Tris

Christophe Viroulaud

Première - NSI

Algo 04

Algorithmes de tris

Tri par sélectio

Tri par insertion

Implémentation

Rappel: Passer un tableau à une fonction

Études des implémentations

Correction

1/57



FIGURE 1 – Trier un jeu de cartes est un problème informatique.

Déterminer plusieurs méthodes de tris de données.

Algorithmes de tris

Recherche Tri nar sélection

Tri par sélectio

Implémentation

Rappel : Passer un tableau à une fonction Implémentations des tris

Études des

пріетпептаціс **----**--

1. Algorithmes de tris

- 1.1 Recherche
- 1.2 Tri par sélection
- 1.3 Tri par insertion
- 2. Implémentation
- 3. Études des implémentations

Algorithmes de tris

Recherche

Tri par sélection

Implémentation

Rappel : Passer un tablea à une fonction

Implémentations des

Études des Implémentations

Algorithmes de tris - Recherche



Activité 1:

- 1. Prendre le paquet de cartes mélangées et les étaler sur la table.
- 2. Trier les cartes.
- 3. Formaliser la méthode utilisée sous forme d'un algorithme.

Algorithmes de tris

Recherche

Tri par sélection

Implémentation

Rappel : Passer un tableau à une fonction Implémentations des tris

Études des implémentations

- 1. Algorithmes de tris
- 1.1 Recherche
- 1.2 Tri par sélection
- 1.3 Tri par insertion
- 2. Implémentation
- 3. Études des implémentations

Algorithmes de tris

Recherche

Tri par sélection

Pappal : Parror un ta

Implémentations des

Études des

Terminaison

Tri par sélection

- Pour chaque carte du tas :
 - Trouver la plus petite carte dans la partie non triée.
 - Échanger cette carte avec la première de la partie non triée.

Algorithmes de tris

Recherche
Tri par célection

Tri par sélection

Implémentation

Rappel : Passer un tableau à une fonction Implémentations des tris

Études des mplémentations

Terminaison

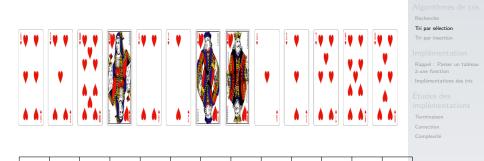


FIGURE 2 – Modélisation

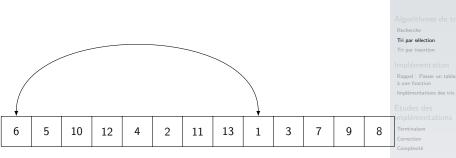


FIGURE 3 – Sélection du plus petit élément.

1 5 10 12 4 2 11 13 6 3 7 9 8	1	5	10	12	4	2	11	13	6	3	7	9	8
-------------------------------	---	---	----	----	---	---	----	----	---	---	---	---	---

FIGURE 4 – La partie triée est à gauche.

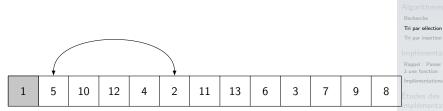


FIGURE 5 – Sélection du plus petit élément.

1	2	10	12	4	5	11	13	6	3	7	9	8	
---	---	----	----	---	---	----	----	---	---	---	---	---	--

FIGURE 6 – La partie triée est à gauche.

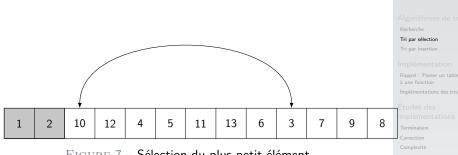


FIGURE 7 – Sélection du plus petit élément.

1 2 3 12 4 5 11 13 6 1	10 7 9 8
------------------------	----------

FIGURE 8 – La partie triée est à gauche.

- 1. Algorithmes de tris
- 1.1 Recherche
- 1.2 Tri par sélection
- 1.3 Tri par insertion
- 2. Implémentation
- 3. Études des implémentations

Algorithmes de tris

Recherche

Tri par sélection

Tri par insertion

Implémentation

à une fonction

implementations des tr

Études des implémentations

Correction

Tri par insertion

- Pour chaque carte du tas :
 - ► Tant que la carte précédente est plus petite
 - ► Échanger cette carte avec la carte en cours.

