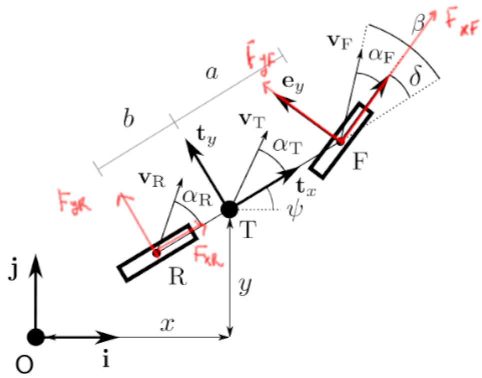
Dynamic bycicle model

Alessio Russo, Carmelo Valore

July 2, 2020

1 Considerazioni caso senza banking



$$
\begin{aligned}
m_{\mathrm{T}}\ddot{x} &= F_{x,\mathrm{F}}\cos(\psi+\delta) + F_{x,\mathrm{R}}\cos\psi - F_{y,\mathrm{F}}\sin(\psi+\delta) - F_{y,\mathrm{R}}\sin\psi \\
m_{\mathrm{T}}\ddot{y} &= F_{x,\mathrm{F}}\sin(\psi+\delta) + F_{x,\mathrm{R}}\sin\psi + F_{y,\mathrm{F}}\cos(\psi+\delta) + F_{y,\mathrm{R}}\cos\psi \\
I_{\mathrm{T}}\ddot{\psi} &= F_{x,\mathrm{F}}a\sin\delta + F_{y,\mathrm{F}}a\cos\delta - F_{y,\mathrm{R}}b,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= v_{\mathrm{T}}\cos(\psi+\alpha_{\mathrm{T}}) \\
\dot{y} &= v_{\mathrm{T}}\sin(\psi+\alpha_{\mathrm{T}}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= \dot{v}_{\mathrm{T}}\cos(\psi+\alpha_{\mathrm{T}}) - v_{\mathrm{T}}\left(\dot{\psi}+\dot{\alpha}_{\mathrm{T}}\right)\sin(\psi+\alpha_{\mathrm{T}}) \\
\ddot{y} &= \dot{v}_{\mathrm{T}}\sin(\psi+\alpha_{\mathrm{T}}) + v_{\mathrm{T}}\left(\dot{\psi}+\dot{\alpha}_{\mathrm{T}}\right)\cos(\psi+\alpha_{\mathrm{T}}).
\end{aligned}
$$

$$\cdots$$

$$
\begin{aligned}
\dot{v}_{\mathrm{T}} &= \frac{F_{x,\mathrm{F}}\cos(\alpha_{\mathrm{T}}-\delta) + F_{x,\mathrm{R}}\cos\alpha_{\mathrm{T}} + F_{y,\mathrm{F}}\sin(\alpha_{\mathrm{T}}-\delta) + F_{y,\mathrm{R}}\sin\alpha_{\mathrm{T}}}{m_{\mathrm{T}}} \\
\dot{\alpha}_{\mathrm{T}} &= \frac{-F_{x,\mathrm{F}}\sin(\alpha_{\mathrm{T}}-\delta) - F_{x,\mathrm{R}}\sin\alpha_{\mathrm{T}} + F_{y,\mathrm{F}}\cos(\alpha_{\mathrm{T}}-\delta) + F_{y,\mathrm{R}}\cos\alpha_{\mathrm{T}} - m_{\mathrm{T}}v\dot{\psi}}{m_{\mathrm{T}}v_{\mathrm{T}}} \\
\ddot{\psi} &= \frac{F_{x,\mathrm{F}}a\sin\delta + F_{y,\mathrm{F}}a\cos\delta - F_{y,\mathrm{R}}b}{I_{\mathrm{T}}}.
\end{aligned}
$$

