Plus court chemin

Christophe Viroulaud

Terminale NSI

Plus court chemin

Christophe Viroulaud

Terminale NSI

2021-05-03

Comment fonctionnent les algorithmes de plus court chemin ?

RIP déjà utilisé avec ARPANET !

Comment fonctionnent les algorithmes de plus court chemin ?

Graphe orienté / non orienté

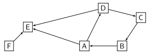


Figure – graphe orienté

Graphe orienté / non orienté

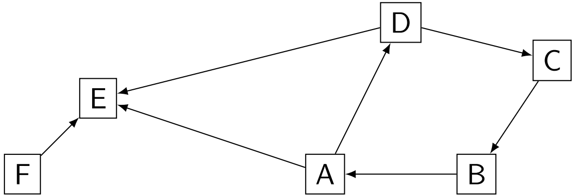


Figure – graphe orienté

Figure – graphe orienté
À retenir
Pour chaque nœud on peut définir ses **prédécesseurs** et ses **successeurs**.

1. Le nœud F ne possède pas de *prédécesseur*.
2. Le nœud E ne possède pas de *successeur*.

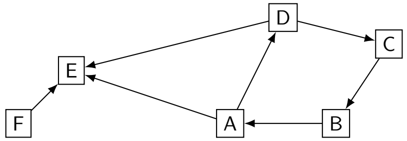


Figure – graphe orienté

À retenir

Pour chaque nœud on peut définir ses **prédécesseurs** et ses **successeurs**.

Activité 1 :
1. Établir la matrice d'adjacence du graphe figure 2.
2. Établir le dictionnaire des successeurs du graphe figure 2.
3. Déterminer un cycle dans le graphe.

on peut faire dictionnaire des prédécesseurs

Activité 1 :

1. Établir la matrice d'adjacence du graphe figure 2.
2. Établir le dictionnaire des successeurs du graphe figure 2.
3. Déterminer un cycle dans le graphe.

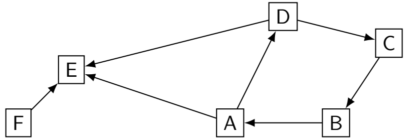
La matrice n'est plus symétrique

Correction

matrice = [[0, 0, 0, 1, 1, 0],
[1, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 1, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 1, 0, 1, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 1, 0]]

Code 1 – Matrice d'adjacence des successeurs

Correction




```
matrice = [ [0, 0, 0, 1, 1, 0],
            [1, 0, 0, 0, 0, 0],
            [0, 1, 0, 0, 0, 0],
            [0, 0, 1, 0, 1, 0],
            [0, 0, 0, 0, 0, 0],
            [0, 0, 0, 0, 1, 0]]
```

Code 1 – Matrice d'adjacence des successeurs

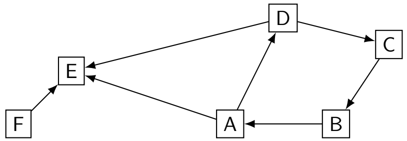
La matrice n'est plus symétrique

Correction

matrice = [[0, 1, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 1, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 1, 0, 0],
[1, 0, 0, 0, 0, 0],
[1, 0, 0, 1, 0, 1],
[0, 0, 0, 0, 0, 0]]

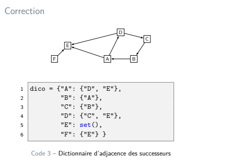
Code 2 – Matrice d'adjacence des prédécesseurs

Correction



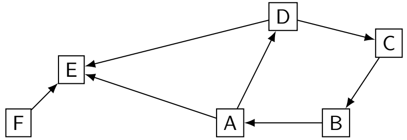

```
matrice = [ [0, 1, 0, 0, 0, 0],
            [0, 0, 1, 0, 0, 0],
            [0, 0, 0, 1, 0, 0],
            [1, 0, 0, 0, 0, 0],
            [1, 0, 0, 1, 0, 1],
            [0, 0, 0, 0, 0, 0]]
```

Code 2 – Matrice d'adjacence des **prédécesseurs**



On peut utiliser des tableaux en place des ensembles.

