Notes

Роботска рака

- се состои од: краци (лостови) поврзани со зглобови

Компоненти на роботска рака

- манипулатор - основно тело на раката составено од: краци, зглобови и други компоненти
- краен извршен елемент - се приклучува на последниот зглоб од раката и служи за фаќање предмети, поврзување со други машини, извршување задачи
- актуатори - „мускули" на манипулаторите (сервомотори, чекорни мотори, пневматски и хидраулични цилиндри)

- ги управува регулатор (управувачки уред)

- сензори - даваат инфо. за: внатрешната состојба на манипулаторот (внатрешни - за положба на краци и зглобови) и комуникација со со надворешна средина (надворешни - за допир, гледање)
- управувачки елемент - ја управува работата на актуаторите и го координира движењето на манипулаторот, одредува како, колку брзо треба да се движи зглоб, надгледува координирано движење на управувачки елемент и сензори

• софтвер – се состои од: ОС (за управување на компјутер), софтвер за пресметување движење на секој зглоб и испраќање инфо. до управувачки елемент; и апликативни програми и збир рутини за извршување задачи или за примена на периферните уреди на манипулаторот

Зглобови

• транслациски (призматичен) P – транслаторно движење

• ротациски R – ротационо движење

• цилиндричен RP – транслаторно и ротационо движење по // оски

• сферен S – 3 ротациски движења

• R и P – активни и пасивни

• S – само пасивен

Степени на слобода

• неопходни се 3 степени на слобода за да се постигне одредена позиција и 3 степени за ориентација

⇒ роботска рака мора да има 6 степени на слобода за да може целосно да постави и ориентира 1 објект во работен простор

• работен простор – множество дофатливи точки

Формула на Грублер

$$dof = m(N - 1 - J) + \sum_{i=1}^{J} f_i$$

- m - степени на слобода (3 или 6) - J - број на зглобови
- N - број на краци (вкл. основа) - f_i - степени на слобода на зглоб i

Координатни системи

• универзален простор U

- за определување движење на раката во однос на други објекти во просторот
- дефинирање положба на други делови и машини со кои комуницира раката
- дефинирање патеки на движење на раката
- просторот е врзан за базата и не се менува

• простор на зглобови Z_i

- кога движењето на раката треба да се определи преку движењето на секој од зглобовите на раката одделно
- пресликување од простор на раката во простор на зглобови

• простор на извршен елемент E

- движење на раката во однос на координатен систем придружен со извршниот елемент
- подвижен

• к.с. на крај од рака A • к.с на основа B

Векторско претставување

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

- координати
- нормирачки фактор

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

$$P_x = \frac{x}{w} \qquad P_y = \frac{y}{w} \qquad P_z = \frac{z}{w}$$

- $w > 1 \Rightarrow$ координати ↑
- $w < 1 \Rightarrow$ координати ↓
- $w = 1 \Rightarrow$ координати исти
- $w = 0 \Rightarrow$ вектор на правец со должина 1

Матрично претставување на кинематски елементи во простор

- координатен систем F со оски n, o, a

$n = (n_x, n_y, n_z) \qquad a = (a_x, a_y, a_z) \qquad o = (o_x, o_y, o_z)$

- трансформациска матрица

$$F = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- позиција на оригинал
- ориентација
- нормирачки фактор

- ограничувања - за од $12 \Rightarrow 6$ степени на слобода

$$n \cdot a = 0 \qquad n \cdot o = 0 \qquad a \cdot o = 0 \qquad |n| = |a| = |o| = 1$$

- треба да е десен координатен систем $\Rightarrow$ $FF^T = I$ $\quad \det F = +1$

$\det F \Rightarrow$ кажува за колку ќе се промени волуменот

$\det F = -1 \Rightarrow$ ист волумен ама пресликано обратно

$\det F = 0 \Rightarrow$ од 3D се тлекува во 2D

Претставување трансформации

• трансформацијата може да е: чиста транслација, чиста ротација и нивна комбинација

