Τεχνικές Βελτιστοποίησης

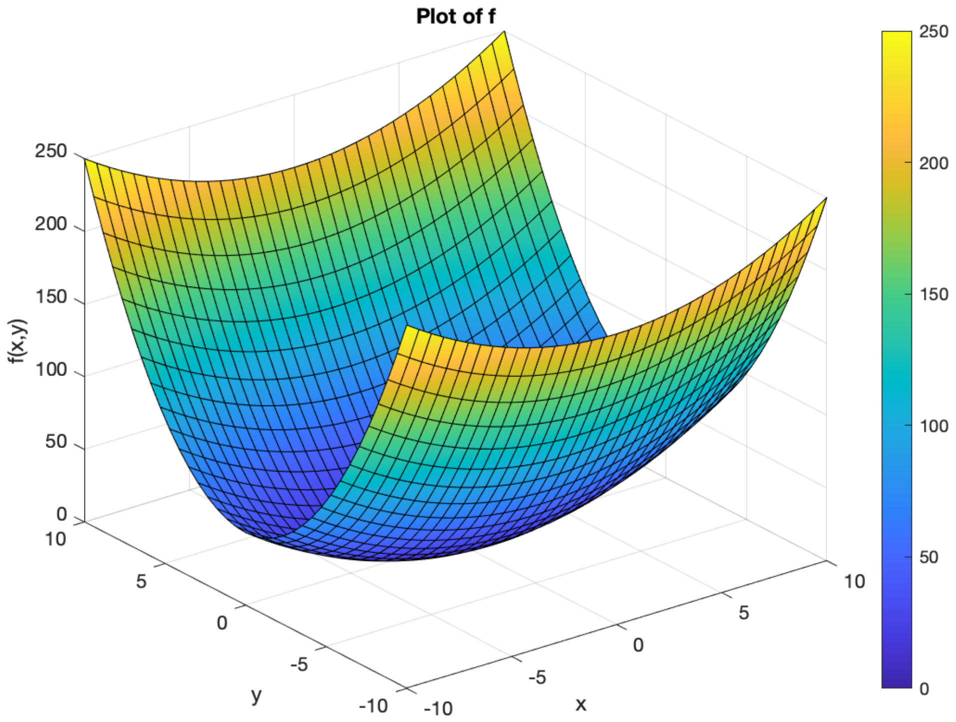
3η Εργαστηριακή Άσκηση- Ελαχιστοποίηση συνάρτησης με περιορισμούς

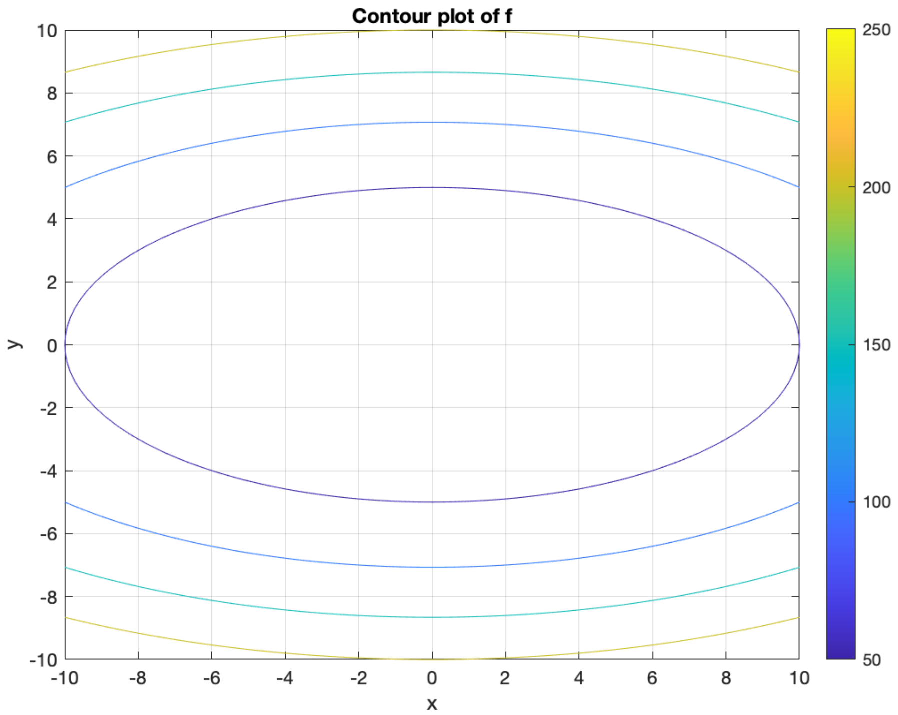
Ονοματεπώνυμο: Χριστίνα Κούτση
ΑΕΜ: 9871
email: cvkoutsi@ece.auth.gr

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία έχει σκοπό την εύρεση του βελτίστου της f, και συγκεκριμένα του ελαχίστου, με περιορισμούς.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την μορφή της f, δημιουργούμε δύο γραφήματα της, το plot και το contour plot.





Παρατηρώ ότι η f είναι κυρτή συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της, πράγμα που σημαίνει ότι θα έχει ολικό ελάχιστο.

Θέμα 1

αρχείο κώδικα exe1.m

Στο θέμα 1 μας ζητάται η εύρεση του ελαχίστου της f με χρήση της μεθόδου μέγιστης καθόδου. Για την υλοποίηση του κώδικα χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση steepest_descent.m (Εργασία 2), η οποία μας επιστρέφει το βέλτιστο της f με την μέθοδο μέγιστης καθόδου.

Πριν προχωρήσουμε στην εκτέλεση του κώδικα για την εύρεση του ελαχίστου για τα διάφορα γκ, θα πραγματοποιήσουμε την μαθηματική ανάλυση για την εύρεση του διαστήματος στο οποίο θα πρέπει να ανήκει το γκ ώστε να τερματίζει ο αλγόριθμος.

Η συνάρτηση για την οποία θέλω να βρω το ελάχιστο είναι η

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 2y^2$$

για την οποία έχουμε:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 4y \end{bmatrix}$$

Επομένως, από τη μέθοδο μέγιστης καθόδου έχουμε:

$$x_{\kappa+1} = x_\kappa - \gamma_\kappa \nabla f\left(x_\kappa\right) = x_\kappa - \gamma_\kappa x_\kappa = x_\kappa\left(1-\gamma_\kappa\right)$$
$$y_{\kappa+1} = y_\kappa - \gamma_\kappa \nabla f\left(y_\kappa\right) = y_\kappa - 4\gamma_\kappa y_\kappa = y_\kappa\left(1-4\gamma_\kappa\right)$$

Για να συγκλίνει το x_κ+1 και το y_κ+1 όσο κ -> inf θα πρέπει:

$$\left.\begin{matrix} \left|1-\gamma_\kappa\right| < 1 \\ \left|1-4\gamma_\kappa\right| < 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -1 < 1-\gamma_\kappa < 1 \\ -1 < 1-4\gamma_\kappa < 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0 < \gamma_\kappa < 2 \\ 0 < \gamma_\kappa < 0,5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 < \gamma_\kappa < 0.5$$

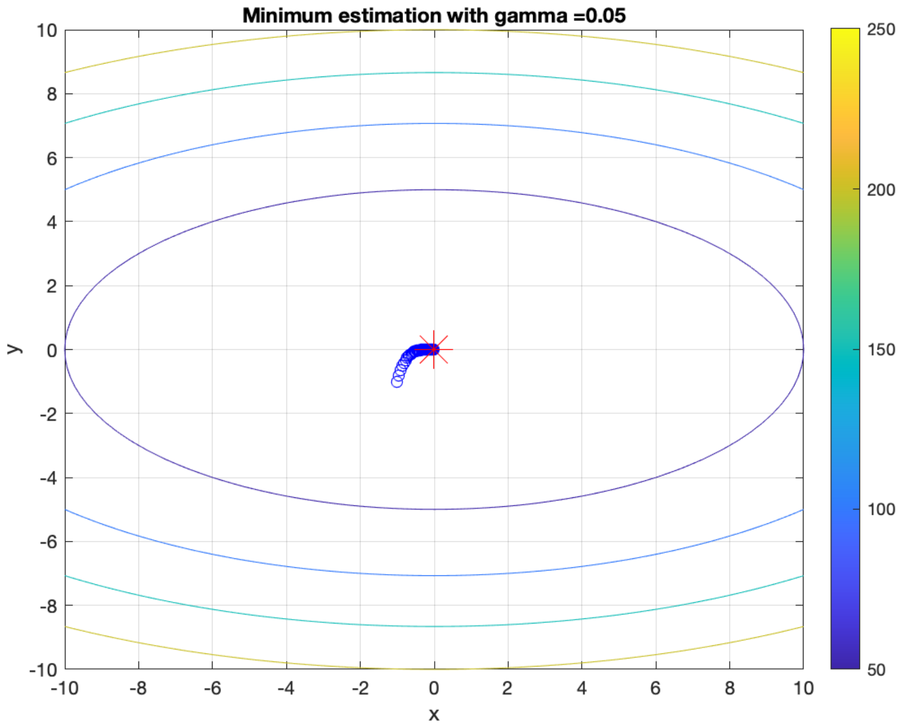
Επομένως, για να τερματίσει ο αλγόριθμος το γκ θα πρέπει να ανήκει στο διάστημα (0,0.5).

- γκ = 0.05

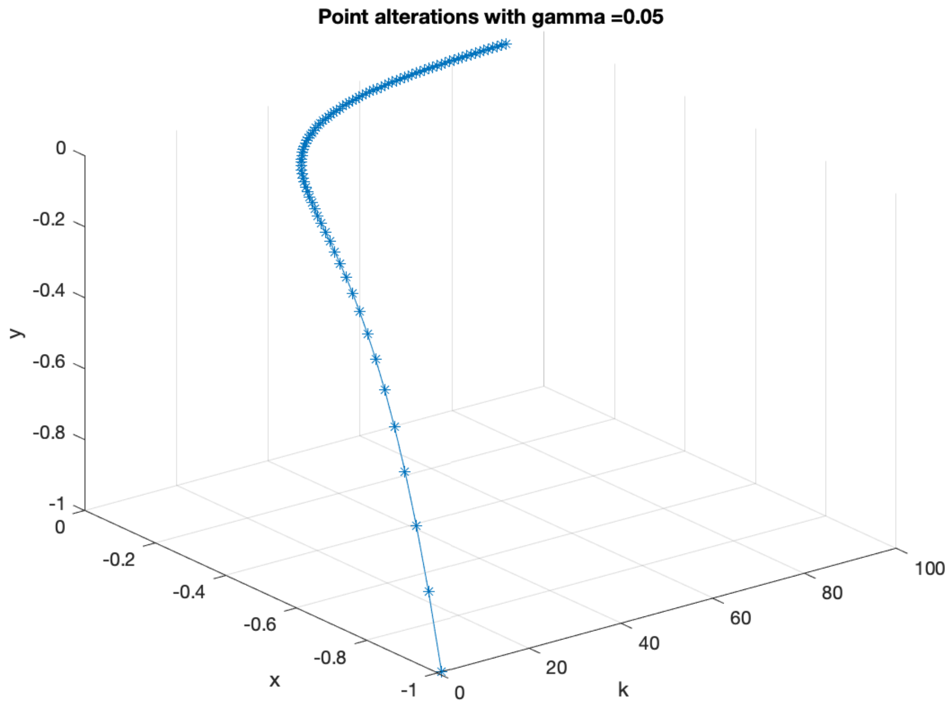
Το γκ = 0.05 βρίσκεται μέσα στα επιτρεπτά όρια, επομένως περιμένουμε ο αλγόριθμος να τερματίζει και να μας δίνει σωστά αποτελέσματα.

Τρέχοντας τον αλγόριθμο παίρνουμε τις εξής εκτυπώσεις:

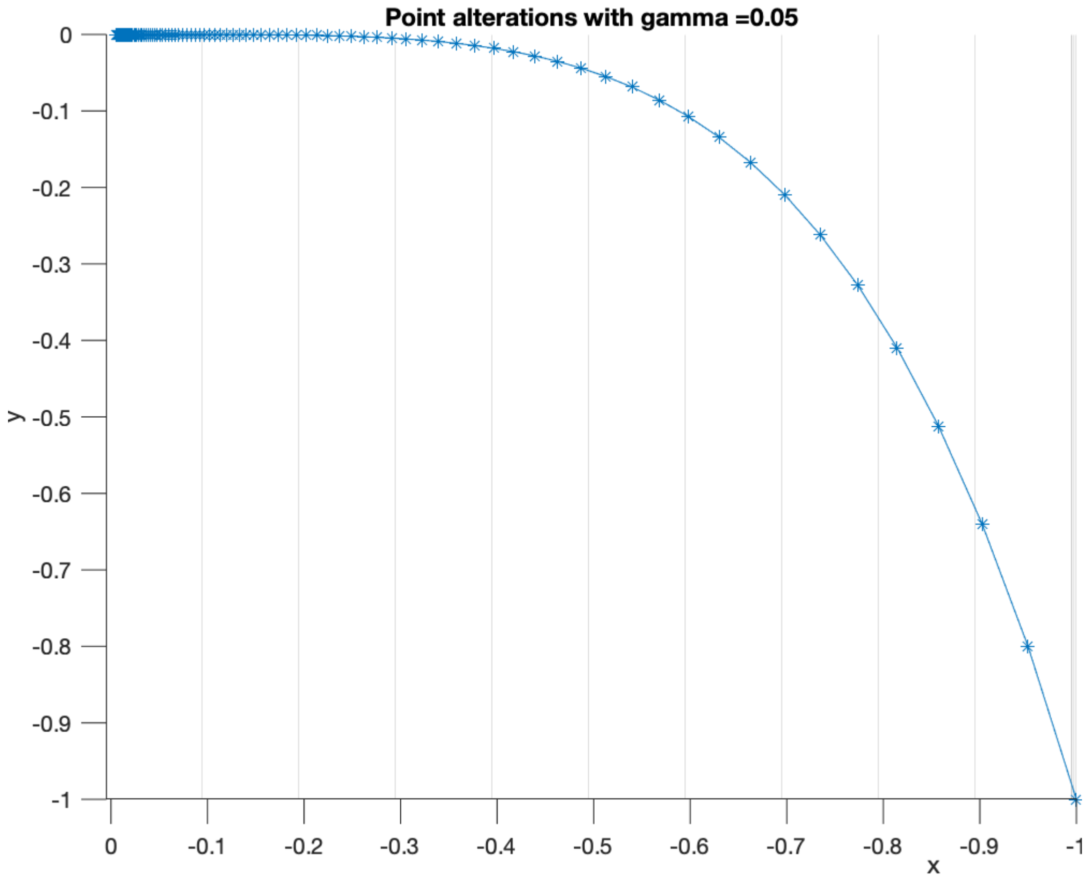
```
------------------------Steepest Descent Method------------------------
Epsilon = 0.010000
Gamma = 0.050000
Starting Point = [-1,-1]
Best minimum estimation: f(-0.009888,-0.000000) = 0.000049 after 91 repetitions
```



