uno scalino sullo sterzo della ruota Front-Left.

Il veicolo 4WD/4WS (Figura 4.23) mostra in entrambi i casi un compor-





**Figura 4.22:** Stabilità a velocità massima: poli e zeri

tamento oscillante in linea con quanto visto nella mappa delle singolarità, mentre il veicolo 4WD/2WS (Figura 4.24) cambia il suo comportamento da instabile a stabile.

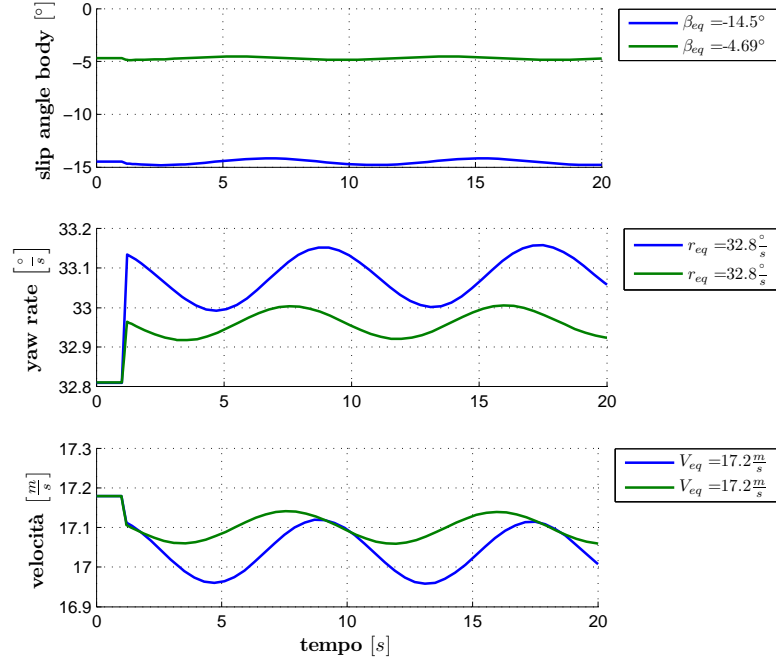


Figura 4.23: Veicolo 4WD/4WS: risposta ai disturbi

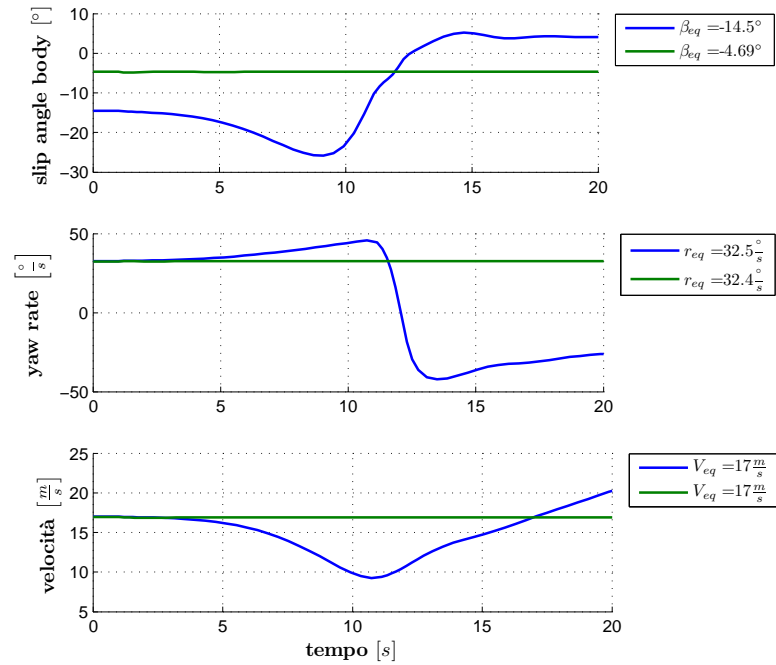


Figura 4.24: Veicolo 4WD/2WS: risposta ai disturbi

## 4.5 Configurazioni multiple

La molteplicità delle variabili di controllo, presenti in un veicolo 4WD/4WS, porta a pensare che uno stesso assetto possa essere ottenuto con diverse combinazioni degli ingressi. Ovviamente la soluzione non può essere trovata risolvendo il modello di regime, ma verranno eseguiti i passaggi di seguito decritti:

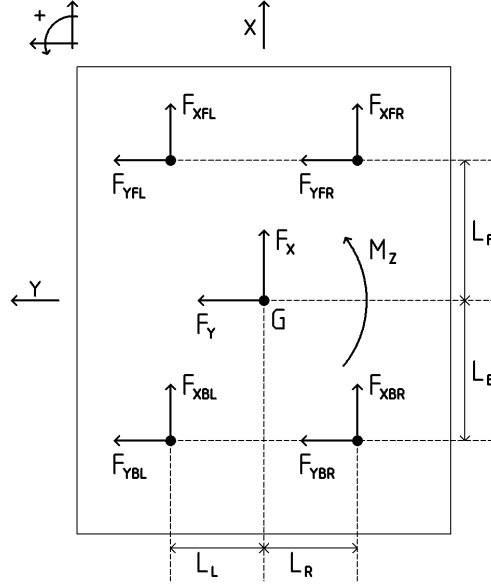
- (a) Dal modello di veicolo si osserva innanzitutto che fissato l'assetto di regime (velocità, slip angle di body, e raggio di curva) le corrispondenti  $F_X$ ,  $F_y$  e  $M_Z$  sono univocamente determinati. In particolare  $M_Z$  è nullo per qualsiasi stato di regime.
- (b) Il legame tra le forze di veicolo ( $F_X$ ,  $F_y$ ,  $M_Z$ ) e le forze agenti ai centri ruota è lineare e può essere riscritto in forma matriciale. Invertendo tale legame è possibile calcolare tre delle otto forze ai centri ruota dati  $F_X$ ,  $F_y$ ,  $M_Z$  e le restanti cinque forze.  
*Le restanti cinque forze verranno scelte su una griglia*
- (c) Calcolate le forze ai centri ruota, che permettono di mantenere l'equilibrio assegnato, il calcolo degli ingressi alle ruote corrispondenti (slip longitudinale e angolo di sterzo), è determinato dalla 2.9.

### 4.5.1 Legame tra forze ai centri ruota e forze di veicolo

La Figura 4.25 mostra lo schema del veicolo 4WD/4WS, mettendo in evidenza le forze ai centri ruota.

Riprendendo quanto scritto nel Capitolo 2,  $F_X$ ,  $F_y$  e  $M_Z$  sono date dalle seguenti:

$$\begin{aligned}
 F_X &= F_{XFL} + F_{XFR} + F_{XBL} + F_{XBR} \\
 F_Y &= F_{YFL} + F_{YFR} + F_{YBL} + F_{YBR} \\
 M_Z &= L_F (F_{YFL} + F_{YFR}) + L_R (F_{XFR} + F_{XBR}) \\
 &\quad - L_B (F_{YBL} + F_{YBR}) - L_L (F_{XFL} + F_{XBL})
 \end{aligned} \tag{4.7}$$



**Figura 4.25:** Configurazioni multiple: forze ai centri ruota

La 4.7 può essere in una forma matriciale nella seguente maniera:

$$\begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -L_L & L_F & L_R & L_F & -L_L & -L_B & L_R & -L_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{XFL} \\ F_{YFL} \\ F_{XFR} \\ F_{YFR} \\ F_{XBL} \\ F_{YBL} \\ F_{XBR} \\ F_{YBR} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

La 4.8 non permette di ricavare tutte le forze ai centri ruota, date le forze di veicolo. Si decide, quindi, di sfruttarla al massimo utilizzandola per ricavare tre delle otto forze in gioco. A questo scopo, in seguito si propone una possibile scomposizione della forma matriciale scritta.

$$\begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_Z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} F_{XBL} \\ F_{XBR} \\ F_{YBR} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} F_{XFL} \\ F_{YFL} \\ F_{XFR} \\ F_{YFR} \\ F_{XBL} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -L_L & L_R & -L_B \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -L_L & L_F & L_R & L_F & -L_B \end{bmatrix}$$

Dove  $F_{XBL}$ ,  $F_{XBR}$  e  $F_{YBR}$  sono le forze che verranno calcolate mediante l'inversione della 4.9, date le forze di veicolo, mentre le altre cinque forze verranno fatte variare su una griglia.

*La scelta delle forze da calcolare non è univoca, tuttavia alcune scelte potrebbero portare ad una matrice  $A$  non invertibile, se il veicolo è equilibrato.*

Per quanto riguarda la scelta della griglia su cui variano le restanti cinque forze, essa è fatta in modo tale che le forze siano generabili dagli pneumatici, ovvero in modo tale che le forze di pneumatico corrispondenti siano contenute all'interno dell'ellisse di pneumatico.

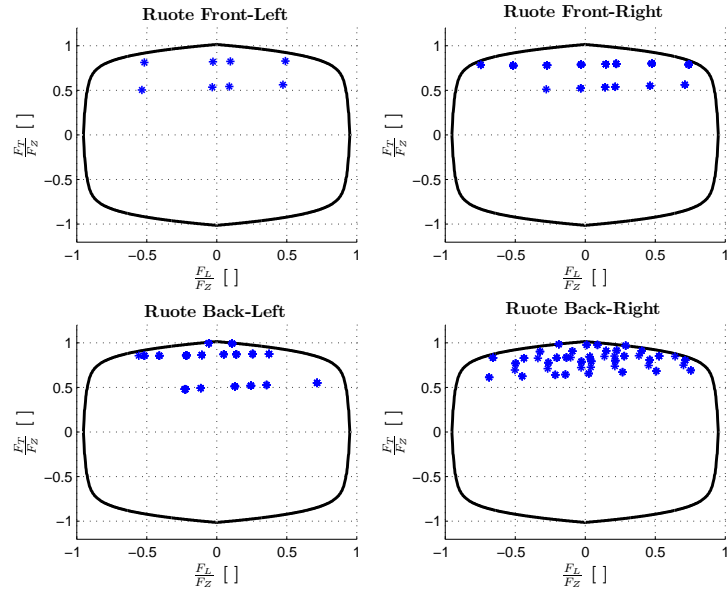
Infine, di tutte le combinazioni di forze trovate, saranno considerate accettabili solo quelle che rispettano i vincoli imposti dal modello di regime, ovvero solo quelle che danno luogo a delle derivate nulle.

In seguito si presenteranno i risultati dell'algoritmo applicato nelle seguenti condizioni:

- (a) Il raggio di curva scelto è di  $30m$ , uguale a quello scelto nel calcolo della velocità massima.
- (b) Lo slip angle di body scelto è pari a  $-5.51^\circ$ .
- (c) Il calcolo delle configurazioni del veicolo viene fatto per tre diverse velocità:  $15 \frac{m}{s}$ ,  $16 \frac{m}{s}$  e  $17.18 \frac{m}{s}$ . Quest'ultima rappresenta la velocità massima

raggiungibile dal veicolo a regime (per una curva con raggio di  $30m$ ), calcolata nello studio delle prestazioni massime.

Da Figura 4.26 a Figura 4.28 sono mostrati i risultati per le tre velocità considerate.



**Figura 4.26:** Configurazioni multiple: ellissi pneumatici,  $V = 15 \frac{m}{s}$

I risultati confermano quello che si aspettava: un assetto di veicolo può essere ottenuto con diverse combinazioni degli ingressi, quindi con diversi modi di sfruttare gli pneumatici.

*All'aumentare della velocità di equilibrio con cui si percorre la curva considerata il numero di configurazioni diminuisce.* Inoltre, le configurazioni trovate si avvicinano al bordo dell'ellisse di pneumatico all'aumentare della velocità: è necessario compensare una forza centrifuga maggiore quindi gli pneumatici danno luogo a forze trasversali maggiori.

*A velocità massima esiste un'unica configurazione con cui è possibile percorrere la curva assegnata con lo slip angle assegnato, la quale corrisponde alla configurazione trovata nel calcolo della velocità massima.*

Una diversa configurazione degli ingressi implica un diverso comportamento

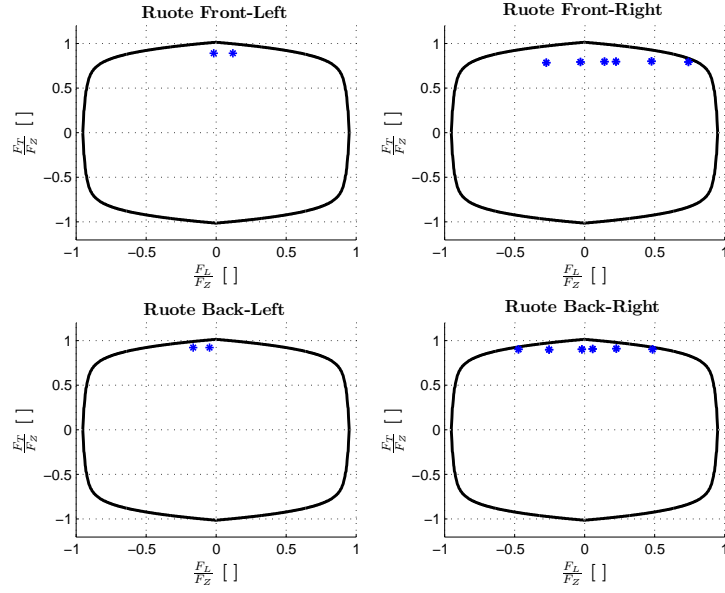


Figura 4.27: Configurazioni multiple: ellissi pneumatici,  $V = 16 \frac{m}{s}$

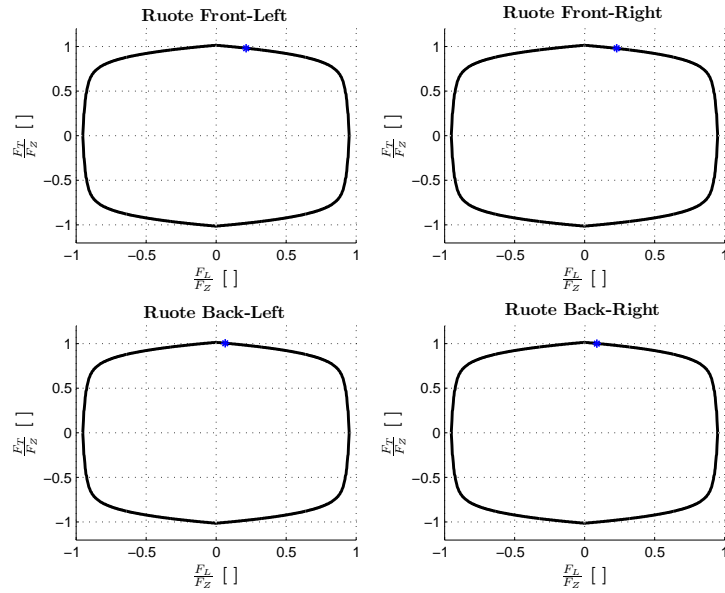
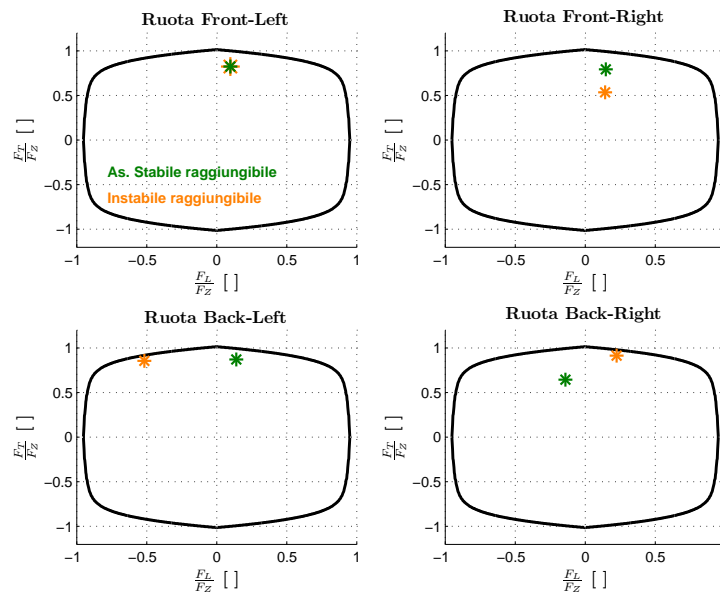