$$\cdots$$

Figure 1: Modello a bicicletta 3DOF (1)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{x}_1 = x \qquad && \dot{\mathrm{x}}_1 = \mathrm{x}_4 \cos(\mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_5) \\
&\mathrm{x}_2 = y && \dot{\mathrm{x}}_2 = \mathrm{x}_4 \sin(\mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_5) \\
&\mathrm{x}_3 = \psi && \dot{\mathrm{x}}_3 = \mathrm{x}_6 \\
&\mathrm{x}_4 = v_{\mathrm{T}} && \dot{\mathrm{x}}_4 = \frac{F_{x,\mathrm{F}} \cos(\mathrm{x}_5 - \delta) + F_{x,\mathrm{R}} \cos \mathrm{x}_5 + F_{y,\mathrm{F}} \sin(\mathrm{x}_5 - \delta) + F_{y,\mathrm{R}} \sin \mathrm{x}_5}{m_{\mathrm{T}}} \\
&\mathrm{x}_5 = \alpha_{\mathrm{T}} && \dot{\mathrm{x}}_5 = \frac{-F_{x,\mathrm{F}} \sin(\mathrm{x}_5 - \delta) - F_{x,\mathrm{R}} \sin \mathrm{x}_5 + F_{y,\mathrm{F}} \cos(\mathrm{x}_5 - \delta) + F_{y,\mathrm{R}} \cos \alpha_{\mathrm{T}} - m_{\mathrm{T}} \mathrm{x}_4 \mathrm{x}_6}{m_{\mathrm{T}} \mathrm{x}_4} \\
&\mathrm{x}_6 = \dot{\psi} && \dot{\mathrm{x}}_6 = \frac{F_{x,\mathrm{F}} a \sin \delta + F_{y,\mathrm{F}} a \cos \delta - F_{y,\mathrm{R}} b}{I_{\mathrm{T}}}
\end{aligned}
$$

Figure 2: Modello a bicicletta 3DOF (2) - Rappresentazione nello spazio degli stati

2 Considerazioni caso con banking

Nelle seguenti equazioni abbiamo considerato i vettori delle forze come vettori nello spazio e non più semplicemente solo sul piano XY inerziale. Abbiamo considerato che le forze longitudinali e laterali del veicolo siano complanari e giacenti su un piano parallelo al piano inclinato definito dalla strada. All'interno di queste equazioni dunque, abbiamo considerato vari angoli quali Ω, Γ e Δ (figure 4, 5, 6). In particolare: Ω rappresenta l'angolo tra i vettori diretti come le forze laterali del veicolo e il piano XY inerziale; Γ rappresenta l'angolo tra i vettori diretti come le forze longitudinali del veicolo e il piano XY inerziale; Δ è funzione della posizione del veicolo lungo la pista. Abbiamo usato i primi due angoli per proiettare le forze sul piano XY inerziale. Da notare che Γ e Ω sono funzioni dell'angolo di banking γ, della posizione del veicolo all'interno della pista (espresso tramite Δ) e dello yaw angle ψ.

2.1 Su sistema di riferimento inerziale

Equilibri rispetto x e y inerziali

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} = F_{xR}cos(\Gamma)cos(\psi) - F_{yR}cos(\Omega)sin(\psi)+ \\
+F_{xF}cos(\delta)cos(\Gamma)cos(\psi) - F_{xF}sin(\delta)cos(\Omega)sin(\psi)+ \\
-F_{yF}sin(\delta)cos(\Gamma)cos(\psi) - F_{yF}cos(\delta)cos(\Omega)sin(\psi)+ \\
-F_{N}sin(\gamma)cos(\Delta) \\
\\
m\ddot{y} = F_{xR}cos(\Gamma)sin(\psi) + F_{yR}cos(\Omega)cos(\psi)+ \\
+F_{xF}cos(\delta)cos(\Gamma)sin(\psi) + F_{xF}sin(\delta)cos(\Omega)cos(\psi)+ \\
-F_{yF}sin(\delta)cos(\Gamma)sin(\psi) + F_{yF}cos(\delta)cos(\Omega)cos(\psi)+ \\
+F_{N}sin(\gamma)sin(\Delta)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Equilibrio momento sul piano xy (yaw), rispetto al centro di massa

$$I_T\ddot{\psi} = -F_{yR}cos(\Omega)b + F_{xF}sin(\delta)cos(\Omega)a + F_{yF}cos(\delta)cos(\Omega)a \tag{2}$$

