Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Computação

Carlos Victor Dantas Araújo

Formulações e Heurísticas para o Problema de Máximo Atendimento em Roteamento Multicast com Restrições de QoS

CAMPINAS
2021

Carlos Victor Dantas Araújo

Formulações e Heurísticas para o Problema de Máximo Atendimento em Roteamento Multicast com Restrições de QoS

Dissertação apresentada ao Instituto de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Luiz Usberti
Coorientador: Prof. Dr. Cid Carvalho de Souza

Este exemplar corresponde à versão da Dissertação entregue à banca antes da defesa.

CAMPINAS
2021

Na versão final esta página será substituída pela ficha catalográfica.

De acordo com o padrão da CCPG: “Quando se tratar de Teses e Dissertações financiadas por agências de fomento, os beneficiados deverão fazer referência ao apoio recebido e inserir esta informação na ficha catalográfica, além do nome da agência, o número do processo pelo qual recebeu o auxílio.”
e
“caso a tese de doutorado seja feita em Cotutela, será necessário informar na ficha catalográfica o fato, a Universidade convenente, o país e o nome do orientador.”

Na versão final, esta página será substituída por outra informando a composição da banca e que a ata de defesa está arquivada pela Unicamp.

Resumo

Peço que o senhor desconsidere por enquanto. Creio que fica mais fácil resumir um trabalho a partir do momento em que sua estrutura já está toda fixada, farei o resumo após efetuar as correções enviadas.

Abstract

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Os avanços nas tecnologias de redes sem fio contribuíram para o surgimento da rede ad hoc móvel, do inglês *Mobile Ad hoc Network* (MANET). MANET é um tipo de rede autoconfigurável composta por um conjunto de nós móveis independentes que são conectados uns aos outros utilizando redes sem fio. Cada nó em uma MANET pode se mover livremente, logo, é comum que suas conexões se alterem com frequência. Estes nós normalmente são dispositivos tais como computadores pessoais, pequenos dispositivos móveis, sensores e telefones celulares.

Há diversas pesquisas interessadas em desenvolver projetos de sistemas de transporte inteligentes, visando uma melhoria na segurança em estradas [40, 25]. Um dos mais importantes sistemas de transporte inteligente é um tipo particular de MANET, conhecido como *Vehicular Ad hoc Network* (VANET) [6]. Nas VANETs, o conjunto de nós da rede é composto por veículos que se movem de acordo com padrões restritos baseados em fatores como sentido da via, regulamentações de trânsito e tráfego [33]. Uma VANET provê comunicação entre veículos, que pode ser de duas maneiras distintas: apenas entre veículos (V2V - *Vehicle to vehicle*) e entre veículos e infraestruturas fixas distribuídas ao longo da estrada como estações base, também chamados de RSU (Roadside Unit), (V2I - *Vehicle to Infrastructure*).

Segundo Karim [23], a aplicação de VANETs é mais indicada para comunicação de redes veiculares por possuir uma sequência de vantagens, tais como o baixo custo de implantação, a possibilidade de comunicação em locais onde não existem infraestruturas fixas e baixa latência na entrega de pacotes de dados, quando comparada com demais tecnologias como redes 3G/4G e *infostation*[1].

As aplicações em VANETs são utilizadas principalmente para auxiliar a comunicação e coordenação entre condutores de veículos, com o objetivo de orientá-los para evitar eventos como acidentes na estrada, engarrafamentos, estradas em más condições, assim como auxiliar no controle do limite máximo de velocidade, levar informações detalhadas sobre acidentes para as equipes de resgate e permitir passagem livre de veículos de emergência. Outra categoria de aplicação é a de entretenimento e conforto para passageiros e motoristas, com acesso à Internet, chats, jogos interativos, reconhecimento de locais livres para estacionamento, dados sobre o preço do combustível, entre outros. Um dos cenários de

[1] *Infostation* é um tipo de rede que oferece grande cobertura geográfica e em alta velocidade, contanto que as aplicações tenham tolerância a atrasos significativos na entrega.

funcionamento de VANETs, utilizando comunicação V2V e V2I, é apresentada na Figura 1.1.

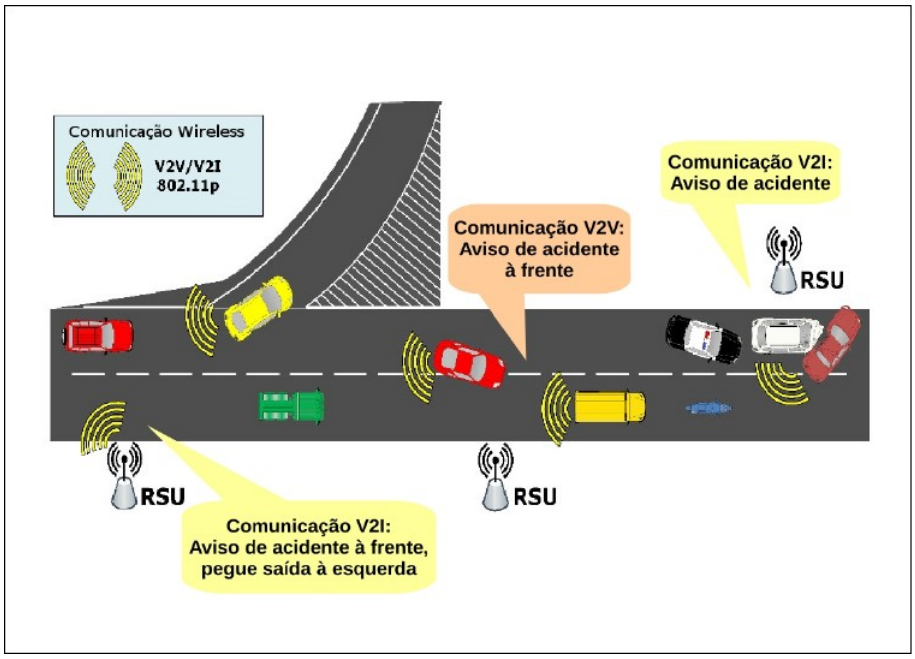


Figura 1.1: Exemplo de funcionamento de uma rede VANET. (Fonte [2])

A maior diferença entre redes MANETs e VANETs está no padrão de mobilidade dos nós, pois as VANETs apresentam uma mobilidade mais alta e seus nós realizam movimentos pré definidos e limitados pelas estradas. O principal desafio em VANETs consiste em manter o roteamento estável, uma vez que as redes geradas pelas conexões entre veículos são muito dinâmicas [29]. Segundo Taleb et al. [41], tendo em vista a alta mobilidade dos nós, os protocolos de roteamento desenvolvidos para MANETs precisam ser devidamente adaptados para atender efetivamente um roteamento otimizado em VANETs.

Segundo Peterson et al. [32], em uma rede de comunicação existem três métodos fundamentais para a transmissão de dados: *unicast*, *broadcast* e *multicast*. O *unicast* é a forma de roteamento onde a comunicação é realizada de um para um, isto é, em cada transmissão realizada um nó age como origem e outro como destino. A abordagem *broadcast* realiza comunicação de um para todos, ou seja, um nó age como origem e todos os outros nós da rede serão destinos. Por fim, o *multicast* realiza a comunicação de um nó que age como origem para um subconjunto de nós que são destinos. A abordagem *multicast* é o método mais eficiente para a comunicação em grupo, reduzindo o desperdício de recursos da rede e tornando mais barato e rápido o custo de comunicação, uma vez que as transmissões para o conjunto de nós destino são realizadas com base em um caminho lógico definido, sem obrigatoriedade de replicação da informação para todos os nós da rede, independente deles estarem interessados ou não na mensagem, como acontece no *broadcast*. Uma desvantagem do *unicast* é que o método gera uma cópia da informação para cada um dos nós pelos quais o pacote de dados deve passar. A Figura 1.2 ilustra as três abordagens de transmissão.

Em VANETs, assim como em outros tipos de redes, as aplicações possuem requisitos especiais em relação aos recursos da rede. A qualidade de serviço, do inglês Quality

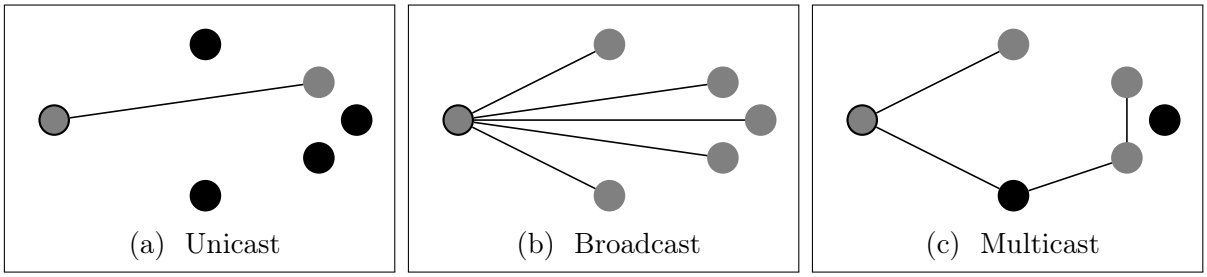


Figura 1.2: Métodos usuais para transmissão de dados em redes

of Service (QoS), está diretamente relacionada com o uso de demandas de recursos da rede, uma vez que em muitas aplicações é extremamente importante manter o serviço da rede com qualidade alta. Por exemplo, aplicações relacionadas à segurança, tais como mensagens de aviso de colisão, acidentes ou más condições da estrada, são sensíveis ao atraso na entrega das mensagens, bem como aplicações de multimídia são sensíveis à largura de banda. Dentre as métricas existentes, vale ressaltar algumas que são de extrema importância para VANETs: atraso fim a fim (*end-to-end delay*), *jitter*, ou seja, variação no atraso entre as mensagens para o mesmo destino, variação do atraso fim a fim entre diferentes destinos, largura de banda (*bandwidth*), quantidade de saltos da mensagem, ou seja, a quantidade de nós pelos quais o pacote passa até o destino final, e estimativa de duração da conexão entre veículos. Neste trabalho serão consideradas as quatro primeiras métricas citadas, explicadas em mais detalhes a seguir.

Entende-se *delay* fim a fim como o tempo gasto para que um pacote seja enviado da origem até o destino. O tempo total consiste na soma dos atrasos do processamento nos nós da rede e o atraso da propagação ao longo do meio de transmissão. O *jitter* é uma medida da variação do atraso na entrega entre sucessivos pacotes de dados em uma conexão. Para exemplificar, se um pacote enviado de uma origem até um destino tem atraso de 15 ms e o envio de outro pacote entre a mesma origem e destino tem atraso de 17 ms, isso significa, de maneira simplificada, que o *jitter* dessa conexão é igual a 2 ms. Segundo Biradar e Manvi [5], é possível reduzir o valor do *jitter* com a utilização de *buffers*, entretanto, isso aumenta consideravelmente a quantidade de memória necessária, fazendo com que seja preferível ter o *jitter* controlado pela própria rede.

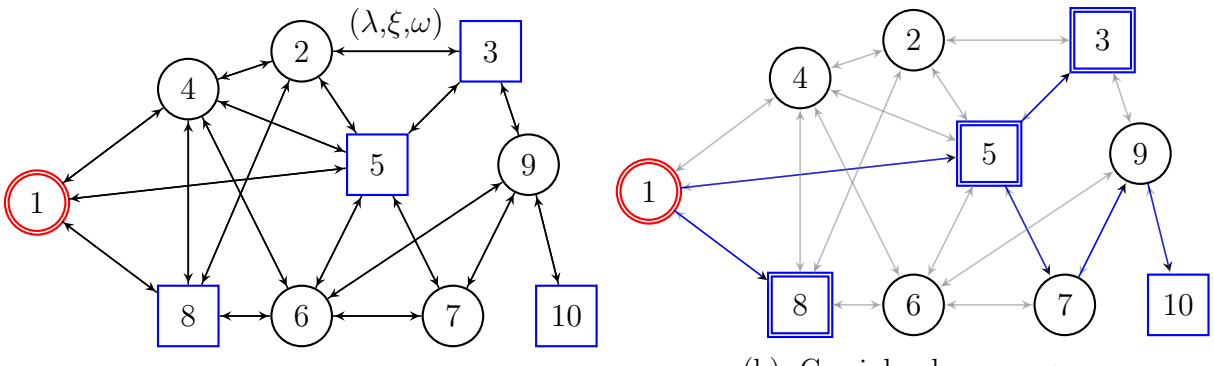
A variação do *delay* entre os diferentes destinos pode ser definida como a diferença entre o atraso do caminho que conecta a origem com qualquer par de destinos. Limitar essa variação é essencial para sincronização entre os vários receptores, garantindo que não haja diferença de muitos pacotes de uma mesma mensagem para os vários nós destinatários durante o tempo de vida de uma sessão *multicast* [36]. Por exemplo, assumindo um limite de variação de atraso entre diferentes destinos como 3 ms, se um pacote leva um tempo de 17 ms para ir da origem para um destino, um outro destino deve receber o mesmo pacote com o atraso no intervalo de $[14, 20]$ ms. Por fim, a largura de banda é a medida de capacidade de transmissão de um determinado meio, conexão ou rede, determinando a velocidade máxima em que os dados podem ser transmitidos no enlace.

De maneira mais informal, o problema de roteamento *multicast*, do inglês Multicast Routing Problem (MRP), pode ser descrito como um problema onde dados os custos de transmissão de mensagens entre veículos, busca-se minimizar os gastos para transferir

mensagens nó raiz até um determinado subconjunto de nós terminais. Essa transmissão pode utilizar outros nós da rede, mas não precisa passar por todos eles. Considerar restrições de Qualidade de Serviço, do inglês QoS, trata-se de garantir que os caminhos percorridos para realizar a transmissão da raiz para cada nó terminal obedeçam às restrições de QoS. Essas considerações resultam no Multicast Routing Problem with Quality of Service constraints (MRP-QoS).

Uma propriedade essencial para garantir que uma instância do MRP-QoS seja viável é que exista pelo menos uma solução na qual todos os nós terminais possam ser atendidos. Tipicamente em VANETs os veículos podem ocasionalmente se desconectarem da rede em virtude de suas elevadas mobilidades, ou seja, nem sempre é possível garantir que todos os veículos serão atendidos a todo instante. Sendo assim, foi proposta uma nova variante do MRP-QoS, denominada Máximo Atendimento em MRP com restrições de QoS, do inglês Maximum Service Multicast Routing Problem with Quality of Service Constraints (MS-MRP-QoS), onde nem todos os nós terminais da rede podem ser atendidos. Se o caminho gerado da raiz até um terminal respeita todas as restrições de QoS, esse terminal atendido, caso contrário, o terminal não é atendido. O objetivo do MS-MRP-QoS é maximizar o serviço, i.e., atender o maior número de nós terminais de acordo com as métricas de QoS impostas pela rede.

A Figura 1.3 apresenta um exemplo do processo que constitui a resolução de uma instância do MS-MRP-QoS. A Figura 1.3a representa o grafo inicial, tal que os nós retangulares (azuis) representam o conjunto de veículos terminais (destinos), o nó com círculo duplo (vermelho) é o nó raiz, enquanto os demais nós são opcionais. Todas as conexões (links) tem arcos bidirecionais, ou seja, se por exemplo os nós 1 e 4 estão conectados é possível encaminhar mensagens na direção $(1, 4)$ e também $(4, 1)$. Cada arco contém 3 métricas associadas, λ (*delay*), ξ (*jitter*) e ω (largura de banda), uma quarta métrica utilizada pelo MS-MRP-QoS é a de variação de *delay*s entre terminais. No entanto, ela não se aplica aos arcos individualmente e sim a todos os pares de caminhos utilizados para atender os terminais. A Figura 1.3b apresenta uma solução do MS-MRP-QoS, onde foram gerados caminhos, representados pelos arcos ressaltados (azuis), que atingem todos os terminais. Nesse caso os terminais com retângulo duplo representam veículos atendidos e o retângulo simples os não atendidos. Nesse exemplo, dos quatro terminais, apenas três são atendidos.



(a) Grafo com raiz e terminais

(b) Caminho da mensagem

Figura 1.3: Exemplo de Instância do MS-MRP-QoS

Neste trabalho investigamos o MS-MRP-QoS visando encontrar metodologias eficazes para resolvê-lo. Para alcançar esse objetivo, inicialmente resolvemos o MS-MRP-QoS de maneira exata utilizando Programação Linear Inteira Mista (PLIM). Desenvolvemos um conjunto de quatro relaxações lagrangianas para obtenção de limitantes inferiores e superiores com base na dualização de restrições complicadoras. Por fim, foram desenvolvidos métodos heurísticos para obter soluções sem garantia de otimalidade, mas com um baixo uso de recursos computacionais. Uma heurística de busca local em arborescências foi aplicada com objetivo de gerar e aperfeiçoar soluções viáveis em conjunto com a solução das relaxações lagrangianas. Também foram propostos três Algoritmos Genéticos de Chaves Aleatórias Viciadas, do inglês Biased Random-Key Genetic Algorithm (BRKGA), contendo variações no decodificador, no cálculo da função objetivo e no procedimento de geração das chaves aleatórias. Por fim, as instâncias utilizadas para os experimentos foram geradas utilizando simuladores de tráfego e de rede.

Esta dissertação está organizada em seis capítulos. O Capítulo (2) introduz notações e definições necessárias para o entendimento dos demais capítulos, incluindo a descrição dos modelos de Programação Linear Inteira (PLI) e PLIM, e as principais técnicas utilizadas neste trabalho são descritas de modo geral. No Capítulo 3, as principais publicações presentes na literatura para problemas de otimização em redes veiculares são apresentadas, com foco nos resultados obtidos. No Capítulo 4, são discutidas as metodologias utilizadas no desenvolvimento deste trabalho. A descrição dos experimentos e resultados computacionais é feita no Capítulo 5. Por fim, o Capítulo 6 traz as considerações finais do trabalho, seguido das referências.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares e Formulações do Problema

Neste capítulo introduzimos conceitos fundamentais para o entendimento desta dissertação. Notações e definições básicas são apresentadas na Seção 2.1. Neste trabalho, empregamos conceitos básicos de Otimização Combinatória, os quais assume-se que são conhecidos. Caso o leitor julgue necessária uma revisão, recomendamos o livro texto de Nemhauser e Wolsey [30], o qual cobre tal tema com enfoque em PLI, uma das principais ferramentas utilizadas neste trabalho. Os conceitos básicos relacionados à teoria dos grafos são considerados conhecidos e caso o leitor julgue necessário uma revisão o conteúdo pode ser encontrado em algum livro texto sobre o tema, por exemplo, Diestel [14]. Os modelos matemáticos estão contidos nas Seções 2.2 e 2.3. A Seção 2.4 contém uma descrição do funcionamento e aplicação da relaxação lagrangiana, uma das principais abordagens por nós utilizada. Por fim, nas Seções 2.5 e 2.5.1 discutimos, de forma geral, meta-heurísticas e BRKGA.

2.1 Notações e Definições

Seja um grafo ponderado e direcionado $G = (V, A)$, sendo $V = \{1, \ldots, n\}$ seu conjunto de vértices, $A = \{(u, v) : u \text{ e } v \in V, u \neq v\}$ seu conjunto de m arcos, onde o primeiro vértice do arco é a fonte e também predecessor do segundo vértice do par ordenado, que é conhecido como destino. Tratando-se de grafos não direcionados, podemos substituir a nomenclatura do conjunto de arcos A pelo conjunto de arestas E. Uma árvore T, obtida a partir de um grafo não orientado G, é um subgrafo de G conexo e que não contém ciclos. Para que T seja geradora em G o conjunto de vértices $V(T)$ deve ser igual a $V(G)$, ou seja, todos os vértices do grafo fazem parte da árvore. Uma arborescência, ou árvore enraizada, é um grafo direcionado no qual exatamente um vértice, digamos s, tem grau de entrada 0 e nenhum vértice tem grau de entrada maior que 1, de modo que todos os vértices do grafo são alcançáveis a partir da raiz s.

Segue uma definição formal do MS-MRP-QoS. Seja uma rede VANET representada como um grafo direcionado ponderado $G = (V, A)$. Cada arco de G contém três métricas de QoS associadas: *delay*, *jitter* e largura de banda. Definimos a entrada o MS-MRP-QoS

como uma tupla $(G(V, A), \lambda, \xi, \omega, s, D, \Delta_d, \Delta_j, \Delta_v, \Phi)$, onde:

- $G = (V, A)$ é um grafo ponderado orientado;
- $\lambda_{ij} : A \to \mathbb{N}$ é uma função que retorna o valor de *delay* para cada arco $(i, j) \in A$;
- $\xi_{ij} : A \to \mathbb{N}$ é uma função que retorna o valor de *jitter* para cada arco $(i, j) \in A$;
- $\omega_{ij} : A \to \mathbb{N}$ é uma função que retorna o valor de largura de banda para cada arco $(i, j) \in A$;
- $s \in V$ é definido como a raiz;
- D é o conjunto de vértices terminais, tal que $D \subseteq (V \backslash \{s\})$;
- Δ_d é uma constante que indica o limite de *delay* fim a fim permitido no caminho de s até cada um dos vértices de D;
- Δ_j é uma constante que indica o limite de *jitter* permitido no caminho de s até cada um dos vértices de D;
- Δ_v é uma constante que indica o limite da variação dos atrasos fim a fim entre todos os pares de caminhos de s até algum vértice de D;
- Φ é uma constante que indica o mínimo de largura de banda necessário para que um arco qualquer possa fazer parte da solução;

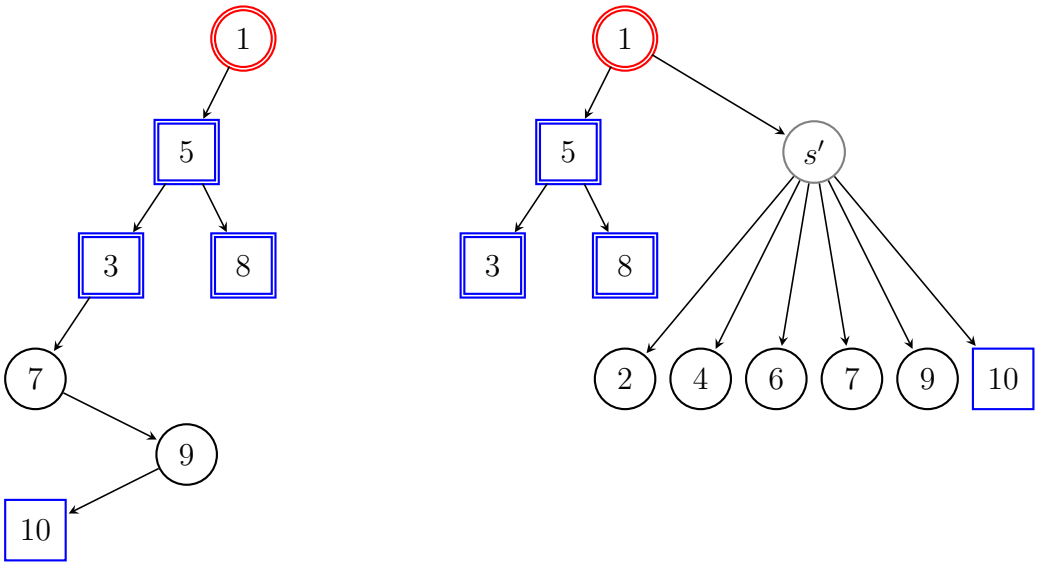
O conjunto $S \in V \backslash (D \cup \{s\})$ é composto por todos os vértices restantes de V. Assim, os vértices do conjunto S são chamados de opcionais ou de *Steiner*. Vale também ressaltar que, como as conexões para comunicação da rede VANET são bidirecionais, se o arco (i, j) pertence a A, então o arco (j, i) também está contido em A com os mesmos valores de QoS. Quando a largura de banda ω de um arco (i, j) está com o valor abaixo do limite demandado pela QoS (Φ), o mesmo não é adicionado ao conjunto A e, consequentemente, nunca será parte de uma solução viável do MS-MRP-QoS. Uma arborescência *multicast* T de G tem o vértice fonte s como sua raiz, alcança todos os vértices terminais em D e, possivelmente, alguns vértices de S, mas não necessariamente todos.

O grafo descrito acima permite uma modelagem correta do problema, mas é possível garantir que qualquer solução viável corresponda a uma arborescência geradora. Isso é conveniente pois formulações fortes de programação inteira para arborescências geradoras são conhecidas [28]. As seguintes mudanças foram realizadas no grafo para garantir a existência de uma solução que seja uma arborescência geradora:

1. Adiciona-se um vértice artificial s' e um novo arco artificial de s para s' cujo *delay* é igual a $\Delta_d + 1$ e *jitter* igual a $\Delta_j + 1$.
2. São adicionados arcos de s' para cada vértice $k \in D \cup S$ com *delay* e *jitter* iguais a 0.

O grafo resultante é $G' = (V', A')$, onde $V' = V \cup \{s'\}$ e $A' = A \cup \{(s, s')\} \cup \{(s', k) : k \in D \cup S\}$. Como foi dito anteriormente, soluções viáveis nesse grafo são dadas por arborescências geradoras na qual s é a raiz. Contudo, para representar adequadamente soluções factíveis, algumas restrições precisam ser acrescentadas. A arborescência deve conter o arco (s, s') e se o caminho de s até qualquer terminal k utilizar o nó s' como intermediário, então k não é atendido. O propósito dessas restrições é fazer com que haja uma subárvore onde s' é a raiz e os nós opcionais que não foram utilizados como encaminhadores ou nós terminais não atendidos sejam visitados pela arborescência a partir de s'.

Utilizando como exemplo o grafo G e a arborescência apresentada na Figura 1.3 do capítulo anterior, serão ilustradas duas possíveis soluções viáveis com base em G e G'. A Figura 2.1a descreve uma solução viável obtida a partir de G, enquanto a Figura 2.1b apresenta uma arborescência na qual o mesmo número de terminais é atendido mas a representação da solução é uma arborescência geradora que utiliza o nó e arcos artificiais.



(a) Arborescência obtida a partir de G (b) Arborescência obtida a partir de G'

Com base na adaptação para garantir que toda solução é representada por uma arborescência geradora, desenvolvemos uma formulação de PLI para o MS-MRP-QoS, baseada na formulação de multifluxo apresentada por Magnanti e Wolsey [28], a qual será denotada no restante deste documento por (DMFM-MRP), um mnemônico do inglês ***D**irected **M**ulticommodity **F**low **M**odel* - MRP. A segunda modelagem desenvolvida utiliza programação inteira mista, ou seja, utiliza-se de variáveis reais em conjunto com as variáveis inteiras. Esse segundo modelo foi elaborado com base na remoção das variáveis de fluxo do DMFM-MRP e será denotada no restante do documento por (AB-MRP), um mnemônico do inglês ***A**rborescence **B**ased* - MRP.

2.2 Modelo de PLI DMFM-MRP

Dada uma instância $I_{MS-MRP-QoS} = (G(V, A), \lambda, \xi, \omega, s, D, \Delta_d, \Delta_j, \Delta_v, \Phi)$ para o MS-MRP-QoS, considere as seguintes variáveis:

- f_{ij}^k: Uma variável binária indicando se o arco (i, j) pertence ao caminho da fonte s até o vértice k tal que $k \in D \cup S$, alternativamente, se o fluxo de s para k passa pelo arco (i, j);
- y_{ij}: Uma variável binária que recebe valor 1 caso o arco (i, j) pertença a arborescência ótima e 0 caso contrário;
- z_k: Uma variável binária que recebe valor 1 se o terminal k não é atendido e 0 caso contrário.

Assim, um modelo de programação inteira para o MS-MRP-QoS é:

$$\text{(IP)} \quad \min \sum_{k \in D} z_k \tag{2.1}$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{(s,j) \in A'} f_{sj}^k - \sum_{(j,s) \in A'} f_{js}^k = 1 \qquad \forall k \in D \tag{2.2}$$

$$\sum_{(i,j) \in A'} f_{ij}^k - \sum_{(j,i) \in A'} f_{ji}^k = 0 \qquad \forall j \in V \backslash \{s, k\}, \forall k \in D \cup S \tag{2.3}$$

$$\sum_{(k,j) \in A'} f_{kj}^k - \sum_{(j,k) \in A'} f_{jk}^k = -1 \qquad \forall k \in D \cup S \tag{2.4}$$

$$f_{ij}^k \leq y_{ij} \qquad \forall (i, j) \in A', \forall k \in D \cup S \tag{2.5}$$

$$\sum_{(i,j) \in A'} y_{ij} = |V| \tag{2.6}$$

$$\sum_{(i,j) \in A'} \lambda_{ij} f_{ij}^k \leq \Delta_d + M_d z_k \qquad \forall k \in D \tag{2.7}$$

$$\sum_{(i,j) \in A'} \xi_{ij} f_{ij}^k \leq \Delta_j + M_j z_k \qquad \forall k \in D \tag{2.8}$$

$$\sum_{(i,j) \in A'} \lambda_{ij} (f_{ij}^k - f_{ij}^l) \leq \Delta_v + M_v^k z_k + M_v^l z_l \qquad \forall k, l \in D, k \neq l \tag{2.9}$$

$$y_{ss'} = 1 \tag{2.10}$$

$$f_{ij}^k \in \{0, 1\} \qquad \forall (i, j) \in A', \forall k \in D \cup S \tag{2.11}$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall (i, j) \in A' \tag{2.12}$$

$$z_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in D \tag{2.13}$$

O modelo DMFM-MRP apresenta como solução uma arborescência conectando a raiz a todos os nós terminais. A função objetivo (2.1) minimiza o número de terminais não atendidos. As restrições (2.2)-(2.4) impõem a conservação de fluxo em cada vértice, forçando ainda que apenas uma unidade de fluxo saia da fonte s para cada destino $K \in D$. As restrições (2.5) garantem que não haja fluxo passando por um arco (i, j) e dirigindo-se a um vértice $k \in D \cup S$, a menos que esse arco pertença à arborescência ótima. A restrição (2.6) força que a solução tenha $|V| = |D| + |S| + 1$ arcos, portanto, gera todos os vértices de G'. As restrições (2.7)-(2.8) limitam, respectivamente, o delay e o jitter no caminho para cada terminal atendido. As restrições (2.9) exigem que a diferença entre os *delays*

de quaisquer dois caminhos que vão de s até um terminal $k \in D$ não seja maior que Δ_v, caso ambos os terminais sejam atendidos. A restrição (2.10) garante que o arco (s, s') faça parte da solução final, evitando a ocorrência de ciclos com a característica $y_{ij} = y_{ji} = 1$. Finalmente, as restrições (2.11)-(2.13) definem os domínios das variáveis.

É necessário ainda uma descrição mais detalhada das restrições (2.7), (2.8) e (2.9). As duas primeiras restrições tornam-se inativas quando o terminal ao qual elas se referem não for atendido, enquanto a última restrição torna-se inativa quando pelo menos um dos terminais ao qual ela se refere não for atendido. Para isso, os parâmetros M_d, M_j, M_v^k e M_v^l devem ser escolhidos convenientemente de modo a manter as restrições válidas. Possíveis valores para esses parâmetros serão discutidos posteriormente.