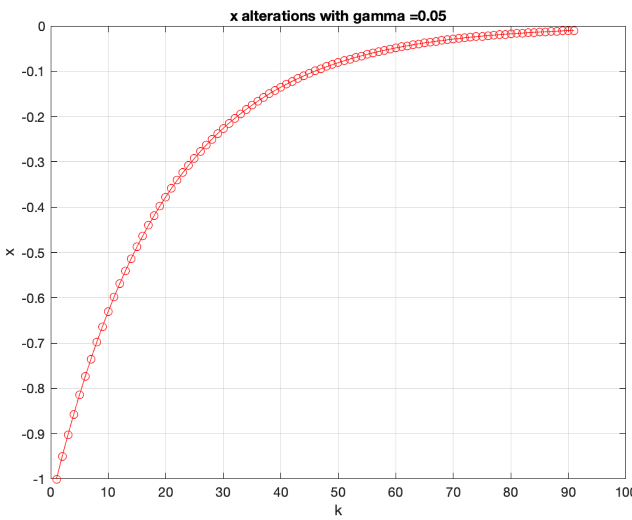
γράφημα 1



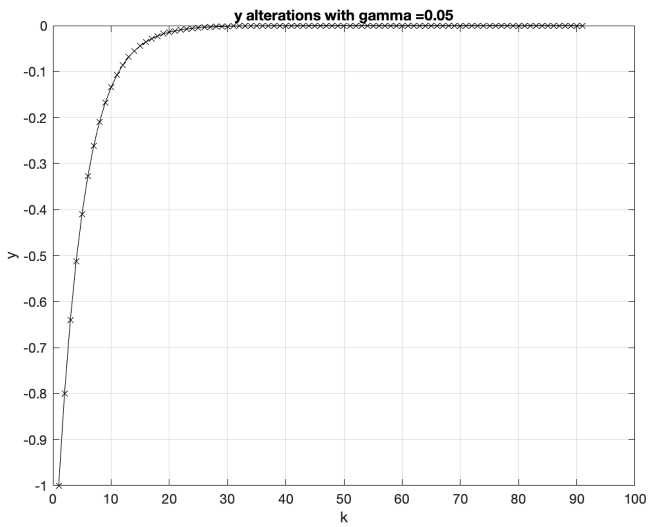
γράφημα 2



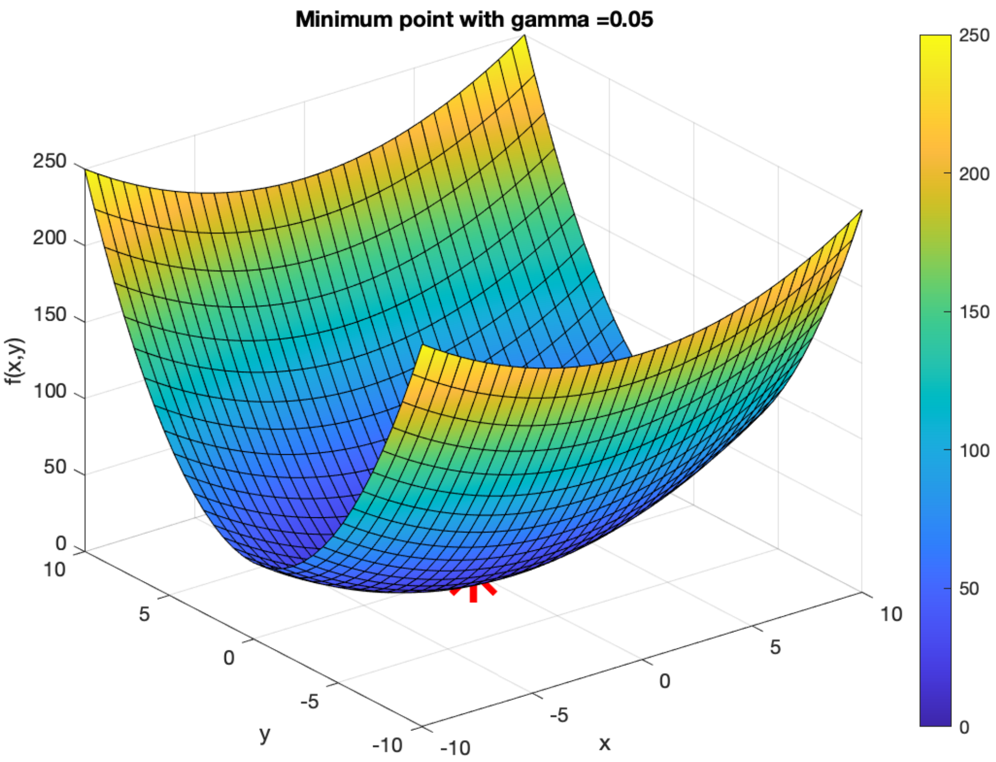
γράφημα 3



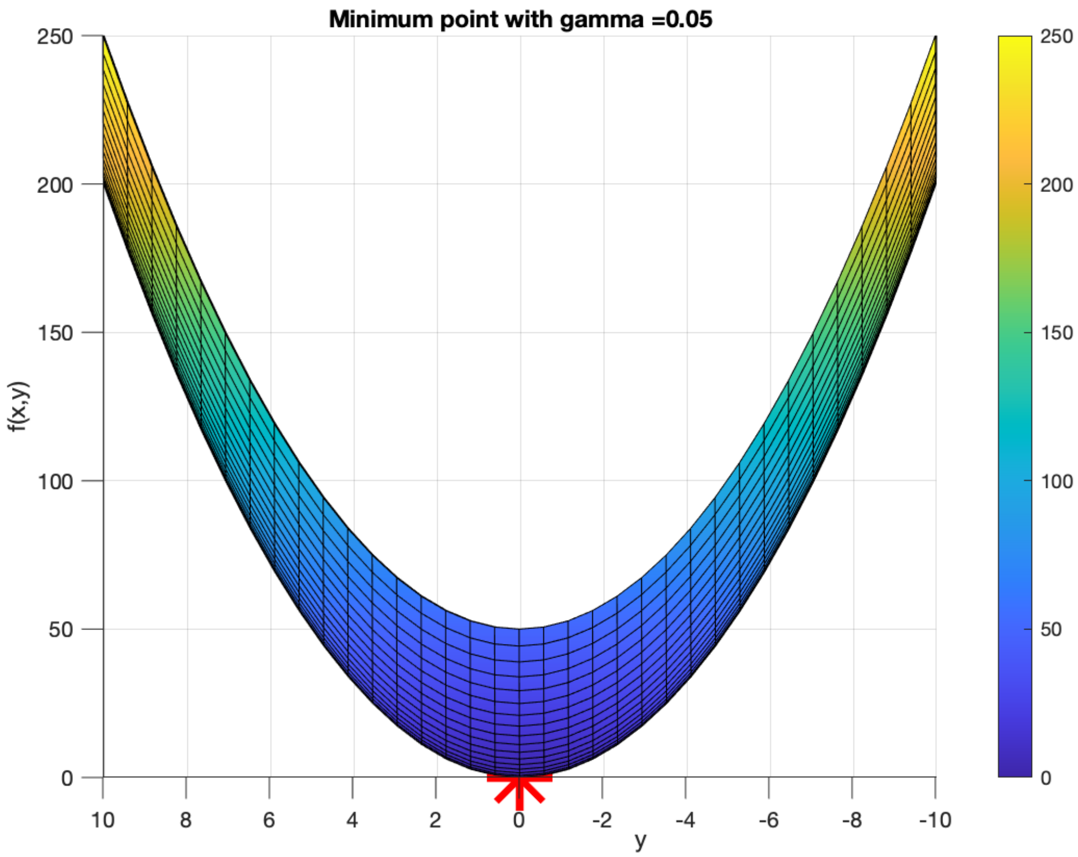
γράφημα 4



γράφημα 5



γράφημα 4



γράφημα 5

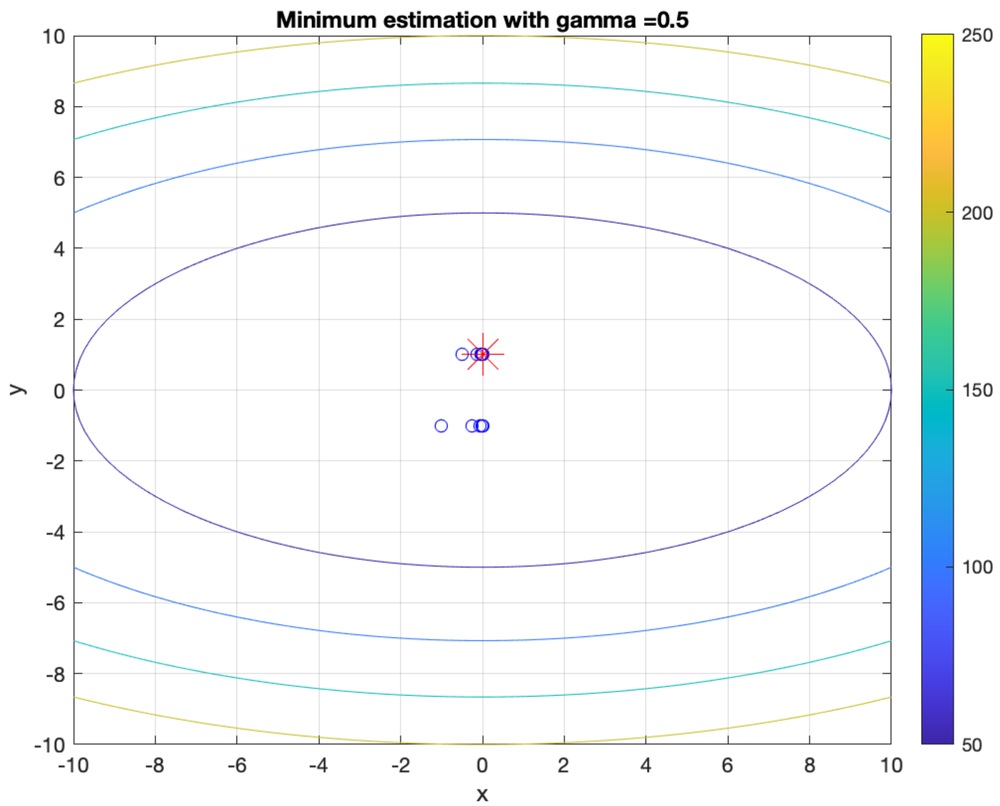
Στα γραφήματα 1 έως 3 βλέπουμε τα σημεία (x,y) τα οποία επιλέγει ο αλγόριθμος σε κάθε επανάληψη, ενώ στα γραφήματα 4 και 5 βλέπουμε το τελικό σημείο στο οποίο καταλήγει ο αλγόριθμος πριν τερματίσει.

Παρατηρώ ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει στο (0,0), το οποίο είναι και το πραγματικό ολικό ελάχιστο της συνάρτησης.

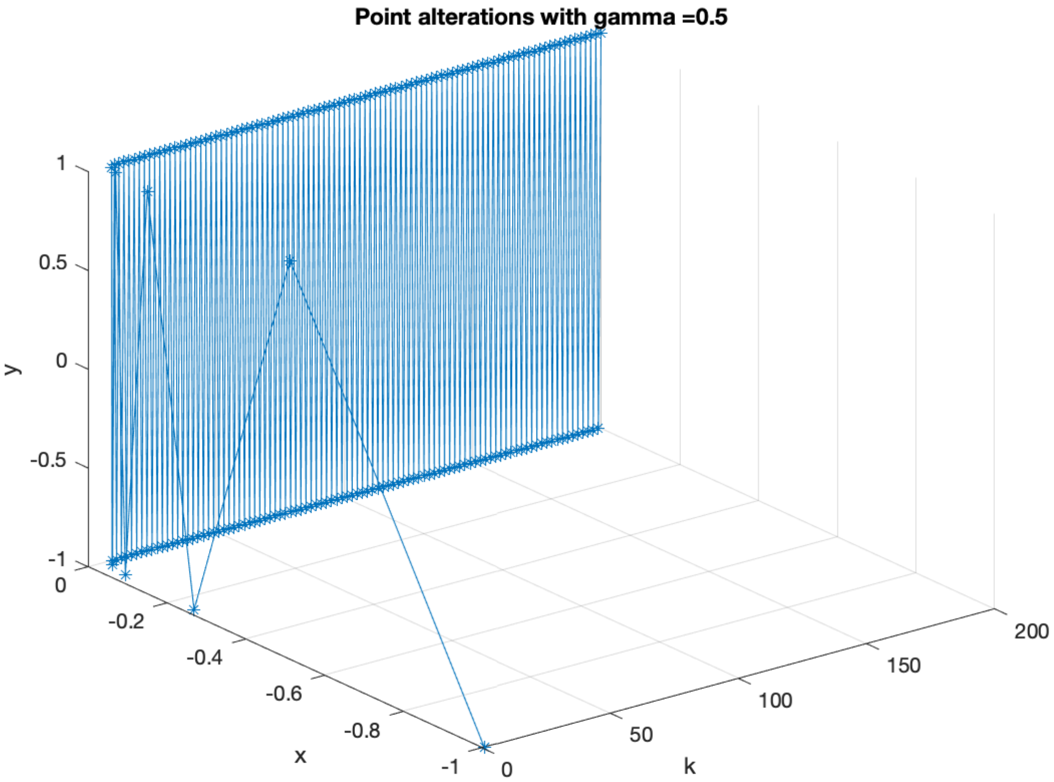
- γκ = 0.5

Το γκ = 0.5 δεν βρίσκεται μέσα στο αποδεκτό διάστημα, στο οποίο θα πρέπει να ανήκει ο αλγόριθμος ώστε να τερματίζει. Παρόλα αυτά, τρέχοντας τον αλγόριθμο για κ = 200 επαναλήψεις, παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα:

