Fonction `sorted`
Diviser pour régner

Christophe Viroulaud

Terminale - NSI

Algo 01

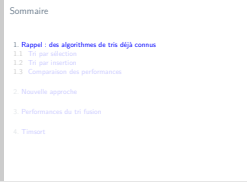
En tant que langage de haut niveau, Python offre des méthodes permettant d'effectuer efficacement certaines tâches courantes.
La méthode sort trie en place un tableau. .

tri en place ou nouveau tableau

En tant que langage de haut niveau, Python offre des méthodes permettant d'effectuer efficacement certaines tâches courantes.
La méthode **`sort`** trie en place un tableau. .

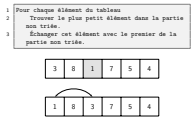
Quel algorithme de tri est implémenté dans la méthode sort ?

Quel algorithme de tri est implémenté dans la méthode `sort` ?



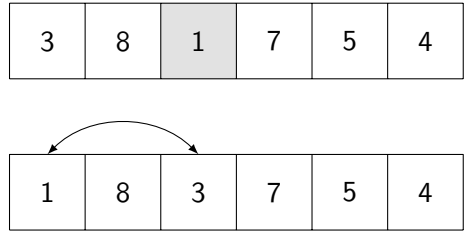
Sommaire

Tri par sélection (en place)



Tri par sélection (en place)

```
1 Pour chaque élément du tableau
2     Trouver le plus petit élément dans la partie
  non triée.
3     Échanger cet élément avec le premier de la
  partie non triée.
```



Tri par sélection (en place)

```
Pour chaque élément du tableau
    Trouver le plus petit élément dans la partie non triée.
    Échanger cet élément avec le premier de la partie non triée.
```

Activité 1 :
1. Construire par compréhension un tableau de 10 entiers aléatoires compris entre 1 et 100.
2. Écrire la fonction `tri_selection(tab: list)` → `None` qui trie le tableau en place.

Tri par sélection (en place)

```
Pour chaque élément du tableau
    Trouver le plus petit élément dans la partie non triée.
    Échanger cet élément avec le premier de la partie non triée.
```

Activité 1 :

1. Construire par compréhension un tableau de 10 entiers aléatoires compris entre 1 et 100.
2. Écrire la fonction `tri_selection(tab: list)` → `None` qui trie le tableau en place.

Correction

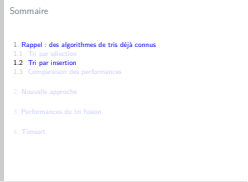
```
tab = [randint(1, 100) for _ in range(10)]
```

```
def tri_selection(tab: list) -> None:
    for i in range(len(tab)):
        # trouver le mini
        i_mini = i
        for j in range(i+1, len(tab)):
            if tab[j] < tab[i_mini]:
                i_mini = j
        # échanger
        tab[i], tab[i_mini] = tab[i_mini], tab[i]
```

Correction

```
1 tab = [randint(1, 100) for _ in range(10)]
```

```
1 def tri_selection(tab: list) -> None:
2     for i in range(len(tab)):
3         # trouver le mini
4         i_mini = i
5         for j in range(i+1, len(tab)):
6             if tab[j] < tab[i_mini]:
7                 i_mini = j
8         # échanger
9         tab[i], tab[i_mini] = tab[i_mini], tab[i]
```

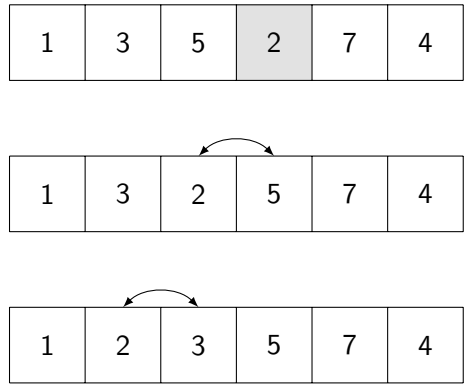


Sommaire

Tri par insertion (en place)
1 Pour chaque élément du tableau
2 Tant que l'élément précédent est inférieur
3 Permuter les deux éléments
1 3 5 2 7 4
1 3 2 5 7 4
1 2 3 5 7 4

