

Arbre binaire Notation polonaise

Christophe Viroulaud

Terminale - NSI

Algo 06

Arbre binaire

Définition
vocabulaire
Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire
Représentation en Python
Parcours en profondeur

En 1920 le mathématicien Jan Łukasiewicz présente la *notation polonaise* qui permet d'exprimer des expressions mathématiques sans utiliser de parenthèse, mais traitant néanmoins toute formule sans ambiguïté.

L'expression arithmétique

$$2 \times (3 + 4)$$

devient en notation polonaise

$$\times 2 + 3 4$$

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

Dans les années 50, Charles L. Hamblin s'intéresse à variante *inversée* de cette notation. Elle est en effet particulièrement bien adaptée à la manière dont les processeurs traitent leurs opérandes. En notation polonaise inversée, l'expression précédente s'écrit

$$2\ 3\ 4\ +\ \times$$

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

Arbre binaire

Définition
vocabulaire
Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire
Représentation en Python
Parcours en profondeur

Déterminer une structure de données adaptée au calcul en notation polonaise inversée.

1. Arbre binaire

1.1 Définition

1.2 vocabulaire

1.3 Propriétés

2. Représentation d'une expression mathématique

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation d'une expression mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

À retenir

Un **arbre binaire** est une structure arborescente où chaque nœud possède **au plus** deux fils. L'ordre des nœuds-fils est pris en compte : on parle alors de fils *gauche* et fils *droit*.



FIGURE 1 – Représentations d'un nœud

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

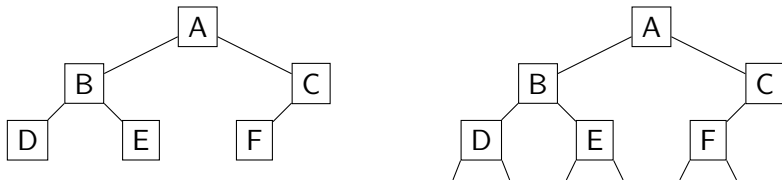


FIGURE 2 – Représentations d'un arbre binaire

1. Arbre binaire

1.1 Définition

1.2 vocabulaire

1.3 Propriétés

2. Représentation d'une expression mathématique

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation d'une expression mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

À retenir

Un arbre binaire est **complet** si tous les niveaux sont remplis sauf éventuellement le dernier; les feuilles sont alors *tassées à gauche*

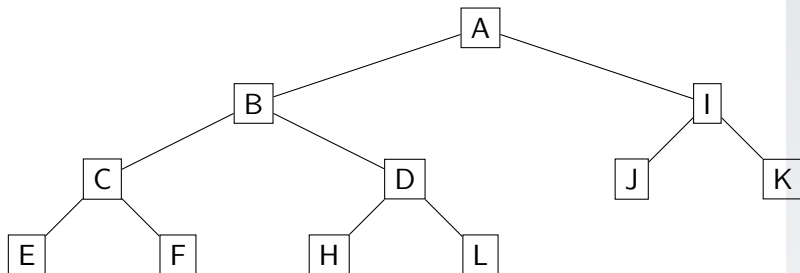


FIGURE 3 – Un arbre binaire complet

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

À retenir

Un arbre binaire est **équilibré** si pour chaque nœud interne, les *sous-arbres gauche et droite* ont une hauteur qui diffère au plus de 1.

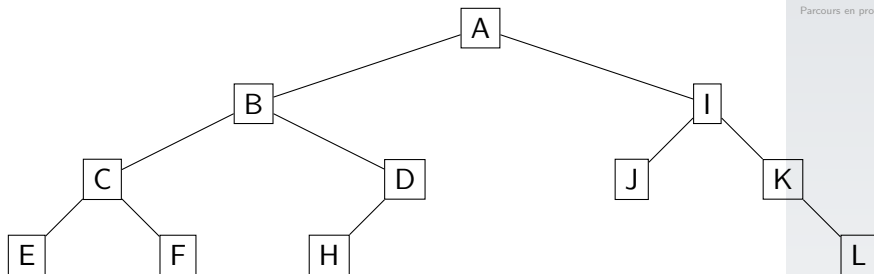


FIGURE 4 – Un arbre binaire équilibré non complet

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

À retenir

Un arbre binaire est **parfait** si tous les niveaux sont remplis.

