Exponentiation Notion de récursivité

Christophe Viroulaud

Terminale - NSI

Exponentiation Notion de récursivité

Étude de la fonction native

Fonctions Python "built-in"

Préconditions

Mettre en place des 1

Durée d'exécuti

Implémenter la

mathématique

Correction de l'algorithme

Formulations

Notation mathématique

Exponentiation Notion de récursivité

L'exponentiation est une opération mathématique définie

 $a^n = \underbrace{a \times \times a}$

 $et \ a^0 = 1$

par:

Correction de l'algorithme

$ightharpoonup 2^4 ightarrow 3$ opérations,

▶ $2701^{103056} \rightarrow 103055$ opérations.

Comment calculer la puissance d'un nombre de manière optimisée ?

Exponentiation Notion de récursivité

Etude de la fonction native

Fonctions Python "built-in"

Préconditions

Mettre en place de

Durée d'exécution

Implémenter la

S'appuyer sur la définition mathématique

Correction de l'algorithme

Formulations écursives

Notation mathématique Implémentation Nouvelle formulation

Exponentiation Notion de récursivité

Étude de la fonction native

Correction de l'algorithme

1. Étude de la fonction native

Fonctions Python "built-in"

```
def puissance_star(x:int,n:int)->int:
    return x**n

def puissance_builtin(x:int,n:int)->int:
    return pow(x,n)
```

Code 1 - Fonctions natives

Activité 1 : Tester les deux fonctions du code 1.

Exponentiation Notion de récursivité

Étude de la fonction native

Fonctions Python "built-in"

Préconditions

1 reconditions

Durée d'exécution

Implémenter la

nathématique

Correction de l'algorithme

Formulations récursives

Notation mathematique Implémentation

Exponentiation Notion de récursivité

1. Étude de la fonction native

- 1.1 Fonctions Python "built-in"
- 1.2 Tester un programme
 Préconditions
 Mettre en place des tests
 Durée d'exécution
- 2. Implémenter la fonction *puissance*
- 3 Formulations récursives

Étude de la fonction native

Fonctions Python "built-ir

Tester un programme

Mettre on place des t

Durée d'exécutio

Implémenter la

S'appuyer sur la définitio mathématique

Correction de l'algorithme

Formulations

Notation mathématique

Implémentation Nouvelle formulation

Préconditions

Nous décidons de nous limiter au cas positif.

À retenir

La programmation *défensive* consiste à anticiper les problèmes éventuels.

Activité 2 : Mettre en place un test qui lèvera une **AssertionError** si l'exposant est négatif.

Exponentiation Notion de récursivité

Étude de la fonction native

Fonctions Python "built-in" Tester un programme

Préconditions

iviettre en place de

Durée d'exécution

mplémenter la fonction *puissance*

mathématique

Correction de l'algorithme

Formulations récursives

Notation mathématiqu

Implémentation
Nouvelle formulation

Correction

3

```
def puissance_star(x: int, n: int) -> int:
    assert n >= 0, "L'exposant doit être positif."
    return x**n
```

Code 2

Exponentiation Notion de récursivité

Étude de la fonction native

Fonctions Python "built-in"

Préconditions

Mettre en place des tests

Implémenter la

mathématique Correction de l'algorithme

Formulations récursives

Mettre en place des tests

Il existe plusieurs modules (doctest) qui facilitent les phases de test.

Exponentiation Notion de récursivité

Étude de la fonction native

Fonctions Python "built-in

Préconditions

Mettre en place des tests

Durée d'exécution

Implémenter la fonction puissance

mathématique

Correction de l'algorithme

Formulations

Notation mathématique Implémentation

```
import doctest
1
2
    def puissance star(x:int,n:int)->int:
3
        11 11 11
4
        >>> puissance_star(2,8)
5
        256
6
        >>> puissance star(2,9)
        512
8
        11 11 11
9
        return x**n
10
11
    doctest.testmod(verbose=True)
12
```

Code 3 – Tester une fonction

Exponentiation Notion de récursivité

Étude de la

Fonctions Python "built-in"

Préconditions

Mettre en place des tests

iviettre en place des tes

Implémenter la

fonction puissance

mathématique Correction de l'algorithme

correction de l'algorith

récursives

Notation mathématique Implémentation Nouvelle formulation

Durée d'exécution

Activité 3 : À l'aide de la bibliothèque time mesurer la durée d'exécution de la fonction puissance_star pour calculer 2701^19406 .