Чиста транслација

• к.с. се движи со менување положба на $(0,0)$, но не и ориентацијата

• вектор на транслација $d(dx, dy, dz)$

• матрица на трансформација

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• единечна матрица

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⇒ нова положба $F_{nova} = T \cdot F_{stara}$

$$F_{nova} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x+dx \\ n_y & o_y & a_y & p_y+dy \\ n_z & o_z & a_z & p_z+dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Чиста ротација околу координатни оски

• (n, o, a) се завртува за агол θ

– околу y-оска

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n \\ P_o \\ P_a \end{bmatrix}$$

$P_{xyz} = R(y,\theta) P_{noa}$

- околу x-оска

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n \\ P_o \\ P_a \end{bmatrix}$$

$P_{xyz} = R(x,\theta) P_{noa}$

- околу z-оска

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n \\ P_o \\ P_a \end{bmatrix}$$

$P_{xyz} = R(z,\theta) P_{noa}$

Комбинирано движење

- множење со матрица на трансформација се врши од лево кога транслира околу координатни оски на референтен к.с или сопствените оски

$$P_{xyz} = T(\tfrac{\pi}{2}, y)\, T(\pi, x)\, T(-4,-2,0)\, P_{noa}$$

- множење со матрица на трансформација се врши од десно кога транслира во однос на подвижен к.с.
- резултатите се совпаѓаат кога ќе се извршат исти трансформации во однос на подвижниот систем како оние во однос на референтниот систем, но во обратен редослед

$$\boxed{\begin{aligned} R(x,\alpha)\cdot R(y,\beta)\cdot R(z,\gamma) &= R(a,\gamma)\cdot R(o,\beta)\cdot R(n,\alpha) \\ R(x,\alpha)\cdot T(x,y,z) &= T(n,o,a)\, R(n,\alpha) \end{aligned}}$$

Инверзни матрици кон трансформациските

- 3 x 3 ротациски

$$[R(x,\theta)]^{-1} = \frac{Adj^T[R(x,\theta)]}{\det[R(x,\theta)]} = \frac{[R(x,\theta)]^T}{1} = [R(x,\theta)]^T$$

$$[R(y,\theta)]^{-1} = \frac{Adj^T[R(y,\theta)]}{\det[R(y,\theta)]} = \frac{[R(y,\theta)]^T}{1} = [R(y,\theta)]^T$$

$$[R(z,\theta)]^{-1} = \frac{Adj^T[R(z,\theta)]}{\det[R(z,\theta)]} = \frac{[R(z,\theta)]^T}{1} = [R(z,\theta)]^T$$

- 4 x 4 трансформациски

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -P\cdot n \\ o_x & o_y & o_z & -P\cdot o \\ a_x & a_y & a_z & -P\cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P\cdot n = p_x n_x + p_y n_y + p_z n_z$$

$$P\cdot o = p_x o_x + p_y o_y + p_z o_z$$

$$P\cdot a = p_x a_x + p_y a_y + p_z a_z$$

Ротација околу произволна оска к

Чекор 1: Оската к се транслира за да минува низ координатниот почеток

- се поместува за $d(-x_0, -y_0, -z_0)$, (x_0, y_0, z_0) се координати на $P_0 \in k$

Чекор 2: Оската к се ротира околу 2 оски за да се поклопи со третата референтна

- најчесто поклопуваме со z

Чекор 3: ротација за саканиот агол θ околу референтната оска со која има поклопување

Чекор 4: обратна ротација на к од Чекор 2

Чекор 5: обратна транслација на к од Чекор 1

Вкупна трансформација $\boxed{T(k,\theta) = T(x_0,y_0,z_0)\, R(k,\theta)\, T(-x_0,-y_0,-z_0)}$

Матрица на ротација околу к $\boxed{R(k,\theta) = R(x,-\alpha)\, R(y,\beta)\, R(z,\theta)\, R(y,-\beta)\, R(x,\alpha)}$

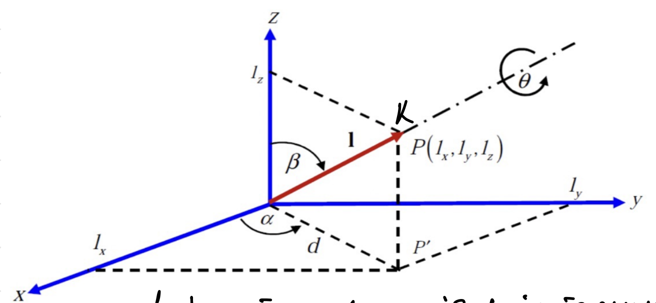
- ако оската к веќе минува низ (0,0):

