

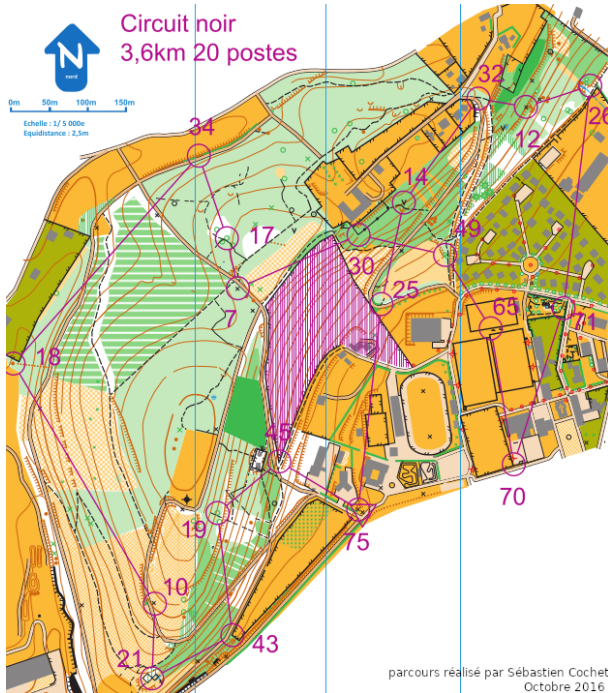
# Graphes

## Représentation carte Course d'Orientation

Christophe Viroulaud

Terminale - NSI

**Algo 13**



## Graphes Représentation carte Course d'Orientation

### Notion de graphe

Vocabulaire

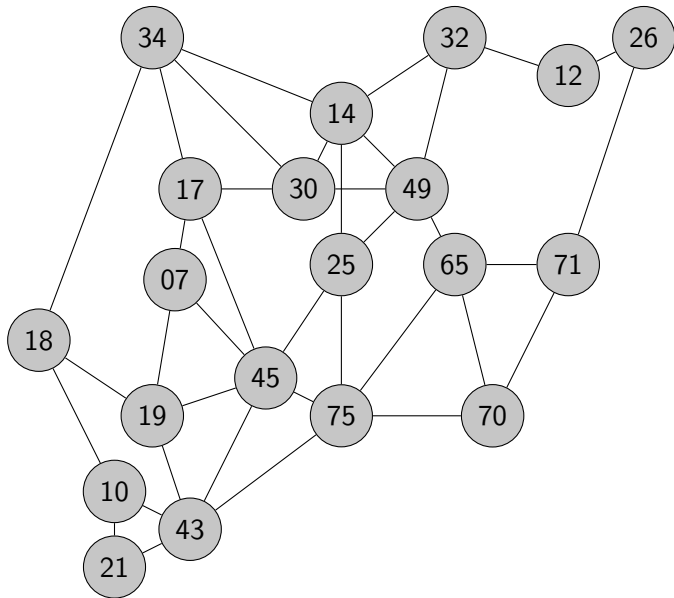
Propriétés

### Représentations en mémoire

Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à  
l'autre



Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

Représentations en  
mémoire

Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à  
l'autre

Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

Représentations en  
mémoire

Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à  
l'autre

Comment représenter un graphe en mémoire ?

## 1. Notion de graphe

### 1.1 Vocabulaire

### 1.2 Propriétés

## 2. Représentations en mémoire

### Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

### Représentations en mémoire

Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à l'autre

## Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

## Représentations en mémoire

Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à l'autre

Un graphe est défini par :

- ▶ ses **sommets** (ou **nœuds**),
- ▶ ses **arêtes** (ou **arcs**) qui relient deux sommets.

## À retenir

- L'**ordre** du graphe est le nombre de ses sommets.
- Un graphe est **non orienté** quand ses arêtes peuvent être parcourues dans les deux sens.

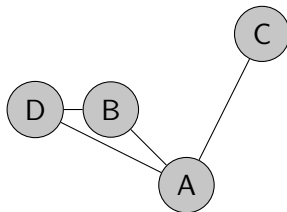


FIGURE 1 – Graphe non orienté d'ordre 4

Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

Représentations en  
mémoire

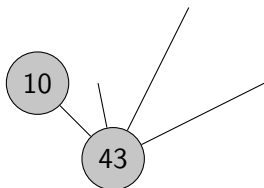
Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à  
l'autre

## À retenir

- ▶ Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**.



Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

Représentations en  
mémoire

Matrice d'adjacence

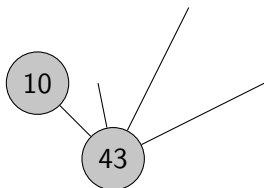
Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à  
l'autre



## À retenir

- ▶ Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**.
- ▶ Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes de ce sommet.



Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

Représentations en  
mémoire

Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à  
l'autre

## À retenir

Un graphe est **complet** si tous ses sommets sont adjacents.

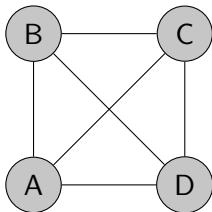


FIGURE 2 – Graphe complet d'ordre 4

Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

Représentations en  
mémoire

Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à  
l'autre

## 1. Notion de graphe

### 1.1 Vocabulaire

### 1.2 Propriétés

## 2. Représentations en mémoire

Notion de graphe

Vocabulaire

**Propriétés**

Représentations en  
mémoire

Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à  
l'autre

## À retenir

La somme des degrés d'un graphe est pair.

$$\sum_{s \in S} \deg(s) = 2.A$$

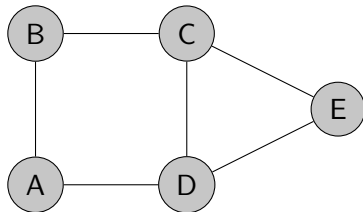


FIGURE 3 – Chaque arête est comptée deux fois.

Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

Représentations en  
mémoire

Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à  
l'autre

## À retenir

Un arbre est un graphe qui ne possède pas de cycle.

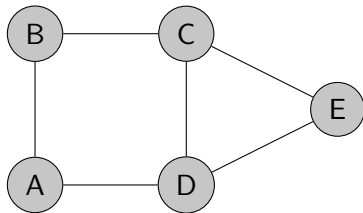


FIGURE 4 – Graphe avec au moins un cycle.

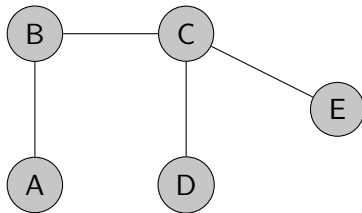


FIGURE 5 – Arbre

Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

Représentations en  
mémoire

Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à  
l'autre

## Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

## Représentations en mémoire

Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à l'autre

## 1. Notion de graphe

## 2. Représentations en mémoire

### 2.1 Matrice d'adjacence

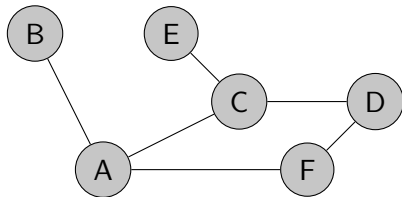
### 2.2 Dictionnaire d'adjacence

### 2.3 Passage d'une structure à l'autre

# Représentations en mémoire - matrice d'adjacence

## À retenir

La **matrice d'adjacence** est la représentation mathématique dont le terme  $a_{ij}$  vaut 1 si les sommets  $i$  et  $j$  sont reliés par une arête et 0 sinon.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

Représentations en  
mémoire

Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à  
l'autre

|   | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| B | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| D | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| E | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| F | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

## Remarque

Dans un graphe non orienté la matrice est symétrique.

Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

Représentations en  
mémoire

Matrice d'adjacence

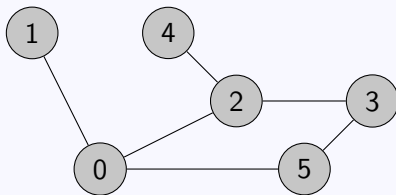
Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à  
l'autre



## Activité 1 :

1. Déterminer une structure de données permettant de représenter en mémoire la matrice d'adjacence représentative d'un graphe.
2. Construire la matrice d'adjacence du graphe suivant :



Notion de graphe

Vocabulaire

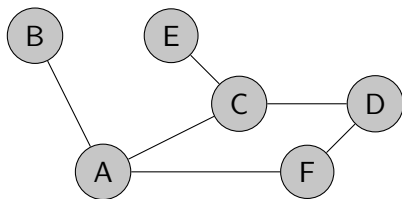
Propriétés

Représentations en  
mémoire

Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à  
l'autre



```
1 # Le noeud A est représenté par la ligne 0
2 mat = [ [0, 1, 1, 0, 0, 1],
3         [1, 0, 0, 0, 0, 0],
4         [1, 0, 0, 1, 1, 0],
5         [0, 0, 1, 0, 0, 1],
6         [0, 0, 1, 0, 0, 0],
7         [1, 0, 0, 1, 0, 0] ]
```

Code 1 – Tableau de tableau

Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

Représentations en  
mémoire

Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à  
l'autre

## Observation

Cette représentation peut être gourmande en mémoire : si le nombre d'arêtes est faible, la structure contient peu d'informations. La matrice est **creuse**.