2.3 Modelo de Programação Inteira Mista - AB-MRP

Dada uma instância $I_{PMA} = (G(V, A), \lambda, \xi, \omega, s, D, \Delta_d, \Delta_j, \Delta_v, \Phi)$ para o MS-MRP-QoS, considere as seguintes variáveis:

- y_{ij}: Uma variável binária que recebe valor 1 caso o arco (i, j) pertença à arborescência ótima e 0 caso contrário;
- z_k: Uma variável binária que recebe valor 1 se o terminal k não é atendido e 0 caso contrário;
- a_i: Uma variável real que representa o *delay* do caminho de s até i, caso i faça parte da arborescência ótima;
- t_i: Uma variável real que representa o *jitter* do caminho de s até i, caso i faça parte da arborescência ótima;

Assim, o modelo de programação linear inteira mista AB-MRP é proposto a seguir:

$$\text{(MIP)} \min \sum_{k \in D} z_k \tag{2.14}$$

$$\sum_{(i,j) \in A'} y_{ij} = 1 \qquad \forall j \in D \cup S \tag{2.15}$$

$$a_j \geq a_i + \lambda_{ij} y_{ij} - M_d(1 - y_{ij}) \qquad \forall (i, j) \in A' \tag{2.16}$$

$$a_j \leq a_i + \lambda_{ij} y_{ij} + M_d(1 - y_{ij}) \qquad \forall (i, j) \in A' \tag{2.17}$$

$$t_j \geq T_i + \xi_{ij} y_{ij} - M_j(1 - y_{ij}) \qquad \forall (i, j) \in A' \tag{2.18}$$

$$a_k \leq \Delta_d + M_d z_k \qquad \forall k \in D \tag{2.19}$$

$$t_k \leq \Delta_j + M_j z_k \qquad \forall k \in D \tag{2.20}$$

$$a_k - a_l \leq \Delta_v + M_v^k z_k + M_v^l z_l \qquad \forall k, l \in D, k \neq l \tag{2.21}$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall (i, j) \in A' \tag{2.22}$$

$$z_k \in \{0, 1\} \qquad \forall k \in D \tag{2.23}$$

$$a_i, t_i \geq 0 \qquad \forall i \in V \tag{2.24}$$

No modelo AB-MRP uma solução representa uma arborescência geradora mínima onde os valores das métricas de QoS de cada caminho são calculadas nos nós. A função objetivo (2.14) minimiza o número de terminais não atendidos. As restrições (2.15) garantem que a arborescência é geradora. As restrições (2.16)-(2.17) calculam o custo de *delay* em cada vértice j, de modo que, se o arco (i, j) pertencer a arborescência ótima, o valor de a_j é igual a $a_i + \lambda_{ij}$. As restrições (2.18) aplicam o mesmo princípio das restrições (2.16) sobre as variáveis t_i. Para a variável a_k, o delay em um nó $k \in D \cup S$ será exatamente o *delay* acumulado no caminho até k. No caso da variável t_k, é suficiente que ela seja maior ou igual ao valor de *jitter* acumulado, pois ao contrário do *delay* não existe uma restrição limitando a variação de *jitter*. Cabe observar que os valores computados para as variáveis l_k e t_k dependem diretamente dos valores das mesmas variáveis no nó predecessor de k. Essa dependência impede a formação de ciclos na solução ótima. As restrições (2.19)-(2.21) limitam respectivamente *delay*, *jitter* e variação de *delay* utilizando a mesma abordagem das restrições (2.7)-(2.9) do modelo DMFM-MRP. Por fim, as restrições (2.22)-(2.24) definem os domínios das variáveis.

2.3.1 Possíveis valores para os parâmetros M

A seguir discutiremos sobre possíveis valores das constantes M_d, M_j, M_v^k e M_v^l. Foram propostos valores que podem ser aplicados à modelagem considerando o grafo G sem a adição dos nós e arcos artificiais. Também foram propostos valores que podem ser utilizados apenas para o grafo for G'.

Inicialmente, suponha que os arcos do grafo $G = (V, A)$ tenham sido indexadas de 1 a $m = |A|$, ou seja, $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Suponha também que $\lambda_{e_1} \geq \lambda_{e_2} \geq \ldots \geq \lambda_{e_m}$. Agora, para $n = |V|$, qualquer caminho simples no grafo tem no máximo $n - 1$ arcos e, portanto, $\Lambda = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{e_i}$ é um limitante superior para o *delay* total de qualquer caminho no grafo. De forma análoga, pode-se definir um limitante superior para o *jitter* de qualquer caminho simples de G, o qual será denotado por Ξ. Também será usada a notação $SP_\lambda(k)$ para o comprimento do caminho mais curto da raiz s para o vértice k de G utilizando como métrica o *delay*.

Com as definições do parágrafo anterior, pode-se computar valores viáveis para as constantes M_d, M_j, M_v^k e M_v^l da seguinte forma:

$$M_d = \Lambda - \Delta_d \tag{2.25}$$
$$M_j = \Xi - \Delta_j \tag{2.26}$$
$$M_v^k = \Lambda - \mu, \text{ onde } \mu = \min\{\mathrm{SP}_\lambda(l) + \Delta_v, \Delta_d\} \tag{2.27}$$
$$M_v^l = \Delta_d - \Delta_v - \mathrm{SP}_\lambda(l) \tag{2.28}$$

Considerando as definições de Λ e Ξ e analisando as restrições (2.7) e (2.8), temos que se o terminal k for atendido ($z_k = 0$), essas duas restrições limitam o *delay* e o *jitter* conforme determinado pela QoS. Por outro lado, se k não for atendido ($z_k = 1$), o *delay* e o *jitter* acumulado no caminho de s a k ficam restritos de acordo com os seus limitantes superiores Λ e Ξ subtraídos do valor máximo de acumulado para que k seja atendido,

usando como métricas o *delay* e o *jitter*, respectivamente.

A restrição (2.9), que controla a variação de *delay*, requer uma análise mais aprofundada. O objetivo é encontrar um limitante superior para o lado direito da restrição nas quatro situações possíveis de atendimento do par de terminais (k, l), explicadas a seguir considerando que as constantes M_v^k e M_v^l assumem os valores descritos nas Equações (2.27) e (2.28).

Caso 1 $(z_k = 0, z_l = 0)$**.** Quando os dois terminais, k e l, são atendidos, limita a diferença de *delay* entre os pares em Δ_v e, portanto, é válida neste caso.

Caso 2 $(z_k = 0, z_l = 1)$**.** Quando o terminal k é atendido mas l não, o lado esquerdo da desigualdade será no máximo $\Delta_d - SP_\lambda(l)$ (o terminal k é atendido com o limite máximo de *delay* permitido e o terminal l com o mínimo de *delay* requerido para ir de s a l). Neste caso, o lado direito da restrição será dado por

$$\Delta_v + M_v^l = \Delta_v + \Delta_d - \Delta_v - SP_\lambda(l) = \Delta_d - SP_\lambda(l),$$

garantindo, assim, a validade da desigualdade neste caso.

Caso 3 $(z_k = 1, z_l = 0)$**.** Quando o terminal l é atendido mas k não, o lado esquerdo da desigualdade será no máximo $\Lambda - SP_\lambda(l)$ (o terminal k é alcançado por um caminho simples com o limite máximo de *delay* e o terminal l com o mínimo de *delay* requerido para ir de s a l). Neste caso, o lado direito da restrição será dado por

$$\Delta_v + M_v^k = \Delta_v + \Lambda - \mu \geq \Delta_v + \Lambda - SP_\lambda(l) - \Delta_v = \Lambda - SP_\lambda(l),$$

garantindo, assim, a validade da desigualdade neste caso.

Caso 4 $(z_k = 1, z_l = 1)$**.** Quando o terminal l e k não são atendidos, o lado esquerdo da desigualdade será no máximo $\Lambda - SP_\lambda(l)$ (o terminal k é alcançado por um caminho simples com o limite máximo de *delay* e o terminal l com o mínimo de *delay* requerido para ir de s a l). Neste caso, o lado direito da restrição será dado por

$$\Delta_v + M_v^k + M_v^l = \Delta_v + \Lambda - \mu + \Delta_d - \Delta_v - SP_\lambda(l) = \Lambda - SP_\lambda(l) + (\Delta_d - \mu) \geq \Lambda - SP_\lambda(l),$$

garantindo, assim, a validade da desigualdade neste caso.

Considerando agora o grafo G', é possível alterar as constantes associadas com as restrições (2.7) e (2.8), utilizando $M_d = M_j = 1$. Esses valores são válidos pois se o caminho da raiz s até o terminal k atender as métricas de *delay* e *jitter*, tanto M_d quanto M_j tornam-se irrelevantes. Além disso, se o terminal k não é atendido então o caminho para visitá-lo passará pelos arcos artificiais (s, s') e (s', k), que, conforme a construção de G' explicada na Seção 2.1, possuem *delay*s $\Delta + 1$ e 0, e *jitter*s $\Delta_j + 1$ e 0, respectivamente. Portanto, em G', $\Delta_d + 1$ e $\Delta_j + 1$ são limitantes superiores válidos para *delay* e *jitter*, respectivamente. O objetivo da utilização desses valores para os parâmetros visa desconsiderar todos os terminais que não são atendidos, de modo que, por mais que

exista um caminho para atingir k que não passe pelo nó artificial s', esse caminho demanda mais que Δ_d ou Δ_j de recurso e portanto k continua como não atendido na arborescência gerada.

2.4 Relaxação Lagrangiana

A Relaxação Lagrangiana (RL) é um conhecido método de decomposição usado na resolução de problemas de otimização combinatória. A ideia principal da RL é remover restrições complicadas do modelo matemático e transferi-las para a função objetivo atribuindo a elas pesos (chamados multiplicadores de Lagrange) que irão penalizar uma solução que não satisfaz alguma das restrições dualizadas. É possível demonstrar que o custo de uma solução ótima da RL sempre será um limitante dual para o valor ótimo do problema original. Um limitante primal pode ser obtido a partir da constatação da viabilidade de uma solução retornada pelo modelo relaxado, bastando para isto computar o valor da função objetivo original para esta solução. Uma etapa importante da RL é determinar os valores para os multiplicadores lagrangianos que resultam no melhor limitante dual. Para isso, pode ser adotado o método de subgradiente que consiste em um processo iterativo por meio do qual os multiplicadores são atualizados iterativamente até convergirem para seus valores ótimos. Considerando um problema originalmente de minimização, este método pode ser visto como a maximização do limite inferior obtido pelo modelo relaxado baseado em escolhas adequadas de multiplicadores [4].

RL é bastante conveniente para problemas que quando são modelados matematicamente de modo que, não fosse por um subconjunto de restrições complicadoras, podem ser resolvidos de maneira eficiente. Por exemplo, considere o seguinte modelo de PLI:

$$
\begin{aligned}
&\text{(IP)} && z = \min cx \\
&\quad \text{s.a.} && Ax \geq b, \\
& && Dx \geq d, \\
& && x \in \mathbb{Z}^n_+.
\end{aligned}
$$

Sendo $Dx \geq d$ o conjunto de restrições complicadoras do modelo, removê-las resulta em $z' = \min\{cx : x \in X\}$, onde $X = \{x \in \mathbb{Z}^n_+ \ : Ax \geq b\}$, o qual é um problema mais fácil de ser resolvido, podendo ser chamado também de problema relaxado. Dois fatos podem ser observados. O primeiro é que z' é um limitante inferior (dual) de z, uma vez que, com uma restrição a menos delimitando a região viável de x, o valor obtido em z' será menor ou igual a z. O segundo é que a solução ótima em X não necessariamente satisfaz às restrições em $Dx \geq d$. Partindo dessas observações, a ideia é levar as restrições complicadoras para a função objetivo, penalizando-as com um vetor $u \in \mathbb{R}^m_+$. Feito isso, o problema resultante, chamado de Problema Primal Lagrangiano (PPL), pode ser escrito como:

$$
\begin{aligned}
&\text{PPL}(u) && z(u) = \min cx + u(d - Dx)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & x \in X, \\ & u \in \mathbb{R}^m_+. \end{aligned}$$

A proposição a seguir estabelece a relação entre $z(u)$ e z.

Proposição 2.4.1. *Seja* $z(u) = \min\{cx + u(d - Dx) : x \in X\}$. *Então,* $z(u) \leq z$ *para todo* $u \geq 0$.

A penalidade u_i associada à restrição $D_i x \geq d_i$ é chamada de multiplicador de Lagrange dessa restrição. Tem-se agora o seguinte problema: calcular o conjunto de multiplicadores que correspondem ao melhor, isto é maior, limitante dual $z(u)$. Para encontrar esses valores é necessário resolver o Problema Dual Lagrangiano (PDL), descrito como:

$$\text{PDL}(u) \qquad w = \max\{z(u) : u \geq 0\}.$$

Para resolver o PDL existe o algoritmo de otimização por subgradiente, que se baseia no seguinte resultado.

Proposição 2.4.2. *Uma função* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é côncava se e somente se, para todo* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, *existe* $s \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $g(\bar{x}) + s(x - \bar{x}) \geq g(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

Assim, estando em $\bar{x}$, é necessário escolher a direção que deve ser seguida para maximizar $g(x)$. Utilizando a Proposição 2.4.2, sabe-se que, se x é tal que $g(x) > g(\bar{x})$, então necessariamente $s(x - \bar{x}) > 0$. Ou seja, a partir de $\bar{x}$, movendo-se uma quantidade adequada na direção de s, g irá aumentar de valor. Logo, é preciso encontrar um vetor s que satisfaça à Proposição 2.4.2. Quando g é diferenciável em $\bar{x}$, pode-se fazer $s = \nabla g(\bar{x})$, ou seja, tomar o vetor s na direção do gradiente de g em $\bar{x}$. Porém, se este não for o caso, pela Proposição 2.4.2, sabemos que uma solução ótima x^* satisfaz $s(x^* - \bar{x}) > 0$. Assim, é possível sair de $\bar{x}$ e dar um passo pequeno na direção s de modo a se aproximar mais de um ponto ótimo, ainda que não haja acréscimo no valor da função g. A questão que se coloca é como achar o vetor s cuja existência é garantida na Proposição 2.4.2. Antes porém, define-se o que é um subgradiente e um subdiferencial de uma função em um ponto do seu domínio.

Definição 2.4.1. Se $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função côncava, então s é um subgradiente de g em $\bar{x}$ se e somente se $s(x - \bar{x}) \geq g(x) - g(\bar{x}), \forall x \in \mathbb{R}^n$. O subdiferencial $(\delta g(\bar{x}))$ de g em $\bar{x}$ é o conjunto de todos os subgradientes de g neste ponto.

Uma consequência imediata da proposição anterior é dada a seguir.

Proposição 2.4.3. *Se* g *é côncava e* $0 \in \delta g(x^*)$ *então* $g(x^*) = \max\{g(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$, *ou seja,* x^* *é uma solução ótima.*

Portanto, em teoria, se o objetivo é maximizar uma função côncava g, basta começar de um ponto qualquer e iterativamente ir se deslocando, em pequenos passos, na direção de um subgradiente de g naquele ponto até que 0 pertença ao subdiferencial do ponto corrente, ou seja, o ponto atual é ótimo. Os resultados a seguir permitem aplicar a teoria acima à técnica de relaxação lagrangiana para PLI.

Proposição 2.4.4. *$z(u) = \min\{cx + u(d - Dx)\}$ é côncava.*

O próximo resultado mostra como calcular um subgradiente de $z(u) = \min\{cx+u(d-Dx) : x \in X\}$ no ponto u.

Proposição 2.4.5. *Seja $\bar{x} \in X$ tal que $z(u) = c\bar{x} + u(d - D\bar{x})$. Então, $(d - D\bar{x})$ é um subgradiente de $z(u)$ em u.*

A partir dos resultados e definições anteriores, estamos aptos a apresentar um procedimento para minimizar uma função côncava para a qual se conhece um subgradiente em todos os pontos do seu domínio. Para tal, um pseudocódigo em alto nível do método de subgradiente é apresentado no Algoritmo (1).

Algoritmo 1: Método de Subgradiente (Problema original de minimização)

Entrada: limiar, maxIter, atualizaPi
Saída: z_{LB}, z_{UB}

1 $m \leftarrow \rho \leftarrow 0$;
2 $z_{LB} \leftarrow 0$;
3 $z_{UB} \leftarrow$ custo de uma solução viável;
4 $\alpha^0 \leftarrow \theta^0 \leftarrow 0$;
5 $\pi^0 \leftarrow 2$;
6 **enquanto** $(\frac{z_{UB}-z_{LB}}{Z_{UB}}) \leq$ *limiar ou* $m <$ *maxIter* **faça**
7 $x \leftarrow$ solução da $RL(\alpha^m)$;
8 $z^m \leftarrow$ custo da função objetivo de x ;
9 **se** $z^m > z_{LB}$ **então**
10 $z_{LB} \leftarrow z^m$;
11 $z_f^m \leftarrow$ função objetivo original da solução x;
12 **se** x *é viável e* $z_f^m < z_{UB}$ **então**
13 $z_{UB} \leftarrow z_f^m$;
14 $\rho \leftarrow 0$;
15 $\rho \leftarrow \rho + 1$;
16 **se** $\rho =$ *atualizaPi* **então**
17 $\pi \leftarrow \pi/2$;
18 $\rho \leftarrow 0$;
19 $\theta^m \leftarrow$ subgradiente(x);
20 $n^m \leftarrow$ norma(θ^m);
21 $s^m \leftarrow \pi^m \frac{(z_{UB}-z^m)}{||n^m||^2}$;
22 $\alpha^{m+1} \leftarrow \max(0, \alpha^m + s^m\theta^m)$;
23 $m \leftarrow m + 1$;

O algoritmo recebe três parâmetros de entrada: *limiar*, *maxIter* e *atualizaPi*. Os dois primeiros são utilizados como condições de parada. O parâmetro *limiar* indica o valor máximo de *gap* para que a solução seja considerada ótima, encerrando assim a execução. O *maxIter* limita o máximo de iterações do método do subgradiente. O terceiro e último parâmetro, *atualizaPi*, serve de contador para atualizações do valor de π, ou seja, quando houver uma quantidade *atualizaPi* de iterações consecutivas sem melhora do limitante dual. As linhas (1)-(5) representam apenas o processo de inicialização de variáveis, onde

m é o contador de repetições do laço principal, ρ é contador de iterações consecutivas, sem que haja redução no valor de z_{UB}. As variáveis z_{LB} e z_{UB} são os limitantes inferior e superior, respectivamente. O símbolo α representa o vetor de multiplicadores de Lagrange e θ é o vetor de subgradientes. Primeiramente resolve-se o problema primal lagrangiano utilizando os valores de multiplicadores atuais e essa solução servirá para obtenção do vetor de subgradiente. Para um problema de maximização, se o valor obtido na resolução do modelo relaxado for menor que o valor do limitante superior atual, atualiza-se z_{UB} e caso a solução do problema relaxado seja viável para o problema original, o valor do limitante inferior, z_{LB}, é atualizado com o valor da função objetivo desconsiderando o custo dos multiplicadores. Após essas avaliações é calculado o vetor de subgradiente (θ^m) e a norma deste vetor (n^m) é utilizada para computar o tamanho do passo utilizado (s^m) na direção do subgradiente. Com isso, atualiza-se o valor dos multiplicadores lagrangianos para a próxima iteração do algoritmo. A linha (26) garante que o multiplicador seja não-negativo.

Neste trabalho desenvolvemos quatro relaxações lagrangianas baseadas no modelo DMFM-MRP. Um detalhe importante a considerar é a resolução das relaxações lagrangianas quando as restrições (2.7), (2.8) ou ambas não são dualizadas, devendo ser tratadas no PPL, ou seja, quando este se torna um problema de caminhos mais curtos com restrição de um ou mais recursos.

2.5 Meta-heurísticas

Uma meta-heurística é uma metodologia de solução para problemas de otimização combinatória que fornece uma estrutura e estratégias gerais para guiar o processo de solução de um método heurístico que se ajusta a um tipo de problema particular. Atualmente as meta-heurísticas se tornaram uma das mais importantes ferramentas para os profissionais da área de Pesquisa Operacional [20].

As meta-heurísticas podem ser classificadas em dois conjuntos: meta-heurísticas singulares, tais como Simulated Annealing, GRASP, VNS e Busca Tabú, que abordam uma única solução e sua estratégia de busca consiste em explorar a vizinhança da solução utilizada; e o segundo conjunto, chamado de meta-heurísticas populacionais, tais como Algoritmo Genético (AG), Colônia de Formigas e Enxame de Partículas, onde o foco está na manutenção de um conjunto de soluções sobre as quais o processo de busca atua, combinando e modificando atributos dessas soluções visando explorar o espaço de busca.

Por exemplo, nos algoritmos genéticos cada indivíduo (também chamado de cromossomo) da população representa uma solução para o problema que está sendo abordado. Cada solução tem sua qualidade determinada por uma função de aptidão e o procedimento de busca segue através de uma quantidade de gerações, nas quais os indivíduos contribuem para a formação da população na geração seguinte, com prioridade aos indivíduos com melhor aptidão. Dentre os operadores mais comuns do AG tradicional, destacam-se o *crossover* por meio do qual ocorre a obtenção de um novo indivíduo a partir da combinação de duas, ou mais, soluções da população (pais) e a mutação que visa acrescentar diversidade a busca, alterando indivíduos de modo que incorporem na solução que eles

representam características distintas dos seus pais.

2.5.1 Algoritmo Genético de Chaves Aleatórias Viciadas (BRKGA)

Os algoritmos genéticos com chaves aleatórias (Random-Key Genetic Algorithm (RKGA)) foram introduzidos por Bean [3], para tratar problemas clássicos de sequenciamento. Um motivo comum para a escolha de RKGA está no fato de que para alguns problemas, AGs tradicionais têm dificuldade em manter a viabilidade de soluções durante a operação de *crossover*. RKGAs solucionam esta dificuldade através de uma representação robusta que utiliza chaves aleatórias e um decodificador para cada tipo de problema. O BRKGA é uma meta-heurística que obtém uma solução viável para um problema a partir da decodificação de um cromossomo de números aleatórios (também chamados de chaves). Este processo de decodificação consiste em um método heurístico que, em termos computacionais, é desejável que apresente um custo relativamente baixo. As chaves são números reais gerados aleatoriamente no intervalo $[0, 1[$. O decodificador deve retornar uma solução viável independente da sequência de chaves apresentada pelo cromossomo e para isso, todo decodificador exige uma representação cromossômica apropriada.

De maneira mais formal, um RKGA evolui uma população de c vetores de chaves aplicando cruzamentos e mutações, onde os indivíduos mais fortes de uma população têm mais chance de se tornarem pais e com isso perpetuar características de sua solução. O algoritmo começa com uma população inicial de c vetores de n chaves aleatórias e produz uma série de populações. Na $i-$ésima geração, os c vetores da população são particionados em um subconjunto de vetores que correspondem às melhores soluções (este conjunto se chama elite) e um outro subconjunto com o restante da população (chamado de não-elite). Todos os vetores de elite são salvos, sem mudança alguma, para a população da $(i+1)-$ésima geração. Logo após, são inseridos c_m vetores de chaves aleatórias na população da $(i+1)-$ésima geração. Esses vetores são chamados de mutantes e tem o mesmo papel dos operadores de mutação nos AGs tradicionais, ou seja, evitar que a população convirja para um ótimo local não global. Para completar os c elementos da população, são gerados vetores combinando pares de soluções da população da $k-$ésima geração, ambos escolhidos aleatoriamente, com uma combinação uniforme. Sendo a e b os vetores escolhidos como pais e d o filho resultante, no esquema mais comum, $d[j]$, o $j-$ésimo componente do vetor filho, recebe a $j-$ésima chave de um dos pais, com probabilidade ρ_a de receber $a[j]$ e $\rho_b = 1 - \rho_a$ de receber $b[j]$.

O BRKGA, como apresentado por [17], vai um pouco além do RKGA no que se refere às operações de cruzamento e seleção de pais. Ambos os algoritmos selecionam pais aleatoriamente e com reposição, sendo assim um pai pode ter mais de um filho por geração. Ambos os algoritmos fazem a combinação dos pais a e b com o cruzamento para gerar o filho d. Enquanto no RKGA os pais podem ser quaisquer indivíduos da população, no BRKGA o pai a é do conjunto elite e o pai b é não elite. Por fim, $\rho_a > \frac{1}{2}$ no BRKGA, fazendo com que o filho d tenha maior probabilidade de herdar as chaves do pai elite, diferente do RKGA. Essas diferenças entre o RKGA e o BRKGA fazem com que os resultados do BRKGA, na prática, sejam superiores ao RKGA.

Neste trabalho a solução gerada pelo decodificador consiste em computar uma árvore

geradora mínima onde o custo de cada aresta é o valor de uma chave aleatória. Com base nessa abordagem desenvolvemos quatro decodificadores diferentes, variando desde as funções de aptidão de cada indivíduo, até uma nova proposta de viés associado com a etapa de geração das chaves aleatórias. Mais detalhes serão apresentados na Seção 4.

Capítulo 3

Revisão Bibliográfica

Neste Capítulo, descrevemos as abordagens e resultados obtidos por trabalhos disponíveis na literatura. Nosso foco são os trabalhos que realizaram estudos sobre algoritmos para o problema de roteamento em VANETs e novos protocolos otimizados.

Segundo Peterson [32], um protocolo fornece um serviço de comunicação que objetos (nós da rede) usam para troca de mensagens e informações. No caso da comunicação *multicast*, os protocolos são utilizados para enviar informações de uma fonte para um grande conjunto de destinos utilizando apenas uma operação de envio. Uma parte essencial dos protocolos de comunicação é o roteamento [31]. Do ponto de vista matemático, pode-se ver o roteamento como um algoritmo que manipula os usuários e enlaces da rede, de modo que os pacotes enviados por um dos nós pode seguir um caminho para o destino utilizando apenas enlaces selecionados e, caso existam restrições de QoS, deve-se garantir que todos os nós destinos recebem as informações respeitando os limites impostos pelas métricas utilizadas na rede. Assim, desenvolver procedimentos para construção de rotas otimizadas, significa otimizar também os protocolos de comunicação.

Para construção de uma rota é necessário primeiramente que o nó de origem (raiz) tenha conhecimento da topologia da rede como um todo. O processo de reconhecimento dos nós pode variar de acordo com o protocolo, entretanto o método mais utilizado é o de inundação (do inglês *flooding*), que consiste em um nó realizando um *broadcast* para todos os nós ao seu alcance. Os nós que recebem a mensagem, por sua vez, replicam para os demais da rede utilizando a mesma abordagem. Ao final, o nó que inicialmente enviou a mensagem consegue ter conhecimento total da topologia da rede. Perceba que esse processo não garante que um veículo, após o processo de reconhecimento da rede, se mantenha conectado.

Oliveira e Pardalos [31] afirmam que o MRP se assemelha com o problema clássico da Árvore Mínima de Steiner, do inglês Minimum Steiner Tree (MST), o qual é $\mathcal{NP}$-difícil e possui uma extensa literatura, por exemplo [16, 27, 45]. A MST pode ser utilizada tanto para formulação quanto para representação da solução em aplicações do MRP. As versões mais estudadas do MST, associadas ao MRP, são as que consideram atraso fim a fim [31]. Vale ressaltar ainda que a combinação de multiplas restrições de QoS tornam o problema ainda mais difícil de ser resolvido.

Bitam e Mellouk [6] desenvolveram um algoritmo baseado em enxame de abelhas para resolver MRP-QoS em VANETs. Dado o nó origem e um conjunto de nós destino, o

objetivo é computar uma árvore que atenda todos os terminais na qual a soma dos custos das conexões seja mínimo e todas as métricas de QoS sejam respeitadas. As 4 métricas contidas em cada conexão são: custo de utilização, *delay*, *jitter* e largura de banda. O peso atribuído a cada métrica na função objetivo corresponde à sua importância de atendimento para qualidade de serviço. O algoritmo de enxame de abelhas foi comparado com outros da literatura em um cenário simulado contendo 20 nós (veículos) em uma área de 1200 metros quadrados durante um período de 120 segundos e, por se tratar de uma simulação, os veículos trafegam de forma aleatória no trecho de mapa fornecido para o simulador. A criação das instâncias foi feita com base na obtenção da topologia da rede no tempo de 85 segundos da simulação, ou seja, é computada uma fotografia que mostra o posicionamento dos nós e o valor das métricas para todas as conexões existentes na rede. Os resultados mostraram que o algoritmo de enxame de abelhas apresentou melhorias em comparação com demais trabalhos, incluindo convergência mais rápida para a melhor solução.

Os autores Sebastian *et al.* [39] apresentaram uma mudança no esquema de roteamento para fazer a disseminação de mensagens de segurança mais eficientemente em VANETs. O problema de roteamento *multicast* foi formulado como uma MST com restrições de atraso. O esquema de roteamento detecta os veículos que estão envolvidos e ameaçados em casos de acidentes e os coloca em um conjunto de destinatários das mensagens de alerta. Há também um recurso que visa aumentar a eficiência dos canais de comunicação da rede sem fio, visto que há uma seleção dos nós que receberão tais alertas de emergência, reduzindo assim o número de mensagens enviadas.

Fazio *et al.* [15] desenvolveram um novo protocolo para VANETs que tem em seu núcleo um algoritmo para construção de rotas otimizadas. Esse algoritmo leva em consideração três métricas: *delay* fim a fim, interferência co-canal e probabilidade de duração da conexão. A probabilidade de duração do enlace é calculada por um método proposto pelos próprios autores. O objetivo do trabalho é encontrar uma árvore geradora mínima considerando todas as restrições de QoS. A validação do protocolo desenvolvido foi feita com base na comparação de desempenho, utilizando um simulador de redes, com outros protocolos clássicos. O protocolo proposto apresentou resultados superiores na avaliação das métricas de largura de banda, taxa de entrega de pacotes e atraso fim a fim. Porém, os autores notaram uma pequena sobrecarga de processamento. Além da simulação do protocolo, houve a avaliação do algoritmo em relação ao seu desempenho em construir rotas de acordo com as restrições.

Ribeiro *et al.* [34] desenvolveram uma formulação de PLI e uma heurística *relax-and-fix* para resolver o MRP-QoS aplicado às VANETs. Dado um nó origem e um conjunto de nós destino, o objetivo é encontrar a árvore que minimiza a soma da quantidade de saltos e *delay* fim a fim no caminho, visando maximizar a seleção de *links* com maior estimativa de duração de conexão e obedecendo os limites máximos de *delay* acumulado, *jitter* acumulado, variação máxima entre *delays* totais para todos os pares de caminhos e o limite mínimo de largura de banda para cada conexão. As instâncias de *benchmark* foram geradas utilizando simuladores, buscando proximidade com configurações reais. O trabalho não faz comparação da heurística com a literatura, mas apresenta um conjunto de técnicas de pré-processamento e a diferença de desempenho relacionada com a utilização

dessas técnicas em conjunto com o modelo e o *relax-and-fix*.

É comum que autores abordem otimizações em redes VANETs propondo novas extensões de protocolos de comunicação com algoritmos otimizados. Souza [11] apresentou um protocolo de roteamento para VANETs que é baseado na meta-heurística colônia de formigas. Com base no protocolo MAODV (*Multicast Ad hoc On-demand Distance Vector routing protocol*) [37], o autor desenvolveu uma extensão que utiliza informações de mobilidade dos veículos para aumentar a estabilidade do roteamento *multicast*, essa extensão é chamada MAV-AODV. Para construção e manutenção de árvores *multicast* foi utilizado o algoritmo baseado em colônia de formigas. O método de avaliação do protocolo utilizou um ambiente de simulador de redes com uma quantidade variável de veículos (entre 25 e 100), por 150 segundos e em um cenário de 1600 $\times$ 1500 metros. Para análise do desempenho foram utilizados dois outros protocolos (MAODV e PUMA, *Protocol for Unified Multicasting through Announcement* [43]) e cinco métricas de QoS: *delay* fim a fim, variação do *delay* fim a fim, sobrecarga de roteamento, redundância e taxa de entrega dos pacotes. Em relação ao MAODV, o MAV-AODV obteve resultados superiores na maioria das métricas. Porém, ao comparar os resultados com o PUMA, o protocolo MAV-AODV obteve melhor desempenho apenas na métrica de redundância de pacotes.

Correia *et al.* [10] desenvolveram um protocolo de roteamento baseado no DYMO (*Dynamic MANET On-demand*) [18] que utiliza uma estratégia de otimização baseada no algoritmo de colônia de formigas. Por ser um protocolo reativo, o DYMO permite a integração do procedimento de otimização efetuando operações do algoritmo de colônia de formigas, tais como adição e evaporação de feromônios nas rotas disponíveis. A estratégia de otimização utiliza também a velocidade e posição dos veículos para auxiliar na escolha das rotas. Este protocolo foi validado em um software de simulação de rede, com um cenário de tamanho 1600 $\times$ 1500 metros, a quantidade de veículos dividida em 5 tamanhos, 25, 50, 75, 100 e 150, e comparado com dois outros protocolos, DYMO nativo e AODV (*Ad hoc On-demand Distance Vector routing protocol*) [37]. Para fins de comparação, fora consideradas 3 métricas de QoS: taxa média de entrega dos pacotes, *delay* fim a fim e sobrecarga de roteamento. A análise dos resultados confirmou uma melhora do novo protocolo em relação ao DYMO nativo apenas para a métrica de *delay* fim a fim, enquanto o mesmo protocolo obteve melhor desempenho para as métricas de taxa média de entrega e sobrecarga de roteamento em relação ao AODV.