- правецот на к е **единечен вектор на правец I** $\boxed{I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2 + I_z^2} = 1}$

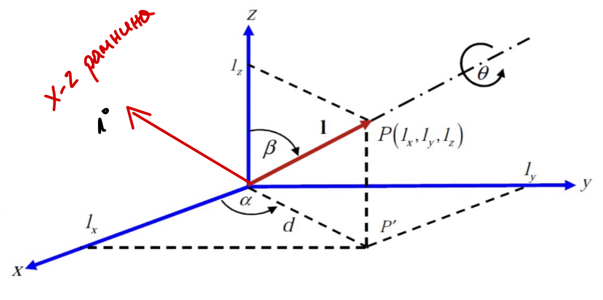
$\boxed{I = [I_x, I_y, I_z]^T}$

$\boxed{\sin\alpha = \frac{I_y}{d}}$ $\boxed{\cos\alpha = \frac{I_x}{d}}$

$\boxed{d = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}}$



к зафаќа агол α со нејзината проекција во xy рамнината

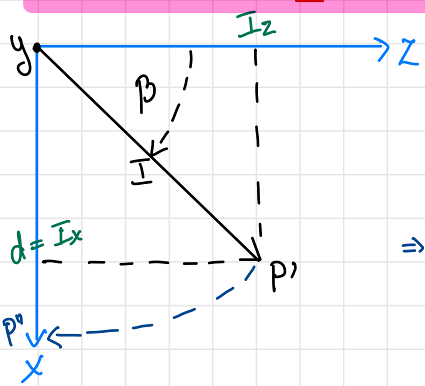


1° Ротација на к за α околу Z

$$R(z,-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x/d & I_y/d & 0 \\ -I_y/d & I_x/d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Ротација на к за α околу Z - на враќање

$$R^{-1}(z,-\alpha) = \begin{bmatrix} I_x/d & -I_y/d & 0 \\ I_y/d & I_x/d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R(z,\alpha)$$



$$\sin\beta = \frac{d}{I} \qquad \cos\beta = \frac{I_z}{I} \qquad I = 1$$

$$\sin\beta = d \qquad \cos\beta = I_z$$

$\Rightarrow$ ротација за $-\beta$ на к и ќе се добиеш со Z

• Ротација на к за $-\beta$ околу y

$$R(y,-\beta) = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & -s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_z & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

• ротација на к за β околу y-на враќање

$$R^{-1}(y,\beta) = \begin{bmatrix} I_z & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ -d & 0 & I_z \end{bmatrix} = R(y,-\beta)$$

• Ротација на k за θ околу z

$$R(z,\theta)=\begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(k,\theta)=R(z,\alpha)R(y,\beta)R(z,\theta)R(y,-\beta)R(z,-\alpha)=$$

$$\begin{bmatrix} I_x^2(1-c\theta)+c\theta & I_xI_y(1-c\theta)-I_zs\theta & I_xI_z(1-c\theta)+I_ys\theta \\ I_xI_y(1-c\theta)+I_zs\theta & I_y^2(1-c\theta)+c\theta & I_yI_z(1-c\theta)-I_xs\theta \\ I_xI_z(1-c\theta)-I_ys\theta & I_yI_z(1-c\theta)+I_xs\theta & I_z^2(1-c\theta)+c\theta \end{bmatrix}$$

• ако е позната ротацијата $R \Rightarrow$ $R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

$$\theta=\arccos\left(\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}-1}{2}\right)=\arccos\left(\frac{\mathrm{Trag}\,R-1}{2}\right)$$

$$I=\begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix}=\frac{1}{2s\theta}\begin{bmatrix} r_{32}-r_{23} \\ r_{13}-r_{31} \\ r_{21}-r_{12} \end{bmatrix}$$

Директна и инверзна кинематика

- роботска рака во правоаголен координатен систем - 3P
- роботска рака во цилиндричен координатен систем - R2P
- роботска рака во сферен координатен систем - 2RP
- роботска рака во антропоморфен координатен систем - 3R