Algorithmes de tris

Recherche

Tri par insertion

Implémentation

Rappel: Passer un tablea à une fonction

Études des implémentations

Terminaiso Correction

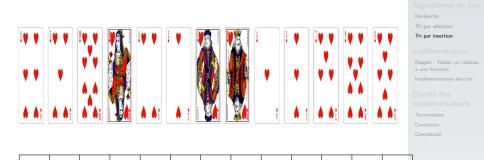


FIGURE 9 – Modélisation

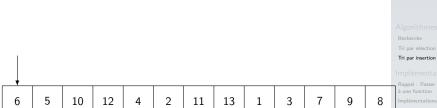




FIGURE 11 – La partie triée est à gauche.



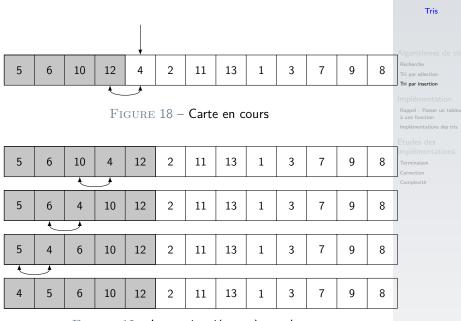
FIGURE 13 – La partie triée est à gauche.



FIGURE 15 – La partie triée est à gauche.



FIGURE 17 – La partie triée est à gauche.



 ${\rm Figure}~19-{\rm La}$ partie triée est à gauche.

1. Algorithmes de tris

- 2. Implémentation
- 2.1 Rappel: Passer un tableau à une fonction
- 2.2 Implémentations des tris
- 3. Études des implémentations

Algorithmes de tris

Recherche

Tri par sélection

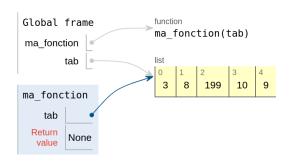
Implémentation

Rappel : Passer un tableau à une fonction

Études des

Terminaison Correction

Code 1 – Quand on passe un tableau en argument à une fonction, on passe en réalité **une référence** au tableau original.



algorithmes de tris

Tri par sélection

Implémentation

Rappel : Passer un tableau à une fonction

nplémentations des

Etudes des implémentations

- 1. Algorithmes de tris
- 2. Implémentation
- 2.1 Rappel : Passer un tableau à une fonction
- 2.2 Implémentations des tris
- 3. Études des implémentations

Algorithmes de tris

Recherche

Tri par sélection

Implémentation

Rappel : Passer un tablea

Implémentations des tris

Études des

Terminaisor Correction

Complexité

Implémentation des tris - Tri par sélection

- Pour chaque carte du tas :
 - Trouver la plus petite carte dans la partie non triée.
 - Échanger cette carte avec la première de la partie non triée

Activité 2 :

- Écrire la fonction indice_mini(tab: list, dep: int) → int qui renvoie l'indice de la valeur minimale de tab, entre l'élément d'indice deb et la fin du tableau.
- Écrire la fonction echanger(tab: list, i: int, j: int) → None qui échange les éléments d'indices i et j.
- Écrire alors la fonction tri_insertion(tab: list) → None.

Algorithmes de tris

Kecherche Tri par sélection

Tri par sélection

Implémentatio

Rappel : Passer un tableau à une fonction

Implémentations des tris

Études des implémentations

```
def indice_mini(tab: list, dep: int) -> int:
1
       i_mini = dep
3
       mini = tab[dep]
       # parcours de la partie du tableau
4
       for i in range(dep, len(tab)):
5
           if tab[i] < mini:</pre>
6
                i mini = i
7
                mini = tab[i]
8
9
       return i mini
```

```
Algorithmes de tris
```

Recherche

Tri par sélection

Implémentation

Rappel : Passer un tableau à une fonction

Implémentations des tris

Études des implémentations

```
def echanger(tab: list, i: int, j: int) -> None:
   temp = tab[i]
   tab[i] = tab[j]
   tab[j] = temp
```

Algorithmes de tris

Recherche

Tri par sélection

Implémentation

Rappel : Passer un tableau à une fonction

Implémentations des tris

tudes des mplémentations

Correction

```
def tri selection(tab: list) -> None:
1
      for i in range(len(tab)):
           i mini = indice mini(tab, i)
3
           echanger(tab, i, i_mini)
4
```

Implémentations des tris

Activité 3:

- 1. Construire par compréhension un tableau de 10 éléments aléatoires compris entre 0 et 100.
- 2. Tester alors la fonction de tri.

