
II.1. Grundelemente der Programmierung


- 1. Erste Schritte
- 2. Einfache Datentypen
- 3. Anweisungen und Kontrollstrukturen
- 4. Verifikation
- 5. Reihungen (Arrays)

4. Verifikation

■ Spezifikation: Angabe, *was* ein Programm tun soll

- natürliche Sprache
- grafische Sprachen (UML, ...)
- logische Sprachen (Z, VDM, ...)

■ Testen: Überprüfung für endlich viele Eingaben

 keine 100% Sicherheit

■ Verifikation: Mathematischer Beweis der Korrektheit

- Terminierung: Hält Programm immer an?
- Partielle Korrektheit: Falls Programm anhält, erfüllt es Spezifikation?
- Totale Korrektheit: Terminierung & Partielle Korrektheit

 Semantik der Programmiersprache

Fakultät

```
public static void main (String [] arguments) {  
  
    int n = SimpleIO.getInt("Gib Zahl ein"), i, res;  
     $\langle true \rangle$   
     $\langle n=n \rangle$   
    i = n;  
     $\langle i=n \rangle$   
     $\langle i=n \wedge 1=1 \rangle$   
    res = 1;  
     $\langle i=n \wedge res=1 \rangle$   
     $\langle i! \cdot res = n! \rangle$   
    while (i > 1) {  
         $\langle i! \cdot res = n! \wedge i > 1 \rangle$   
         $\langle (i-1)! \cdot res \cdot i = n! \rangle$   
        res = res * i;  
         $\langle (i-1)! \cdot res = n! \rangle$   
        i = i - 1;  
         $\langle i! \cdot res = n! \rangle$   
    }  
     $\langle i! \cdot res = n! \wedge \neg i > 1 \rangle$   
     $\langle res = n! \rangle$   
    SimpleIO.output("Fakultaet ist " + res, "Erg");  
}
```

Programm P

```
i = n;  
res = 1;  
while (i > 1) {  
    res = res * i;  
    i = i - 1;  
}
```

■ Spezifikation:

Programm berechnet (in `res`) Fakultät von `n`

■ Terminierung:

Programm hält an, weil `i` in jedem Schleifendurchlauf kleiner wird

■ Partielle Korrektheit:

Nach Ausführung ist `res = n!`

■ Totale Korrektheit

Wie beweist
man so etwas ?

➡ Verifikation nötig bei sicherheitskritischen Anwendungen

➡ hilft für Programmentwurf und Programmierstil

Partielle Korrektheit: Hoare-Kalkül

■ Spezifikation (zur partiellen Korrektheit)

$$\langle \varphi \rangle \text{ P } \langle \psi \rangle$$

Wenn vor Ausführung von P **Vorbedingung** φ gilt
und Ausführung von P terminiert,
dann gilt hinterher **Nachbedingung** ψ .

■ **Bsp:** $\langle \text{true} \rangle \text{ P } \langle \text{res} = \text{n!} \rangle$

■ Partielle Korrektheit ist *semantische* Aussage

Hoare-Kalkül: 7 Regeln zur Herleitung von Korrektheitsaussagen

Zuweisungsregel

$$\frac{}{\langle \varphi [x/t] \rangle \quad x = t; \quad \langle \varphi \rangle}$$

x ist Variable, t ist Ausdruck (ohne Seiteneffekte),
 $\varphi [x/t]$ ist φ mit allen x ersetzt durch t

Bsp: $\langle 5 = 5 \rangle \quad x = 5; \quad \langle x = 5 \rangle$

$\langle 5 = 5 \rangle$

$x = 5;$

$\langle x = 5 \rangle$

Konsequenzregel 1 (Stärkere Vorbedingung)

$$\frac{\langle \varphi \rangle \text{ P } \langle \psi \rangle \qquad \alpha \Rightarrow \varphi}{\langle \alpha \rangle \text{ P } \langle \psi \rangle}$$

Bsp: $\langle \text{true} \rangle \quad \mathbf{x} = 5; \quad \langle \mathbf{x} = 5 \rangle$, denn:

$$\frac{\langle 5 = 5 \rangle \quad \mathbf{x} = 5; \quad \langle \mathbf{x} = 5 \rangle \qquad \text{true} \Rightarrow 5 = 5}{\langle \text{true} \rangle \quad \mathbf{x} = 5; \quad \langle \mathbf{x} = 5 \rangle}$$

$\langle \text{true} \rangle$
 $\langle 5 = 5 \rangle$
 $\mathbf{x} = 5;$
 $\langle \mathbf{x} = 5 \rangle$