Bitam *et al.* [7] propuseram um protocolo de roteamento híbrido que utiliza as vantagens dos protocolos de roteamento baseados em topologia em conjunto com as vantagens dos protocolos de roteamento baseados em informações geográficas. Este protocolo utiliza uma abordagem baseada em colônia de abelhas e aplica o conceito de roteamento *unicast*, ou seja, existe uma origem e um destino por vez. Além disso, o algoritmo possui um módulo de otimização, baseado em algoritmo genético, cuja finalidade é tratar do roteamento com base em informações geográficas. O resultado a ser retornado por este módulo consiste em uma rota entre o nó origem e o destino, levando em consideração o posicionamento dos nós, custo de utilização das conexões, *delay* fim a fim e a largura de banda mínima. Este protocolo foi validado utilizando simulador de redes e comparando os resultados com os protocolos AODV (baseado em topologia) e GPRS (*General Packet Radio Service*) que é baseado em informações geográficas. A movimentação dos veículos

da rede foi simulada com base em um modelo de tráfego em um trecho de 1000 metros quadrados da cidade de Biskra, na Argélia. Os experimentos trataram de 20, 35 e 50 veículos, analisando três métricas de QoS, *delay* fim a fim, taxa de pacotes entregues e sobrecarga na rede. O protocolo proposto apresentou bom desempenho, obtendo melhores resultados se tratando da métrica de *delay* fim a fim. Enquanto que para a métrica de taxa de pacotes entregues, os resultados foram competitivos com os resultados do AODV, apresentando uma diferença inferior a 1%. Por fim, para a métrica de sobrecarga da rede, o protocolo proposto apresentou vantagem sobre o AODV e perda em relação ao GPRS.

Saleet *et al.* [38] desenvolveram uma classe de protocolos para VANETs chamado IGRP (*Intersection-based Geographical Routing Protocol*), que apresentou resultados superiores em comparação com demais protocolos de roteamento aplicados em ambientes urbanos. A ideia principal do IGRP está na seleção de interseções de ruas pelas quais o pacote deve passar para atingir o seu destino. Esta seleção é feita de modo que existe uma garantia, com alta probabilidade, de conectividade da rede ao longo das interseções, enquanto satisfaz as métricas de QoS utilizadas. O IGRP faz uso de uma rotina baseada em algoritmo genético para seleção de interseções. O protocolo proposto foi avaliado utilizando uma ferramenta para simulação de redes que executou por 1000 segundos em um cenário contendo entre 150 e 600 nós. As comparações para análise de desempenho se deram entre o protocolo desenvolvido e demais trabalhos contidos na literatura, OLSR (*Optimized Link State Routing protocol*) [8], GPSR (*Greedy Perimeter Stateless Routing*) [24] e GPCR (*Greedy Perimeter Coordinator Routing*) [26]. O IGRP alcançou os melhores resultados se tratando das métricas de *delay* e quantidade de saltos, o que influencia diretamente na taxa de erro de entrega de mensagens, na qual o protocolo proposto também obteve vantagem em relação aos demais.

Capítulo 4

Metodologia

Neste capítulo são apresentadas as metodologias aplicadas para solução do MS-MRP-QoS e para análise estatística dos resultados.

4.1 Aperfeiçoamento nos Modelos Matemáticos

Foi feito um aperfeiçoamento que se aplicam em ambos os modelos, DMFM-MRP e AB-MRP. O aperfeiçoamento foi a utilização de pré-processamentos para fixação de variáveis. Os procedimentos foram apresentados em Ribeiro et al. [34] e adaptados para o MS-MRP-QoS.

4.1.1 Pré-processamentos

Dado um nó terminal k e um arco (i, j) é possível estabelecer que uma variável y_{ij} ou f_{ij}^k pode ser removida do modelo, reduzindo seu tamanho, sem inviabilizar a solução ótima. Para verificar a necessidade de utilizar um arco (i, j) no caminho da raiz s até um terminal k, são computados limitantes para os valores mínimos de *delay* e *jitter* necessários para construir tal caminho.

Seja r um recurso associado com os arcos do grafo G, de modo que para um arco (i, j), r_{ij} é a quantidade de recurso r consumida quando esse arco é utilizado. Um terminal k só pode ser classificado como atendido se, para um caminho P que vai da raiz s até k, a soma dos valores de r não excedem uma quantidade Δ_r. Seja LB_{si} um limitante inferior da quantidade de recurso r necessário para ir da raiz s até o nó i, e analogamente, seja LB_{jk} um limitante inferior da quantidade de recurso r necessário para ir de j até k. Logo, se

$$LB_{si} + r_{ij} + LB_{jk} > \Delta_r, \tag{4.1}$$

é possível garantir que, com a utilização do arco (i, j) no caminho da raiz s até o terminal k, o terminal k não será atendido. Logo, a variável f_{ij}^k pode ser fixada em zero ou removida do modelo. Para o MS-MRP-QoS, existem dois recursos a serem considerados: *delay* e *jitter*. Ribeiro et al. [34] desenvolveram três diferentes variações de cálculo dos limitantes da Equação (4.1). Este trabalho aplica dois desses procedimentos para

eliminação de variáveis nas formulações.

Considere uma instância do MS-MRP-QoS definida por um grafo G e as funções λ e ξ que representam, respectivamente, os valores de *delay* e *jitter* de cada arco. As seguintes notações e definições são utilizadas:

- G_λ: grafo direcionado G com os custos dos arcos dados pela função λ e os recursos dados pela função ξ;
- G_ξ: mesma explicação da anterior, mas invertendo as funções de custos e recursos dos arcos;
- G_r^T: o transposto do grafo G_r para $r \in \{\lambda, \xi\}$ (i.e., com as direções dos arcos invertidas);
- $SP(r, u, v)$: o caminho mínimo, do inglês Shortest Path (SP), de u para v no grafo G_r, onde $r \in \{\lambda, \xi\}$ e u e v sendo qualquer par distinto de nós em G_r;
- $SPRC(r, u, v, \Delta_t)$: o caminho mínimo de u para v no grafo G_r restrito a usar até Δ_t unidades de recursos t, do inglês Shortest Path with Resource Constraints (SPRC), onde r e $t \in \{\lambda, \xi\}$, $r \neq t$ e u e v sendo qualquer par distinto de nós em G_r; e
- $SPRC^T$(r, u, v, Δ_t): mesmo que acima, mas com o grafo transposto.

Agora descreveremos os pré-processamentos seguindo a mesma nomenclatura que os autores em [34]. Os procedimentos podem ser classificados em fraco, moderado e forte, dependendo da quantidade de vezes que os caminhos mínimos com e sem restrições de recursos são computados para obtenção dos limitantes da equação (4.1). Os procedimentos utilizados neste trabalho são os seguintes:

1. Remoção de Vértices Moderada, do inglês Moderated Vertex Elimination (MVE): Dado um nó $i \in S$ e recursos r e $t \in \{\lambda, \xi\}$ com $r \neq t$, se

$$\text{SPRC}(r, s, i, \Delta_t) + \text{ SP } (r, i, k) > \Delta_r, \ \forall k \in D, \tag{4.2}$$

então o vértice i pode ser removido do grafo.

Explicação e Fixação de variáveis. A quantidade mínima de recurso r necessária para ir da raiz s até qualquer terminal k, passando pelo nó i, excede o limite permitido para que k seja atendido. Perceba que, sem a utilização desse pré-processamento, podem existir soluções viáveis para o MS-MRP-QoS nas quais i é utilizado como intermediário no caminho para pelo menos um terminal. Mas, a utilização i implica que todo terminal visitado nesse caminho não é atendido, assim, é possível remover o nó i e todos os arcos adjacentes a ele. Assim, o pré-processamento garante que o caminho para visitar os nós opcionais removidos passe pelos arcos artificiais (s, s') e (s', i), reduzindo assim o espaço de soluções. A remoção pode ser aplicada no grafo ou fixando todas as variáveis y_{ij}, y_{ji}, f_{ij}^k e f_{ji}^k para todo $k \in D$, em 0.

2. Remoção de Arcos Moderada, do inglês Moderated Arc Elimination (MAE): Dado um arco $(i, j) \in A$ e recursos r e $t \in \{\lambda, \xi\}$ com $r \neq t$, se

$$\text{SPRC}(r, s, i, \Delta_t) + r_{ij} + \text{ SP } (r, j, k) > \Delta_r, \ \forall k \in D \tag{4.3}$$

então o arco (i, j) pode ser removido do grafo.
Explicação e Fixação de variáveis. A quantidade mínima de recurso r para ir da raiz s até qualquer terminal k, utilizando o arco (i, j), ultrapassa o limite permitido para que k seja atendido. O funcionamento desse pré-processamento, aplicado ao MS-MRP-QoS, pode ser demonstrado utilizando o mesmo princípio descrito anteriormente para o MVE. A remoção pode ser aplicada no grafo ou fixando todas variáveis y_{ij} e f_{ij}^k para todo $k \in D$, em 0.

3. Remoção de Arcos Forte, do inglês Strong Arc Elimination (SAE): Dado um arco $(i, j) \in A$, um terminal $k \in D$ e os recursos r e $t \in \{\lambda, \xi\}$ com $r \neq t$, considerando a Equação (4.1). O valor do limitante LB_{si} pode ser computado da seguinte maneira:

$$LB_{si} = SPRC(r, s, i, \Delta_t - \min_{l \in D, l \neq i}\{SP(t, i, l)\}). \tag{4.4}$$

Esse valor é computado considerando que, se o fluxo enviado de s para um terminal k utilizando o arco (i, j), a quantidade de recurso t consumido para ir de i até k é limitado inferiormente pelo valor de $\min\{SP(t, i, l) : l \in D, l \neq i\}$, ou seja, a quantidade de recurso t do caminho de menor custo indo de i até qualquer terminal $l \neq i$. Assim, resta no máximo Δ_t subtraído da quantidade de recurso t necessário para ir de i até qualquer outro terminal. Consequentemente, o tamanho do caminho mínimo com restrição de recurso dado por essa fórmula é um limite inferior da quantidade de recurso r gasto para ir da raiz s até o nó i. Novamente considerando a equação (4.1), o valor de LB_{jk} pode ser obtido por:

$$LB_{jk} = SPRC^T(r, k, j, \Delta_t - SPRC(t, s, j, \Delta_r)). \tag{4.5}$$

Analisando em mais detalhes, o termo $\Delta_t - SPRC(t, s, j, \Delta_r)$ da expressão corresponde ao limitante superior de recurso t disponível para ir de j até k, considerando que utilizou-se o mínimo possível desse recurso no caminho de s até j. Assim, o caminho mínimo com restrição de recurso da parte mais externa da expressão fornece um limitantes inferior válido para a quantidade de recurso r necessário para ir de j até k. O motivo do computar esse caminho com base no grafo G^T está relacionado com a complexidade computacional e será discutida posteriormente. Finalmente, se

$$\begin{aligned}\big(SPRC(r, s, i, \Delta_t - \min_{l \in D, l \neq i}\{SP(t, i, l)\})\big) + r_{ij} \\ + SPRC^T(r, k, j, \Delta_t - SPRC(t, s, j, \Delta_r)) > \Delta_r,\end{aligned} \tag{4.6}$$

então o arco (i, j) pode ser removido do caminho que vai da raiz s até o terminal k.
Explicação e Fixação de variáveis. Dado que a validade dos limites inferiores já foi esta-

belecida anteriormente, os argumentos são análogos aos anteriores. Por fim, a variável f_{ij}^k é fixada em 0.

Ribeiro et al. [34] apresentam a complexidade computacional dos testes propostos. Toda computação é feita no grafo G = (V, A) ou seu transposto. Sendo $n = |V|$, $m = |A|$ e o número de nós terminais $d = |D|$, o tempo de execução do testes depende diretamente do custo computacional de gerar os caminhos em cada caso. Assumindo $\#SP$ e $\#SPRC$ como a complexidade de computar, respectivamente, caminhos mínimos sem e com restrição de recurso em G ou G^T. É bem definido que $\#SP$ tem complexidade (n^2) com apenas um nó raiz e $O(n^3)$ para computar cominho mínimos entre todos os pares de vértices (ver, e.g., Cormen et al., [9]). Por outro lado, computar caminhos mínimos com restrição de recurso é $\mathcal{NP}-$difícil. Assim, a complexidade dos testes é dada por (a) MVE: $O(n \cdot \#SPRC + n^2 \cdot \#SP)$; (b) MAE: $O(n \cdot \#SPRC + n^2 \cdot \#SP)$; e (c) SAE: $O(n \cdot \#SPRC + n^2 \cdot \#SP) + O((d+n) \cdot \#SPRC)$, de modo que o primeiro e segundo termos do último somatório são as complexidades associadas com as Equações (4.4) e (4.5), respectivamente.

Note que, com a utilização do algoritmo de Floyd-Warshall para computar o caminho mínimo entre todos os pares, os termos $n^2O(\#SP)$ podem ser substituídos por $O(n^3)$. Ainda, veja que o segundo termo corresponde a complexidade do teste SAE, o uso do grafo transposto evita o cômputo de caminhos mínimos com restrição de recursos entre todos os pares de nós em $V\backslash\{s\}$. Isso ocorre pela possibilidade de restringir o conjunto de nós utilizados como raiz para apenas os terminais

Mesmo com o problema de caminho mínimo com restrição de recurso sendo $\mathcal{NP}$-difícil, existem algoritmos exatos eficientes para resolver este problema na prática [21]. A implementação dos pré-processamentos utilizam o algoritmo de configuração de rótulos disponível na biblioteca Boost C++ [1]. Os tempos de execução dos pré-processamentos, na maioria das instâncias geradas neste trabalho, foi irrelevante se comparado com o tempo de execução do resolvedor de PLI e apenas instâncias acima de 250 nós excederam 30 minutos de execução.

4.2 Relaxações Lagrangianas aplicadas ao MS-MRP-QoS

Nas seções subsequente, são apresentadas diferentes RLs obtidas a partir do modelo DMFM-MRP, proposto na Seção 2.2. Os multiplicadores de Lagrange estão representados por ϕ's, de modo que $\phi^{2.7}$, $\phi^{2.8}$ e $\phi^{2.9}$ estão associados com as restrições (2.7), (2.8) e (2.9), respectivamente. O multiplicador $\phi^{2.5}$ representa a restrição (2.5). Portanto, $\phi^{2.5}$, $\phi^{2.7}$, $\phi^{2.8}$ e $\phi^{2.9} \in \mathbb{R}_+$. Todas as relaxações mantém, em seu PPL, problemas de caminho mínimo, do inglês SP ou caminho mínimo com restrições de recurso, do inglês SPRC. A nomenclatura utilizada para cada relaxação segue o padrão RL-X, onde "X" representa o subproblema, computacionalmente mais difícil de ser resolvido, do PPL.

4.2.1 Relaxação Lagrangiana - Caminho Mínimo

A Relaxação Lagrangiana que resulta da dualização das restrições (2.5) e (2.7)-(2.9) é bastante próxima do problema de computar SPs e, por isso, é denominada RL-SP. De fato as restrições (2.2)-(2.4) modelam caminhos mínimos da raiz s para demais nós do grafo, utilizando as variáveis f_{ij}^k para todo $k \in D \cup S$. Considerando as variáveis y_{ij}, o problema associado consiste na seleção do arco (s, s') juntamente com os $|V'| - 2$ arcos de menor coeficiente computados a partir dos multiplicadores lagrangianos. Como o PPL não contém restrições que se apliquem as variáveis z_k para todo $k \in D$, o problema associado com essas variáveis consiste na decisão de não atender o terminal k ($z_k = 1$) se o coeficiente gerado, considerando os multiplicadores lagrangianos, for menor que zero, caso contrário, $z_k = 0$. Assim, ao dualizar as restrições (2.5) e (2.7)-(2.9), o PPL resultante é:

$$
\begin{aligned}
\text{(RL-SP)} \quad & \min \sum_{k \in D} z_k (1 - \phi_k^{2.7} M_d - \phi_k^{2.8} M_j - \sum_{\substack{l \in D \\ l \neq k}} (\phi_{kl}^{2.9} M_v^k + \phi_{lk}^{2.9} M_v^l)) \\
& + \sum_{k \in D} \sum_{(i,j) \in A'} f_{ij}^k (\phi_{ijk}^{2.5} + \xi_{ij} \phi_k^{2.8} + \lambda_{ij} (\phi_k^{2.7} + \sum_{\substack{l \in D \\ l \neq k}} (\phi_{kl}^{2.9} - \phi_{lk}^{2.9}))) \\
& + \sum_{q \in S} \sum_{(i,j) \in A'} f_{ij}^q (\phi_{ijk}^{2.5}) - \sum_{k \in D \cup S} \sum_{(i,j) \in A'} y_{ij} (\phi_{ijk}^{2.5}) \\
& - \sum_{k \in D} (\phi_k^{2.7} \Delta_d + \phi_k^{2.8} \Delta_j + \sum_{\substack{l \in D \\ l \neq k}} (\phi_{kl}^{2.9} \Delta_v)) \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

s.a.:

$(2.2) - (2.4), (2.6)$ e (2.10)

Foram utilizadas duas abordagens para resolução do RL-SP. A primeira estratégia de resolução do PPL utiliza resolvedor de PLI para obtenção de soluções a cada iteração do método de subgradiente. Na segunda abordagem, a resolução do PPL consiste em resolver os subproblemas associados ao conjunto de variáveis (f, y e z) utilizando algoritmos combinatórios. Um fato importante, que influencia na complexidade de resolução do problema de SP, está relacionado com a possibilidade de existirem coeficientes negativos associados as variáveis f_{ij}^k. Consequentemente, ao computar um SP, a solução retornada pode conter ciclos negativos, o que implica no pior valor possível da função objetivo do PPL, sendo igual a $-\infty$.

O resolvedor de PLI é capaz computar o PPL e formar os caminhos independente da existência de ciclos negativos, diferente da abordagem com algoritmos combinatórios. Assim, para utilizar o algoritmo de SP são necessárias alterações na estrutura da relaxação. Uma possibilidade explorada consiste na resolução de uma versão simplificada de RL-SP, na qual descarta-se um subconjunto de multiplicadores, mais especificamente $\phi^{2.9}$. Desconsiderar esses multiplicadores da função objetivo descarta a possibilidade de haver arcos, associados as variáveis f, cujos coeficientes sejam negativos. Assim, a nova função objetivo, denominada RL-SP', pode ser descrita do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
\text{(RL-SP')} \quad & \min \sum_{k \in D} z_k (1 - \phi_k^{2.7} M_d - \phi_k^{2.8} M_j) \\
& + \sum_{k \in D} \sum_{(i,j) \in A'} f_{ij}^k (\phi_{ijk}^{2.5} + \xi_{ij} \phi_k^{2.8} + \lambda_{ij} \phi_k^{2.7}) \\
& + \sum_{q \in S} \sum_{(i,j) \in A'} f_{ij}^q (\phi_{ijk}^{2.5}) - \sum_{k \in D \cup S} \sum_{(i,j) \in A'} y_{ij} (\phi_{ijk}^{2.5}) \\
& - \sum_{k \in D} (\phi_k^{2.7} \Delta_d + \phi_k^{2.8} \Delta_j) \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

A respeito da complexidade da versão combinatória da relaxação RL-SP', considere $n = |V|, m = |A|$, $d = |D|$ e $\#SP$ como a complexidade de computar caminhos mínimos em G'. Ainda, considere $G^k = (V', A'^k)$ para todo $k \in D \cup S$, como o conjunto de variações de G' cujos arcos e coeficientes associados estão relacionado as variáveis f_{ij}^k. Perceba que a diferença nos arcos do conjunto A'^k se deve a utilização, por exemplo, do pré-processamento SAE. Assim, o problema combinatório associado às variáveis f tem complexidade $O((n-1) \cdot \#SP)$. Para as variáveis y, a complexidade é dada pelo tempo de ordenação dos arcos de A' com os coeficientes lagrangianos, ou seja $O(m \log m)$. Por fim, o problema computacionalmente mais simples, podendo ser resolvido em $O(d)$, consiste em verificar os coeficientes lagrangianos associados a cada variável z.

4.2.2 Relaxação Lagrangiana - Caminho Mínimo com Restrição de *delay*

A Relaxação Lagrangiana que resulta da dualização das restrições (2.5) e (2.7)-(2.9) é próxima do problema de computar caminhos mínimos e caminhos mínimos com restrição de *delay* e, por isso, será referenciada como RL-SPRC$_\lambda$. De fato, considerando as variáveis f_{ij}^k, as restrições (2.2)-(2.4) e (2.7) modelam caminhos mínimos com restrição de *delay* indo de s para os nós terminais do grafo, enquanto, para os nós opcionais, basta computar caminhos mínimos. O problema associado com as variáveis y_{ij} se mantém como descrito na relaxação RL-SP. Para as variáveis z_k existem duas situações nas quais o valor da variável se torna um, o primeiro caso ocorre se o coeficiente gerado pelos multiplicadores lagrangianos for menor que zero, enquanto o segundo caso está associado com os caminhos computados segundo as variáveis f_{ij}^k, ou seja, se para visitar o terminal k o *delay* utilizado excede Δ_d torna-se k não atendido e consequentemente $z_k = 1$. Portanto, ao dualizar as restrições (2.5) e (2.8)-(2.9), o PPL resultante é:

$$
\begin{aligned}
\text{(RL-SPRC}_\lambda\text{)} \quad & \min \sum_{k \in D} z_k (1 - \phi_k^{2.8} M_j - \sum_{\substack{l \in D \\ l \neq k}} (\phi_{kl}^{2.9} M_v^k + \phi_{lk}^{2.9} M_v^l)) \\
& + \sum_{k \in D} \sum_{(i,j) \in A'} f_{ij}^k (\phi_{ijk}^{2.5} + \xi_{ij} \phi_k^{2.8} + \lambda_{ij} (\sum_{\substack{l \in D \\ l \neq k}} \phi_{kl}^{2.9} - \phi_{lk}^{2.9}))
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{k\in S}\sum_{(i,j)\in A'} f_{ij}^{k}(\phi_{ijk}^{2.5}) - \sum_{k\in D\cup S}\sum_{(i,j)\in A'} y_{ij}(\phi_{ijk}^{2.5})$$
$$-\sum_{k\in D}(\phi_{k}^{2.8}\Delta_j + \sum_{\substack{l\in D\\ l\neq k}}(\phi_{kl}^{2.9}\Delta_v)) \tag{4.9}$$

s.a.

$$(2.2)-(2.4), (2.6)-(2.7) \text{ e } (2.10)$$

Para resolver o problema combinatório associado com as variáveis f_{ij}^{k} é necessário computar uma sequência de SPs e/ou SPRCs. Primeiramente deve-se resolver dois subproblemas para cada terminal k, o primeiro considerando k como atendido e o segundo considerando o contrário. Esses dois subproblemas estão sujeitos à alteração, indo de SP à SPRC, de acordo com o valor utilizado pelos parâmetros M_d e M_j. As diferentes possibilidades e seus respectivos impactos na complexidade da relaxação serão detalhados posteriormente.

Como descrito para a relaxação RL-SP, a dualização das restrições (2.9) possibilitam a existência de coeficientes negativos associados com as variáveis f_{ij}^{k}, podendo inviabilizar a utilização do algoritmo de SP, necessário de acordo com o valor utilizado no parâmetro M_d. Assim, seguindo o mesmo processo de simplificação adotado anteriormente, podemos reescrever a função objetivo, referenciando-a como RL-SPRC$_\lambda$', do seguinte modo:

$$\text{(RL-SPRC'}_\lambda\text{)} \quad \min \sum_{k\in D} z_k(1-\phi_k^{2.8}M_j) + \sum_{k\in D}\sum_{(i,j)\in A'} f_{ij}^{k}(\phi_{ijk}^{2.5}+\xi_{ij}\phi_k^{2.8})$$
$$+\sum_{k\in S}\sum_{(i,j)\in A'} f_{ij}^{k}(\phi_{ijk}^{2.5}) - \sum_{k\in D\cup S}\sum_{(i,j)\in A'} y_{ij}(\phi_{ijk}^{2.5}) - \sum_{k\in D}(\phi_k^{2.8}\Delta_j) \tag{4.10}$$

4.2.3 Relaxação Lagrangiana - Caminho Mínimo com Restrição *jitter*

Essa relaxação segue as mesmas propriedades da relaxação RL-SPRC$_\lambda$, modificando apenas o recurso de *delay* para *jitter*, por esse motivo é intitulada de RL-SPRC$_\xi$. Assim, removendo a dualização das restrições (2.7) e dualizando (2.8), temos o seguinte PPL.

$$\text{(RL-SPRC}_\xi\text{)} \quad \min \sum_{k\in D} z_k(1-\phi_k^{2.7}M_d - \sum_{\substack{l\in D\\ l\neq k}}(\phi_{kl}^{2.9}M_v^k + \phi_{lk}^{2.9}M_v^l))$$
$$+\sum_{k\in D}\sum_{(i,j)\in A'} f_{ij}^{k}(\lambda_{ij}(\phi_k^{2.7} + \sum_{\substack{l\in d\\ l\neq k}}(\phi_{kl}^{2.9}-\phi_{lk}^{2.9})))$$
$$+\sum_{k\in S}\sum_{(i,j)\in A'} f_{ij}^{k}(\phi_{ijk}^{2.5}) - \sum_{k\in D\cup S}\sum_{(i,j)\in A'} y_{ij}(\phi_{ijk}^{2.5})$$
$$-\sum_{k\in D}(\phi_k^{2.7}\Delta_d + \sum_{\substack{l\in D\\ l\neq k}}(\phi_{kl}^{2.9}\Delta_v)) \tag{4.11}$$

s.a.

$$(2.2) - (2.4), (2.6), (2.8) \text{ e } (2.10)$$

E, por motivos análogos aos apresentados anteriormente, necessita-se da função objetivo RL-SPRC$_\xi$', dada por:

$$\begin{aligned}(\text{RL-SPRC'}_\xi) \quad & \min \sum_{k\in D} z_k(1-\phi_k^{2.7}M_d) + \sum_{k\in D}\sum_{(i,j)\in A'} f_{ij}^k(\lambda_{ij}\phi_k^{2.7}) \\ & + \sum_{k\in S}\sum_{(i,j)\in A'} f_{ij}^k(\phi_{ijk}^{2.5}) - \sum_{k\in D\cup S}\sum_{(i,j)\in A'} y_{ij}(\phi_{ijk}^{2.5}) - \sum_{k\in D}(\phi_k^{2.7}\Delta_d) \end{aligned} \tag{4.12}$$

4.2.4 Relaxação Lagrangiana - Caminho Mínimo com Restrição de Múltiplos Recursos

A Relaxação Lagrangiana que resulta da dualização das restrições (2.5) e (2.9), é próxima do problema de computar caminhos mínimos com restrição de recursos simultâneos, nesse caso *delay* e *jitter*, e por esse motivo será referenciada como RL-SPRC2. De fato, considerando as variáveis f_{ij}^k, as restrições (2.2)-(2.4) e (2.7)-(2.8) modelam SPRCs restritos em *delay* e *jitter* da raiz s até cada um dos nós terminais do grafo enquanto, para os nós opcionais, basta computar caminhos mínimos a partir de s. Em relação às variáveis y e z, os problemas combinatórios a serem resolvidos são os mesmos já descritos anteriormente. Assim, ao dualizar as restrições (2.5) e (2.9), o PPL resultante e:

$$\begin{aligned}(\text{RL-SPRC2}) \quad & \min \sum_{k\in D} z_k(1 - \sum_{\substack{l\in D\\ l\neq k}}(\phi_{kl}^{2.9}M_v^k + \phi_{lk}^{2.9}M_v^l)) \\ & + \sum_{k\in D}\sum_{(i,j)\in A'} f_{ij}^k(\phi_{ijk}^{2.5} + \lambda_{ij}\sum_{\substack{l\in D\\ l\neq k}}(\phi_{kl}^{2.9} - \phi_{lk}^{2.9})) \\ & + \sum_{k\in S}\sum_{(i,j)\in A'} f_{ij}^k(\phi_{ijk}^{2.5}) - \sum_{k\in D\cup S}\sum_{(i,j)\in A'} y_{ij}(\phi_{ijk}^{2.5}) - \sum_{k\in D}\sum_{\substack{l\in D\\ l\neq k}}(\phi_{kl}^{2.9}\Delta_v) \end{aligned} \tag{4.13}$$

s.a.:

$$(2.2) - (2.4), (2.6) - (2.8) \text{ e } (2.10)$$

E, por motivos já esclarecidos anteriormente, mesmo com a utilização de dois recursos simultaneamente no computo do SPRC, é necessário definir a função objetivo RL-SPRC2', como apresentada a seguir:

$$(\text{RL-SPRC2'}) \quad \min \sum_{k\in D} z_k + \sum_{k\in D\cup S}\sum_{(i,j)\in A'} f_{ij}^k(\phi_{ijk}^{2.5}) - \sum_{k\in D\cup S}\sum_{(i,j)\in A'} y_{ij}(\phi_{ijk}^{2.5}) \tag{4.14}$$

Em relação aos PPLs em que as variáveis f_{ij}^k modelam problemas de caminhos mínimos

com restrições de recurso, é necessário destacar a diferença de subproblemas a serem resolvidos de acordo com os valores atribuídos aos parâmetros M_d e M_j. Iniciando pelo caso no qual $M_d = \Lambda$ e $M_j = \Xi$, para cada terminal $k \in D$ devem ser resolvidos dois subproblemas descritos a seguir, o primeiro quando k é considerado atendido e o segundo para a consideração contrária.

Problema 1 ($z_k = 0$). Considerando o que o terminal k é atendido, deve-se computar o SPRC(s, k, Δ_r) com $r \in \{d, j\}$, ou seja, o caminho mínimo com restrição de recurso r de s até k. Considere como $w_1(k)$ o custo desse caminho.

Problema 2 ($z_k = 1$). Para o caso no qual terminal k não é atendido, a quantidade de recurso disponível para o caminho modifica-se de Δ_r para M_r com $r \in \{d, j\}$. Esse acréscimo permite computar de maneira viável qualquer um dos seguintes caminhos, SPRC(s, k, M_r) ou SP(s, k). Considere o custo desse caminho como $w_2(k)$.

Tratando agora do segundo conjunto de valores para os parâmetros, quando $M_d = M_j = 1$, resolve-se o mesmo subproblema descrito anteriormente no caso em que $z_k = 0$, ou seja, o valor de $w_1(k)$ se mantém inalterado. A diferença consiste na etapa de calcular $w_2(k)$, quando k não é atendido. A quantidade de recurso r que pode ser utilizadas é incrementada de Δ_r para $\Delta_r + 1$, tal que $r \in \{d, j\}$. Portanto, o valor de $w_2(k)$ é igual à SPRC(s, k, $\Delta_r + 1$), inviabilizando a resolução do problema de caminho mínimo.

Após computar os valores de $w_1(k)$ e $w_2(k)$ para um $k \in D$, o caminho que fará parte da solução do PPL e aquele que apresentar o menor valor associado à função objetivo, i.e., seleciona-se a solução de custo $w(k)$ tal que $w(k) = \min\{w_1(k), w_2(k) + 1\}$. O valor 1 somado ao custo do caminho $w_2(k)$ representa a penalização na função objetivo pelo fato de k não ser atendido.

Vale ressaltar novamente a inviabilidade de computar caminhos mínimos para o caso em que o subproblema utiliza o grafo contendo arcos de coeficiente negativo. Ainda, são indispensáveis algumas observações referentes a resolução do problema de SPRC, a primeira delas é o fato de que a presença de arcos com custo negativo não inviabiliza o algoritmo contanto que o consumo de recurso dos arcos seja estritamente maior que zero. A segunda observação é relacionada ao tempo de computação, por se tratar de um problema $\mathcal{NP}$-difícil que está sendo resolvido em tempo pseudo-polinomial, a presença de ciclos negativos, o tratamento de múltiplos recursos simultâneos e o aumento na quantidade de recurso que pode ser consumido na geração do caminho, podem ocasionar um acréscimo considerável no tempo de execução do algoritmo.