## 1. Notion de graphe

## 2. Représentations en mémoire

### 2.1 Matrice d'adjacence

### 2.2 Dictionnaire d'adjacence

### 2.3 Passage d'une structure à l'autre

Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

Représentations en  
mémoire

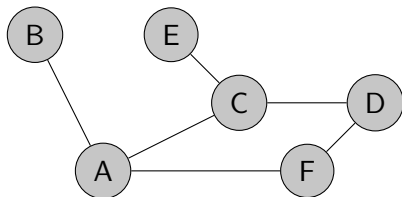
Matrice d'adjacence

**Dictionnaire d'adjacence**

Passage d'une structure à  
l'autre

## À retenir

Un dictionnaire d'adjacence liste les sommets adjacents à chaque sommet.



- ▶ A : B, C, F
- ▶ B : A
- ▶ C : A, D, E
- ▶ D : C, F
- ▶ E : C
- ▶ F : A, D

Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

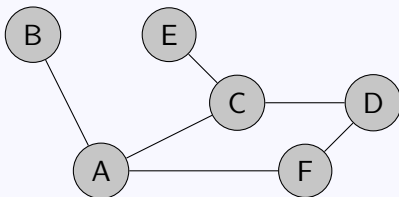
Représentations en  
mémoire

Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à  
l'autre

**Activité 2 :** Construire le dictionnaire d'adjacence en Python du graphe suivant :



Notion de graphe

Vocabulaire

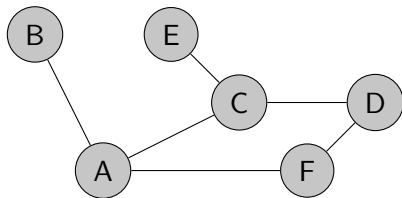
Propriétés

Représentations en  
mémoire

Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à  
l'autre



```
1 dico = {"A": ["B", "C", "F"],  
2         "B": ["A"],  
3         "C": ["A", "D", "E"],  
4         "D": ["C", "F"],  
5         "E": ["C"],  
6         "F": ["A", "D"]}
```

Code 2 – Dictionnaire de tableau

Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

Représentations en  
mémoire

Matrice d'adjacence

**Dictionnaire d'adjacence**

Passage d'une structure à  
l'autre

## 1. Notion de graphe

## 2. Représentations en mémoire

### 2.1 Matrice d'adjacence

### 2.2 Dictionnaire d'adjacence

### 2.3 Passage d'une structure à l'autre

Notion de graphe

Vocabulaire

Propriétés

Représentations en  
mémoire

Matrice d'adjacence

Dictionnaire d'adjacence

Passage d'une structure à  
l'autre



**Activité 3 :** Écrire la fonction `mat_to_dic(mat: list) → dict` qui construit le dictionnaire d'adjacence à partir de la matrice d'adjacence.

Indication : Les nœuds sont nommés en suivant l'ordre alphabétique majuscule. La première ligne de la matrice représente les adjacences de **A**. La fonction native `chr(n: int) → str` renvoie le caractère correspondant au point de code UTF-8 **n**.

```
1 def mat_to_dic(mat: list) -> dict:
2     dico = {}
3     for i in range(len(mat)):
4         # nom du noeud
5         noeud = chr(65+i)
6         dico[noeud] = []
7
8         for j in range(len(mat[i])):
9             if mat[i][j] == 1:
10                 # noeud adjacent
11                 adj = chr(65+j)
12                 dico[noeud].append(adj)
13     return dico
```

**Activité 4 :** Écrire la fonction `dic_to_mat(dic: dict) → list` qui construit la matrice d'adjacence à partir de la matrice d'adjacence.

Indication : La fonction native `ord(c: str) → int` renvoie le point de code UTF-8 correspondant au caractère `c`.

```
1 def dic_to_mat(dic: dict) -> list:
2     # taille de la matrice connue
3     mat = [[0 for _ in range(len(dic))] for _
4             in range(len(dic))]
5     for noeud, adjacents in dic.items():
6         # indice de la ligne
7         ind_noeud = ord(noeud)-65
8
9         for adj in adjacents:
10            # indice de la colonne
11            ind_adj = ord(adj)-65
12            mat[ind_noeud][ind_adj] = 1
13
14     return mat
```