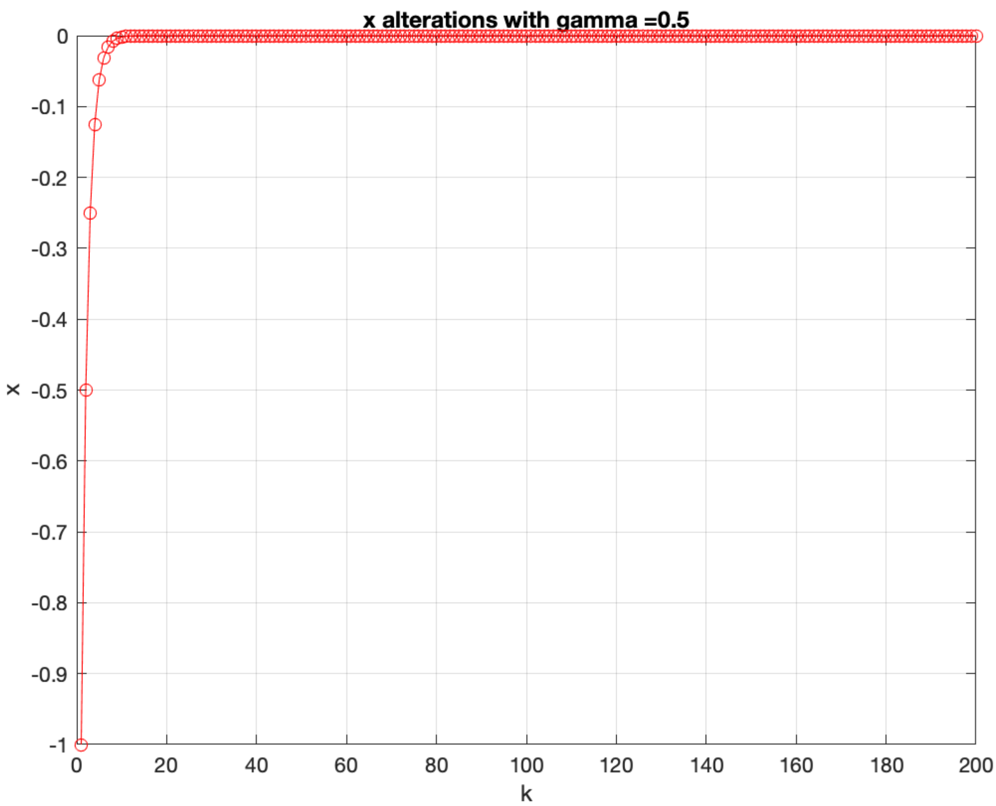
```
-----------------------Steepest Descent Method-----------------------

Exercise 1.2
Starting Point = [-1,-1]
Gamma = 0.500000
Epsilon = 0.010000
Best minimum estimation: f(-0.000000,1.000000) = 2.000000 after 200 repetitions
```



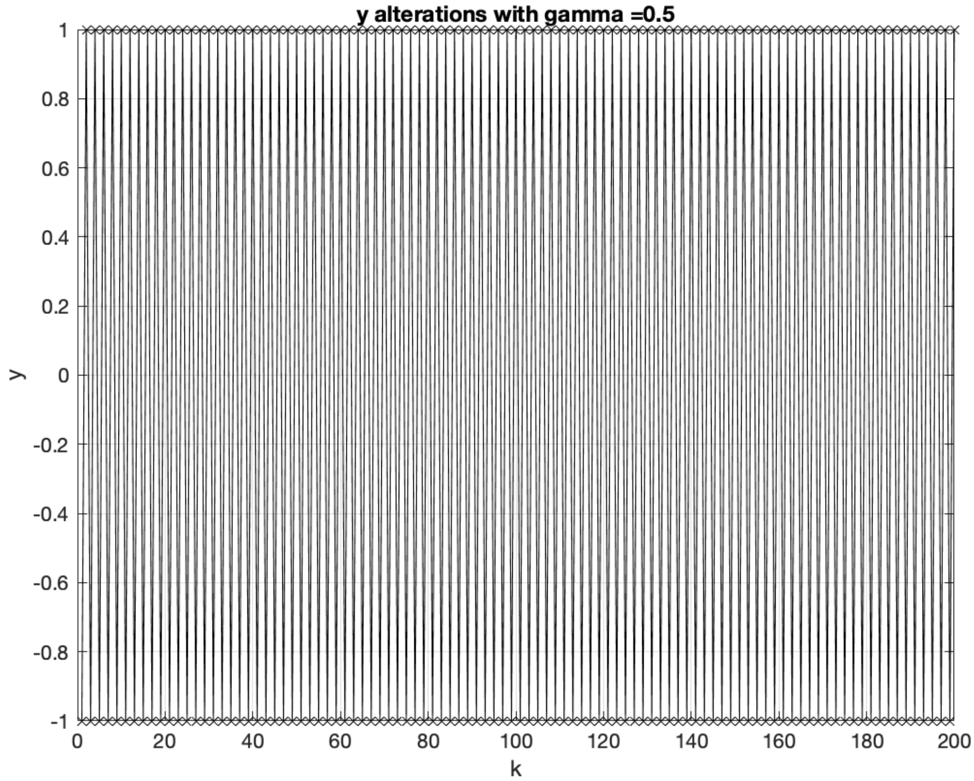
γράφημα 1



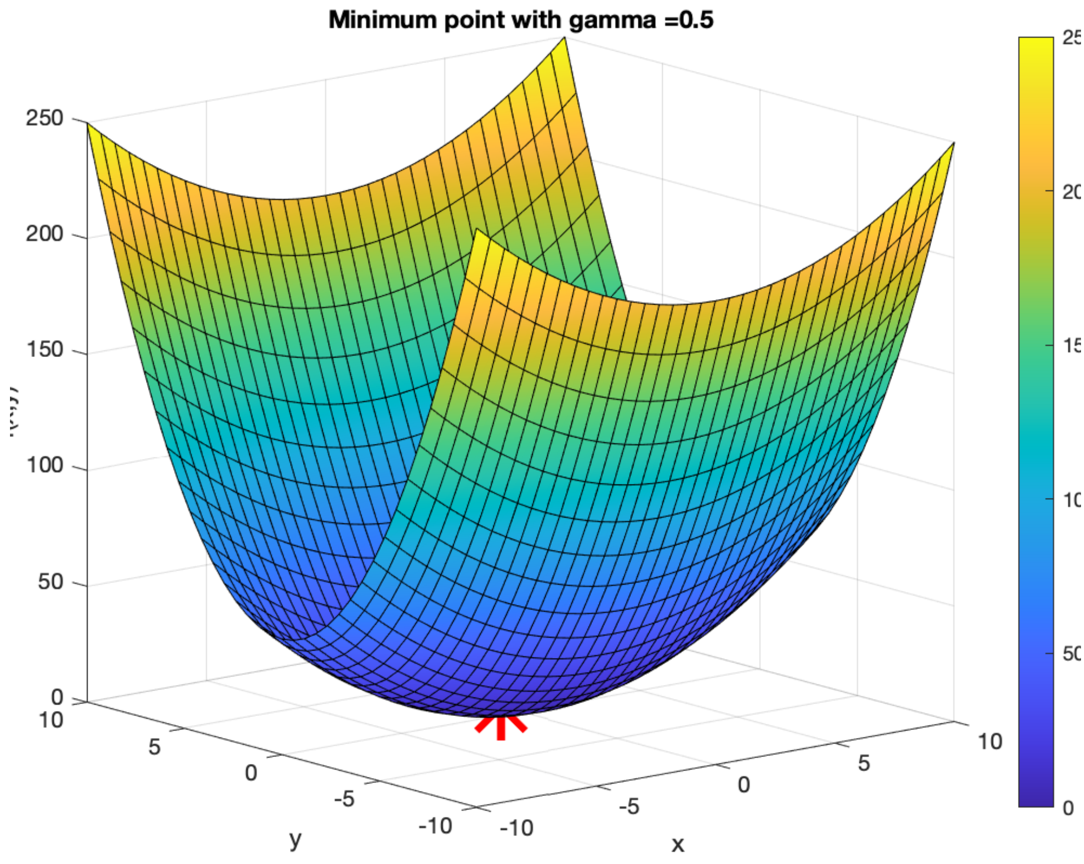
γράφημα 2



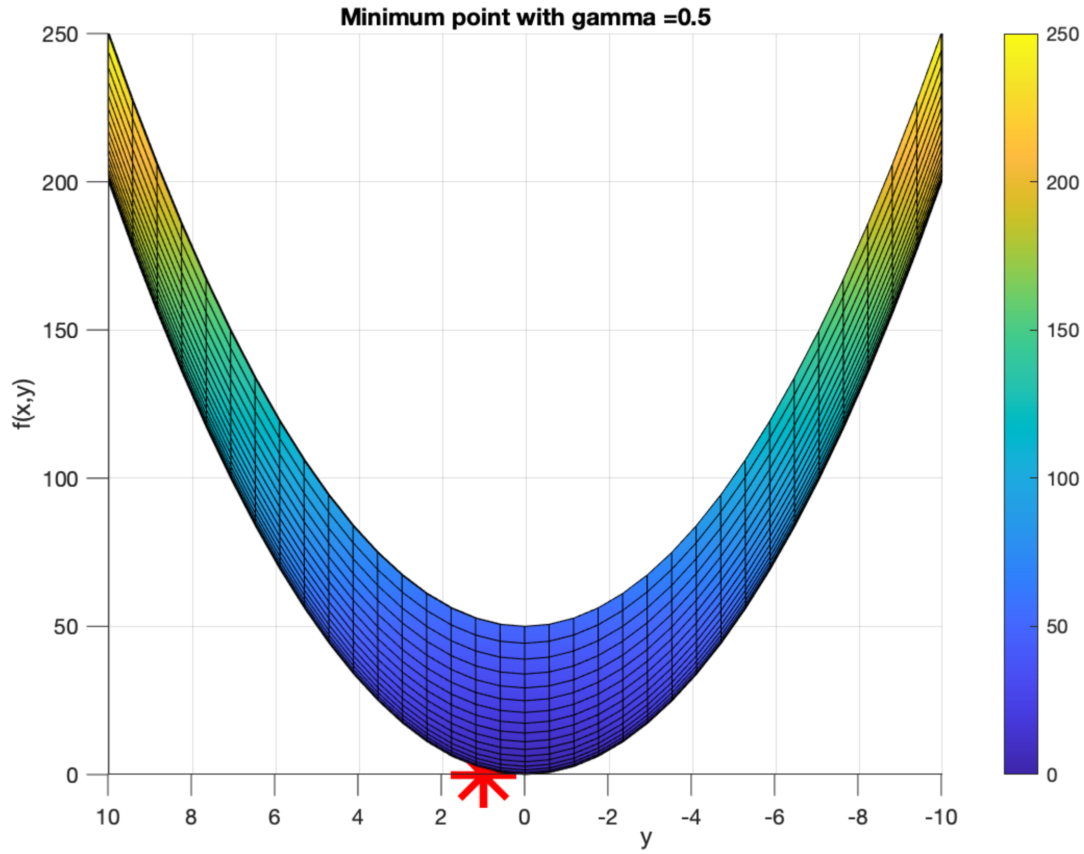
γράφημα 3


y alterations with gamma =0.5
y
k

γράφημα 4


Minimum point with gamma =0.5
y
x

γράφημα 5



γράφημα 6

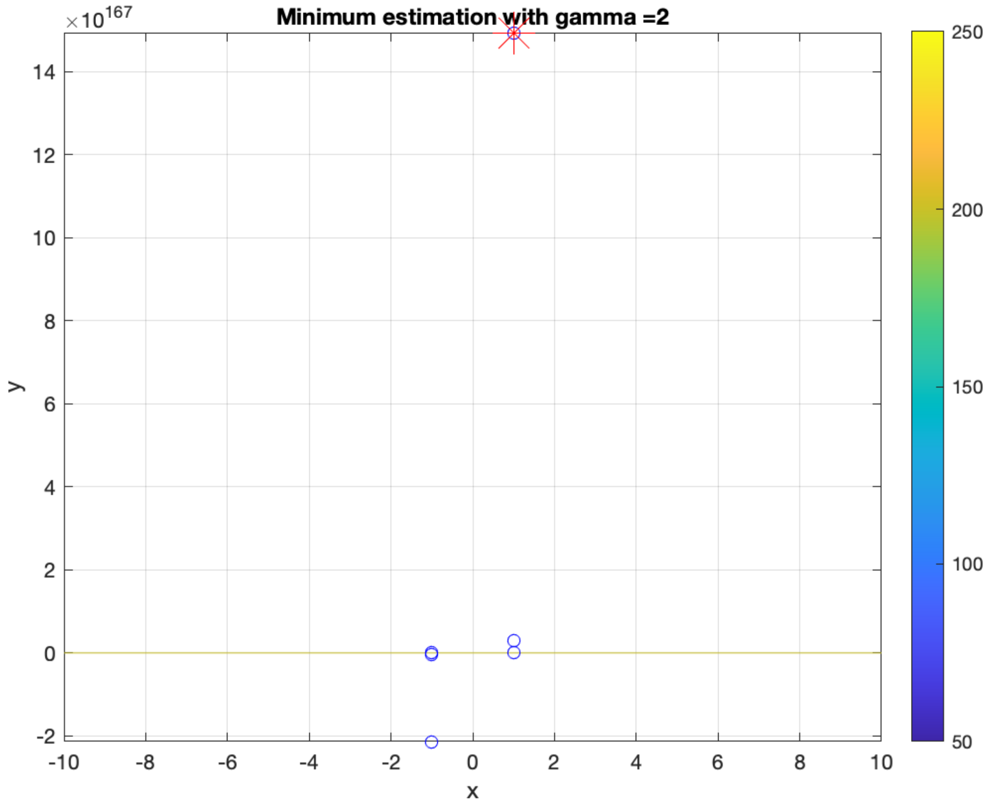
Στο γράφημα 1 βλέπουμε πώς “κινούνται” τα σημεία (x,y) κατα την εκτέλεση του αλγορίθμου. Παρατηρούμε ότι αυτά ταλαντώνονται μεταξύ των σημείων (0,1) και (0,-1). Αυτό γίνεται προφανές παρατηρώντας και τα γραφήματα 2,3,4 όπου παρατηρούμε ότι το x μετά από κάποιες επαναλήψεις “σταθεροποιείται στο 0, ενώ το y ταλαντώνεται μεταξύ του -1 και 1. Έτσι, ο αλγόριθμος μετά από 200 επαναλήψεις καταλήγει στο σημείο (0,1) όπου η τιμή της συνάρτησης είναι 2. Τα παραπάνω είναι αποτέλεσμα της μη ομαλής λειτουργίας του αλγορίθμου λόγω επιλογής ακατάλληλου γκ.

Παρόμοια αποτελέσματα παίρνουμε και για γκ = 2 και γκ = 10.