Correction




```python
dico = {"A": {"D", "E"},
        "B": {"A"},
        "C": {"B"},
        "D": {"C", "E"},
        "E": set(),
        "F": {"E"} }
```

Code 3 – Dictionnaire d'adjacence des successeurs

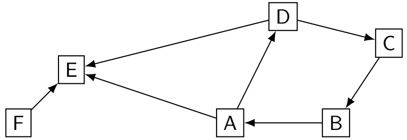
On peut utiliser des tableaux en place des ensembles.

Correction

dico = {"A": {"B"},
"B": {"C"},
"C": {"D"},
"D": {"A"},
"E": {"A", "D", "F"},
"F": set() }

Code 4 – Dictionnaire d'adjacence des **prédécesseurs**

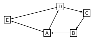
Correction




```
dico = {"A": {"B"},
        "B": {"C"},
        "C": {"D"},
        "D": {"A"},
        "E": {"A", "D", "F"},
        "F": set() }
```

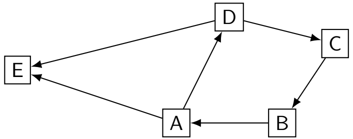
Code 4 – Dictionnaire d'adjacence des **prédécesseurs**

Correction



Un cycle
A → D → C → B → A

Correction



Un cycle

$$A \to D \to C \to B \to A$$

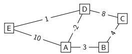


FIGURE – graphe non orienté pondéré

pondération peut être négative

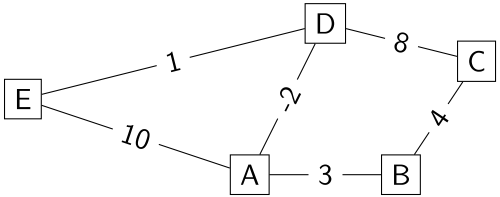
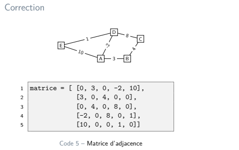


FIGURE – graphe non orienté pondéré

Activité 2 :
1. Établir la matrice d'adjacence du graphe figure 3.
2. Établir le dictionnaire d'adjacence du graphe figure 3.

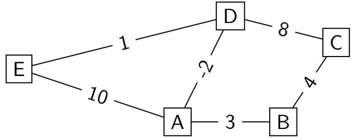
Activité 2 :

1. Établir la matrice d'adjacence du graphe figure 3.
2. Établir le dictionnaire d'adjacence du graphe figure 3.



La matrice est symétrique

Correction



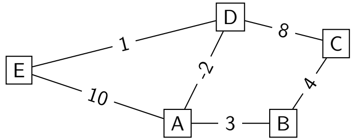

```
matrice = [ [0, 3, 0, -2, 10],
            [3, 0, 4, 0, 0],
            [0, 4, 0, 8, 0],
            [-2, 0, 8, 0, 1],
            [10, 0, 0, 1, 0]]
```

Code 5 – Matrice d'adjacence

Dictionnaire de dictionnaires

Correction
dico = {"A": {"B": 3, "D": −2, "E": 10},
"B": {"A": 3, "C": 4},
"C": {"B": 4, "D": 8},
"D": {"A": −2, "C": 8, "E": 1},
"E": {"D": 1, "E": 10}}
Code 6 – Dictionnaire d'adjacence

Correction




```
dico = {"A": {"B": 3, "D": −2, "E": 10},
        "B": {"A": 3, "C": 4},
        "C": {"B": 4, "D": 8},
        "D": {"A": −2, "C": 8, "E": 1},
        "E": {"D": 1, "E": 10}}
```

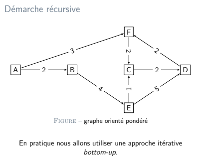
Code 6 – Dictionnaire d'adjacence

Algorithme de Bellman-Ford : Fin des années 50

La distance pour atteindre chaque nœud correspond à la distance pour atteindre son prédécesseur à laquelle on ajoute le poids de l'arête les séparant.

Algorithme de Bellman-Ford : Fin des années 50

La distance pour atteindre chaque nœud correspond à la distance pour atteindre son prédécesseur à laquelle on ajoute le poids de l'arête les séparant.



1. Bellman « père de l'approche dynamique »

Remarque

2. Dans le graphe figure 4 les pondérations représentent un nombre de routeurs traversés pour atteindre le nœud (routeur) suivant.