Forza normale

$$F_N = mgcos(\gamma) \tag{3}$$

Calcolo Γ e Ω funzioni del banking γ (ref figure 7 e 8)

$$\begin{aligned} \Gamma &= \gamma cos(\Delta + \frac{\pi}{2} - \psi) \\ \Omega &= \gamma sin(\Delta + \frac{\pi}{2} - \psi) \end{aligned} \tag{4}$$

2.2 Su sistema di riferimento solidale al veicolo

Equazioni cambio riferimento - velocità

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_T cos(\alpha_T)cos(\Gamma)cos(\psi) - v_T sin(\alpha_T)cos(\Omega)sin(\psi) \\ \dot{y} &= v_T cos(\alpha_T)cos(\Gamma)sin(\psi) + v_T sin(\alpha_T)cos(\Omega)cos(\psi) \end{aligned} \tag{5}$$

Equazioni cambio riferimento - accelerazione

$$\begin{aligned} \ddot{x} = \dot{v_T}cos(\alpha_T)cos(\Gamma)cos(\psi) - v_T sin(\alpha_T)cos(\Gamma)cos(\psi)\dot{\alpha_T}+ \\ -v_T cos(\alpha_T)sin(\Gamma)cos(\psi)\dot{\Gamma} - v_T cos(\alpha_T)cos(\Gamma)sin(\psi)\dot{\psi}+ \\ -\dot{v_T}sin(\alpha_T)cos(\Omega)sin(\psi) - v_T cos(\alpha_T)cos(\Omega)sin(\psi)\dot{\alpha_T}+ \\ +v_T sin(\alpha_T)sin(\Omega)sin(\psi)\dot{\Omega} - v_T sin(\alpha_T)cos(\Omega)cos(\psi)\dot{\psi} \\ \\ \ddot{y} = \dot{v_T}cos(\alpha_T)cos(\Gamma)sin(\psi) - v_T sin(\alpha_T)cos(\Gamma)sin(\psi)\dot{\alpha_T}+ \\ -v_T cos(\alpha_T)sin(\Gamma)sin(\psi)\dot{\Gamma} + v_T cos(\alpha_T)cos(\Gamma)cos(\psi)\dot{\psi}+ \\ +\dot{v_T}sin(\alpha_T)cos(\Omega)cos(\psi) + v_T cos(\alpha_T)cos(\Omega)cos(\psi)\dot{\alpha_T}+ \\ -v_T sin(\alpha_T)sin(\Omega)cos(\psi)\dot{\Omega} - v_T sin(\alpha_T)cos(\Omega)sin(\psi)\dot{\psi} \end{aligned} \tag{6}$$

Derivate di Γ e Ω

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} = \dot{\psi}\gamma sin(\Delta + \frac{\pi}{2} - \psi)...[-\dot{\Delta}\gamma sin(\Delta + \frac{\pi}{2} - \psi)] \\ \dot{\Omega} = -\dot{\psi}\gamma cos(\Delta + \frac{\pi}{2} - \psi)...[+\dot{\Delta}cos(\Delta + \frac{\pi}{2} - \psi) \\ \dot{\Delta} = ...todo... \end{aligned} \tag{7}$$

