Τεχνικές Βελτιστοποίησης

2η Εργαστηριακή Άσκηση- Ελαχιστοποίηση συνάρτησης με χρήση παραγώγων

Ονοματεπώνυμο: Χριστίνα Κούτση
ΑΕΜ: 9871
email: cvkoutsi@ece.auth.gr

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία έχει σκοπό την υλοποίηση τεσσάρων αλγορίθμων εύρεσης ελαχίστου μιας συνάρτησης f με χρήση παραγώγων

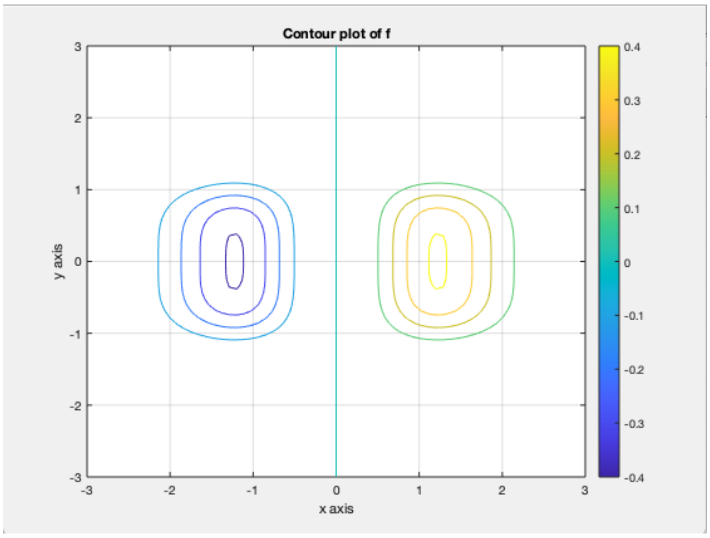
Για τον κάθε αλγόριθμο υπάρχει ένας φάκελος με το όνομα της μεθόδου, ο οποίος περιέχει τον κώδικα υλοποίησης του αλγορίθμου στο matlab και γραφικές παραστάσεις που αντιστοιχούν στον κάθε αλγόριθμο. Επιπλέον, υπάρχει ένας φάκελος "Γραφική παράσταση" με το αρχείο κώδικα fplot.m που υλοποιεί την γραφική παράσταση της f

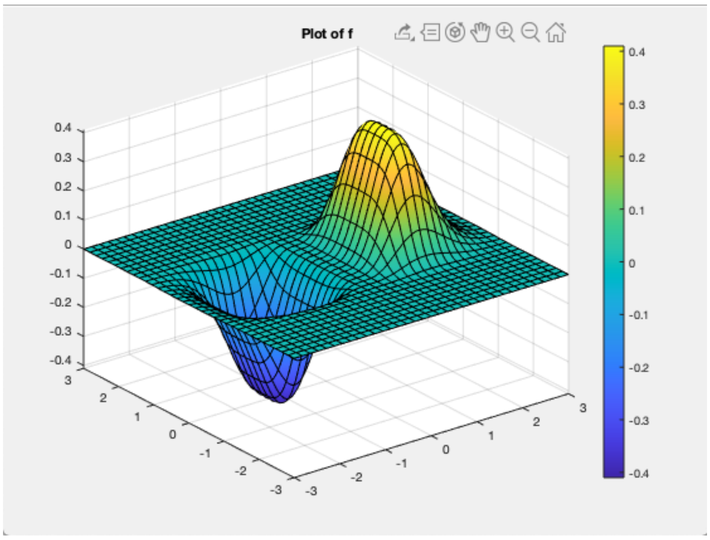
Μέσα στο αρχείο κώδικα κάθε μεθόδου υπάρχει η συνάρτηση f(x,y,i) η οποία αποτελεί υλοποίηση της f. Για i==1 η συνάρτηση επιστρέφει την παραμετρική μορφή της f, η οποία χρησιμοποιείται για την δημιουργία γραφικών παραστάσεων και για
i==2 επιστρέφει την τιμή της f σε σημείο (x,y). Επιπλέον, σε κάθε αρχείο κώδικα υπάρχουν και οι σηναρτήσεις gradf(x,y) και hessianf(x,y) οι οποίες επιστρέφουν το gradient της f σε σημείο (x,y) και τον εσσιανό πίνακα της f σε σημείο (x,y) αντίστοιχα.