Кинематски равенки на позиција

1° во правоаголни координати ⇒ T матрица е чиста транслација

$$\boxed{{}^{U}T_p = T_{pr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

2° во цилиндрични координати ⇒ транслација за r единици по x-оска, ротација за α околу z-оска и транслација за C единици по z-оска

$${}^{U}T_p = T_{cyl}(r,\alpha,C) = T(0,0,C)\,R(z,\alpha)\,T(r,0,0)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & C \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & rC\alpha \\ S\alpha & C\alpha & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & C \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

- враќање во првобитна ориентација ⇒ ротација за $-\alpha$ околу a-оска

$$\boxed{T_{cyl}(r,\alpha,C)\,R(a,-\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rC\alpha \\ 0 & 1 & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & C \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

2° Во **сферни координати** ⇒ транслација за r единици по z-оска, ротација за β околу y-оска и ротација за γ околу z-оска

$$^{R}T_P = T_{sph}(r,\beta,\gamma) = R(z,\gamma)R(y,\beta)T(0,0,r) =$$

$$\begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -s\gamma & s\beta c\gamma & r s\beta c\gamma \\ c\beta c\gamma & c\gamma & s\beta s\gamma & r s\beta s\gamma \\ -s\beta & 0 & c\beta & r c\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

- враќање во првобитна ориентација ⇒ ротација за $-\beta$ околу o-оска и $-\gamma$ околу a-оска

$$\boxed{T_{sph} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r s\beta c\gamma \\ 0 & 1 & 0 & r s\beta s\gamma \\ 0 & 0 & 1 & r c\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Ојлерови агли

- 3 елементарни, последователни ротации
- не смее последователни ротации по 2 исти оски
- Можни тројки: ZXZ, XYX, YZY, ZYZ, YXY

Пр. За ZYZ агли ⇒ R за φ околу a-оска (локална z)
⇒ R за θ околу o-оска (локална y)
⇒ R за ψ околу a-оска (локална z)

$$\boxed{R_{zyz}(\varphi,\theta,\psi) = R(a,\varphi)R(o,\theta)R(a,\psi) = \begin{bmatrix} C\phi\cdot C\theta\cdot C\psi - S\phi\cdot S\psi & -C\phi\cdot C\theta\cdot S\psi - S\phi\cdot C\psi & C\phi\cdot S\theta & 0 \\ S\phi\cdot C\theta\cdot C\psi + C\phi\cdot S\psi & -S\phi\cdot C\theta\cdot S\psi + C\phi\cdot C\psi & S\phi\cdot S\theta & 0 \\ -S\theta\cdot C\psi & S\theta\cdot S\psi & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

• решение на инверзна кинематика

$$R^{-1}(a,\varphi)\, R_{ZYZ}(\varphi,\theta,\psi) = R(o,\theta)R(a,\psi) = \begin{bmatrix} C\theta C\psi & -S\theta S\psi & S\theta & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 & 0 \\ -S\theta C\psi & C\theta S\psi & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{S\varphi}{C\varphi} = \operatorname{arctg} \dfrac{a_y}{a_x} \\ \operatorname{arctg} \dfrac{S(-\varphi)}{C(-\varphi)} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{-a_y}{-a_x}\right) \end{cases}$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{S\psi}{C\psi} = \operatorname{arctg} \frac{-n_x S\varphi + n_y C\varphi}{-o_x S\varphi + o_y C\varphi}$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{S\theta}{C\theta} = \operatorname{arctg}\left(\frac{a_x C\varphi + a_y S\varphi}{a_z}\right)$$

• сингуларитет ⇒ кога $\theta = 0^\circ$ ⇒ поклопување на прва и последна оска на ротација ⇒ се губат 2 степени на слобода

Агли RPY (roll-pitch-yaw)