Accelerazione longitudinale dopo il cambio del sistema di riferimento

$$\dot{v_T} = \frac{\begin{array}{l} -F_A + \dot{\Omega} v_T cos(\Gamma) sin(\Omega) + F_{xR} cos(\Gamma) cos(\Omega) cos(\alpha_T) + \\ + F_{yR} cos(\Gamma) cos(\Omega) sin(\alpha_T) + F_{xF} cos(\Gamma) cos(\Omega) cos(\alpha_T) cos(\delta) + \\ - F_{yF} cos(\Gamma) cos(\Omega) cos(\alpha_T) sin(\delta) + F_{yF} cos(\Gamma) cos(\Omega) cos(\delta) sin(\alpha_T) + \\ + \dot{\Gamma} v_T cos(\Omega) sin(\Gamma) cos(\alpha_T)^2 + F_{xF} cos(\Gamma) cos(\Omega) sin(\alpha_T) sin(\delta) + \\ - \dot{\Omega} v_T cos(\Gamma) sin(\Omega) cos(\alpha_T)^2 - \dot{\psi} v_T cos(\Gamma)^2 cos(\alpha_T) sin(\alpha_T) + \\ + \dot{\psi} v_T cos(\Omega)^2 cos(\alpha_T) sin(\alpha_T) + \\ - F_N cos(\Delta) cos(\Omega) cos(\alpha_T) cos(\psi) sin(\gamma) + \\ + F_N cos(\Delta) cos(\Gamma) sin(\alpha_T) sin(\gamma) sin(\psi) + \\ + F_N cos(\Gamma) sin(\Delta) cos(\psi) sin(\alpha_T) sin(\gamma) + \\ + F_N cos(\Omega) sin(\Delta) cos(\alpha_T) sin(\gamma) sin(\psi) \end{array}}{cos(\Gamma) cos(\Omega)(m cos(\alpha_T)^2 - cos(\alpha_T)^2 + 1)} \tag{8}$$

Body slip rate dopo il cambio del sistema di riferimento

$$\dot{\alpha_T} = \frac{\begin{array}{l} \dot{\psi} v_T cos(\Omega)^2 cos(\alpha_T)^2 - \dot{\psi} v_T cos(\Omega)^2 + \\ - F_{xR} cos(\Gamma) cos(\Omega) sin(\alpha_T) + \\ + F_{yR} m cos(\Gamma) cos(\Omega) cos(\alpha_T) + \\ - F_{xF} cos(\Gamma) cos(\Omega) cos(\delta) sin(\alpha_T) + \\ + F_{yF} cos(\Gamma) cos(\Omega) sin(\alpha_T) sin(\delta) + \\ - m \dot{\psi} v_T cos(\Gamma)^2 cos(\alpha_T)^2 \\ + F_{xF} m cos(\Gamma) cos(\Omega) cos(\alpha_T) sin(\delta) + \\ - \dot{\Gamma} v_T cos(\Omega) sin(\Gamma) cos(\alpha_T) sin(\alpha_T) + \\ + F_N cos(\Delta) cos(\Omega) cos(\psi) sin(\alpha_T) sin(\gamma) + \\ - F_N cos(\Omega) sin(\Delta) sin(\alpha_T) sin(\gamma) sin(\psi) + \\ + F_{yF} m cos(\Gamma) cos(\Omega) cos(\alpha_T) cos(\delta) + \\ + \dot{\Omega} m v_T cos(\Gamma) sin(\Omega) cos(\alpha_T) sin(\alpha_T) + \\ + F_N m cos(\Delta) cos(\Gamma) cos(\alpha_T) sin(\gamma) sin(\psi) + \\ + F_N m cos(\Gamma) sin(\Delta) cos(\alpha_T) cos(\psi) sin(\gamma) \end{array}}{v_T cos(\Gamma) cos(\Omega)(m cos(\alpha_T)^2 - cos(\alpha_T)^2 + 1)} \tag{9}$$