Θέμα 1- Γραφική παράσταση της f

Αρχείο κώδικα fplot.m

Αυτό το αρχείο κώδικα υλοποιεί την τρισδιάστατη απεικόνιση της f και το contour plot της. Έτσι, λαμβάνουμε τις δύο γραφικές παραστάσεις:





Θέμα 2-Μέθοδος μέγιστης καθόδου

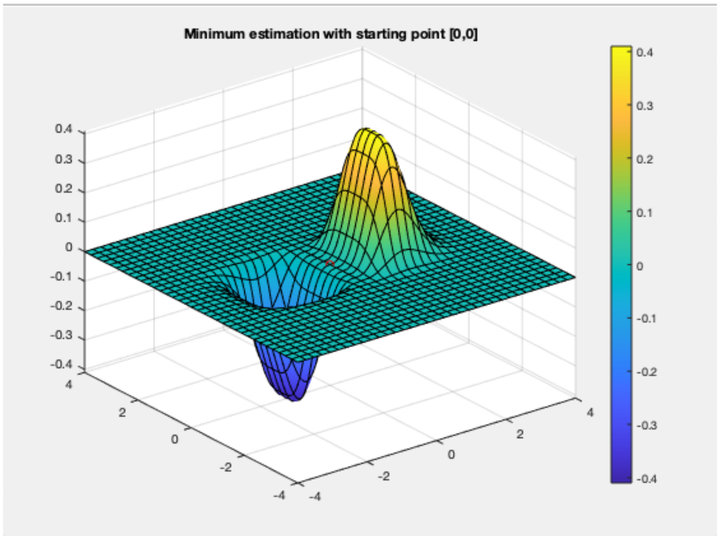
Στο θέμα 2 μας ζητάται να εκτιμήσουμε το ελάχιστο της συνάρτησης f με χρήση της μεθόδου μέγιστης καθόδου.

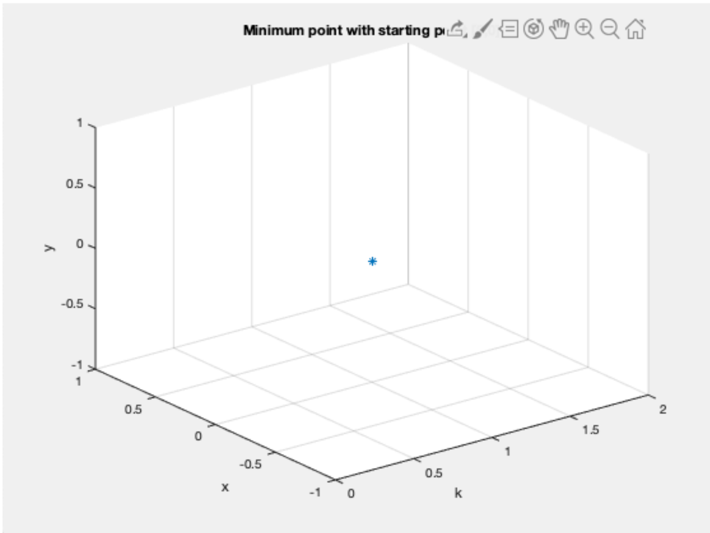
Το θέμα αυτό έχει τρία ζητούμενα:
i)Την εκτίμηση του ελαχίστου με σταθερό γκ (αρχείο exe2_a.m)
ii) Την εκτίμηση του ελαχίστου με εύρεση του γκ ελαχιστοποιώντας την f(xk -γk*dk) (αρχείο exe2_b.m)
iii) Την εκτίμηση του ελαχίστου με εύρεση του γκ με χρήση του κανόνα Armijo (αρχείο exe2_c.m)