Démarche récursive

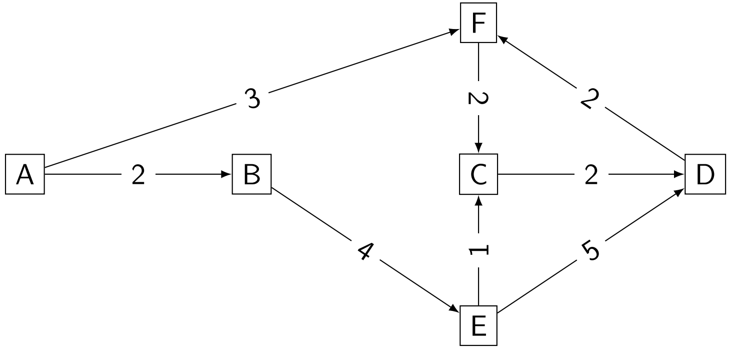


FIGURE – graphe orienté pondéré

En pratique nous allons utiliser une approche itérative *bottom-up*.

peut servir pour retrouver chemin, distance mini...

Pour chaque routeur

On obtient un tableau contenant la distance minimale entre le routeur de départ et chaque autre routeur.

Pour chaque routeur

On obtient un tableau contenant la distance minimale entre le routeur de départ et chaque autre routeur.

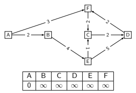
1 Créer un tableau des distances entre A et les routeurs (A inclus), initialisées à l'infini.
2 Dans le tableau modifier la distance vers A à 0.
3
4 Tant que (le nombre d'itérations) < (nombre de routeurs)
5 Pour chaque arc du graphe
6 Si (la distance du routeur) > (la distance de son prédé cesseur + poids de l'arc entre les deux routeurs)
7 La distance du routeur est remplacée par cette nouvelle valeur
8
Code 7 – Algorithme de Bellman Ford

1. ligne 2 de l'algo : en effet distance de A à A $= 0$
2. ligne 4 : on fait autant d'itérations qu'il y a de routeurs = pire des cas $\rightarrow$ on pourra améliorer

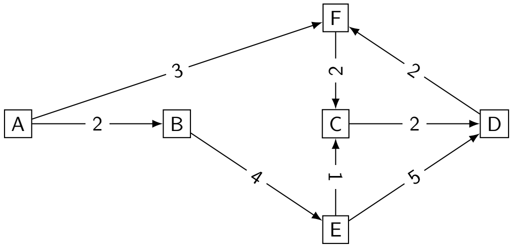

```
1 Créer un tableau des distances entre A et les routeurs (A inclus
    ), initialisées à l'infini.
2 Dans le tableau modifier la distance vers A à 0.
3
4 Tant que (le nombre d'itérations) < (nombre de routeurs)
5     Pour chaque arc du graphe
6         Si (la distance du routeur) > (la distance de son prédé
      cesseur + poids de l'arc entre les deux routeurs)
7             La distance du routeur est remplacée par cette
      nouvelle valeur
8
```

Code 7 – Algorithme de Bellman Ford

Initialisation

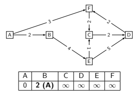


Initialisation



A	B	C	D	E	F
0	∞	∞	∞	∞	∞

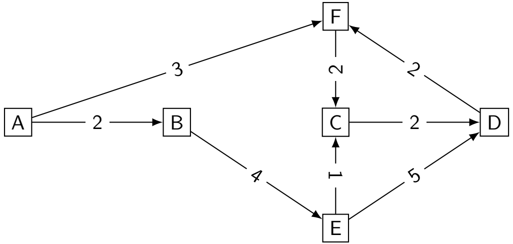
Première itération



La distance calculée pour atteindre B correspond à la distance (du tableau) de son prédécesseur (A) augmentée du poids de l'arc A-B :

$$0 + 2 = 2 < \infty$$

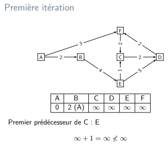
Première itération



A	B	C	D	E	F
0	**2 (A)**	∞	∞	∞	∞

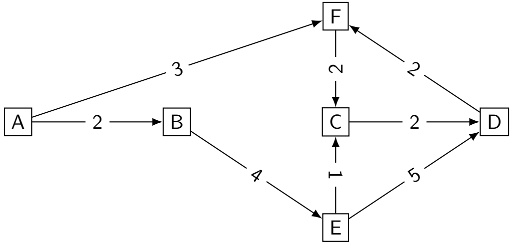
Activité 3 : Continuer de dérouler l'algorithme sur le graphe figure 4.