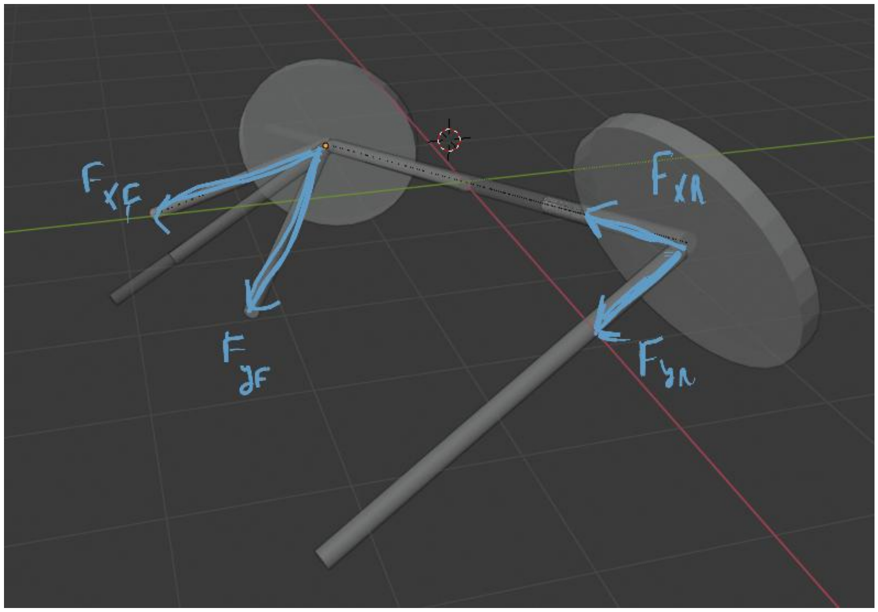


Figure 3: Rappresentazione forze nello spazio

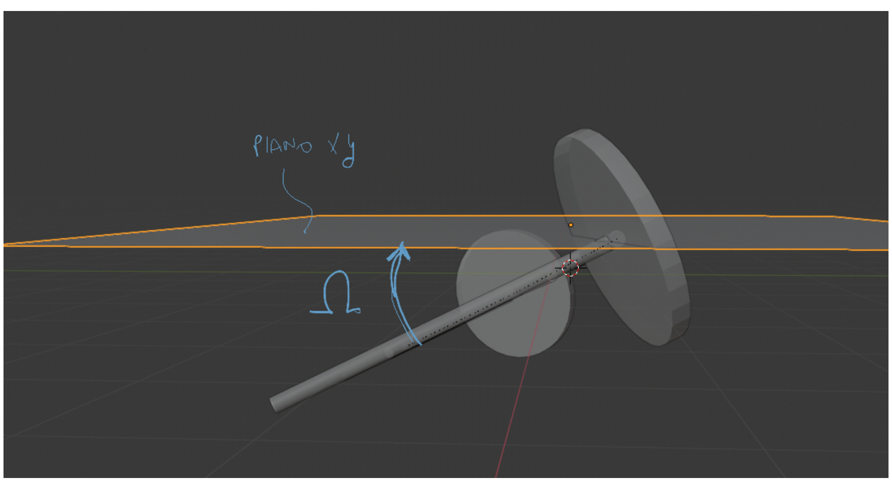


Figure 4: Angolo Ω visualizzato nello spazio