i) Εκτίμηση του ελαχίστου με σταθερό γκ

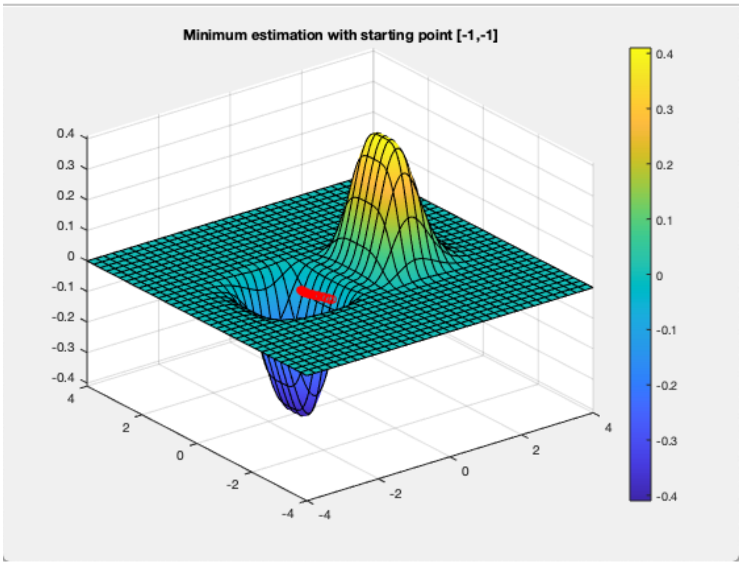
Εφαρμόζω την μέθοδο της μέγιστης καθόδου για γκ = 0.1 και ε = 0.01. Για κάθε σημείο εκκίνησης έχω τα εξής:

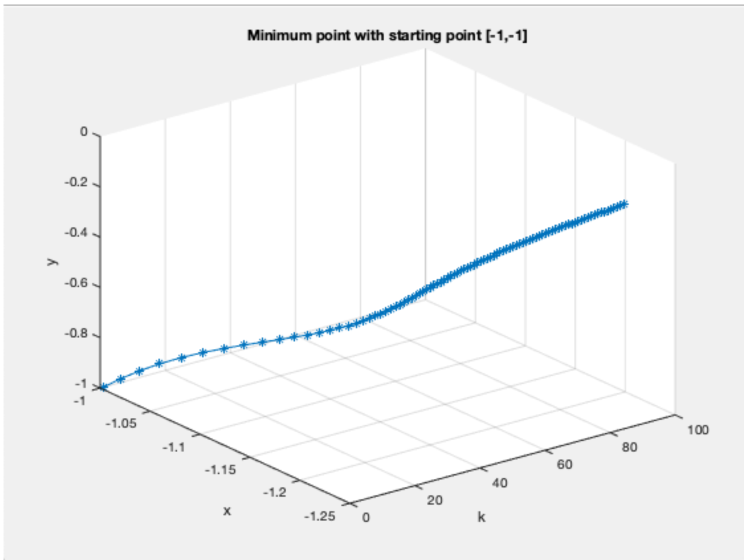
- Σημείο εκκίνησης [0,0]