Figura 4.28: Configurazioni multiple: ellissi pneumatici,  $V = V_{max}$

del veicolo. Prendendo due degli equilibri calcolati a velocità di  $15 \frac{m}{s}$  e studiandone la stabilità si ottengono i risultati di Figura 4.29 e di Figura 4.30, i quali mostrano che le due configurazioni, non solo sfruttano gli pneumatici in maniera diversa (la ruota Front-Left è sfruttata allo stesso modo), ma presentano anche diverse proprietà di stabilità (uno asintoticamente stabile e l'altro instabile).



**Figura 4.29:** Stabilità configurazioni multiple: ellissi pneumatici,  $V = 15 \frac{m}{s}$

La possibilità, offerta dal veicolo 4WD/4WS, di ottenere lo stesso assetto con diverse configurazioni può essere sfruttata in vari modi:

- (a) con l'obiettivo di rendere più sicuro il veicolo, può essere scelta la configurazione che permette margini di stabilità maggiori.

A tal proposito una possibile scelta della configurazione può essere fatta valutando la minima distanza massima dall'origine, corrispondente allo sfruttamento nullo dello pneumatico. In questo modo, rimanendo lontano dal bordo di pneumatico, si ha a disposizione un maggior margine per poter intervenire. Quindi una cifra di merito che esprima tale scelta è



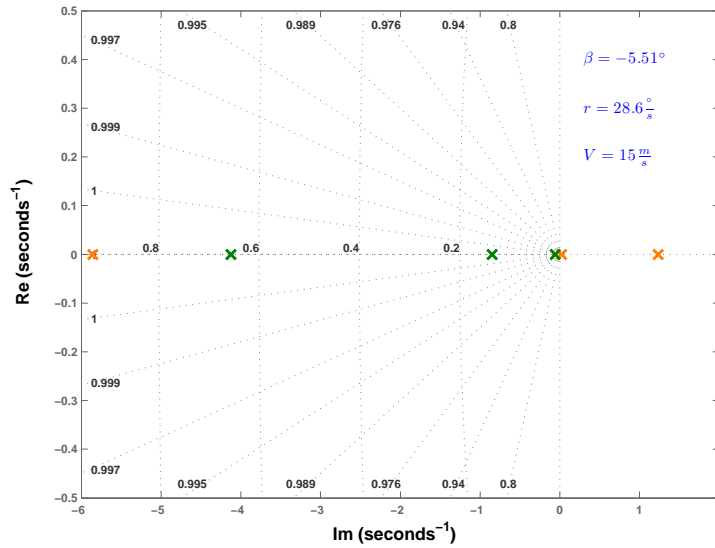
data da:

$$J = \min_{i \in C} \max_j \sqrt{\left(\frac{F_{Lj}}{F_{Zj}}\right)^2 + \left(\frac{F_{Tj}}{F_{Zj}}\right)^2} \quad j = FL, FR, BL, BR$$

dove  $C$  è l'insieme delle configurazioni disponibili.

Per le configurazioni presentate l'indice  $J$  è pari a 0,99 per la configurazione instabile e 0,88 per quella stabile;

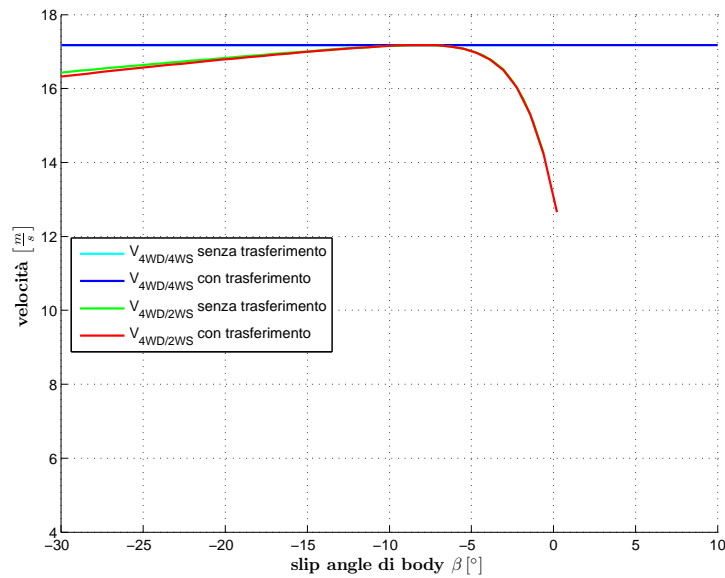
- (b) una configurazione instabile, adeguatamente controllata, potrebbe permettere una maggior sensitività ai comandi e delle manovre più veloci;
- (c) infine, si osserva che la molteplicità delle configurazioni permette un recupero di funzionalità in caso di guasti, scegliendo le configurazioni che non fanno uso della variabile di controllo non disponibile è possibile garantire la controllabilità del veicolo.



**Figura 4.30:** Stabilità configurazioni multiple: poli e zeri,  $V = 15 \frac{m}{s}$

## 4.6 Prestazioni massime senza trasferimento di carico

Nella presentazione del metodo introdotto e utilizzato per il calcolo della velocità massima, è stato descritto anche la variante del metodo che non considera il trasferimento di carico. Si vuole, quindi, capire l'influenza del trasferimento di carico sulle prestazioni massime del veicolo in curva di regime, confrontando i dati restituiti dai due algoritmi.



**Figura 4.31:** Velocità massima in curva di regime: con e senza trasferimento di carico

I risultati confermano quanto detto nel Capitolo 2: se il legame tra carico verticale e forze di pneumatico fosse lineare (come considerato dal modello), l'influenza di tale fenomeno sulle prestazioni del veicolo in curva sarebbe trascurabile (questo è dovuto al fatto che l'aderenza persa sulle ruote meno cariche è recuperata su quelle più cariche).

Mentre il 4WD/2WS presenta una leggera variazione delle prestazioni, totalmente trascurabile, le prestazioni del 4WD/4WS sono ininfluenti al trasferimento di carico.

Come detto, però, nella realtà il legame tra forze di pneumatico e carico ver-

ticale non è lineare e presenta una saturazione. Si introduce quindi una cifra di merito che valuti quanto lontano si trovano le ruote da una condizione a carico nominale.

Riprendendo le espressioni della 2.14 e della 2.15, che esprimono rispettivamente il trasferimento di carico lungo i due assi, e trascurando la componente statica di trasferimento dovuta alla distribuzione di masse, le componenti del trasferimento di carico possono essere riscritte come:

$$\Delta F_{ZX} = -\frac{MhVr\sin(\beta)}{L_F + L_B}$$

$$\Delta F_{ZY} = -\frac{MhVr\cos(\beta)}{L_R + L_L}$$

Le componenti del trasferimento intervengono sulle ruote del veicolo nel modo descritto in 2.3.3, quindi la ruota più carica è quella in cui entrambe le componenti hanno un contributo positivo e dipende dallo stato del veicolo. In particolare si possono avere quattro situazioni descritte nella Tabella 4.1, in cui viene indicata la ruota più carica in funzione dello slip angle di body e dello yaw rate (si trascura la velocità considerata sempre maggiore di zero).

**Tabella 4.1:** Ruota più carica

	$\beta < 0$	$\beta > 0$
$r < 0$	Front-Left	Back-Left
$r > 0$	Back-Right	Front-Right

Va da sé che le situazioni più frequenti saranno quelle con slip angle minore di zero (per un veicolo con solo sterzo anteriore saranno le uniche possibili), in cui le ruote più cariche sono quelle posteriori. Una rotazione in senso orario farà sì che la ruota più carica sia quella posteriore di sinistra, mentre una rotazione in senso antiorario comporterà che la ruota più carica sia quella posteriore di destra.

A questo punto un indice del trasferimento di carico massimo, quello che si

ha sulla ruota più carica, è dato da:

$$\Delta F_{Z,MAX} = \left| \frac{\Delta F_{ZX}}{2} \right| + \left| \frac{\Delta F_{ZY}}{2} \right| \quad (4.10)$$

Dalla 4.10, ricordando le espressioni che danno le componenti del trasferimento lungo gli assi e introducendo l'ipotesi di slip angle di body piccoli ( $\sin\beta \approx \beta$  e  $\cos\beta \approx 1$ ), si ottiene:

$$\Delta F_{Z,MAX} = \frac{V^2}{R} (K_1 |\beta| + K_2) \quad (4.11)$$

$K_1$  e  $K_2$  sono delle costanti che dipendono dalla geometria e dalla massa del veicolo, date da:

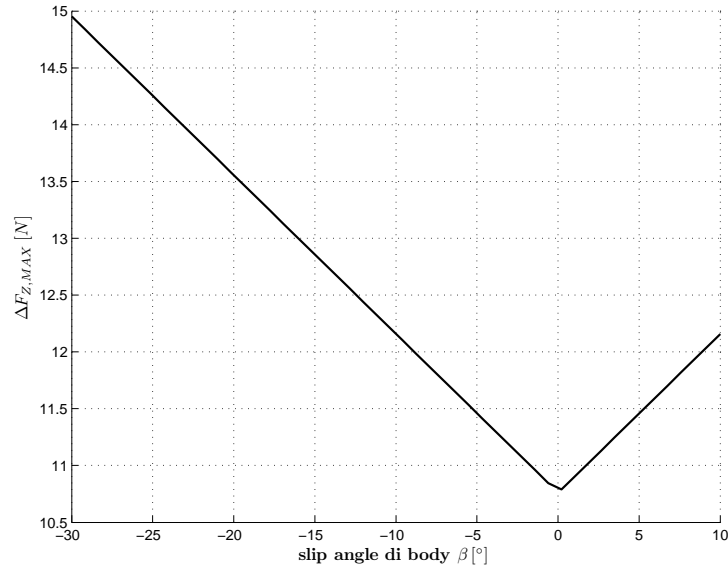
$$K_1 = \frac{Mh}{2(L_F + L_B)} \quad K_2 = \frac{Mh}{2(L_R + L_L)}$$

La Figura 4.32 mostra l'andamento dell'indice per un veicolo 4WD/4WS in cui la velocità di percorrenza è costante e pari a quella massima, il raggio di curva è di 30m e lo slip angle varia nel range indicato.

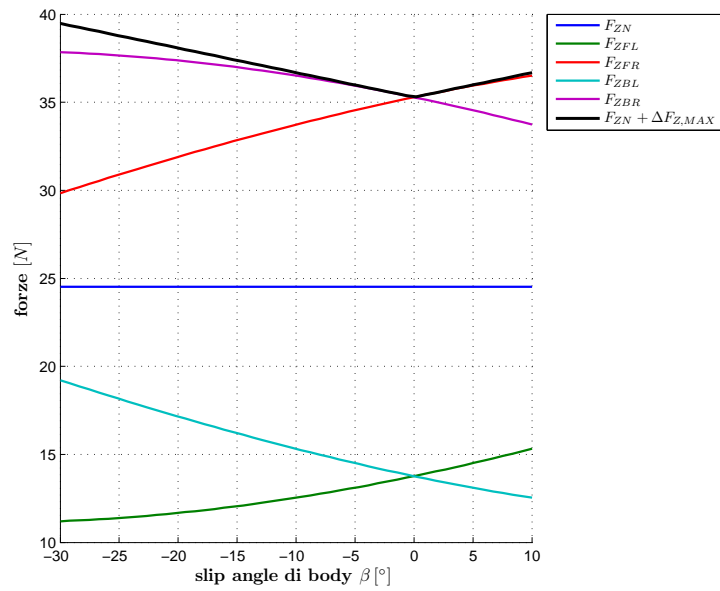
Tale indice sommato al carico nominale (Figura 4.33) restituisce il carico massimo presente sulle ruote, indipendentemente da quale sia la ruota più carica, e indica una stima dello sfruttamento dello pneumatico più carico, se esso si trova in zona di legame lineare con il carico verticale o in zona di saturazione.

A causa dell'ipotesi introdotta (piccoli slip angle di body), l'approssimazione peggiora all'aumentare dello slip angle di body.