Activité 3 : Continuer de dérouler l'algorithme sur le graphe figure 4.



On est toujours dans la première itération ; on vérifie chaque arc.

Première itération

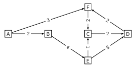


A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	∞	∞

Premier prédécesseur de C : E

$$\infty + 1 = \infty \not< \infty$$

Première itération

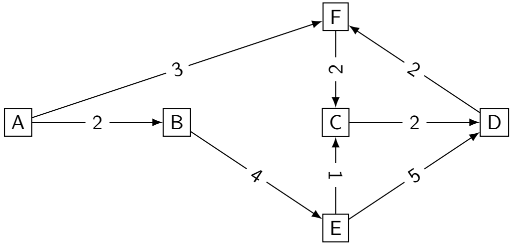


A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	∞	∞

Second prédécesseur de C : F

$\infty + 2 = \infty \not< \infty$

Première itération

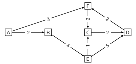


A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	∞	∞

Second prédécesseur de C : F

$$\infty + 2 = \infty \not< \infty$$

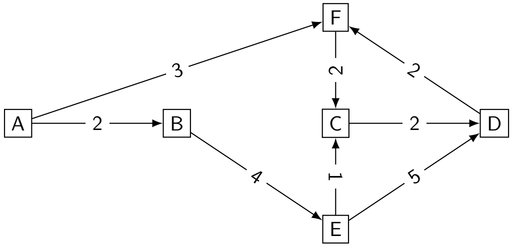
Première itération



A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	∞	∞

Même constat pour D

Première itération

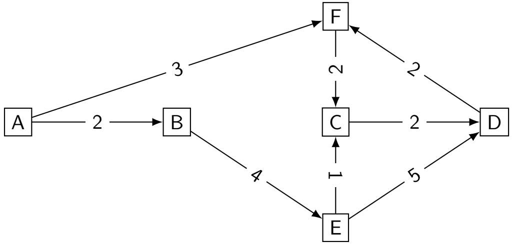


A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	∞	∞

Même constat pour D

Première itération
Prédécesseur de E : B
2 + 4 = 6 < ∞

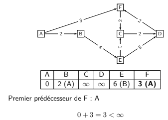
Première itération



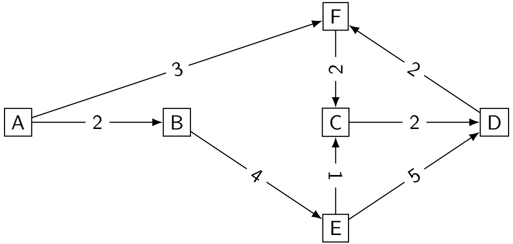
A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	**6 (B)**	∞

Prédécesseur de E : B

$$2 + 4 = 6 < \infty$$


Première itération
Premier prédécesseur de F : A
$0 + 3 = 3 < \infty$

Première itération

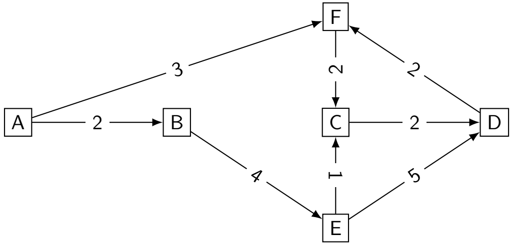


A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	**3 (A)**

Premier prédécesseur de F : A

$$0 + 3 = 3 < \infty$$

Première itération

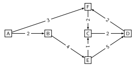


A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)

Second prédécesseur de F : D

$$\infty + 2 = \infty \nless 3$$

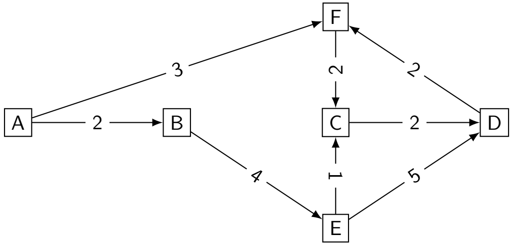
Première itération



A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)

Fin de la première itération

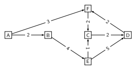
Première itération



A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)