Konsequenzregel 2 (Schwächere Nachbedg.)

$$\frac{\langle \varphi \rangle \text{ P } \langle \psi \rangle \qquad \psi \Rightarrow \beta}{\langle \varphi \rangle \text{ P } \langle \beta \rangle}$$

Bsp: $\langle \text{true} \rangle \quad \mathbf{x} = 5; \quad \langle \mathbf{x} \geq 5 \rangle$, denn:

$$\frac{\langle \text{true} \rangle \quad \mathbf{x} = 5; \quad \langle \mathbf{x} = 5 \rangle \qquad \mathbf{x} = 5 \Rightarrow \mathbf{x} \geq 5}{\langle \text{true} \rangle \quad \mathbf{x} = 5; \quad \langle \mathbf{x} \geq 5 \rangle}$$

$\langle \text{true} \rangle$
 $\langle 5 = 5 \rangle$
 $\mathbf{x} = 5;$
 $\langle \mathbf{x} = 5 \rangle$
 $\langle \mathbf{x} \geq 5 \rangle$

Sequenzregel

$$\frac{\langle \varphi \rangle \quad P \quad \langle \psi \rangle \qquad \langle \psi \rangle \quad Q \quad \langle \beta \rangle}{\langle \varphi \rangle \quad P \quad Q \quad \langle \beta \rangle}$$

Bsp: $\langle \text{true} \rangle$

$x = 5;$

$\text{res} = x * x + 6;$

$\langle \text{res} = 31 \rangle$

$\langle \text{true} \rangle$

$\langle 5 = 5 \rangle$

$x = 5;$

$\langle x = 5 \rangle$

$\langle x * x + 6 = 31 \rangle$

$\text{res} = x * x + 6;$

$\langle \text{res} = 31 \rangle$

Bedingungsregel 1

$$\frac{\langle \varphi \wedge B \rangle \text{ P } \langle \psi \rangle \quad \varphi \wedge \neg B \Rightarrow \psi}{\langle \varphi \rangle \text{ if } (B) \{ P \} \langle \psi \rangle}$$

Bsp: $\langle \text{true} \rangle$

```
    res = y;  
    if (x > y) res = x;  
 $\langle \text{res} = \max(x, y) \rangle$ 
```

denn: $\langle \text{res} = y \wedge x > y \rangle$
 $\langle x = \max(x, y) \rangle$
 res = x;
 $\langle \text{res} = \max(x, y) \rangle$

und $\langle \text{res} = y \wedge \neg x > y \rangle$
 $\Rightarrow \langle \text{res} = \max(x, y) \rangle$

```
 $\langle \text{true} \rangle$   
 $\langle y = y \rangle$   
res = y;  
 $\langle \text{res} = y \rangle$   
  
if (x > y) {  
     $\langle \text{res} = y \wedge x > y \rangle$   
     $\langle x = \max(x, y) \rangle$   
    res = x;  
     $\langle \text{res} = \max(x, y) \rangle$  }  
  
 $\langle \text{res} = \max(x, y) \rangle$ 
```

Bedingungsregel 2

$$\langle \varphi \wedge B \rangle \quad P \quad \langle \psi \rangle$$
$$\langle \varphi \wedge \neg B \rangle \quad Q \quad \langle \psi \rangle$$
$$\langle \varphi \rangle \text{ if } (B) \{P\} \text{ else } \{Q\} \langle \psi \rangle$$

Bsp: $\langle \text{true} \rangle$

```
if (x < 0)
    res = -x;
else
    res = x;
 $\langle \text{res} = |x| \rangle$ 
```

denn: $\langle \text{true} \rangle$

```
if (x < 0) {
     $\langle \text{true} \wedge x < 0 \rangle$ 
     $\langle -x = |x| \rangle$ 
    res = -x;
     $\langle \text{res} = |x| \rangle$ 
}
else {
     $\langle \text{true} \wedge \neg x < 0 \rangle$ 
     $\langle x = |x| \rangle$ 
    res = x;
     $\langle \text{res} = |x| \rangle$ 
}
 $\langle \text{res} = |x| \rangle$ 
```

Schleifenregel

$$\frac{\langle \varphi \wedge B \rangle \quad P \quad \langle \varphi \rangle}{\langle \varphi \rangle \text{ while } (B) \{ P \} \langle \varphi \wedge \neg B \rangle}$$

```
<true>
    i = n; res = 1;
<i = n ∧ res = 1>
< φ >
    while (i > 1) {res = res * i; i = i - 1; }
< φ ∧ ¬ i > 1>
<res = n! >
```