I risultati visti in Figura 4.32 e in Figura 4.33 mostrano che gli effetti del trasferimento di carico sono minimi in corrispondenza di uno slip angle di body nullo. *Su questo aspetto un veicolo con architettura 4WD/4WS permette un ulteriore vantaggio rispetto ad un veicolo classico: esso può raggiungere la velocità massima permessa dagli pneumatici anche con slip angle di body nullo.*



**Figura 4.32:** 4WD/4WS indice trasferimento di carico



**Figura 4.33:** Carico ruote del 4WD/4WS a velocità massima in curva di redime

## 4.7 Conclusioni

Nel corso del capitolo è stato studiato un metodo per il calcolo delle prestazioni del veicolo, espresse in termini di velocità massima in curva di regime, e sono state confrontate tra loro le prestazioni di diverse architetture.

È stato quindi introdotto il metodo utilizzato, che tiene conto del fenomeno di trasferimento di carico e che fa uso del modello completo di veicolo. Il vantaggio del metodo sta nel fatto che esso è facilmente adattabile ad architetture di veicolo diverse dal 4WD/4WS (come verrà fatto nel successivo capitolo in cui si studierà il veicolo 6WD) e che fa uso di funzioni di ottimizzazione nativamente presenti in ambiente Matlab.

Successivamente sono stati discussi i risultati del metodo applicato a tre diverse architetture: 4WD/4WS, 4WD/2WS e FWD+RWD/FWS. I risultati hanno mostrato che i veicoli con solo sterzo anteriore possono raggiungere la stessa velocità massima raggiunta dal 4WD/4WS, se si è in grado di portare e mantenere lo slip angle di body in corrispondenza di un ottimo. Tale ottimo coincide con l'angolo in cui la caratteristica di pneumatico presenta forza trasversale massima.

In seguito, si è concentrata l'attenzione sulle proprietà di stabilità dei veicoli alla massima velocità. In particolare è stato visto come un veicolo con architettura 4WD/2WS permette di arrivare a velocità massima, conservando la stabilità e la controllabilità.

È stata studiata, inoltre, la capacità di un veicolo 4WD/4WS di poter assumere lo stesso assetto di regime con diverse configurazioni in ingresso ed è stato presentato un metodo numerico per il calcolo di tali configurazioni. Si ricorda che il veicolo è sovra-attuato, per cui non basta risolvere il modello di regime per calcolare gli equilibri.

Infine, l'attenzione è stata rivolta all'influenza del trasferimento di carico sulle prestazioni massime in curva di regime. È stato visto come tale influenza è irrilevante se il legame carico verticale-forze di pneumatico fosse realmente lineare. Per tenere conto della presenza di fenomeni di saturazione è stato, quindi, introdotta una cifra di merito che indica lo sfruttamento effettivo

degli pneumatici (in zona lineare o di saturazione).





# Capitolo 5

## Veicolo 6WD

In questo capitolo si affronterà lo studio del comportamento di un veicolo 6WD in cui le ruote sono motrici e indipendenti tra loro, ma non sterzanti. Le fasi che si seguiranno saranno simili a quelle seguite per il veicolo 4WD/4WS.

In una prima fase si studierà il modello del veicolo, anche in questo caso a velocità variabile ed anche in questo caso si terrà conto del trasferimento di carico, che come si vedrà presenta delle differenze con il veicolo 4WD/4WD. In seguito verrà fatto uno studio di controllabilità: avendo a disposizione sei variabili di controllo (sei coppie di ruota) si vuole capire se un veicolo di questo tipo permette una controllabilità simile a quella di un veicolo 4WD/4WS, ovvero si vuole capire se, data curva e una velocità di percorrenza, è possibile percorrerla a regime con diversi slip angle di body. Come si vedrà l'approccio sarà diverso rispetto a quello usato per il veicolo 4WD/4WS, non potendo fare uso del modello a bicicletta.

Seguirà uno studio delle prestazioni massime raggiungibili dal veicolo in curva a regime. Il metodo presentato per il veicolo 4WD/4WS verrà riproposto anche per il veicolo 6WD e verranno confrontate tra loro le varie architetture fin qui presentate.

## 5.1 Modello di veicolo

Il procedimento seguito per la scrittura del modello del veicolo 4WD/4WS viene ora riproposto per il 6WD. Per questo veicolo si hanno tre assi di ruote e la convenzione usata è quella di numerarli partendo da quello anteriore (1L identifica la ruota anteriore sinistra, 2R identifica la ruota centrale destra eccetera).

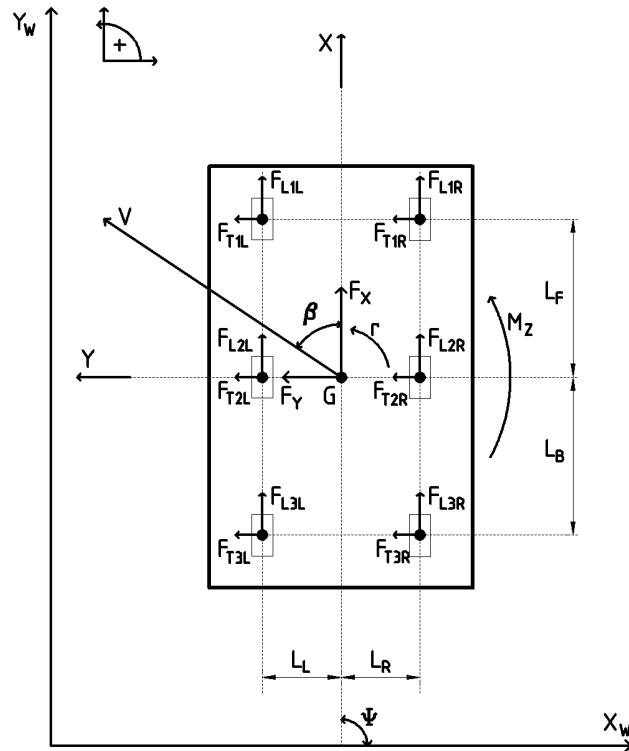


Figura 5.1: Veicolo 6WD

Il modello che descrive la dinamica di body è lo stesso usato per il 4WD/4WS e viene riproposto nella 5.1, mentre lo schema di veicolo a cui fa riferimento è mostrato nella Figura 5.1.

$$\begin{cases} \dot{\beta} = -r - F_X \frac{\sin\beta}{MV} + F_Y \frac{\cos\beta}{MV} \\ \dot{r} = \frac{M_Z}{J} \\ a = F_X \frac{\cos\beta}{M} + F_Y \frac{\sin\beta}{M} \end{cases} \quad (5.1)$$

Cambiano le espressioni che forniscono le forze di veicolo lungo gli assi ( $F_X$ ,  $F_Y$ ) e il momento totale attorno all'asse  $Z$  ( $M_Z$ ), perpendicolare col piano del veicolo. Osservando la Figura 5.1 si intuisce immediatamente che, non essendoci sterzi alle ruote,  $F_X$  è influenzata solo dalle forze longitudinali degli pneumatici mentre  $F_Y$  è influenzata solo da quelle trasversali.

Quindi, le espressioni di  $F_X$ ,  $F_Y$  e  $M_Z$  sono date da:

$$\begin{aligned} F_X &= F_{L1L} + F_{L1R} + F_{L2L} + F_{L2R} + F_{L3L} + F_{L3R} \\ F_Y &= F_{T1L} + F_{T1R} + F_{T2L} + F_{T2R} + F_{T3L} + F_{T3R} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} M_Z &= L_R (F_{L1R} + F_{L2R} + F_{L3R}) + L_F (F_{T1L} + F_{T1R}) \\ &\quad - L_L (F_{L1L} + F_{L2L} + F_{L3L}) - L_B (F_{T3L} + F_{T3R}) \end{aligned}$$

*Così come scritto, il modello fa implicitamente uso dell'ipotesi che l'asse delle ruote centrali passi per il baricentro.* Sotto tale ipotesi le forze trasversali delle ruote centrali non danno contributo alla rotazione.

### 5.1.1 Gli pneumatici

Per quanto riguarda gli pneumatici, nulla in più va aggiunto rispetto al veicolo 4WD/4WS: si fa uso dello stesso modello utilizzato precedentemente. Anche i parametri che caratterizzano lo pneumatico sono gli stessi, questo ritornerà utile nel confronto delle prestazioni massime del veicolo 6WD con le altre architetture (il confronto ha senso se i veicoli montano gli stessi pneumatici).

### 5.1.2 Angoli di deriva degli pneumatici

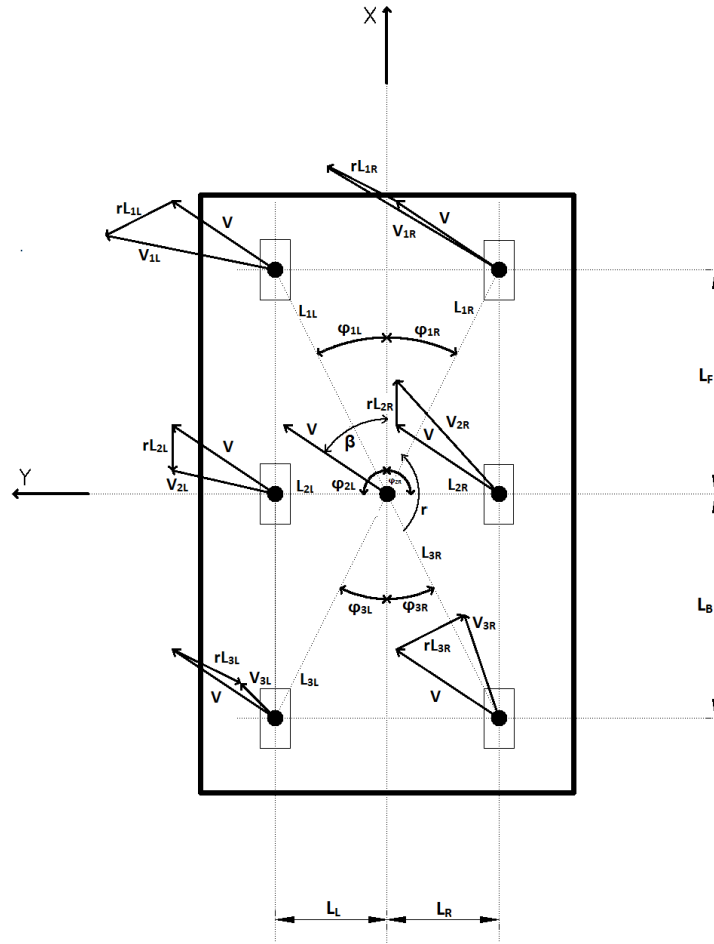
Anche in questo caso gli angoli di deriva sono calcolabili in due modi.

Il calcolo degli angoli di deriva mediante le componenti di velocità ai centri ruota, fornisce il valore esatto degli slip angle di ruota e ritorna utile in un'implementazione del simulatore di veicolo. Tale metodo, però, è poco maneggevole quando si ha la necessità di elaborare analiticamente il modello di veicolo.

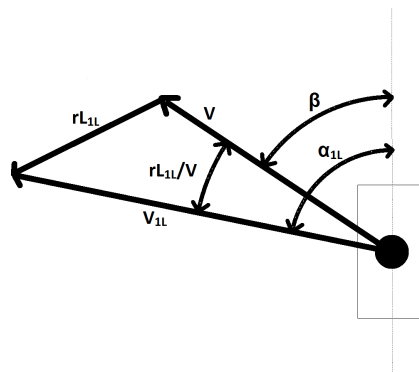
Anche per il 6WD, verranno scritte le relazioni semplificate viste per il 4WD/4WS. I vettori velocità sui centri ruota si possono osservare nella Figura 5.2, mentre la Figura 5.3 mostra in dettaglio la ruota anteriore sinistra. Le espressioni sono facilmente ricavabili da quelle del 4WD/4WS (mancano gli angoli di sterzo) e sono date da:

$$\begin{aligned}\alpha_{1L} &= \beta + L_{1L} \frac{r}{V} & \alpha_{1R} &= \beta + L_{1R} \frac{r}{V} \\ \alpha_{2L} &= \beta + L_{2L} \frac{r}{V} & \alpha_{2R} &= \beta - L_{2R} \frac{r}{V} \\ \alpha_{3L} &= \beta - L_{3L} \frac{r}{V} & \alpha_{3R} &= \beta - L_{3R} \frac{r}{V}\end{aligned}\tag{5.3}$$

Si ricorda che il contributo dovuto alla rotazione del veicolo può essere negativo o positivo in funzione della posizione della ruota rispetto al baricentro.



**Figura 5.2:** Veicolo 6wd: angoli di deriva

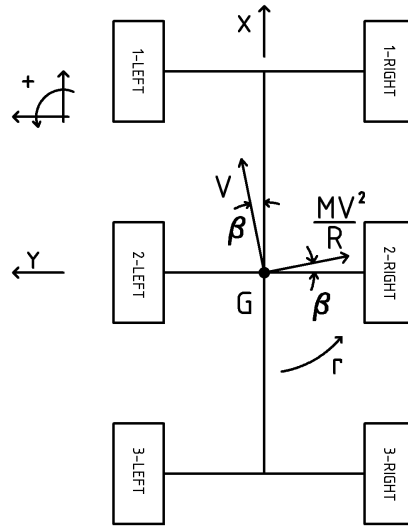


**Figura 5.3:** Veicolo 6wd: angoli di deriva, dettaglio ruota 1L

## 5.2 Trasferimento di carico

Così come per il veicolo 4WD/4WS si studia ora il fenomeno di trasferimento di carico per il 6WD con le stesse ipotesi introdotte precedentemente, ovvero:

- (a) Si trascura la deformazione dei pneumatici e delle sospensioni;
- (b) Si trascura l'inclinazione del piano stradale.



**Figura 5.4:** Veicolo 6WD: curva a regime

Le componenti dell'accelerazione sono date dal modello di body, uguale a quello del 4WD/4WD, quindi anch'esse saranno date dalle stesse espressioni del 4WD/4WS:

$$\begin{aligned} a_{GX} &= a \cos(\beta) - V \left( \dot{\beta} + r \right) \sin(\beta) \\ a_{GY} &= a \sin(\beta) + V \left( \dot{\beta} + r \right) \cos(\beta) \end{aligned}$$

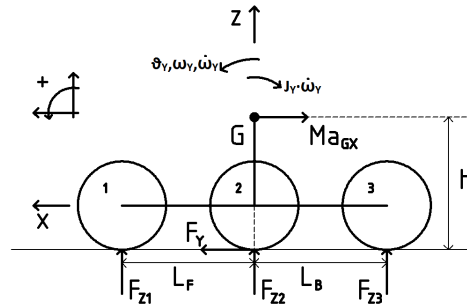
Anche qui l'aspetto sul quale si concentrerà l'attenzione è quello di trasferimento di carico in curva di regime. In tali condizioni le espressioni delle componenti dell'accelerazione lungo gli assi di veicolo sono:

$$\begin{aligned} a_{GX} &= -\frac{V^2}{R} \sin(\beta) \\ a_{GY} &= \frac{V^2}{R} \cos(\beta) \end{aligned} \quad (5.4)$$

(in curva di regime, yaw rate, velocità e raggio di curva sono strettamente legati:  $r = \frac{V}{R}$ )

Lo schema di riferimento è quello di Figura 5.4 (i simboli assumo lo stesso significato assunto per il 4WD/4WS).