Fin de la première itération

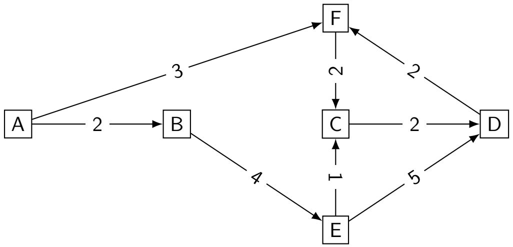
Deuxième itération



A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)

Pas de modification pour A et B

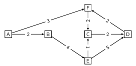
Deuxième itération



A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)

Pas de modification pour A et B

Deuxième itération

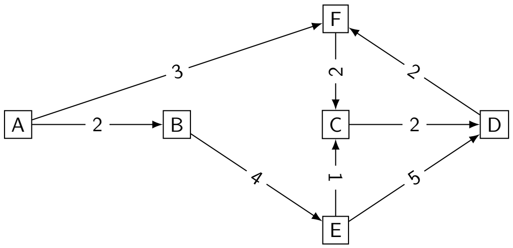


A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)
0	2 (A)	**7 (E)**	∞	6 (B)	3 (A)

Premier prédécesseur de C : E

$$6 + 1 = 7 < \infty$$

Deuxième itération



A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)
0	2 (A)	**7 (E)**	∞	6 (B)	3 (A)

Premier prédécesseur de C : E

$$6 + 1 = 7 < \infty$$

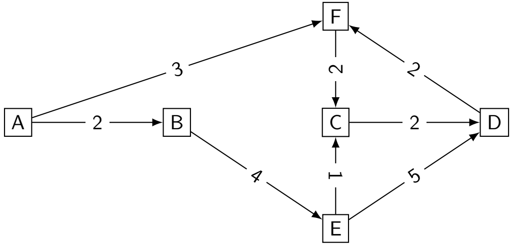
Deuxième itération

A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)
0	2 (A)	**5 (F)**	∞	6 (B)	3 (A)

Second prédécesseur de C : F

$3 + 2 = 5 < 7$

Deuxième itération

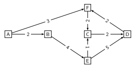


A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)
0	2 (A)	**5 (F)**	∞	6 (B)	3 (A)

Second prédécesseur de C : F

$$3 + 2 = 5 < 7$$

Deuxième itération

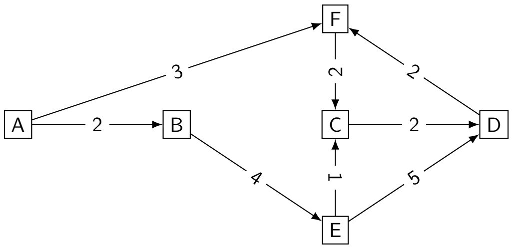


A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)
0	2 (A)	5 (F)	**7 (C)**	6 (B)	3 (A)

Premier prédécesseur de D : C

$$5 + 2 = 7 < \infty$$

Deuxième itération

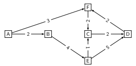


A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)
0	2 (A)	5 (F)	**7 (C)**	6 (B)	3 (A)

Premier prédécesseur de D : C

$$5 + 2 = 7 < \infty$$

Deuxième itération

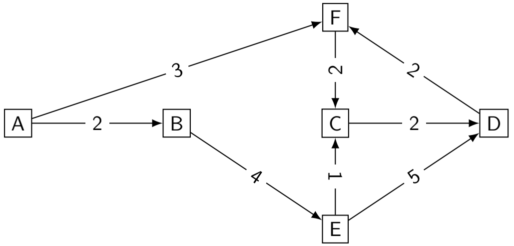


A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)
0	2 (A)	5 (F)	7 (C)	6 (B)	3 (A)

Second prédécesseur de D : E

$$6 + 5 = 11 \not< 7$$

Deuxième itération



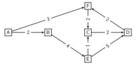
A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)
0	2 (A)	5 (F)	7 (C)	6 (B)	3 (A)

Second prédécesseur de D : E

$$6 + 5 = 11 \not< 7$$

2021-05-03

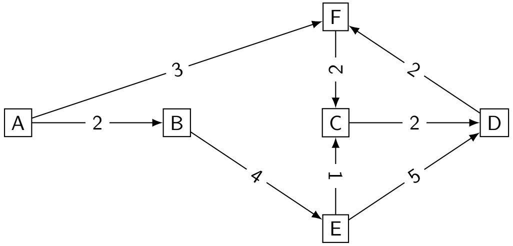
Deuxième itération



A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)
0	2 (A)	5 (F)	7 (C)	6 (B)	3 (A)