Tri par insertion (en place)

```
1 Pour chaque élément du tableau
2     Tant que l'élément précédent est inférieur
3         Permuter les deux éléments
```



Tri par insertion (en place)

1 Pour chaque élément du tableau
2 Tant que l'élément précédent est inférieur
3 Permuter les deux éléments

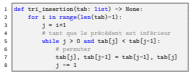
Activité 2 :
1. Construire par compréhension un tableau de 10 entiers aléatoires compris entre 1 et 100.
2. Écrire la fonction `tri_insertion(tab: list)` → `None` qui trie le tableau en place.

Tri par insertion (en place)

```
1 Pour chaque élément du tableau
2     Tant que l'élément précédent est inférieur
3         Permuter les deux éléments
```

Activité 2 :

1. Construire par compréhension un tableau de 10 entiers aléatoires compris entre 1 et 100.
2. Écrire la fonction `tri_insertion(tab: list)` → `None` qui trie le tableau en place.



Correction

```
1  def tri_insertion(tab: list) -> None:
2      for i in range(len(tab)-1):
3          j = i+1
4          # tant que le précédent est inférieur
5          while j > 0 and tab[j] < tab[j-1]:
6              # permuter
7              tab[j], tab[j-1] = tab[j-1], tab[j]
8              j -= 1
```

Sommaire

1. Rappel : des algorithmes de tris déjà connus
1.1 Tri par sélection
1.2 Tri par insertion
1.3 Comparaison des performances
2. Nouvelle approche
3. Performances du tri fusion
4. Timsort

Sommaire

créer un nouveau tableau pour chaque fonction !!

Activité 3 :
1. Construire par compréhension un tableau de 10000 entiers compris entre 1 et 10000.
2. Mesurer la durée d'exécution de la méthode `sort` et des deux fonctions précédentes.

Comparaison des performances

Activité 3 :

1. Construire par compréhension un tableau de 10000 entiers compris entre 1 et 10000.
2. Mesurer la durée d'exécution de la méthode `sort` et des deux fonctions précédentes.

Correction

```
tab = [randint(1, 10000) for _ in range
   (10000)]
deb = time()
tri_selection(tab)
fin = time()
print(fin-deb)
```

Code 1 – tri par sélection

```
>>> sélection  4.557838678359985
>>> insertion 3.959839105606079
>>> sort  0.0019469261169433594
```

Code 2 – Résultats

Correction

```
1  tab = [randint(1, 10000) for _ in range
       (10000)]
2  deb = time()
3  tri_selection(tab)
4  fin = time()
5  print(fin-deb)
```

Code 1 – tri par sélection

```
1  >>> sélection  4.557838678359985
2  >>> insertion 3.959839105606079
3  >>> sort  0.0019469261169433594
```

Code 2 – Résultats

Évolution du nombre d'itérations

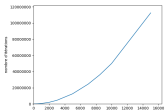


FIGURE 1 – Tri par sélection : complexité **quadratique**

15000 éléments → 100 millions d'itérations

Évolution du nombre d'itérations

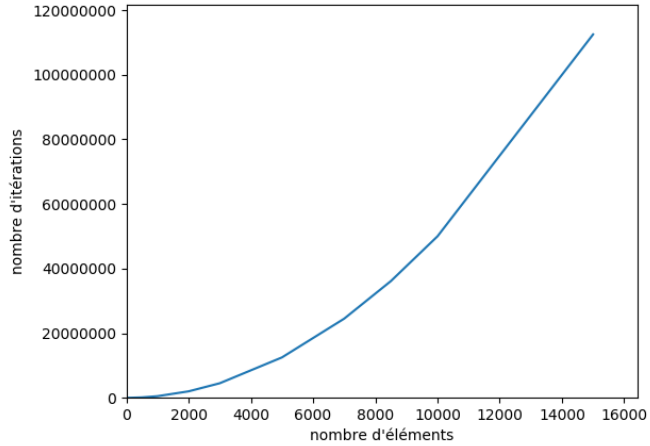


FIGURE 1 – Tri par sélection : complexité **quadratique**

Sommaire

Sommaire

La propriété triviale suivante va nous permettre de construire une nouvelle méthode de tri :

Résoudre de petits problèmes

FIGURE 2 – Deux listes triées

Résoudre de petits problèmes

Observation

Une liste qui contient 0 ou 1 élément est triée.