### 5.2.1 Trasferimento di carico longitudinale



**Figura 5.5:** Veicolo 6WD: trasferimento di carico longitudinale

Con l'ipotesi introdotta (asse ruote centrali passanti per il baricentro), il trasferimento longitudinale influenza solo ruote anteriori e posteriori, mentre su quelle centrali ricade il carico nominale:

$$\begin{cases} F_{Z1} = 2F_{ZN} - \Delta F_{ZX} \\ F_{Z2} = 2F_{ZN} \\ F_{Z3} = 2F_{ZN} + \Delta F_{ZX} \end{cases}$$

Con  $F_{ZN}$  si intende il carico nominale che nel 6WD differisce da quello nel 4WD/4WS, infatti il peso totale ricade su sei ruote e non più su quattro:

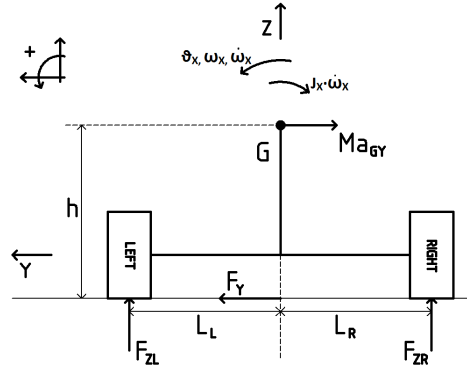
$$F_{ZN} = \frac{Mg}{6}$$

Quindi, si sfruttano gli equilibri dinamici lungo  $X$  e  $Z$  e quello di rotazione attorno all'asse  $Y$  per ricavare un'espressione di  $\Delta F_{ZX}$ :

$$\Delta F_{ZX} = \frac{-Mh \frac{V^2}{R} \sin(\beta)}{L_F + L_B} + \frac{F_{ZN}(L_F - L_B)}{L_F + L_B} \quad (5.5)$$

*Infine, il trasferimento di carico che si ha sulla singola ruota è dato da  $\frac{\Delta F_{ZX}}{2}$ .*

### 5.2.2 Trasferimento di carico trasversale



**Figura 5.6:** Veicolo 6WD: trasferimento di carico trasversale

Per il trasferimento trasversale, l'ipotesi di asse ruote centrali passante per il baricentro non introduce alcuna differenza rispetto al 4WD/4WS. L'equilibrio lungo l'asse  $Z$  impone che:

$$\begin{cases} F_{ZL} = 2F_{ZN} - \Delta F_{ZY} \\ F_{ZR} = 2F_{ZN} + \Delta F_{ZY} \end{cases}$$

e operando alla solita maniera si ricava l'espressione del trasferimento di carico in direzione trasversale:



$$\Delta F_{ZY} = \frac{Mh \frac{V^2}{R} \cos(\beta)}{L_L + L_R} + \frac{F_{ZN} (L_L - L_R)}{L_L + L_R} \quad (5.6)$$

*Si ricorda, che in fase di curva a regime tale componente è dominante rispetto al trasferimento in direzione longitudinale.*

*Il trasferimento di carico che interessa la singola ruota è dato da  $\frac{\Delta F_{ZY}}{3}$ .*

### 5.2.3 Carico totale sulle ruote

Il carico totale sulle ruote sarà dato dal carico nominale ( $F_{ZN}$ ) sommato ai contributi del trasferimento di carico nei due assi:

(a) Ruote anteriori

$$F_{Z1L} = F_{ZN} - \frac{\Delta F_{ZX}}{2} - \frac{\Delta F_{ZY}}{3} \quad F_{Z1R} = F_{ZN} - \frac{\Delta F_{ZX}}{2} + \frac{\Delta F_{ZY}}{3}$$

(b) Ruote centrali

$$F_{Z2L} = F_{ZN} - \frac{\Delta F_{ZY}}{3} \quad F_{Z2R} = F_{ZN} + \frac{\Delta F_{ZY}}{3}$$

(c) Ruote posteriori

$$F_{Z3L} = F_{ZN} + \frac{\Delta F_{ZX}}{2} - \frac{\Delta F_{ZY}}{3} \quad F_{Z3R} = F_{ZN} + \frac{\Delta F_{ZX}}{2} + \frac{\Delta F_{ZY}}{3}$$

*In fase di curva a regime, la ruota più carica è quella posteriore esterna alla curva.*

### 5.3 Controllabilità dell'assetto

Per un veicolo di questo tipo, con sei variabili di controllo, viene naturale pensare che lo slip angle di body possa essere controllato indipendentemente dal raggio di curva, così come dimostrato avvenire nel veicolo 4WD/4WS.

Si vuole ora ricavare un'espressione analitica che esprima un legame tra le variabili di stato e gli ingressi, da cui sia possibile trarre delle conclusioni su questo aspetto.

Nel 4WD/4WS si era fatto uso del modello a bicicletta, ma la mancanza degli sterzi rende inutilizzabile tale modello e le ipotesi fatte per ottenerlo, per un veicolo 6WD. Si sceglie allora di partire dal modello completo del veicolo in curva di regime e di introdurre *l'ipotesi di pneumatici lineari*. Si riporta in seguito il modello lineare di pneumatico:

$$\begin{aligned} F_L &= C_\lambda \lambda \\ F_T &= C_\alpha \alpha \end{aligned}$$

Con l'ipotesi introdotta il modello in curva di regime assume la seguente forma (in cui sono state sostituite le espressioni delle forze totali di veicolo  $F_X$ ,  $F_Y$  e del momento  $M_Z$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{MV^2}{R} = -C_\lambda (\lambda_{1L} + \lambda_{2L} + \lambda_{3L} + \lambda_{1R} + \lambda_{2R} + \lambda_{3R}) \sin\beta \\ \quad - C_\alpha (\alpha_{1L} + \alpha_{2L} + \alpha_{3L} + \alpha_{1R} + \alpha_{2R} + \alpha_{3R}) \cos\beta \\ 0 = -L_L C_\lambda (\lambda_{1L} + \lambda_{2L} + \lambda_{3L}) + L_R C_\lambda (\lambda_{1R} + \lambda_{2R} + \lambda_{3R}) \\ \quad - L_F C_\alpha (\alpha_{1L} + \alpha_{1R}) + L_B C_\alpha (\alpha_{3L} + \alpha_{3R}) \\ 0 = -C_\alpha (\alpha_{1L} + \alpha_{2L} + \alpha_{3L} + \alpha_{1R} + \alpha_{2R} + \alpha_{3R}) \sin\beta \\ \quad + C_\lambda (\lambda_{1L} + \lambda_{2L} + \lambda_{3L} + \lambda_{1R} + \lambda_{2R} + \lambda_{3R}) \cos\beta \end{array} \right. \quad (5.7)$$

Nel passo successivo di elaborazione si considerano le seguenti:

(a) per semplicità di scrittura si definisco:

$$\lambda_L = \lambda_{1L} + \lambda_{2L} + \lambda_{3L}$$

$$\lambda_R = \lambda_{1R} + \lambda_{2R} + \lambda_{3R}$$

(b) si sostituiscono al posto degli slip angle di ruota le loro espressioni, definite dalla 5.3

(c) si definisce:

$$L_G = \frac{1}{6} (-L_{1L} - L_{1R} - L_{2L} + L_{2R} + L_{3L} + L_{3R})$$

la quale per un veicolo equilibrato è nulla.

e si introduce l'ipotesi di piccoli slip angle di body ( $\sin\beta \approx \beta$ ,  $\cos\beta \approx 1$ ).

A fronte delle considerazioni precedenti e dell'ultima ipotesi introdotta il modello può essere riscritto come segue:

$$\begin{cases} \beta = \frac{L_G}{R} - \frac{MV^2}{6C_\alpha R} \\ L_R \lambda_R - L_L \lambda_L = \frac{C_\alpha}{C_\lambda} \frac{1}{R} [L_F (L_{1L} + L_{1R}) + L_B (L_{3L} + L_{3R})] \\ \quad + \frac{2C_\alpha}{C_\lambda} \beta (L_F - L_B) \\ \lambda_L + \lambda_R = \frac{6C_\alpha (\beta - L_G)}{C_\lambda} \beta \end{cases} \quad (5.8)$$

La prima equazione è il risultato a cui si voleva arrivare: dato il raggio di curva e la velocità con cui la si percorre (a regime) tale relazione permette di calcolare lo slip angle di veicolo. La relazione mostra che, nonostante le sei variabili di controllo a disposizione non è possibile controllare liberamente l'assetto del veicolo.

Si osserva inoltre che, per un veicolo in cui  $L_L = L_R$  (relazione valida per la maggior parte dei veicoli), la seconda equazione del modello esprime la differenza tra slip longitudinali di sinistra e slip longitudinali di destra per poter mantenere la curva di regime.

Infine la terza equazione esprime la forza totale in direzione longitudinale (proporzionale allo slip con il modello di pneumatico utilizzato) per mantenere costante la velocità del veicolo.

Per un veicolo non equilibrato in cui  $L_L \neq L_R$  la seconda e la terza equazione vanno risolte insieme.

## 5.4 Prestazioni massime del veicolo

Si sfruttano ora i risultati modellistici ottenuti precedentemente per il veicolo 6WD per proseguire con lo studio delle prestazioni di questa architettura.

La domanda a cui si vuole rispondere è la seguente: *data la curva di regime e lo slip angle di body, calcolare la velocità massima con cui la si può percorrere.*

L'idea di base che si vuole sfruttare è la stessa del veicolo 4WD/4WS: si usa il modello di regime del veicolo, si sfrutta l'equazione della dinamica laterale (la prima) per ricavare un'espressione della velocità, da massimizzare numericamente, si usano le altre due equazioni come vincoli tra stato e ingressi imposti dal regime.

Quindi le forze ( $F_X$  e  $F_Y$ ) e il momento totale ( $M_Z$ ) possono essere riscritti nella seguente forma:

$$\begin{aligned} F_X &= F_{XN} + \Delta F_{ZX} \Delta F_{X,X1} + \Delta F_{ZY} \Delta F_{X,Y1} \\ F_Y &= F_{YN} + \Delta F_{ZX} \Delta F_{Y,X1} + \Delta F_{ZY} \Delta F_{Y,Y1} \\ M_Z &= M_{ZN} + \Delta F_{ZX} \Delta M_{Z,X1} + \Delta F_{ZY} \Delta M_{Z,Y1} \end{aligned} \quad (5.9)$$

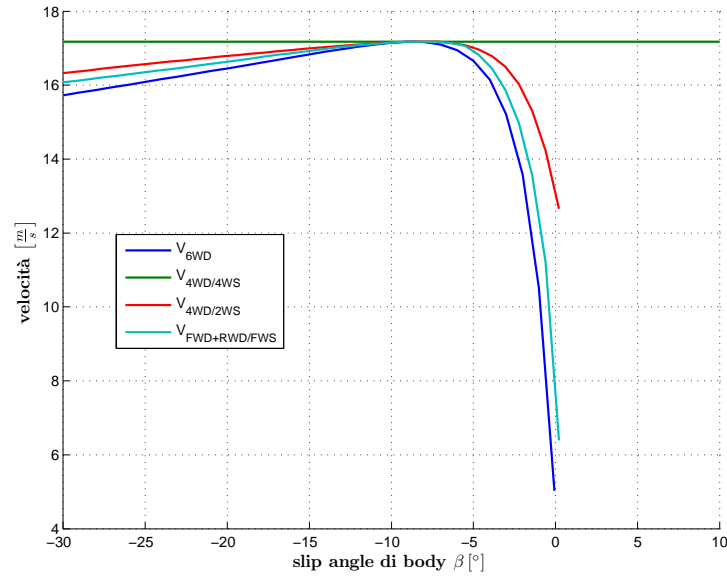
e l'espressione della velocità che ne deriva è:

$$\begin{aligned} V^2 = \frac{R}{M} & \left[ \frac{\cos\beta (F_{YN} + K_{ZX} \Delta F_{Y,X1} + K_{ZY} \Delta F_{Y,Y1})}{1 + h \left( \frac{\Delta F_{X,Y1} \cos\beta \sin\beta}{L_R + L_L} - \frac{\Delta F_{X,X1} \sin^2\beta}{L_F + L_B} + \frac{\Delta F_{Y,X1} \cos\beta \sin\beta}{L_F + L_B} - \frac{\Delta F_{Y,Y1} \cos^2\beta}{L_R + L_L} \right)} \right. \\ & \left. - \frac{\sin\beta (F_{XN} + K_{ZX} \Delta F_{X,X1} + K_{ZY} \Delta F_{X,Y1})}{1 + h \left( \frac{\Delta F_{X,Y1} \cos\beta \sin\beta}{L_R + L_L} - \frac{\Delta F_{X,X1} \sin^2\beta}{L_F + L_B} + \frac{\Delta F_{Y,X1} \cos\beta \sin\beta}{L_F + L_B} - \frac{\Delta F_{Y,Y1} \cos^2\beta}{L_R + L_L} \right)} \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Le espressioni complete di  $\Delta F_{X,X1}$ ,  $\Delta F_{Y,X1}$ ,  $\Delta M_{Z,X1}$  e  $\Delta F_{X,Y1}$ ,  $\Delta F_{Y,Y1}$ ,  $\Delta M_{Z,Y1}$ , che sono date dal modello 6WD, differiscono da quelle del 4WD/4WS e sono riportate in A.2, mentre  $K_{ZX}$  e  $K_{ZY}$  sono date dalle stesse espres-

sioni presentate nel Capitolo 4.

In Figura 5.7 si osserva il risultato fornito dall'algoritmo per un veicolo 6WD, messo a confronto con le altre architetture.