Pas de changement pour E et F

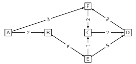
Deuxième itération



A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)
0	2 (A)	5 (F)	7 (C)	6 (B)	3 (A)

Pas de changement pour E et F

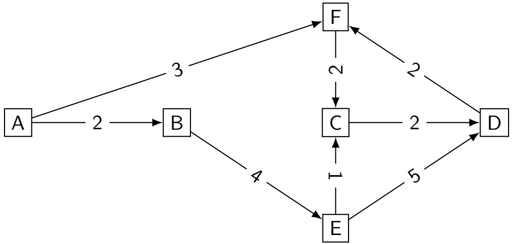
Deuxième itération



A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)
0	2 (A)	5 (F)	7 (C)	6 (B)	3 (A)

Fin de la deuxième itération

Deuxième itération



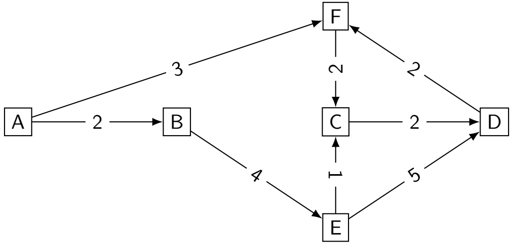
A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)
0	2 (A)	5 (F)	7 (C)	6 (B)	3 (A)

Fin de la deuxième itération

Troisième itération
Pas de changement lors de la troisième itération

1. amélioration de l'algorithme : on peut s'arrêter là
2. On peut retracer le chemin en partant de la fin : D $\rightarrow$ C $\rightarrow$ F $\rightarrow$ A

Troisième itération



A	B	C	D	E	F
0	2 (A)	∞	∞	6 (B)	3 (A)
0	2 (A)	5 (F)	7 (C)	6 (B)	3 (A)
0	2 (A)	5 (F)	7 (C)	6 (B)	3 (A)

Pas de changement lors de la troisième itération ligne 4 = on peut faire une amélioration : si pas de modification pendant l'itération, on peut s'arrêter

▶ du nombre de sommets (notée S) : on visite chaque sommet (ligne 4) ;
1 Tant que (le nombre d'itérations) < (nombre de routeurs)

- du nombre de sommets (notée S) : on visite chaque sommet (ligne 4) ;

```
1 Tant que (le nombre d'itérations) < (nombre
    de routeurs)
```

- du nombre de sommets (notée S) : on visite chaque sommet (ligne 4) ;
1 Tant que (le nombre d'itérations) < (nombre de routeurs)
- du nombre d'arcs (notée A) : pour chaque sommet on regarde tous les arcs du graphe (ligne 5).
1 Pour chaque arc du graphe

ligne 4 = on peut faire une amélioration : si pas de modification pendant l'itération, on peut s'arrêter

- du nombre de sommets (notée S) : on visite chaque sommet (ligne 4) ;

```
1 Tant que (le nombre d'itérations) < (nombre
      de routeurs)
```

- du nombre d'arcs (notée A) : pour chaque sommet on regarde tous les arcs du graphe (ligne 5).

```
1 Pour chaque arc du graphe
```

Complexité de l'algorithme de Bellman Ford

$O(S.A)$

Complexité de l'algorithme de Bellman Ford

$$O(S.A)$$

Edsger Dijkstra

principe : construire un sous-graphe en ajoutant à chaque itération un sommet de distance minimale.

1. peut se contenter de renvoyer la distance départ/arrivée (et le chemin)
2. graphe non orienté possible
3. parfois appelé Moore-Dijkstra

Edsger Dijkstra

principe : construire un sous-graphe en ajoutant à chaque itération un sommet de distance minimale.