Schleifenregel

$$\frac{\langle \varphi \wedge B \rangle \quad P \quad \langle \varphi \rangle}{\langle \varphi \rangle \text{ while } (B) \{ P \} \langle \varphi \wedge \neg B \rangle}$$

```
<true>
  i = n; res = 1;
<i = n ∧ res = 1>
<i! * res = n!>
  while (i > 1) { res = res * i; i = i - 1; }
<i! * res = n! ∧ ¬ i > 1>
<res = n! >
```

φ ist Schleifen-
invariante

denn: $\langle i! * res = n! \wedge i > 1 \rangle$
 $\langle (i-1)! * (res * i) = n! \rangle$
 res = res * i;
 i = i - 1;
 $\langle i! * res = n! \rangle$

Hoare-Kalkül

■ Zuweisungsregel

$$\frac{}{\langle \varphi [x/t] \rangle \quad \mathbf{x} = \mathbf{t}; \quad \langle \varphi \rangle}$$

■ Konsequenzregeln

$$\frac{\langle \varphi \rangle \quad \mathbf{P} \quad \langle \psi \rangle \quad \alpha \Rightarrow \varphi}{\langle \alpha \rangle \quad \mathbf{P} \quad \langle \psi \rangle}$$

$$\frac{\langle \varphi \rangle \quad \mathbf{P} \quad \langle \psi \rangle \quad \psi \Rightarrow \beta}{\langle \varphi \rangle \quad \mathbf{P} \quad \langle \beta \rangle}$$

■ Sequenzregel

$$\frac{\langle \varphi \rangle \quad \mathbf{P} \quad \langle \psi \rangle \quad \langle \psi \rangle \quad \mathbf{Q} \quad \langle \beta \rangle}{\langle \varphi \rangle \quad \mathbf{P} \quad \mathbf{Q} \quad \langle \beta \rangle}$$

■ Bedingungsregeln

$$\frac{\langle \varphi \wedge \mathbf{B} \rangle \quad \mathbf{P} \quad \langle \psi \rangle \quad \varphi \wedge \neg \mathbf{B} \Rightarrow \psi}{\langle \varphi \rangle \quad \mathbf{if} \quad (\mathbf{B}) \quad \{ \mathbf{P} \} \quad \langle \psi \rangle}$$

$$\frac{\langle \varphi \wedge \mathbf{B} \rangle \quad \mathbf{P} \quad \langle \psi \rangle \quad \langle \varphi \wedge \neg \mathbf{B} \rangle \quad \mathbf{Q} \quad \langle \psi \rangle}{\langle \varphi \rangle \quad \mathbf{if} \quad (\mathbf{B}) \quad \{ \mathbf{P} \} \quad \mathbf{else} \quad \{ \mathbf{Q} \} \quad \langle \psi \rangle}$$

■ Schleifenregel

$$\frac{\langle \varphi \wedge \mathbf{B} \rangle \quad \mathbf{P} \quad \langle \varphi \rangle}{\langle \varphi \rangle \quad \mathbf{while} \quad (\mathbf{B}) \quad \{ \mathbf{P} \} \quad \langle \varphi \wedge \neg \mathbf{B} \rangle}$$

Fakultät mit Assertions

```
public static void main (String [] arguments) {  
    int n = SimpleIO.getInt("Gib Zahl ein"), i, res;  
  
    assert true;  
    assert n == n;  
  
    i = n;  
  
    assert i == n;  
    assert i == n && 1 == 1;  
  
    res = 1;  
  
    assert i == n && res == 1;  
    assert fac(i) * res == fac(n);  
  
    while (i > 1) {  
        assert fac(i) * res == fac(n) && i > 1;  
        assert fac(i-1) * (res * i) == fac(n);  
  
        res = res * i;  
  
        assert fac(i-1) * res == fac(n);  
  
        i = i - 1;  
  
        assert fac(i) * res == fac(n);  
    }  
    assert fac(i) * res == fac(n) && !(i > 1);  
    assert res == fac(n);  
  
    SimpleIO.output("Fakultaet ist " + res, "Ergebnis");  
}
```

Terminierung

Für jede Schleife `while (B) {P}` finde einen `int`-Ausdruck V (*Variante* der Schleife), so dass:

$B \Rightarrow V \geq 0$ und $\langle V = m \wedge B \rangle P \langle V < m \rangle$

```
while (i > 1) {res = res * i; i = i - 1; }
```