• не смее последователни ротации по 2 исти оски

• можни тројки: XYZ, YZX, ZXY, ZYX, XZY, YXZ

Пр. за ZYX агли ⇒ R за φ околу a-оска
⇒ R за θ околу o-оска
⇒ R за η околу n-оска

$$R_{RPY}(\varphi,\theta,\eta) = R(a,\varphi)R(o,\theta)R(n,\eta) = \begin{bmatrix} C\varphi\cdot C\vartheta & C\varphi\cdot S\vartheta\cdot S\eta - S\varphi\cdot C\eta & C\varphi\cdot S\vartheta\cdot C\eta + S\varphi\cdot S\eta & 0 \\ S\varphi\cdot C\vartheta & S\varphi\cdot S\vartheta\cdot S\eta + C\varphi\cdot C\eta & S\varphi\cdot S\vartheta\cdot C\eta - C\varphi\cdot S\eta & 0 \\ -S\vartheta & C\vartheta\cdot S\eta & C\vartheta\cdot C\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• решение на инверзна кинематика

$$R(a,\psi)^{-1} R_{RPY}(\psi,\theta,\eta) = R(o,\theta) R(n,\eta) = \begin{bmatrix} c\theta & s\theta s\eta & s\theta c\eta & 0 \\ 0 & c\eta & -s\eta & 0 \\ -s\theta & c\theta s\eta & c\theta c\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\psi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{s\psi}{c\psi} = \dfrac{n_y}{n_x} \\ \operatorname{arctg} \dfrac{s(-\psi)}{c(-\psi)} \end{cases}$$

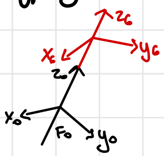
$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{s\theta}{c\theta} = \operatorname{arctg} \frac{-n_z}{n_x c\psi + n_y s\psi}$$

$$\eta = \operatorname{arctg} \frac{s\eta}{c\eta} = \operatorname{arctg} \frac{a_x s\psi - a_y c\psi}{-o_x s\psi + o_y c\psi}$$

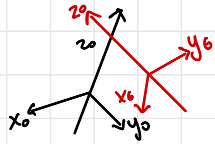
DH модел на директна кинематика

• взаемни конфигурации на 2 координатни системи - z-оските се:

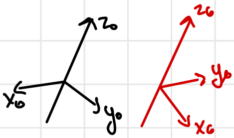
1° поклопуваат



2° сечат

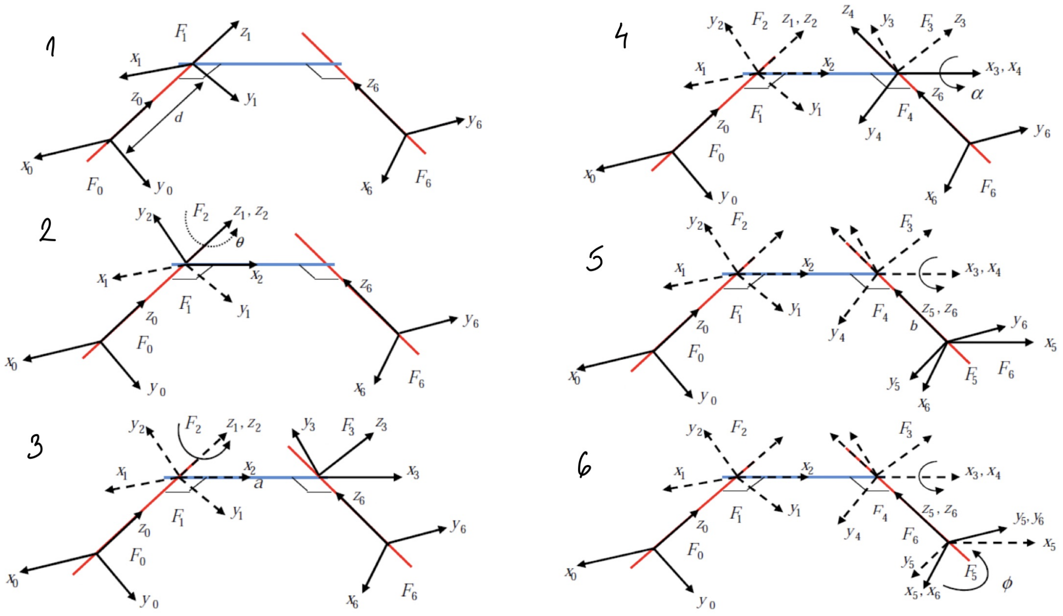


3° паралелни



4° разминуваат
- имаат заедничка нормала

• при разминувачки z-оски => 6 трансформации



$$\boxed{{}^{0}T_6 = T(z_0, d)\,R(z_1, \theta)\,T(x_2, a)\,R(x_3, \alpha)\,T(z_4, b)\,R(z_5, \varphi)}$$