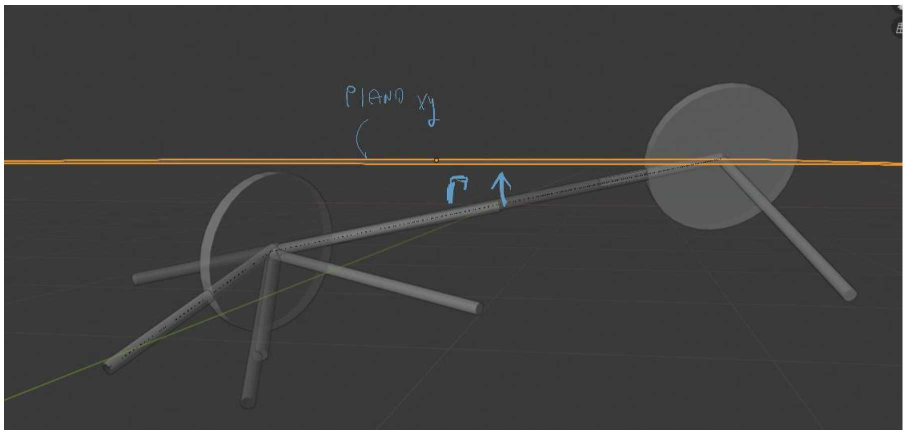


Figure 5: Angolo Γ visualizzato nello spazio

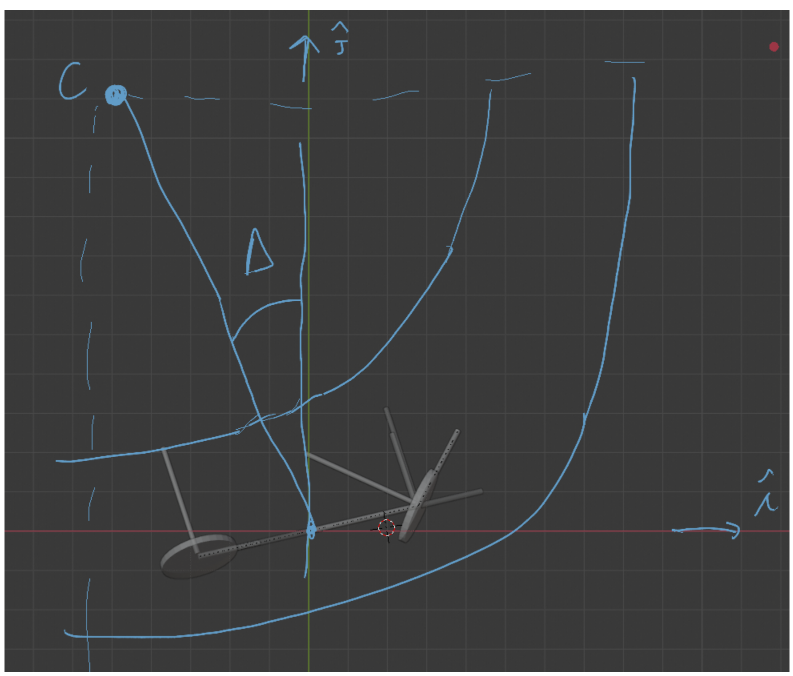


Figure 6: Visione dall'alto dell'angolo Δ

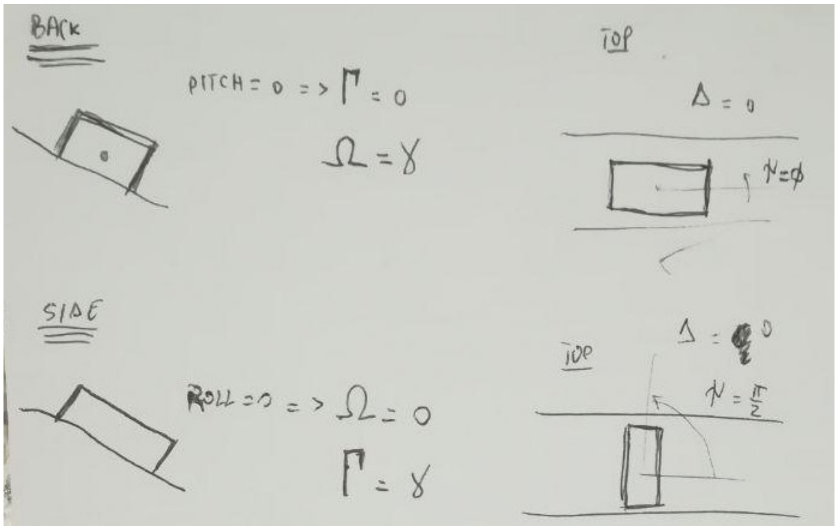