Variante ist i ,

denn: $i > 1 \Rightarrow i \geq 0$

$\langle i = m \wedge i > 1 \rangle$

$\langle i-1 < m \rangle$

`res = res * i; i = i - 1;`

$\langle i < m \rangle$

Verifikation der Addition

```
public static void main (String [] args) {
```

```
    int a = SimpleIO.getInt("Gib erste Zahl ein"),
```

```
    b = SimpleIO.getInt("Gib zweite Zahl ein"), x, res;
```

$\langle a \geq 0 \rangle$

$\langle a \geq 0 \wedge a = a \wedge b = b \rangle$

```
    x = a;
```

$\langle a \geq 0 \wedge x = a \wedge b = b \rangle$

```
    res = b;
```

$\langle a \geq 0 \wedge x = a \wedge res = b \rangle$

$\langle x \geq 0 \wedge x + res = a + b \rangle$

```
    while (x > 0) {
```

$\langle x \geq 0 \wedge x + res = a + b \wedge x > 0 \rangle$

$\langle x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 + res + 1 = a + b \rangle$

```
        x = x - 1;
```

$\langle x \geq 0 \wedge x + res + 1 = a + b \rangle$

```
        res = res + 1;
```

$\langle x \geq 0 \wedge x + res = a + b \rangle$

```
    }
```

$\langle x \geq 0 \wedge x + res = a + b \wedge \neg x > 0 \rangle$

$\langle res = a + b \rangle$

```
    SimpleIO.output(a + " + " + b + " = " + res, "Ergebnis");
```

```
}
```

Vorbedingung: $a \geq 0$

a	b	x	res
3	4	3	4
3	4	2	5
3	4	1	6
3	4	0	7

Schleifeninvariante:

$x \geq 0 \wedge x + res = a + b$

Nachbedingung: $res = a + b$

Verifikation der Addition

```
public static void main (String [] args) {  
  
    int a = SimpleIO.getInt("Gib erste Zahl ein"),  
        b = SimpleIO.getInt("Gib zweite Zahl ein"), x, res;  
  
    x = a;  
  
    res = b;  
    //Invariante:  $x \geq 0 \wedge x + res = a + b$   
    //Variante:  $x$   
    while (x > 0) {  
  
        x = x - 1;  
  
        res = res + 1;  
  
    }  
  
    SimpleIO.output(a + " + " + b + " = " + res, "Ergebnis");  
}
```

Vorbedingung: $a \geq 0$

Nachbedingung: $res = a + b$

Verifikation der Subtraktion

```
public static void main (String [] args) {
```

```
    int  x = SimpleIO.getInt("Gib erste Zahl ein"),
```

```
        y = SimpleIO.getInt("Gib zweite Zahl ein"), z, res;
```

$\langle x \geq y \rangle$

$\langle x \geq y \wedge y = y \wedge 0 = 0 \rangle$

```
    z = y;
```

$\langle x \geq y \wedge z = y \wedge 0 = 0 \rangle$

```
    res = 0;
```

$\langle x \geq y \wedge z = y \wedge res = 0 \rangle$

$\langle x \geq z \wedge res = z - y \rangle$

```
    while (x > z) {
```

$\langle x \geq z \wedge res = z - y \wedge x > z \rangle$

$\langle x \geq z + 1 \wedge res + 1 = z + 1 - y \rangle$

```
        z = z + 1;
```

$\langle x \geq z \wedge res + 1 = z - y \rangle$

```
        res = res + 1;
```

$\langle x \geq z \wedge res = z - y \rangle$

```
    }
```

$\langle x \geq z \wedge res = z - y \wedge \neg x > z \rangle$

$\langle res = x - y \rangle$

```
    SimpleIO.output(x + " - " + y + " = " + res , "Ergebnis");
```

```
}
```

Vorbedingung: $x \geq y$

x	y	z	res
5	2	2	0
5	2	3	1
5	2	4	2
5	2	5	3

Schleifeninvariante:

$x \geq z \wedge res = z - y$

Nachbedingung: $res = x - y$

Verifikation der Subtraktion

```
public static void main (String [] args) {
```

```
    int  x = SimpleIO.getInt("Gib erste Zahl ein"),  
        y = SimpleIO.getInt("Gib zweite Zahl ein"), z, res;
```

Vorbedingung: $x \geq y$

```
    z = y;
```

```
    res = 0;
```

```
    //Invariante:  $x \geq z \wedge res = z - y$ 
```

```
    //Variante:  $x - z$ 
```

```
    while (x > z) {
```

```
        z = z + 1;
```

```
        res = res + 1;
```

```
    }
```

Nachbedingung: $res = x - y$

```
    SimpleIO.output(x + " - " + y + " = " + res , "Ergebnis");
```

```
}
```