**Figura 5.7:** Veicolo 6WD: confronto velocità massima in curva

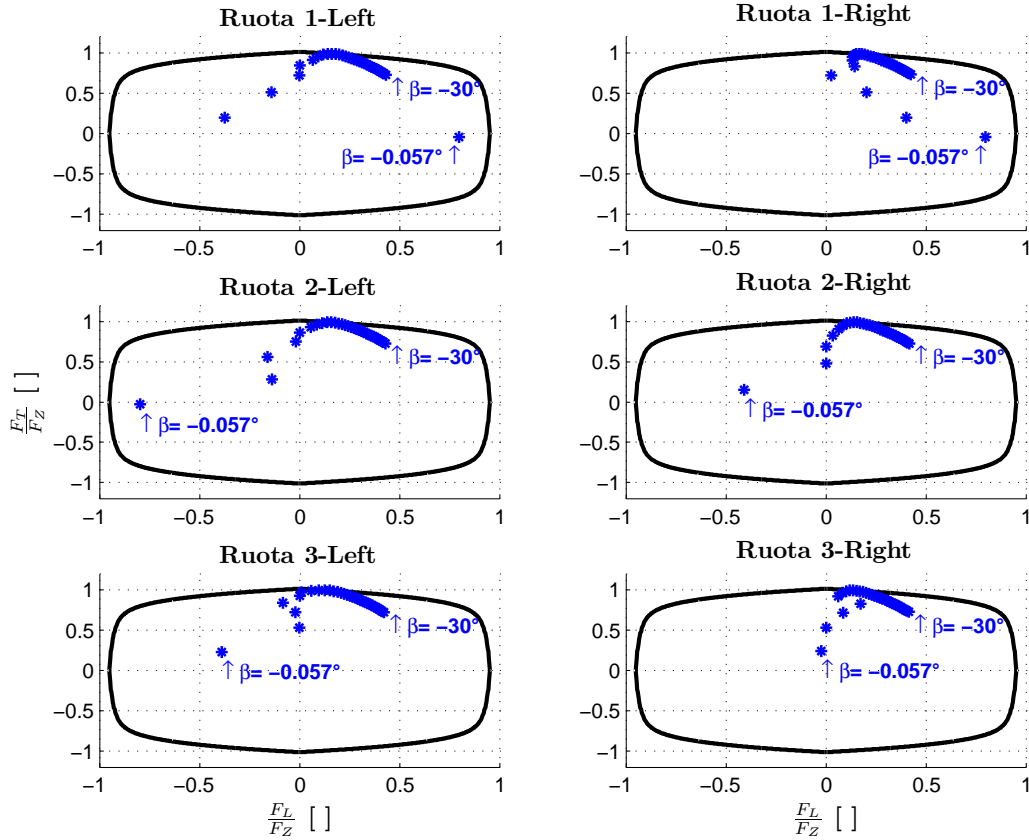
Innanzitutto si nota che per un veicolo 6WD non è possibile percorrere la curva con slip angle positivi, per la stessa motivazione presentata per il veicolo con solo sterzo anteriore (in questo caso tutte le ruote, non solo quelle posteriori, avrebbero uno slip angle positivo).

Inoltre, dai risultati si giunge alle seguenti considerazioni

- (a) Anche un veicolo 6WD, se controllato in maniera adeguata, ovvero in maniera da portare e mantenere lo slip angle di body in prossimità del massimo della caratteristica trasversale di pneumatico, può raggiungere la stessa velocità massima delle altre architetture.
- (b) Per slip angle di body diversi da quello ottimo il veicolo in questione è quello più penalizzato e questo conferma quanto detto nel Capitolo 3 che lo sterzo è la variabile più efficiente per il controllo della dinamica laterale.

- (c) Il legame tra velocità e slip angle di body conferma i risultati ottenuti in 5.3, fissata la curva da percorrere non è possibile controllare indipendentemente le altre due variabili di stato, nonostante si abbiano a disposizione ben sei variabili di controllo.

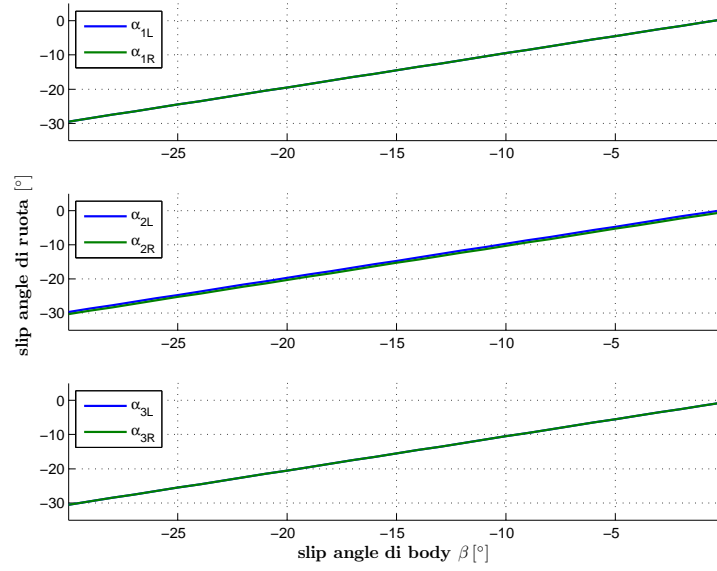
La Figura 5.8 mostra lo sfruttamento dei pneumatici nelle varie condizioni, mentre la Figura 5.9 e la Figura 5.10 mostrano rispettivamente gli slip angle di ruota e gli slip longitudinali scelti dall'algoritmo.



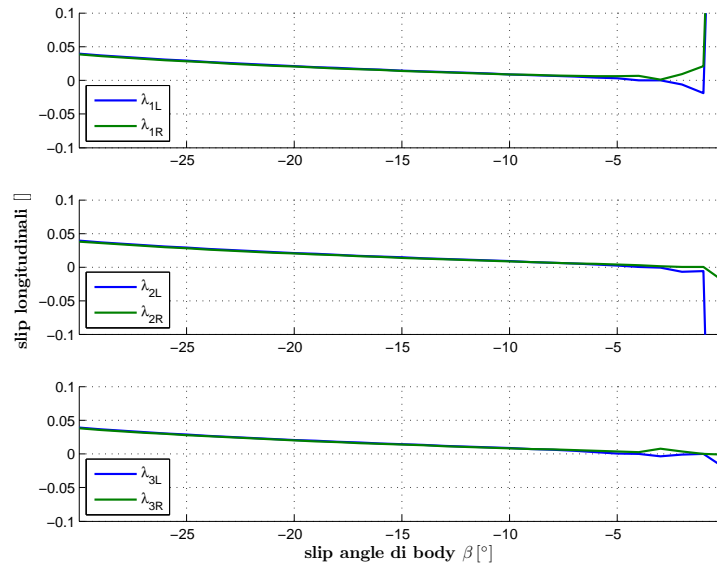
**Figura 5.8:** Veicolo 6WD: ellissi di pneumatico

Fissata la curva e deciso il range dello slip angle di body, l'andamento degli slip angle di ruota è noto a priori.

Diversa è la situazione per gli slip longitudinali. Per grossi slip angle di body, quando le forze trasversali generate dagli pneumatici sono rilevanti, gli slip



**Figura 5.9:** Veicolo 6WD: slip angle di ruota (ruote anteriori, centrali e posteriori)



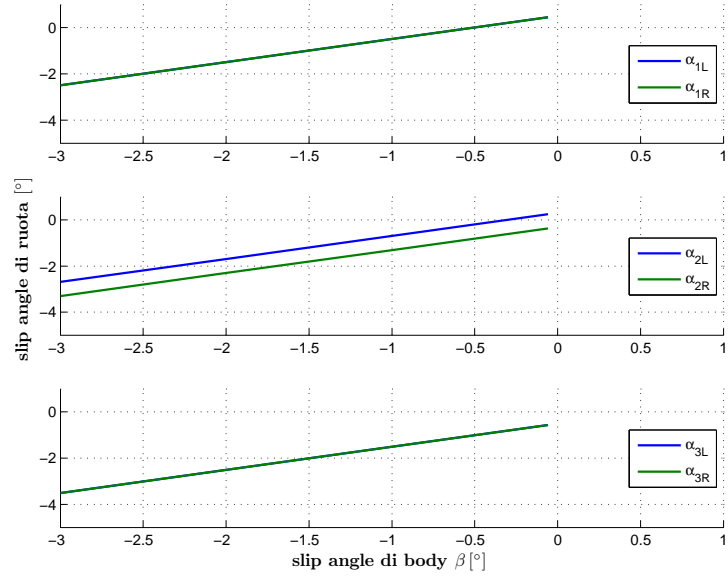
**Figura 5.10:** Veicolo 6WD: slip longitudinali (ruote anteriori, centrali e posteriori)



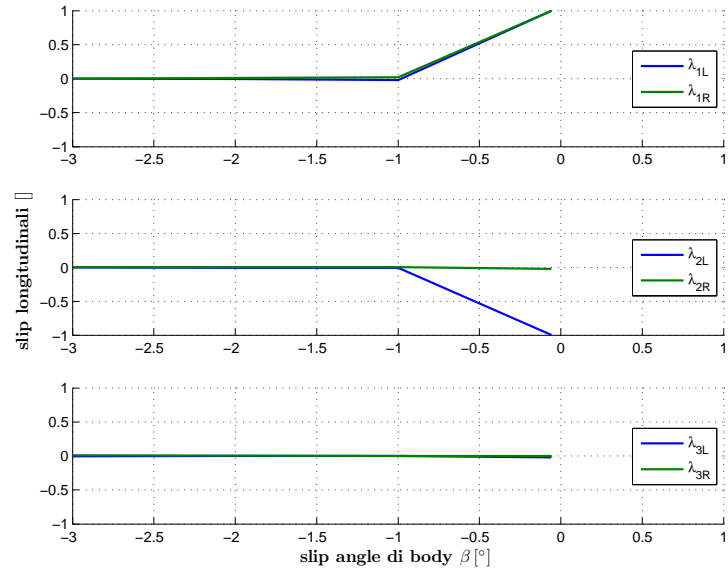
longitudinali sono mantenuti piccoli, quanto serve per mantenere il regime del veicolo. Diversamente per piccoli slip angle di body gli slip longitudinali aumentano e gli pneumatici vengono sollecitati maggiormente in direzione longitudinale, per compensare le perdite sulle forze trasversali.

Osservando il dettaglio di slip longitudinali e slip angle di ruota in Figura 5.11 e in Figura 5.12, si nota che le ruote 1-Left, 1-Right e 2-Left, sulle quali il contributo della rotazione è positivo, assumono uno slip angle positivo per slip angle di body maggiore di  $0.5^\circ$ . Per tali ruote l'algoritmo interviene con slip longitudinali tali da portare la ruota in condizione di puro slittamento ( $\lambda = 1$ ). In questo modo vengono ridotte al minimo le forze trasversali di tali ruote che porterebbero il veicolo verso l'esterno della curva.

Diversamente, per le ruote 2-Right, 3-Left e 3-Right, sulle quali la rotazione ha un contributo negativo, l'intervento sulle forze longitudinali (quindi slip longitudinali) è ridotto. Su tali ruote gli slip angle sono negativi e le forze trasversali generate spingono il veicolo in direzione interna alla curva.



**Figura 5.11:** Veicolo 6WD: dettaglio slip angle di ruota



**Figura 5.12:** Veicolo 6WD: dettaglio slip longitudinali

## 5.5 Conclusioni

Nel seguente capitolo si è concentrata l'attenzione sul veicolo 6WD con sei ruote motrici indipendenti tra loro, ma non sterzanti.

Innanzitutto è stato scritto il modello di veicolo, che come si è visto può essere ricavato partendo da quello del 4WD/4WS: la dinamica di body rimane uguale, ma il legame tra le forze totali di veicolo e le forze di pneumatico cambia.

In seguito è stata studiata la controllabilità del veicolo a regime. Non potendo usufruire del modello a bicicletta, lo studio è stato fatto sul modello completo di veicolo, introducendo opportune ipotesi. Tale studio ha portato alla conclusione che, nonostante le sei variabili di controllo, la controllabilità del veicolo a regime è simile a quella di un veicolo con solo sterzo anteriore. Infine sono state studiate le prestazioni massime del veicolo in curva di regime, confrontandole con le prestazioni delle altre architetture. I risultati di questo studio si sono rivelati in linea con lo studio di controllabilità, mostrando un forte legame tra slip angle di body e velocità di percorrenza di una data curva, e hanno rilevato che, per slip angle di body diversi da quello ottimo, il veicolo 6WD è penalizzato rispetto alle architetture con ruote sterzanti.



## Capitolo 6

### Conclusioni e sviluppi futuri

Lo scopo di questa tesi era lo studio delle caratteristiche e dei vantaggi di veicoli sovra-attuati. Tali architetture, facilmente implementabili nei veicoli elettrici di nuova concezione, presentano diverse differenze rispetto ad una classica. Nello studio si è concentrati soprattutto sugli aspetti della controllabilità e delle prestazioni massime.

Sul fronte della controllabilità due sono i risultati che più degli altri meritano interesse:

(a) Controllabilità di regime di un veicolo 4WD/4WS

È stato mostrato come l'introduzione dello sterzo sulle ruote posteriori permette non solo di poter controllare liberamente l'assetto del veicolo, ma anche di poterne cambiare il comportamento, trasformandolo da un veicolo sottosterzante ad uno sovrasterzante e viceversa.

(b) Controllabilità di regime di un veicolo 6WD

Nonostante si abbiano sei coppie indipendenti a disposizione per il controllo, un veicolo di questo tipo non ha nessuno vantaggio in termini di controllabilità rispetto ad un'architettura classica. Questo risultato non smentisce i vantaggi di un veicolo 6WD in termini di stabilità strutturale e di una minor sensibilità al fenomeno di trasferimento di carico che si ripartisce su più ruote.

Sul fronte delle prestazioni dei veicoli, è stato necessario innanzitutto introdurre un metodo per la valutazione della velocità massima in curva di regime. I risultati ottenuti hanno mostrato come tutte le architetture studiate posso raggiungere la medesima velocità massima, ma sul modo di raggiungere tale velocità, un veicolo a ruote indipendenti sterzanti e motrici come il 4WD/4WS è avvantaggiato.