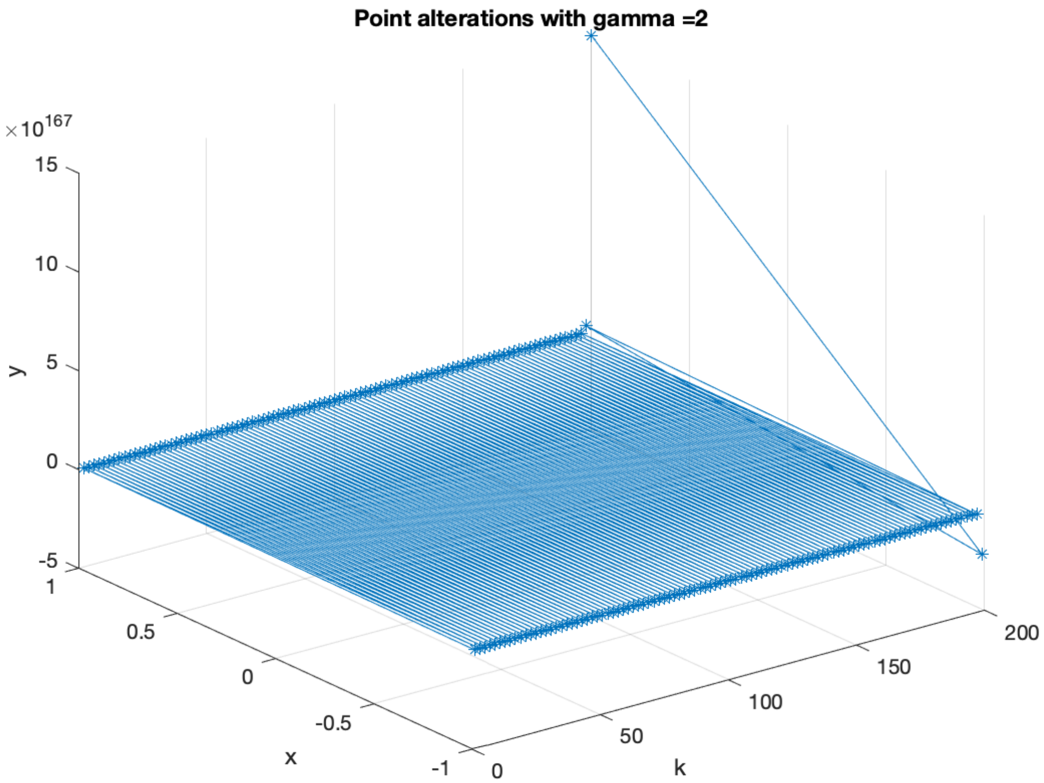
- γκ = 2

Παίρνουμε τις εξής εκτυπώσεις:

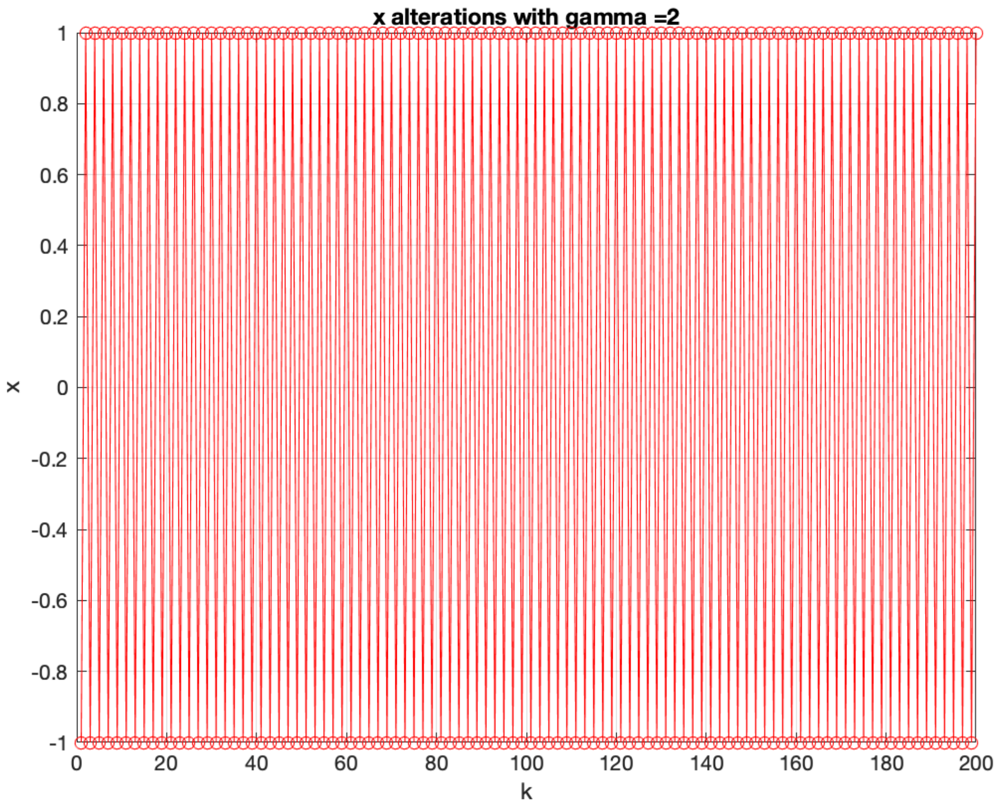
```
------------------------Steepest Descent Method------------------------

Exercise 1.3
Starting Point = [-1,-1]
Gamma = 2.000000
Epsilon = 0.010000
Best minimum estimation: f(1.000000,Inf) = Inf after 200 repetitions
```



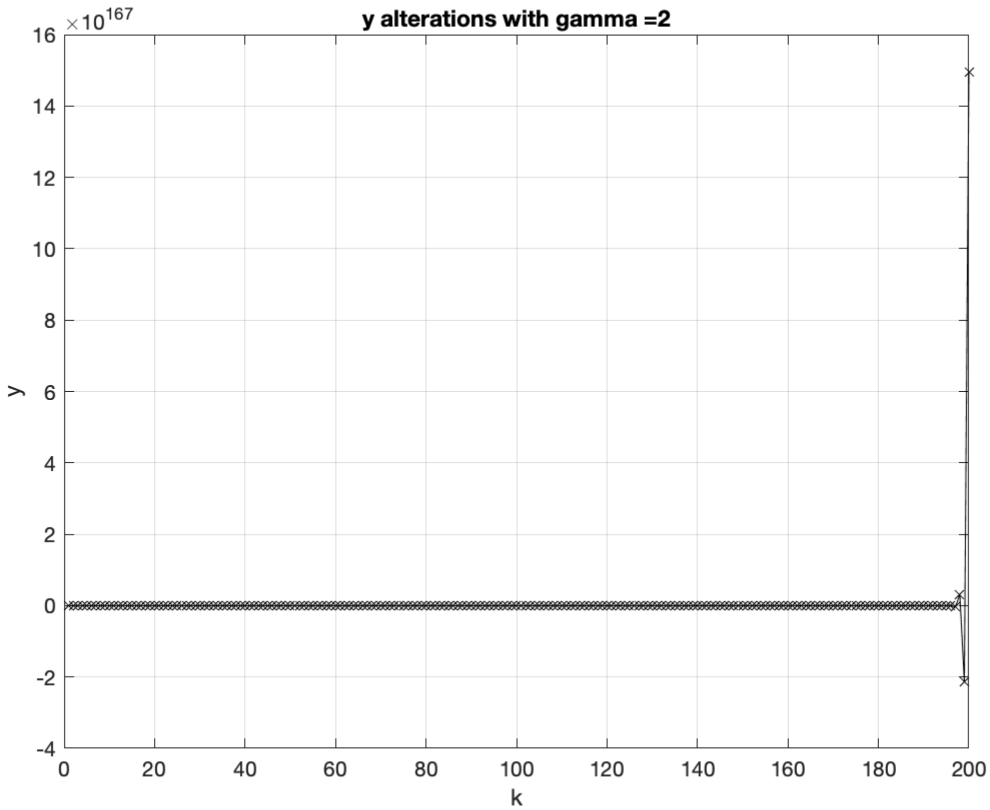
γράφημα 1



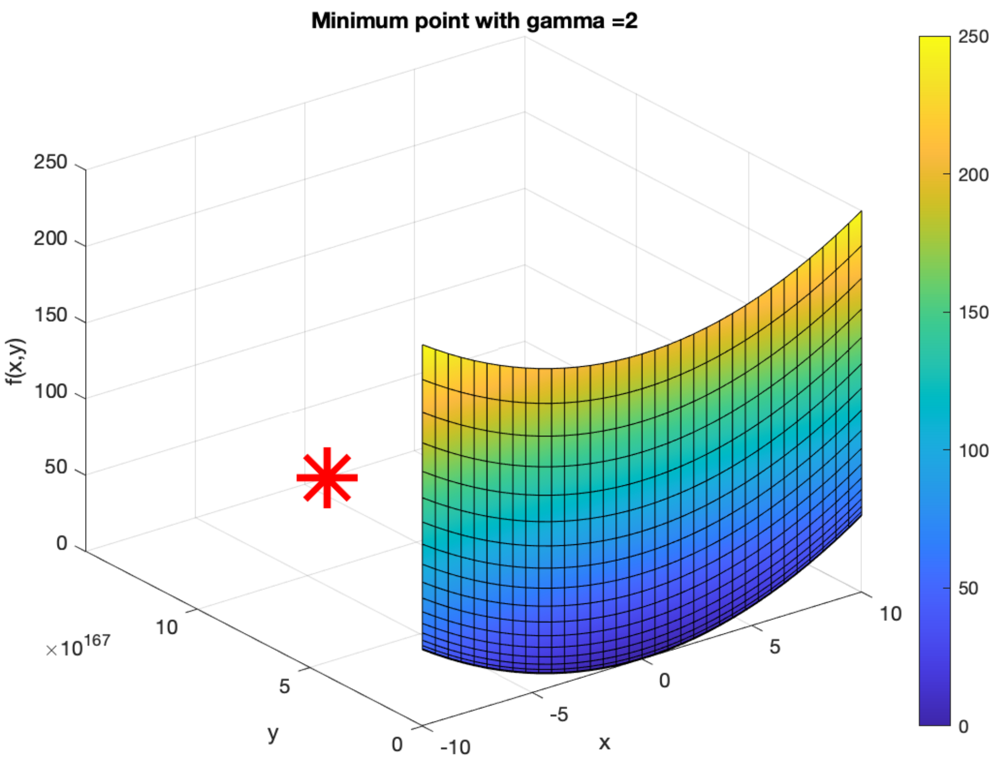
γράφημα 2



γράφημα 3



γράφημα 4



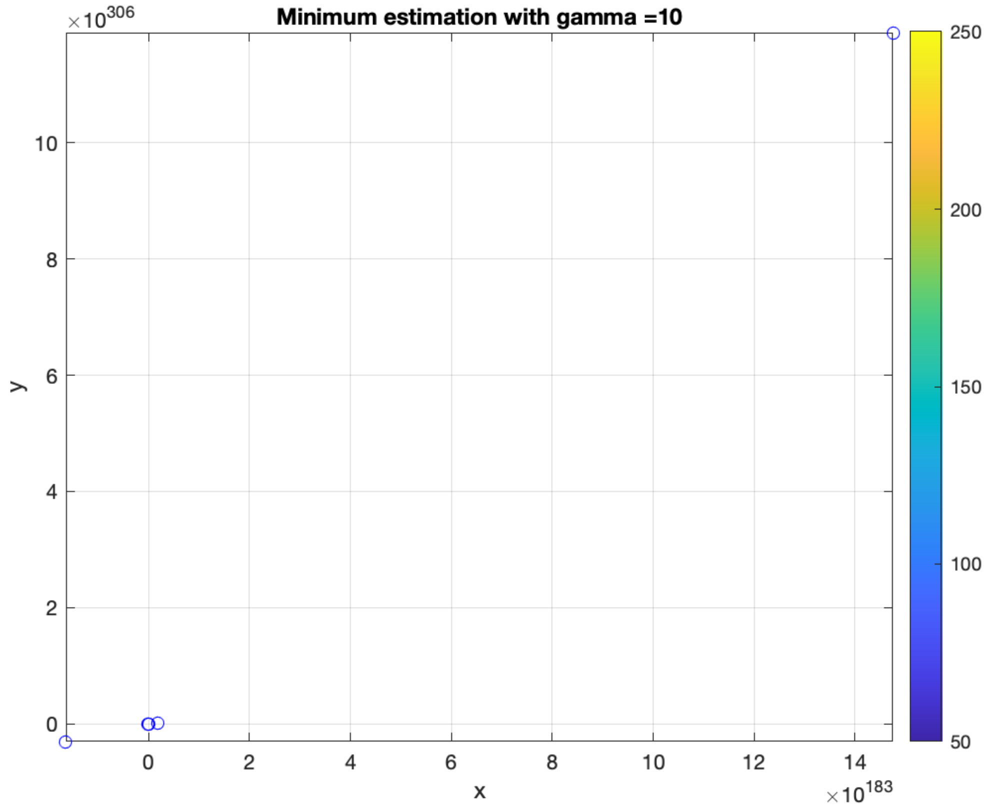
γράφημα 5

Παρατηρούμε εδώ ότι, λόγω και του μεγάλου βήματος που χρησιμοποιούμε, το y μετά από αρκετές επαναλήψεις γίνεται πολύ μεγάλο, οδηγώντας τον αλγόριθμο στο άπειρο. Το x ταλαντώνεται μεταξύ του -1 και του 1.

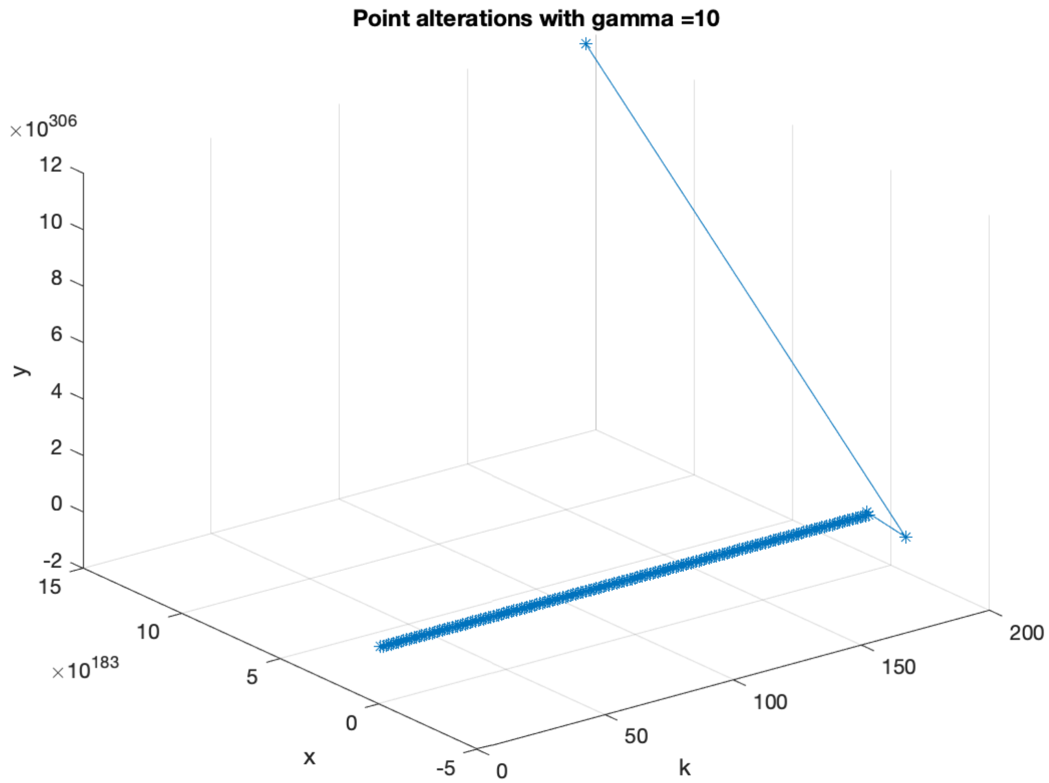
- γκ = 10

Παίρνουμε τις εξής εκτυπώσεις:

