Trier des cartes
Christophe Viroulaud
Première - NSI

Trier des cartes

Christophe Viroulaud

Première - NSI

Sommaire

1. Problématique
2. Trier des cartes manuellement
3. Transposer au tri de données
Implémentation
Terminaison
Correction
Complexité
Implémentation
Preuve de terminaison
Preuve de correction
Complexité

Sommaire

Trier un jeu de cartes est une opération qui trouve des applications en informatique.
Existe-t-il plusieurs méthodes pour trier des données ?

Trier un jeu de cartes est une opération qui trouve des applications en informatique.

Existe-t-il plusieurs méthodes pour trier des données ?

Sommaire

Sommaire

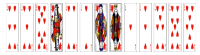


FIGURE 1 – Cartes mélangées

Trier des cartes

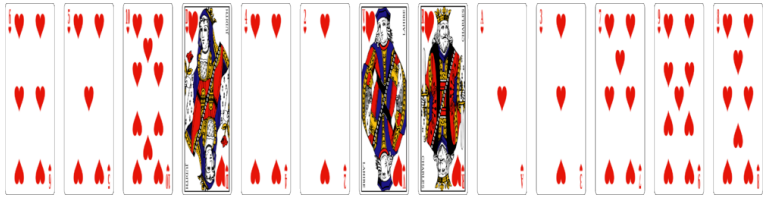


FIGURE 1 – Cartes mélangées

Activité 1 :
1. Prendre le paquet de cartes mélangées et les étaler sur la table.
2. Trier les cartes.
3. Formaliser la méthode utilisée sous forme d'un algorithme.

Activité 1 :

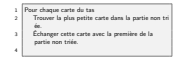
1. Prendre le paquet de cartes mélangées et les étaler sur la table.
2. Trier les cartes.
3. Formaliser la méthode utilisée sous forme d'un algorithme.

Différentes méthodes
- Tri par sélection en place
- Tri par sélection dans un nouveau tableau
- Tri par insertion en place
- Tri par insertion dans un nouveau tableau

Différentes méthodes

- Tri par sélection en place
- Tri par sélection dans un nouveau tableau
- Tri par insertion en place
- Tri par insertion dans un nouveau tableau

Tri par sélection en place



Code 1 – Tri par sélection (en place)

Retour menu

Tri par sélection en place

```
1 Pour chaque carte du tas
2     Trouver la plus petite carte dans la partie non tri ée.
3     Échanger cette carte avec la première de la partie non triée.
4
```

Code 1 – Tri par sélection (en place)