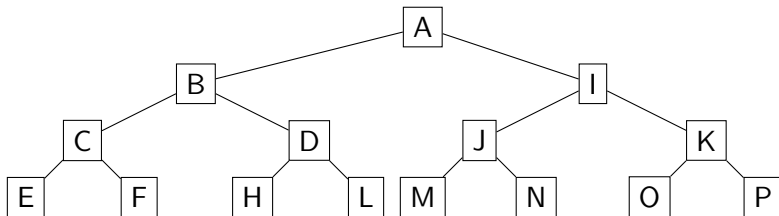


FIGURE 5 – Un arbre binaire parfait

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

1. Arbre binaire

1.1 Définition

1.2 vocabulaire

1.3 Propriétés

2. Représentation d'une expression mathématique

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation d'une expression mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

À retenir

Dans un arbre binaire, la taille N et la hauteur h sont liées par les inégalités :

$$h + 1 \leq N \leq 2^{h+1} - 1$$

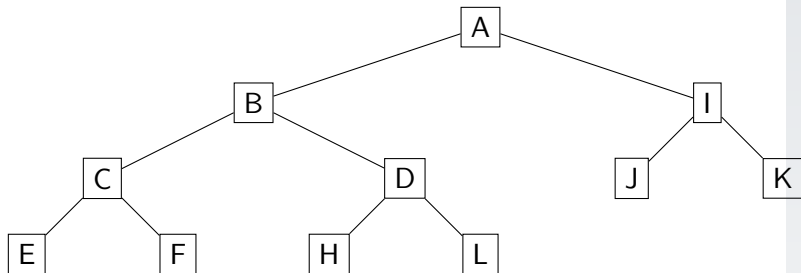


FIGURE 6 – Un arbre binaire complet

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

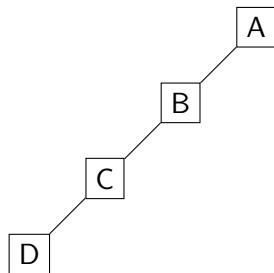


FIGURE 7 – Un arbre binaire minimal

$$h + 1 \leq N$$

Arbre binaire

Définition
vocabulaire
Propriétés

Représentation d'une expression mathématique

Arbre binaire
Représentation en Python
Parcours en profondeur

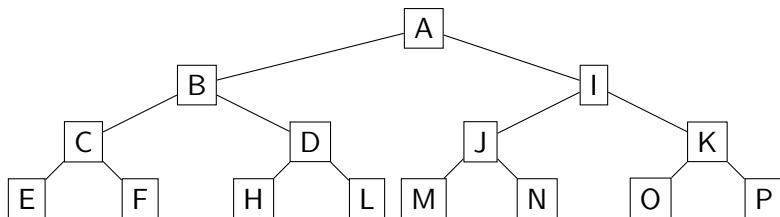


FIGURE 8 – Un arbre binaire parfait

- ▶ niveau 0 : $2^0 = 1$ nœuds
- ▶ niveau 1 : $2^1 = 2$ nœuds
- ▶ ...
- ▶ niveau h : 2^h nœuds

On double le nombre de nœuds à chaque niveau.

Somme des premiers termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^h 2^k = u_0 \times \frac{1 - q^{h+1}}{1 - q}$$

$$\sum_{k=0}^h 2^k = 1 \times \frac{1 - 2^{h+1}}{1 - 2}$$

$$\sum_{k=0}^h 2^k = 2^{h+1} - 1$$

La taille maximale est inférieure ou égale à $2^{h+1} - 1$

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

À retenir

L'inégalité est vérifiée :

$$h + 1 \leq N \leq 2^{h+1} - 1$$

Remarque

Si on définit la hauteur comme le nombre de nœuds maximum entre la racine et une feuille, on a :

$$h \leq N \leq 2^h - 1$$

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

1. Arbre binaire

2. Représentation d'une expression mathématique

2.1 Arbre binaire

2.2 Représentation en Python

2.3 Parcours en profondeur

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation d'une expression mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

Représentation d'une expression mathématique

Une expression mathématique applique une *opération* sur deux *opérandes*. Un arbre binaire permet donc de représenter n'importe quelle opération.