A respeito da complexidade das versões combinatórias das relaxações RL-SPRC$_\lambda$, RL-SPRC$_\xi$ e RL-SPRC2, considere $n = |V|, m = |A|, d = |D|$, $\#SP$ como a complexidade de computar um SP e $\#SPRC$ a complexidade de computar um SPRC, ambos em G'. A análise do tempo de resolução dos problemas associados às variáveis y_{ij} e z_k são as mesmas descritas anteriormente na Seção 4.2.1. Restando assim, a complexidade computacional dos problemas associados às variáveis f_{ij}^k, que pode variar de $O(d \cdot \#SPRC + n \cdot \#SP)$ à $O(2 \cdot d \cdot \#SPRC + (n - d - 1) \cdot \#SP)$, dependendo do valor dos parâmetros M_d e M_j, e a presença de arcos com custo negativo no grafo em que os caminhos são computados.

4.3 Biased Random-Key Genetic Algorithm

Devido a disponibilidade de um *framework* do BRKGA desenvolvido por Toso e Resende [42], a única implementação necessária se trata do decodificador que será utilizado para gerar uma solução viável para o MS-MRP-QoS a partir do vetor de chaves aleatórias recebido como parâmetro. Nesse trabalho foram desenvolvidas quatro diferentes versões do BRKGA. Em três dessas variações alterou-se o procedimento de cálculo da função de aptidão do decodificador e a quarta variação modifica o procedimento de geração das chaves aleatórias. Todas as variações serão discutidas em mais detalhes ao longo dessa Seção. Inicialmente pode-se destacar o pseudocódigo 2, que apresenta, em linhas gerais, os procedimentos em comum de todos os decodificadores desenvolvidos.

Algoritmo 2: Decodificador BRKGA $O(m \log m + \#BL + \#f)$

```
   Entrada: c, G
   // c:  vetor de chaves aleatórias com tamanho |E|
   // G: grafo (V, E)
1  para toda aresta e ∈ E faça
2  |  peso(e) ← −c[e];
3  T ← AGM computada em G;
4  T' ← T com as arestas direcionadas a partir da raiz em direção às folhas;
5  Aplicar busca local em T';
6  retorna valor da função de aptidão (F1, F2 ou F3) computada em T';
```

No algoritmo 2, o primeiro passo consiste em atribuir a cada aresta do grafo G o valor negativo de uma chave aleatória de c, como apresentado na linha (2). Na linha (3) aplica-se o algoritmo de Kruskal (ver Cormen et al. [9]) para computar uma Árvore Geradora Mínima (AGM) em G, neste trabalho utilizamos a implementação fornecida pela biblioteca da Boost. Como uma solução viável para o MS-MRP-QoS consiste em uma arborescência, a linha (4) direciona as arestas utilizadas em T. O passo da linha (5) é opcional, por aumentar o tempo de execução do decodificador, e consiste na aplicação de uma etapa de busca local em T, esse procedimento será melhor detalhado posteriormente. Por fim, a linha (6) retorna o valor de aptidão com base na função selecionada.

Algumas palavras sobre a complexidade computacional do decodificador. Assuma $n = |V|$, $m = |E|$ e $d = |D|$. O procedimento para atualizar o custo dos arcos tem complexidade $O(E)$. Por conta dos coeficientes negativos associados aos arcos, para computar a AGM utiliza-se o algoritmo de Kruskal (ver, e.g., Cormen et al. [9]), que tem complexidade computacional $O(m \log m)$. O procedimento para direcionar as arestas de T a partir da raiz pode ser feito em tempo $O(n)$. No entanto, a complexidade do decodificador depende também da utilização da busca local e da função de aptidão, cujas complexidades serão referenciadas por $\#BL$ e $\#F$, respectivamente. Inicialmente, é possível assumir a complexidade total do decodificador como $O(m \log m + \#BL + \#F)$, de modo que o termo $O(m \log m)$ está associado ao procedimento de maior custo computacional até a linha (4), ou seja, computar a AGM.

A função de aptidão pode ter uma influência significativa na melhora dos resultados obtidos pelo BRKGA, dado que quanto mais características da solução incorporam-se à

função de aptidão, melhor podem ser os indivíduos formados nas próximas gerações. Dito isso, a primeira e mais simples função de aptidão, denominada F1, utiliza apenas o número de terminais não atendidos na árvore. Já as função F2 e F3 incorporam procedimento de penalização, de modo que a qualidade da árvore passa a influenciar diretamente na função de aptidão.

Antes de inciar a descrição das funções de aptidão em mais detalhes, é necessário apresentar o algoritmo utilizado para decisão dos terminais não atendidos considerando as restrições de variação de *delay*. Em linhas gerais, esse procedimento consiste na criação de um vetor contendo o custo de *delay* de todos os terminais atendidos (considerando apenas as restrições de *delay* e *jitter*), em seguida basta percorrer todos os subconjuntos maximais e selecionar os terminais contidos do maior subconjunto. Mais detalhes são apresentados no pseudocódigo 3.

Algoritmo 3: Seleção Por Variação de *delay* $O(d \log d)$

Entrada: D'

```
1  Ordenar D' de maneira não-decrescente considerando o valor de delay;
2  maior ← 0;
3  maior_sub ← ∅;
4  para i = 1, ..., |D'| faça
5  |  α ← D'[i].delay;
6  |  j ← i + 1;
7  |  sub ← D'[i].k;
8  |  enquanto D'[j].delay ≤ α + Δ_v and j ≤ |D'| faça
9  |  |  sub ← sub ∪ {D'[j].k};
10 |  |  j ← j + 1;
11 |  se |sub| > maior então
12 |  |  maior ← |sub|;
13 |  |  maior_sub ← sub;
14 retorna |maior_sub|;
```

Com D' sendo um vetor que contém os pares $(delay, k)$, representando, respectivamente, o custo de *delay* acumulado no caminho de s até o terminal k na árvore T. Ainda, vale considerar que os terminais adicionados em D' são apenas os que respeitam os limites de *delay* e *jitter*. Ordenar D' de maneira não-decrescente pelo valor de *delay* possibilita a verificação organizada de todos os subconjuntos maximais, sempre utilizando dois ponteiros para marcar o inicio e o fim do subconjunto. O ponteiro i visita cada índice de D', enquanto o segundo ponteiro, j, posiciona-se sempre a frente de i, indicando o último elemento desse subconjunto, ou seja, o terminal mais distante de i cujo *delay* é menor ou igual à $delay(i) + \Delta_v$. Com esse procedimento, assumindo $d' = |D'|$, é garantido que a complexidade computacional seja dominado pelo método de ordenação, que pode executar em $O(d' \log d')$, dado que o procedimento de verificação dos subconjuntos maximais é feito em tempo linear, $O(d)$.

Dito isso, é possível apresentar o cálculo da função de aptidão F1. Seu funcionamento é o mias simples dentre as funções, inicialmente computa-se o custo de *delay* e *jitter* no caminho de s para cada terminal em T. Assim, basta percorrer a lista de terminais e

contabilizar aqueles que não são atendidos pelas duas métricas. Em paralelo, monta-se o vetor D' com os terminais atendidos. Ao final de F1, basta retornar a soma dos terminais não atendidos ao montar o vetor D' com o valor retornado pela função de *SeleçãoPorVariação(D')*. A versão do BRKGA que aplica a função de aptidão F1 será referenciada como BRKGA-F1. A complexidade computacional do algoritmo 4 é dominado pela função de *SeleçãoPorVariação*, dado que a complexidade de criação do vetor D' é feita em tempo $O(d)$.

Algoritmo 4: Função de Aptidão (F1) $O(d \log d)$

```
   Entrada: T
 1 não-atendidos ← 0;
 2 D' ← ∅
 3 para k ∈ D faça
 4 |   d ← custo de delay do caminho de s até k em T;
 5 |   j ← custo de jitter do caminho de s até k em T;
 6 |   se d > Δ_d ou j > Δ_j então
 7 |   |   não-atendidos ← não-atendidos +1;
 8 |   senão
 9 |   |   D' ← {d, k};
10 retorna não-atendidos + SeleçãoPorVariação(D');
```

A Função de aptidão F2, apresentada no algoritmo 5, utiliza valores de penalização associados com o número de terminais não atendidos e uma penalização associada ao valor que excede as métricas de QoS violadas quando um terminal não é atendido. Seja λ_k o custo em *delay* para ir de s a k na árvore T, assumindo que k não seja atendido, sabe-se que $\lambda_k > \Delta_d$, considerando, por exemplo, que o consumo de *jitter* nesse mesmo caminho é menor ou igual a Δ_j. Assim, a penalização associada com a métrica de *delay* é calculada segundo $\frac{d'-\Delta_d}{\Delta_d}$. O mesmo cálculo se aplica para as métricas de *jitter* e variação de *delay*. De fato, quanto menor o valor excedido pelas métricas menor é a penalização, mas o objetivo de maior impacto no valor da função de aptidão é o atendimento de terminais. Assim, a penalização pelo não atendimento de um terminal tem valor $|D|$. A versão do BRKGA que utiliza a função de aptidão F2 será referenciada como BRKGA-F2.

O laço das linhas (3)-(13) consiste no processo de armazenar o custo de *delay* e *jitter* do caminho para cada terminal k na árvore T. Em paralelo é possível verificar se o valor computado excede alguma métrica e em caso afirmativo, computa-se a penalização associada ao terminal. Cada métrica tem um valor de penalização que consiste na soma das penalizações para cada terminal. O segundo laço, das linhas (14)-(19), calcula o valor de variação de *delay* para todos os pares de terminais, verificando quando a diferença excede Δ_v e computando o penalização. Vale ressaltar a existência de um abuso de notação, de modo que a utilização da notação $|X|$ representa a cardinalidade de um conjunto ou o valor absoluto de um número, como utilizado no condicional da linha (18). Por fim, a linha (21) retornar o valor final da função de aptidão, sendo a penalização da quantidade de terminais não atendidos somada à penalização computada para cada métrica.

Algoritmo 5: Função de Aptidão (F2) $O(d \log d)$

Entrada: T

1 $\text{delay}_{dif} \leftarrow 0$; $\text{jitter}_{dif} \leftarrow 0$; $\text{var}_{dif} \leftarrow 0$;
2 não-atendidos $\leftarrow 0$;
3 **para** $k \in D$ **faça**
4 $\quad d \leftarrow$ custo de *delay* do caminho de s até k em T;
5 $\quad j \leftarrow$ custo de *jitter* do caminho de s até k em T;
6 $\quad$ **se** $d > \Delta_d$ ***ou*** $j > \Delta_j$ **então**
7 $\quad\quad$ não-atendidos $\leftarrow$ não-atendidos $+1$;
8 $\quad\quad$ **se** $d > \Delta_d$ **então**
9 $\quad\quad\quad \text{delay}_{dif} \leftarrow \text{delay}_{dif} + \frac{d-\Delta_d}{\Delta_d}$;
10 $\quad\quad$ **se** $j > \Delta_j$ **então**
11 $\quad\quad\quad \text{jitter}_{dif} \leftarrow \text{jitter}_{dif} + \frac{j-\Delta_j}{\Delta_j}$;
12 $\quad$ **senão**
13 $\quad\quad D' \leftarrow \{d, k\}$;
14 **para** $i = 1, 2, \ldots, (|D| - 1)$ **faça**
15 $\quad$ **para** $j = i + 1, \ldots, |D|$ **faça**
16 $\quad\quad d_i \leftarrow$ custo de *delay* no caminho de s até $D[i]$ em T;
17 $\quad\quad d_j \leftarrow$ custo de *delay* no caminho de s até $D[j]$ em T;
18 $\quad\quad$ **se** $|d_i - d_j| > \Delta_v$ **então**
19 $\quad\quad\quad \text{var}_{dif} \leftarrow \text{var}_{dif} + \frac{|d_i-d_j|-\Delta_v}{\Delta_v}$;
20 não-atendidos $\leftarrow$ não-atendidos + SeleçãoPorVariação(D');
21 **retorna** *não-atendidos* $\times|D|+$ *(*$\text{delay}_{dif}+$ $\text{jitter}_{dif}+$ var_{dif}*)*;

A terceira, e última função de aptidão desenvolvida, é uma variação da função anterior. Enquanto F2 utiliza a soma das penalizações de todas as métricas, a função de aptidão F3, disponível no algoritmo 6, considera apenas a menor penalização dentre as métricas excedidas. O objetivo principal dessa abordagem é tentar corrigir, para as próxima gerações, apenas o terminal que está heuristicamente mais próximo de ser atendido. A versão do BRKGA que utiliza a função de aptidão F3 será denominada como BRKGA-F3.

Como descrito anteriormente, nota-se uma diferença sutil entre as funções de aptidão F2 e F3, de modo que o primeiro laço, contido nas linhas (3)-(17), altera o procedimento adotado quando um terminal se torna não atendido. Nesse caso, não será realizada soma da nova penalização gerada para a métrica em questão, ao invés disso, busca-se armazenar o menor valor excedente, dentre todos os terminais, em cada métrica. O mesmo se aplica ao laço que verifica as restrições de variação de *delay*. Por fim, o algoritmo retorna o valor, como descrito na linha (27), que consiste na penalização por terminais não atendidos somada a menor penalização dentre as métricas.

Algoritmo 6: Função de Aptidão (F3) $O(d \log d)$

Entrada: T

delay$_{min} \leftarrow \infty$; jitter$_{min} \leftarrow \infty$; var$_{min} \leftarrow \infty$;
não-atendidos $\leftarrow 0$;
para $k \in D$ **faça**
  $d \leftarrow$ custo de *delay* do caminho de s até k em T;
  $j \leftarrow$ custo de *jitter* do caminho de s até k em T;
  se $d > \Delta_d$ ***ou*** $j > \Delta_j$ **então**
    não-atendidos $\leftarrow$ não-atendidos $+1$;
    se $d > \Delta_d$ **então**
      dif$_d \leftarrow \frac{d-\Delta_d}{\Delta_d}$;
      se $dif_d < delay_{min}$ **então**
        delay$_{min} \leftarrow$ dif$_d$;
    se $j > \Delta_j$ **então**
      dif$_j \leftarrow \frac{j-\Delta_j}{\Delta_j}$;
      se $dif_j < delay_{min}$ **então**
        delay$_{min} \leftarrow$ dif$_j$;
  senão
    $D' \leftarrow \{d, k\}$;
para $i = 1, 2, \ldots, (|D| - 1)$ **faça**
  para $j = i + 1, \ldots, |D|$ **faça**
    $d_i \leftarrow$ custo de *delay* do caminho de s até $D[i]$ em T;
    $d_j \leftarrow$ custo de *delay* do caminho de s até $D[j]$ em T;
    se $|d_i - d_j| > \Delta_v$ **então**
      dif $\leftarrow \frac{|d_i-d_j|-\Delta_v}{\Delta_v}$;
      se $dif < var_{min}$ **então**
        var$_{min} \leftarrow$ dif;
não-atendidos $\leftarrow$ não-atendidos + SeleçãoPorVariação(D');
retorna *não-atendidos* $\times |D| +$ min*(delay$_{min}$, jitter$_{min}$, var$_{min}$)*;

Por fim, foi desenvolvida uma variação do BRKGA que consiste na alteração do processo de geração do vetor de chaves aleatórias. Essa mudança independe do decodificador utilizado, dado que ela pode ser aplicada diretamente na estrutura do BRKGA. Como cada chave aleatório está relacionada à uma aresta de G, esse novo procedimento incorpora, ao valor de cada chave, a frequência que a aresta relacionada aparece nas soluções geradas pelas RLs. Pode-se obter essa frequência a cada iteração do método de subgradiente, contabilizando a quantidade de vezes que cada aresta esteve presente na solução computada pelo PPL, ou seja a frequência das variáveis y_{ij}. Sabendo que as relaxação lagrangianas utilizam arcos, ao referenciar uma aresta $e = (i, j)$, consideram-se os arcos (i, j) e (j, i). Para apresentar o procedimento de maneira mais formal, serão utilizadas as seguintes notações.

- $F(e)$ a frequência da aresta e entre as soluções do primal lagrangiano;
- F_{min} e F_{max} as frequências mínima e máxima entre as soluções do primal lagrangiano;

- $NF(e)$ a frequência normalizada da aresta e, calculada por: $NF(e) = (F(e) - F_{min})/(F_{max} - F_{min})$;
- $K(e)$ é a chave aleatória da aresta e em um indivíduo do BRKGA;
- $rand(0, 1)$ é um número aleatório entre 0 e 1.

Tradicionalmente, $K(e)$ é um valor aleatório no intervalo $[0, 1)$ com distribuição uniforme. A nova proposta é fazer $K(e) = \frac{rand(0,1)+NF(e)}{2}$ para todas as chaves que representam o indivíduo. Assim, quanto maior a frequência da aresta, maior a probabilidade que a chave aleatória se aproxime de 1. Divide-se o valor de $K(e)$ por 2 para manter o mesmo intervalo de distribuição das chaves. Sempre que uma variação do BRKGA utiliza esse procedimento, a referência "RL" estará contida na sua denominação.

4.4 Heurística de Busca Local

Esta seção descreve a heurística de busca local em arborescências desenvolvida. É possível aplicar esse procedimento nas diferentes versões do BRKGA, bem como as relaxações lagrangianas, onde é possível computar uma arborescência geradora mínima no grafo G' utilizando os coeficientes das variáveis y_{ij} e então aplicar essa heurística.

Em linhas gerais, o procedimento de busca local pode ser descrito da seguinte maneira. A partir de um nó terminal k, atendido na arborescência, o objetivo principal consiste na tentativa de alterar os arcos adjacentes aos terminais diferentes de k, de modo que o novo custo em *delay* do caminho indo da raiz s para cada $l \in D \backslash \{k\}$ seja um valor dentro do intervalo $delay(k) \pm \Delta_v$. Essa abordagem visa reduzir a quantidade de terminais que não são atendidos como consequência da aplicação das restrições de variação de *delay*. A codificação dessa busca local é apresentada no pseudocódigo 7.

Os dados de entrada do algoritmo são um grafo $G = (V, A)$ e uma arborescência T computada em G enraizada no nó s. Assumindo que a representação inicial de T é dada por um vetor de predecessores com tamanho $|V|$, ou seja, cada posição desse vetor representa um nó do grafo e o valor contido nessa posição indica o predecessor daquele nó em T. As linhas (1) e (2) definem três vetores de tamanho $|V|$. L e J mantém, respectivamente, os custos de *delay* e *jitter* do caminho de s para cada nó $i \in V \backslash \{s\}$. O vetor A armazena a informação sobre o atendimento dos nós terminais, de modo que o valor Verdadeiro indica que o terminal é atendido e Falso, o contrário.

O primeiro laço, nas linhas (3)-(10), trata-se apenas de uma rotina para inicialização dos valores de *delay* e *jitter* nos caminhos de T, juntamente da verificação de quais excedem pelo menos uma das métricas. Para que a ordem de visita dos nós não idêntica em todas as chamadas da busca local, é utilizada uma função, como apresentado na linha (11), para embaralhar os valores do conjunto de terminais D. Logo em seguida, na linha (13), seleciona-se um terminal atendido f, cujo valor $L[f]$ será utilizado como o pivô para aproximação dos outros terminais. Caso nenhum terminal, mesmo sem aplicar a restrições de variação de *delay*, seja atendido em T, o algoritmo encerra-se retornando o valor de $|D|$, como mostrado na linha (17).

Algoritmo 7: Heurística de Busca Local $O(d \cdot m)$

Entrada: G, T

1 L, J; `// vetores inteiros (`*`delay`* `e` *`jitter`*`)`
2 A; `// vetor booleano iniciando com Verdadeiro em todas as posições`
3 **para todo** $k \in D \cup S$ **faça**
4 $k' \leftarrow k$; $\text{delay}_k \leftarrow 0$; $\text{jitter}_k \leftarrow 0$;
`// O predecessor da raiz` s `é ele mesmo`
5 **enquanto** $k' \neq s$ **faça**
6 $\text{delay}_k \leftarrow \text{delay}_k + \text{delay}(T[k'], k')$;
7 $\text{jitter}_k \leftarrow \text{jitter}_k + \text{jitter}(T[k'], k')$;
8 $k' \leftarrow T[k']$;
9 $L[k] \leftarrow \text{delay}_k$; $J[k] \leftarrow \text{jitter}_k$;
10 **se** $L[k] > \Delta_d$ ***ou*** $J[k] > \Delta_j$ **então** $A[k] \leftarrow$ Falso;
11 Embaralha D;
12 f $\leftarrow -1$;
13 **para todo** $k \in D$ **faça**
14 **se** $A[k]$ **então**
15 f $\leftarrow k$;
16 Encerra o laço;
17 **se** $f = -1$ **então retorna** $|D|$;
18 **para todo** $k \in D \backslash \{f\}$ **faça**
19 **se** $L[k] < (L[f] - \Delta_v)$ ***ou*** $L[k] > (L[f] + \Delta_v)$ **então**
20 $m \leftarrow -1$;
21 **para todo** $(i, k) \in \delta_k^+$ *em* T **faça**
22 **se** $i \neq T[k]$ ***e*** $k \neq T[i]$ **então**
23 $d \leftarrow \text{delay}(i, k)$; $j \leftarrow \text{jitter}(i, k)$;
24 **se** $L[i] + d \geq (L[f] - \Delta_v)$ ***e*** $L[i] + d \leq (L[f] + \Delta_v)$ ***e*** $L[i] + d \leq \Delta_d$ ***e*** $J[i] + j \leq \Delta_j$ **então**
25 $m \leftarrow i$;
26 Encerra o laço;
27 **se** $m \neq -1$ **então**
28 L' $\leftarrow$ cópia L, J' $\leftarrow$ cópia J, T' $\leftarrow$ cópia T, A' $\leftarrow$ cópia A;
29 $dif_{delay} \leftarrow d - L[k]$, $dif_{jitter} \leftarrow j - J[k]$;
30 $T'[k] \leftarrow m$, $L'[k] \leftarrow d$, $J'[k] \leftarrow j$;
31 **se** *AvaliaMudança(T', L', J', A', f, k, m,* dif_{delay}, dif_{jitter}*)* **então**
32 L $\leftarrow$ L', J $\leftarrow$ J', T $\leftarrow$ T'; A $\leftarrow$ A';
33 não-atendidos $\leftarrow 0$; $D' \leftarrow \emptyset$;
34 **para todo** $k \in D$ **faça**
35 **se** *A[k] = Falso* **então** não-atendidos $\leftarrow$ não-atendidos + 1;
36 **senão** $D' \leftarrow D' \cup \{k\}$;
37 **retorna** *não-atendidos + SeleçãoPorVariação(D')*;

O procedimento de busca local tem início no laço da linha (18), de modo que visita-se todo terminal k diferentes de f, caso o custo de *delay* no atual caminho para visitar k esteja fora do intervalo $L[f] \pm \Delta_v$, deve-se verificar os nós incidentes em k no grafo G, ou seja, todo arco $(i, k) \in \delta_k^+(G)$, como descrito na linha (21). A linha (22) garante que

ao mudar o predecessor de k, as propriedades da arborescência se manterão. Assim, ao detectar uma alteração viável, caso ela exista, o algoritmo passa para a etapa de análise dos valores de *delay*, *jitter* e variação para o novo caminho. O procedimento total do laço de busca utiliza uma decisão baseada em *First Improve*, ou seja, a busca encerra na primeira alteração viável que for encontrada. Na linha (27) verifica-se a existência de uma alteração viável para o predecessor de k, caso não exista, a iteração do laço passa para o próximo terminal. Se existir movimento, são efetuadas cópias dos vetores (L, T e A), a diferença dos valores de *delay* e *jitter* é computada e aplicada aos vetores de cópia, então, chama-se a função $AvaliaMudanca$, descrita com mais detalhes no algoritmo 8. Caso retorne verdadeiro, replicam-se as alteração feitas nos vetores de cópia nos originais. Por fim, as linhas (33)-(37) contam a quantidade terminais não atendidos.

O Algoritmo 8 propaga as alterações de custo para todo nó $j \in T$, cujo caminho utilizado para visitar j passa pelo nó k. Avalia-se a troca do predecessor de k como vantajosa, se a alteração não fizer com que dois ou mais terminais deixem de ser atendidos por consequência. As linhas (1)-(3) fazem as inicializações, criando também a variável que contabiliza o número de terminais não atendidos. Por fim adiciona-se k ao conjunto C para efetuar um procedimento semelhante a busca em largura, propagando as alterações de valores para os nós descendentes de k.

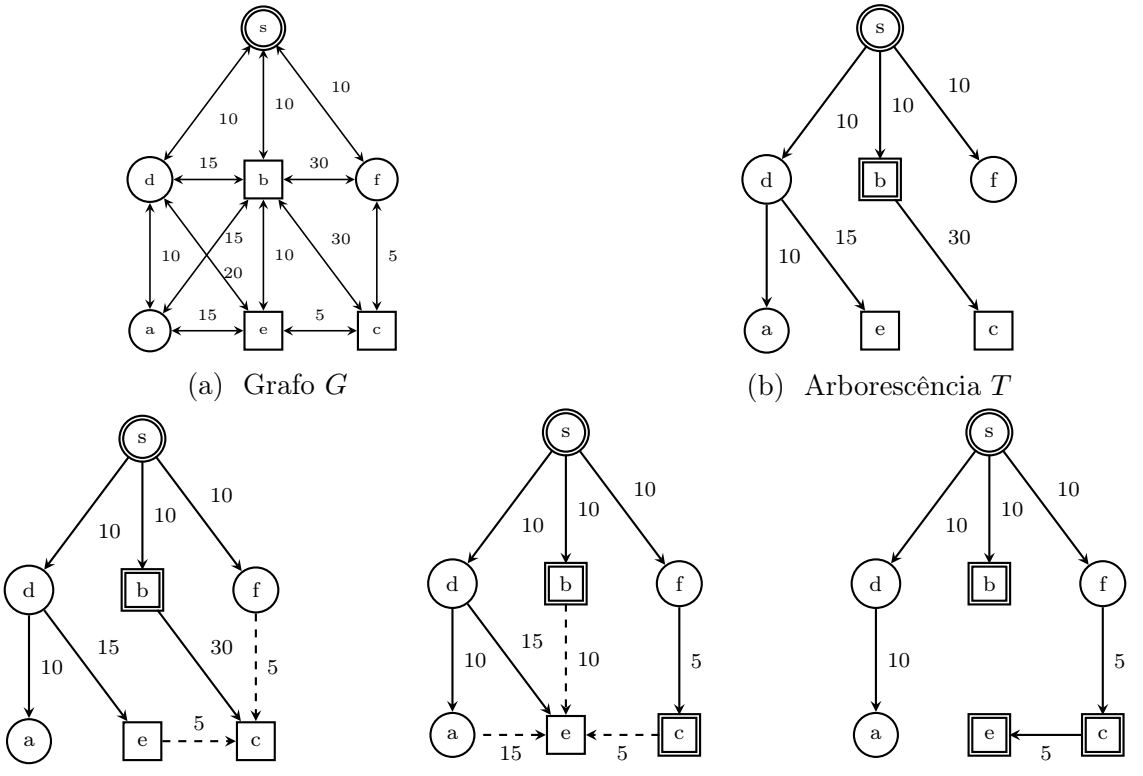
Algoritmo 8: Avaliação de Mudança de Predecessor $O(m)$

```
   Entrada: T', L', J', A', f, k, m, dif_delay, dif_jitter
 1 perdidos ← 0;
 2 A'[k] ← Verdadeiro;
 3 C ← {k};
 4 enquanto C ≠ ∅ faça
 5 |  k' ← último elemento de C;
 6 |  C \{k'};
 7 |  para todo i ∈ δ⁻_k'(T') faça
 8 |  |  L'[i] ← L'[i] + dif_delay, J'[i] ← J'[i] + dif_jitter;
 9 |  |  se L'[i] > Δ_d ou J'[i] > Δ_j então
10 |  |  |  se i ∈ D e A'[i] = Verdadeiro então
11 |  |  |  |  A'[i] ← Falso;
12 |  |  |  |  perdidos ← perdidos + 1;
13 |  |  senão A'[i] ← Verdadeiro
14 |  |  se perdidos ≥ 2 ou (i = f e A'[f] = Falso) então
15 |  |  |  retorna Falso;
16 |  |  senão C ← C ∪ {i};
17 retorna Verdadeiro;
```

O laço principal do algoritmo 8 inicia na linha (4), ele executará enquanto C não for vazio, ou seja, enquanto ainda houverem nós a serem atualizados. O primeiro passo consiste na seleção de k', sendo o último nó adicionado C. Após a escolha, como mostrado na linha (7), visita-se todo i tal que $(k', i) \in T'$, computa-se o novo valor de *delay* e *jitter* para o nó i e a linha (9) verifica se esses valores excedem alguma das métricas. A linha (14) verifica as duas condições de parada onde o retorno do algoritmo deve ser Falso, a

primeira é se a alteração do predecessor de k fez com que dois ou mais terminais não sejam mais atendidos; e a segunda é se a alteração influencia no valor de *delay* (*jitter*) do terminal f a ponto de torná-lo não atendido. Caso nenhuma dessas condições torne-se verdadeira, o procedimento prossegue adicionando os novos nós visitados à C. Ao final, o procedimento de avaliação de mudança retorna um resultado relacionado à alteração do predecessor.

Um exemplo, passo a passo, do funcionamento da heurística de busca local é ilustrado na Figura 4.1. Em 4.1a apresenta-se o grafo da instância, sendo o s, com círculo duplo, a raiz, os nós representados por retângulos são terminais e os círculos representam nós opcionais. Para a instância em questão, assuma que os valores contidos nos arcos representam apenas o *delay*, por questões de simplicidade na exibição desconsidere o valor de *jitter*. Assim, considerando $\Delta_d = 20$ e $\Delta_v = 10$, foi gerada a arborescência T, apresentada na Figura 4.1b, que atende apenas o terminal b, representado por um retângulo duplo. Assim, com a aplicação da busca local apresentada, fixa-se o nó b como pivô para aproximação do valor de *delay* de demais terminais, dado que b é o único atendido. Na Figura 4.1c é apresentada a verificação da troca de predecessor no nó c, representada pelos arcos tracejados. Com isso, o valor de $L[c]$, que inicialmente é 40, pode ser reduzido para 15 com a alteração do arco que atende-o de (b, c) para (f, c).



(a) Grafo G (b) Arborescência T

(c) Verifica nó c (d) Verifica nó e (e) Arborescência final

Figura 4.1: Exemplo de aplicação da busca local

Com a alteração do predecessor de c validada, repete-se o processo de verificação e busca para o terminal e, como apresentado na Figura 4.1d. Para este caso, existem três possibilidades, mas apenas duas são viáveis. Alterar o predecessor de e para o b ou c faz com que o valor $L[e]$ seja reduzido de 25 para 20, tornando-o atendido em *delay* e variação.

Por fim, assumindo heuristicamente a seleção do arco (c, e), temos como resultado a Figura 4.1e que apresenta a arborescência final do procedimento de busca local, atendendo três terminais.

4.5 Análise Estatística de Resultados

Neste trabalho, utilizaram-se testes estatísticos não paramétricos para análise de múltiplas instâncias. O objetivo da utilização desses testes é fornecer um embasamento científico mais rígido às comparações feitas, validando se a diferença entre duas ou mais estratégias é estatisticamente significativa ou não. O trabalho de Demšar [12] sugere uma metodologia para fazer tais comparações no contexto de aprendizado de máquina, no qual utilizam-se diversos testes, de modo a identificar existência de diferença estatisticamente significativa (DES) entre vários classificadores em múltiplos conjuntos de dados. Nesta seção, serão brevemente discutidos os testes e a forma de interpretação de seus resultados.

Para todos os testes foi considerado um nível de confiança de 95% com a hipótese nula de que não existe DES entre as amostras. Todos os testes se baseiam em *ranks*, de modo que a abordagem que detém *rank* k é aquela contendo o k-ésimo melhor resultado para uma instância.

O primeiro teste descrito é o de Iman-Davenport, utilizado para identificar existência de DES entre múltiplas abordagens. Inicialmente precisa-se computar o valor de *rank* médio R_i para cada abordagem, o cálculo é feito da seguinte forma: seja r_k^i o *rank* da k-ésima abordagem para a i-ésima instância (com *rank* médio sendo utilizado em caso de empates). O valor R_i para a i-ésima metodologia é dado por $R_i = \frac{1}{N} \cdot \sum_k r_k^i, \forall k \in \{1, \ldots, k\}$, tal que k é o número de abordagens e N o número de instâncias.