Retour menu

Tri par sélection en place

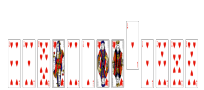


Figure 2 – Sélectionne la plus petite du tas non trié

Retour menu

Tri par sélection en place

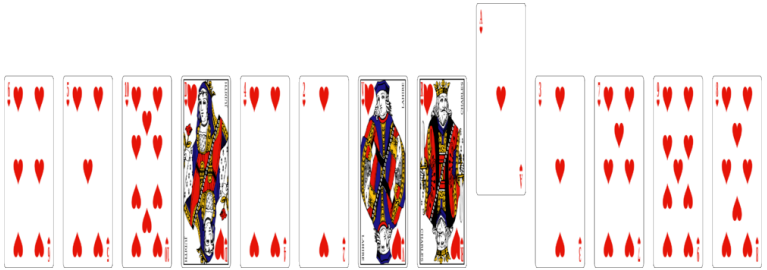


Figure 2 – Sélectionne la plus petite du tas non trié

Retour menu

Tri par sélection en place

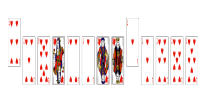


Figure 3 – Échange avec la première carte du tas non trié

Retour menu

Tri par sélection en place

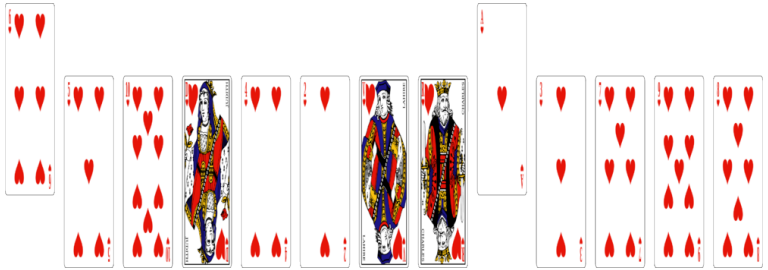


Figure 3 – Échange avec la première carte du tas non trié

Retour menu

Tri par sélection en place

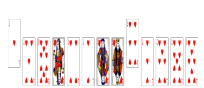


Figure 4 – Échange avec la première carte du tas non trié

Retour menu

Tri par sélection en place

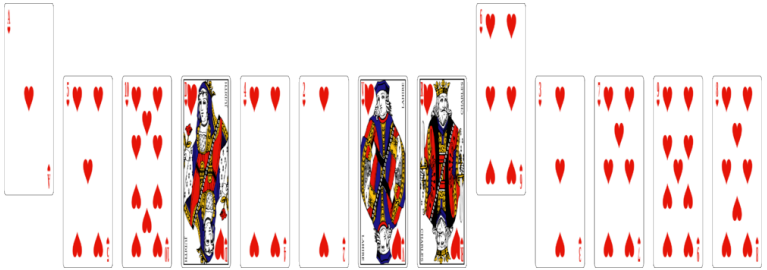


Figure 4 – Échange avec la première carte du tas non trié

Retour menu

Tri par sélection en place

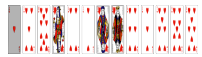


Figure 5 – La carte est à sa place
Retour menu

Tri par sélection en place

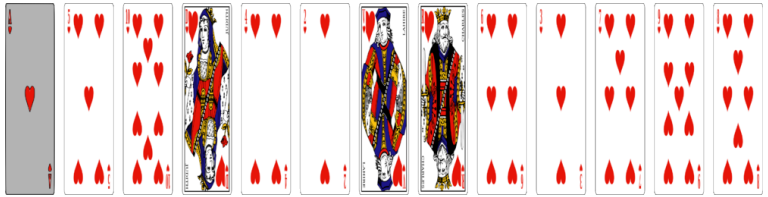


Figure 5 – La carte est à sa place

Retour menu

Tri par sélection en place

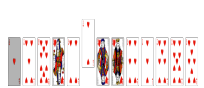


Figure 6 – Sélectionne la plus petite du tas non trié

Retour menu

Tri par sélection en place

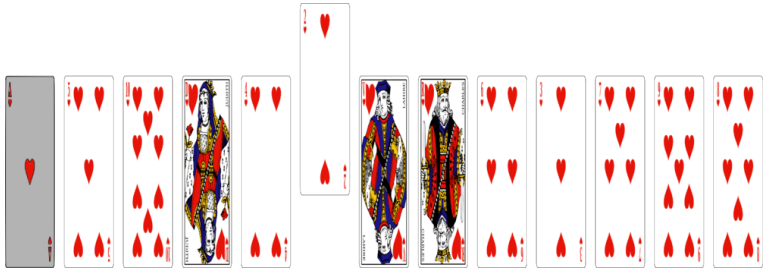


Figure 6 – Sélectionne la plus petite du tas non trié

Retour menu

Tri par sélection en place

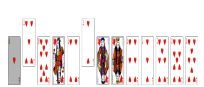


Figure 7 – Échange avec la première carte du tas non trié

Retour menu

Tri par sélection en place

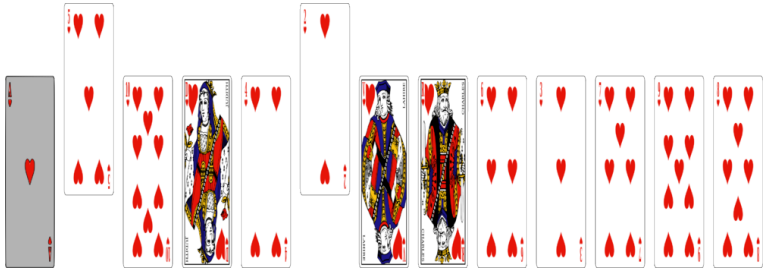


Figure 7 – Échange avec la première carte du tas non trié

Retour menu

Tri par sélection en place

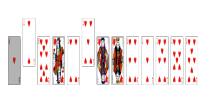


Figure 8 – Échange avec la première carte du tas non trié

Retour menu

Tri par sélection en place

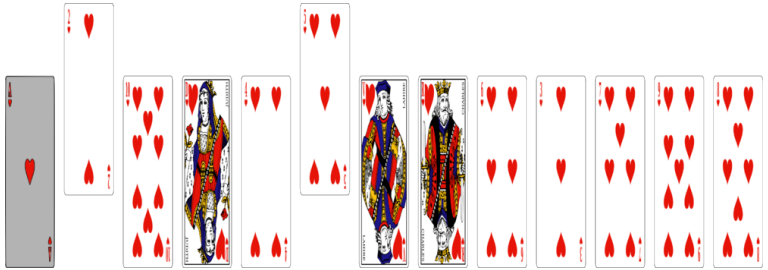


Figure 8 – Échange avec la première carte du tas non trié

Retour menu

Tri par sélection en place

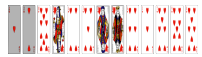


Figure 9 – La carte est à sa place

Retour menu

Tri par sélection en place

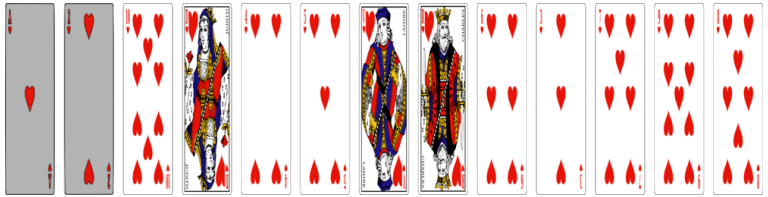
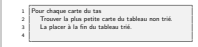


Figure 9 – La carte est à sa place

Retour menu

Tri par sélection - nouveau tableau



Code 2 – Tri par sélection dans un nouveau tableau

Retour menu

Tri par sélection - nouveau tableau

```
1 Pour chaque carte du tas
2     Trouver la plus petite carte du tableau non trié.
3     La placer à la fin du tableau trié.
4
```