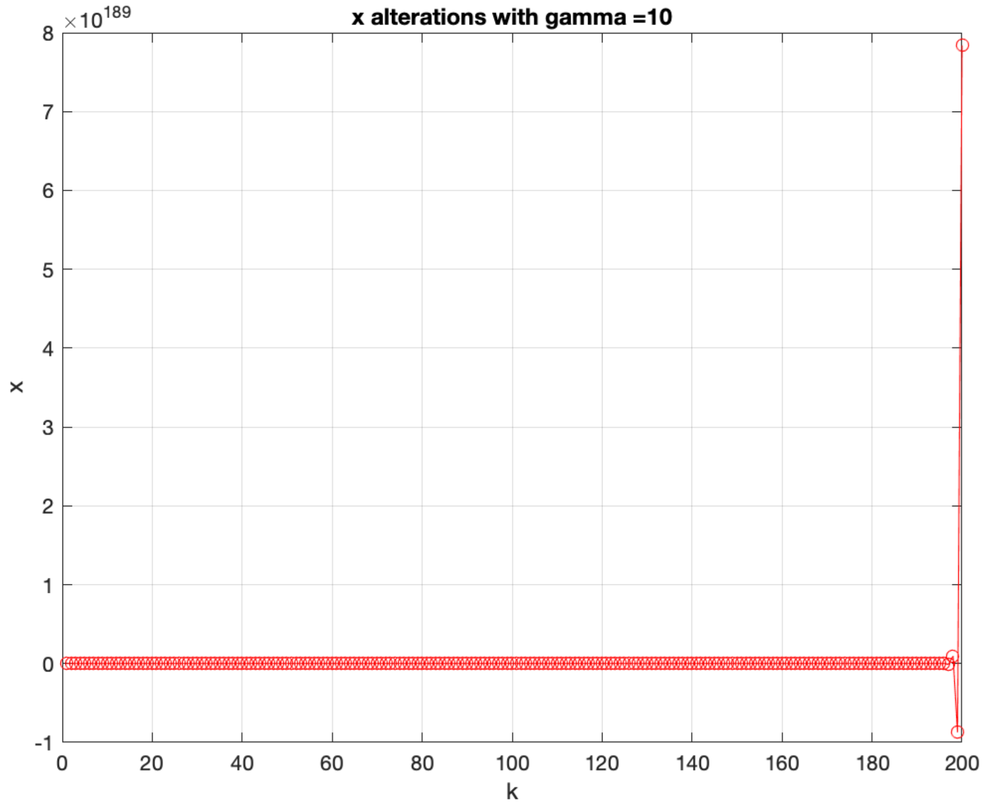
```
-------------------------Steepest Descent Method-------------------------

Exercise 1.4
Starting Point = [-1,-1]
Gamma = 10.000000
Epsilon = 0.010000
Best minimum estimation: f(Inf,Inf) = Inf after 200 repetitions
```



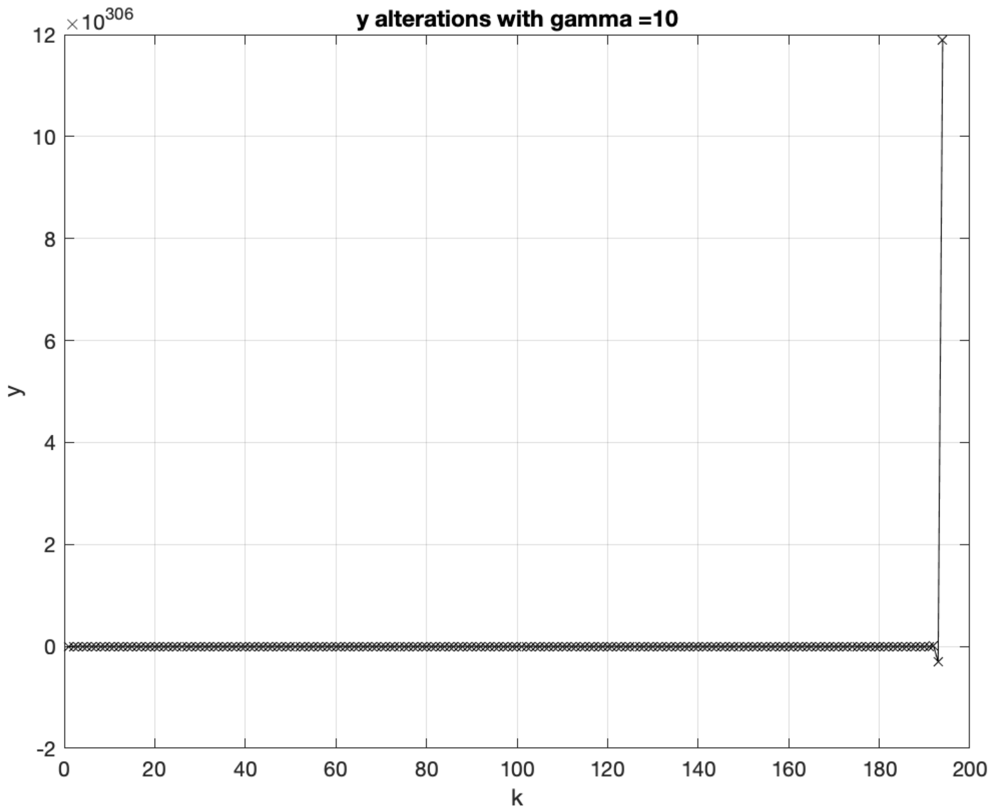
γράφημα 1



γράφημα 2



γράφημα 3



γράφημα 4

Παρατηρούμε εδώ ότι, μετά από κάποιες επαναλήψεις, το x και το y τείνουν στο άπειρο οδηγώντας και το αποτέλεσμα στο άπειρο.
Η παραπάνω ανωμαλία στην εκτέλεση του αλγορίθμου οφείλεται στην επιλογή ακατάλληλου γκ.

Θέμα 2

αρχείο κώδικα exe2.m

Στο θέμα αυτό μας ζητάται η προσέγγιση του ελαχίστου με την μέθοδο της μέγιστης καθόδου με προβολή. Για την υλοποίηση της μεθόδου αυτής, έχει δημιουργηθεί η συνάρτηση steepest_descent_projection.m, η οποία είναι μία τροποποιημένη μορφή της steepest_descent.m και εκτός των άλλων, σε κάθε επανάληψη φροντίζει το x_κ να βρίσκεται μέσα στο κυρτό σύνολο X.

Πριν προχωρήσουμε στον κώδικα, αξίζει να αναφέρουμε πως **το γκ της μεθόδου μέγιστης καθόδου με προβολή διαφέρει από το γκ της μέγιστης καθόδου**. Συγκεκριμένα, για το γκ της μεθόδου μέγιστης καθόδου με προβολή, ισχύει ότι γκ' = sk*γκ. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα παρακάτω.

Τα διαδοχικά σημεία που δίνει ο αλγόριθμος μέγιστης καθόδου με προβολή είναι τα

$$x_{\kappa+1} = x_\kappa + \gamma_\kappa\left(\overline{x_k} - x_\kappa\right) \quad (1)$$

όπου

$$\overline{x_\kappa} = Pr_x\left\{x_\kappa - s_\kappa \nabla f\left(x_\kappa\right)\right\} = \begin{cases} a_i, \ x_i \le a_i \\ x_\kappa - s_\kappa \nabla f\left(x_\kappa\right), \ a_i < x_i < \beta_i \\ \beta_i, \ x_i \geqslant \beta_i \end{cases}$$

Εφόσον όμως το xk παραμένει συνεχώς εντός ορίων θα ισχύει

$$\overline{x_\kappa} = x_\kappa - s_\kappa \nabla f\left(x_\kappa\right)$$

Επομένως, αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε

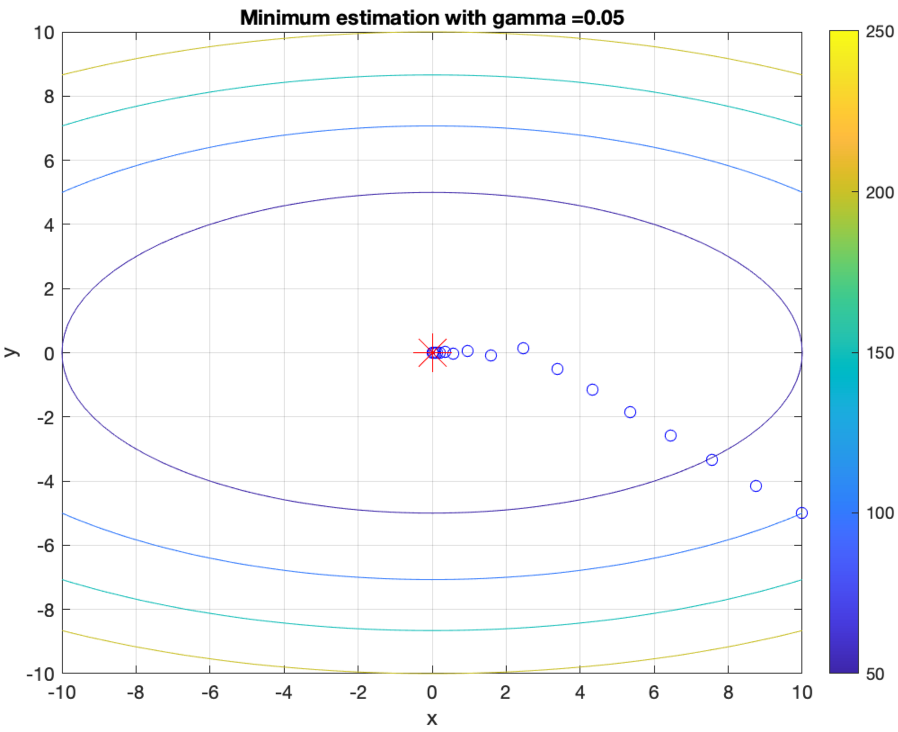
$$x_{\kappa+1} = x_\kappa + \gamma_\kappa\left(x_\kappa - s_\kappa \nabla f\left(x_\kappa\right) - x_\kappa\right) = -\gamma_\kappa s_\kappa \nabla f\left(x_\kappa\right)$$

Αν θέσουμε γκ' = γκ*sk έχουμε την μέθοδο της μέγιστης καθόδου για γκ = γκ'.

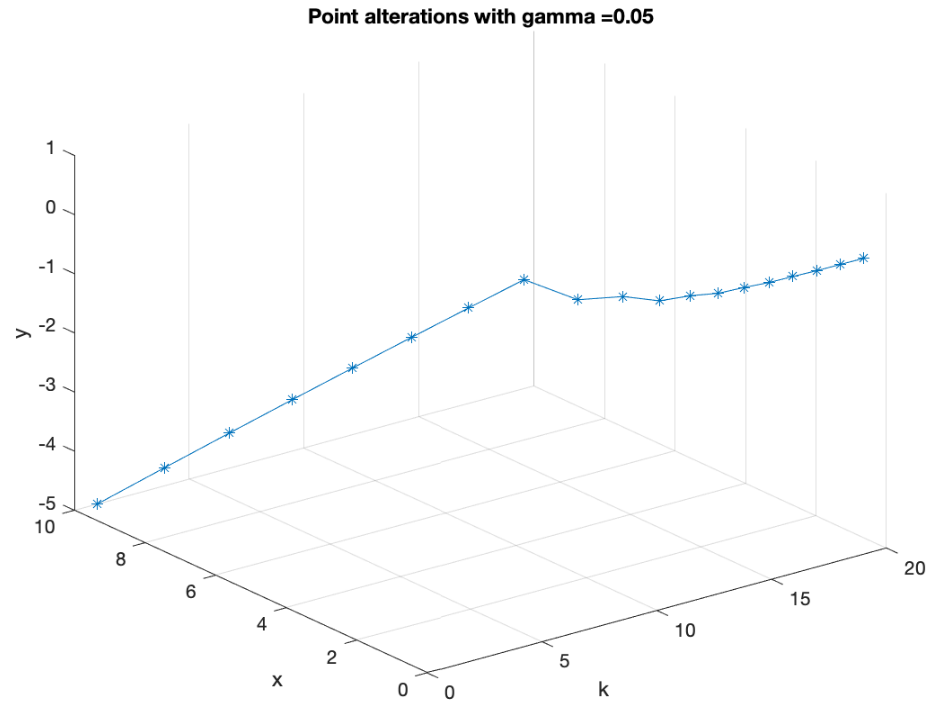
Επομένως, για την μέθοδο μέγιστης καθόδου με προβολή, θα πρέπει το γκ' να ικανοποιεί τους ανισοτικούς περιορισμούς. Στην περίπτωση του θέματος 2, έχουμε γκ = 0.05 και sκ = 8. Επομένως γκ' = 0.4 το οποίο βρίσκεται μέσα στο αποδεκτό διάστημα οπότε περιμένουμε ο αλγόριθμος να τερματίσει και να μας δίνει το σωστό αποτέλεσμα

Επομένως, τρέχοντας τον κώδικα παίρνουμε τις εξής εκτυπώσεις:

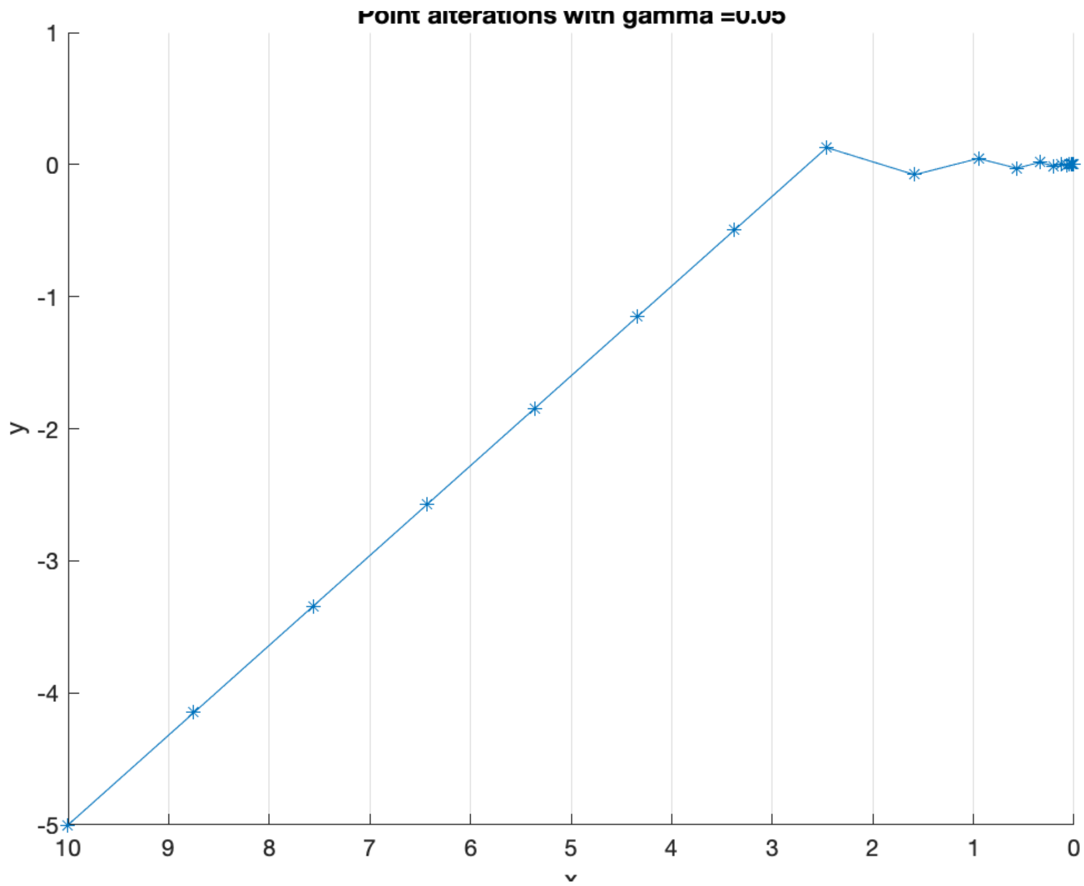
```
------------------------Steepest Descent Method with projection------------------------

Exercise 2
Starting Point = [10,-5]
Gamma = 0.050000
sk = 8
Epsilon = 0.010000
Best minimum estimation: f(0.009587,-0.000465) = 0.000046 after 19 repetitions
```