O valor do teste de Iman-Davenport é calculado de acordo com as equações (4.15) e (4.16).

$$x_F^2 = \frac{12 \cdot N}{k \cdot (k+1)} \left[\sum_i R_i^2 - \frac{k \cdot (k+1)^2}{4} \right] \tag{4.15}$$

$$F_F = \frac{(N-1) \cdot x_F^2}{N \cdot (k-1) - x_F^2} \tag{4.16}$$

O valor do teste calculado para F_F segue a distribuição F, a qual tem como parâmetros os graus de liberdade, $k-1$ e $(k-1) \cdot (N-1)$. Logo, o valor crítico pode ser obtido seguindo tal distribuição. Ao final, se o valor F_F encontrado pelo teste for maior que o valor crítico, pode-se rejeitar a hipótese nula.

Caso a hipótese nula seja rejeitada, inicia-se a aplicação de um teste *post-hoc* para encontrar quais das heurísticas de fato diferem entre si. Para tal, utiliza-se o teste de Nemenyi, que calcula a diferença crítica e identificar grupos de abordagens que são estatisticamente equivalentes entre si. Os resultados de duas abordagens distintas são ditos diferentes, segundo o teste de Nemenyi, se seus *ranks* médios se diferem por pelo menos a diferença crítica (DC) obtida segundo a equação (4.17).

$$DC = q_\alpha \cdot \sqrt{\frac{l \cdot (k+1)}{6 \cdot N}} \tag{4.17}$$

Na equação (4.17) o α representa o nível de confiança, e o valor crítico q_α é definido segundo a estatística de *Studentized range* dividida por $\sqrt{2}$. Os valores de tal estatística podem ser encontrados no artigo de Deḿsar [12]. Ainda, o resultado do teste de Nemenyi pode ser representado graficamente, como ilustrado na Figura 4.2. O eixo horizontal equivale aos valores de *rank* médio, em ordem crescente da esquerda para a direita. Cada abordagem é representada por uma linha vertical com seu respectivo nome e valor de *rank* médio logo abaixo. Uma linha horizontal de comprimento equivalente ao valor da DC é posicionada acima do eixo horizontal principal. Abordagens nas quais o valor de *rank* médio não diferem mais do que a DC são conectadas por um segmento horizontal em negrito, de comprimento sempre inferior ao valor da DC.

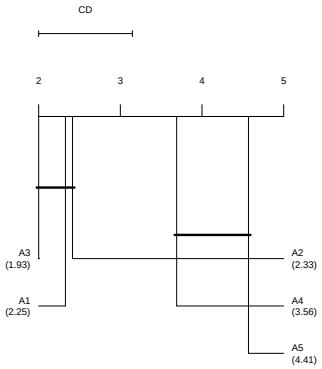


Figura 4.2: Exemplo de representação gráfica do teste Nemenyi.

Observa-se que as abordagens A3, A1 e A2 formam o grupo de menor valor de *rank* médio e consequentemente, são estatisticamente equivalentes entre si de acordo com o teste de Nemenyi. Portanto, podemos definir como melhor algoritmo aquele que apresenta o maior número de vitórias, i.e., o número de vezes que cada abordagem foi melhor que as demais.

Outro teste utilizado neste trabalho foi o de Wilcoxon, aplicado quando deseja-se verificar se existe DES entre os resultados de dois métodos, sendo mais poderoso que o teste de Iman-Davenport para esse cenário. O teste de Wilcoxon computa os *ranks* das diferenças entre os resultados dos dois métodos ignorando o sinal e posteriormente compara os *ranks* das diferenças positivas e negativas.

Para computar o teste de Wilcoxon, considere $d_i, i \in \{1, \ldots, N\}$ a diferença entre os resultados das duas abordagens na i-ésima instância, r_{d_i} o *rank* do valor absoluto da i-ésima diferença (*rank* médio é atribuído no caso de empate). Assuma R^+ a soma dos *ranks* para as instâncias nas quais a abordagem fictícia A foi melhor do que B ($d_i > 0$) e R^- a soma dos *ranks* para o caso oposto ($d_i < 0$). Os *ranks* para $d_i = 0$ são separados

igualmente entre as somas, como mostrado na Equação (4.18).

$$R^+ = \sum_{d_i>0} r_{d_i} + \frac{1}{2}\sum_{d_i=0} \qquad R^- = \sum_{d_i<0} r_{d_i} + \frac{1}{2}\sum_{d_i=0} \tag{4.18}$$

Seja T = $\min\{R^+, R^-\}$. Segundo Demšar [12], nos casos onde $N \leq 25$, o valor crítico para o teste de Wilcoxon pode ser consultado na maioria dos livros de estatística, como por exemplo, o de Devore [13]. Uma vez que tal valor é calculado, rejeita-se a hipótese nula se o valor de T for menor ou igual ao valor crítico. No caso em que $N > 25$, computa-se a estatística z como apresentado na Equação (4.19). Segundo Demšar, considerando um nível de confiança de 95%, a hipótese nula pode ser rejeitada quando $z < -1.96$.

$$z = \frac{T - \frac{1}{4}N(N+1)}{\sqrt{\frac{1}{24}N(N+1)(2N+1)}} \tag{4.19}$$

4.6 Geração de Instâncias

Nos trabalhos presentes na literatura que envolvem o problema de roteamento aplicado a redes veiculares, não há um consenso entre os autores em relação às instâncias utilizadas em experimentos. Cada autor criou as próprias instâncias para validação do algoritmo ou protocolo proposto, como pode-se observar nos trabalhos de [6, 15, 34]. A geração de instâncias descrita nesta seção é fortemente baseada no trabalho de Ribeiro et al. [34], que descreve uma maneira coerente de criar instâncias para avaliação de algoritmos de roteamento em VANET's utilizando modelos baseados em simulação de tráfego. Nestes simuladores é possível visualizar os movimentos dos veículos que são gerados, além de poder exportar os dados de mobilidade, ou seja, o posicionamento, velocidade e direção de um veículo em determinado instante. Os dados exportados do modelo de mobilidade podem ser introduzidos em um simulador específico para redes de comunicação, como NS-2 [22], NS-3 [35] e OMNet [44].

Para a simulação de tráfego e mobilidade veicular tratada neste trabalho, foi escolhida a suíte SUMO (*Simulation of Urban MObility*), que é uma ferramenta amplamente utilizada tanto no meio acadêmico quanto empresarial. O SUMO geralmente é acoplado a uma ferramenta externa de simulação de redes, neste caso NS-2, para fornecer dados realistas de comunicação dos veículos. O NS-2 é um simulador de eventos discretos direcionados à pesquisa de rede, inicialmente desenvolvido pela Universidade de Berkeley e altamente utilizado pela comunidade científica. O NS-2 fornece um apoio substancial para a simulação do funcionamento de transmissões, roteamento e protocolos de redes, com e sem fio. É importante utilizar o modelo de mobilidade gerado pelos simuladores de veículos para que o posicionamento dos nós esteja o mais próximo possível da realidade, pois o NS-2, por padrão, utiliza alguns modelo de mobilidade que não são realistas.

O primeiro passo na geração de instâncias para o MS-MRP-QoS é a criação de estradas e rodovias. Neste trabalho foram adotados como base os mapas disponíveis no projeto *Open Street Maps* (OSM) [19], que é um projeto de mapeamento colaborativo para criar um mapa livre e editável do mundo e está em desenvolvimento desde 2004. A Figura 4.3

apresenta uma parte do mapa da cidade de Washington D. C., medindo aproximadamente 250000 metros quadrados, que será exportada para o SUMO.

Figura 4.3: Parte do mapa da cidade de Washington no *Open street Maps*

O passo seguinte é tratar e selecionar as informações desejadas com projeto OSM, ou seja, o recorte do mapa que se deseja utilizar. Os dados são convertidos e importados para o SUMO gerando assim do modelo de mobilidade, inserindo veículos no mapa, bem como semáforos e outros componentes inerentes ao tráfego. Após essas inserções, inicia-se o processo de simulação do tráfego veicular, exportando os dados de movimentação dos veículos para utilização na etapa posterior. A Figura 4.4 apresenta uma parte ampliada do mapa de Washington, ressaltando dados de tráfego e veículos.

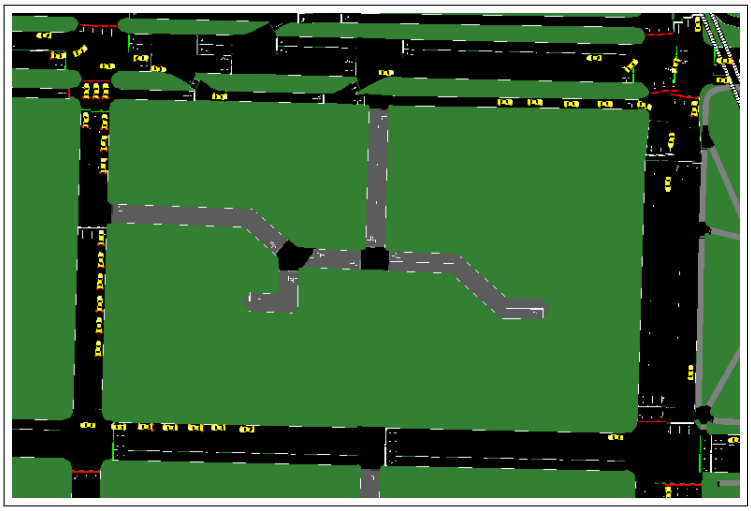


Figura 4.4: Parte do mapa ampliado da cidade de Washington no SUMO

Após a exportação dos dados vindos do SUMO, será feita a utilização do simulador de rede NS-2. O processo de simulação de rede é então iniciado e, durante o mesmo, é possível fotografar um momento qualquer e com isso obter a topologia da rede como um

todo, representando-a como um grafo. O valor das métricas em cada *link* é medido com base na troca de mensagem entre os pares de veículos. Considera-se o cálculo médio em um intervalo de 15 segundos. Assim é possível ter uma instância próxima da realidade, dentro das limitações do processo de simulação.

A Figura 4.5 ilustra o grafo da instância final gerada a partir de um intervalo de tempo da simulação. Os nós não seguem o posicionamento geográfico real, apenas exibem as conexões existentes naquele intervalo entre os 10 veículos da rede. O nó azul representa a origem, os nós vermelhos representam os destinos, ambos decididos aleatoriamente. Os nós pretos são encaminhadores, ou seja, nós que podem ser utilizados ou não, no processo de construção da árvore de *multicast*.

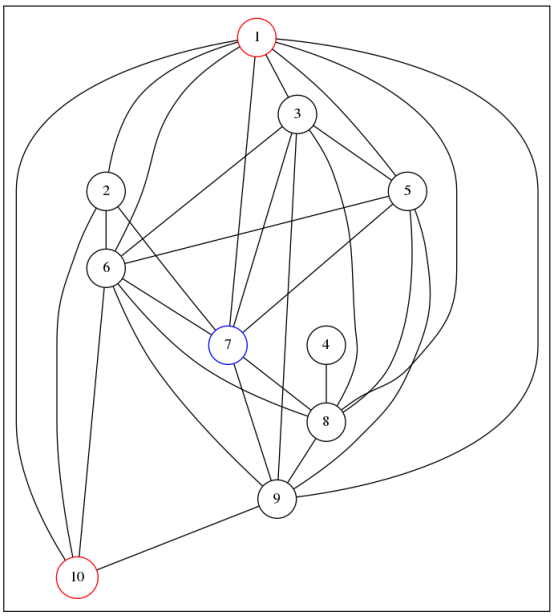


Figura 4.5: Fotografia dos enlaces da rede em um determinado momento

O segundo arquivo necessário na instância é o de parâmetros, contendo o valor máximo de *delay* e *jitter* permitido no caminho da raiz até cada um dos terminais, o limite máximo da variação de *delay* entre o nó origem e qualquer par de destinos e o valor mínimo de largura de banda para que o arco possa ser utilizado na solução. Para o MS-MRP-QoS, quaisquer valores utilizados como parâmetros permitem a existência de uma solução viável. Ainda assim, é interessante gerar valores de parâmetro utilizando propriedades que garantam desafio na etapa de avaliação dos algoritmos. Para tal, primeiramente são geradas duas árvores de caminhos mínimos do nó origem para todos os nós destino. A primeira é calculada utilizando como custo o *delay* dos arcos e a segunda o *jitter*, estas árvores serão referenciadas como T^d e T^j, respectivamente.

Seja λ^* o maior valor de *delay* entre os caminhos da árvore T^d. A partir da árvore T^j, é possível inverter os custos de *jitter* dos arcos pelos de *delay* e assim obter $\tilde{\lambda}$, que é o maior valor de *delay* nos caminhos da árvore de *jitter*, ou seja, T^j. Seguindo o mesmo procedimentos, obtém-se os valores ξ^* e $\tilde{\xi}$, sendo respectivamente o maior valor de *jitter* da árvore T^j e da árvore T^d. Logo, se $\Delta_d = \max(\tilde{\lambda}, \lambda^*), \Delta_j = \max(\tilde{\xi}, \xi^*)$ e Δ_v igual a diferenças entre o maior e o menor valor de *delay* encontrado nas árvores, ambas serão soluções que permitem o atendimento de todos os terminais para a instância

criada. Contudo, ao manter esses valores, as restrições seriam atendidas de maneira muito simples, tornando a instância "fácil" de ser resolvida.

Deste modo, para a geração das instâncias aqui testadas, os parâmetros foram os seguintes: $\Delta_d = \lambda^* + \alpha(\tilde{\lambda} - \lambda^*)$ e $\Delta_j = \xi^* + \beta(\tilde{\xi} - \xi^*)$ para $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Note que, fazendo assim, $\tilde{\lambda} \geq \lambda^*$ e $\tilde{\xi} \geq \xi^*$. Com isso, ao utilizar apenas um valor de α ou β menor que 1, é possível garantir que uma das árvores não seja mais considerada uma solução na qual todos os terminais podem ser atendidos.

Diante dessas informações, as instâncias de teste criadas até o momento, optou-se por efetuar cálculo de Δ_d com valor de $\alpha = 1$ e Δ_j com valor de $\beta = 1$. Essa decisão considera o fato de que a redução desses valores não traria dificuldade adicional para a instância, pelo simples fato de que todos os terminais não atendidos pelas restrições de *delay* e *jitter* podem ser detectados pelos pré-processamentos apresentados na Seção 4.1.1. O valor do mínimo de largura de banda necessária para o link foi fixado em 200, utilizando um parâmetro aplicado diretamente ao simulador de rede. Por fim, assumindo $\lambda^1, \ldots, \lambda^{|D|}$ como os valores de *delay* dos caminhos mínimos para cada terminal na árvore T^d, obtém-se o valor de Δ_v igual ao desvio padrão da diferença entre todos os pares de *delay*s em $\lambda^1, \ldots, \lambda^{|D|}$. Com isso, o valor da métrica de variação de *delay*s está estatisticamente relacionada com a diferença entre os pares, permitindo uma flexibilizando na possibilidade de aumentar ou diminuir a quantidade de terminais que podem ser atendido.

A Figura 4.6, retirada de [34], apresenta um fluxograma simplificado do processo de geração das instâncias, começando pelo processo de extração do mapa, passando pela simulação de tráfego usando o SUMO, juntamente com a criação do modelo de mobilidade e terminando no processo de simulação no NS-2, onde a instância final é gerada. O conjunto de testes desenvolvidos neste trabalho é formado por 40 instâncias criadas de um trecho real do mapa da cidade de Washington. Para 30 instâncias o número nós varia de 10 a 100, o número de terminais de 4 a 52 e o número de arcos de 18 a 4416. Para 10 outras instâncias, o número de nós varia de 125 a 350, o número de terminais de 55 a 170 e o número de arcos de 2448 a 24446.

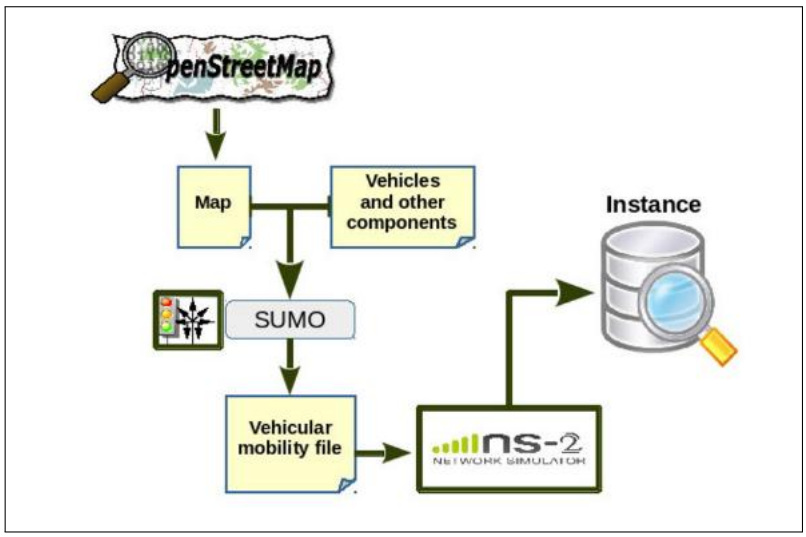


Figura 4.6: Fluxograma simplificado do processo de geração das instâncias

Capítulo 5

Resultados Computacionais

Neste capítulo, são descritos os experimentos que foram realizados para avaliar a eficácia das diversas abordagens propostas nesse dissertação. Este Capítulo está organizado da seguinte maneira: a Seção 5.1 contém as informações sobre os pré-processamentos, seguida da Seção 5.2, que apresenta os resultados dos modelos de PLI e PLIM desenvolvidos.

As estratégias apresentadas foram implementadas em C++, os programas compilados com o compilador GCC versão 7.5.0, usando o nível de otimização -O3. Os experimentos foram realizados em um computador com um processador Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2630 v4 com 10 núcleos de 2.20 GHz cada e 64GB de memória RAM. A execução ocorreu em um sistema operacional Linux Ubuntu 18.04 de 64 bits. Os experimentos foram realizados sob um conjunto de 40 instâncias geradas e disponibilizadas em `https://github.com/cvaraujo/QoS-MRP-Instances`.

5.1 Pré-processamentos

Esta seção apresenta os dados relacionados as fixações de variáveis com a aplicação dos pré-processamentos apresentados na Seção 4.1.1. Para computar problemas de SP e SPRC utilizaram-se as implementações fornecidas pela biblioteca Boost C++ [1]. Os resultados obtidos estão contidos na Tabela 5.1, a primeira coluna contém a identificação da instância, as três colunas seguintes apresentam, respectivamente, o número de nós do grafo ($|V|$), número de nós terminais ($|D|$) e quantidade de arcos ($|A|$). A coluna "MVE" informa a quantidade de nós que podem ser removidos da instância pelo processamento em questão. A mesma lógica se aplica as colunas "MAE" e "SAE", que indicam a quantidade de arcos removidos e a quantidade de variáveis $f_{ij}^k = 0$ para todo $k \in D \cup S$ e $(i, j) \in A$, respectivamente. A coluna "Rem. SAE (%)" apresenta, em porcentagens, os valores da coluna "SAE". As colunas"Rem. |V|", "Rem. |A|" e "Rem. |D|" armazenam dados associados, respectivamente, com os nós, arcos e nós terminais removidos do grafo após aplicação dos três pré-processamentos para a instância. Por fim, a coluna "Tempo" contém o tempo somado dos três procedimentos.

Diante dos resultados apresentados na Tabela 5.1, percebe-se uma redução considerável, especialmente das variáveis f_{ij}^k, chegando a fixar até $56,8\%$ delas. O número

[1] `https://www.boost.org/`

Instância	|V|	|D|	|A|	MVE	MAE	SAE	Rem. SAE (%)	Rem. |V|	Rem. |A|	Rem. |D|	Tempo
washington-50-10-6	10	6	46	1	11	156	33,9	3	20	0	0
washington-50-20-11	20	11	184	0	33	1508	41,0	2	49	0	0
washington-50-30-15	30	15	420	2	82	4925	39,1	5	128	0	0
washington-50-40-23	40	23	830	1	184	17015	51,3	4	230	0	1
washington-50-50-28	50	28	1248	6	321	31422	50,4	10	527	0	2
washington-50-60-35	60	35	1812	9	412	56068	51,6	13	823	0	4
washington-50-70-37	70	37	2516	2	707	86755	49,3	6	803	0	21
washington-50-80-39	80	39	3592	12	1051	126159	43,9	15	1883	0	32
washington-50-90-51	90	51	4218	14	1049	198888	52,4	19	1775	0	34
washington-50-100-45	100	45	4416	31	1025	180369	40,8	33	2297	0	44
washington-75-10-4	10	4	32	0	7	89	27,8	0	7	0	0
washington-75-20-12	20	12	126	1	12	923	36,6	2	24	0	0
washington-75-30-16	30	16	318	0	39	4190	43,9	1	44	0	0
washington-75-40-21	40	21	538	2	40	9892	46,0	6	135	3	1
washington-75-50-30	50	30	876	0	212	22354	51,0	4	259	0	3
washington-75-60-25	60	25	1256	3	384	27572	36,6	11	539	0	3
washington-75-70-42	70	42	1700	2	339	63943	53,7	5	470	0	17
washington-75-80-48	80	48	2504	3	490	106488	53,2	11	825	0	30
washington-75-90-47	90	47	3034	2	942	132330	48,5	8	1182	0	74
washington-75-100-52	100	52	3792	4	1179	184042	48,5	6	1455	0	86
washington-100-10-6	10	6	18	4	0	30	16,7	5	4	1	0
washington-100-20-10	20	10	98	2	5	651	33,2	3	10	0	0
washington-100-30-12	30	12	206	8	19	1466	23,7	9	46	1	0
washington-100-40-18	40	21	422	1	29	5515	32,7	2	49	0	1
washington-100-50-27	50	27	596	3	94	10405	34,9	8	154	1	2
washington-100-60-34	60	34	854	2	99	26131	51,0	9	305	5	5
washington-100-70-39	70	39	1204	3	276	37123	44,0	14	471	2	7
washington-100-80-32	80	32	1764	3	442	48638	34,5	8	587	0	10
washington-100-90-43	90	43	2302	6	713	84985	41,0	15	1021	0	19
washington-100-100-43	100	43	2816	0	950	108877	38,7	10	1086	1	47
washington-200-125-55	125	55	2448	31	580	108619	35,5	35	1362	0	34
washington-200-150-61	150	61	4468	21	1000	240997	36,0	26	1694	0	239
washington-200-175-74	175	74	6048	13	2099	381693	36,1	22	2912	0	584
washington-200-200-114	200	114	7290	19	1743	756030	51,9	20	2690	0	1173
washington-200-225-135	225	135	8928	0	1330	1140034	56,8	7	1479	2	1960
washington-200-250-109	250	109	12806	7	4142	1325105	41,4	10	4444	0	1511
washington-200-275-146	275	146	14390	12	5005	1936238	48,9	19	5574	1	2325
washington-200-300-136	300	136	17418	11	6309	2185292	41,8	21	6992	0	3537
washington-200-325-170	325	170	18520	34	6206	2977336	49,5	42	7453	0	3373
washington-200-350-150	350	150	24436	5	8537	3497422	40,9	12	8864	0	5844

Tabela 5.1: Variáveis removidas pelos pré-processamentos

total de nós removidos em cada instância considera o efeito da aplicação dos três pré-processamentos. Para o procedimento MVE, a remoção de um nó juntamente com todos os arcos adjacentes pode ocasionar a desconexão de outros nós do grafo. A mesma ideia aplica-se para remoção de arcos utilizando MAE. A remoção de nós terminais é a mais relevante, dado que influencia diretamente no limitante dual do MS-MRP-QoS. Das 40 instâncias, em apenas 9 foi possível fixar um subconjunto de terminais, prévio à execução dos algoritmos, como não atendidos.

No quesito tempo de execução, o necessário para computar os procedimentos MVE e MAE é praticamente nulo, sendo menor que um segundo para as 30 instâncias que contém até 100 nós. Para as 10 instâncias contendo o maior número de nós, o tempo de execução não excedeu 10 segundos. O pré-processamento que demanda mais tempo é o SAE, executando, em alguns poucos casos, por um tempo próximo à 1 hora e meia. Para 33 instâncias o tempo total do pré-processamento não excedeu 10 minutos. Para as outras 7 instâncias, esse tempo excedeu 20 minutos. Ainda assim, vale ressaltar que basta computar uma vez os pré-processamentos para cada instância, permitindo o armazenamento, por exemplo, em arquivos de texto contendo os índices das variáveis que foram fixadas por cada procedimento. Esses arquivos estão disponíveis juntamente das instâncias no endereço `https://github.com/cvaraujo/QoS-MRP-Instances`.

5.2 Modelos DMFM-MRP e AB-MRP

Para implementação dos modelos DMFM-MRP e AB-MRP, foi utilizado o resolvedor Gurobi versão 9.0.3 mantendo a configuração padrão de seus parâmetros. O tempo máximo para resolução de cada instância, em ambos os modelos, foi pré-definido com o valor de 1 hora (3600 segundos) e não houve limitação de consumo de memória.

Os modelos nesta seção referenciam-se pelo valor das constantes M_d e M_j utilizados nas restrições de *delay* e *jitter* (2.7 e 2.8). O modelo DMFM-MRP apresenta resultados de duas variações, a primeira utilizando o valor dos parâmetros $M_d = \Lambda$ e $M_j = \Xi$, onde Λ e Ξ são calculados como descrito na Seção 4.1, e portanto será referenciada como DMFM-MRP$_{\Lambda,\Xi}$. A segunda variação utiliza $M_d = M_j = 1$ e, consequentemente, será denominada DMFM-MRP$_{1,1}$. A formulação AB-MRP segue o mesmo padrão de diferenciação pelo valor dos parâmetros M_d e M_j, mas não foi possível obter resultados confiáveis na versão AB-MRP$_{\Lambda,\Xi}$ pelo fato do valor dos parâmetros ocasionar erros numéricos associados as variáveis reais do modelo. Portanto, são reportados apenas resultados da versão AB-MRP$_{1,1}$.

As tabelas 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 contém os resultados dos modelos DMFM-MRP$_{\Lambda,\Xi}$, DMFM-MRP$_{1,1}$, DMFM-MRP$_{1,1}$ sem utilização dos pré-processamentos e AB-MRP$_{1,1}$, respectivamente. As primeiras quatro colunas contém o nome da instância, a quantidade de nós ($|V|$), o número de nós terminais ($|D|$) e a quantidade de arcos ($|A|$). As colunas "LI" e "LS" apresentam os valores de Limite Inferior (LI) e Limite Superior (LS) para cada instância, caso uma determinada célula da tabela contenha um hífen ($-$) significa que o resolvedor não retornou valor ao final da execução. A coluna "gap" apresenta porcentagem de *gap* entre o LI e o LS[2]. A coluna seguinte, "gap LS", representa a porcentagem de *gap* do LS computado pelo modelo em relação ao número total de terminais em $|D|$ [3]. A coluna "Nós GRB" contém a quantidade de nós da árvore de enumeração (árvore de *branch-and-bound*) do Gurobi. A última coluna dispõe do tempo de execução em segundos. Os valores "TLE" representam Tempo Limite Excedido. As linhas ressaltadas em cor cinza escura (■) representam a instâncias nas quais o modelo retornou solução ótima, enquanto as linhas colocadas em cinza claro (■) são instâncias onde obteve-se solução viável, mas o gap para o limitante dual não foi fechado.

[2] $\frac{LS-LI}{LS} \times 100$

[3] $100 - \frac{|D|-LS}{|D|} * 100$

Instância	|V|	|D|	|A|	LI	LS	gap	gap LS	Nós GRB	Tempo
washington-50-10-6	10	6	46	**1**	**1**	0	**17**	0	0
washington-50-20-11	20	11	184	**4**	**4**	0	**36**	1	0
washington-50-30-15	30	15	420	**3**	**3**	0	**20**	1	2
washington-50-40-23	40	23	830	**6**	**6**	0	**26**	2440	110
washington-50-50-28	50	28	1248	**13**	**13**	0	**46**	442	21
washington-50-60-35	60	35	1812	**15**	**15**	0	**43**	3766	85
washington-50-70-37	70	37	2516	3	-	-	-	1	TLE
washington-50-80-39	80	39	3592	7	28	75	72	1	TLE
washington-50-90-51	90	51	4218	13	37	65	73	1	TLE
washington-50-100-45	100	45	4416	8	31	74	69	1	TLE
washington-75-10-4	10	4	32	**3**	**3**	0	**75**	1	0
washington-75-20-12	20	12	126	**4**	**4**	0	**33**	761	1
washington-75-30-16	30	16	318	**5**	**5**	0	**31**	5244	40
washington-75-40-21	40	21	538	**5**	**5**	0	**24**	1	5
washington-75-50-30	50	30	876	**9**	**9**	0	**30**	440178	2259
washington-75-60-25	60	25	1256	**11**	**11**	0	**44**	152	31
washington-75-70-42	70	42	1700	6	12	50	29	1	TLE
washington-75-80-48	80	48	2504	2	-	-	-	1	TLE
washington-75-90-47	90	47	3034	2	-	-	-	1	TLE
washington-75-100-52	100	52	3792	4	-	-	-	1	TLE
washington-100-10-6	10	6	18	**2**	**2**	0	**33**	0	0
washington-100-20-10	20	10	98	**2**	**2**	0	**20**	1	0
washington-100-30-12	30	12	206	**2**	**2**	0	**17**	5407	9
washington-100-40-18	40	21	422	**4**	**4**	0	**19**	38322	354
washington-100-50-27	50	27	596	3	9	67	33	59737	TLE
washington-100-60-34	60	34	854	**10**	**10**	0	**29**	1	17
washington-100-70-39	70	39	1204	**17**	**17**	0	**44**	27009	1636
washington-100-80-32	80	32	1764	**5**	**5**	0	**16**	1	78
washington-100-90-43	90	43	2302	**11**	**11**	0	**26**	4686	196
washington-100-100-43	100	43	2816	2	-	-	-	1	TLE
washington-200-125-55	125	55	2448	21	29	28	53	1	TLE
washington-200-150-61	150	61	4468	2	61	97	100	1	TLE
washington-200-175-74	175	74	6048	11	-	-	-	1	TLE
washington-200-200-114	200	114	7290	8	114	93	100	1	TLE
washington-200-225-135	225	135	8928	2	-	-	-	0	TLE
washington-200-250-109	250	109	12806	3	-	-	-	0	TLE
washington-200-275-146	275	146	14390	4	-	-	-	0	TLE
washington-200-300-136	300	136	17418	4	-	-	-	0	TLE
washington-200-325-170	325	170	18520	-	-	-	-	-	TLE
washington-200-350-150	350	150	24436	-	-	-	-	-	TLE

Tabela 5.2: Resultados do Modelo DMFM-MRP$_{\Lambda,\Xi}$

Considerando os dados constantes na Tabela 5.2, percebe-se que o modelo DMFM-MRP$_{\Lambda,\Xi}$ apresentou um desempenho razoável, resolvendo de maneira ótima 20 instâncias, em maioria contendo entre 10 e 60 nós, com exceção da instância "washington-100-50-27", e 3 instâncias contendo entre 70 e 90 nós. A média de tempo, para as 20 instâncias nas quais obteve-se resultado ótimo, foi de 242 segundos. Para outras 8 instâncias o modelo obteve soluções viáveis, mas não foi possível fechar o gap para a LI. Das 8 instâncias, em apenas uma o número de nós da árvore de enumeração do Gurobi foi maior que 1, ou seja, o modelo tende a consumir memória e o tempo disponível na etapa de computar o problema na raiz da árvore de enumeração. Para as 12 últimas instâncias o modelo não foi capaz de retornar solução viável. Para as duas maiores instâncias do conjunto, "washington-200-325-170" e "washington-200-350-150", o modelo não retornou nem mesmo valores de LI, destacando a dificuldade até mesmo para etapa de resolução da relaxação

linear na raiz da árvore de enumeração.

Diante das características observadas nos resultados do DMFM-MRP$_{\Lambda,\Xi}$, nota-se a dificuldade na obtenção de soluções viáveis de acordo com o aumento de nós (consequentemente de arcos) da instância. Um fator crucial observado é alta quantidade de variáveis e restrições carregadas em memória, mesmo com a utilização dos pré-processamentos, fazendo com que o resolvedor tenha dificuldade em computar até mesmo o primeiro nó da árvore de enumeração.