Code 2 – Tri par sélection dans un nouveau tableau

Retour menu

Tri par sélection - nouveau tableau

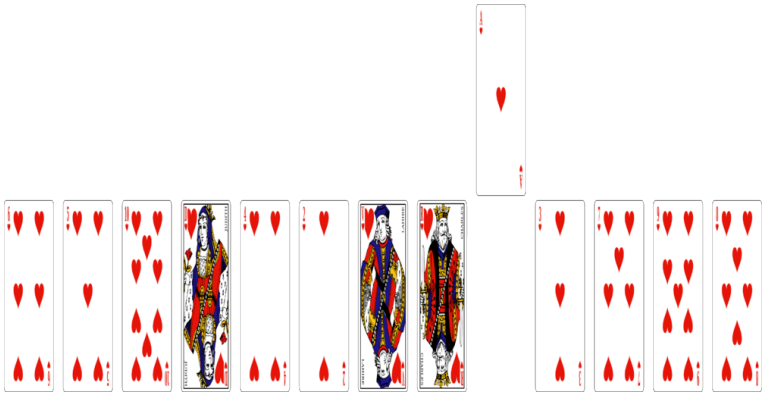


FIGURE 10 – Trouve la plus petite du tas non trié

Retour menu

Tri par sélection - nouveau tableau

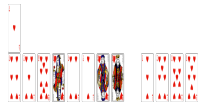


FIGURE 11 – La place à la fin du tableau trié

Retour menu

Tri par sélection - nouveau tableau

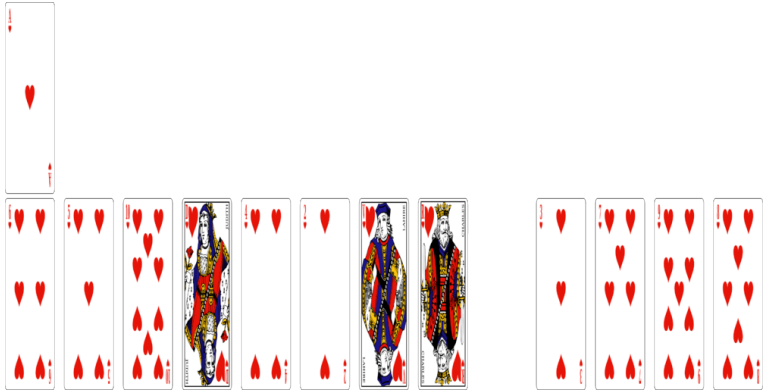


FIGURE 11 – La place à la fin du tableau trié

Retour menu

Tri par sélection - nouveau tableau

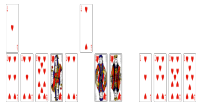


FIGURE 12 – Trouve la plus petite du tas non trié

Retour menu

Tri par sélection - nouveau tableau

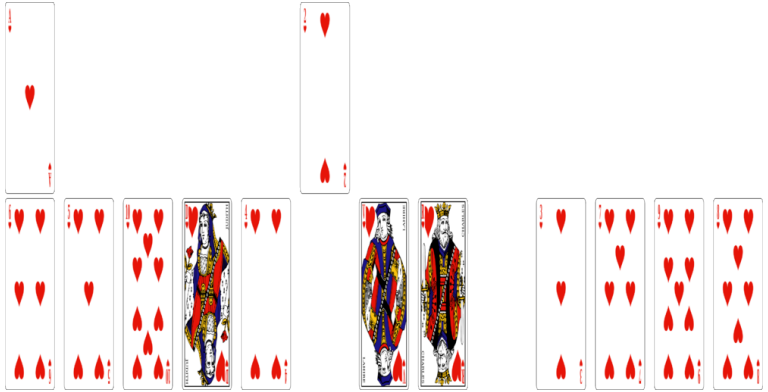


FIGURE 12 – Trouve la plus petite du tas non trié

Retour menu

Tri par sélection - nouveau tableau

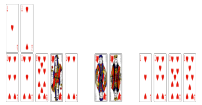


FIGURE 13 – La place à la fin du tableau trié

Retour menu

Tri par sélection - nouveau tableau

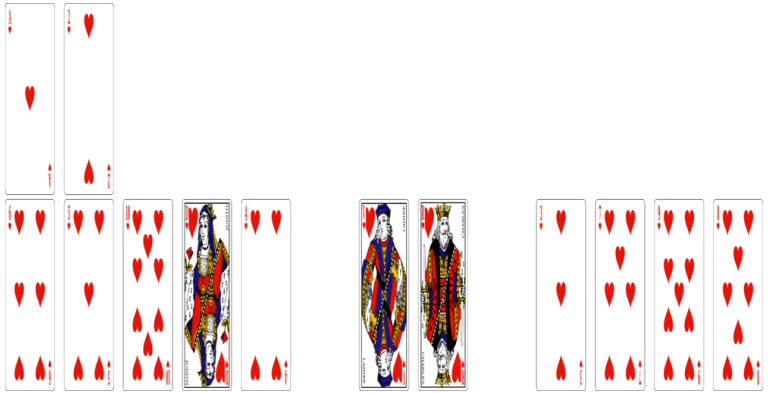
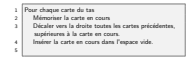


FIGURE 13 – La place à la fin du tableau trié

Retour menu

Tri par insertion en place



Code 3 – Tri par insertion (en place)

Retour menu

Tri par insertion en place

```
1 Pour chaque carte du tas
2     Mémoriser la carte en cours
3     Décaler vers la droite toutes les cartes précédentes,
      supérieures à la carte en cours.
4     Insérer la carte en cours dans l'espace vide.
5
```

Code 3 – Tri par insertion (en place)

