Aproksimacija najdužeg razapinjućeg stabla sa susedstvima

Branko Cvetković

19. januar 2026.

1 O autoru i radu

Autor ovog naučnog rada je prof. dr Ahmad Biniaz[1], vanredni profesor na Vindzorskom univerzitetu[2] i gostujući profesor na Karlentskom univerzitetu[3] u Kanadi.

Rad je objavljen u časopisu *Journal of Computational Geometry*[4] iz aprila 2023. godine pod nazivom *Approximating longest spanning tree with neighborhoods* u 14. tomu i prvom broju, i može se naći na stranicama 1–13.

2 Pregled rada

2.1 Problem predstavljen u radu

Problem kojim se rad bavi se tiče razapinjućih stabala, jednim od osnovnih pojmova teorije grafova. Konkretan problem glasi: *Kako pronaći najduže razapinjuće stablo čiji su čvorovi po jedna tačka iz svakog susedstva?* (ovaj problem poznat je i kao *Max-ST-NB* problem).

Ovaj problem je teži od problema pronalaženja najvećeg razapinjućeg stabla u klasičnom grafu jer obuhvata beskonačno mnogo tačaka iz svakog od konačno mnogo oblasti u ravni. Zbog neizvesnosti da li bi algoritam koji daje *optimalno* rešenje ovakvog problema bio polinomijalne složenosti, pribeglo se optimizacijama i kreiranjima algoritama koji predstavljaju optimizacije

[1] abiniaz@uwindsor.ca
[2] https://www.uwindsor.ca/
[3] https://carleton.ca/
[4] https://jocg.org/index.php/jocg

optimalnog rešenja. Konačni rezultat ovog rada u tom pogledu je davanje $\frac{\sqrt{7}-1}{3}$-*aproksimacije* ($\approx$ 0,548) optimalnog algoritma.

Još jedan „manji“ rezultat koji rad daje je dokaz da ne postoji algoritam koji daje aproksimaciju optimalnog rešenja bolju od 0,5 ukoliko *uvek* koristi bihromatske dijametralne parove[5], ali njega ovde nećemo diskutovati.

2.2 Slični radovi i značaj

Rad predstavlja poboljšanje algoritma koji su ranije dali Čen[6] i Dumitresku[7] koji daje 0,511-aproksimaciju ovog algoritma. Problemi slični ovome su *Euklidski problem Štajnerovog drveta* koji se bavi optimalnim povezivanjem tačaka u Euklidovoj ravni i koji je NP-težak, *Problem najmanjeg razapinjućeg stabla između susedstava u Euklidovoj ravni*, *Problem putujućeg trgovca sa susedstvima* i drugi.

Ovaj i slični problemi imaju svoju primenu u analizi heuristika za optimizaciju algoritama vezanih za kombinatorne probleme, algoritmima uređenog i homogenog klasterovanja, problemima maksimalne triangulacije, ali su bitni i kao nova saznanja u oblasti razapinjućih stabala kao jednog od najbitnijih pojmova teorije grafova.

3 Rezultati rada

Za početak biće potrebno uvesti sledeće pojmove:

- **zvezda sa centrom u p:** drvo kod koga su sve grane incidentne sa p (v. Sliku 1(a));
- **dvozvezda sa centrima u a i b:** drvo koje se sastoji iz dve zvezde sa centrima u a i b i kod koga su ti centri povezani (v. Sliku 1(b));
- **susedstvo Q_i:** skup mnogouglova u Euklidovoj ravni koji predstavljaju jednu celinu;
- **X_i:** skup koji sadrži sva temena mnogouglova iz susedstva Q_i;
- **maksimalna razapinjuća zvezda sa centrom u $p \in X_i$:** zvezda sa centrom u p koja ima grane ka najdaljim (u smislu euklidskog rastojanja) tačkama u svakom preostalom susedstvu;

[5]Bihromatski dijametralni parovi su parovi tačaka iz dva susedstva koji imaju najveće moguće rastojanje i obojeni su različito.

[6]*Ke Chen*, kineski matematičar i informatičar.

[7]*Adrian Dumitrescu*, rumunski matematičar i informatičar.

- najmanji sadržeći krug: najmanji mogući krug koji sadrži sve tačke iz X_i za sve i.

(a) Zvezda sa centrom u v.