È stato studiato quindi il legame tra gli ingressi disponibili e l'assetto di un veicolo 4WD/4WS mostrando che lo stesso assetto può essere raggiunto con diverse combinazioni di ingressi, le quali comportano diverse proprietà di stabilità.

Sul fronte sperimentale, la necessità di iniziare l'allestimento dal principio e le tempistiche non ha permesso di implementare delle logiche di controllo del veicolo e della dinamica laterale. È stato comunque possibile giungere ad avere dei veicoli funzionanti.

## 6.1 Sviluppi futuri

La complessità del problema fa sì che i fronti su cui possa ancora indagare siano diversi. In seguito verranno riassunti i principali aspetti sui quali si consiglia di indagare.

- (a) Sfruttando i risultati del Capitolo 3 è possibile progettare e in seguito implementare un sistema di controllo che intervenga sul rapporto tra sterzo anteriore e posteriore in un veicolo 4WD/4WS con l'obiettivo di modificarne il comportamento da sovrasterzante a sottosterzante e viceversa. Tale comportamento può essere reso dinamico dando la possibilità al guidatore di scegliere il comportamento del veicolo.
- (b) Una condizione di moto molto comune sulla quale si possono studiare le caratteristiche delle architetture proposte (con relativi vantaggi e svantaggi) è quella di *ingresso in curva*. Dal punto di vista modellistico tale

condizione di moto è descrivibile come una condizione in cui il veicolo ha velocità costante e passa da un raggio di curva infinito (curvatura nulla) ad un raggio finito.

- (c) Un'altra condizione di moto, nella quale conviene studiare i veicoli, è quella di accelerazione in fase di curva, modellizabile come una situazione in cui la velocità di veicolo passa da una iniziale ad una finale mentre il raggio di curva rimane costante.
- (d) Lo studio delle configurazioni multiple di un veicolo 4WD/4WS può essere proseguito definendo degli indici e dei criteri per la scelta della configurazione da attuare.





# Appendice A

## Espressioni complete

Nel corso di questa appendice vengono scritte le espressioni complete, omesse per rendere più leggibili i passaggi descritti in precedenza.

## A.1 Effetto del trasferimento di carico sulle forze di pneumatico

### A.1.1 Veicolo 4WD/4WS

L'espressione generalizzata che esprime le forze generate dagli pneumatici è data da:

$$F_{Li} = F_{Li,N} \pm a\Delta F_{Li,X} \pm b\Delta F_{Li,Y} \quad i=FL,FR,BL,BR \quad (A.1)$$

$$F_{Ti} = F_{Ti,N} \pm a\Delta F_{Ti,X} \pm b\Delta F_{Ti,Y}$$

dove i parametri a e b sono dati da:

<i>i</i>	<i>FL</i>	<i>FR</i>	<i>BL</i>	<i>BR</i>
<i>a</i>	-1	-1	1	1
<i>b</i>	-1	1	-1	1

Le espressioni delle variazioni di forza dovute al trasferimento di carico sono date da:

$$\begin{aligned} \Delta F_{Li,X} &= \frac{\Delta F_{ZX}}{2} \mu_L (\lambda_i, \alpha_i) \\ \Delta F_{Ti,X} &= \frac{\Delta F_{ZX}}{2} \mu_T (\lambda_i, \alpha_i) \\ \Delta F_{Li,Y} &= \frac{\Delta F_{ZY}}{2} \mu_L (\lambda_i, \alpha_i) \\ \Delta F_{Ti,Y} &= \frac{\Delta F_{ZY}}{2} \mu_T (\lambda_i, \alpha_i) \end{aligned} \quad i=FL,FR,BL,BR \quad (A.2)$$

### A.1.2 Veicolo 6WD

Le forze dei pneumatici sono date da:

$$F_{Li} = F_{Li,N} \pm a\Delta F_{Li,X} \pm b\Delta F_{Li,Y} \quad i=1L,1R,2L,2R,3L,3R \quad (A.3)$$

$$F_{Ti} = F_{Ti,N} \pm a\Delta F_{Ti,X} \pm b\Delta F_{Ti,Y}$$

dove i parametri a e b sono dati da:

<i>i</i>	<i>1L</i>	<i>1R</i>	<i>2L</i>	<i>2R</i>	<i>3L</i>	<i>3R</i>
<i>a</i>	-1	-1	0	0	1	1
<i>b</i>	-1	1	-1	1	-1	1

Le variazioni di forza dovute al trasferimento sono date da:

$$\begin{aligned}
 \Delta F_{Li,X} &= \frac{\Delta F_{ZX}}{2} \mu_L (\lambda_i, \alpha_i) \\
 \Delta F_{Ti,X} &= \frac{\Delta F_{ZX}}{2} \mu_T (\lambda_i, \alpha_i) \\
 \Delta F_{Li,Y} &= \frac{\Delta F_{ZY}}{3} \mu_L (\lambda_i, \alpha_i) \\
 \Delta F_{Ti,Y} &= \frac{\Delta F_{ZY}}{3} \mu_T (\lambda_i, \alpha_i)
 \end{aligned}
 \quad \text{i=1L,1R,2L,2R,3L,3R} \quad (\text{A.4})$$

Si ricorda che  $\mu_L (\lambda_i, \alpha_i)$  e  $\mu_T (\lambda_i, \alpha_i)$  sono date dal modello di pneumatico con carico verticale unitario.

## A.2 Effetto del trasferimento di carico sulle forze di veicolo

### A.2.1 Veicolo 4WD/4WS

Le forze di veicolo e il momento totale attorno a  $Z$  sono dati da:

$$\begin{aligned} F_X &= F_{XN} + \Delta F_{ZX} \Delta F_{X,X1} + \Delta F_{ZY} \Delta F_{X,Y1} \\ F_Y &= F_{YN} + \Delta F_{ZX} \Delta F_{Y,X1} + \Delta F_{ZY} \Delta F_{Y,Y1} \\ M_Z &= M_{ZN} + \Delta F_{ZX} \Delta M_{Z,X1} + \Delta F_{ZY} \Delta M_{Z,Y1} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Le variazioni delle forze lungo gli assi a causa del trasferimento di carico sono date da:

$$\begin{aligned} \Delta F_{X,X1} &= \frac{1}{2} [ -\mu_L (\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \cos \delta_{FL} + \mu_T (\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \sin \delta_{FL} \\ &\quad - \mu_L (\lambda_{FR}, \alpha_{FR}) \cos \delta_{FR} + \mu_T (\lambda_{FR}, \alpha_{FR}) \sin \delta_{FR} \\ &\quad + \mu_L (\lambda_{BL}, \alpha_{BL}) \cos \delta_{BL} - \mu_T (\lambda_{BL}, \alpha_{BL}) \sin \delta_{BL} \\ &\quad + \mu_L (\lambda_{BR}, \alpha_{BR}) \cos \delta_{BR} - \mu_T (\lambda_{BR}, \alpha_{BR}) \sin \delta_{BR} ] \\ \Delta F_{X,Y1} &= \frac{1}{2} [ -\mu_L (\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \cos \delta_{FL} + \mu_T (\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \sin \delta_{FL} \\ &\quad + \mu_L (\lambda_{FR}, \alpha_{FR}) \cos \delta_{FR} - \mu_T (\lambda_{FR}, \alpha_{FR}) \sin \delta_{FR} \\ &\quad - \mu_L (\lambda_{BL}, \alpha_{BL}) \cos \delta_{BL} + \mu_T (\lambda_{BL}, \alpha_{BL}) \sin \delta_{BL} \\ &\quad + \mu_L (\lambda_{BR}, \alpha_{BR}) \cos \delta_{BR} - \mu_T (\lambda_{BR}, \alpha_{BR}) \sin \delta_{BR} ] \\ \Delta F_{Y,X1} &= \frac{1}{2} [ -\mu_L (\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \sin \delta_{FL} - \mu_T (\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \cos \delta_{FL} \\ &\quad - \mu_L (\lambda_{FR}, \alpha_{FR}) \sin \delta_{FR} - \mu_T (\lambda_{FR}, \alpha_{FR}) \cos \delta_{FR} \\ &\quad + \mu_L (\lambda_{BL}, \alpha_{BL}) \sin \delta_{BL} + \mu_T (\lambda_{BL}, \alpha_{BL}) \cos \delta_{BL} \\ &\quad + \mu_L (\lambda_{BR}, \alpha_{BR}) \sin \delta_{BR} + \mu_T (\lambda_{BR}, \alpha_{BR}) \cos \delta_{BR} ] \\ \Delta F_{Y,Y1} &= \frac{1}{2} [ -\mu_L (\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \sin \delta_{FL} - \mu_T (\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \cos \delta_{FL} \\ &\quad + \mu_L (\lambda_{FR}, \alpha_{FR}) \sin \delta_{FR} + \mu_T (\lambda_{FR}, \alpha_{FR}) \cos \delta_{FR} \\ &\quad - \mu_L (\lambda_{BL}, \alpha_{BL}) \sin \delta_{BL} - \mu_T (\lambda_{BL}, \alpha_{BL}) \cos \delta_{BL} \\ &\quad + \mu_L (\lambda_{BR}, \alpha_{BR}) \sin \delta_{BR} + \mu_T (\lambda_{BR}, \alpha_{BR}) \cos \delta_{BR} ] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

mentre le variazioni del momento totale sono:

$$\begin{aligned}
 \Delta M_{Z,X1} = \frac{1}{2} \{ & L_F [ -\mu_L (\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \sin \delta_{FL} - \mu_T (\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \cos \delta_{FL} \\
 & -\mu_L (\lambda_{FR}, \alpha_{FR}) \sin \delta_{FR} - \mu_T (\lambda_{FR}, \alpha_{FR}) \cos \delta_{FR}] \\
 & L_R [ -\mu_L (\lambda_{FR}, \alpha_{FR}) \cos \delta_{FR} + \mu_T (\lambda_{FR}, \alpha_{FR}) \sin \delta_{FR} \\
 & +\mu_L (\lambda_{BR}, \alpha_{BR}) \cos \delta_{BR} - \mu_T (\lambda_{BR}, \alpha_{BR}) \sin \delta_{BR}] \\
 & -L_B [ \mu_L (\lambda_{BL}, \alpha_{BL}) \sin \delta_{BL} + \mu_T (\lambda_{BL}, \alpha_{BL}) \cos \delta_{BL} \\
 & +\mu_L (\lambda_{BR}, \alpha_{BR}) \sin \delta_{BR} + \mu_T (\lambda_{BR}, \alpha_{BR}) \cos \delta_{BR}] \\
 & -L_L [ -\mu_L (\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \cos \delta_{FL} + \mu_T (\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \sin \delta_{FL} \\
 & +\mu_L (\lambda_{BL}, \alpha_{BL}) \cos \delta_{BL} - \mu_T (\lambda_{BL}, \alpha_{BL}) \sin \delta_{BL}] \} \quad (A.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta M_{Z,Y1} = \frac{1}{2} \{ & L_F [ -\mu_L (\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \sin \delta_{FL} - \mu_T (\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \cos \delta_{FL} \\
 & +\mu_L (\lambda_{FR}, \alpha_{FR}) \sin \delta_{FR} + \mu_T (\lambda_{FR}, \alpha_{FR}) \cos \delta_{FR}] \\
 & L_R [ \mu_L (\lambda_{FR}, \alpha_{FR}) \cos \delta_{FR} - \mu_T (\lambda_{FR}, \alpha_{FR}) \sin \delta_{FR} \\
 & +\mu_L (\lambda_{BR}, \alpha_{BR}) \cos \delta_{BR} - \mu_T (\lambda_{BR}, \alpha_{BR}) \sin \delta_{BR}] \\
 & -L_B [ -\mu_L (\lambda_{BL}, \alpha_{BL}) \sin \delta_{BL} - \mu_T (\lambda_{BL}, \alpha_{BL}) \cos \delta_{BL} \\
 & +\mu_L (\lambda_{BR}, \alpha_{BR}) \sin \delta_{BR} + \mu_T (\lambda_{BR}, \alpha_{BR}) \cos \delta_{BR}] \\
 & -L_L [ -\mu_L (\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \cos \delta_{FL} + \mu_T (\lambda_{FL}, \alpha_{FL}) \sin \delta_{FL} \\
 & -\mu_L (\lambda_{BL}, \alpha_{BL}) \cos \delta_{BL} + \mu_T (\lambda_{BL}, \alpha_{BL}) \sin \delta_{BL}] \} \quad (A.8)
 \end{aligned}$$