Instância	**|V|**	**|D|**	**|A|**	**LI**	**LS**	**gap**	**gap LS**	**Nós GRB**	**Tempo**
washington-50-10-6	10	6	46	**1**	**1**	0	**17**	0	0
washington-50-20-11	20	11	184	**4**	**4**	0	**36**	1	0
washington-50-30-15	30	15	420	**3**	**3**	0	**20**	1	0
washington-50-40-23	40	23	830	**6**	**6**	0	**26**	1	3
washington-50-50-28	50	28	1248	**13**	**13**	0	**46**	1	3
washington-50-60-35	60	35	1812	**15**	**15**	0	**43**	1	4
washington-50-70-37	70	37	2516	**16**	**16**	0	**43**	14	41
washington-50-80-39	80	39	3592	**26**	**26**	0	**67**	1	25
washington-50-90-51	90	51	4218	**35**	**35**	0	**69**	839	285
washington-50-100-45	100	45	4416	**28**	**28**	0	**62**	2433	71
washington-75-10-4	10	4	32	**3**	**3**	0	**75**	0	0
washington-75-20-12	20	12	126	**4**	**4**	0	**33**	1	0
washington-75-30-16	30	16	318	**5**	**5**	0	**31**	249	6
washington-75-40-21	40	21	538	**5**	**5**	0	**24**	1	1
washington-75-50-30	50	30	876	**9**	**9**	0	**30**	67252	579
washington-75-60-25	60	25	1256	**11**	**11**	0	**44**	1	4
washington-75-70-42	70	42	1700	**12**	**12**	0	**29**	1	19
washington-75-80-48	80	48	2504	**9**	**9**	0	**19**	1	42
washington-75-90-47	90	47	3034	**19**	**19**	0	**40**	1	89
washington-75-100-52	100	52	3792	14	-	-	-	1	TLE
washington-100-10-6	10	6	18	**2**	**2**	0	**33**	0	0
washington-100-20-10	20	10	98	**2**	**2**	0	**20**	1	0
washington-100-30-12	30	12	206	**2**	**2**	0	**17**	2770	16
washington-100-40-18	40	21	422	**4**	**4**	0	**19**	1249	22
washington-100-50-27	50	27	596	5	9	44	33	127796	TLE
washington-100-60-34	60	34	854	**10**	**10**	0	**29**	1	3
washington-100-70-39	70	39	1204	**17**	**17**	0	**44**	8770	151
washington-100-80-32	80	32	1764	**5**	**5**	0	**16**	1	11
washington-100-90-43	90	43	2302	**11**	**11**	0	**26**	1	107
washington-100-100-43	100	43	2816	**4**	**4**	0	9	1	146
washington-200-125-55	125	55	2448	**29**	**29**	0	**53**	3733	338
washington-200-150-61	150	61	4468	10	61	84	100	1	TLE
washington-200-175-74	175	74	6048	20	74	73	100	1	TLE
washington-200-200-114	200	114	7290	32	114	72	100	1	TLE
washington-200-225-135	225	135	8928	2	-	-	-	0	TLE
washington-200-250-109	250	109	12806	6	-	-	-	0	TLE
washington-200-275-146	275	146	14390	11	-	-	-	0	TLE
washington-200-300-136	300	136	17418	-	-	-	-	-	TLE
washington-200-325-170	325	170	18520	-	-	-	-	-	TLE
washington-200-350-150	350	150	24436	-	-	-	-	-	TLE

Tabela 5.3: Resultados modelo DMFM-MRP$_{1,1}$

Para os dados presentes na Tabela 5.3, que contém os resultados do modelo DMFM-MRP$_{1,1}$, é possível observar um domínio quase total dos resultados da versão DMFM-MRP$_{\Lambda,\Xi}$, apresentando um LI com valor menor apenas para a instância "washington-200-300-136". Tal ocorrência pode ser justificada pelo fato da redução do valor dos parâmetros

M_d e M_j aperfeiçoar a qualidade do LI a ponto de tornar sua resolução inviável para o tempo limite de 3600 segundos. Para 29 instâncias o modelo DMFM-MRP$_{1,1}$ retornou soluções ótimas, apresentando um aumento de 9 instâncias em relação ao modelo DMFM-MRP$_{\Lambda,\Xi}$. Em outras 4 instâncias o valor obtido não foi ótimo, mas o modelo retornou solução viável para o problema.

O tempo médio de execução do DMFM-MRP$_{1,1}$, para o conjunto de instâncias em que foi retornada solução ótima, é de 68 segundos, sendo o maior tempo de execução desses casos inferior à 600 segundo (10 minutos). Ainda considerando esse conjunto, percebe-se que para 22 soluções, das 29 ótimas, o número de nós da árvore de enumeração foi inferior a 250. Mais especificamente, para 21 dessas instâncias o total de nós da árvore de enumeração foi 1 ou 0. Essas informações indicam que, a quantidade de restrições e variáveis do modelo DMFM-MRP contém informações suficientes para impactar o tempo de resolução de algumas instâncias contendo até 125 nós. Ainda, o fato de serem necessários poucos nós na árvore de enumeração indica uma rápida melhora na qualidade dos limitantes.

Considerando as duas variações de DMFM-MRP, vale destacar que os valores de $M_d = \Lambda$ e $M_j = \Xi$ permitem que um nó terminal não atendido seja visitado na arborescência geradora utilizando qualquer caminho mínimo possível no grafo. A modificação do valor das constantes M_d e M_j para 1 reduz consideravelmente o número de possibilidades para visitar um terminal k não atendido, praticamento forçando que esse terminal seja visitado a partir do nó artificial, pelo arcos (s, s') e (s', k). Por fim, observa-se que a redução de valor dos parâmetros M_d e M_j possibilitou a obtenção de melhores resultados, mas ainda assim não possibilitou a geração de soluções viáveis para instâncias contendo 225 nós ou mais.

A Tabela 5.4 contém os resultados retornados pelo modelo DMFM-MRP$_{1,1}$ sem a utilização dos pré-processamentos. O objetivo da apresentação desses resultados é demonstrar o impacto das fixações computadas pelos pré-processamentos na obtenção de limitantes. Ainda, foi escolhida essa pelo fato do modelo DMFM-MRP conter os três conjuntos de variáveis que podem ser fixados pelos procedimentos, diferente do modelo AB-MRP.

Diante dos resultados apresentados na Tabela 5.4, nota-se uma redução considerável na obtenção de resultados ótimos e viáveis. Todas as análises apresentadas neste parágrafo comparam valores obtidos a partir do modelo DMFM-MRP$_{1,1}$ com pré-processamentos. Primeiramente, o número de instâncias nas quais anteriormente era obtida solução ótima, dado o tempo de execução máximo, foi reduzido de 29 para 15, de modo que o número de nós do grafo não excede 60. Em 9 outras instâncias, o modelo retornou solução viável, mas *gap* não foi fechado. Em 16 testes não foram retornados limitantes superiores, enquanto com a aplicação dos pré-processamentos esse número era de apenas 7. Por fim, o tempo médio, considerando apenas instâncias resolvidas de maneira ótima, foi de 243 segundos, sendo aproximadamente três vezes maior que o tempo médio com utilização das fixações.

Instância	|V|	|D|	|A|	LI	LS	gap	gap LS	Nós GRB	Tempo
washington-50-10-6	10	6	46	**1**	**1**	0	**17**	0	0
washington-50-20-11	20	11	184	**4**	**4**	0	**36**	1	4
washington-50-30-15	30	15	420	**3**	**3**	0	**20**	1	8
washington-50-40-23	40	23	830	**6**	**6**	0	**26**	1	15
washington-50-50-28	50	28	1248	**13**	**13**	0	**46**	1	1113
washington-50-60-35	60	35	1812	**15**	**15**	0	**43**	1	40
washington-50-70-37	70	37	2516	**4**	**30**	87	**81**	34	TLE
washington-50-80-39	80	39	3592	**0**	**-**	-	**-**	0	TLE
washington-50-90-51	90	51	4218	**18**	**35**	49	**69**	2567	TLE
washington-50-100-45	100	45	4416	**14**	**31**	55	**69**	1569	TLE
washington-75-10-4	10	4	32	**3**	**3**	0	**75**	1	0
washington-75-20-12	20	12	126	**4**	**4**	0	**33**	2643	9
washington-75-30-16	30	16	318	**5**	**5**	0	**31**	32517	152
washington-75-40-21	40	21	538	**5**	**5**	0	**24**	1	128
washington-75-50-30	50	30	876	**5**	**9**	44	**30**	16772	TLE
washington-75-60-25	60	25	1256	**11**	**11**	0	**44**	2831	195
washington-75-70-42	70	42	1700	**4**	**41**	90	**98**	1	TLE
washington-75-80-48	80	48	2504	**0**	**-**	-	**-**	0	TLE
washington-75-90-47	90	47	3034	0	-	-	-	0	TLE
washington-75-100-52	100	52	3792	0	-	-	-	0	TLE
washington-100-10-6	10	6	18	**2**	**2**	0	**33**	0	0
washington-100-20-10	20	10	98	**2**	**2**	0	**20**	3826	10
washington-100-30-12	30	12	206	**2**	**2**	0	**17**	29143	117
washington-100-40-18	40	21	422	**4**	**4**	0	**19**	77939	1848
washington-100-50-27	50	27	596	**2**	**10**	80	**37**	2557	TLE
washington-100-60-34	60	34	854	**6**	**10**	40	**29**	361	TLE
washington-100-70-39	70	39	1204	**9**	**17**	47	**44**	177	TLE
washington-100-80-32	80	32	1764	**2**	**30**	93	**94**	1	TLE
washington-100-90-43	90	43	2302	**0**	**-**	-	**-**	0	TLE
washington-100-100-43	100	43	2816	**1**	**-**	-	**-**	0	TLE
washington-200-125-55	125	55	2448	-	-	-	-	-	TLE
washington-200-150-61	150	61	4468	-	-	-	-	-	TLE
washington-200-175-74	175	74	6048	-	-	-	-	-	TLE
washington-200-200-114	200	114	7290	-	-	-	-	-	TLE
washington-200-225-135	225	135	8928	-	-	-	-	-	TLE
washington-200-250-109	250	109	12806	-	-	-	-	-	TLE
washington-200-275-146	275	146	14390	-	-	-	-	-	TLE
washington-200-300-136	300	136	17418	-	-	-	-	-	TLE
washington-200-325-170	325	170	18520	-	-	-	-	-	TLE
washington-200-350-150	350	150	24436	-	-	-	-	-	TLE

Tabela 5.4: Resultados modelo DMFM-MRP$_{1,1}$ sem a utilização de pré-processamentos

Considerando os dados constantes na Tabela 5.5, percebe-se um bom desempenho do modelo AB-MRP$_{1,1}$, que obteve soluções ótimas para 28 instâncias e viáveis para as 12 restantes. O tempo médio para obtenção de soluções ótimas foi de 159 segundos, sendo o maior tempo de execução, excluindo TLE's, de 2175 segundos. Em apenas 8 instâncias, das 40 testadas, o número de nós da árvore de enumeração foi inferior a 250. Ainda, o valor médio de nós da arvore de enumeração retornado pelo resolvedor foi 249224. AB-MRP$_{1,1}$ retornou soluções ótima para praticamente todas as instâncias cujos grafos continham até 100 nós, com exceção das instâncias "washington-75-90-47" e "washington-75-100-52".

Considerando esses resultados, nota-se que, em contraste com o DMFM-MRP$_{1,1}$, o modelo AB-MRP$_{1,1}$ apresentou limitantes inferiores e superiores para todas as instâncias do conjunto. Também houve um aumento da quantidade de nós da árvore de enumeração e o tempo médio de execução. É possível justificar tais acréscimos pela redução considerável no número de variáveis e restrições. O AB-MRP$_{1,1}$ tem um fator de fechamento do

Instância	|V|	|D|	|A|	LI	LS	gap	gap LS	Nós GRB	Tempo
washington-50-10-6	10	6	46	**1**	**1**	0	**17**	0	0
washington-50-20-11	20	11	184	**4**	**4**	0	**36**	557	0
washington-50-30-15	30	15	420	**3**	**3**	0	**20**	1	0
washington-50-40-23	40	23	830	**6**	**6**	0	**26**	17096	4
washington-50-50-28	50	28	1248	**13**	**13**	0	**46**	65	1
washington-50-60-35	60	35	1812	**15**	**15**	0	**43**	5637	3
washington-50-70-37	70	37	2516	**16**	**16**	0	**43**	16422	26
washington-50-80-39	80	39	3592	**26**	**26**	0	**67**	287148	584
washington-50-90-51	90	51	4218	**35**	**35**	0	**69**	205467	355
washington-50-100-45	100	45	4416	**28**	**28**	0	**62**	190420	262
washington-75-10-4	10	4	32	**3**	**3**	0	**75**	1	0
washington-75-20-12	20	12	126	**4**	**4**	0	**33**	229	0
washington-75-30-16	30	16	318	**5**	**5**	0	**31**	6430	3
washington-75-40-21	40	21	538	**5**	**5**	0	**24**	2628	3
washington-75-50-30	50	30	876	**9**	**9**	0	**30**	3269750	2175
washington-75-60-25	60	25	1256	**11**	**11**	0	**44**	13702	2
washington-75-70-42	70	42	1700	**12**	**12**	0	**29**	59552	136
washington-75-80-48	80	48	2504	**9**	**9**	0	**19**	34481	148
washington-75-90-47	90	47	3034	10	19	47	40	1190250	TLE
washington-75-100-52	100	52	3792	13	20	35	38	754860	TLE
washington-100-10-6	10	6	18	**2**	**2**	0	**33**	0	0
washington-100-20-10	20	10	98	**2**	**2**	0	**20**	1	0
washington-100-30-12	30	12	206	**2**	**2**	0	**17**	51	0
washington-100-40-18	40	21	422	**4**	**4**	0	**19**	2509	5
washington-100-50-27	50	27	596	**9**	**9**	0	**33**	173952	121
washington-100-60-34	60	34	854	**10**	**10**	0	**29**	59255	94
washington-100-70-39	70	39	1204	**17**	**17**	0	**44**	67860	183
washington-100-80-32	80	32	1764	**5**	**5**	0	**16**	51718	23
washington-100-90-43	90	43	2302	**11**	**11**	0	**26**	36600	160
washington-100-100-43	100	43	2816	**4**	**4**	0	**9**	55409	157
washington-200-125-55	125	55	2448	27	29	7	53	1446730	TLE
washington-200-150-61	150	61	4468	2	36	94	59	981311	TLE
washington-200-175-74	175	74	6048	7	37	81	50	426631	TLE
washington-200-200-114	200	114	7290	8	105	92	92	121458	TLE
washington-200-225-135	225	135	8928	8	15	47	11	49815	TLE
washington-200-250-109	250	109	12806	11	19	42	17	197778	TLE
washington-200-275-146	275	146	14390	11	71	85	49	47332	TLE
washington-200-300-136	300	136	17418	2	61	97	45	92629	TLE
washington-200-325-170	325	170	18520	16	77	79	45	46563	TLE
washington-200-350-150	350	150	24436	4	45	91	30	56654	TLE

Tabela 5.5: Resultados modelo AB-MRP$_{1,1}$

gap mais baixo, i.e, são necessários mais nós da árvore de enumeração para que haja melhora dos limitantes. O modelo DMFM-MRP, por manter mais informações em forma de restrições, necessita de menos tempo de execução e nós da árvore de enumeração quando obtém-se resultado ótimo. Entretanto, essa quantidade de informações se torna uma possível desvantagem, principalmente para LIs, de acordo com o crescimento do grafo da instância. Em contrapartida, a abordagem do modelo AB-MRP, com menos variáveis e restrições, permite que o resolvedor de PLI consiga explorar mais nós ao longo da árvore de enumeração, possibilitando melhora dos limitantes e obtenção principalmente de soluções viáveis.

Por fim, a Tabela 5.6 apresenta a contagem do número total de instâncias resolvidas por cada modelo, organizada de modo que a primeira linha contém a quantidade de

instâncias cujo algoritmo computou a solução ótima, a segunda linha contém o número de soluções viáveis encontradas quando não foi possível obter o resultado ótimo e, por fim, a terceira linha apresenta a soma de soluções ótimas e viáveis para cada modelagem. Os resultados da versão DMFM-MRP sem pré-processamento foram desconsiderados pelo fato de seu desempenho ser inferior, em todos os casos, aos resultados retornados pela versão com a utilização dos pré-processamentos.

	DMFM-MRP$_{\Lambda,\Xi}$	DMFM-MRP$_{1,1}$	AB-MRP$_{1,1}$
Ótimo	20	29	28
Viável	8	4	12
Total	28	33	40

Tabela 5.6: Contagem de soluções dos modelos matemáticos

5.3 Relaxações Lagrangianas

Para a implementação das relaxações lagrangianas RL-SP, RL-SPRC$_\lambda$, RL-SPRC$_\xi$ e RL-SPRC2 descritas, respectivamente, nas Seções 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 e 4.2.4, são consideradas as seguintes variações:

- Utilização do resolvedor de PLI na resolução do PPL;
- Utilização de algoritmos combinatórios na resolução do PPL;
- Inicialização de todos os multiplicadores lagrangianos com valor 0;
- Inicialização de todos os multiplicadores lagrangianos com valor das variáveis na solução ótima do problema dual resolvido pelo algoritmo de barreiras;
- Remoção dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de variação de *delay*.

Nas implementações com resolvedor de PLI utilizou-se o Gurobi versão 9.0.3, mantendo a configuração padrão de seus parâmetros. O tempo máximo para resolução de cada instância na versão das relaxações utilizando resolvedor foi de 3600 segundos, enquanto para as versões combinatórias o limite foi de 1800 segundos. Não houve restrição no consumo de memória. Foram utilizados todas as fixações de variáveis de acordo com os três pré-processamentos apresentados anteriormente e o valor das constantes M_d e M_j foi igual a 1 para todas as relaxações. Por fim, os valores de parâmetros utilizados no método de subgradiente foram validados empiricamente e são:

- LI inicial: 0, assumindo que nenhum terminal foi perdido;
- LS inicial: resultado da aplicação da heurística de busca local com os multiplicadores iniciais;
- O gap mínimo para encerrar a execução do método de subgradiente é dado por $(LS - LI) \leq 0.001$, assumindo que os LIs sempre atualizam-se com o teto do valor da função objetivo do PPL. Por exemplo, se o resultado do PPL for 1.1, significa que não atende-se pelo menos 2 terminais, já que não é possível tratar apenas frações de um nó. Logo, o valor do LI será $\lceil 1.1 \rceil = 2$.

- Outra condição de parada utilizada foi o limite máximo de iterações, fixado em 2000;
- O tamanho do passo π é iniciado com valor 2.0. A cada 100 iterações do método de subgradiente em que não há melhora do LI, atualiza-se $\pi = \frac{\pi}{2}$.

De antemão, vale ressaltar que consideram-se versões da RL utilizando resolvedor de PLI, pelo fato de que as soluções retornadas podem ser diferentes da versão combinatória. Um exemplo da diferença citada consiste na seleção de arcos intermediários no caminho que parte da raiz s até um nó terminal k. Assuma como P o caminho de s para k em G, tal que P contém os nós i e j como intermediários, utilizando os seguintes arcos $(s,i),(i,j)$ e (j,k). A solução retornada pelo resolvedor, considerando apenas as variáveis f, é a seguinte: $f^k_{s,i} = f^j_{s,i} = f^i_{s,i} = f^k_{i,j} = f^j_{i,j} = f^k_{j,k} = 1$. É perceptível o fato de que os caminhos para nós intermediários e terminais estão correlacionados, entretanto o mesmo não se aplica a versão combinatória, dado que, como descrito na Seção **??**, computa-se caminhos mínimos para todos os nós opcionais, independente de fazerem parte dos caminhos computados para visitar os nós terminais.

Se uma RL utiliza como multiplicadores iniciais os valores do **M**étodo de **B**arreiras, haverá uma referência "-MB". Para a versão da RL que desconsidera os multiplicadores associados com as restrições de variação de *delay*, a referência é "-SV", um mnemônico para **s**em **v**ariação. Por fim, diferenciam-se versões com algoritmos **C**ombinatórios das versões com **R**esolvedor utilizando, respectivamente, RL^C ou RL^R. Todas as RLs aplicam a heurística de busca local, descrita na Seção 4.4, em uma arborescência geradora mínima computada com a utilização dos coeficientes associados com as variáveis y. Por conter uma etapa de aleatorização, os resultados de LS podem variar independente dos multiplicadores lagrangianos.

As tabelas 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10 contém os resultados das relaxações RL-SP, RL-SPRC$_\lambda$, RL-SPRC$_\xi$ e RL-SPRC2, respectivamente. As primeiras quatro colunas contém o nome da instância, quantidade de nós (|V|), número de nós terminais (|D|) e quantidade de arcos (|A|). As colunas subsequentes se dividem em variações da mesma RL, organizadas de modo que para cada variação são dispostos os valores de limitante inferior ("LI"), limitante superior ("LS") e o tempo de execução em segundos para cada instância. O valor TLE em uma linha representa que o algoritmo encerrou ao atingir o Tempo Limite de Execução e os valores em **negrito** simbolizam que o limitante é igual ao melhor obtido dentre as variações presentes na tabela.

5.3.1 RL-SP

A Tabela 5.7 contém os resultados mais relevantes associados com a relaxação lagrangiana RL-SP. Utiliza-se RL-SP^R pelo fato que podem haver arcos com coeficientes negativos, consequentemente a versão RL-SP^C não pode ser aplicada. O mesmo motivo se aplica à versão RL-SP-MB. Por fim, a última coluna apresenta os resultados da versão RL-SP-SV^C, cujos resultados dominaram, para todas as instâncias, a mesma versão utilizando resolvedor de PLI.

Diante dos resultados apresentados na Tabela 5.7, percebe-se a dificuldade de melhora na qualidade dos LIs iniciais. Para as versões RL-SP^R e RL-SP-MB^R não houve

				RL-SP^R			RL-SP-MB^R			RL-SP-SV^C		
Instância	**|V|**	**|D|**	**|E|**	**LI**	**LS**	**Tempo**	**LI**	**LS**	**Tempo**	**LI**	**LS**	**Tempo**
washington-50-10-6	10	6	23	**0**	**1**	19	**0**	**1**	20	**0**	**1**	9
washington-50-20-11	20	11	92	0	**4**	67	0	**4**	67	**1**	**4**	26
washington-50-30-15	30	15	210	**0**	**3**	180	**0**	**3**	181	**0**	**3**	57
washington-50-40-23	40	23	415	**0**	**6**	439	**0**	**6**	451	**0**	**6**	139
washington-50-50-28	50	28	624	**0**	**13**	657	**0**	**13**	655	**0**	**13**	215
washington-50-60-35	60	35	906	**0**	**16**	1036	**0**	**16**	1059	**0**	**16**	379
washington-50-70-37	70	37	1258	**0**	**16**	2083	**0**	**16**	2085	**0**	**16**	707
washington-50-80-39	80	39	1796	**0**	**28**	2560	**0**	29	1381	**0**	**28**	777
washington-50-90-51	90	51	2109	**0**	36	TLE	**0**	**35**	TLE	**0**	**35**	1564
washington-50-100-45	100	45	2208	**0**	30	TLE	**0**	**29**	TLE	**0**	30	1177
washington-75-10-4	10	4	16	**0**	**3**	10	**0**	**3**	10	**0**	**3**	8
washington-75-20-12	20	12	63	**0**	**4**	56	**0**	**4**	56	**0**	**4**	23
washington-75-30-16	30	16	159	**0**	**5**	166	**0**	**5**	168	**0**	**5**	55
washington-75-40-21	40	21	269	0	**8**	285	0	**8**	292	**3**	**8**	96
washington-75-50-30	50	30	438	**0**	**10**	555	**0**	11	562	**0**	11	213
washington-75-60-25	60	25	628	**0**	**11**	837	**0**	**11**	847	**0**	**11**	243
washington-75-70-42	70	42	850	**0**	**15**	1433	**0**	16	1492	**0**	17	606
washington-75-80-48	80	48	1252	**0**	**14**	2438	**0**	15	2464	**0**	15	1076
washington-75-90-47	90	47	1517	**0**	**19**	2958	**0**	**19**	2958	**0**	**19**	1197
washington-75-100-52	100	52	1896	**0**	**29**	TLE	**0**	**29**	TLE	**0**	**29**	1663
washington-100-10-6	10	6	9	**0**	**2**	13	**0**	**2**	14	**1**	**2**	8
washington-100-20-10	20	10	49	**0**	**2**	53	**0**	**2**	54	**0**	**2**	22
washington-100-30-12	30	12	103	0	**2**	107	0	**2**	108	**1**	**2**	36
washington-100-40-18	40	21	211	**0**	**5**	280	**0**	**5**	290	**0**	**5**	87
washington-100-50-27	50	27	298	0	12	447	0	**10**	445	**1**	**10**	157
washington-100-60-34	60	34	427	0	12	572	0	11	564	**5**	13	229
washington-100-70-39	70	39	602	0	**18**	1003	0	20	1000	**2**	19	397
washington-100-80-32	80	32	882	**0**	**11**	1664	**0**	12	1683	**0**	13	492
washington-100-90-43	90	43	1151	**0**	**17**	2100	**0**	**17**	2175	**0**	**17**	806
washington-100-100-43	100	43	1408	0	13	3107	0	13	3184	**1**	**11**	1099
washington-200-125-55	125	55	1224	**0**	35	2629	**0**	**34**	2580	**0**	35	1075
washington-200-150-61	150	61	2234	**0**	**36**	TLE	**0**	39	TLE	**0**	**36**	TLE
washington-200-175-74	175	74	3024	**0**	**43**	TLE	**0**	**43**	TLE	**0**	44	TLE
washington-200-200-114	200	114	3645	**0**	79	TLE	**0**	**74**	TLE	**0**	75	TLE
washington-200-225-135	225	135	4464	0	72	TLE	0	**57**	TLE	**2**	58	TLE
washington-200-250-109	250	109	6403	**0**	59	TLE	**0**	64	TLE	**0**	**57**	TLE
washington-200-275-146	275	146	7195	0	97	TLE	-	-	TLE	**1**	**96**	TLE
washington-200-300-136	300	136	8709	**0**	94	TLE	-	-	TLE	**0**	**89**	TLE
washington-200-325-170	325	170	9260	**0**	**113**	TLE	-	-	TLE	**0**	115	TLE
washington-200-350-150	350	150	12218	**0**	82	TLE	-	-	TLE	**0**	**68**	TLE

Tabela 5.7: Resultados da Relaxação RL-SP com Respectivas Variações

melhora do LI inicial, sendo para todos os casos zero. Para a versão RL-SP-SV, a melhora em alguns LIs, mais especificamente em 10 instâncias, se deu pela aplicação dos pré-processamento, que apresentam uma melhor incorporação nos algoritmos combinatórios, ou seja, no momento em que computa-se o PPL é possível marcar um terminal desconexo como não atendido e então basta visita-lo a partir do nó artificial s'. O tempo, como era esperado, foi menor na versão combinatória, sendo em média 472 segundos, enquanto as versões com resolvedor tiveram em média 991 segundos, desconsiderando os TLEs e o tempo de resolução do problema de barreiras. Além do mais, para quatro instâncias do conjunto não foi possível resolver o problema de barreiras, consequentemente não foram reportados limitantes. Para os limitantes superiores, segundo o teste estatístico de Iman-Davenport, não existe diferença estatisticamente significativa entre as amostras. Considerando a contagem de vitórias, a versão RL-SP-SV^C apresentou desempenho su-

perior, obtendo LSs melhores ou iguais as demais variações para 31 instâncias.

5.3.2 RL-SPRC$_\lambda$

A Tabela 5.8 apresenta os resultados das variações da relaxação RL-SPRC$_\lambda$. A primeira coluna, RL-SPRC$_\lambda{}^C$, contém os valores da versão combinatória. Omitiram-se os resultados da versão com resolvedor de PLI pelo fato de serem inferiores a versão combinatória para todas as instâncias. A mesma justificativa se aplica as relaxação RL-SPRC$_\lambda$-MB e RL-SPRC$_\lambda$-SV, cujos resultados são apresentados, respectivamente, na segunda e terceira coluna.

				RL-SPRC$_\lambda^C$			**RL-SPRC$_\lambda$-MB^C**			**RL-SPRC$_\lambda$-SV^C**		
Instância	**|V|**	**|D|**	**|E|**	**LI**	**LS**	**Tempo**	**LI**	**LS**	**Tempo**	**LI**	**LS**	**Tempo**
washington-50-10-6	10	6	23	**1**	**1**	0	0	**1**	15	0	**1**	9
washington-50-20-11	20	11	92	**2**	**4**	34	0	**4**	79	**2**	**4**	30
washington-50-30-15	30	15	210	**2**	**3**	74	0	**3**	201	**2**	**3**	70
washington-50-40-23	40	23	415	**4**	**6**	492	0	**6**	440	0	6	162
washington-50-50-28	50	28	624	**4**	**13**	292	0	**13**	669	**4**	**13**	249
washington-50-60-35	60	35	906	0	**15**	443	0	17	1104	**2**	**15**	422
washington-50-70-37	70	37	1258	**4**	**16**	820	0	**16**	2088	2	**16**	798
washington-50-80-39	80	39	1796	**14**	**28**	1705	0	**28**	2503	12	**28**	857
washington-50-90-51	90	51	2109	**10**	**35**	TLE	0	36	TLE	7	**35**	1779
washington-50-100-45	100	45	2208	3	30	TLE	0	31	TLE	**6**	**29**	1316
washington-75-10-4	10	4	16	**2**	**3**	10	0	**3**	15	0	**3**	9
washington-75-20-12	20	12	63	**1**	**4**	36	0	**4**	67	**1**	**4**	29
washington-75-30-16	30	16	159	**0**	**5**	255	**0**	**5**	197	**0**	**5**	66
washington-75-40-21	40	21	269	**3**	**6**	211	0	7	334	**3**	7	108
washington-75-50-30	50	30	438	**3**	11	397	0	**11**	676	**3**	**10**	250
washington-75-60-25	60	25	628	**1**	**11**	306	0	**11**	848	**1**	**11**	273
washington-75-70-42	70	42	850	**1**	**14**	800	0	17	1753	**1**	**14**	698
washington-75-80-48	80	48	1252	0	**14**	1305	0	15	2895	**1**	15	1206
washington-75-90-47	90	47	1517	0	**19**	1461	0	**19**	3158	**1**	**19**	1321
washington-75-100-52	100	52	1896	4	27	TLE	0	29	TLE	**5**	**25**	TLE
washington-100-10-6	10	6	9	**1**	**2**	9	0	**2**	13	**1**	**2**	8
washington-100-20-10	20	10	49	**0**	**2**	36	**0**	**2**	65	**0**	**2**	26
washington-100-30-12	30	12	103	**1**	**2**	74	**1**	**2**	141	**1**	**2**	47
washington-100-40-18	40	21	211	**1**	**5**	269	0	**5**	455	**1**	**5**	108
washington-100-50-27	50	27	298	**1**	23	0	**1**	12	1192	**1**	**10**	212
washington-100-60-34	60	34	427	**6**	**10**	280	0	11	631	5	11	255
washington-100-70-39	70	39	602	8	**17**	664	0	20	1364	**9**	18	450
washington-100-80-32	80	32	882	**2**	**9**	1564	0	13	2009	**2**	**9**	568
washington-100-90-43	90	43	1151	1	**14**	1176	0	18	2499	**2**	**14**	907
washington-100-100-43	100	43	1408	**1**	**9**	1455	**1**	13	3500	**1**	11	1230
washington-200-125-55	125	55	1224	**8**	**33**	TLE	0	34	3114	**8**	**33**	1206
washington-200-150-61	150	61	2234	3	40	TLE	0	40	TLE	**5**	**35**	TLE
washington-200-175-74	175	74	3024	10	70	TLE	0	44	TLE	**11**	**42**	TLE
washington-200-200-114	200	114	3645	7	105	TLE	0	82	TLE	**9**	**78**	TLE
washington-200-225-135	225	135	4464	**2**	127	TLE	0	63	TLE	**2**	**52**	TLE
washington-200-250-109	250	109	6403	**6**	91	TLE	**6**	69	TLE	**6**	**47**	TLE
washington-200-275-146	275	146	7195	**4**	145	TLE	-	-	TLE	**4**	**95**	TLE
washington-200-300-136	300	136	8709	**5**	127	TLE	-	-	TLE	**5**	**90**	TLE
washington-200-325-170	325	170	9260	**8**	154	TLE	-	-	TLE	**8**	**115**	TLE
washington-200-350-150	350	150	12218	**2**	134	TLE	-	-	TLE	**2**	**72**	TLE

Tabela 5.8: Resultados da Relaxação RL-SPRC$_\lambda$ com Respectivas Variações

De acordo com os resultados dispostos na Tabela 5.8, pode-se destacar melhora significativa na qualidade dos limitantes inferiores em relação as variações da relaxação

lagrangiana RL-SP. Dito isso, pode-se atribuir tal melhora a modificação do problema de caminhos resolvido no PPL. Como consequência da melhora dos LIs, destaca-se o acréscimo da complexidade computacional. Ainda, se tratando das variação da relaxação RL-SPRC$_\lambda$, nota-se uma diferença de desempenho causada pelos coeficientes negativos, dado que o tempo médio da versão RL-SPRC$_\lambda{}^C$, contendo arcos de custo negativo, foi 969 segundos enquanto, para RL-SPRC$_\lambda$-SV^C, a média de tempo ficou em 807 segundos. De todo modo, praticamente dobrou-se o tempo de médio em relação a relaxação RL-SP.