8 5

FIGURE 2 – Deux listes triées

Deux listes d'un élément chacune peuvent être fusionnées en une liste triée de deux éléments.

8 5

5 8

FIGURE 3 – Fusionner 2 listes de 1 élément

Deux listes d'un élément chacune peuvent être fusionnées en une liste triée de deux éléments.

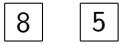


FIGURE 3 – Fusionner 2 listes de 1 élément

Principe
En résolvant des petits problèmes, nous pouvons remonter à des problèmes plus importants en appliquant le même principe.

Principe

En résolvant des petits problèmes, nous pouvons remonter à des problèmes plus importants en appliquant le même principe.

Sommaire

Sommaire

essayons de nous ramener à de petits problèmes

...pour solutionner un gros problème

FIGURE 4 – Un gros problème : trier une liste

...pour solutionner un gros problème

FIGURE 4 – Un gros problème : trier une liste

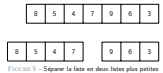


Figure 5 – Séparer la liste en deux listes plus petites

Pour se ramener à un problème plus petit, séparons la liste en deux listes

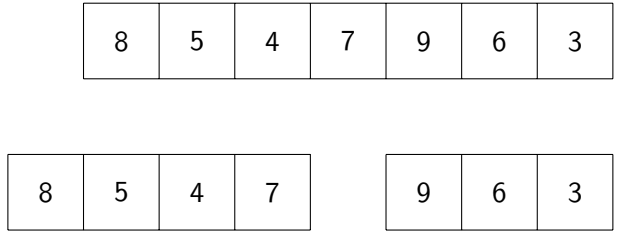
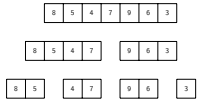
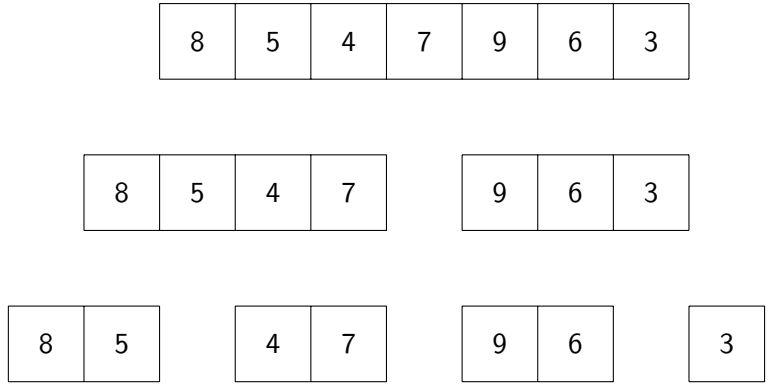
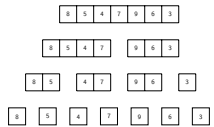


FIGURE 5 – Séparer la liste en deux listes plus petites







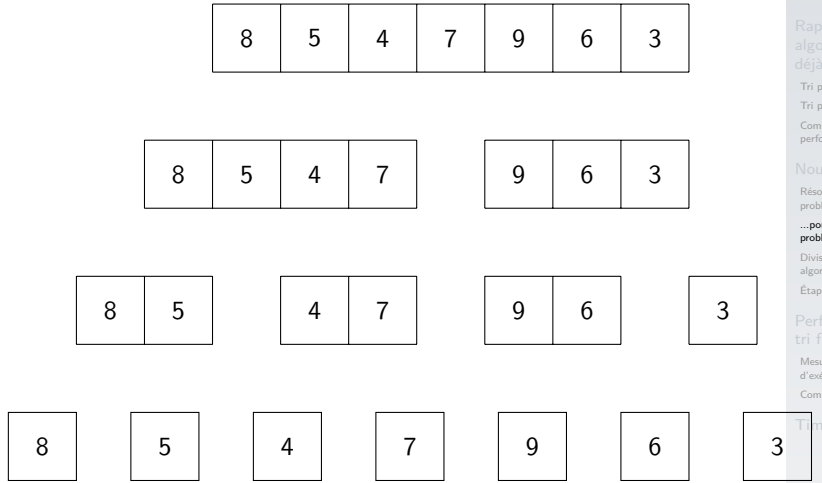
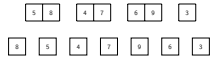