Algorithmes de tris

Recherche

Tri nar in

Implémentation

Rappel : Passer un tablea à une fonction

Implémentations des tris

Études des implémentations

Correction

Complexité

Implémentations des tris

```
t = [randint(0, 100) for _ in range(10)]
print(t)
tri_selection(t)
print(t)
```

Tri par insertion

- ► Pour chaque carte du tas :
 - ► Tant que la carte précédente est plus petite
 - **Échanger** cette carte avec la carte en cours.

Activité 4:

- 1. Écrire la fonction inserer(tab: list, j: int)
 - ightarrow None qui insère l'élément de rang ${f j}$ dans la partie déjà triée.
- Écrire alors la fonction tri_insertion(tab: list) → None.

Algorithmes de tris

Tri par sélection

Implementation

à une fonction

Implémentations des tris

Etudes des implémentations

Correction

```
def inserer(tab: list, j: int) -> None:
    while j-1 >= 0 and tab[j-1] > tab[j]:
        echanger(tab, j-1, j)
        j = j-1
```

Remarque

La condition j-1 >= 0 évite de sortir du tableau.

Algorithmes de tris

Tri par sélectio

Implémentation

Rappel : Passer un tableau à une fonction

Implémentations des tris

Études des implémentations

```
def tri_insertion(tab: list) -> None:
    for i in range(len(tab)):
        inserer(tab, i)
```

1

3

Recherche Tri par sélection

Tri par insertio

Implémentation

Rappel : Passer un tableau à une fonction

Implémentations des tris

Études des implémentations

- 1. Algorithmes de tris
- 2. Implémentation
- 3. Études des implémentations
- 3.1 Terminaison
- 3.2 Correction
- 3.3 Complexité

Algorithmes de tris

Recherche

Iri par selection

Rappel : Passer un table

Implémentations des

Études des implémentations

Terminaisor

Études : Terminaison

À retenir

Pour montrer que l'algorithme termine (ne part pas dans une boucle sans fin), on utilise **un variant de boucle**.

algorithmes de tris

Recherche

Tri par sélection

Implémentation

Rappel : Passer un tableau à une fonction

Études des

Terminaison

Tri par sélection

Pour le tri par sélection, on utilise deux boucles bornées. La terminaison est dans ce cas évidente : les deux boucles s'arrêteront obligatoirement.

Terminaison

Tri par insertion

Pour le tri par insertion :

```
def inserer(tab: list, j: int) -> None:
    while j-1 >= 0 and tab[j-1] > tab[j]:
        echanger(tab, j-1, j)
        j = j-1
```

Code 2 - La fonction inserer contient une boucle non bornée.

- La variable j est un variant de boucle.
- ▶ ligne 4 : À chaque tour, j est diminué de 1.
- ▶ ligne 1 : L'instruction j-1 >= 0 assure que la boucle se termine.

Algorithmes de tris

Recherche Tri par sélection

Implémentation

Rappel : Passer un tableau à une fonction

Études des

Terminaison

- 1. Algorithmes de tris
- 2. <mark>Implémentatio</mark>n
- 3. Études des implémentations
- 3.1 Terminaison
- 3.2 Correction
- 3.3 Complexité

Algorithmes de tris

Recherche

Tri par sélection

Implémentation

Rappel : Passer un tableau à une fonction

...,

Études des implémentations

Terminaison

Correction

36 / 57

Correction

À retenir

Pour montrer que l'algorithme est correct, on utilise un invariant de boucle. Un invariant est une expression qui reste vraie à chaque itération de boucle.

Algorithmes de tris

Recherche

Tri par sélection

Implémentation

Rappel : Passer un tablea à une fonction

Études des implémentations

Terminaison

Correction

Tri par sélection

Pour le tri par sélection, l'invariant de boucle est :

Avant chaque itération de la boucle externe, la partie gauche du tableau est triée.

Correction

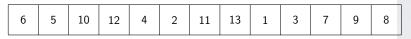


FIGURE 20 – Vraie avant la première itération.