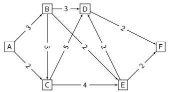


Figure – graphe orienté et pondéré

Remarque

Les poids de chaque arc représentent le coût de chaque connexion.

coût 5 → 20Mbit/s
coût 2 → 50Mbit/s

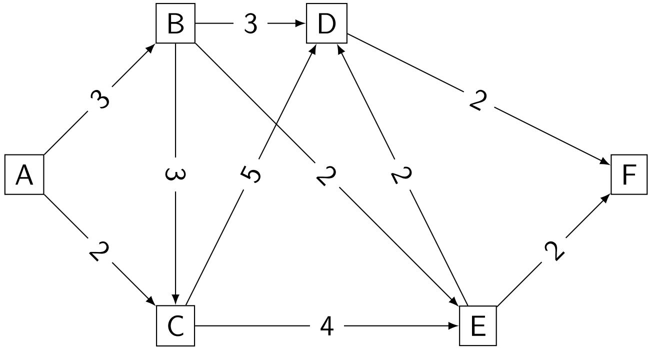


Figure – graphe orienté et pondéré

```
1 Créer un tableau des distances entre A et les routeurs (A inclus
    ), initialisées à l'infini.
2 Dans le tableau modifier la distance vers A à 0.
3
4 Tant qu'il reste des routeurs non sélectionnés
5     Parmi les routeurs non−sélectionnés, choisir le routeur (noté
      S) ayant la plus petite distance.
6     Pour chaque routeur adjacent à S (noté V) et non déjà sé
     lectionné:
7         Si (la distance de V) > (la distance de S + poids S−V)
8             La distance de V est remplacée par cette nouvelle
     valeur
```

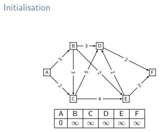
Code 8 – Algorithme de Dijkstra

1. S = suivant ; V = voisin
2. ligne 7 : on compare encore la distance déjà enregistrée à distance du voisin + arc

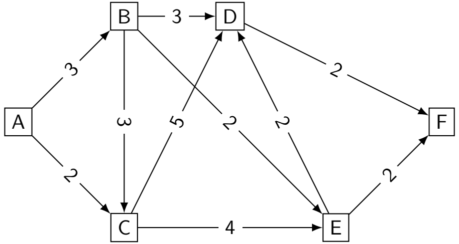

```
1 Créer un tableau des distances entre A et les routeurs (A inclus
    ), initialisées à l'infini.
2 Dans le tableau modifier la distance vers A à 0.
3
4 Tant qu'il reste des routeurs non sélectionnés
5     Parmi les routeurs non−sélectionnés, choisir le routeur (noté
      S) ayant la plus petite distance.
6     Pour chaque routeur adjacent à S (noté V) et non déjà sé
     lectionné:
7         Si (la distance de V) > (la distance de S + poids S−V)
8             La distance de V est remplacée par cette nouvelle
     valeur
```

Code 8 – Algorithme de Dijkstra

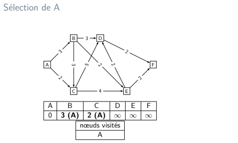
2021-05-03



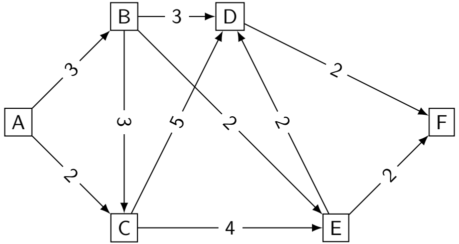
Initialisation



A	B	C	D	E	F
0	∞	∞	∞	∞	∞



Sélection de A

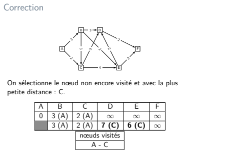


A	B	C	D	E	F
0	**3 (A)**	**2 (A)**	∞	∞	∞

nœuds visités
A

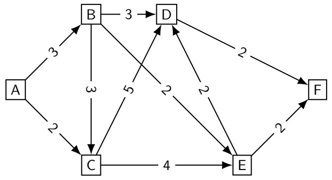
Activité 4 : Continuer de dérouler l'algorithme sur le graphe figure 5.

Activité 4 : Continuer de dérouler l'algorithme sur le graphe figure 5.



cellule grisée = nœud déjà visité, on a déjà sa route la + courte

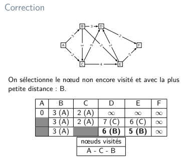
Correction



On sélectionne le nœud non encore visité et avec la plus petite distance : C.