Considerando os valores de LI, segundo o teste de Iman-Davenport, existe DES entre as amostras. Sendo mais específico, pode-se descartar os valores de limitantes inferiores obtidos pela versão RL-SPRC$_\lambda$-MB^C, diante do simples fato que seus LIs foram, para todas as instâncias, menores ou iguais as demais versões. Assim, ao analisar os resultados retornados pelas versões RL-SPRC$_\lambda{}^C$ e RL-SPRC$_\lambda$-SV^C, não foi detectada DES, podendo assim assumir ambas como estatisticamente equivalentes. Portanto, pode-se selecionar uma versão como melhor utilizando a contagem do número de instâncias onde cada uma obteve o maior LI. Como a relaxação RL-SPRC$_\lambda{}^C$ obteve melhores limitantes em 7 instâncias e RL-SPRC$_\lambda$-SV^C foi superior em 10 casos, podemos considerá-lo mais eficiente para este conjunto de teste.

Considerando os LSs, a utilização do teste estatístico de Iman-Davenport indicou DES entre as amostras. Com base na utilização do teste Nemenyi, detectou-se novamente a versão RL-SPRC$_\lambda$-MB^C como a que detém os piores *ranks* médios e as versões RL-SPRC$_\lambda{}^C$ e RL-SPRC$_\lambda$-SV^C como estatisticamente equivalentes, mas a contagem de vitórias indicou como melhor a relaxação RL-SPRC$_\lambda$-SV^C, obtendo LSs melhores ou igual as demais versões para 35, das 40 instâncias. Percebe-se que a diferença na qualidade dos LSs vai se tornando mais evidente de acordo com o aumento do número de nós do grafo da instância. Pode-se justificar essa diferença pelo fato de que, além de computar caminhos para mais nós, o algoritmo de SPRC da Boost pode executar por mais tempo quando existem arcos de custo negativo. Consequentemente, a relaxação realizará menos iterações do método de subgradiente respeitando o tempo limite de execução.

5.3.3 RL-SPRC$_\xi$

A Tabela 5.9 apresenta os resultados das variações da relaxação RL-SPRC$_\xi$. A primeira, RL-SPRC$_\xi{}^R$ versão resolvedor, a versão combinatório desta relaxação é inviável por características específicas dos valores de *jitter* das instâncias. Como dito anteriormente, para que o seja possível computar o SPRC entre um par de nós do grafo, é essencial que a quantidade de recurso consumido em cada arco seja estritamente maior que zero, caso contrário podem haver casos, considerando arcos com custo negativo e sem consumo de recurso, em que o algoritmo detecta ciclos negativos. A mesma justificativa se aplica a RL-SPRC$_\xi$-MB^R. A última coluna apresenta os resultados obtidos pela RL-SPRC$_\xi$-SV^C, já que a mesma obteve limitantes melhores ou iguais a versão com resolvedor para todas as instâncias.

				RL-SPRC$_\xi^R$			RL-SPRC$_\xi$-MB^R			RL-SPRC$_\xi$-SV^C		
Instância	**|V|**	**|D|**	**|E|**	**LI**	**LS**	**Tempo**	**LI**	**LS**	**Tempo**	**LI**	**LS**	**Tempo**
washington-50-10-6	10	6	23	0	**1**	16	**1**	**1**	0	0	**1**	10
washington-50-20-11	20	11	92	**2**	**4**	74	0	**4**	75	**2**	**4**	31
washington-50-30-15	30	15	210	**2**	**3**	221	**2**	**3**	211	**2**	**3**	71
washington-50-40-23	40	23	415	**0**	**6**	479	**0**	**6**	471	**0**	**6**	169
washington-50-50-28	50	28	624	4	**13**	702	0	**13**	689	**5**	**13**	244
washington-50-60-35	60	35	906	**2**	**15**	997	0	**15**	999	**2**	**15**	433
washington-50-70-37	70	37	1258	3	**16**	2288	0	**16**	2293	**4**	**16**	793
washington-50-80-39	80	39	1796	19	29	2503	0	**27**	2494	**20**	28	868
washington-50-90-51	90	51	2109	**14**	36	TLE	0	**35**	TLE	**14**	**35**	1751
washington-50-100-45	100	45	2208	5	**31**	TLE	0	**31**	TLE	**6**	**29**	1310
washington-75-10-4	10	4	16	**0**	**3**	15	**0**	**3**	16	**0**	**3**	9
washington-75-20-12	20	12	63	**2**	**4**	67	1	**4**	70	1	**4**	28
washington-75-30-16	30	16	159	**0**	**5**	231	**0**	**5**	197	**0**	**5**	68
washington-75-40-21	40	21	269	**4**	**7**	312	**4**	**7**	325	**4**	**7**	109
washington-75-50-30	50	30	438	**3**	**9**	733	**3**	**9**	683	**3**	**9**	257
washington-75-60-25	60	25	628	**2**	**11**	902	**2**	**11**	897	**2**	**11**	275
washington-75-70-42	70	42	850	**5**	15	1575	3	15	1570	**5**	**14**	683
washington-75-80-48	80	48	1252	**0**	17	2731	**0**	11	2626	**0**	**10**	1218
washington-75-90-47	90	47	1517	1	**19**	3198	0	**19**	3072	**2**	**19**	1314
washington-75-100-52	100	52	1896	5	29	TLE	0	29	TLE	**6**	**28**	TLE
washington-100-10-6	10	6	9	**1**	**1**	0	0	**1**	12	**1**	2	8
washington-100-20-10	20	10	49	**0**	**2**	66	**0**	**2**	64	**0**	**2**	27
washington-100-30-12	30	12	103	**1**	**2**	164	**1**	**2**	153	**1**	**2**	50
washington-100-40-18	40	21	211	**1**	6	567	**1**	6	541	**1**	**5**	111
washington-100-50-27	50	27	298	**1**	**10**	2019	**1**	**10**	1001	**1**	**10**	214
washington-100-60-34	60	34	427	**6**	11	600	5	**10**	620	**6**	**10**	264
washington-100-70-39	70	39	602	**9**	18	1298	0	19	1327	**9**	**17**	450
washington-100-80-32	80	32	882	**3**	15	1968	0	11	1959	**3**	**9**	559
washington-100-90-43	90	43	1151	**2**	19	2379	0	14	2314	**2**	**13**	899
washington-100-100-43	100	43	1408	**1**	17	TLE	**1**	**6**	3451	**1**	7	1216
washington-200-125-55	125	55	1224	**9**	35	3054	0	**31**	2888	**9**	32	1196
washington-200-150-61	150	61	2234	**6**	38	TLE	0	39	TLE	**6**	**36**	TLE
washington-200-175-74	175	74	3024	**18**	**42**	TLE	0	43	TLE	**18**	**42**	TLE
washington-200-200-114	200	114	3645	**21**	**70**	TLE	0	76	TLE	**21**	73	TLE
washington-200-225-135	225	135	4464	**2**	57	TLE	2	53	TLE	**2**	**46**	TLE
washington-200-250-109	250	109	6403	**6**	60	TLE	**6**	60	TLE	**6**	**54**	TLE
washington-200-275-146	275	146	7195	**9**	98	TLE	-	-	TLE	**9**	**94**	TLE
washington-200-300-136	300	136	8709	**10**	**88**	TLE	-	-	TLE	**10**	**88**	TLE
washington-200-325-170	325	170	9260	**13**	117	TLE	-	-	TLE	**13**	**113**	TLE
washington-200-350-150	350	150	12218	**3**	78	TLE	-	-	TLE	**3**	**66**	TLE

Tabela 5.9: Resultados da Relaxação RL-SPRC$_\xi$ com Respectivas Variações

Diante dos resultados contidos na Tabela 5.9, vale ressaltar que a complexidade computacional semelhante a relaxação RL-SPRC$_\lambda$, dado que o PPL de ambos consiste em computar SPRCs considerando apenas um recurso. As médias de tempo foram, respectivamente, 1902, 1857 e 815, segundos para as relaxações RL-SPRC$_\xi{}^R$, RL-SPRC$_\xi$-MB^R e RL-SPRC$_\xi$-SV^C. Como esperado, o tempo médio de execução da versão combinatória foi semelhante a relaxação RL-SPRC$_\lambda$-SV^C. Entretanto, no quesito de LI, a utilização do *jitter* como recurso se mostrou mais eficiente que o *delay*. Tal dado pode ser comprovado diante da comparação dos limitantes, de modo que a relaxação RL-SPRC$_\xi$ obteve LI maior que RL-SPRC$_\lambda$ para 21 instâncias. Para outras 16 o resultado foi igual.

Agora, considerando os LIs apenas das versões de RL-SPRC$_\xi$, ao aplicar o teste de Iman-Davenport, o resultado obtido indicou a existência de DES entre as amostras. Assim, ao utilizar o teste de Nemenyi agrupou-se as versões RL-SPRC$_\xi{}^R$ e RL-SPRC$_\xi$-SV^C com

menor *rank* médio, o que significa que os resultados das melhores versões não apresentam DES. Considerando a contagem de vitórias de cada variação da relaxação RL-SPRC$_\xi$, pode-se assumir a relaxação RL-SPRC$_\xi$-SV^C como melhor, dado que seus valores de LI foram melhores que a RL-SPRC$_\xi{}^R$ em 6 casos, e para outras 32 instâncias o valor foi o mesmo.

Para os LSs, o teste estatístico de Iman-Davenport indicou DES entre as amostras. Com isso, ao aplicar o teste de Nemenyi, resultado retornado indica que a relaxação RL-SPRC$_\lambda$-SV^C apresentou melhor qualidade de limitantes, retornando resultados melhores que as demais versões para 14 instâncias, enquanto que para 21 outras o LS foi igual. Essa diferença na qualidade dos limitantes pode ser atribuída ao fato da versão combinatória executar mais iterações do método de subgradiente respeitando o tempo máximo de execução. O aumento no número de iterações beneficia o valor dos multiplicadores de Lagrange e, consequentemente, aplica o procedimento de busca local em um número maior de arborescências geradas.

5.3.4 RL-SPRC2

A Tabela 5.10 contém os resultados mais relevantes associados com a relaxação RL-SPRC2. A primeira coluna, RL-SPRC2^C contém os dados da versão combinatória. Fora omitidos os resultados da versão com resolvedor de PLI pelo fato de serem inferiores a versão combinatória para todas as instâncias. A mesma justificativa aplica-se a terceira coluna, que apresenta os resultados obtidos pela versão RL-SPRC2-SV^C. Para a versão RL-SPRC2-MB, optou-se por apresentar apenas os resultados obtidos pela versão com resolvedor. Por mais que os valores sejam próximos da versão combinatória, as diferenças principais se deram pelo fato que a utilização do resolvedor manteve uma qualidade mais alta na obtenção de limitantes para um maior número de instâncias e para as instâncias nas quais a versão RL-SPRC2-MB^C obteve melhor resultado, o valor obtido ainda foi inferior a pelo menos uma outra versão da RL-SPRC2 apresentada na tabela.

Diante dos resultados presentes na Tabela 5.10, destaca-se o domínio da relaxação RL-SPRC2 sobre as versões RL-SP, RL-SPRC$_\lambda$ e RL-SPRC$_\xi$ considerando o LI, ou seja, os LIs das versões de RL-SPRC2 foram os melhores obtidos dentre todas as relaxações lagrangianas. Esse ganho considerável de qualidade ocorre pelo fato do atual PPL restringir os caminhos pelos recursos de *delay* e *jitter* simultaneamente. Essa abordagem gera LIs baseados na interseção dos resultados que seriam retornados pelas relaxações RL-SPRC$_\lambda$ e RL-SPRC$_\xi$. O tempo médio de execução das variações de RL-SPRC2 foram 950, 2066 e 802 segundos, para as versões RL-SPRC2^C, RL-SPRC2-MB^R e RL-SPRC2-SV^C, respectivamente. Diante dessas informações, nota-se um acréscimo no tempo de execução das versões combinatórias ao considerar as relaxações apresentadas anteriormente. Ainda sim, pode-se assumir como baixo um aumento de aproximadamente 100 segundo na média, principalmente ao considerar a obtenção de LIs melhores ou iguais para todas as instâncias do conjunto.

				RL-SPRC2^C			RL-SPRC2-MB^R			RL-SPRC2-SV^C		
Instância	**|V|**	**|D|**	**|E|**	**LI**	**LS**	**Tempo**	**LI**	**LS**	**Tempo**	**LI**	**LS**	**Tempo**
washington-50-10-6	10	6	23	**1**	**1**	0	**1**	**1**	0	0	**1**	9
washington-50-20-11	20	11	92	**3**	**4**	34	2	**4**	82	2	**4**	32
washington-50-30-15	30	15	210	**2**	**3**	75	**2**	**3**	213	**2**	**3**	70
washington-50-40-23	40	23	415	**4**	**6**	786	0	**6**	457	0	**6**	158
washington-50-50-28	50	28	624	**6**	**13**	345	**6**	**13**	678	**6**	**13**	240
washington-50-60-35	60	35	906	**2**	**15**	435	**2**	**15**	1067	**2**	**15**	429
washington-50-70-37	70	37	1258	**7**	**16**	823	4	**16**	2290	4	**16**	790
washington-50-80-39	80	39	1796	**23**	**27**	1336	22	**27**	2649	22	**27**	860
washington-50-90-51	90	51	2109	**19**	**35**	1790	0	36	TLE	17	**35**	1708
washington-50-100-45	100	45	2208	**16**	**29**	TLE	13	**29**	TLE	13	**29**	1305
washington-75-10-4	10	4	16	**2**	**3**	9	0	**3**	16	0	**3**	9
washington-75-20-12	20	12	63	**2**	**4**	34	**2**	**4**	70	1	**4**	29
washington-75-30-16	30	16	159	**0**	**5**	265	**0**	**5**	215	**0**	**5**	67
washington-75-40-21	40	21	269	**4**	**6**	209	**4**	**6**	351	**4**	**6**	112
washington-75-50-30	50	30	438	**3**	**9**	375	**3**	10	777	**3**	10	249
washington-75-60-25	60	25	628	**2**	**11**	302	**2**	**11**	882	**2**	**11**	276
washington-75-70-42	70	42	850	**6**	**13**	856	5	14	1692	5	**13**	677
washington-75-80-48	80	48	1252	**2**	**10**	1292	**2**	**10**	2863	**2**	12	1186
washington-75-90-47	90	47	1517	**3**	**19**	1448	2	**19**	3252	2	**19**	1299
washington-75-100-52	100	52	1896	**10**	**27**	TLE	9	28	TLE	9	**27**	TLE
washington-100-10-6	10	6	9	**2**	**1**	0	1	**1**	0	**1**	2	8
washington-100-20-10	20	10	49	**0**	**2**	37	**0**	**2**	68	**0**	**2**	26
washington-100-30-12	30	12	103	1	**2**	90	**2**	**2**	0	1	**2**	48
washington-100-40-18	40	21	211	**1**	**5**	298	**1**	**5**	443	**1**	**5**	113
washington-100-50-27	50	27	298	**1**	10	TLE	**1**	**9**	814	**1**	10	230
washington-100-60-34	60	34	427	**7**	**10**	270	6	**10**	642	6	11	252
washington-100-70-39	70	39	602	**9**	**17**	663	**9**	**17**	1213	**9**	**17**	455
washington-100-80-32	80	32	882	**3**	**7**	TLE	**3**	8	1997	**3**	8	555
washington-100-90-43	90	43	1151	**2**	**12**	1216	**2**	**12**	2490	**2**	**12**	904
washington-100-100-43	100	43	1408	**1**	7	1513	**1**	9	TLE	**1**	**6**	1207
washington-200-125-55	125	55	1224	**9**	**32**	TLE	**9**	33	3051	**9**	**32**	1158
washington-200-150-61	150	61	2234	**7**	39	TLE	6	38	TLE	**7**	**32**	TLE
washington-200-175-74	175	74	3024	**18**	43	TLE	**18**	**40**	TLE	**18**	**40**	TLE
washington-200-200-114	200	114	3645	21	**71**	TLE	**23**	72	TLE	21	**70**	TLE
washington-200-225-135	225	135	4464	**2**	66	TLE	**2**	56	TLE	**2**	**49**	TLE
washington-200-250-109	250	109	6403	**6**	72	TLE	**6**	74	TLE	**6**	**45**	TLE
washington-200-275-146	275	146	7195	**11**	103	TLE	-	-	TLE	**11**	**90**	TLE
washington-200-300-136	300	136	8709	**10**	100	TLE	-	-	TLE	**10**	**83**	TLE
washington-200-325-170	325	170	9260	**13**	131	TLE	-	-	TLE	**13**	**114**	TLE
washington-200-350-150	350	150	12218	**4**	95	TLE	-	-	TLE	**4**	**71**	TLE

Tabela 5.10: Resultados da Relaxação RL-SPRC2 com Respectivas Variações

Considerando os LIs das diferentes versões da relaxação RL-SPRC2, as implementações RL-SPRC2^C e RL-SPRC2-SV^C obtiveram melhores resultados para o maior número de instâncias, dado que para apenas 2 casos o LI retornado pela relaxação RL-SPRC2-MB^R foi melhor que os demais. Aplicando o teste de Wilcoxon nos resultados de RL-SPRC2^C e RL-SPRC2-SV^C foi detectada DES. Assim, ao considerar a contagem de vitórias, nota-se que a relaxação RL-SPRC2^C teve resultados melhores ou iguais as demais versões para 38, das 40 instâncias do conjunto.

Para os LSs, a relaxação RL-SPRC2-SV^C apresentou melhor desempenho para um maior número de instâncias do conjunto, obtendo resultados melhores ou iguais as demais variações em 35, das 40 instâncias. Essa melhora está associada com a demanda menor de tempo para computar os SPRCs para cada terminal do grafo, dado que não existe possibilidade de arcos com coeficiente negativo. O argumento é análogo ao mostrado

anteriormente, quanto mais rápido os subproblemas são resolvidos, mais iterações do método de subgradiente podem ser executadas.

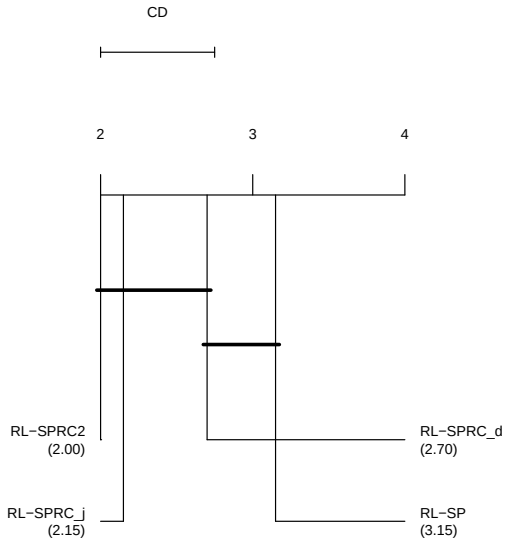
5.3.5 Análise geral

Por fim, considerando os resultados de todas as relaxações lagrangianas apresentadas, é possível sumarizar as seguintes análises:

- A implementação das RLs utilizando algoritmos combinatórios, em maioria, apresentam limitantes inferiores e superiores de melhor qualidade, principalmente pelo fato de executarem mais iterações do método de subgradiente.
- A presença de multiplicadores que possam gerar coeficientes negativos para as variáveis f, quando não inviabilizam a utilização, aumentam o tempo de execução das versões combinatórias.
- Inicializar o conjunto de multiplicadores de Lagrange com o valor da solução de barreiras ótima forneceu o melhor resultado conhecido, considerando LIs, para 3 instâncias da relaxação RL-SPRC2. Nas Demais instâncias o valor de LI obtidos foi menor ou igual as versões com os multiplicadores inicializados em zero.
- Para todas as instâncias, os limitantes inferiores obtidos pela relaxação RL-SPRC2 foram maiores ou iguais os limitantes das outras relaxações. Além de mais, não houve acréscimo significativo no tempo médio de execução da relaxação RL-SPRC2, dado que a complexidade do PPL é maior. Diante dessas vantagens, é possível considerá-la como a melhor RL no quesito de limitante inferior.
- Considerando os limitantes superiores, independente da RL, sempre se mostrou mais vantajoso resolver a versão da relaxação desconsiderando os multiplicadores de variação de *delay*. Tais resultados se devem ao fato da redução de tempo de computação do problema de SPRC em grafos cujos arcos não tem custos negativos, ocasionando mais iterações do método de subgradiente.

Para avaliar a qualidade dos LSs das relaxações RL-SP, RL-SPRC$_\lambda$, RL-SPRC$_\xi$ e RL-SPRC2, considera-se o melhor valor retornado para cada instância, dentre todas as variações da mesma relaxação. O resultado do teste de Iman-Davenport rejeitou a hipótese nula, ou seja, indicou a existência de DES entre as amostras. Prosseguindo assim para a aplicação do teste de Nemenyi, agrupa-se as relaxações RL-SPRC$_\lambda$, RL-SPRC$_\xi$ e RL-SPRC2 com menor *rank* médio, o que indica que eles são estatisticamente equivalentes. Esses dados estão representados na Figura 5.1, que também contém o valor computado pelos testes de Iman-Davenport (ID), o Valor Crítico (VC) e a Diferença Crítica (DC).

Por serem estatisticamente equivalentes, no procedimento para selecionar qual dentre as três relaxações é considerada melhor, pode-se analisar o número de vitórias para cada relaxação, como apresentado na Tabela 5.11. A primeira linha e coluna referenciam as relaxações, cada posição da tabela representa o número de vitórias da abordagem referente a linha sobre a abordagem na coluna.



(a) ID = 7.81, VC = 2.68, DC = 0.74

Figura 5.1: Teste de Nemenyi para as diferentes RLs

Relaxações	RL-SP	RL-SPRC$_\lambda$	RL-SPRC$_\xi$	RL-SPRC2
RL-SP	-	04	00	02
RL-SPRC$_\lambda$	15	-	04	01
RL-SPRC$_\xi$	22	14	-	05
RL-SPRC2	21	18	09	-

Tabela 5.11: Contagem de vitórias entre as RLs

Pela contagem de vitórias, observa-se que a relaxação RL-SPRC2 teve desempenho superior as outras duas em uma quantidade maior de instâncias. Enquanto a relaxação RL-SP obteve os piores *ranks* médios e o menor número de vitórias em comparação com demais relaxações. Diante dessas características, podemos considerar que a qualidade dos LSs obtidos com a aplicação da heurística de busca local está atrelada diretamente com a qualidade dos caminhos gerados na resolução do PPL, de modo que o pior *rank* médio está associado com a relaxação cuja complexidade computacional do PPL é a menor, por mais que essa simplicidade permita um maior número de iterações do método de subgradiente dentro do tempo máximo de execução. Em contrapartida, a relaxação contendo maior número de vitórias e o melhor *rank* médio, para esse conjunto de instâncias, se trata da RL-SPRC2, na qual o PPL tem a maior complexidade computacional dentre as relaxações propostas.

5.4 BRKGA

Na implementação dos decodificadores para o BRKGA, foi utilizada a biblioteca Boost C++ na versão 1.73 para computar a AGM. O tempo máximo para resolução de cada instância foi pré-definido com valor de 1800 segundos (30 minutos). Os valores de parâmetros utilizados no BRKGA foram empiricamente validados e consistem em:

- **População:** são geradas três populações independentes contendo 500 indivíduos cada uma. O conjunto de elite é formado por 10% da população. A cada iteração, 5% dos indivíduos da população são substituídos por mutantes;
- ***Crossover*:** um novo indivíduo é gerado a partir do cruzamento de dois indivíduos da geração atual, um do conjunto elite e um do conjunto não elite. Sendo 70% de probabilidade do filho herdar o alelo da pai do conjunto de elite.
- **Gerações:** o número máximo de gerações foi limitada em 1000, efetuando a troca dos 2 melhores indivíduos a cada 100 gerações.

As versões do BRKGA nesta seção são diferenciadas principalmente pela função de aptidão utilizada (F1, F2 ou F3), mas são consideradas características adicionais ao decodificador como a adição do procedimento de Busca Local (BL) ou a alteração no procedimento de computar o valor das chaves aleatórias para o vetor de entrada, como ela se baseia na frequência dos arcos da relaxação lagrangiana, a referencia utilizada é "-RL".

A Tabela 5.12 contém os resultados de 5 variações do BRKGA, a primeira com função de aptidão F1 ("F1") e a função de aptidão F2 ("F2"). A função de aptidão F3 é utilizada nas 3 outras variações, respectivamente ("F3"), ("F3-BL") e ("F3-RL"). As primeiras 4 colunas da tabela apresentam, respectivamente, o nome da instância, quantidade de nós do grafo ("|V|"), número de nós terminais ("|D|") e a quantidade de arcos ("|A|"). Para cada algoritmo são dispostas duas colunas, "LS" contendo o número de terminais atendidos na solução representada pelo melhor indivíduo da população ao final da execução. A coluna "Tempo" apresenta o tempo de execução em segundos. O valor TLE representa que a execução atingiu o Tempo Limite de Execução, valores em **negrito** representam os melhores LSs dentre as versões do BRKGA para a instância. Por fim, as três últimas linhas da tabela apresentam contagens dos limites para cada algoritmo, sendo a linha "**Melhor**" o número de instâncias nas quais o algoritmo obteve a melhor solução e que nenhuma outra variação atingiu o mesmo valor, a linha "**Igual**" contém o número de instâncias tais quais o limitante foi igual ao melhor obtido entre as versões e a linha "**Pior**" contabiliza o total de casos onde a solução retornada pelo decodificador foi inferior ao melhor limitante para a instância.

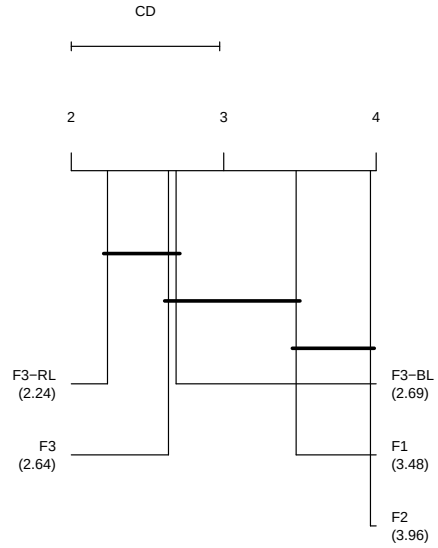
				F1		F2		F3		F3-BL		F3-RL	
Instância	**|V|**	**|D|**	**|E|**	**LS**	**Tempo**	**LS**	**Tempo**	**LS**	**Tempo**	**LS**	**Tempo**	**LS**	**Tempo**
washington-50-10-6	10	6	23	**1**	105	**1**	108	**1**	115	**1**	138	**1**	191
washington-50-20-11	20	11	92	**4**	328	**4**	339	**4**	354	**4**	399	**4**	587
washington-50-30-15	30	15	210	**3**	697	**3**	829	**3**	829	**3**	1.002	**3**	1347
washington-50-40-23	40	23	415	**6**	1.453	7	TLE	**6**	1.688	**6**	1.651	**6**	1683
washington-50-50-28	50	28	624	**13**	TLE	**13**	TLE	**13**	TLE	**13**	TLE	**13**	TLE
washington-50-60-35	60	35	906	**17**	TLE	19	TLE	**17**	TLE	18	TLE	**17**	TLE
washington-50-70-37	70	37	1258	**16**	TLE	18	TLE	**16**	TLE	17	TLE	**16**	TLE
washington-50-80-39	80	39	1796	**29**	TLE	**29**	TLE	**29**	TLE	**29**	TLE	**29**	TLE
washington-50-90-51	90	51	2109	**36**	TLE	**36**	TLE	**36**	TLE	**36**	TLE	**36**	TLE
washington-50-100-45	100	45	2208	35	TLE	35	TLE	**34**	TLE	**34**	TLE	**34**	TLE
washington-75-10-4	10	4	16	**3**	144	**3**	147	**3**	100	**3**	148	**3**	152
washington-75-20-12	20	12	63	5	413	**4**	388	**4**	338	**4**	513	**4**	468
washington-75-30-16	30	16	159	**5**	935	**5**	794	**5**	742	**5**	897	**5**	740
washington-75-40-21	40	21	269	**5**	1.127	8	1.172	6	1.228	6	1.351	**5**	1183
washington-75-50-30	50	30	438	**11**	TLE	**11**	1.707	**11**	TLE	**11**	TLE	**11**	TLE
washington-75-60-25	60	25	628	**11**	TLE	12	TLE	**11**	TLE	**11**	TLE	**11**	TLE
washington-75-70-42	70	42	850	23	TLE	16	TLE	**13**	TLE	**13**	TLE	**13**	TLE
washington-75-80-48	80	48	1252	29	TLE	26	TLE	13	TLE	**11**	TLE	13	TLE
washington-75-90-47	90	47	1517	**19**	TLE	**19**	TLE	**19**	TLE	**19**	TLE	**19**	TLE
washington-75-100-52	100	52	1896	28	TLE	33	TLE	27	TLE	28	TLE	**26**	TLE
washington-100-10-6	10	6	9	**2**	94	**2**	95	**2**	104	**2**	89	**2**	105
washington-100-20-10	20	10	49	**2**	272	**2**	359	**2**	379	**2**	285	**2**	334
washington-100-30-12	30	12	103	**2**	401	**2**	569	**2**	573	**2**	444	**2**	433
washington-100-40-18	40	21	211	**4**	833	**4**	TLE	**4**	1.004	**4**	1.337	**4**	1278
washington-100-50-27	50	27	298	**9**	1.147	**9**	TLE	**9**	1.666	**9**	1.485	**9**	TLE
washington-100-60-34	60	34	427	**10**	1.620	11	TLE	**10**	TLE	**10**	TLE	**10**	TLE
washington-100-70-39	70	39	602	**24**	TLE	**24**	TLE	**24**	TLE	**24**	TLE	**24**	TLE
washington-100-80-32	80	32	882	18	TLE	7	TLE	**6**	TLE	**6**	TLE	**6**	TLE
washington-100-90-43	90	43	1151	32	TLE	20	TLE	**11**	TLE	13	TLE	**11**	TLE
washington-100-100-43	100	43	1408	14	TLE	13	TLE	**12**	TLE	**12**	TLE	**12**	TLE
washington-200-125-55	125	55	1224	42	TLE	42	TLE	**32**	TLE	33	TLE	33	TLE
washington-200-150-61	150	61	2234	41	TLE	44	TLE	37	TLE	37	TLE	**35**	TLE
washington-200-175-74	175	74	3024	39	TLE	42	TLE	40	TLE	**38**	TLE	39	TLE
washington-200-200-114	200	114	3645	105	TLE	105	TLE	88	TLE	89	TLE	**75**	TLE
washington-200-225-135	225	135	4464	79	TLE	87	TLE	65	TLE	73	TLE	**62**	TLE
washington-200-250-109	250	109	6403	76	TLE	83	TLE	61	TLE	61	TLE	**55**	TLE
washington-200-275-146	275	146	7195	109	TLE	116	TLE	104	TLE	103	TLE	**101**	TLE
washington-200-300-136	300	136	8709	116	TLE	116	TLE	102	TLE	100	TLE	**99**	TLE
washington-200-325-170	325	170	9260	151	TLE	154	TLE	135	TLE	130	TLE	**128**	TLE
washington-200-350-150	350	150	12218	124	TLE	127	TLE	98	TLE	97	TLE	**96**	TLE
Melhor				0		0		1		2		9	
Igual				22		17		27		24		28	
Pior				18		23		12		14		3	

Tabela 5.12: Resultados das Versões do BRKGA

Considerando os resultados da Tabela 5.12, nota-se um consumo de tempo relativamente alto dos decodificadores independente de função de aptidão, dado que quase todas as instâncias contendo 50 ou mais nós, não foi possível executar o BRKGA por 1000 gerações antes de atingir do tempo limite de 30 minutos. A quantidade de TLEs de cada algoritmo foi bem semelhante, sendo BRKGA-F1 a versão com menos TLEs, totalizando 26. Em contrapartida, a versão BRKGA-F2 tem o maior número de instâncias onde o tempo limite foi alcançado, totalizando 29 casos. O tempo médio nas instâncias em que os BRKGAs executaram por 1000 gerações, se manteve entre 10 e 12 minutos, para todas as versões.

