Hardware / Software Codesign

Theorie : Cordic

Algorithmus zur Vektorrotation

Florian Eibensteiner

Embedded Systems Design
FH Hagenberg ESD

2019

R 4686

Inhalt

Allgemein

- Alle trigonometrischen Funktionen können über Vektorrotation berechnet werden.
- Cordic – *Coordinate Rotation Digital Computer*
  - Koordinatentransformation
  - Winkelfunktionen
  - Hyperbolische Funktionen
  - Multiplizieren, Dividieren
  - ...

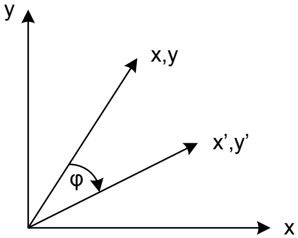
Grundlage:

- Givens Transformation

$$x' = x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi)$$
$$y' = y\cos(\varphi) + x\sin(\varphi)$$

Allgemein

- Rotiert einen Vektor um den Winkel φ



Inhalt

Herleitung – zirkuläre Rotation

- Ausgehend von obiger Transformation

$$x' = x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi)$$
$$y' = y\cos(\varphi) + x\sin(\varphi)$$

- Dies kann vereinfacht werden zu:

$$x' = \cos(\varphi)[x - y\tan(\varphi)]$$
$$y' = \cos(\varphi)[y + x\tan(\varphi)]$$

- Wähle die Rotationswinkel so, dass

$$\tan(\varphi) = \pm 2^{-k}$$

- Vereinfacht die Multiplikation zu einem Shift

Herleitung – zirkuläre Rotation

- Rotation $\rightarrow$ Teilrotationen um den Winkel φ_i

$$\varphi = \varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \varphi_3 \pm \varphi_4 \pm ... \pm \varphi_n$$

- Bei jeder Iteration wird die Drehrichtung bestimmt.
- Der Faktor

$$\cos(\varphi_i) = \cos(-\varphi_i)$$

kann durch Faktor K_i ersetzt werden

$$K_i = \cos(\arctan(2^{-i})) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2^{-2i}}}$$

$$A_n = \prod_n \sqrt{1 + 2^{-2i}}$$

Herleitung – zirkuläre Rotation

- Daraus folgt

$$x_{i+1} = K_i[x_i - y_i d_i 2^{-i}]$$
$$y_{i+1} = K_i[y_i + x_i d_i 2^{-i}]$$

- Winkel der zusammengesetzten Rotation besteht aus einer Sequenz von Richtungen der einzelnen Rotationen
- Daher wird eine zusätzliche Gleichung benötigt:

$$z_{i+1} = z_i - d_i . \arctan(2^{-i})$$

Herleitung – zirkuläre Rotation

- Somit ergeben sich alle Gleichungen zur Berechnung der Winkelfunktionen zu:

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i - y_i d_i 2^{-i} \\
y_{i+1} &= y_i + x_i d_i 2^{-i} \\
z_{i+1} &= z_i - d_i . \arctan(2^{-i})
\end{aligned}
$$

- Wobei d_i die Drehrichtung bestimmt:

$$
d_i := \begin{cases} 1 & \text{für } z_i \geq 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}
$$

Initialisierung

- Drehen des Vektors von der x-Achse aus in Richtung des Zielwinkels
- Startwinkel ist Zielwinkel
- Definiert von 90° bis -90°

$$x_0 = 1$$
$$y_0 = 0$$
$$z_0 = \varphi$$
$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$