Retour menu

Tri par insertion en place

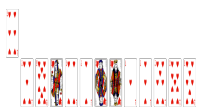


FIGURE 14 – Mémoriser la première carte dans le tas non trié

Retour menu

Tri par insertion en place

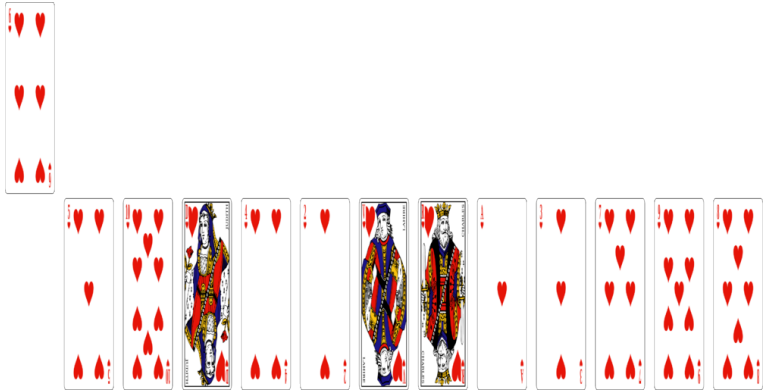


FIGURE 14 – Mémoriser la première carte dans le tas non trié

Retour menu

Ici pas de carte triée encore

Tri par insertion en place

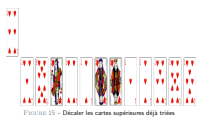


FIGURE 15 – Décaler les cartes supérieures déjà triées

Retour menu

Tri par insertion en place

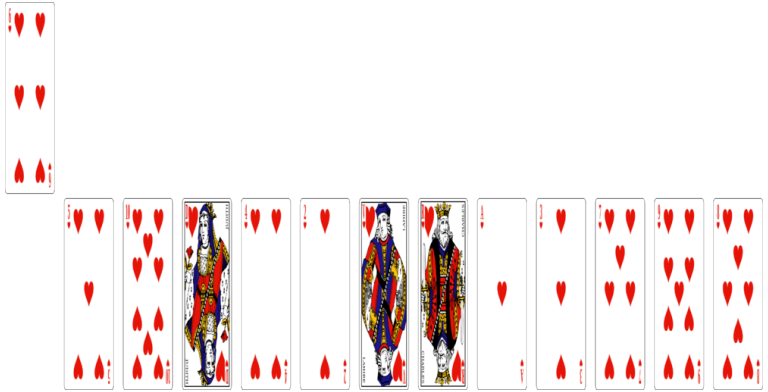


FIGURE 15 – Décaler les cartes supérieures déjà triées

Retour menu

la carte est dans le tas trié

Tri par insertion en place

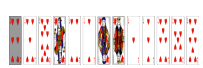


Figure 16 – Replacer la carte dans l'espace

Retour menu

Tri par insertion en place

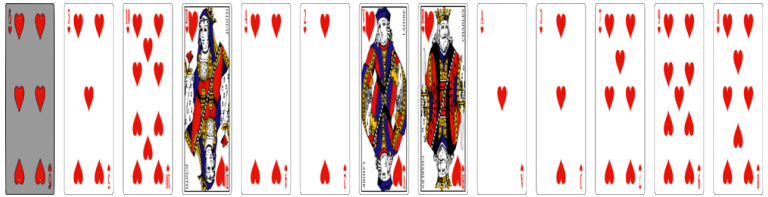


Figure 16 – Replacer la carte dans l'espace

Retour menu

Tri par insertion en place

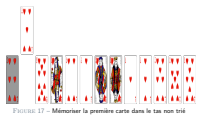


Figure 17 – Mémoriser la première carte dans le tas non trié

Retour menu

la carte est dans le tas trié

Tri par insertion en place

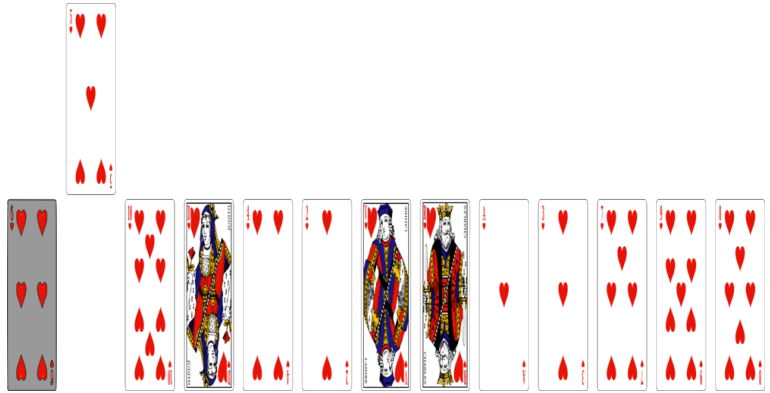


Figure 17 – Mémoriser la première carte dans le tas non trié

Retour menu

Ici pas de carte triée encore

Tri par insertion en place

FIGURE 18 – Décaler les cartes supérieures déjà triées

Retour menu

la carte est dans le tas trié

Tri par insertion en place

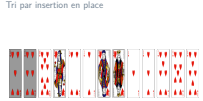


Figure 19 – Replacer la carte dans l'espace

Retour menu

Tri par insertion en place

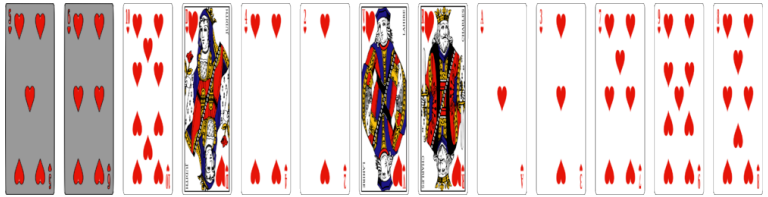


Figure 19 – Replacer la carte dans l'espace

Retour menu

Tri par insertion en place

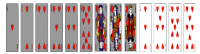


Figure 20 – Après plusieurs itérations

Retour menu

Tri par insertion en place

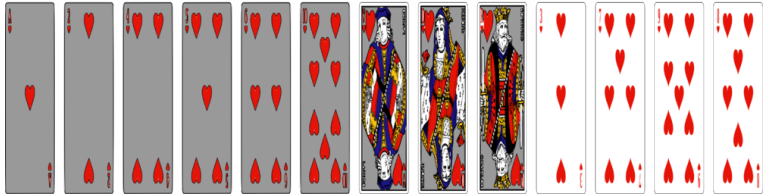


Figure 20 – Après plusieurs itérations

Retour menu

Tri par insertion en place

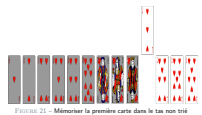


Figure 21 – Mémoriser la première carte dans le tas non trié

Retour menu

la carte est dans le tas trié

Tri par insertion en place

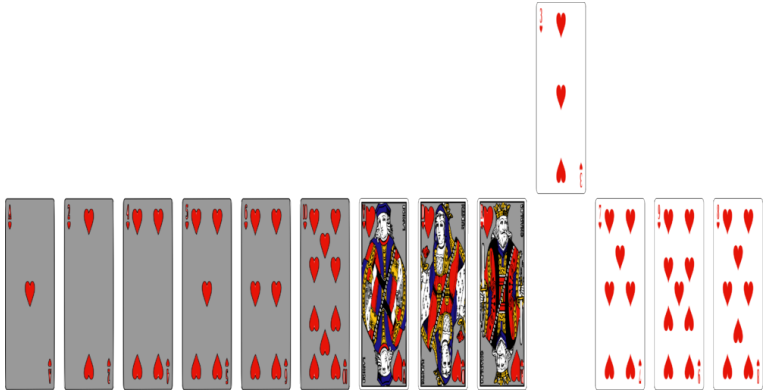


Figure 21 – Mémoriser la première carte dans le tas non trié

Retour menu

Tri par insertion en place

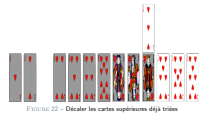


FIGURE 22 – Décaler les cartes supérieures déjà triées

Retour menu

Ici pas de carte triée encore

Tri par insertion en place

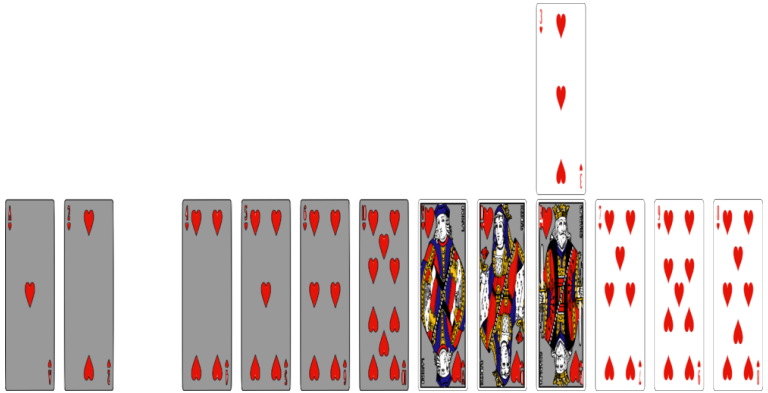


FIGURE 22 – Décaler les cartes supérieures déjà triées

Retour menu

la carte est dans le tas trié

Tri par insertion en place

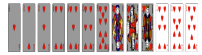


FIGURE 23 – Insérer la carte dans l'espace

Retour menu

Tri par insertion en place

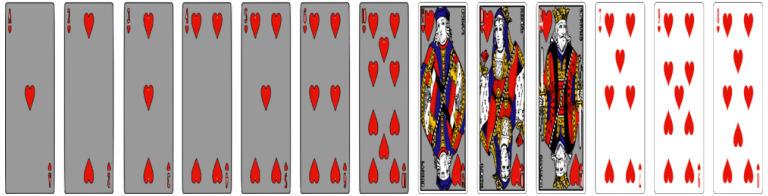
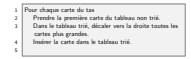