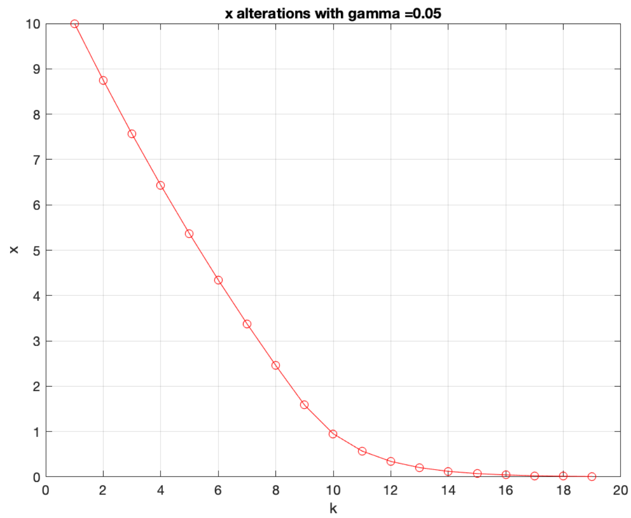
γράφημα 1



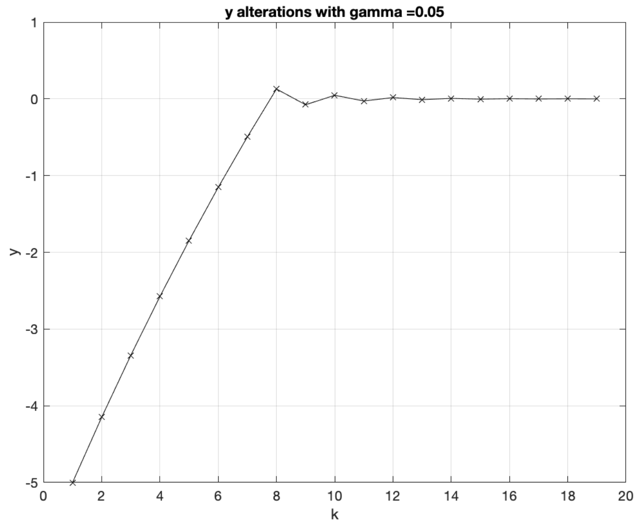
γράφημα 2



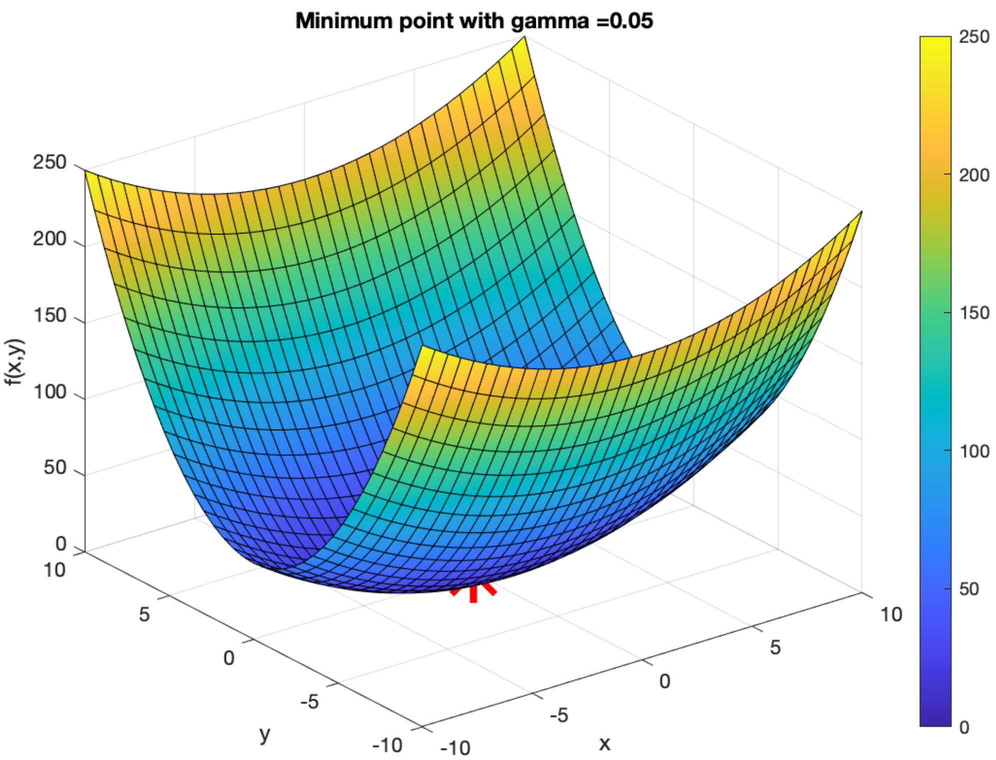
γράφημα 3



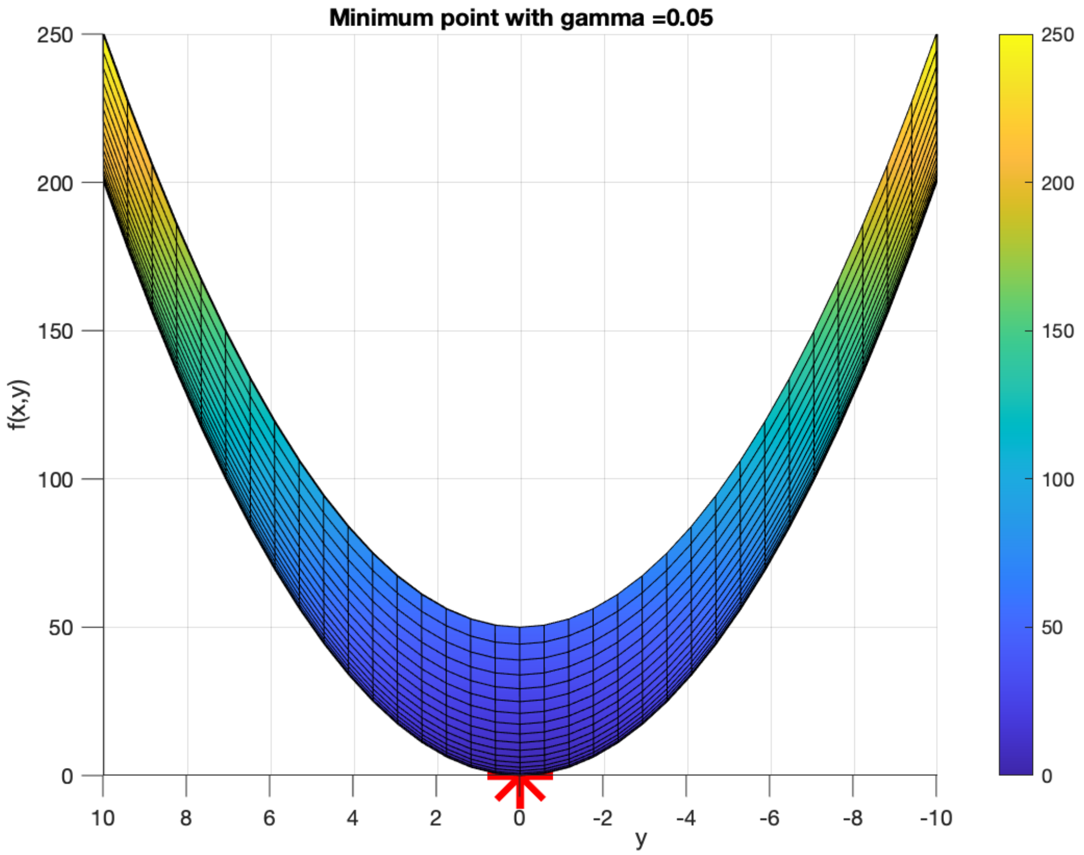
γράφημα 4



γράφημα 5



γράφημα 6



γράφημα 7

Πράγματι, όπως βλέπουμε ο αλγόριθμος τερματίζει μετά από 19 επαναλήψεις και συγκλίνει στο (0,0).

Συγκρίνοντας τον αλγόριθμο μέγιστης καθόδου με προβολή με τον αλγόριθμο μέγιστης καθόδου, παρατηρώ ότι ο πρώτος φτάνει γρηγορότερα στο επιθυμητό αποτέλεσμα, λόγω και του μεγαλύτερου βήματος που έχω επιλέξει (γκ1>γκ). Συγκρίνοντας το (Θέμα 2) με το (Θέμα 1,i), παρατηρώ ότι και οι δύο αλγόριθμοι μου δίνουν αποτέλεσμα, καθώς τα γκ και στις δύο περιπτώσεις είναι εντός των ορίων. Συγκρίνοντας τώρα το (Θέμα 2) με το (Θέμα 1,iv), παρατηρώ ότι και στις δύο περιπτώσεις έχω μεγάλο βήμα, αλλά στην 1η έχω μικρό γκ και μεγάλο sκ οπότε το γινόμενο τους μου δίνει κάτι αποδεκτό, ενώ στην 2η έχω μεγάλο γκ εκτός ορίων, οπότε ο αλγόριθμος οδηγείται σε αστάθεια.

Θέμα 3

αρχείο κώδικα exe3.m

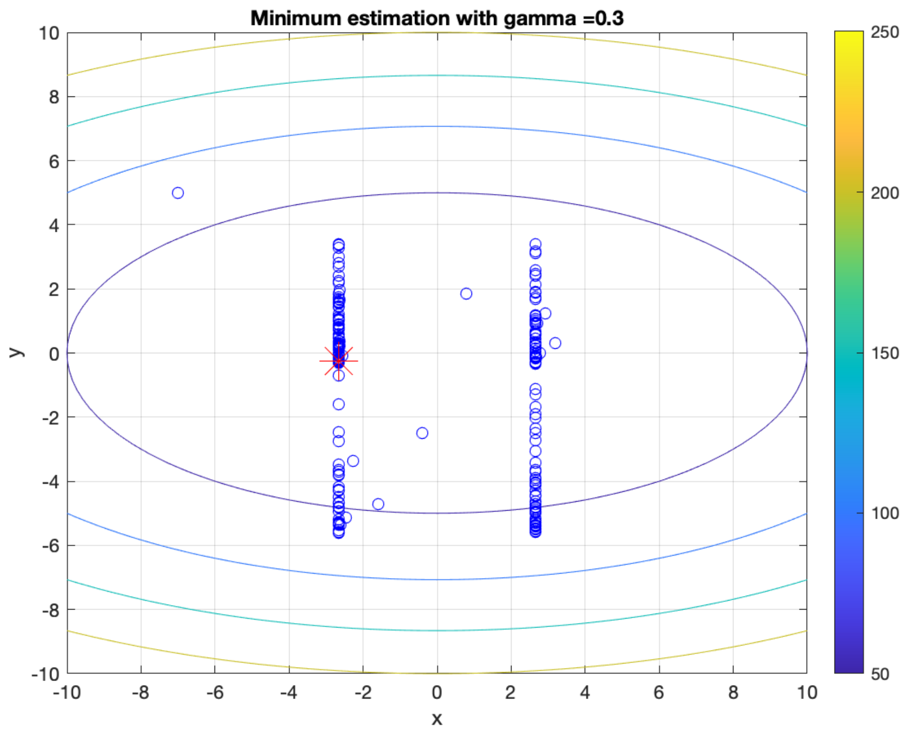
Στο θέμα αυτό μας ζητάται και πάλι η προσέγγιση του βελτίστου χρησιμοποιώντας την μέθοδο της μέγιστης καθόδου με προβολή, με διαφορετικές, όμως, αρχικές συνθήκες. Πριν τρέξουμε τον κώδικα, ας ελέγξουμε αν το γκ βρίσκεται μέσα στο αποδεκτό διάστημα. Το γκ του θέματος 3 ισούται με

γκ’ = γκ*sκ = 0.3*10 = 3

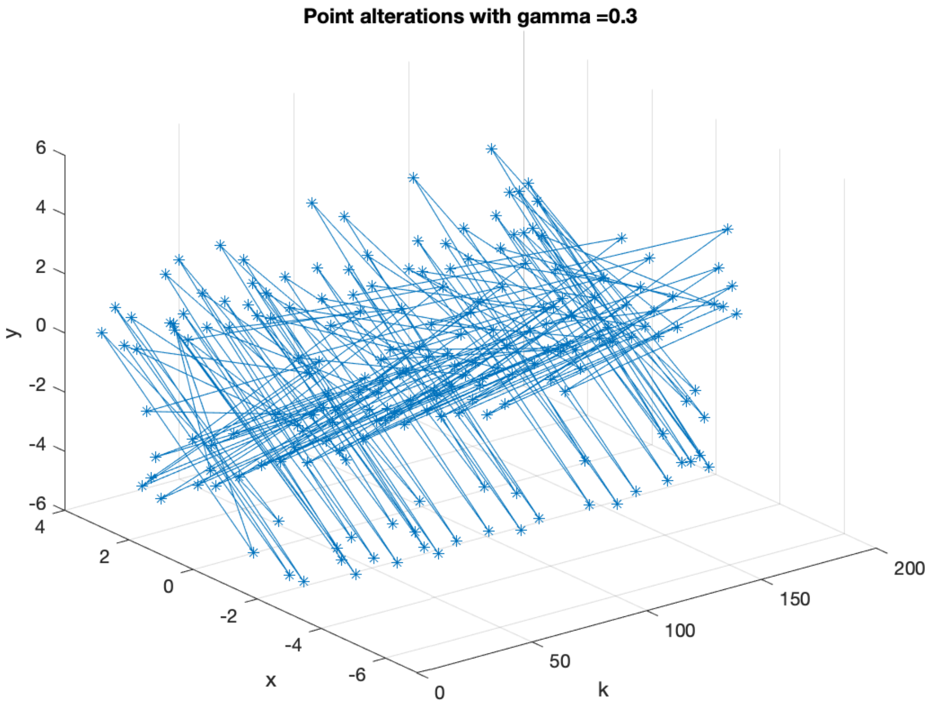
το οποίο δεν βρίσκεται μέσα στα αποδεκτά όρια. Επομένως, αναμένουμε ο αλγόριθμος να οδηγηθεί σε αστάθεια.