FIGURE 6 – Obtenir de petits problèmes

8 5 4 7 9 6 3
Figure 7 – Résoudre les petits problèmes

Figure 7 – Résoudre les petits problèmes



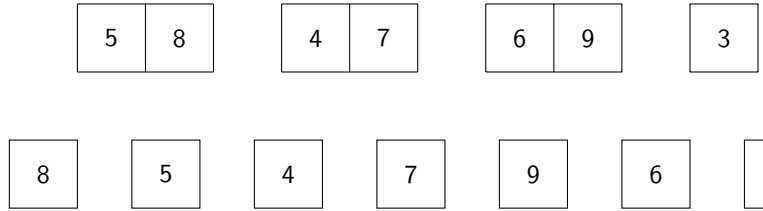


FIGURE 8 – Trier...

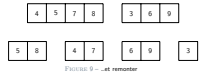


FIGURE 9 – ...et remonter

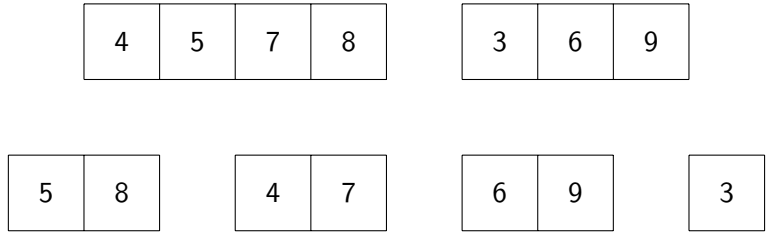


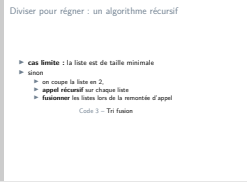
FIGURE 9 – ...et remonter

FIGURE 10 – Le tri se termine

3 4 5 6 7 8 9
4 5 7 8
3 6 9
FIGURE 10 – Le tri se termine

Sommaire

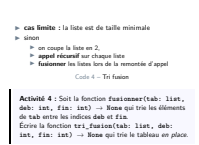
Sommaire



Diviser pour régner : un algorithme récursif

- **cas limite :** la liste est de taille minimale
- sinon
  - on coupe la liste en 2,
  - **appel récursif** sur chaque liste
  - **fusionner** les listes lors de la remontée d'appel

Code 3 – Tri fusion


- **cas limite :** la liste est de taille minimale
- sinon
  - on coupe la liste en 2,
  - **appel récursif** sur chaque liste
  - **fusionner** les listes lors de la remontée d'appel

Code 4 – Tri fusion

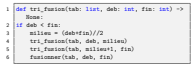
Activité 4 : Soit la fonction `fusionner(tab: list, deb: int, fin: int)` → `None` qui trie les éléments de `tab` entre les indices `deb` et `fin`.
Écrire la fonction `tri_fusion(tab: list, deb: int, fin: int)` → `None` qui trie le tableau *en place*.

- **cas limite :** la liste est de taille minimale
- sinon
  - on coupe la liste en 2,
  - **appel récursif** sur chaque liste
  - **fusionner** les listes lors de la remontée d'appel

Code 4 – Tri fusion

Activité 4 : Soit la fonction `fusionner(tab: list, deb: int, fin: int)` → `None` qui trie les éléments de `tab` entre les indices `deb` et `fin`.
Écrire la fonction `tri_fusion(tab: list, deb: int, fin: int)` → `None` qui trie le tableau *en place*.