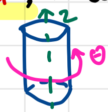
• кинематски DH модел на 1 роботска рака => произволен број зглобови и врски,

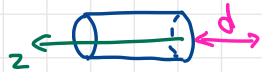
к.с. на секој зглоб и доделување z и x-оски на секој

• правила за градење на координатни системи θ, d, a, α

- θ и d => променливи претставени со z-оска

1° ако зглобот е ротациски, z-оска е со θ ротира по правило на десна рака => $d = const.$





2° ако зглобот е транслациски, z-оска транслира со d => $\theta = const$

- ако 2 z-оски се разминуваат => x-оска се става во правец на нормалата на тековната и претходната z-оска, инаку:

1° ако z се $\parallel$ => заедничката нормала е колинеарна со заедничката нормала од претходниот зглоб

2° ако z се сечат => x-оската е нормална на заедничката рамнина

- општ случај => к. почеток е во различни точки => почеток на локален с. е во пресек на локална z-оска со $\perp$ меѓу локална и претходна z-оска

- ако не постои заедничката нормала:

1° ако z се сечат => почеток на локалниот с. е во пресекот

2° ако z се поклопуваат => почеток на локалниот с. се совпаѓа со почетокот на претходниот

- елементарни движења:

1° ротација околу z_{i-1}-оска за θ_i - joint angle

2° транслација долж z_{i-1}-оска за d_i - link offset

3° транслација долж x_{i-1}-оска за a_i - link length

4° ротација на z_{i-1}-оска околу x_i-оска за α_i - link twist

- вкупна трансформациска матрица => канонична трансформација

$$^{i-1}T_i = A_i = R(z,\theta_i)\,T(0,0,d_i)\,T(a_i,0,0)\,R(x,\alpha_i) =$$

$$\begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

- ако $\theta_i = 0$, а $d_j = \min(d_j)$ => референтна конфигурација

1° за ротациски зглобови

$$\boxed{A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

2° за транслациски зглобови

$$\boxed{A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & \min(d_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

- ротацискиот дел на матриците = ротација околу x_i-оските => во реф. конфигурација сите x_i-оски имаат иста насока, имаат само транслација

Составување кинематски модел

1° зглобовите се означуваат од 1 до n

2° краците се означуваат од 0 до n

3° краците L_{i-1} и L_i се соседи поврзани со зглобот J_i, со променлива θ_i

4° дефинирање на Z_i-оските, според транслациски или ротациски зглоб

5° дефинирање координатен систем $O_0(x_0, y_0, z_0)$, к.почеток O_0 се става произволно на z_0, а x_0, y_0 да прават десен координатен систем

6° дефинирање на к.с $i = 1, 2, \dots, n-1 \Rightarrow$ 3 случаи:

1) Z-оските на J_i и J_{i+1} имаат заедничка нормала (се разминуваат) $\Rightarrow$ к.почеток O_i на к.с. $O_i(x_i, y_i, z_i)$ придружен со зглобот J_{i+1} се става во пресекот на Z_i со заедничката нормала на Z_{i-1} и Z_i

2) Z-оските на J_i и J_{i+1} немаат заедничка нормала (се сечат) $\Rightarrow$ к.почеток O_i на к.с. $O_i(x_i, y_i, z_i)$ е во таа пресечна точка

3) Z-оските на J_i и J_{i+1} се поклопуваат или се паралелни $\Rightarrow$

- Ако J_i е ротациски $\Rightarrow$ O_i се става т.ш. $d_i = 0$
- Ако J_i е транслациски $\Rightarrow$ O_i се става на $(d_i)_{max}$