A aplicação do teste de Iman-Davenport indicou a existência de DES entre as amostras. Deste modo, ao aplicar o teste de Nemenyi o resultado agrupou as versões F3, F3-BL e F3-RL com os menores valores de *rank* médio, o que indica equivalência estatística. Esses dados estão representados na Figura 5.2, que também contém o valor computado pelos testes de Iman-Davenport (ID), o Valor Crítico (VC) e a Diferença Crítica (DC).

Entretanto, ao notar a diferença de *rank* médio entre os BRKGAs F3-RL e F3, optou-



(a) ID = 9.52, VC = 2.42, DC = 0.97

Figura 5.2: Teste de Nemenyi para os diferentes decodificadores

se pela aplicação do teste estatístico de Wilcoxon para essas duas variações, motivado pelo fato desse teste estatístico apresentar resultados mais confiáveis tratando-se apenas de duas amostras. O resultado calculado pelo teste de Wilcoxon foi -5.47, o que significa que existe DES entre as abordagens. Por fim, além da diferença estatística a contagem de vitórias da versão F3-RL foi maior, possibilitando afirmar, com forte propriedade, que essa versão pode ser considerado melhor em comparação com as demais variações do BRKGA desenvolvidas.

Considerando a capacidade de melhora das soluções, é possível observar que a versão BRKGA-F2, que utiliza a abordagem de soma das penalizações, foi a função de aptidão que apresentou os piores resultados dentre as 5 abordagens comparadas. Dentre as versões do BRKGA que obtiveram os melhores resultados, mais especificamente as variações da função F3, nenhuma dominou por completo as demais abordagens, ou seja, não houve um algoritmo cujos resultados foram os melhores em todas as 40 instâncias.

A utilização das busca local não apresentou ganhos significativos, obtendo apenas 6 soluções melhores que a versão BRKGA-F3 sem utilizar busca local, enquanto gerou resultados inferiores para outras 7 instâncias. Já a versão do decodificador F3-RL apresentou LSs com a maior qualidade, gerando as melhores soluções para 37 instâncias. Para as outras 3 instâncias em que o melhor valor foi obtido exclusivamente por outra versão, a diferença entre resultados não foi maior que 2 terminais. Tais resultados reafirmam a melhora de qualidade das soluções com base na utilização da informação de frequência dos arcos selecionados pelo PPL na relaxação RL-SPRC2^C.

5.5 Todos os Limitantes Inferiores

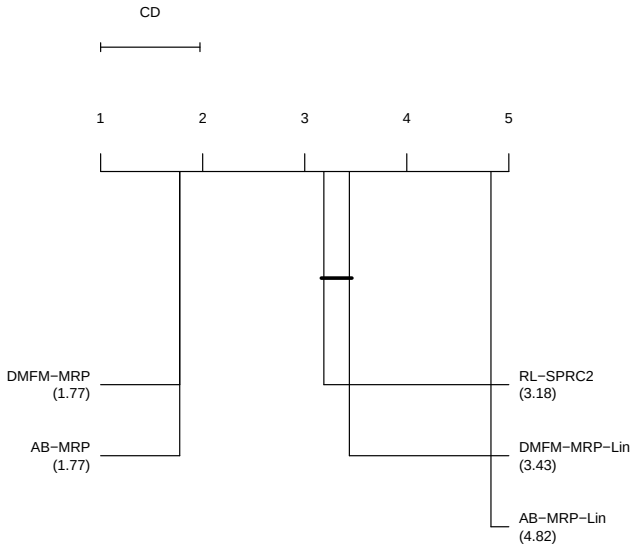
Esta seção apresenta a comparação de todos LIs obtidos pelas abordagens propostas nesse trabalho. Para tal, serão considerados os melhores LIs obtidos na árvore de enumeração dos modelos DMFM-MRP e AB-MRP, juntamente dos valores retornados por suas respectivas relaxações lineares e os melhores LIs das RLs.

A Tabela 5.13 contém os LIs das melhores metodologias utilizadas nesta dissertação. As primeiras quatro colunas contém, respectivamente, o nome da instância, o número de nós do grafo ("|V|"), a quantidade de nós terminais ("|D|") e o número de arcos ("|A|"). As colunas subsequente dividem-se entre as diferentes abordagens, indicando o valor de LI obtido ("LI") e o tempo de execução em segundos ("Tempo"). As colunas "DMFM-MRP" e "AB-MRP" apresentam, respectivamente, os melhores limitantes retornados pela árvore de enumeração do resolvedor de PLI. As colunas "DMFM-MRP$_{lin}$" e "AB-MRP$_{lin}$" contém as respectivas relaxações lineares dos modelos, ou seja, o valor obtido ao resolver o problema alterando o domínio de todas as variáveis para reais. A última coluna dispõe dos melhores resultados da relaxação RL-SPRC2, dado que esta RL detém os melhores LIs dentre todas as variações.

				DMFM-MRP		**AB-MRP**		**DMFM-MRP$_{lin}$**		**AB-MRP$_{lin}$**		**RL-SPRC2**	
Instância	**|V|**	**|D|**	**|A|**	**LI**	**Tempo**	**LI**	**Tempo**	**LI**	**Tempo**	**LI**	**Tempo**	**LI**	**Tempo**
washington-50-10-6	10	6	46	**1**	0,0	**1**	0,0	**1**	0,0	0	0,0	**1**	0
washington-50-20-11	20	11	184	**4**	0,0	**4**	0,0	3	0,1	0	0,0	3	34
washington-50-30-15	30	15	420	**3**	0,0	**3**	0,0	2	0,1	0	0,0	2	75
washington-50-40-23	40	23	830	**6**	3,0	**6**	4,0	1	0,6	0	0,0	4	786
washington-50-50-28	50	28	1248	**13**	3,0	**13**	1,0	7	1,0	0	0,0	6	345
washington-50-60-35	60	35	1812	**15**	4,0	**15**	3,0	3	2,7	0	0,0	2	435
washington-50-70-37	70	37	2516	**16**	41,0	**16**	26,0	4	4,9	0	0,0	7	823
washington-50-80-39	80	39	3592	**26**	25,0	**26**	584,0	23	5,1	0	0,0	23	1.336
washington-50-90-51	90	51	4218	**35**	285,0	**35**	355,0	18	13,4	0	0,0	19	1.790
washington-50-100-45	100	45	4416	**28**	71,0	**28**	262,0	12	11,8	0	0,0	16	TLE
washington-75-10-4	10	4	32	**3**	0,0	**3**	0,0	1	0,0	0	0,0	2	9
washington-75-20-12	20	12	126	**4**	0,0	**4**	0,0	2	0,1	0	0,0	2	34
washington-75-30-16	30	16	318	**5**	6,0	**5**	3,0	1	0,3	0	0,0	0	265
washington-75-40-21	40	21	538	**5**	1,0	**5**	3,0	**5**	0,5	0	0,0	4	209
washington-75-50-30	50	30	876	**9**	579,0	**9**	2175,0	3	1,0	0	0,0	3	375
washington-75-60-25	60	25	1256	**11**	4,0	**11**	2,0	2	0,7	0	0,0	2	302
washington-75-70-42	70	42	1700	**12**	19,0	**12**	136,0	6	5,3	0	0,0	6	856
washington-75-80-48	80	48	2504	**9**	42,0	**9**	148,0	2	11,1	0	0,0	2	1.292
washington-75-90-47	90	47	3034	**19**	89,0	10	TLE	3	10,7	0	0,0	3	1.448
washington-75-100-52	100	52	3792	**14**	TLE	13	TLE	9	24,4	0	0,0	10	TLE
washington-100-10-6	10	6	18	**2**	0,0	**2**	0,0	**2**	0,0	0	0,0	**2**	0
washington-100-20-10	20	10	98	**2**	0,0	**2**	0,0	1	0,0	0	0,0	0	37
washington-100-30-12	30	12	206	**2**	16,0	**2**	0,0	1	0,1	1	0,0	**2**	90
washington-100-40-18	40	21	422	**4**	22,0	4	5,0	1	0,5	0	0,0	1	298
washington-100-50-27	50	27	596	5	TLE	**9**	121,0	1	2,7	0	0,0	1	0
washington-100-60-34	60	34	854	**10**	3,0	**10**	94,0	7	1,2	0	0,0	7	270
washington-100-70-39	70	39	1204	**17**	151,0	**17**	183,0	9	2,6	0	0,0	9	663
washington-100-80-32	80	32	1764	**5**	11,0	**5**	23,0	4	3,8	0	0,0	3	TLE
washington-100-90-43	90	43	2302	**11**	107,0	**11**	160,0	3	8,6	0	0,0	2	1.216
washington-100-100-43	100	43	2816	**4**	146,0	**4**	157,0	2	17,3	0	0,0	1	1.513
washington-200-125-55	125	55	2448	**29**	338,0	27	TLE	10	13,4	0	0,0	9	TLE
washington-200-150-61	150	61	4468	**10**	TLE	2	TLE	7	187,4	0	0,1	7	TLE
washington-200-175-74	175	74	6048	**20**	TLE	7	TLE	19	2225,4	0	0,1	18	TLE
washington-200-200-114	200	114	7290	**32**	TLE	8	TLE	24	730,3	0	0,2	23	TLE
washington-200-225-135	225	135	8928	2	TLE	**8**	TLE	0	TLE	0	0,2	2	TLE
washington-200-250-109	250	109	12806	6	TLE	**11**	TLE	0	TLE	0	0,2	6	TLE
washington-200-275-146	275	146	14390	**11**	TLE	**11**	TLE	0	TLE	0	0,2	**11**	TLE
washington-200-300-136	300	136	17418	-	TLE	2	TLE	0	TLE	1	0,3	**10**	TLE
washington-200-325-170	325	170	18520	-	TLE	**16**	TLE	0	TLE	0	0,4	13	TLE
washington-200-350-150	350	150	24436	-	TLE	**4**	TLE	0	TLE	0	0,4	**4**	TLE

Tabela 5.13: Comparação dos Melhores LIs Entre as Metodologias

A aplicação do teste de Iman-Davenport nos valores apresentados na tabela 5.13, indicou a presença de DES entre as amostras. Assim, aplicando o teste de Nemenyi agruparam-se, com menor *rank* médio, os resultados dos modelos DMFM-MRP e AB-MRP, o que indica equivalência estatística. Esses dados estão representados na Figura 5.3, que também contém o valor computado pelos testes de Iman-Davenport (ID), o Valor Crítico (VC) e a Diferença Crítica (DC). Até mesmo a contagem de vitórias em os modelos foi igual, cada um contabilizou 6 vitórias, enquanto os LIs foram iguais para as outras 28 instâncias. Ainda assim, os resultados dos modelos não dominaram as demais metodologias para todas as instâncias, ou seja, alguma metodologia apresentou pelo menos um LI melhor que ambos os modelos.



(a) ID = 74.32, VC = 2.42, DC = 0.97

Figura 5.3: Teste de Nemenyi para os diferentes Limitantes Inferiores

Analisando as relaxações lineares e a RL, tornou-se evidente a falta de qualidade dos limitantes obtidos pela relaxação linear do modelo AB-MRP. De modo que o valor de função objetivo retornado em 38 instâncias foi igual à 0, nas outras duas, o resultado foi 1. Já a relaxação linear do modelo DMFM-MRP apresentou qualidade superior, sendo estatisticamente equivalente a relaxação RL-SPRC2. Entretanto, ao considerar a contagem de vitórias entre essas duas abordagens, pode-se assumir por pouco que RL-SPRC2 foi melhor. Dado que RL-SPRC2 contabilizou vitória em 13 instâncias e DMFM-MRP$_{lin}$ em apenas 11. Com base nos resultados e análises apresentados, notou-se o ótimo desempenho dos modelos matemáticos, de modo que eles detém os melhores LIs para 39 instâncias, enquanto que na instância restante o melhor valor foi computado pela RL-SPRC2.

5.6 Todos os Limitantes Superiores

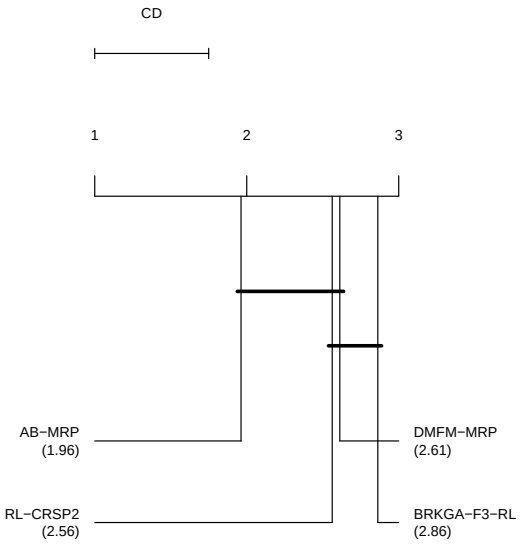
Esta seção apresenta a comparação de todos os LSs obtidos pelas diferentes abordagens propostas nesse trabalho. Para tal, serão considerados os melhores LSs dos modelos DMFM-MRP, AB-MRP, a melhor versão do BRKGA e da RL.

A Tabela 5.14 os LSs das melhores metodologias utilizadas nessa dissertação. As primeiras quatro colunas contém, respectivamente, o nome da instância, o número de nós do grafo ("|V|"), a quantidade de nós terminais ("|D|") e o número de arcos ("|A|"). As colunas subsequentes dividem-se entre as diferentes abordagens, indicando o valor de LS ("LS") obtido e o tempo de execução em segundos ("Tempo"). As colunas "DMFM-MRP" e "AB-MRP" contém, respectivamente, os melhores LS retornados pelo resolvedor de PLI para cada modelo. A coluna "RL-SPRC2" apresenta os resultados associados com a RL que foi classificada com os melhores resultados. Por fim, a coluna "BRKGA-F3-RL" dispõe os LSs retornados pela melhor versão do BRKGA.

				DMFM-MRP		**AB-MRP**		**RL-CRSP2**		**BRKGA-F3-RL**	
Instância	**|V|**	**|D|**	**|A|**	**LS**	**Tempo**	**LS**	**Tempo**	**LS**	**Tempo**	**LS**	**Tempo**
washington-50-10-6	11	6	46	**1**	0	**1**	0	**1**	9	**1**	191
washington-50-20-11	21	11	184	**4**	0	**4**	0	**4**	32	**4**	587
washington-50-30-15	31	15	420	**3**	0	**3**	0	**3**	70	**3**	1.347
washington-50-40-23	41	23	830	**6**	3	**6**	4	**6**	158	**6**	1.683
washington-50-50-28	51	28	1248	**13**	3	**13**	1	**13**	240	**13**	TLE
washington-50-60-35	61	35	1812	**15**	4	**15**	3	**15**	429	17	TLE
washington-50-70-37	71	37	2516	**16**	41	**16**	26	**16**	790	**16**	TLE
washington-50-80-39	81	39	3592	**26**	25	**26**	584	27	860	29	TLE
washington-50-90-51	91	51	4218	**35**	285	**35**	355	**35**	1.708	36	TLE
washington-50-100-45	101	45	4416	**28**	71	**28**	262	29	1.305	34	TLE
washington-75-10-4	11	4	32	**3**	0	**3**	0	**3**	9	**3**	152
washington-75-20-12	21	12	126	**4**	0	**4**	0	**4**	29	**4**	468
washington-75-30-16	31	16	318	**5**	6	**5**	3	**5**	67	**5**	740
washington-75-40-21	41	21	538	**5**	1	**5**	3	6	112	**5**	1.183
washington-75-50-30	51	30	876	**9**	579	**9**	2.175	**9**	249	11	TLE
washington-75-60-25	61	25	1256	**11**	4	**11**	2	**11**	276	**11**	TLE
washington-75-70-42	71	42	1700	**12**	19	**12**	136	13	677	13	TLE
washington-75-80-48	81	48	2504	**9**	42	**9**	148	10	1.186	13	TLE
washington-75-90-47	91	47	3034	**19**	89	**19**	TLE	**19**	1.299	**19**	TLE
washington-75-100-52	101	52	3792	52	TLE	**20**	TLE	27	TLE	26	TLE
washington-100-10-6	11	6	18	**2**	0	**2**	0	1	8	**2**	105
washington-100-20-10	21	10	98	**2**	0	**2**	0	**2**	26	**2**	334
washington-100-30-12	31	12	206	**2**	16	**2**	0	**2**	48	**2**	433
washington-100-40-18	41	21	422	**4**	22	**4**	5	5	113	**4**	1.278
washington-100-50-27	51	27	596	**9**	TLE	**9**	121	10	230	**9**	TLE
washington-100-60-34	61	34	854	**10**	3	**10**	94	**10**	252	**10**	TLE
washington-100-70-39	71	39	1204	**17**	151	**17**	183	**17**	455	24	TLE
washington-100-80-32	81	32	1764	**5**	11	**5**	23	7	555	6	TLE
washington-100-90-43	91	43	2302	**11**	107	**11**	160	12	904	**11**	TLE
washington-100-100-43	101	43	2816	**4**	146	**4**	157	6	1.207	12	TLE
washington-200-125-55	126	55	2448	**29**	338	**29**	TLE	32	1.158	33	TLE
washington-200-150-61	151	61	4468	61	TLE	36	TLE	**32**	TLE	35	TLE
washington-200-175-74	176	74	6048	74	TLE	**37**	TLE	40	TLE	39	TLE
washington-200-200-114	201	114	7290	114	TLE	105	TLE	**70**	TLE	75	TLE
washington-200-225-135	226	135	8928	-	TLE	**15**	TLE	49	TLE	62	TLE
washington-200-250-109	251	109	12806	-	TLE	**19**	TLE	45	TLE	55	TLE
washington-200-275-146	276	146	14390	-	TLE	**71**	TLE	90	TLE	101	TLE
washington-200-300-136	301	136	17418	-	TLE	**61**	TLE	83	TLE	99	TLE
washington-200-325-170	326	170	18520	-	TLE	**77**	TLE	114	TLE	128	TLE
washington-200-350-150	351	150	24436	-	TLE	**45**	TLE	71	TLE	96	TLE

Tabela 5.14: Comparação dos Melhores LSs Entre as Metodologias

A aplicação do teste de Iman-Davenport nos valores de limitante apresentados na tabela 5.14, indicaram DES entre as amostras. Assim, agrupou-se com base no teste de Nemenyi, as abordagens AB-MRP, RL-SPRC2 e DMFM-MRP com os menores *ranks* médios. Esses dados estão representados na Figura 5.4, que também contém o valor computado pelos testes de Iman-Davenport (ID), o Valor Crítico (VC) e a Diferença Crítica (DC). Entretanto, diante da diferença de *rank* médio entre o modelo AB-MRP e a relaxação RL-SPRC2, optou-se pela aplicação do teste estatístico de Wilcoxon, que indicou a existência de DES entre as duas amostras. Com isso, pode-se considerar que o modelo AB-MRP consiste na melhor abordagem para obtenção de LSs. Entretanto, não houve domínio total sobre todas as outras abordagens, ou seja, não houve um algoritmo cujos resultados foram os melhores em todas as 40 instâncias.



(a) ID = 3.73, VC = 2.68, DC = 0.74

Figura 5.4: Teste de Nemenyi para os diferentes Limitantes Superiores

Como citado anteriormente, o modelo AB-MRP obteve o melhor desempenho dentre as abordagens, garantindo LSs melhores ou iguais as demais metodologias para 37 instâncias do conjunto. Mais especificamente, em 8 instâncias o valor obtido foi melhor dentre todas os algoritmos. Considerando o modelo DMFM-MRP, cujo valor de *rank* médio está bem próximo ao *rank* da relaxação RL-SPRC2, observa-se que a contagem de vitórias entre eles foi idêntica, 11 casos para cada um. Por fim, temos os resultados da versão do BRKGA F3-RL, que obteve limitantes iguais aos melhores obtidos pelas demais abordagens em 18 instâncias, mas que, ainda assim, manteve-se no pior *rank* médio.

Capítulo 6

Considerações Finais

Os objetivos principais deste trabalho consistiram na definição e realização de um estudo computacional do MS-MRP-QoS através do desenvolvimentos de um conjunto de 40 instâncias baseadas em simulação de tráfego e de rede, técnicas de solução exata utilizando PLI e PLIM, e métodos heurísticos capazes de validar limitantes inferiores e superiores.

Considerando os métodos exatos, foram adaptados pré-processamentos, apresentados por Ribeiro et al. [34], para fixação de variáveis. Desenvolveram-se dois modelos matemáticos, DMFM-MRP e AB-MRP. Ambos se mostraram altamente eficientes, resolvendo de maneira ótima algumas instâncias cujos grafos contém até 125 nós e gerando soluções viáveis para todas as 40 instâncias do conjunto de teste. Ainda, o DMFM-MRP serviu de base para o desenvolvimento de um conjunto contendo quatro diferentes Relaxações Lagrangianas (RL). Tais relaxações apresentaram bons resultados com baixo consumo de tempo, fato que implica a possibilidade de utilização para instâncias cada vez maiores.

Em relação aos método heurísticos, foi desenvolvida uma heurística de busca local em arborescências, tal procedimento aplicou-se em conjunto ao algoritmo de resolução das RLs, objetivando a geração e aperfeiçoamento de soluções viáveis. Além disso, foram desenvolvidas quatro variações da meta-heurística BRKGA, de modo que três delas variam a função de aptidão do decodificador e a última abordagem extrai a frequência de arcos durante a resolução da RL e utiliza essa informação viés na geração das chaves aleatórias.

Ao final, todos os algoritmos foram comparados através de testes estatísticos não paramétricos. Como não existem resultados para o MS-MRP-QoS presentes na literatura até o momento, destaca-se a necessidade da comparação de resultados entre as diferentes metodologias desenvolvidas. De tal modo é possível validar, utilizando múltiplas abordagens, a qualidade dos limitantes inferiores e superiores. Assim, ao considerar o conjunto de todas as metodologias desenvolvidas, destaca-se o modelo AB-MRP como a melhor abordagem para obtenção de LIs e LSs. O modelo DMFM-MRP que produz bons LIs, principalmente nas relaxações resolvidas durante a arvore de enumeração do resolvedor de PLI. As RLs geram bons limitantes inferiores e superiores, não sendo melhores que os modelos para todos os casos, mas o fato de existirem versões combinatórias eficientes, permite a possibilidade de resolução de instâncias com grafos cada vez maiores. Por fim, mesmo testando diversas funções de aptidão e detectando melhoras com a alteração do processo de geração de chaves aleatórias, não foi possível gerar LSs com o BRKGA que estejam acima das demais abordagens desenvolvidas.

Como trabalhos futuros, pode-se destacar o possibilidade de tornar o modelo AB-MRP mais forte, com a utilização de um algoritmo de plano de corte que aplica um conjunto exponencial de restrições para garantir conectividade entre nós. Por ser de aplicação geral em arborescências, a heurística de busca local desenvolvida pode ser aplicada em outras meta-heurísticas. Ainda, pode-se expandir o conjunto de instâncias, tratando de simulações cada vez maiores em quantidade de veículos ou até mesmo considerar dados que se baseiam em cenários reais.

Por fim, as técnicas desenvolvidas neste trabalho podem ser aplicadas em outras variantes do MS-MRP-QoS como MRP-QoS considerando as mesmas métricas de QoS ou adicionando mais restrições ao conjunto, tais como o número de saltos e a estimativa de duração do enlace. Ainda é possível gerar resultados para uma nova variantes que combina o MS-MRP-QoS com o MRP-QoS, ou seja, o objetivo consiste em decidir quais terminais serão atendidos e ao mesmo tempo computar o caminho de menor custo no atendimento desse terminal, sujeito à um conjunto maior de métricas.

Referências Bibliográficas

[1] Boost c++ libraries. Disponível em `https://www.boost.org/`. Acessado 29 Janeiro 2020.

[2] Exemplo de funcionamento de uma vanet. `http://spiroprojects.com/blog/cat-view-more.php?blogname=What-is-Vehicular-Ad-hoc-Network-(VANET)?&id=29`. Acessado: 30/01/2021.

[3] James Bean. Genetics and random keys for sequencing and optimization. *ORSA Journal of Computing*, 6, 2006.

[4] John E. Beasley. Lagrangian relaxation. In Colin R. Reeves, editor, *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*, chapter 6, pages 243–303. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1993.

[5] Rajashekhar C. Biradar and Sunilkumar S. Manvi. Review of multicast routing mechanisms in mobile ad hoc networks. *Journal of Network and Computer Applications*, 35(1):221–239, 2012.

[6] Salim Bitam and Abdelhamid Mellouk. Bee life-based multi constraints multicast routing optimization for vehicular ad hoc networks. *Journal of Network and Computer Applications*, 36(3):981–991, 2013.

[7] Salim Bitam, Abdelhamid Mellouk, and Sherali Zeadally. Hybr: A hybrid bio-inspired bee swarm routing protocol for safety applications in vehicular ad hoc networks (vanets). *Journal of Systems Architecture*, 59(10, Part B):953–967, 2013.

[8] Thomas Heide Clausen, Philippe Jacquet, Cedric Adjih, Anis Laouiti, Pascale Minet, Paul Muhlethaler, Amir Qayyum, and Laurent Viennot. Optimized link state routing protocol (olsr). 01 2003.

[9] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms, Third Edition.* The MIT Press, 3rd edition, 2009.

[10] S. L. O. B. Correia, J. Celestino, and O. Cherkaoui. Mobility-aware ant colony optimization routing for vehicular ad hoc networks. In *IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, pages 1125–1130. IEEE, 2011.

[11] Alisson Barbosa de Souza. Mav-aodv - um protocolo multicast baseado em colônias de formigas para redes ad hoc veiculares. Master's thesis, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Ceará, 2012.

[12] Janez Demšar. Statistical comparisons of classifiers over multiple data sets. 7:1–30, 2006.

[13] Jay L. Devore. *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*. Cengage Learning, 2011.

[14] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer, 2005.

[15] Peppino Fazio, Floriano De Rango, Cesare Sottile, and Amilcare Francesco Santamaria. Routing optimization in vehicular networks: A new approach based on multi-objective metrics and minimum spanning tree. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 9(11):59–69, 2013.

[16] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1990.

[17] José Gonçalves and Mauricio Resende. Biased random-key genetic algorithms for combinatorial optimization. *J. Heuristics*, 17:487–525, 2011.

[18] Anuj Gupta, Harsh Sadawarti, and Anil Verma. Implementation of dymo routing protocol. *International Journal of Information Technology, Modeling and Computing*, 1, 06 2013.

[19] M. Haklay and P. Weber. OpenStreetMap: User-generated street maps. *IEEE Pervasive Computing*, 7(4):12–18, 2008.

[20] Frederick S Hillier and Gerald J Lieberman. *Introdução à pesquisa operacional*. McGraw Hill Brasil, 2013.

[21] Stefan Irnich and Guy Desaulniers. Shortest path problems with resource constraints. In Solomon M.M. Desaulniers G., Desrosiers J., editor, *Column Generation*, chapter 2, pages 33–65. Springer, Boston, MA, 2006.

[22] Teerawat Issariyakul and Ekram Hossain. *Introduction to Network Simulator NS2*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2010.

[23] Rezwana Karim. Vanet: Superior system for content distribution in vehicular network applications. *Tech. rep.*, 2008.

[24] Brad Karp and H. T. Kung. Gpsr: Greedy perimeter stateless routing for wireless networks. In *Proceedings of the 6th Annual International Conference on Mobile Computing and Networking*, pages 243—254. Association for Computing Machinery, 2000.

[25] Gholamreza Khorasani, Ashkan Tatari, Ali Yadollahi, and Milad Rahimi. Evaluation of intelligent transport system in road safety. *International Journal of Chemical, Environmental & Biological Sciences*, 1(1):110–118, 2013.

[26] Christian Lochert, Martin Mauve, Holger Füßler, and Hannes Hartenstein. Geographic routing in city scenarios. *Mobile Computing and Communications Review*, 9:69–72, 2005.

[27] Nelson Maculan. The Steiner problem in graphs. In Silvano Martello, Gilbert Laporte, Michel Minoux, and Celso Ribeiro, editors, *Surveys in Combinatorial Optimization*, volume 132 of *North-Holland Mathematics Studies*, chapter 6, pages 185–211. North-Holland, 1987.

[28] Thomas L. Magnanti and Laurence A. Wolsey. *Optimal trees*, volume 7 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, chapter 9, pages 503–615. Elsevier, 1995.

[29] Bilal. Mustafa and Umar Waqas Raja. Issues of routing in vanet. Master's thesis, Blekinge Institute of Technology, 2011.

[30] George L. Nemhauser and Laurence A. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 1988.

[31] Carlos A.S. Oliveira and Panos M. Pardalos. A survey of combinatorial optimization problems in multicast routing. *Computers and Operations Research*, 32(8):1953–1981, 2005.

[32] Larry L. Peterson and Bruce S. Davie. *Computer Networks: A Systems Approach*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 5th edition, 2011.

[33] Klaus Plößl and Hannes Federrath. A privacy aware and efficient security infrastructure for vehicular ad hoc networks. *Computer Standards & Interfaces*, 30(6):390–397, 2008.

[34] Celso C. Ribeiro, Tiago de A. Santos, and Cid C. de Souza. Multicast routing under quality of service constraints for vehicular ad hoc networks: mathematical formulation and a relax-and-fix heuristic. *International Transactions in Operational Research*, 26(4):1339–1364, 2019.

[35] George F. Riley and Thomas R. Henderson. The NS-3 network simulator. In Klaus Wehrle, Mesut Güneş, and James Gross, editors, *Modeling and Tools for Network Simulation*, chapter 2, pages 15–34. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010.

[36] G. N. Rouskas and I. Baldine. Multicast routing with end-to-end delay and delay variation constraints. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 15(3):346–356, 1997.

[37] Elizabeth Royer and Charles Perkins. Multicast operation of the ad-hoc on-demand distance vector routing protocol. In *Mobile Computing and Networking*, pages 207–218. IEEE, 2001.

[38] H. Saleet, R. Langar, K. Naik, R. Boutaba, A. Nayak, and N. Goel. Intersection-based geographical routing protocol for vanets: A proposal and analysis. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 60(9):4560–4574, 2011.

[39] A. Sebastian, M. Tang, Y. Feng, and M. Looi. A multicast routing scheme for efficient safety message dissemination in VANET. In *2010 IEEE Wireless Communication and Networking Conference*, pages 1–6. IEEE, 2010.

[40] Bhupendra Singh and Ankit Gupta. Recent trends in intelligent transportation systems: a review. *Journal of Transport Literature*, 9(2):30–34, 2015.

[41] T. Taleb, E. Sakhaee, A. Jamalipour, K. Hashimoto, N. Kato, and Y. Nemoto. A stable routing protocol to support its services in vanet networks. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 56(6):3337–3347, 2007.

[42] R.F. Toso and Mauricio Resende. A c++application programming interface for biased random-key genetic algorithms. *Optimization Methods and Software*, 30, 01 2015.

[43] R. Vaishampayan and J. J. Garcia-Luna-Aceves. Efficient and robust multicast routing in mobile ad hoc networks. In *IEEE International Conference on Mobile Ad-hoc and Sensor Systems*, pages 304–313. IEEE, 2004.

[44] András Varga and Rudolf Hornig. An overview of the OMNeT++ simulation environment. In *International Conference on Simulation Tools and Techniques for Communications, Networks and Systems & Workshops*, pages 1–10. Institute for Computer Sciences, Social-Informatics and Telecommunications Engineering, 2008.

[45] P. Winter. Steiner problem in networks: A survey. *Networks*, 17(2):129–167, 1987.