Επομένως, τρέχοντας τον κώδικα για 200 επαναλήψεις έχουμε:

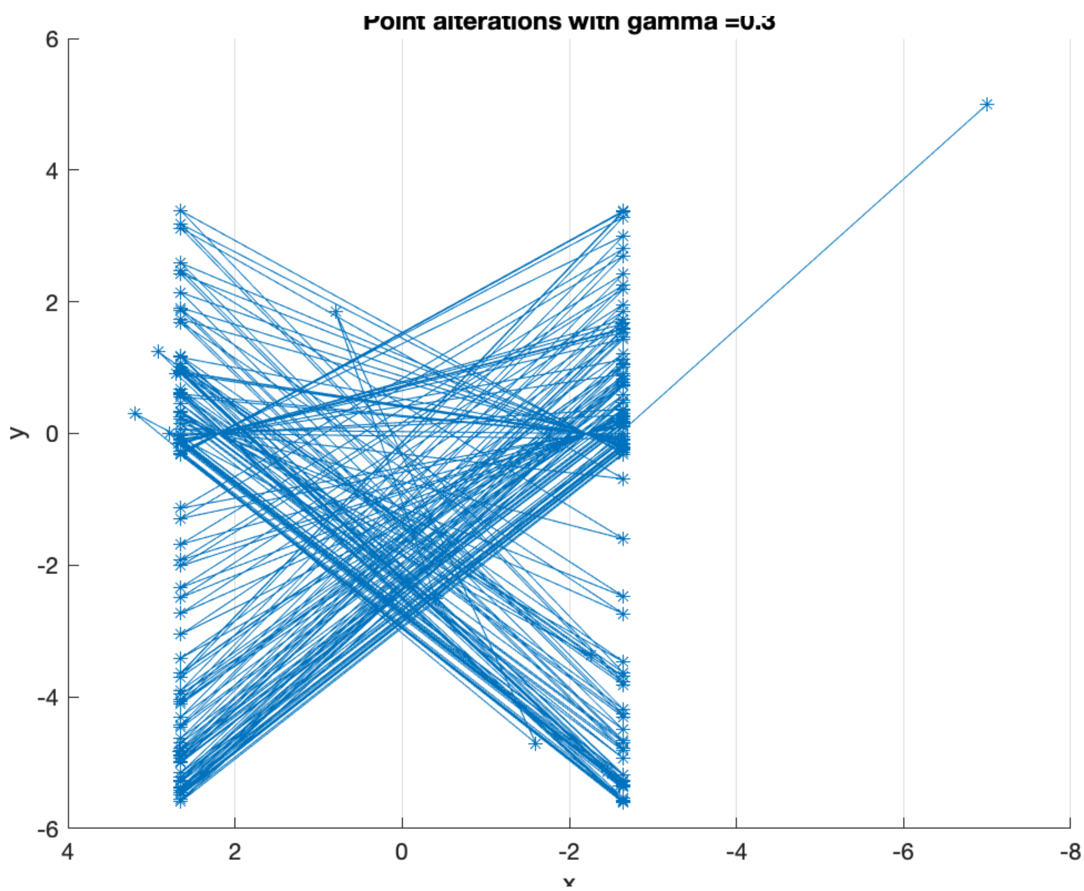
```
------------------------Steepest Descent Method with projection------------------------

Exercise 3
Starting Point = [-7,5]
Gamma = 0.300000
sk = 10
Epsilon = 0.020000
Best minimum estimation: f(-2.647059,-0.246418) = 3.624904 after 200 repetitions
```



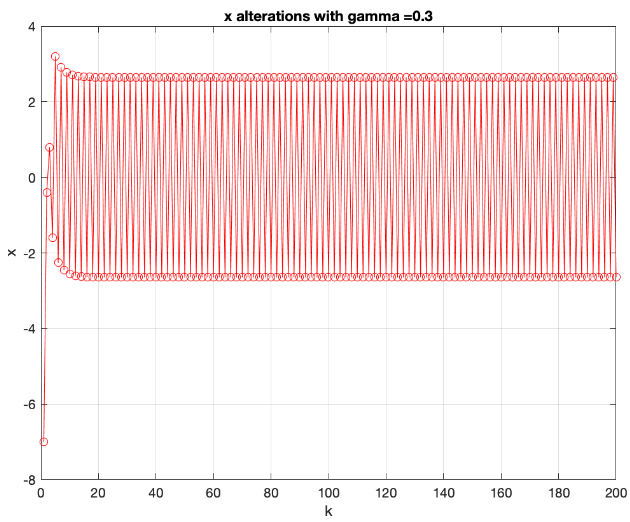
γράφημα 1



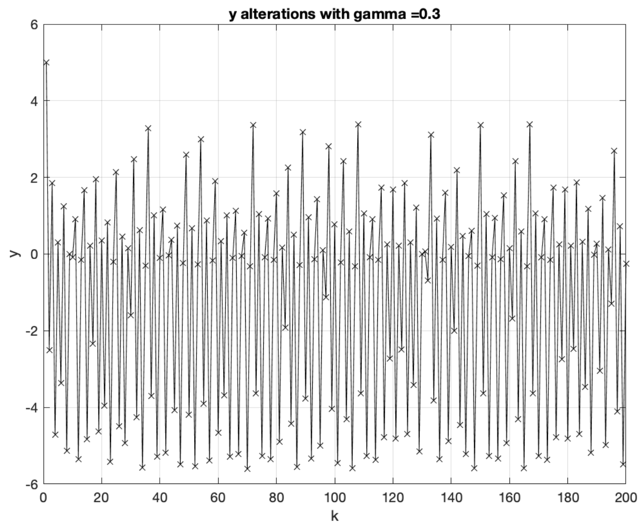
γράφημα 2



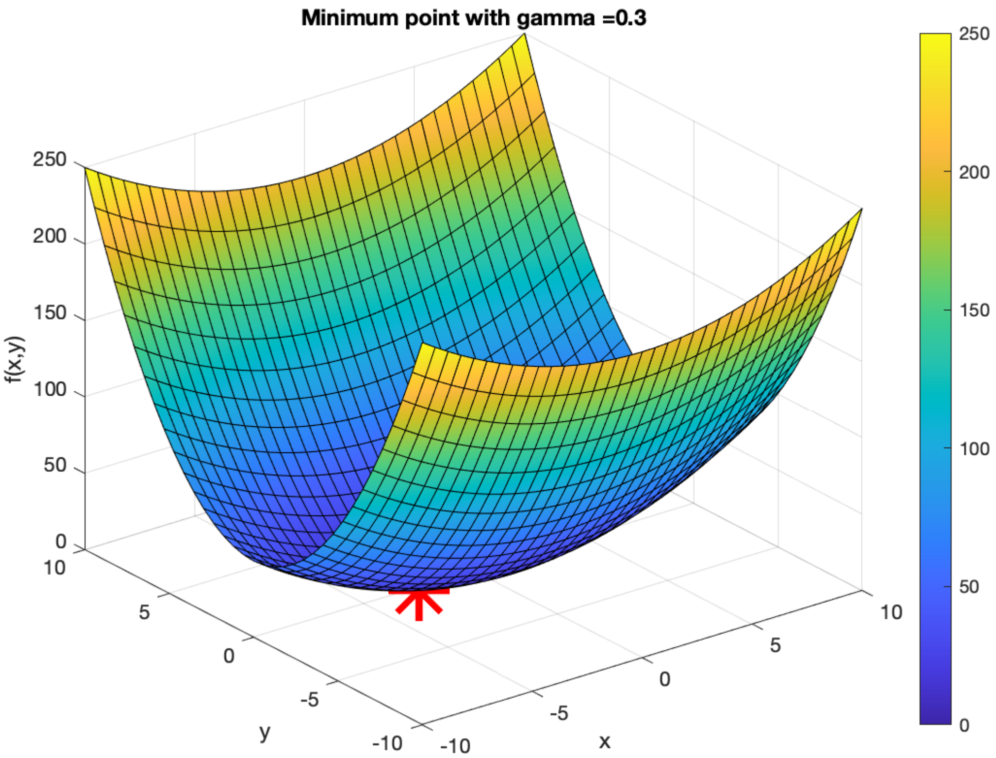
γράφημα 3



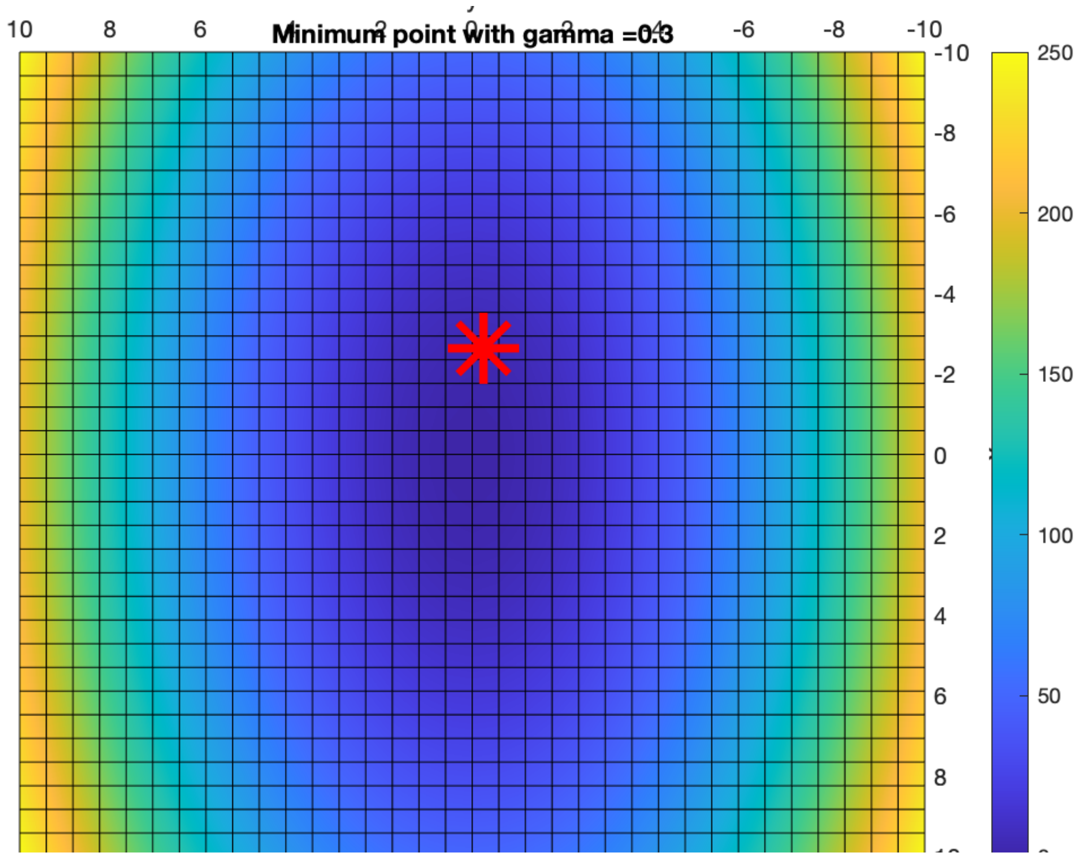
γράφημα 4



γράφημα 5



γράφημα 6



γράφημα 7

Στο γράφημα 4 βλέπουμε ότι το x ταλαντώνεται γύρω από το μηδέν, ενώ δεν περνάει ποτέ από αυτό, ενώ στο γράφημα 5 βλέπουμε ότι το y ταλαντώνεται γύρω από το -2, ενώ περνάει από το 0. Έτσι, μετά από 200 επαναλήψεις τερματίζει σε ένα σημείο, το οποίο δεν είναι το ελάχιστο.

Σημαντικό να αναφέρουμε εδώ είναι, ότι ο αλγόριθμος, παρόλο που οδηγείται σε αστάθεια, **δεν οδηγείται στο άπειρο.** Αυτό συμβαίνει διότι ο αλγόριθμος μέγιστης καθόδου με προβολή φροντίζει τα x και y να βρίσκονται πάντα εντός ορίων. Αυτό γίνεται αντιληπτό κοιτώντας και τα γραφήματα 4 και 5. Αντίθετη περίπτωση αποτελεί το (Θέμα 1,iv), όπου και πάλι τρέχοντας τον αλγόριθμο για 200 επαναλήψεις και για γκ εκτός ορίων, καταλήγουμε σε x, y και εκτίμηση ελαχίστου που τείνουν στο άπειρο

Συγκρίνοντας το (Θέμα 2) με το (Θέμα 1,i), παρατηρώ ότι στο Θέμα 1,i έχουμε ομαλή λειτουργία του αλγορίθμου μέγιστης καθόδου, λόγω της ορθής επιλογής γκ, ενώ στο Θέμα 2 ο αλγόριθμος μέγιστης καθόδου με προβολή παρουσιάζει αστάθεια.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση, προκειμένου να συγκλίνει η μέθοδος στο ελάχιστο, μπορούμε είτε να αλλάξουμε τις αρχικές συνθήκες, ώστε το γινόμενο γκ*sk να είναι μέσα στα αποδεκτά όρια, είτε να επιλέξουμε άλλο αλγόριθμο. Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιούσαμε τον αλγόριθμο μέγιστης καθόδου, το αποτέλεσμα θα σύγκλινε στο ελάχιστο.