(b) Dvozvezda sa centrima u v i u.

Slika 1: Grafički prikaz drveta od interesa.

Rad sada daje algoritam za pronalaženje najdužeg razapinjućeg stabla.

Kao ulaz u algoritam dati skupovi $X_1, X_2, ..., X_n$ koji predstavljaju temena odgovarajućih susedstava, od kojih je svako susedstvo (tj. tačke unutar njega) obojeno *različitom* bojom. Neka je n broj tih susedstava, a N ukupan broj temena iz svih susedstava, tj. $N = \sum_{k=1}^{n} |X_k|$.

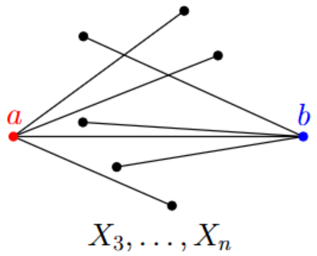
Algoritam se sastoji iz dva dela: prvo se pronalazi dvozvezda D na sledeći način.

- Pronađimo bihromatski dijametralni par tačaka a i b. Neka su, bez umanjenja opštosti, $a \in X_1$ i $b \in X_2$.
- Za sve $i \in \{3, 4, ..., n\}$ odredimo $p_i \in X_i$ i $q_i \in X_i$ td. je p_i euklidski najudaljenija od a, a q_i od b.
- Ukoliko je udaljenost između p_i i a veća od udaljenosti između q_i i b, u D dodajmo granu p_i, a inače dodajmo granu q_i.

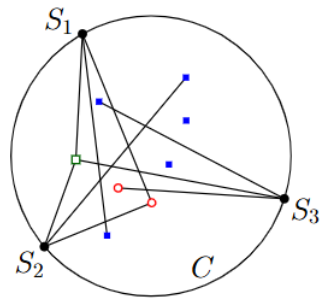
Ovako kreirana dvozvezda D se pruža kroz sva susedstva (v. Sliku 2(a)). Drugi deo algoritma zahteva kreiranje nekoliko zvezdi na sledeći način.

- Neka je C najmanji sadržeći krug svih tačaka iz svih susedstava.
- Ukoliko C sadrži dve tačke (koje, usput rečeno, formiraju prečnik C), kreirajmo maksimalne razapinjuće zvezde S_1 i S_2 sa njima u centrima.
- Inače, ukoliko C sadrži tri ili više tačaka, odaberimo one tri koje formiraju takav trougao koji sadrži centar od C (takve tri tačke moraju da postoje), i formirajmo maksimalne razapinjuće zvezde S_1, S_2 i S_3 sa centrima u tim tačkama.

Sada kada imamo formirane D, S_1, S_2 i (potencijalno) S_3 (v. Sliku 2(b)), vratimo kao izlaz iz algoritma onu strukturu koja ima najveću ukupnu dužinu grana.



(a) Izgled dvozvezde D nakon prvog koraka algoritma.



(b) Izgled zvezda S_1, S_2 i S_3 nakon drugog koraka algoritma.

Slika 2: Drveta koja se dobiju nakon sprovedenog algoritma.

Rad dalje nastavlja da diskutuje i analizira algoritam i, uz pomoć 4 dodatne leme, nalazi sledeće:

- bihromatski dijametralni par može se naći u asimptotskom vremenu $O(Nlog(N)log(n))$;
- najmanji sadržeći krug može se izračunati u asimptotskom vremenu $O(N)$;
- nakon nalaženja bihromatskog dijametralnog para i najmanjeg sadržećeg kruga, ostatak algoritma radi u asimptotskom vremenu $O(N)$;
- 0,548-aproksimacija najdužeg razapinjućeg stabla sa susedstvima može se izračunati u linearnom vremenu, nakon izračunavanja bihromatskog dijametralnog para (ovo je u radu predstavljeno kao *Teorema 1*).

Rad se završava konstatacijom da je verovatno moguće izvesti i bolju aproksimaciju i daje savete za dalje unapređenje i analizu algoritma i problema.

NAPOMENA: Ilustracije korišćene u ovom seminarskom radu generisane su putem *online* alata *Graph Editor* koji se može naći na veb-stranici *https://csacademy.com/app/graph_editor/*, ili su preuzete direktno iz originalnog rada.