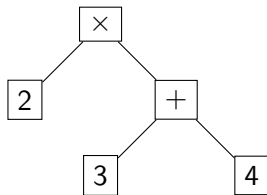


FIGURE 9 – $2 \times (3 + 4)$

1. Arbre binaire

2. Représentation d'une expression mathématique

2.1 Arbre binaire

2.2 Représentation en Python

2.3 Parcours en profondeur

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation d'une expression mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

```
1 class Noeud:  
2  
3     def __init__(self, v, g, d):  
4         self.valeur = v  
5         self.gauche = g  
6         self.droite = d
```

Code 1 – Représentation d'un nœud

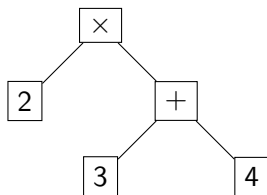


FIGURE 10 – $2 \times (3 + 4)$

Activité 1 : En utilisant la classe `Noeud` écrire la variable `arbre` qui représente l'expression 10.

Arbre binaire

Définition
vocabulaire
Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

Arbre binaire

Définition
vocabulaire
Propriétés

Représentation d'une expression mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

```
1 arbre = Noeud("×",  
2           Noeud(2, None, None),  
3           Noeud("+",  
4               Noeud(3, None, None),  
5               Noeud(4, None, None)))
```

Pour calculer la taille d'un arbre, il faut :

- ▶ calculer récursivement la taille du fils gauche,
- ▶ calculer récursivement la taille du fils droit,
- ▶ ajouter 1 (pour le nœud en cours).

Activité 2 :

1. Dans l'algorithme de calcul de la taille, quel est le cas limite ?
2. Écrire la fonction récursive `taille(a: Noeud)`
→ `int` qui renvoie la taille de l'arbre.

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur


```
1 def taille(a: Noeud) -> int:
2     """
3     renvoie le nombre de noeuds de l'arbre a
4     """
5     if a is None:
6         return 0
7     else:
8         return 1 + taille(a.gauche) + taille(a.droite)
```

Code 2 – Taille de l'arbre

Activité 3 :

1. Écrire la fonction récursive `hauteur(a: Noeud)`
→ `int` qui renvoie la hauteur de l'arbre binaire.
On utilisera la fonction Python `max` pour comparer la taille des fils gauche et droit.
2. Étudier la complexité des fonctions `taille` et `hauteur`.

```
1 def hauteur(a: Noeud) -> int:
2     """
3     hauteur max de l'arbre a
4     """
5     if a is None:
6         return 0
7     else:
8         return 1 + max(hauteur(a.gauche), hauteur(a.droite))
```

Code 3 – Hauteur de l'arbre

Arbre binaire

Définition
vocabulaire
Propriétés

Représentation d'une expression mathématique

Arbre binaire
Représentation en Python
Parcours en profondeur

Dans les deux fonctions on parcourt une et une seule fois chaque nœud. La complexité est **linéaire**.

1. Arbre binaire

2. Représentation d'une expression mathématique

2.1 Arbre binaire

2.2 Représentation en Python

2.3 Parcours en profondeur

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation d'une expression mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

Arbre binaire

Définition
vocabulaire
Propriétés

Représentation d'une expression mathématique

Arbre binaire
Représentation en Python
Parcours en profondeur

Dans un arbre binaire, on commence par parcourir le sous-arbre gauche avant celui de droite.