Correction



Code 5 – Tri fusion

Correction

```
1 def tri_fusion(tab: list, deb: int, fin: int) ->
    None:
2 if deb < fin:
3     milieu = (deb+fin)//2
4     tri_fusion(tab, deb, milieu)
5     tri_fusion(tab, milieu+1, fin)
6     fusionner(tab, deb, fin)
```

Code 5 – Tri fusion

Sommaire

Sommaire

Étape de la fusion

Lors de la remontée d'appel, la *fusion* assemble deux tableaux triés en un seul.

3 4 5 6 7 8 9

4 5 7 8 3 6 9

FIGURE 11 – Fusionner

Étape de la fusion

Lors de la remontée d'appel, la *fusion* assemble deux tableaux triés en un seul.

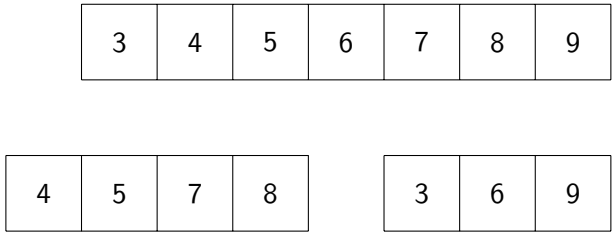


FIGURE 11 – Fusionner

En pratique, nous effectuons un tri *place*.

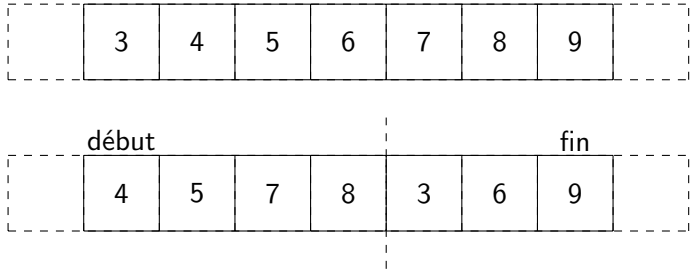


FIGURE 12 – Fusionner

Pour assembler les deux parties du tableau, il faut prendre le plus petit élément, jusqu'à vider un des deux blocs. Puis on complète avec les éléments restants.
début
fin
4 5 7 8 3 6 9
FIGURE 13 – Fusionner

Pour assembler les deux parties du tableau, il faut prendre le plus petit élément, jusqu'à vider un des deux blocs. Puis on complète avec les éléments restants.

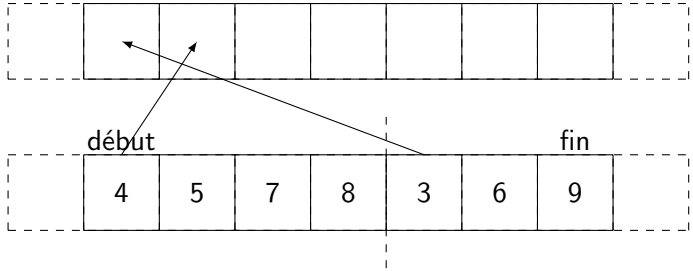


FIGURE 13 – Fusionner

Puis on complète avec les éléments restants.

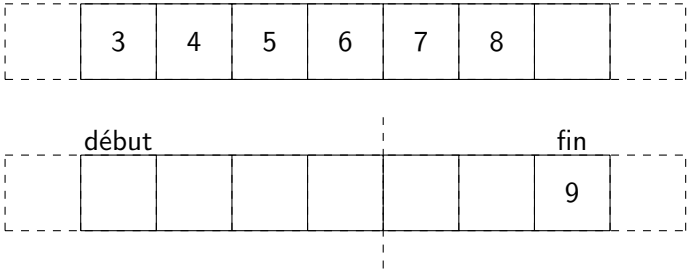


FIGURE 14 – Compléter

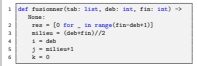
Remarque

En pratique nous utiliserons un tableau temporaire pour fusionner.

Activité 5 : Écrire la fonction `fusionner(tab: list, deb: int, fin: int)` → `None` qui assemble les éléments de `tab` entre les indices `deb` et `fin`. Les éléments seront d'abord stockés dans un tableau temporaire qui viendra ensuite écraser la partie de `tab`.

