Arbre binaire
Notation polonaise

Christophe Viroulaud

Terminale - NSI

Algo 06

En 1920 le mathématicien Jan Łukasiewicz présente la *notation polonaise* qui permet d'exprimer des expressions mathématiques sans utiliser de parenthèse, mais traitant néanmoins toute formule sans ambiguïté.
L'expression arithmétique

$$2 \times (3 + 4)$$

devient en notation polonaise

$$\times\ 2 + 3\ 4$$

Dans les années 50, Charles L. Hamblin s'intéresse à variante *inversée* de cette notation. Elle est en effet particulièrement bien adaptée à la manière dont les processeurs traitent leurs opérandes. En notation polonaise inversée, l'expression précédente s'écrit

$$2\ 3\ 4\ +\ \times$$

Déterminer une structure de données adaptée au calcul en notation polonaise inversée.

Sommaire

Arbre binaire - définition

À retenir

Un **arbre binaire** est une structure arborescente où chaque nœud possède **au plus** deux fils. L'ordre des nœuds-fils est pris en compte : on parle alors de fils *gauche* et fils *droit*.

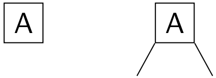

FIGURE 1 – Représentations d'un nœud

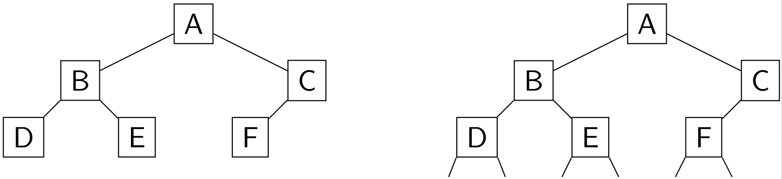

FIGURE 2 – Représentations d'un arbre binaire

Sommaire

vocabulaire

À retenir

Un arbre binaire est **complet** si tous les niveaux sont remplis sauf éventuellement le dernier ; les feuilles sont alors *tassées à gauche*

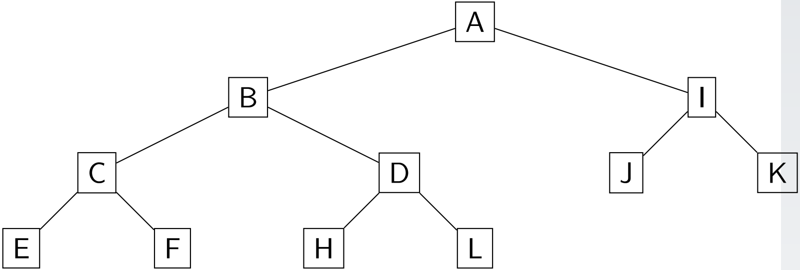

FIGURE 3 – Un arbre binaire complet

À retenir

Un arbre binaire est **équilibré** si pour chaque nœud interne, les *sous-arbres gauche et droite* ont une hauteur qui diffère au plus de 1.

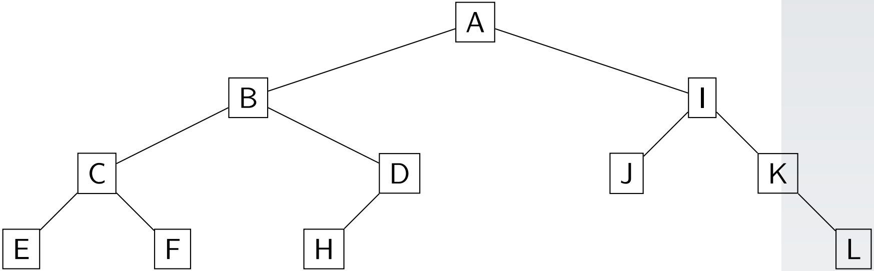

FIGURE 4 – Un arbre binaire équilibré non complet

À retenir

Un arbre binaire est **parfait** si tous les niveaux sont remplis.

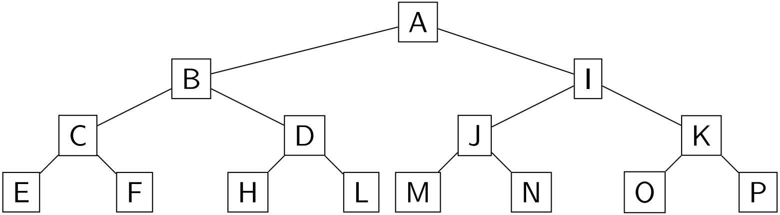

FIGURE 5 – Un arbre binaire parfait

Sommaire

Propriétés

À retenir

Dans un arbre binaire, la taille N et la hauteur h sont liées par les inégalités :

$$h + 1 \leqslant N \leqslant 2^{h+1} - 1$$

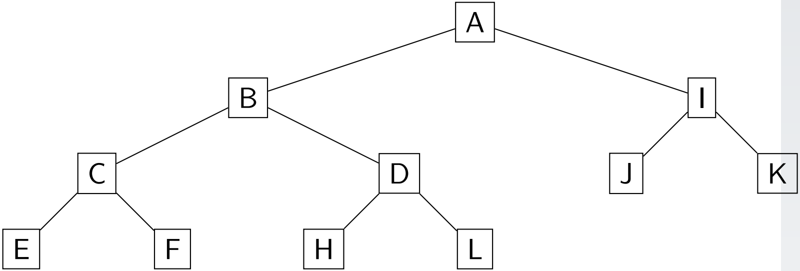

Figure 6 – Un arbre binaire complet

Démonstration

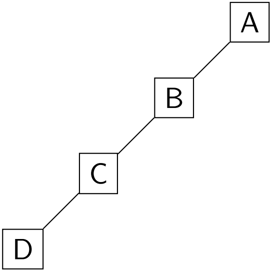

FIGURE 7 – Un arbre binaire minimal

$$h + 1 \leqslant N$$

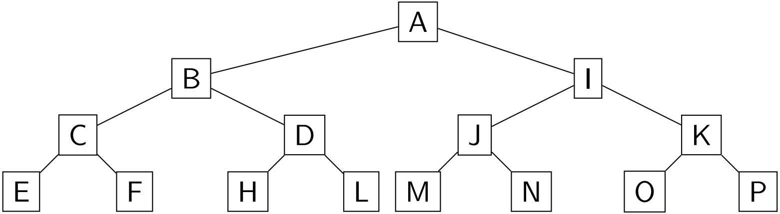

FIGURE 8 – Un arbre binaire parfait

- niveau 0 : $2^0 = 1$ nœuds
- niveau 1 : $2^1 = 2$ nœuds
- ...
- niveau h : 2^h nœuds

On double le nombre de nœuds à chaque niveau.

Somme des premiers termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{h} 2^k = u_0 \times \frac{1-q^{h+1}}{1-q}$$

$$\sum_{k=0}^{h} 2^k = 1 \times \frac{1-2^{h+1}}{1-2}$$

$$\sum_{k=0}^{h} 2^k = 2^{h+1} - 1$$

La taille maximale est inférieure ou égale à $2^{h+1} - 1$

À retenir

$$h+1 \leqslant N \leqslant 2^{h+1}-1$$

Remarque

Si on définit la hauteur comme le nombre de nœuds maximum entre la racine et une feuille, on a :

$$h \leqslant N \leqslant 2^{h}-1$$