### A.2.2 Veicolo 6WD

Come per il 4WD/4WS le forze di veicolo e il momento totale di rotazione attorno a  $Z$  sono dati da:

$$\begin{aligned}
 F_X &= F_{XN} + \Delta F_{ZX} \Delta F_{X,X1} + \Delta F_{ZY} \Delta F_{X,Y1} \\
 F_Y &= F_{YN} + \Delta F_{ZX} \Delta F_{Y,X1} + \Delta F_{ZY} \Delta F_{Y,Y1} \\
 M_Z &= M_{ZN} + \Delta F_{ZX} \Delta M_{Z,X1} + \Delta F_{ZY} \Delta M_{Z,Y1}
 \end{aligned} \quad (A.9)$$

quindi le variazioni delle forze sono:

$$\begin{aligned}
 \Delta F_{X,X1} &= \frac{1}{2} [ -\mu_L (\lambda_{1L}, \alpha_{1L}) - \mu_L (\lambda_{1R}, \alpha_{1R}) \\
 &\quad + \mu_L (\lambda_{3L}, \alpha_{3L}) + \mu_L (\lambda_{3R}, \alpha_{3R}) ] \\
 \Delta F_{X,Y1} &= \frac{1}{3} [ -\mu_L (\lambda_{1L}, \alpha_{1L}) + \mu_L (\lambda_{1R}, \alpha_{1R}) \\
 &\quad - \mu_L (\lambda_{2L}, \alpha_{2L}) + \mu_L (\lambda_{2R}, \alpha_{2R}) \\
 &\quad - \mu_L (\lambda_{3L}, \alpha_{3L}) + \mu_L (\lambda_{3R}, \alpha_{3R}) ] \\
 \Delta F_{Y,X1} &= \frac{1}{2} [ -\mu_T (\lambda_{1L}, \alpha_{1L}) - \mu_T (\lambda_{1R}, \alpha_{1R}) \\
 &\quad + \mu_T (\lambda_{3L}, \alpha_{3L}) + \mu_T (\lambda_{3R}, \alpha_{3R}) ] \\
 \Delta F_{Y,Y1} &= \frac{1}{3} [ -\mu_T (\lambda_{1L}, \alpha_{1L}) + \mu_T (\lambda_{1R}, \alpha_{1R}) \\
 &\quad - \mu_T (\lambda_{2L}, \alpha_{2L}) + \mu_T (\lambda_{2R}, \alpha_{2R}) \\
 &\quad - \mu_T (\lambda_{3L}, \alpha_{3L}) + \mu_T (\lambda_{3R}, \alpha_{3R}) ]
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Variazioni del momento totale:

$$\begin{aligned}
 \Delta M_{Z,X1} &= \frac{1}{2} \{ L_F [ -\mu_T (\lambda_{1L}, \alpha_{1L}) - \mu_T (\lambda_{1R}, \alpha_{1R}) ] \\
 &\quad + L_R [ -\mu_L (\lambda_{1R}, \alpha_{1R}) + \mu_L (\lambda_{3R}, \alpha_{3R}) ] \\
 &\quad - L_B [ \mu_T (\lambda_{3L}, \alpha_{3L}) + \mu_T (\lambda_{3R}, \alpha_{3R}) ] \\
 &\quad - L_L [ -\mu_L (\lambda_{1L}, \alpha_{1L}) + \mu_L (\lambda_{3L}, \alpha_{3L}) ] \}
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta M_{Z,Y1} &= \frac{1}{3} \{ L_F [ -\mu_T (\lambda_{1L}, \alpha_{1L}) + \mu_T (\lambda_{1R}, \alpha_{1R}) ] \\
 &\quad + L_R [ \mu_L (\lambda_{1R}, \alpha_{1R}) + \mu_L (\lambda_{2R}, \alpha_{2R}) + \mu_L (\lambda_{3R}, \alpha_{3R}) ] \\
 &\quad - L_B [ -\mu_T (\lambda_{3L}, \alpha_{3L}) + \mu_T (\lambda_{3R}, \alpha_{3R}) ] \\
 &\quad - L_L [ -\mu_L (\lambda_{1L}, \alpha_{1L}) - \mu_L (\lambda_{2L}, \alpha_{2L}) - \mu_L (\lambda_{3L}, \alpha_{3L}) ] \}
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

# Appendice B

## Allestimento veicoli di test

L'allestimento dei veicoli è stata una parte che ha richiesto un tempo considerevole e le fasi seguite, sia per il veicolo 4WD/4WS che per il veicolo 6WD sono:

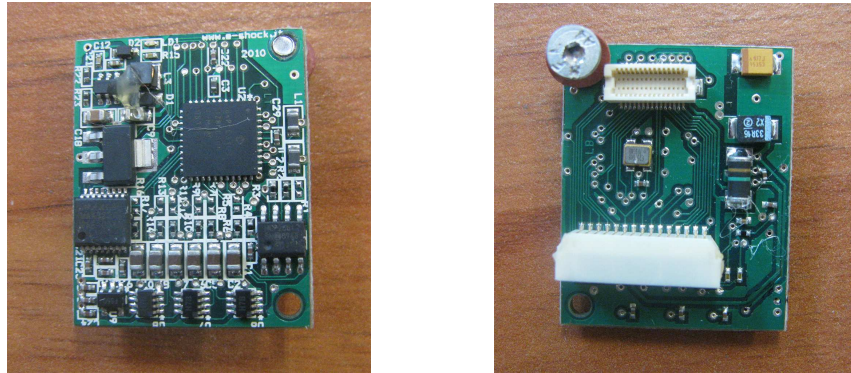
- Montaggio componenti sullo chassis di veicolo: in tale fase si è avuto cura di montare i componenti con l'obiettivo di avere un veicolo il più equilibrato possibile (in cui il centro di massa corrispondesse con baricentro geometrico).
- Cablaggio del veicolo: nel collegamento tra i vari componenti l'attenzione è stata rivolta all'ordine e all'affidabilità del cablaggio, facilitando futuri interventi sui veicoli e riducendo il rischio di distacco dei collegamenti a causa delle vibrazioni.
- Scelta e cablaggio dell'elettronica di controllo: vista la numerosità degli attuatori da controllare e dei sensori da misurare si è optato per un'elettronica multi-controllore, composta da due microcontrollori identici:
  - (a) *Master*: è dedicato all'elaborazione dei comandi ricevuti, all'elaborazione del controllo e alla lettura dei sensori.
  - (b) *Slave*: è dedicato al comando degli attuatori.

I due microcontroller comunicano tra loro in *CAN BUS*.

*Le specifiche di progetto richiedono un controllo mediante piattaforma iPhone con canale di comunicazione Bluetooth®*

## B.1 Componenti

### B.1.1 Microcontrollore



**Figura B.1:** Microcontrollore

I microcontrollori sono della prodotti dall'azienda Microchip della famiglia PIC24 (a 16 bit), identificativo dsPIC33FJ64MC804. Per maggiori dettagli fare riferimento al datasheet del produttore sul sito <http://www.microchip.com>

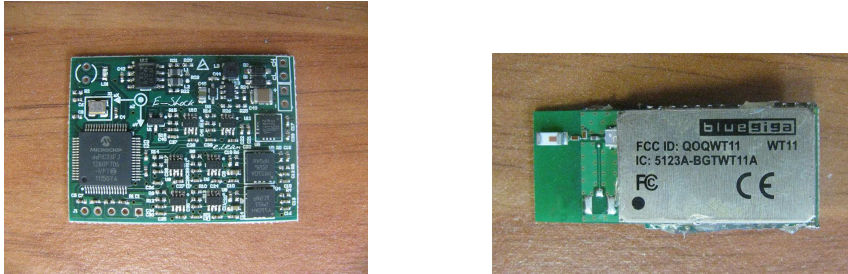
**Tabella B.1:** Dati microcontrollore

Frequenza clock	20MHz
Segnali PWM indipendenti	4
Encoder di velocità misurabili	4

### B.1.2 Piattaforma inerziale e modulo Bluetooth®

La piattaforma inerziale è munita di un microcontrollore per l'elaborazione dei dati, che sono inviati al *Master* tramite *CAN BUS* con frequenza selezio-



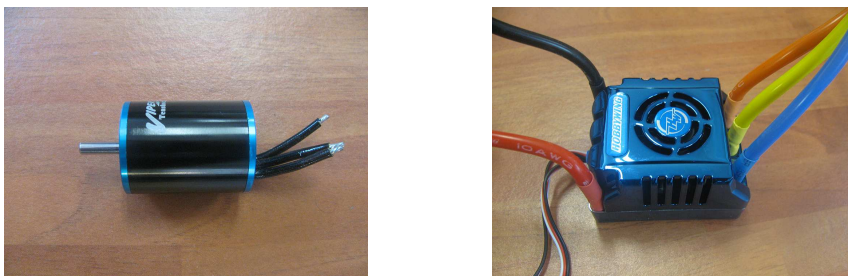


**Figura B.2:** Piattaforma inerziale e modulo Bluetooth®

nabile. È una piattaforma a sei gradi di libertà che fornisce la misura delle tre accelerazioni lungo gli assi e delle velocità di rotazione attorno agli assi. Il modulo Bluetooth® è gestito dal firmware fornito dal partner tecnico E-shock, che è stato integrato con il codice di gestione del veicolo. Per motivi legati alla piattaforma iPhone l'invio dei dati avviene a  $5Hz$ .

### B.1.3 Motore e azionamento

Il motore è di tipo *brushless* (sincrono a magneti permanenti). Il sistema di tensioni trifase equilibrato necessario al funzionamento del motore è generato dall'azionamento di tipo sensorless (genera le tensioni senza misurare la velocità di motore). Il riferimento fornito dal microcontrollore rappresenta il riferimento di corrente (quindi di coppia) che l'azionamento fornisce al motore.



**Figura B.3:** Motore e azionamento

L'azionamento comprende un utile circuito BEC (battery eliminator circuit) che fornisce un'alimentazione da 5V fino a un massimo di 3A per l'alimen-

**Tabella B.2:** Dati motore

Modello	Viper 1520
Potenza nominale	650W
Peso	105g
Diametro asse	4mm

tazione dell'elettronica di bassa potenza. Tale alimentazione viene sfruttata per alimentare i sensori di velocità: l'alimentazione dell'*i*-esimo circuito BEC alimenta l'*i*-esimo sensore di velocità. Nel veicolo 4WD/4WS i circuiti BEC alimentano anche i rispettivi attuatori di sterzo (servomotori) la cui richiesta di potenza è contenuta.

**Tabella B.3:** Dati azionamento

Modello	Xerun 150A
Corrente nominale	150A
Corrente massima	950A
Alimentazione	2-6 celle LiPo
Peso	105g

#### **B.1.4 Servomotore: attuatore di sterzo**

Il servomotore è un organo di attuazione con un controllo di posizione integrato. Esso riceve in ingresso dal microcontrollore un segnale che ne determina la posizione angolare rispetto alla posizione iniziale.

Nelle figure sottostanti si possono osservare il servomotore e il meccanismo biella manovella che trasferisce il moto allo sterzo di ruota.

**Figura B.4:** Attuatore dello sterzo**Tabella B.4:** Dati servomotore

Modello	Thunder Tiger DS1015
Tensione di alimentazione	$4.8 - 6V$
Coppia a $6V$	$1.4Nm$
Tempo di transito a $6V$	$0.108 \frac{s}{60^\circ}$
Alimentazione	2-6 celle LiPo
Peso	$66g$

### B.1.5 Segnale di comando dell'azionamento motore e del servomotore

Entrambi i componenti sono comandati dalla stessa tipologia di segnale: un segnale PWM a onda quadra, che assume il valore logico alto (pari alla tensione di alimentazione del microcontrollore) per un tempo  $t_{on}$  e valore logico basso ( $0V$ ) per la restante parte del periodo  $T$ .

Il tempo  $t_{on}$  è vincolato nel range  $[1ms, 2ms]$  e in funzione dell'attuatore corrisponde a:

- Azionamento motore

$$(a) \quad t_{on} = 1ms \quad \rightarrow \quad T = -T_{MAX}$$

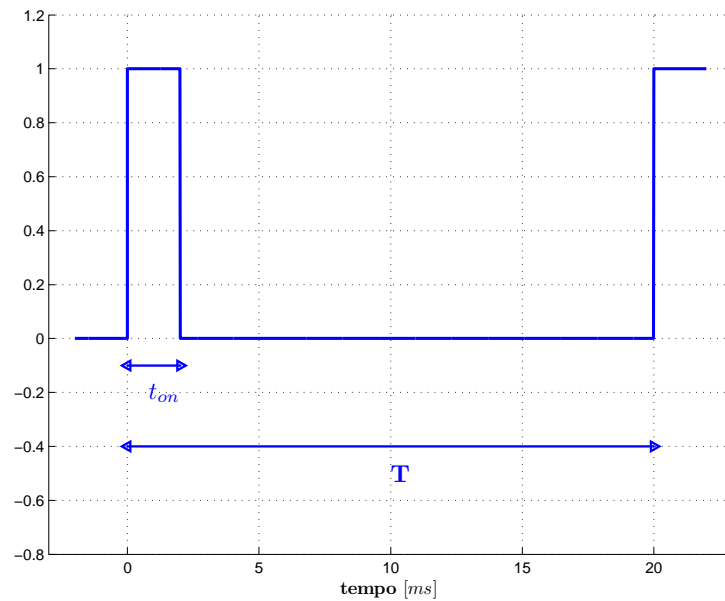
$$(b) \quad t_{on} = 2ms \quad \rightarrow \quad T = T_{MAX}$$

- Servomotore

$$(a) \quad t_{on} = 1ms \quad \rightarrow \quad \theta = 0$$

$$(b) \quad t_{on} = 2ms \quad \rightarrow \quad \theta = \theta_{MAX}$$

mentre il periodo ( $T$ ) dell'onda PWM è pari a  $20ms$ .



**Figura B.5:** Segnale di comando PWM

Il codice di gestione dei veicoli è scritto in modo che per il controllo delle coppie e degli sterzi si abbiano a disposizione 200 livelli. Tale scelta rappresenta un buon compromesso tra l'accuratezza del controllo, e la dimensione dei messaggi che viaggiano in *CAN BUS* tra i due microcontrollori.

*Limiti dei microcontrollori hanno inoltre obbligato a generare tali segnali di comando (uno per ogni attuatore) tramite software.*

### B.1.6 Batterie

Ciascun veicolo è munito di quattro batterie collegate in configurazione *2p2s* (due gruppi di due batterie ciascuno collegati in serie, le batterie del gruppo sono collegate in parallelo) che forniscono una tensione nominale e una corrente di picco doppie rispetto alla singola cella (rispettivamente  $15V$  e  $300A$ ).

**Figura B.6:** Batteria di alimentazione**Tabella B.5:** Dati cella batteria

Modello	Giant Power
Tipologia	LiPo (Litio-Polimeri)
Tensione nominale	7.4V
Capienza	6200mAh
Corrente di picco	25C (25·6200mA)

### B.1.7 Sensore di velocità di ruota

Il sensore di velocità è realizzato mediante una coppia *sensore hall-magnete*. Il sensore hall è montato sullo chassis del veicolo mentre il magnete è montato sulla ruota. Ad ogni passaggio del magnete, il sensore hall genera un impulso di tensione letto dal microcontrollore.

**Tabella B.6:** Dati sensore hall

Modello	Hamlin 55100
Frequenza massima di switching	20KHz
Tensione di alimentazione	3.8 – 24V



**Figura B.7:** Sensore hall

La tipologia di sensore scelta presenta delle problematiche riportate in seguito.

- La frequenza di campionamento ( $f_s$ ) della velocità di ruota dipende dalla velocità stessa.

$$f_s = 60\omega$$

dove  $\omega$  è la velocità di ruota espressa in *rpm* (rotazioni al minuto).

- Impossibile misurare velocità nulle, dovendo aspettare un tempo infinito.

È stato posto un time-out alla lettura della velocità, superato il quale la velocità stessa è considerata nulla. In termini di controllo ciò corrisponde a non poter misurare velocità inferiori ad una certa soglia.

$$\omega_{MIN} = \frac{1}{T_{limite}}$$

- La velocità massima misurabile è limitata dalla frequenza del timer del microcontrollore.

$$\omega_{MAX} = 60f_{TIMER}$$

Tale vincolo non è preoccupante dato che si usa un timer da  $100KHz$ .