Exponentiation Notion de récursivité

Étude de la fonction native

Tester un programme

Mettre en place des ter

Durée d'exécution

Implémenter la fonction puissance

mathématique

Correction de l'algorithme

Formulations

Notation mathématique Implémentation Nouvelle formulation

Correction

```
from time import time

debut=time()
puissance_star(2701,19406)
fin=time()
print("opérande **",fin-debut)
```

Exponentiation Notion de récursivité

Étude de la fonction native

Fonctions Python "built-in"

Préconditions

Durée d'evécution

Duree a execution

Implémenter la

mathématique

Correction de l'algorithme

Formulations

Notation mathématique

Exponentiation Notion de récursivité

1 Étude de la fonction native

- 2. Implémenter la fonction puissance
- 2.1 S'appuver sur la définition mathématique
- 2.2 Correction de l'algorithme
- 3 Formulations récursives

Étude de la fonction native

Fonctions Python "built-in

Tester un programme Préconditions

Durée d'exécutio

Implémenter la fonction puissance

mathématique

Correction de l'algorithme

Formulations

écursives

Implémentation

S'appuyer sur la définition mathématique

$$a^n = \underbrace{a \times \times a}_{nfois}$$
 et $a^0 = 1$

Activité 4:

- Implémenter la fonction puissance_perso(x : int, n : int) → int sans utiliser les fonctions buitin de Python.
- 2. Mettre en place un test de vérification de la fonction.
- 3. Mesurer le temps d'exécution de la fonction en l'appelant avec les paramètres (2701,19406).

Exponentiation Notion de récursivité

Etude de la fonction native

Tester un programme

Durée d'exécution

mplémenter la onction *puissance*

S'appuyer sur la définition mathématique

Correction de l'algorithme

écursives Notation mathématique

Correction

```
def puissance perso(x:int,n:int)->int:
1
         11 11 11
 2
        >>> puissance perso(2,8)
 3
        256
 4
        >>> puissance perso(2,9)
5
        512
6
         11 11 11
8
        res = 1
9
        for i in range(n):
10
             res*=x
11
        return res
```

```
opérande ** 0.006058692932128906
fonction pow() 0.005688667297363281
fonction personnelle 0.13074541091918945
```

Exponentiation Notion de récursivité

Étude de la

Fonctions Python "built-in"

Préconditions

Durée d'exécution

mplémenter la

S'appuyer sur la définition mathématique

Correction de l'algorithme

Formulations récursives

Notation mathématique

plémentation puvelle formulation

Étude de la

Exponentiation

Notion de récursivité

- Fonctions Python "built-in Tester un programme
- Préconditions

 Mettre en place des tests
- Durée d'exécutio
- Implémenter la
- S'appuyer sur la défin
- mathématique

Correction de l'algorithme

Formulations

Notation mathématique

Implémentation

- Etude de la fonction native
- 2. Implémenter la fonction puissance
- 2.1 S'appuyer sur la définition mathématique
- 2.2 Correction de l'algorithme
- 3. Formulations récursives

Correction de l'algorithme

À retenir

Un **invariant de boucle** est une propriété qui si elle est vraie avant l'exécution d'une itération le demeure après l'exécution de l'itération.

Exponentiation Notion de récursivité

Étude de la fonction native

Fonctions Python "built-in"

Préconditions

Durée d'exécutio

Implémenter la fonction puissance

mathématique

Correction de l'algorithme

Formulations écursives

Implémentation

Nouvelle formulation

```
1 res = 1
2 for i in range(n):
```

3

res*=x

Code 5 – La propriété $res = x^i$ est un invariant de boucle.

Exponentiation Notion de récursivité

Étude de la fonction native

Fonctions Python "built-in" Tester un programme

Mettro on place

Durée d'exécutio

Implémenter la

S'appuyer sur la défini-

Correction de l'algorithme

ormulations

récursives

Notation mathématique

- Exponentiation Notion de récursivité

Correction de l'algorithme

Formulations

récursives

19/31

- 3. Formulations récursives

Notation mathématique

$$\textit{puissance}(\textit{x},\textit{n}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \textit{n} = 0 \\ \textit{x.puissance}(\textit{x},\textit{n} - 1) & \text{si } \textit{n} > 0 \end{array} \right.$$

À retenir

Une fonction **récursive** est une fonction qui s'appelle ellemême.

Exponentiation Notion de récursivité

Étude de la fonction native

Tester un programme

Mettre en place des tes

Implémenter la

mathématique

Correction de l'algorithme

Correction de l'algorithm

Notation mathématique

Notation mathématique

- Exponentiation Notion de récursivité

- Correction de l'algorithme

- Implémentation

- 3. Formulations récursives

- Implémentation

Implémentation

À retenir

Une fonction récursive :

- s'appelle elle-même,
- possède un cas limite pour stopper les appels.