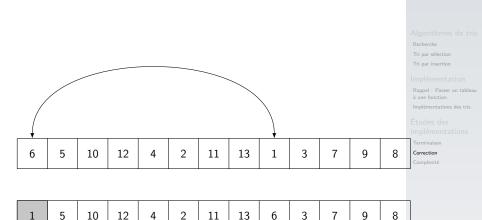


FIGURE 21 – Vraie avant la deuxième itération.

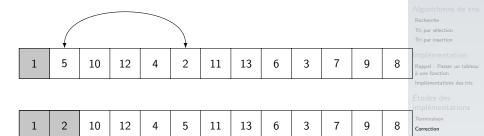


FIGURE 22 – Vraie avant la troisième itération.

On peut démontrer que la relation est vraie pour n'importe quelle itération.

Tri par insertion

Pour le tri par insertion, l'invariant de boucle est le même :

Avant chaque itération de la boucle externe, la partie gauche du tableau est triée.

Correction

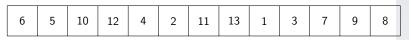


FIGURE 23 – Vraie avant la première itération.

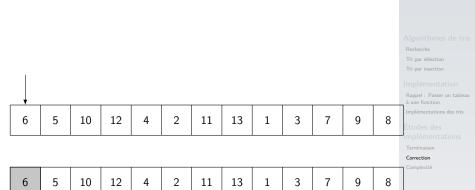


FIGURE 24 – Vraie avant la deuxième itération.

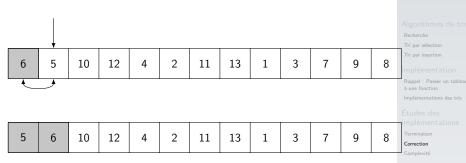


FIGURE 25 – Vraie avant la troisième itération.

On peut démontrer que la relation est vraie pour n'importe quelle itération.

Sommaire

- 1. Algorithmes de tris
- 2. Implémentation
- 3. Études des implémentations
- 3.1 Terminaison
- 3.2 Correction
- 3.3 Complexité

Algorithmes de tris

Recherche

Iri par selection

Implémentation

Rappel : Passer un tableau à une fonction

implementations des ti

Études des mplémentations

Correction

Complexité

À retenir

- La complexité étudie les performances d'un algorithme.
- Elles sont indépendantes de la puissance de la machine.
- On étudie le nombre d'opérations que doit effectuer l'algorithme.

Algorithmes de tris

Recherche

Rappel : Passer un tabl à une fonction

. I I

Etudes des implémentations

Correction

Tri par sélection

```
def tri_selection(tab: list) -> None:
    for i in range(len(tab)):
        i_mini = indice_mini(tab, i)
        echanger(tab, i, i_mini)
```

Observation

On note n la taille du tableau. La boucle (ligne 2) effectue n itérations. lgorithmes de tris

Recherche

Implémentation

Rappel : Passer un tableau à une fonction

Études des

Terminaison

```
def tri_selection(tab: list) -> None:
    for i in range(len(tab)):
        i_mini = indice_mini(tab, i)
        echanger(tab, i, i_mini)
```

```
1
   def indice mini(tab: list, dep: int) -> int:
       i mini = dep
2
       mini = tab[dep]
3
       for i in range(dep, len(tab)):
4
            if tab[i] < mini:</pre>
5
6
                i mini = i
                mini = tab[i]
7
8
       return i mini
```

Observation

À chaque itération, la fonction de tri appelle la fonction indice_mini. Cette dernière effectue n-dep itérations.

Recherche Tri par sélection

Rappel : Passer un tableau à une fonction

Études des mplémentations

 à la première itération de i, la boucle de indice_mini effectue n−1 itérations.

1 3 7 8 5

 à la deuxième itération de i, la boucle de indice_mini effectue n−2 itérations.



...

Algorithmes de tris

Recherche Tri nar sélection

Implementation

à une fonction
Implémentations des tris

tudes des

Terminaison

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Le tri par sélection effectue $\frac{n.(n-1)}{2}$ opérations pour ordonner le tableau.

Le nombre d'opérations dépend de n^2 . On dit que la complexité est **quadratique**.