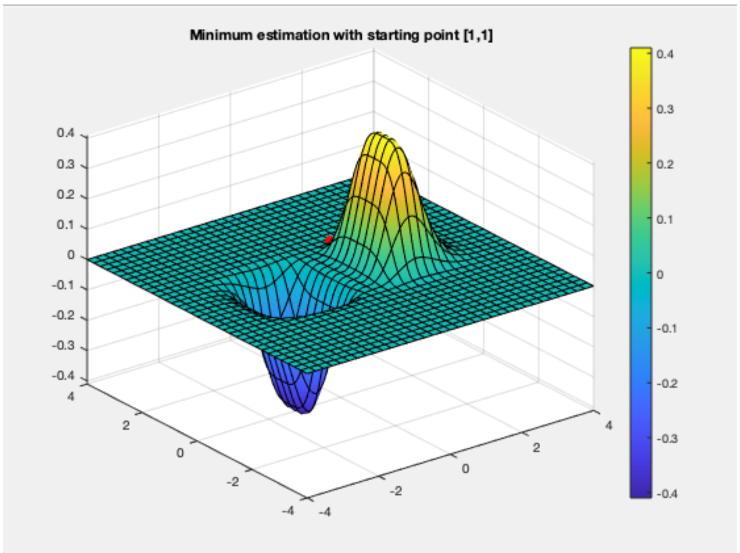


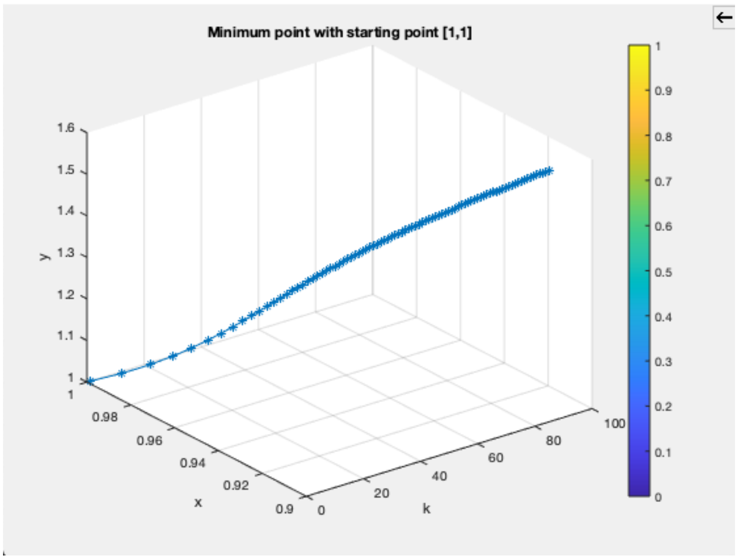
- Σημείο εκκίνησης [-1,-1]





- Σημείο εκκίνησης [1,1]





Τέλος στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι καλύτερες εκτιμήσεις του ελαχίστου μετά από κ επαναλήψεις για διαφορετικό σημείο εκκίνησης.

Σημείο εκκίνησης	x	y	f(x,y)	κ
[0,0]	0	0	0	1
[-1,-1]	-1.224745	-0.182074	-0.409466	92
[1,1]	0.905246	1.582207	0.000620	89

<u>Παρατήρηση</u>

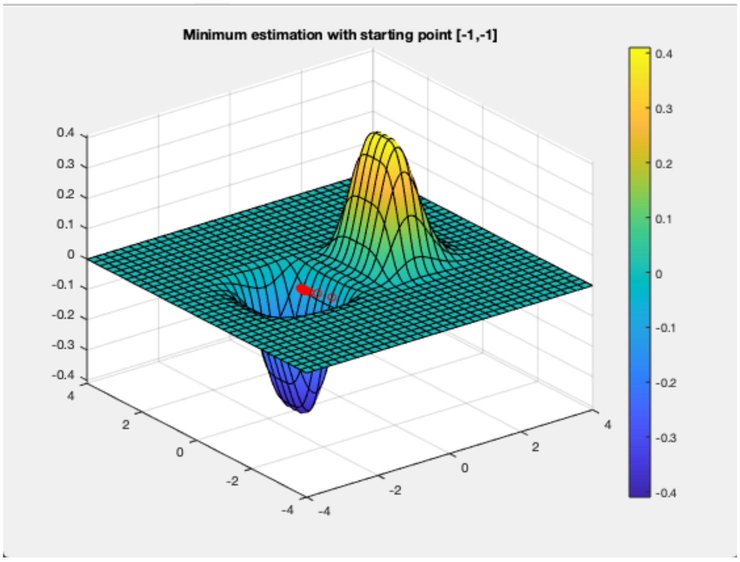
1) Για σημείο έναρξης [0,0] η συνθήκη τερματισμού ικανοποιείται εξ'αρχής, διότι το grad της f ισούται με μηδέν και επομένως είναι μικρότερο του ε.