Activité 5 : Écrire la fonction `fusionner(tab: list, deb: int, fin: int)` → `None` qui assemble les éléments de `tab` entre les indices `deb` et `fin`. Les éléments seront d'abord stockés dans un tableau temporaire qui viendra ensuite écraser la partie de `tab`.

Correction



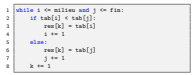
Code 6 – initialiser

Correction

```
1  def fusionner(tab: list, deb: int, fin: int) ->
       None:
2      res = [0 for _ in range(fin-deb+1)]
3      milieu = (deb+fin)//2
4      i = deb
5      j = milieu+1
6      k = 0
```

Code 6 – initialiser

Correction



Code 7 – assembler

Correction

```
1  while i <= milieu and j <= fin:
2      if tab[i] < tab[j]:
3          res[k] = tab[i]
4          i += 1
5      else:
6          res[k] = tab[j]
7          j += 1
8      k += 1
```

Code 7 – assembler

Correction

```
for i1 in range(i, milieu+1):
    res[k] = tab[i1]
    k += 1
for j1 in range(j, fin+1):
    res[k] = tab[j1]
    k += 1
```

Code 8 – compléter

Correction

```
for i1 in range(i, milieu+1):
    res[k] = tab[i1]
    k += 1
for j1 in range(j, fin+1):
    res[k] = tab[j1]
    k += 1
```

Code 8 – compléter

Correction

```
# remplacement tab par res
for k in range(fin-deb+1):
    tab[deb+k] = res[k]
```

Code 9 – remplacer

Correction

```
# remplacement tab par res
for k in range(fin-deb+1):
    tab[deb+k] = res[k]
```

Code 9 – remplacer

Sommaire

Sommaire

Mesure de la durée d'exécution

Activité 6 :
1. Construire par compréhension un tableau de 10000 entiers compris entre 1 et 10000.
2. Mesurer la durée d'exécution de la fonction `tri_fusion` et des deux fonctions précédentes.

Mesure de la durée d'exécution

Activité 6 :

1. Construire par compréhension un tableau de 10000 entiers compris entre 1 et 10000.
2. Mesurer la durée d'exécution de la fonction **`tri_fusion`** et des deux fonctions précédentes.

Correction

```
tab = [randint(1, 10000) for _ in range
   (10000)]
deb = time()
tri_fusion(tab2, 0, len(tab)-1)
fin = time()
print("fusion ", fin-deb)
```

```
>>> sélection  4.557838678359985
>>> insertion 3.959839105606079
>>> sort  0.0019469261169433594
>>> fusion  0.1485743522644043
```

Correction

```
1 tab = [randint(1, 10000) for _ in range
     (10000)]
2 deb = time()
3 tri_fusion(tab2, 0, len(tab)-1)
4 fin = time()
5 print("fusion ", fin-deb)
```

```
1 >>> sélection  4.557838678359985
2 >>> insertion 3.959839105606079
3 >>> sort  0.0019469261169433594
4 >>> fusion  0.1485743522644043
```

Sommaire

Sommaire

Complexité du découpage

- À chaque appel de la fonction `tri_fusion` nous divisons la liste en deux.

Complexité du découpage

- À chaque appel de la fonction **`tri_fusion`** nous divisons la liste en deux.

Complexité du découpage

- À chaque appel de la fonction `tri_fusion` nous divisons la liste en deux.
- Combien de fois faut-il couper la liste en deux pour obtenir des listes d'un élément ?

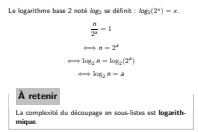
Complexité du découpage

- À chaque appel de la fonction **`tri_fusion`** nous divisons la liste en deux.
- Combien de fois faut-il couper la liste en deux pour obtenir des listes d'un élément ?

Mathématiquement nous cherchons a tel que :
$\frac{n}{2^a} = 1$

Mathématiquement nous cherchons a tel que :

$$\frac{n}{2^a} = 1$$


Le logarithme base 2 noté log_2 se définit : $log_2(2^x) = x$.

$$\frac{n}{2^a} = 1$$
$$\iff n = 2^a$$
$$\iff \log_2 n = \log_2(2^a)$$
$$\iff \log_2 n = a$$

À retenir

La complexité du découpage en sous-listes est **logarithmique**.