Algorithmes de tris

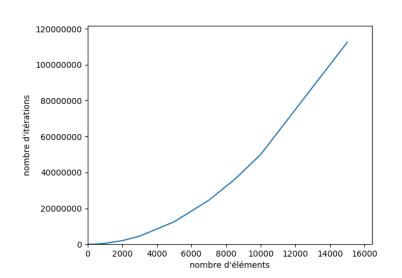
Tri nar sélection

Rappel : Passer un tablea à une fonction

Études des

Correction

Évolution du nombre d'itérations



algorithmes de tris

Tri par sélection

luantina antatian

Rappel : Passer un tableau à une fonction

Études des

Terminaison Correction

Tri par insertion

```
def tri_insertion(tab: list) -> None:
    for i in range(len(tab)):
        inserer(tab, i)
```

Observation

On note n la taille du tableau. La boucle (ligne 2) effectue n itérations. Algorithmes de tris

Recherche

luan lána anatotica

Rappel : Passer un tableau à une fonction

Études des

Terminaison

Correction

Complexité

```
def tri_insertion(tab: list) -> None:
    for i in range(len(tab)):
        inserer(tab, i)

for i in range(len(tab)):
        inserer(tab, i)

for i in range(len(tab)):
        inserer(tab, i)
```

```
def inserer(tab: list, j: int) -> None:
    while j-1 >= 0 and tab[j-1] > tab[j]:
        echanger(tab, j-1, j)
        j = j-1
```

Observation

À chaque itération, la fonction de tri appelle la fonction inserer. Le nombre d'itérations de la boucle while peut varier.

```
def inserer(tab: list, j: int) -> None:
1
       while j-1 \ge 0 and tab[j-1] > tab[j]:
           echanger(tab, j-1, j)
3
           j = j-1
4
```



FIGURE 26 – 3 itérations pour placer 2



FIGURE 27 – 0 itération pour placer 9

Activité 5:

- 1. Compter le nombre d'itérations de la boucle **while** si le tableau est déjà trié.
- 2. Compter le nombre d'itérations de la boucle **while** si le tableau est trié dans l'ordre décroissant.

Algorithmes de tris

Tri nar sélectio

Tri par in

Implémentation

Rappel : Passer un tableau à une fonction Implémentations des tris

Études des implémentations

Terminaison

Correction

```
def inserer(tab: list, j: int) -> None:
    while j-1 >= 0 and tab[j-1] > tab[j]:
        echanger(tab, j-1, j)
        j = j-1
```

```
1 4 5 7 8
```

Code 3 — Le tableau est déjà trié. La boucle while n'effectue aucune itération.

Algorithmes de tris

Tri par sélectio

Implémentation

Rappel : Passer un table à une fonction

Études des implémentations

Terminaison Correction

Correction

Correction

```
8 7 5 4 1
```

Code 4 — Le tableau est inversé. La boucle wile effectue i itérations.

algorithmes de tris

Recherche Tri par sélection

Rappel : Passer un table

imprementations des tris

Etudes des implémentations

Correction

Dans le meilleur des cas (tableau déjà trié), la boucle imbriquée while effectue 0 itération. Dans ce cas particulier, le tri par insertion est en temps linéaire. Algorithmes de tris

Recherche Tri par sélection

Implémentation

Rappel : Passer un tablea à une fonction

Études des mplémentations

Correction

- Dans le meilleur des cas (tableau déjà trié), la boucle imbriquée while effectue 0 itération. Dans ce cas particulier, le tri par insertion est en temps linéaire.
- Dans le pire des cas (tableau inversé), la boucle imbriquée while effectue n itérations. Le tri par insertion est en temps quadratique (n²).

Algorithmes de tris

Recherche Tri par sélection

Image I dans a material a m

Rappel : Passer un tablea à une fonction Implémentations des tris

Études des

Correction

- Dans le meilleur des cas (tableau déjà trié), la boucle imbriquée while effectue 0 itération. Dans ce cas particulier, le tri par insertion est en temps linéaire.
- Dans le pire des cas (tableau inversé), la boucle imbriquée while effectue n itérations. Le tri par insertion est en temps quadratique (n²).
- En moyenne (tableau quelconque), la boucle imbriquée effectue $\bf n$ itérations. Le tri par insertion est en temps **quadratique** (n^2) .

Algorithmes de tri

Tri par sélection

Incomplete and the second

Rappel : Passer un tablea à une fonction Implémentations des tris

tudes des mplémentations