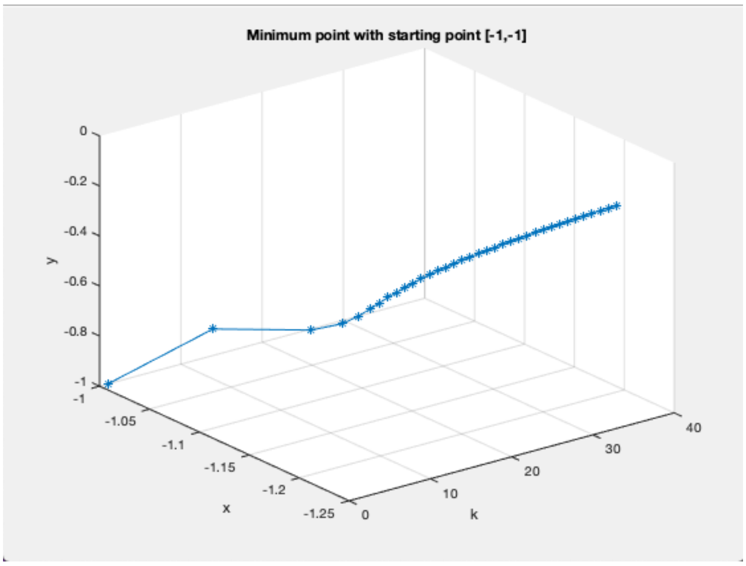
2)Παρατηρώ ότι για σημείο εκκίνησης [-1,-1] ο αλγόριθμος συγκλίνει στο πραγματικό ελάχιστο, ενώ για σημείο εκκίνησης [1,1] ο αλγόριθμος "εγκλωβίζεται" στο 1ο τεταρτημόριο, στην περιοχή κοντά στο μέγιστο.
3)Αλλάζοντας το γκ παρατηρώ ότι όσο αυξάνεται το γκ οδηγούμαστε σε λιγότερο ακριβή λύση καθώς το βήμα με το οποίο ελέγχουμε τα σημεία αυξάνεται και η μετάβαση από το x_κ στο x_κ+1 δεν είναι ομαλή

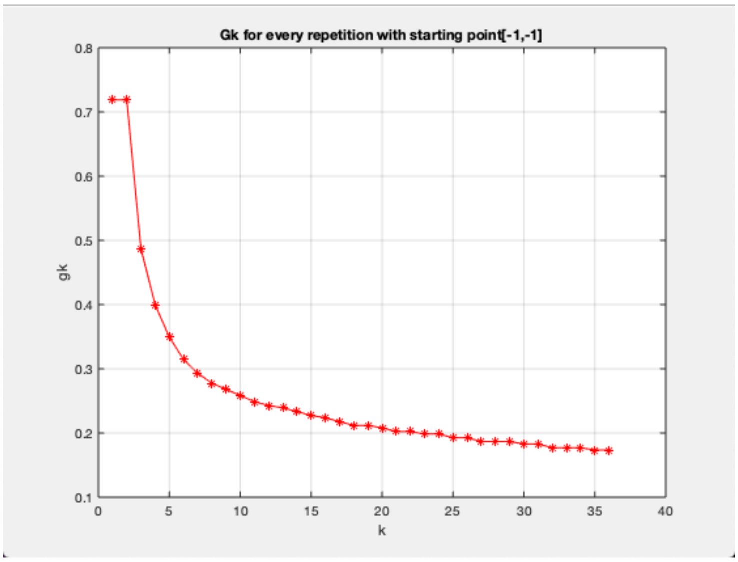
Σημείωση: Στο εξής δεν θα παρουσιάζονται γραφικές παραστάσεις για την εύρεση του ελαχίστου με σημείο εκκίνησης το [0,0] καθώς ανεξαρτήτως μεθόδου και γκ , το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, δηλαδή ο αλγόριθμος δεν τρέχει ποτέ καθώς η συνθήκη τερματισμού ικανοποιείται εξ αρχής.