FIGURE 23 – Insérer la carte dans l'espace

Retour menu

Tri par insertion - nouveau tableau



Code 4 – Tri par insertion dans un nouveau tableau

Retour menu

Tri par insertion - nouveau tableau

```
1 Pour chaque carte du tas
2     Prendre la première carte du tableau non trié.
3     Dans le tableau trié, décaler vers la droite toutes les
      cartes plus grandes.
4     Insérer la carte dans le tableau trié.
5
```

Code 4 – Tri par insertion dans un nouveau tableau

Retour menu

Tri par insertion - nouveau tableau

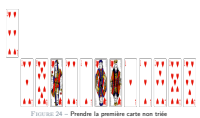


FIGURE 24 – Prendre la première carte non triée

Retour menu

Tri par insertion - nouveau tableau

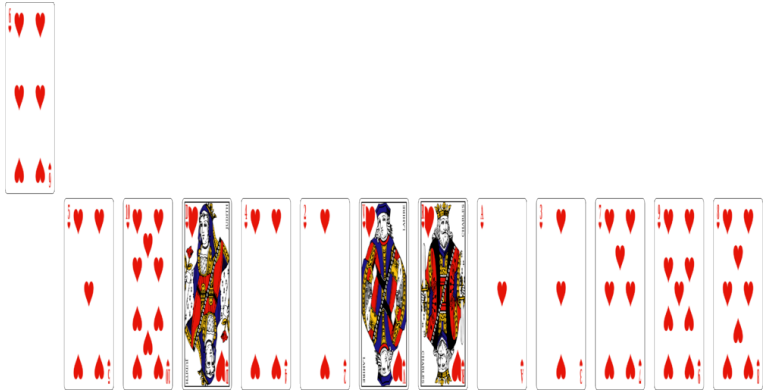


FIGURE 24 – Prendre la première carte non triée

Retour menu

Tri par insertion - nouveau tableau

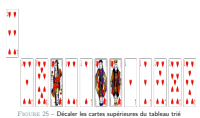


FIGURE 25 – Décaler les cartes supérieures du tableau trié

Retour menu

Tri par insertion - nouveau tableau

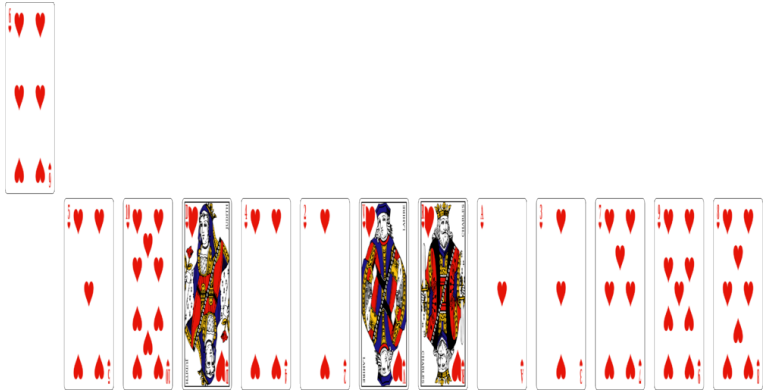


FIGURE 25 – Décaler les cartes supérieures du tableau trié

Retour menu

Tri par insertion - nouveau tableau

Figure 26 – Insérer la carte dans le tableau triée

Retour menu

Tri par insertion - nouveau tableau

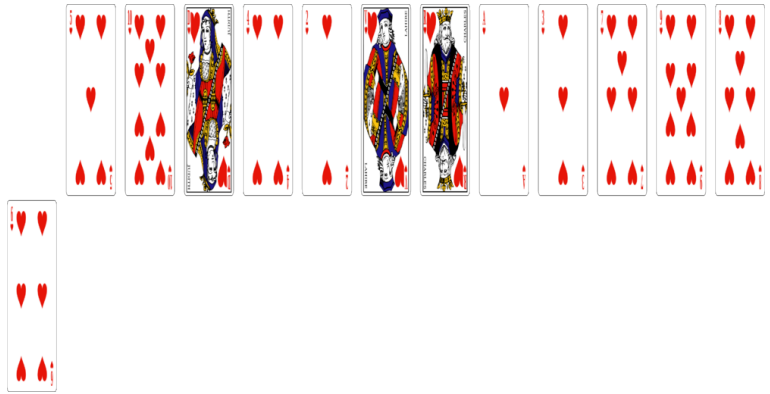


Figure 26 – Insérer la carte dans le tableau triée

Retour menu

Tri par insertion - nouveau tableau

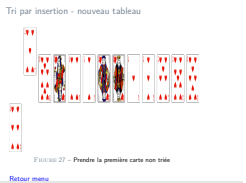


FIGURE 27 – Prendre la première carte non triée

Retour menu

Tri par insertion - nouveau tableau

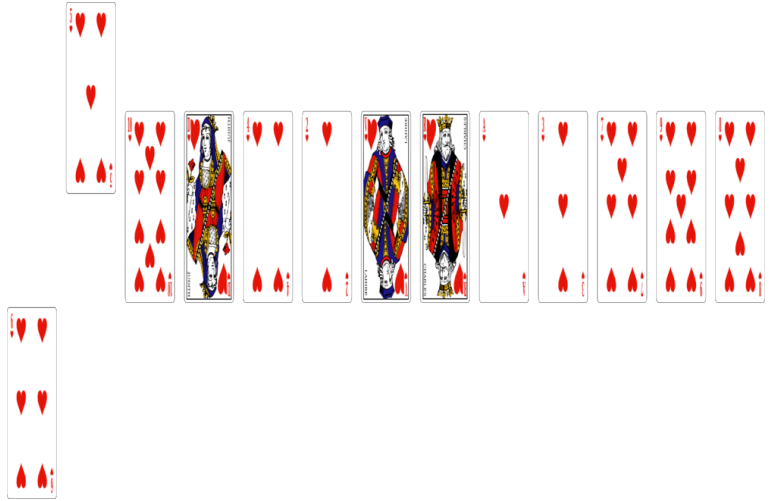


FIGURE 27 – Prendre la première carte non triée

Retour menu

Tri par insertion - nouveau tableau

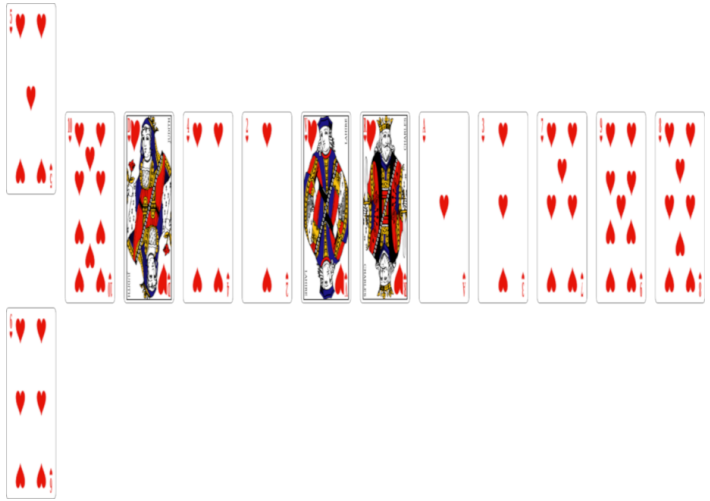


FIGURE 28 – Décaler les cartes supérieures du tableau trié

Retour menu

Tri par insertion - nouveau tableau

FIGURE 29 – Insérer la carte dans le tableau triée

Retour menu

Tri par insertion - nouveau tableau

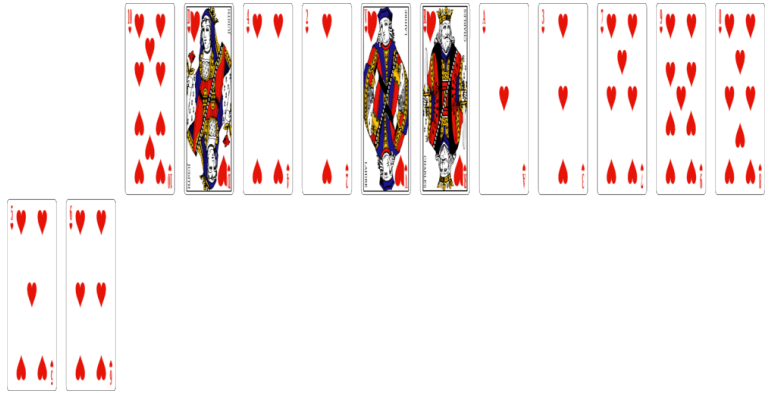
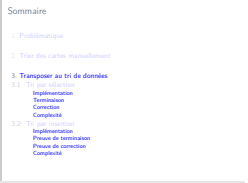


FIGURE 29 – Insérer la carte dans le tableau triée

Retour menu



Sommaire

Quand on passe un tableau en argument à une fonction, cette dernière manipule le tableau original.

```
def ma_fonction(tab: list)->None:
    tab[2] = 199

tab = [3, 8, 1, 10, 9]
ma_fonction(tab)
```

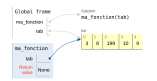


FIGURE 30 – La fonction modifie le tableau original