► Parcours préfixe :

```
1  parcours préfixe(arbre)
2      affiche(valeur)
3      parcours préfixe(sous-arbre gauche)
4      parcours préfixe(sous-arbre droit)
```

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

► Parcours préfixe :

```
1 parcours préfixe(arbre)
2     affiche(valeur)
3     parcours préfixe(sous-arbre gauche)
4     parcours préfixe(sous-arbre droit)
```

► Parcours infixe :

```
1 parcours infixe(arbre)
2     parcours infixe(sous-arbre gauche)
3     affiche(valeur)
4     parcours infixe(sous-arbre droit)
```

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

► Parcours préfixe :

```
1  parcours préfixe(arbre)
2      affiche(valeur)
3      parcours préfixe(sous-arbre gauche)
4      parcours préfixe(sous-arbre droit)
```

► Parcours infixe :

```
1  parcours infixe(arbre)
2      parcours infixe(sous-arbre gauche)
3      affiche(valeur)
4      parcours infixe(sous-arbre droit)
```

► Parcours postfixe (ou suffixe) :

```
1  parcours postfixe(arbre)
2      parcours postfixe(sous-arbre gauche)
3      parcours postfixe(sous-arbre droit)
4      affiche(valeur)
```

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

Activité 4 :

1. Écrire les trois fonctions *récurives* de parcours qui affichent (`print`) directement la valeur du nœud traversé.
2. Adapter ces fonctions pour renvoyer un tableau ordonné des nœuds traversés.
3. Quel parcours implémente la notation polonaise inverse ?
4. Étudier la complexité des fonctions de parcours.

Arbre binaire

Définition
vocabulaire
Propriétés

Représentation d'une expression mathématique

Arbre binaire
Représentation en Python
Parcours en profondeur

```
1 def prefixe(a: Noeud) -> None:
2     if a is not None:
3         print(a.valeur, end=" ")
4         prefixe(a.gauche)
5         prefixe(a.droite)
```

```
1 prefixe(arbre)
```

```
1 'x' 2 '+' 3 4
```

```
1 def infixe(a: Noeud) -> None:
2     if a is not None:
3         infixe(a.gauche)
4         print(a.valeur, end=" ")
5         infixe(a.droite)
6
7
8 def postfixe(a: Noeud) -> None:
9     if a is not None:
10        postfixe(a.gauche)
11        postfixe(a.droite)
12        print(a.valeur, end=" ")
```

```
1 def prefixe_tab(a: Noeud, parcours: list) -> None:
2     if a is not None:
3         parcours.append(a.valeur)
4         prefixe_tab(a.gauche, parcours)
5         prefixe_tab(a.droite, parcours)
```

Remarque

Le tableau passé en paramètre est une **référence** à un tableau du programme principal

```
1 tab_prefixe = []
2 prefixe_tab(arbre, tab_prefixe)
3 print("préfixe ", tab_prefixe)
```

Code 4 – Appel

```
1 def infixe_tab(a: Noeud, parcours: list) -> None:
2     if a is not None:
3         infixe_tab(a.gauche, parcours)
4         parcours.append(a.valeur)
5         infixe_tab(a.droite, parcours)
6
7
8
9 def postfixe_tab(a: Noeud, parcours: list) -> None:
10     if a is not None:
11         postfixe_tab(a.gauche, parcours)
12         postfixe_tab(a.droite, parcours)
13         parcours.append(a.valeur)
```

```
1 # notation polonaise
2 préfixe  ['×', 2, '+', 3, 4]
3
4 # notation usuelle
5 infixe   [2, '×', 3, '+', 4]
6
7 # notation polonaise inverse
8 postfixe [2, 3, 4, '+', '×']
```

Remarque

Dans la notation usuelle les parenthèses sont obligatoires pour éviter les ambiguïtés.

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

```
1 def prefixe_tab2(a: Noeud) -> list:
2     if a is not None:
3         # concatène les tableaux construits
4         return [a.valeur] + \
5                 prefixe_tab2(a.gauche) + \
6                 prefixe_tab2(a.droite)
7     else:
8         return []
```

Code 5 – Version avec concaténation

Remarque

En fin de parcours, il faut renvoyer un tableau vide pour concaténer des structures de même type.

Arbre binaire

Définition

vocabulaire

Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire

Représentation en Python

Parcours en profondeur

Arbre binaire

Définition
vocabulaire
Propriétés

Représentation
d'une expression
mathématique

Arbre binaire
Représentation en Python
Parcours en profondeur

À retenir

Un parcours en profondeur (ou en largeur) visite une et une seule fois chaque nœud. La complexité en temps est **linéaire**.