ii) Εκτίμηση του ελαχίστου με εύρεση του γκ ελαχιστοποιώντας την f(xk -gkdk)
Για την εύρεση του γκ χρησιμοποιώ την μέθοδο του χρυσού τομέα (αρχείο golden_section.m).Εφαρμόζω την μέθοδο της μέγιστης καθόδου για ε = 0.01. Για κάθε σημείο εκκίνησης έχω τα εξής:

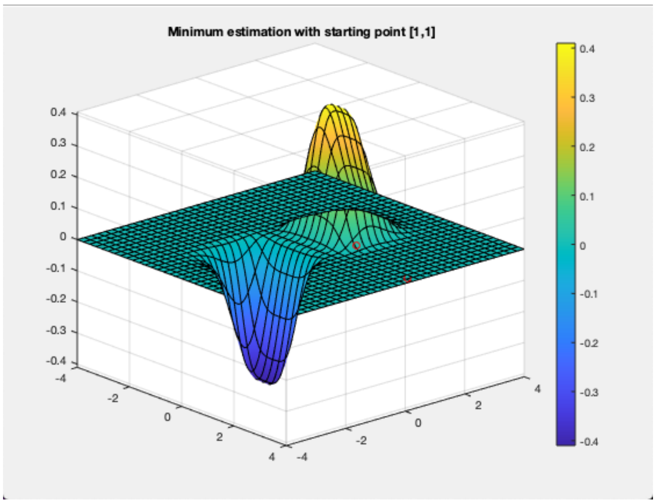
- Σημείο εκκίνησης [-1,-1]