1. Il faut avoir conscience que les données d'origine sont modifiées. Il ne sert à rien que la fonction renvoie le tableau.
2. on va implémenter tri en place ; tri dans nouveau tableau dans exercices

Quand on passe un tableau en argument à une fonction, cette dernière manipule le tableau original.

```
1  def ma_fonction(tab: list)->None:
2      tab[2] = 199
3
4  tab = [3, 8, 1, 10, 9]
5  ma_fonction(tab)
```

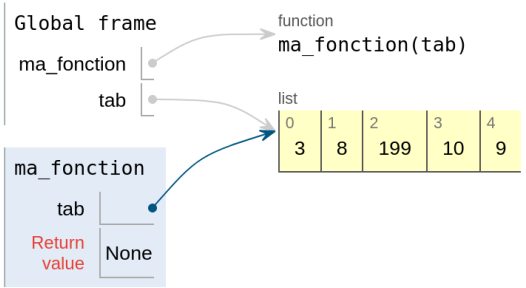


FIGURE 30 – La fonction modifie le tableau original

Rappel de l'algorithme

Code 5 – Tri par sélection (en place)

Rappel de l'algorithme

```
1 Pour chaque carte du tas
2     Trouver la plus petite carte dans la partie non triée.
3     Échanger cette carte avec la première de la partie
      non triée.
```

Code 5 – Tri par sélection (en place)

Tri par sélection - question préparatoire

Activité 2 :
1. Écrire la fonction **trouver_mini(tab : list) → int** qui renvoie l'indice du plus petit élément de *tab*.

Tri par sélection - question préparatoire

> **Activité 2 :**
>
> 1. Écrire la fonction **trouver_mini(tab : list) → int** qui renvoie l'indice du plus petit élément de *tab*.

Correction

Correction

```
1  def trouver_mini(tab: list)->int:
2      """
3      Trouve l'indice du plus petit élément
4      """
5      i_mini = 0
6      for j in range(1, len(tab)):
7          if tab[j] < tab[i_mini] :
8              i_mini = j
9      return i_mini
```

Tri par sélection - Implémentation

Activité 2 :

2. Adapter la fonction précédente pour renvoyer l'indice du plus petit élément de *tab*, compris entre l'indice *i_depart* et la fin du tableau. La signature de la fonction deviendra **trouver_mini(tab : list, i_depart : int) → int**.
3. Écrire la fonction **echanger(tab : list, i : int, j : int) → None** qui échange les éléments d'indice *i* et *j* du tableau *tab*.
4. Écrire la fonction **tri_selection(tab : list) → None** qui effectue un tri par sélection sur *tab*.

Tri par sélection - Implémentation

Activité 2 :

2. Adapter la fonction précédente pour renvoyer l'indice du plus petit élément de *tab*, compris entre l'indice *i_depart* et la fin du tableau. La signature de la fonction deviendra **trouver_mini(tab : list, i_depart : int) → int**.
3. Écrire la fonction **echanger(tab : list, i : int, j : int) → None** qui échange les éléments d'indice *i* et *j* du tableau *tab*.
4. Écrire la fonction **tri_selection(tab : list) → None** qui effectue un tri par sélection sur *tab*.