Figure 7: Considerazioni su Γ e Ω

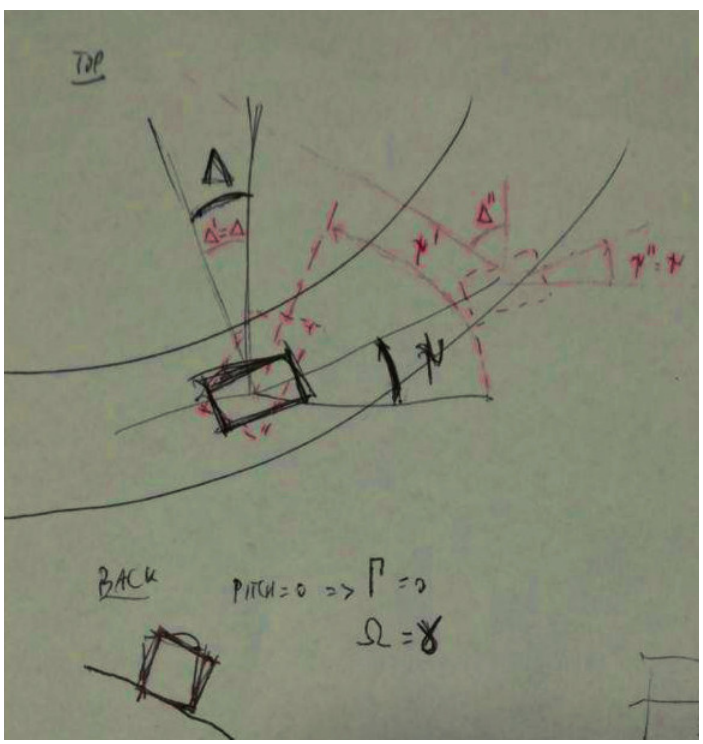


Figure 8: Considerazioni su Γ e Ω

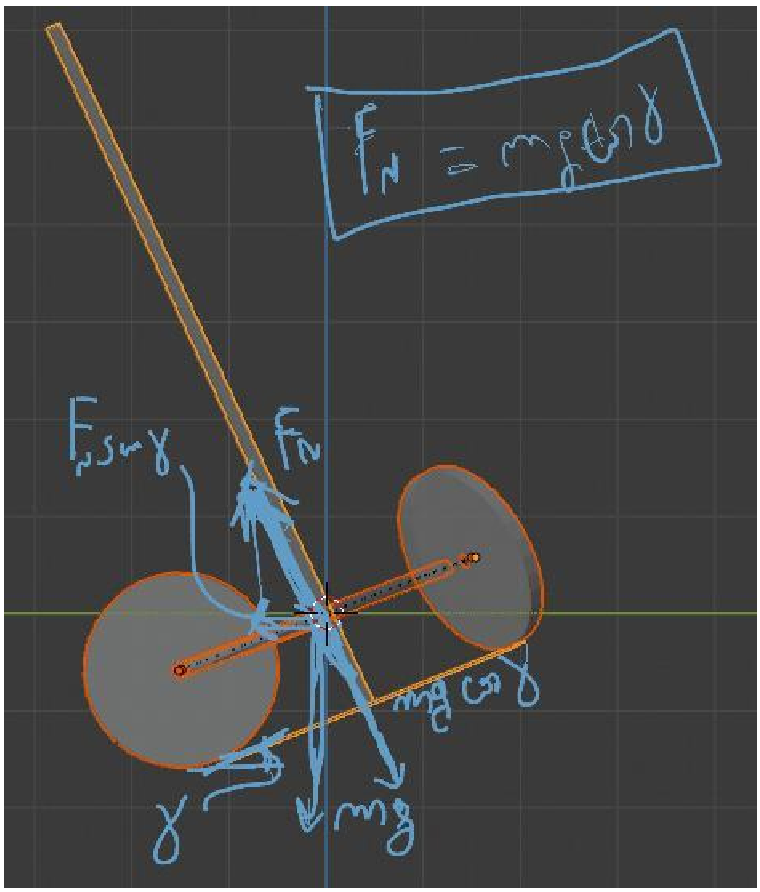


Figure 9: Considerazioni su F_N