- La risoluzione in velocità diminuisce all'aumentare della velocità. Tenendo conto anche del raggio della ruota è possibile ricavare la velocità lineare del centro ruota in funzione del tempo misurato ( $T_{mis}$ ), in

condizioni di slittamento nullo.

$$V_r = \frac{2\pi R_r}{T_{mis}}$$

Da quest'ultima espressione è possibile ricavare un'espressione che lega la variazione di velocità con la variazione del tempo misurato dal microcontrollore, e in seguito una relazione tra la variazione minima di velocità al centro ruota e la variazione minima del tempo misurato.

$$\Delta V_{r,MIN} = \frac{1}{2\pi R_r} \frac{-V^2 \Delta T_{MIN}}{1 + \frac{V}{2\pi R_r} \Delta T_{MIN}}$$

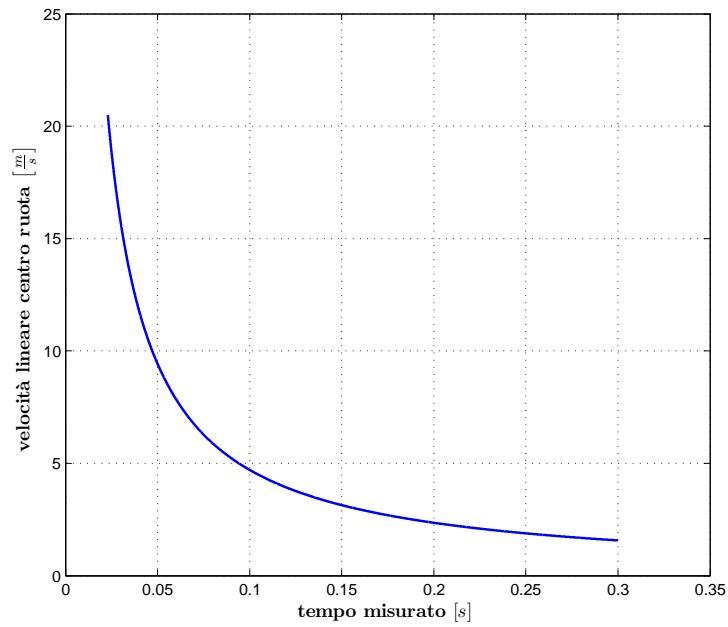
$\Delta T_{MIN}$  è la minima variazione percepita dal timer: positiva per velocità decrescente, negativa per velocità crescente. Questo implica che la risoluzione del sensore di velocità non dipende solo dalla velocità ma anche dal segno della sua derivata: la risoluzione per velocità crescenti è diversa da quella per velocità decrescenti.

La Figura B.8 e la Figura B.9 mostrano graficamente quanto descritto con le espressioni. *I dati sono espressi in velocità equivalente del centro ruota con slip nullo.*

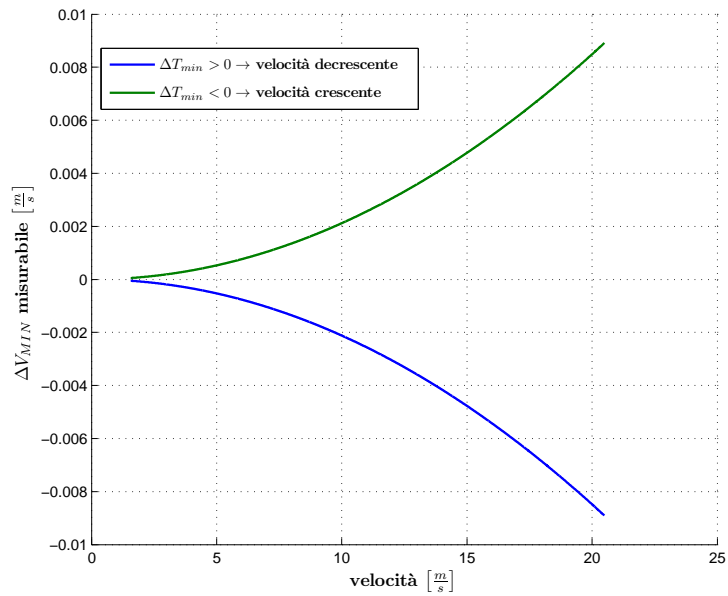
Considerando come range di velocità plausibile, per i veicoli in questione,  $2 \div 17 \frac{m}{s}$  ( $7 \div 60 \frac{Km}{h}$ ), la differenza tra la risoluzione per velocità crescenti e quella per velocità decrescenti è trascurabile. Inoltre, si ha:

- (a) Risoluzione a bassa velocità ( $3 \frac{m}{s}$ )  $\rightarrow \Delta V_{r,MIN} = 0.19 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$
- (b) Risoluzione ad alta velocità ( $15 \frac{m}{s}$ )  $\rightarrow \Delta V_{r,MIN} = 4.8 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$

Nonostante siano molto diversi tra loro i valori sono entrambi accettabili.



**Figura B.8:** Caratteristica sensore di velocità

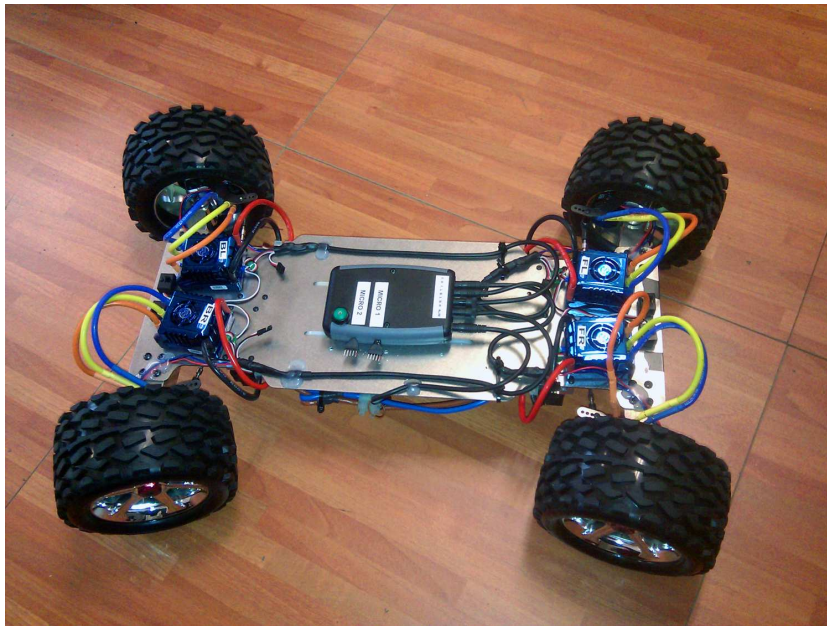


**Figura B.9:** Risoluzione sensore di velocità

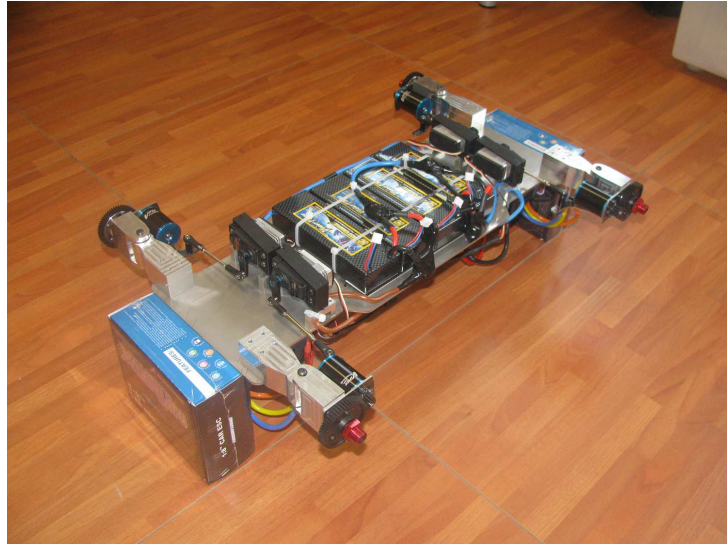


## B.2 Veicolo 4WD/4WS

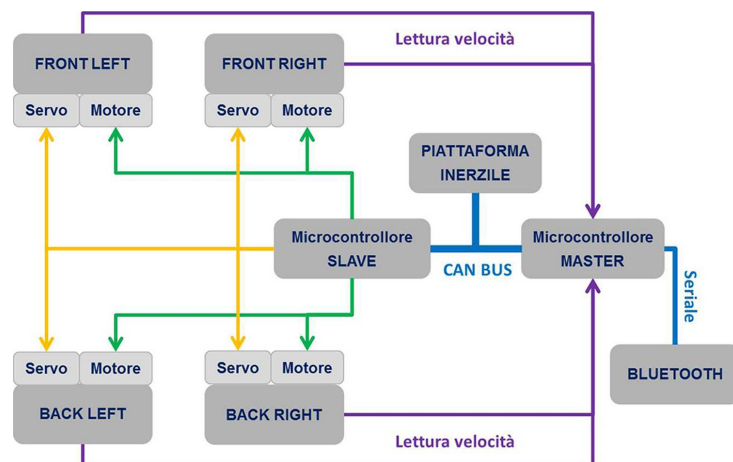
Le seguenti figure mostrano il veicolo 4WD/4WS completamente allestito e in particolare la Figura B.12 mostra il collegamenti tra i componenti che compongono l'elettronica di controllo. Come si può notare il microcontrollore Slave è dedicato alla gestione degli attuatori (quattro servomotori e quattro motori) e alla generazione dei segnali per il loro comando. Il master, invece, si occupa della lettura dei sensori di velocità, della ricezione dei dati dalla piattaforma inerziale e della gestione del modulo Bluetooth® per la comunicazione con la piattaforma iPhone.



**Figura B.10:** Veicolo 4WS/4WD completo



**Figura B.11:** Veicolo 4WS/4WD: telaio e fissaggio batterie



**Figura B.12:** Veicolo 4WS/4WD: elettronica di controllo

## B.3 Veicolo 6WD

Si presentano quindi le foto del veicolo 6WD allestito.

Per tale veicolo è stato necessario modificare lo schema di collegamento dei componenti elettronici, a causa dei limiti dei microcontrollori, i quali non possono gestire più di quattro sensori di velocità. Quindi, le velocità delle ruote centrali sono misurate dallo Slave ed inviate via *CAN BUS* al Master.



**Figura B.13:** Veicolo 6WD completo

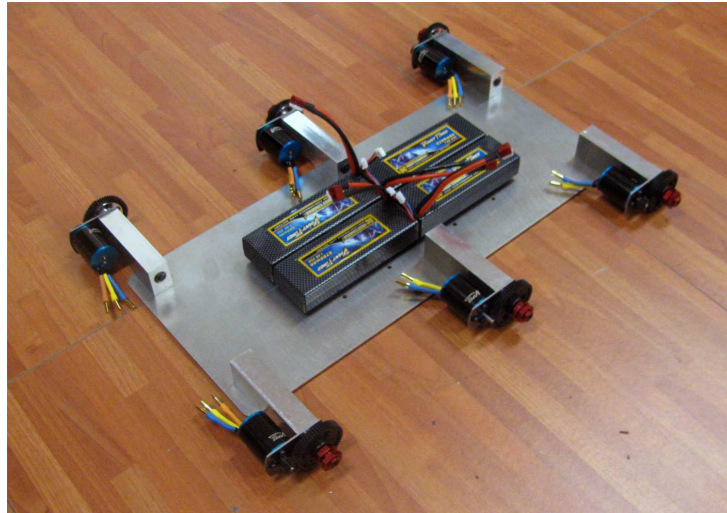


Figura B.14: Veicolo 6WD: telaio e fissaggio batterie

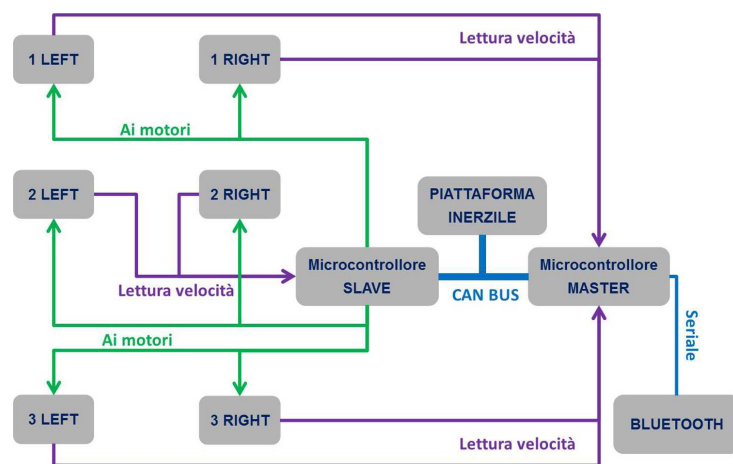


Figura B.15: Veicolo 6WD: elettronica di controllo

# Bibliografia

- [1] M. Gerard. *Global Chassis Control and Braking Control using Tyre Forces Measurement*. PhD thesis, Technical University of Delft, 2011.
- [2] Jingliang Li, Yang Zhang, Jingang Yi, and Zhaodu Liu. Understanding agile-maneuver driving strategies using coupled longitudinal/lateral vehicle dynamics. *ASME Conference Proceedings*, 2011(54761):869–876, 2011.
- [3] Andrea R., Susanna P., Luca P., Jury A., and Mirko I. Appunti del corso di meccanica del veicolo: L'autoveicolo.
- [4] Byrd R.H., J. C. Gilbert, and J. Nocedal. A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 89(1):149–185, 2000.
- [5] Byrd R.H., Mary E. Hribar, and J. Nocedal. An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 9(4):877–900, 1999.
- [6] N.Schiavoni P.Bolzern R.Scattolini. *Fondamenti di controlli automatici*. McGraw-Hill, 1998.
- [7] L. Magni R. Scattolini. *Complementi di Controlli Automatici*. Pitagora Editrice Bologna, 2006.
- [8] Gillespie T. *Foundamentals of Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers, 1992.

## BIBLIOGRAFIA

---

- [9] Qunzhi Zhou and Feiyue Wang. Driver assisted fuzzy control of yaw dynamics for 4wd vehicles. In *Intelligent Vehicles Symposium, 2004 IEEE*, pages 425 – 430, june 2004.