Correction

```python
def trouver_mini(tab: list, i_depart: int) -> int:
    """
    renvoie l'indice du plus petit élément entre
    i_depart et la fin du tableau
    """
    i_mini = i_depart
    for j in range(i_depart+1, len(tab)):
        if tab[j] < tab[i_mini] :
            i_mini = j
    return i_mini
```

Correction

```
1  def echanger(tab: list, i: int, j: int) -> None:
2      """
3      inverse les élément d'indices i et j du tableau
4      """
5      tab[i], tab[j] = tab[j], tab[i]
```

Correction

```
1  def tri_selection(tab: list) -> None:
2      """
3      tri le tableau dans l'ordre croissant
4      """
5      for i in range(len(tab)):
6          position_du_mini = trouver_mini(tab, i)
7          echanger(tab, i, position_du_mini)
```

Activité 2 :
5. Construire par compréhension un tableau des entiers de 1 à 13.
6. Mélanger le tableau à l'aide de la méthode *shuffle* de la bibliothèque *random*.
7. Trier le tableau à l'aide de la fonction *tri_selection*.

Tri par sélection - Tester

Activité 2 :

5. Construire par compréhension un tableau des entiers de 1 à 13.
6. Mélanger le tableau à l'aide de la méthode *shuffle* de la bibliothèque *random*.
7. Trier le tableau à l'aide de la fonction *tri_selection*.

Correction

Correction

```
1 cartes = [i for i in range(1, 14)]
2 shuffle(cartes)
3 tri_selection(cartes)
```

Preuve de terminaison : variant de boucle

La terminaison de la fonction est triviale. Le tri est composé de deux boucles bornées donc qui terminent.

Preuve de terminaison : variant de boucle

La terminaison de la fonction est triviale. Le tri est composé de deux boucles bornées donc qui terminent.

Preuve de correction : invariant de boucle

Avant chaque itération de la boucle externe, la partie gauche du tableau est triée.

3	8	7	1	5

Code 6 – Avant la première itération, la partie gauche est vide, donc triée.

Preuve de correction : invariant de boucle

Avant chaque itération de la boucle externe, la partie gauche du tableau est triée.

3	8	7	1	5

Code 6 – Avant la première itération, la partie gauche est vide, donc triée.

Preuve de correction : invariant de boucle

Code 7 – Avant la deuxième itération, la partie gauche est triée.

Preuve de correction : invariant de boucle

Code 7 – Avant la deuxième itération, la partie gauche est triée.

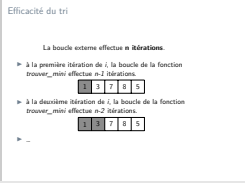
Preuve de correction : invariant de boucle

Code 8 – Avant la troisième itération, la partie gauche est triée.

Preuve de correction : invariant de boucle

Code 8 – Avant la troisième itération, la partie gauche est triée.

Efficacité du tri



Efficacité du tri

La boucle externe effectue **n itérations**.

- à la première itération de *i*, la boucle de la fonction *trouver_mini* effectue *n-1* itérations.

1	3	7	8	5

- à la deuxième itération de *i*, la boucle de la fonction *trouver_mini* effectue *n-2* itérations.

1	3	7	8	5

- ...

$\sum_{k=1}^{n-1} k = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n.(n-1)}{2}$

À retenir

Le tri par sélection effectue $\frac{n.(n-1)}{2}$ opérations pour ordonner le tableau.
Le nombre d'opérations dépend de n^2.

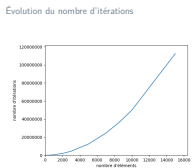
démo 2 colonnes inversées de 1+2+...+n-1

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n.(n-1)}{2}$$

À retenir

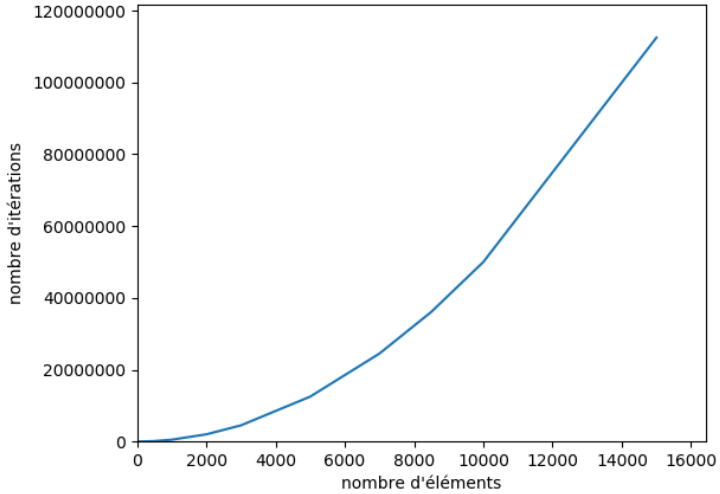
Le tri par sélection effectue $\frac{n.(n-1)}{2}$ opérations pour ordonner le tableau.

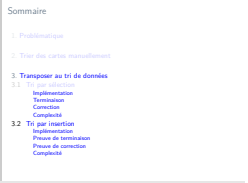
Le nombre d'opérations dépend de n^2.



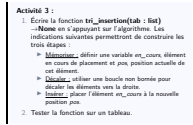
15000 éléments → 100 millions d'itérations

Évolution du nombre d'itérations





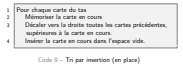
Sommaire


Activité 3 :
1. Écrire la fonction **tri_insertion(tab : list) →None** en s'appuyant sur l'algorithme. Les indications suivantes permettront de construire les trois étapes :
   - Mémoriser : définir une variable *en_cours*, élément en cours de placement et *pos*, position actuelle de cet élément.
   - Décaler : utiliser une boucle non bornée pour décaler les éléments vers la droite.
   - Insérer : placer l'élément *en_cours* à la nouvelle position *pos*.
2. Tester la fonction sur un tableau.

Tri par insertion

Activité 3 :

1. Écrire la fonction **tri_insertion(tab : list) →None** en s'appuyant sur l'algorithme. Les indications suivantes permettront de construire les trois étapes :
   - Mémoriser : définir une variable *en_cours*, élément en cours de placement et *pos*, position actuelle de cet élément.
   - Décaler : utiliser une boucle non bornée pour décaler les éléments vers la droite.
   - Insérer : placer l'élément *en_cours* à la nouvelle position *pos*.
2. Tester la fonction sur un tableau.