7° дефинирање на x_i-оските

1) ако z_{i-1} и z_i се разминуваат ⇒ долж нивната нормала од J_i кон J_{i+1}

2) ако z_{i-1} и z_i се паралелни ⇒ во правец на заедничката нормала на J_{i-1}

3) ако z_{i-1} и z_i се сечат ⇒ нормално на рамнината што ја формираат

8° поставување на y-оските

9° к.почеток O_n да се поклопи со O_{n-1}

10° x_n се става нормално на z_{n-1}

11° 1) ако зглобот n е ротациски ⇒ $z_n \parallel z_{n-1}$

2) ако зглобот n е транслациски ⇒ z_n се бира произволно

12° y_n се става за десен к.систем

13° определување на DH параметрите $\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i$

14° пресметување хомогени трансформациски матрици A_i

15° одредување кинематски модел $^0T_n = A_1 A_2 \dots A_n$

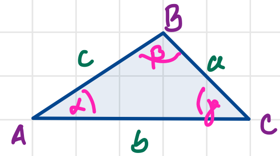
Агенда

⇒ x-оска ⇒ y-оска ⇒ z-оска

⇒ n-оска ⇒ o-оска ⇒ a-оска

Тригонометриски идентитети

- Синусна теорема $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$



- Косинусна теорема $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos y$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Диференцијална кинематика

- **диференцијална кинематика** - врска меѓу брзината на зглобовите и раката
- Векторска функција f го пресликува просторот дефиниран со променливите q во простор дефиниран со променливи x.

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ f_2(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \vdots \\ f_m(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{bmatrix}}$$

n - број на зглобови
m - број на позиции на раката

$$\boxed{[dx_i]_{m\times 1} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\right]_{m\times n} \cdot [dq_j]_{n\times 1}} \quad /:dt$$

$$\boxed{\left[\frac{dx_i}{dt}\right] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\right]\left[\frac{dq_j}{dt}\right]} \qquad \boxed{\dot{x} = J\dot{q}}$$

$\Rightarrow$ Јакобијан $\boxed{J = \left[\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\right]}$

- роботска рака 2RP3R $\Rightarrow$ Јакобијан на позиција

$$\boxed{J_p(q) = \begin{bmatrix} -y & c_1c_2d_3 & c_1s_2 & 0 & 0 & 0 \\ x & s_1c_2d_3 & s_1s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_2d_3 & c_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

- **Јакобијан на ориентација** - диференцирање на кинематички равенки за ориентација $\boxed{\dot{R} = J_R(q)\,\dot{q}}$
- **аналитички Јакобијан** - $J_p(q)$ и $J_R(q)$ $\boxed{\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_p(q) \\ J_R(q) \end{bmatrix}\dot{q} = J^*(q)\,\dot{q}}$

• **Геометриски Јакобијан**

$$\boxed{D = J \cdot D_q}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Јакобијан} \\ \text{на} \\ \text{раката} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_n \end{bmatrix}$$

dx - - долж оска

δx - околу оска

• со делење со dt ⇒ **Јакобијан на линиски брзини J_v** и **Јакобијан на аголни брзини J_ω**

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v(q) \\ J_\omega(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J(q)\dot{q}$$

$v = J_v(q) \cdot \dot{q}$ ⇒ 3xn

$\omega = J_\omega(q) \cdot \dot{q}$ ⇒ 3xn

• линеарната брзина се добива со диференцирање по време на векторот на позиција на раката од кинематичкиот модел

• аголната брзина нема примитивна функција

• **диференцијална транслација** на к.с - транслациско движење на системот по к.оски на референтниот систем за диференцијални должини dx, dy, dz

$$T(dx, dy, dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• **диференцијална ротација** - диференцијална ротација на подвижниот к.с. околу некоја од оските на р.с.

– диференцијална ротација за агол $d\theta$ околу оска k

$$R(x,\delta x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\delta x & -S\delta x & 0 \\ 0 & S\delta x & C\delta x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(y,\delta y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R(z,\delta z) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & 0 & 0 \\ \delta z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Важи комутативно својство на множење елементарни матрици при диференцијални агли $R(x,\delta x)\,R(z,\delta z) = R(z,\delta x)\,R(x,\delta x)$
- диференцијална ротација околу произволна оска k е комбинација од диф. ротации околу к. оски (x,y,z) во произволен редослед
- диференцијална трансформација на к.с е комбинација од диференцијални транслации и ротации

$$T + dT = T(dx,dy,dz)\,R(k,d\theta)\,T \qquad dT = [T(dx,dy,dz)R(k,d\theta) - I]\,T \Rightarrow dT = \Delta T$$