Θέμα 4

αρχείο κώδικα exe4.m

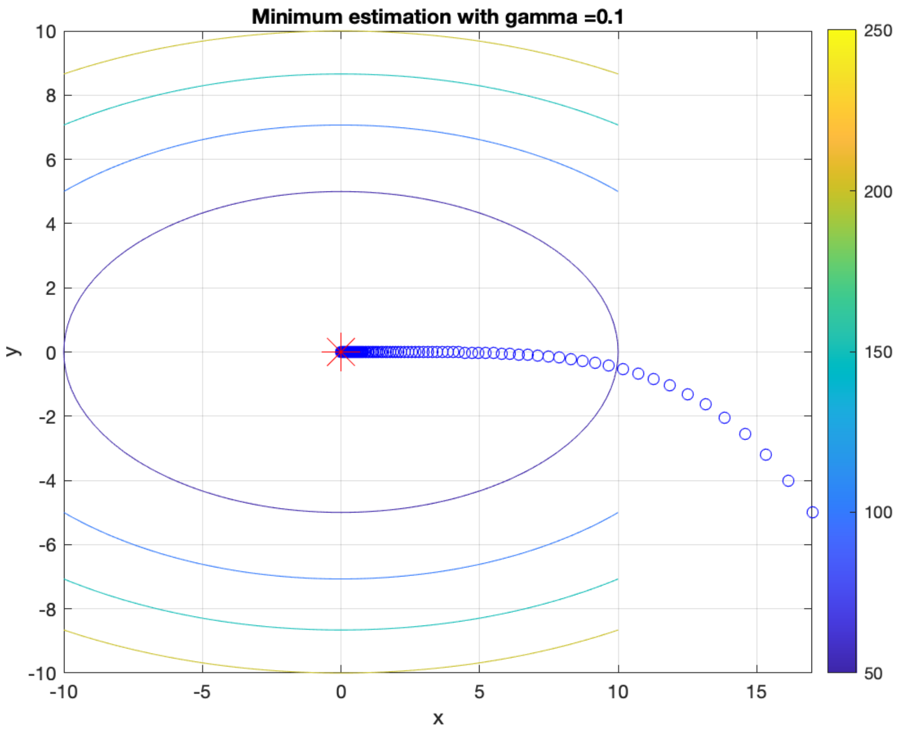
Στο θέμα αυτό θα προσεγγίσουμε και πάλι το ελάχιστο χρησιμοποιώντας την μέθοδο της μέγιστης καθόδου με προβολή. Πριν τρέξουμε τον κώδικα, ας ελέγξουμε αν το γκ βρίσκεται μέσα στο αποδεκτό διάστημα. Το γκ του θέματος 4 ισούται με

γκ’ = γκ*sκ = 0.2*0.5 = 0.1

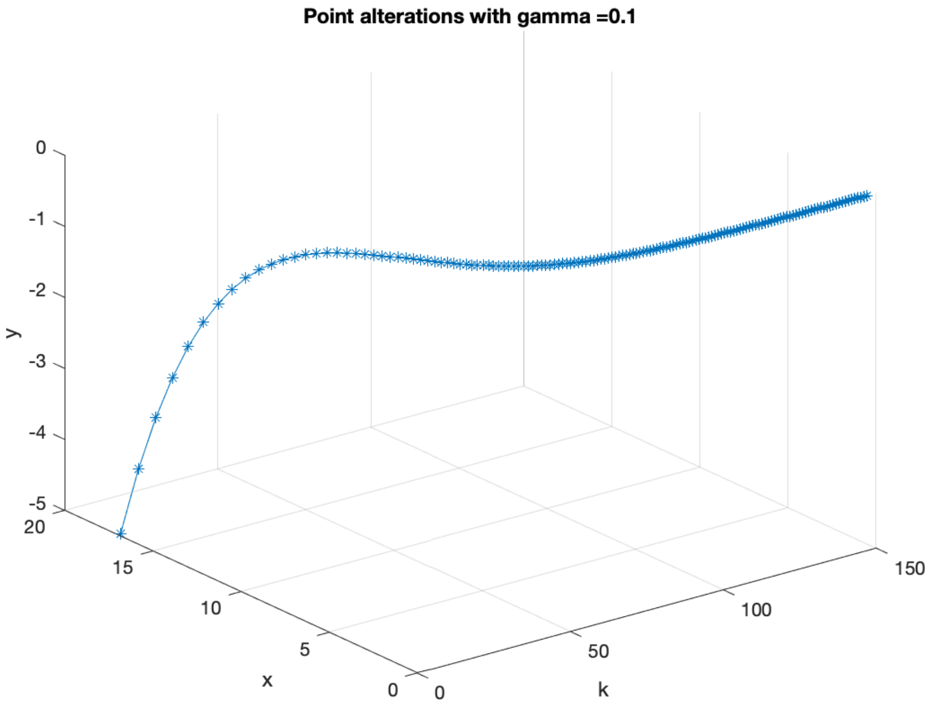
Το γκ’ βρίσκεται μέσα στα αποδεκτά όρια, επομένως περιμένουμε ο αλγόριθμος να τερματίσει και να συγκλίνει στο ελάχιστο

Επομένως, τρέχοντας τον κώδικα έχουμε:

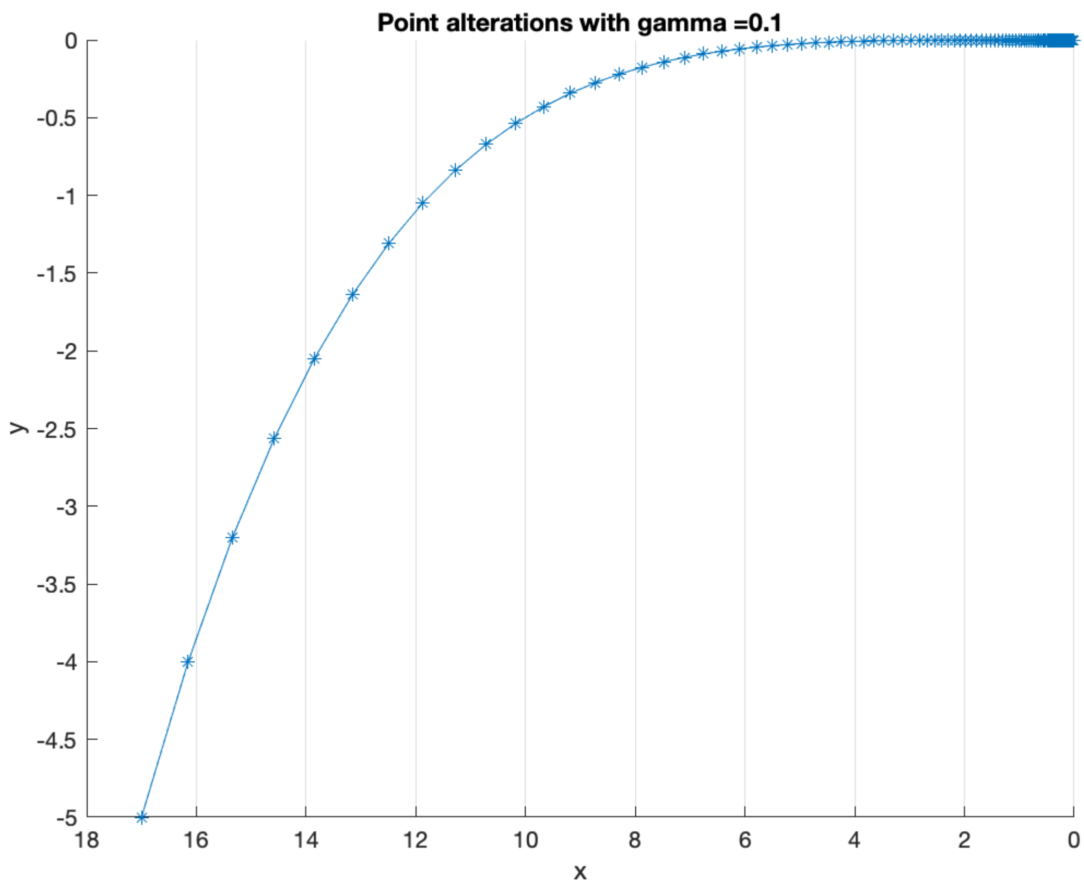
```
------------------------Steepest Descent Method with projection-----------------------

Exercise 4
Starting Point = [17,-5]
Gamma = 0.100000
sk = 5.000000e-01
Epsilon = 0.010000
Best minimum estimation: f(0.009508,-0.000000) = 0.000045 after 147 repetitions
```



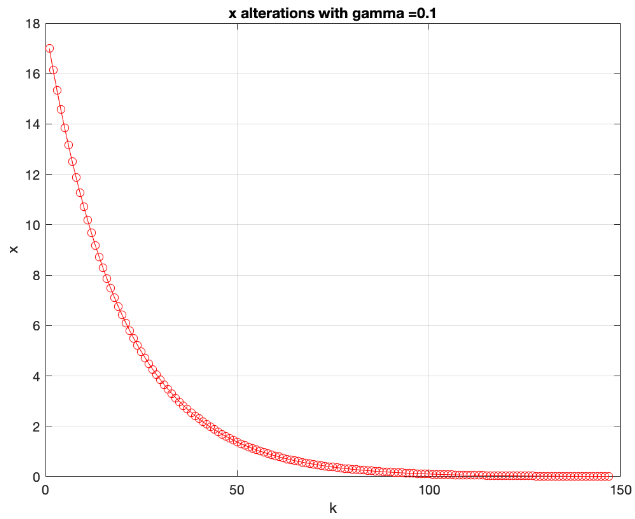
γράφημα 1



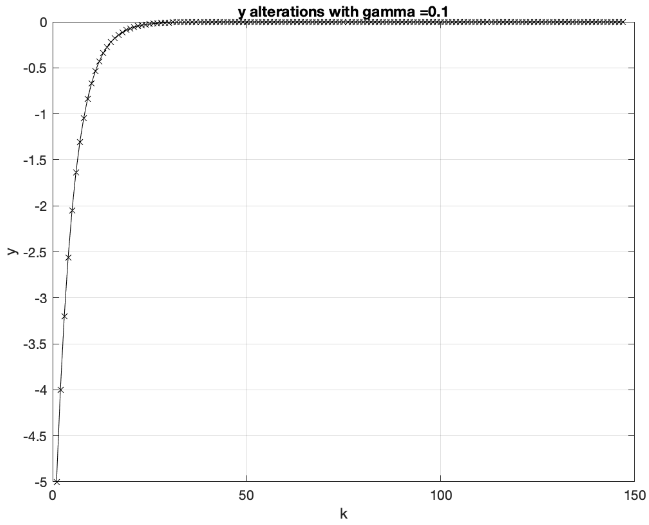
γράφημα 2



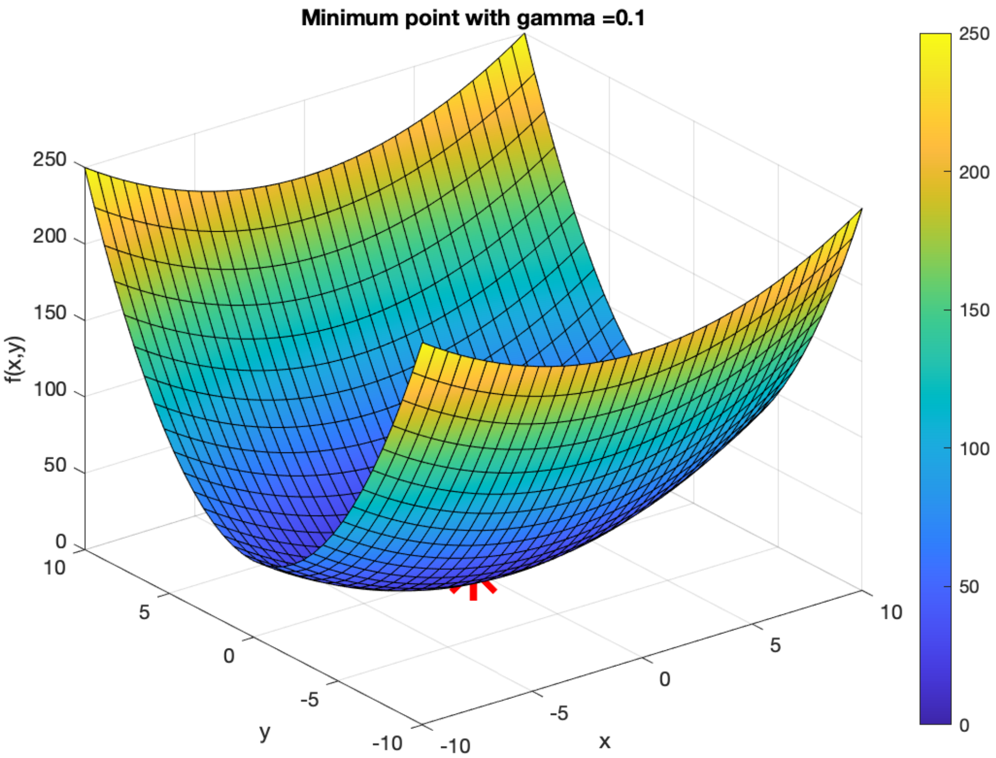
γράφημα 3



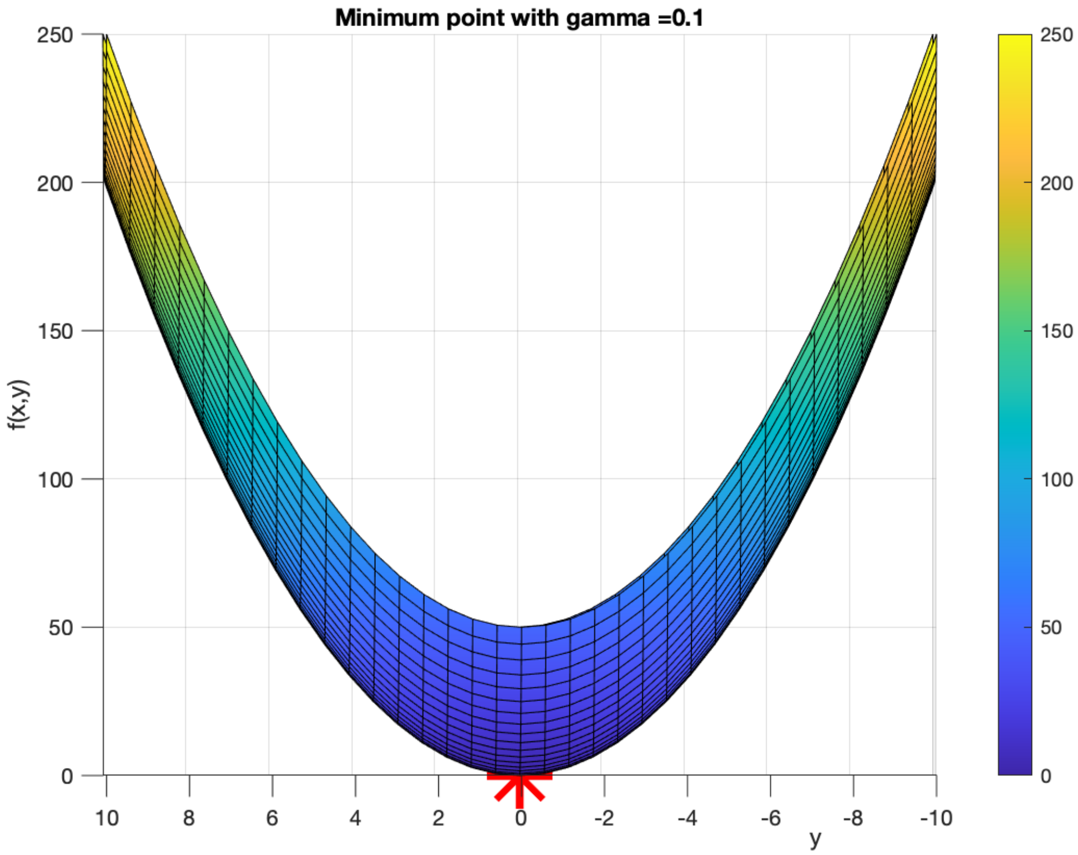
γράφημα 4



γράφημα 5



γράφημα 6



γράφημα 7

Παρατηρούμε ότι, ενώ το σημείο εκκίνησης είναι εκτος του X, ο αλγόριθμος μετά από κάποιες επαναλήψεις το θέτει εντός ορίων του συνόλου X.