Exponentiation Notion de récursivité

Correction de l'algorithme

Implémentation

```
def puissance_recursif(x: int, n: int) -> int:
    if n == 0: # cas limite
        return 1
delse: # appel récursif
return x*puissance_recursif(x, n-1)
```

Code 6 - Traduction de la formule mathématique

Exponentiation Notion de récursivité

Étude de la Fonction native

Fonctions Python "built-in" Tester un programme

Préconditions

Mettre en place (

fonction puissance

mathématique Correction de l'algorithme

Formulations

récursives

Notation mathématique Implémentation

Pile d'appels

```
puissance recursif(6,4)=
    return 6 * puissance recursif(6,3)
                    return 6 * puissance recursif(6,2)
                                     return 6 * puissance recursif(6,1)
                                                     return 6 * puissance recursif(6,0)
                                                                     return 1
```

Visualisation

Exponentiation Notion de récursivité

Correction de l'algorithme

Implémentation

À retenir

La **pile d'appels** stocke les appels successifs de la fonction récursive.

Exponentiation Notion de récursivité

Etude de la fonction native

Fonctions Python "built-in"
Tester up programme

Préconditions

Durée d'evécution

Duree a executi

Implémenter la fonction *puissance*

mathématique Correction de l'algorithme

Correction de l'algorithm

Formulations récursives

Notation mathématique

Implémentation

Nouvelle formulation

Remarques

▶ Python limite la pile d'appels à 1000 récursions.

```
1 import sys
```

2 sys.setrecursionlimit(20000)

Code 7 – Augmenter le nombre de récursions

Exponentiation Notion de récursivité

Étude de la fonction native

Fonctions Python "built-in"

Préconditions

Durée d'exécutio

Implémenter la fonction puissance

S'appuyer sur la définition mathématique

Correction de l'algorithme

Formulations récursives

Notation mathématique

Implémentation

ouvelle formulation

Remarques

Python limite la pile d'appels à 1000 récursions.

- import sys
- sys.setrecursionlimit(20000)

Code 8 – Augmenter le nombre de récursions

La durée d'exécution ne s'est pas améliorée.

fonction récursive 0.16802310943603516

Exponentiation Notion de récursivité

Correction de l'algorithme

Implémentation

- Exponentiation Notion de récursivité

- Correction de l'algorithme

- Nouvelle formulation mathématique

- 3. Formulations récursives

- 3.3 Nouvelle formulation mathématique

Nouvelle formulation mathématique

FIGURE 1 – Exponentiation rapide

Exponentiation Notion de récursivité

Étude de la

Fonctions Python "built-in" Tester un programme

Préconditions Mettre en place des tes

Implémenter la

s appuyer sur la definition mathématique

Correction de l'algorithme

ormulations écursives

Notation mathématique

Nouvelle formulation mathématique

Exponentiation Notion de récursivité

puissance(x, n) =

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \textit{n} = 0 \\ \textit{puissance}(\textit{x} * \textit{x}, \textit{n}/2) & \text{si } \textit{n} > 0 \text{ et n pair} \\ \textit{x.puissance}(\textit{x} * \textit{x}, (\textit{n} - 1)/2) & \text{si } \textit{n} > 0 \text{ et n impair} \end{array} \right.$$

Activité 5 : Implémenter la fonction puissance_recursif_rapide(x: int, n: int)→ int qui traduit la formulation récursive précédente.

Etude de la fonction native

Tester un programme Préconditions

Durée d'exécution

Implémenter la fonction *puissance*

Correction de l'algorithme

Formulations récursives

Notation mathématique Implémentation

Nouvelle formulation mathématique int:

//2)

if n == 0: # cas limite

elif n % 2 == 0: # pair

return 1

else: # impair

Nouvelle formulation mathématique

```
def puissance_recursif_rapide(x: int, n: int) ->
        return puissance recursif rapide(x*x, n//2)
                                                               Correction de l'algorithme
        return x*puissance recursif rapide(x*x, n
```

Code 9 – Exponentiation rapide

Visualisation

Exponentiation Notion de récursivité

Correction de l'algorithme

Nouvelle formulation mathématique

fonction récursive rapide 1 0.021007537841796875

Code 10 – Les résultats s'améliorent sans égaler la fonction native.

itératif plus rapide car appels fonction coûtent; mais récursif donne souvent code plus clair/lisible