- диференцијална промена dT $\quad dT = \Delta T = T\,{}^T\Delta \Rightarrow {}^T\Delta = T^{-1}\Delta T$

$$dT = \begin{bmatrix} dn_x & do_x & da_x & dp_x \\ dn_y & do_y & da_y & dp_y \\ dn_z & do_z & da_z & dp_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^T\delta x = \delta \cdot n \qquad {}^T\delta y = \delta \cdot o \qquad {}^T\delta z = \delta \cdot a$$

$${}^Tdx = n[(\delta \times p) + d] \qquad {}^Tdy = o[(\delta \times p) + d] \qquad {}^Tdz = a[(\delta \times p) + d]$$

$${}^u\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ⇒ во однос на РС

$${}^T\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -{}^T\delta z & {}^T\delta y & {}^Tdx \\ {}^T\delta z & 0 & -{}^T\delta x & {}^Tdy \\ -{}^T\delta y & {}^T\delta x & 0 & {}^Tdz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ⇒ во однос на подвижен систем

Геометриски Јакобијан

- позиција на рака во простор

$$ {}^0T_n(q) = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_n(q) & {}^0p_n(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- Јакобијан на линиска брзина

$$ J_v = \begin{bmatrix} J_{v1} & J_{v2} & \dots & J_{vn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\, {}^0p_n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial\, {}^0p_n}{\partial q_n} \end{bmatrix} $$

- аголна брзина $\omega = \hat{\omega}\,\dot{\theta}$

- оска на ротација

$$ \hat{\omega} = a_1\hat{x} + a_2\hat{y} + a_3\hat{z} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad \omega = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \dot{\theta} $$

- Јакобијанот на аголна брзина е во z-колоната на ${}^0T_{i-1}$

- $J_{\omega i}$ -колони на матрицата J_ω, $k = [0 \;\; 0 \;\; 1]^T$ $\quad \rho_i = \{ \underset{R}{1}, \underset{T}{0} \}$

$$ J_\omega = \begin{bmatrix} J_{\omega 1} & J_{\omega 2} & \dots & J_{\omega n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1\, {}^0R_0\, k & \rho_2\, {}^0R_1\, k & \dots & \rho_n\, {}^0R_{n-1}\, k \end{bmatrix} $$

- цилиндрични координати

$$ T_{cyl}(r,\alpha,e) = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & rC\alpha \\ S\alpha & C\alpha & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ \begin{aligned} x &= rC\alpha & \dot{x} &= \dot{r}C\alpha - r\dot{\alpha}S\alpha \\ y &= rS\alpha & \dot{y} &= \dot{r}S\alpha + r\dot{\alpha}C\alpha \\ z &= e & \dot{z} &= \dot{e} \end{aligned} $$

$$ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha & -rS\alpha & 0 \\ S\alpha & rC\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J_v} \cdot \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{e} \end{bmatrix} $$

- Сферни координати

$$T_{sph}(r,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} C\beta C\gamma & -S\gamma & S\beta C\gamma & rS\beta C\gamma \\ C\beta S\gamma & C\gamma & S\beta S\gamma & rS\beta S\gamma \\ -S\beta & 0 & C\beta & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = rS\beta C\gamma$$
$$y = rS\beta S\gamma$$
$$z = rC\beta$$

$$\dot{x} = \dot{r}S\beta C\gamma + r\dot{\beta}C\beta C\gamma - r\dot{\gamma}S\beta S\gamma \qquad \dot{y} = \dot{r}S\beta S\gamma + r\dot{\beta}C\beta S\gamma + r\dot{\gamma}S\beta C\gamma \qquad \dot{z} = \dot{r}C\beta - r\dot{\beta}S\beta$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S\beta C\gamma & rC\beta C\gamma & -rS\beta S\gamma \\ S\beta S\gamma & rC\beta S\gamma & rS\beta C\gamma \\ C\beta & -rS\beta & 0 \end{bmatrix}}_{J_v} \cdot \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$