Le logarithme base 2 noté log_2 se définit : $log_2(2^x) = x$.

$$\frac{n}{2^a} = 1$$

$$\iff n = 2^a$$

$$\iff \log_2 n = \log_2(2^a)$$

$$\iff \log_2 n = a$$

À retenir

La complexité du découpage en sous-listes est **logarithmique**.

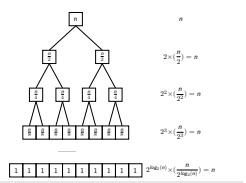
qq soit le niveau, pour fusionner on se contente de parcourir une fois un tableau

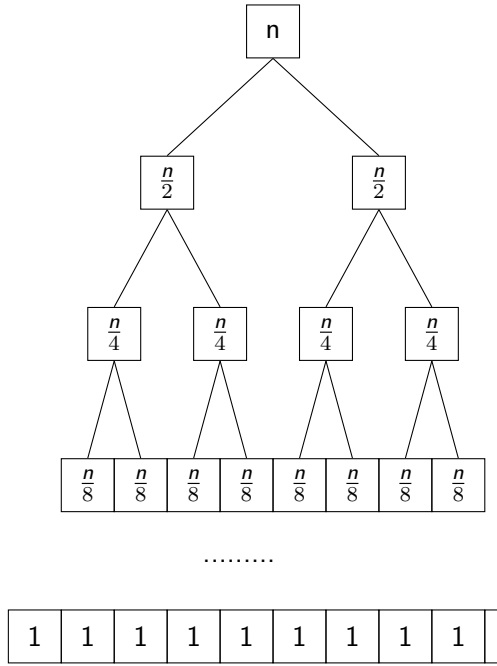
Complexité de la fusion

La fonction **fusionner** réalise n comparaisons pour assembler deux listes de taille $\frac{n}{2}$

Complexité de la fusion

La fonction **fusionner** réalise n comparaisons pour assembler deux listes de taille $\frac{n}{2}$.





n

$2\times(\frac{n}{2}) = n$

$2^2\times(\frac{n}{2^2}) = n$

$2^3\times(\frac{n}{2^3}) = n$

$2^{log_2(n)}\times(\frac{n}{2^{log_2(n)}}) = n$

Complexité du tri fusion

À retenir
Chaque niveau de fusion a un coup de n et il y a $\log_2(n)$ niveaux.
$O(n \times log_2(n))$

Complexité du tri fusion

À retenir

Chaque niveau de fusion a un coup de n et il y a $\log_2(n)$ niveaux.

$$O(n \times log_2(n))$$

Activité 7 : Sachant que la complexité du tri par sélection est quadratique, la comparer au tri fusion pour un tableau de 100, 1000, 10000, 100000 éléments.

$$\log_2(n) = \frac{\ln n}{\ln 2}$$

éléments	tri par sélection	tri fusion
100	10^4	664
1000	10^6	9966
10000	10^8	132877
100000	10^{10}	1660964

Correction

éléments	tri par sélection	tri fusion
100	10^4	664
1000	10^6	9966
10000	10^8	132877
100000	10^{10}	1660964

Sommaire


Timsort

La méthode native sort implémente l'algorithme Timsort mis au point par Tim Peters en 2002. C'est un algorithme hybride de plusieurs tris.

Activité 8 : Recherche :
- Donner les algorithmes de tris utilisés dans Timsort.
- Détailler dans quel cas est utilisé chacun des tris.
- En discutant de la complexité, expliquer pour quelle raison le tri par insertion est plus intéressant que le tri par sélection.

Timsort

La méthode native `sort` implémente l'algorithme **Timsort** mis au point par Tim Peters en 2002. C'est un algorithme hybride de plusieurs tris.

Activité 8 : Recherche :

- Donner les algorithmes de tris utilisés dans Timsort.
- Détailler dans quel cas est utilisé chacun des tris.
- En discutant de la complexité, expliquer pour quelle raison le tri par insertion est plus intéressant que le tri par sélection.