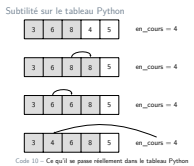
Code 9 – Tri par insertion (en place)

Rappel de l'algorithme

```
1 Pour chaque carte du tas
2     Mémoriser la carte en cours
3     Décaler vers la droite toutes les cartes précédentes,
      supérieures à la carte en cours.
4     Insérer la carte en cours dans l'espace vide.
```

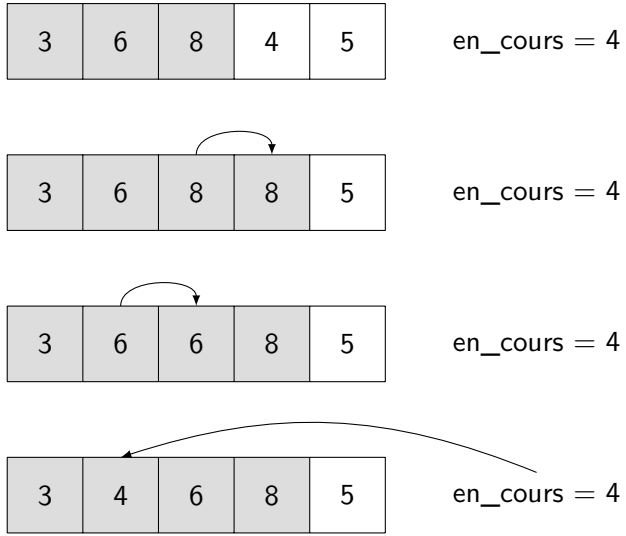
Code 9 – Tri par insertion (en place)

Subtilité sur le tableau Python



Code 10 – Ce qu'il se passe réellement dans le tableau Python

Subtilité sur le tableau Python



Code 10 – Ce qu'il se passe réellement dans le tableau Python

Correction : boucle principale

Correction : boucle principale

```
1  def tri_insertion(tab: list) -> None:
2      """
3      tri le tableau dans l'ordre croissant
4      """
5      for i in range(len(tab)):
```

Correction : mémoriser

Correction : mémoriser

```
1        en_cours = tab[i]
2        pos = i
```

Correction : décaler

Correction : décaler

```
1   while pos > 0 and en_cours < tab[pos−1] :
2       tab[pos] = tab[pos−1]
3       pos = pos−1
```

Correction : insérer

1 tab[pos] = en_cours

Correction : insérer

```
1    tab[pos] = en_cours
```

Correction : code complet

Correction : code complet

```
1  def tri_insertion(tab: list) -> None:
2      """
3      tri le tableau dans l'ordre croissant
4      """
5      for i in range(len(tab)):
6          # mémoriser
7          en_cours = tab[i]
8          pos = i
9          # décaler
10         while pos > 0 and en_cours < tab[pos-1] :
11             tab[pos] = tab[pos-1]
12             pos = pos-1
13         # insérer
14         tab[pos] = en_cours
```

Correction : tester

Correction : tester

```
1 cartes = [i for i in range(1, 14)]
2 shuffle(cartes)
3 tri_insertion(cartes)
```

Preuve de terminaison

Il faut se focaliser sur la boucle interne, non bornée.

Activité 4 : Déterminer un variant de la boucle, qui prouve la terminaison.

Preuve de terminaison

Il faut se focaliser sur la boucle interne, non bornée.

> **Activité 4 :** Déterminer un variant de la boucle, qui prouve la terminaison.

La boucle externe est bornée donc se termine.

Correction

```
while pos > 0 and en_cours < tab[pos-1] :
    tab[pos] = tab[pos-1]
    pos = pos-1
```

pos est un variant de la boucle.

Correction

```
while pos > 0 and en_cours < tab[pos-1] :
    tab[pos] = tab[pos-1]
    pos = pos-1
```

pos est un variant de la boucle.

Preuve de correction

Comme pour le tri sélection, avant chaque itération de la boucle externe, la partie gauche du tableau est triée.

3 6 8 4 5

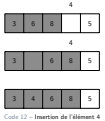
Code 11 – Insertion de l'élément 4

Preuve de correction

Comme pour le tri sélection, avant chaque itération de la boucle externe, la partie gauche du tableau est triée.

3	6	8	4	5

Code 11 – Insertion de l'élément 4



Code 12 – Insertion de l'élément 4

4
3 6 8 5
4
3 6 8 5
3 4 6 8 5
Code 12 – Insertion de l'élément 4

La boucle externe effectue n itérations dans tous les cas.

```
1 for i in range(len(tab)):
```

Cependant, le nombre d'itérations de la boucle interne peut varier.

```
1 while pos > 0 and en_cours < tab[pos-1] :
```

4

Code 13 – Insertion de l'élément 4

La boucle externe effectue n itérations dans tous les cas.

```
1 for i in range(len(tab)):
```

Cependant, le nombre d'itérations de la boucle interne peut varier.

```
1 while pos > 0 and en_cours < tab[pos-1] :
```

4

Code 13 – Insertion de l'élément 4

Activité 5 :
1. Compter le nombre d'itérations de la boucle interne si le tableau est déjà trié.
2. Compter le nombre d'itérations de la boucle interne si le tableau est trié dans l'ordre décroissant.

Correction

Code 14 – Le tableau est déjà trié. La boucle interne n'effectue aucune itération.

Correction

```
1  while pos > 0 and en_cours < tab[pos−1] :
```

1	4	5	7	8

Code 14 – Le tableau est déjà trié. La boucle interne n'effectue aucune itération.

Correction

Code 15 – Le tableau est inversé. La boucle interne effectue *i* itérations.

Correction

```
1 for i in range(len(tab)):
2     en_cours = tab[i]
3     pos = i
4     while pos > 0 and en_cours < tab[pos-1] :
```

8	7	5	4	1

Code 15 – Le tableau est inversé. La boucle interne effectue *i* itérations.

À retenir
Le tri par insertion effectue un nombre moyen d'opérations qui dépend de n^2.

En pratique, tri un peu meilleur que le tri par sélection.

À retenir

Le tri par insertion effectue un nombre moyen d'opérations qui dépend de n^2.