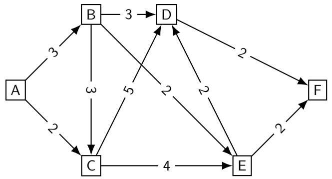
A	B	C	D	E	F
0	3 (A)	2 (A)	∞	∞	∞
	3 (A)	2 (A)	**7 (C)**	**6 (C)**	∞

nœuds visités
A - C



C n'est pas regardé : on a déjà trouvé la + petite distance pour lui = il a déjà été visité

Correction

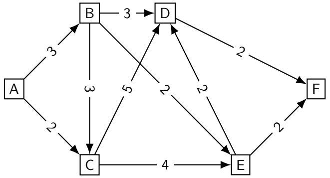


On sélectionne le nœud non encore visité et avec la plus petite distance : B.

A	B	C	D	E	F
0	3 (A)	2 (A)	∞	∞	∞
	3 (A)	2 (A)	7 (C)	6 (C)	∞
	3 (A)		**6 (B)**	**5 (B)**	∞

nœuds visités
A - C - B

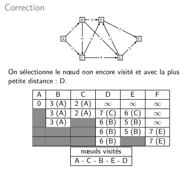
Correction



On sélectionne le nœud non encore visité et avec la plus petite distance : E.

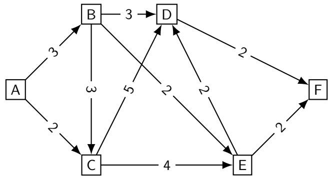
A	B	C	D	E	F
0	3 (A)	2 (A)	∞	∞	∞
	3 (A)	2 (A)	7 (C)	6 (C)	∞
	3 (A)		6 (B)	5 (B)	∞
			6 (B)	5 (B)	**7 (E)**

nœuds visités
A - C - B - E



pas de modification

Correction



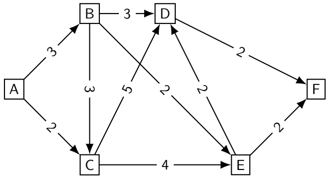
On sélectionne le nœud non encore visité et avec la plus petite distance : D.

A	B	C	D	E	F
0	3 (A)	2 (A)	∞	∞	∞
	3 (A)	2 (A)	7 (C)	6 (C)	∞
	3 (A)		6 (B)	5 (B)	∞
			6 (B)	5 (B)	7 (E)
			6 (B)		7 (E)

nœuds visités
A - C - B - E - D

pas de modification

Correction



On sélectionne le nœud non encore visité et avec la plus petite distance : F.

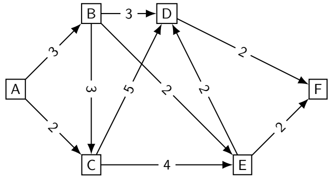
A	B	C	D	E	F
0	3 (A)	2 (A)	∞	∞	∞
	3 (A)	2 (A)	7 (C)	6 (C)	∞
	3 (A)		6 (B)	5 (B)	∞
			6 (B)	5 (B)	7 (E)
			6 (B)		7 (E)
					7 (E)

nœuds visités
A - C - B - E - D - F

tous les nœuds ont été visités = fin de l'algorithme. On peut reconstruire le chemin.

pour F : F → E → B → A

Correction



On sélectionne le nœud non encore visité et avec la plus petite distance : F.

A	B	C	D	E	F
0	3 (A)	2 (A)	∞	∞	∞
	3 (A)	2 (A)	7 (C)	6 (C)	∞
	3 (A)		6 (B)	5 (B)	∞
			6 (B)	5 (B)	7 (E)
			6 (B)		7 (E)
					7 (E)

nœuds visités
A - C - B - E - D - F

▶ La complexité dépend du nombre de sommets S et du nombre d'arcs A.

1. hors programme
2. utilisation de tas par exemple

- La complexité dépend du nombre de sommets S et du nombre d'arcs A.

1. hors programme
2. utilisation de tas par exemple

- La complexité dépend du nombre de sommets S et du nombre d'arcs A.
- Le point clé de l'algorithme tient dans la recherche de la distance minimale.

Parmi les routeurs non−sélectionnés, choisir le routeur (noté S) ayant la plus petite distance.

- La complexité dépend du nombre de sommets S et du nombre d'arcs A.
- Le point clé de l'algorithme tient dans la recherche de la distance minimale.

```
Parmi les routeurs non−sélectionnés, choisir le routeur (
    noté S) ayant la plus petite distance.
```

Complexité de l'algorithme de Dijkstra

$O((A+S)\times\log S)$

Complexité de l'algorithme de Dijkstra

$$O((A+S)\times\log S)$$