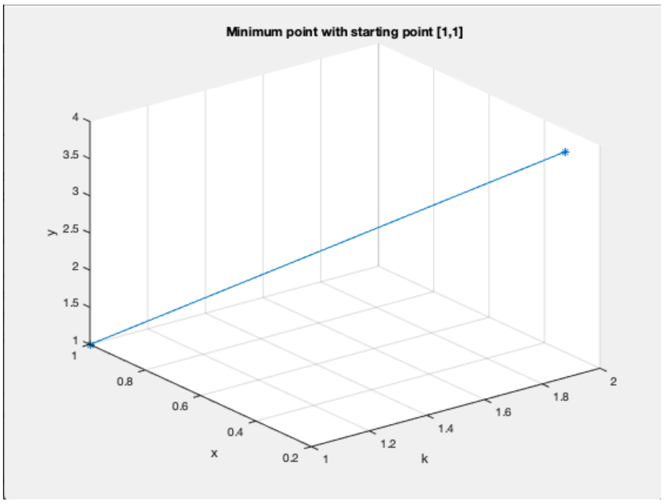


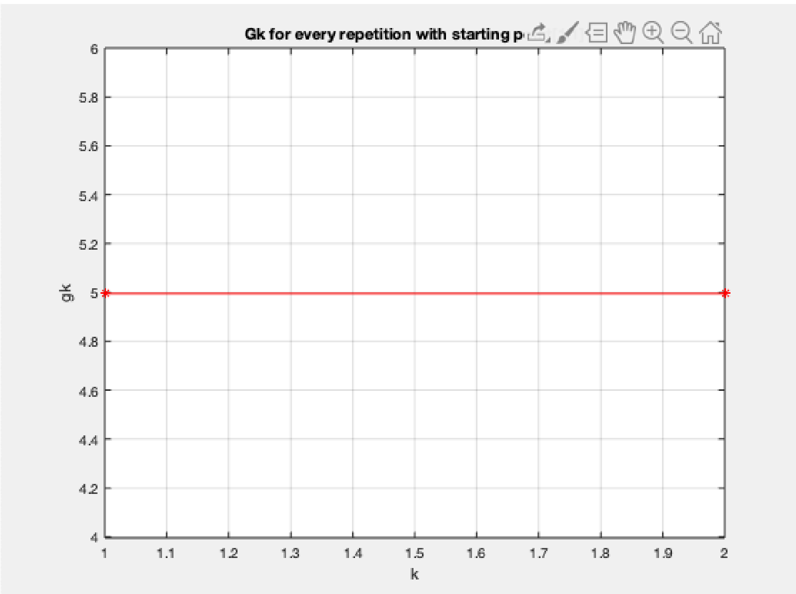




- Σημείο εκκίνησης [-1,-1]





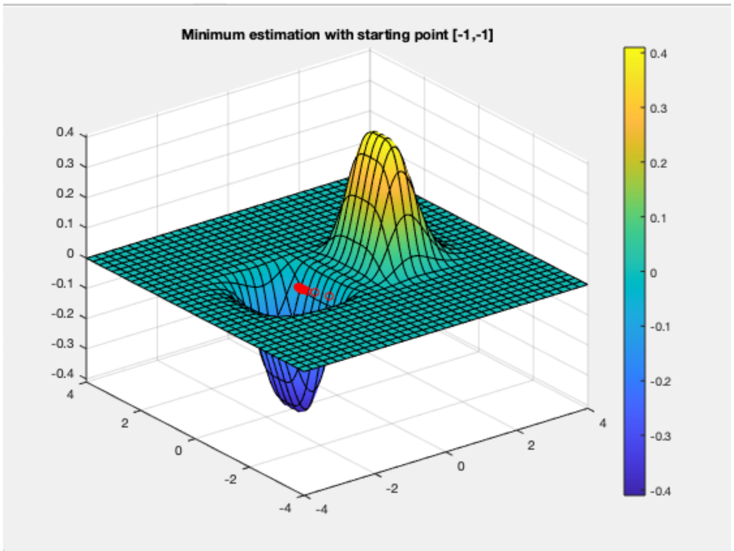


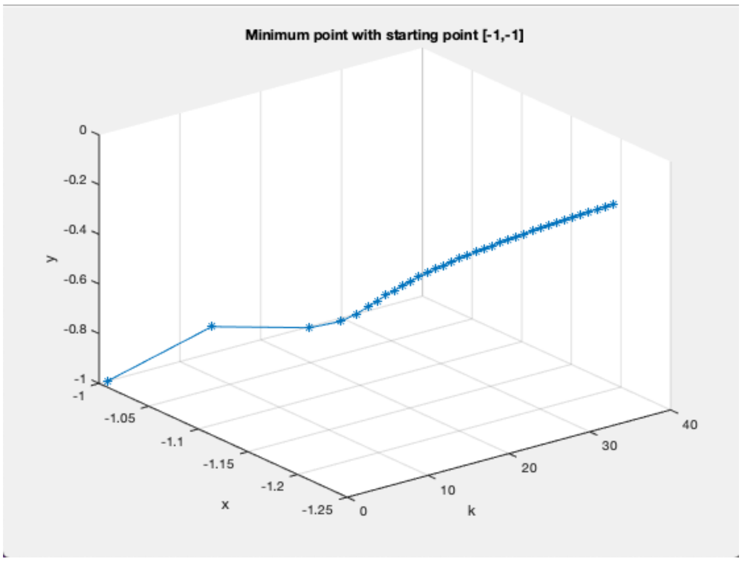
Σημείο εκκίνησης	x	y	f(x,y)	κ
[-1,-1]	-1.224745	-0.182002	-0.409467	36
[1,1]	0.323973	3.704107	0	2

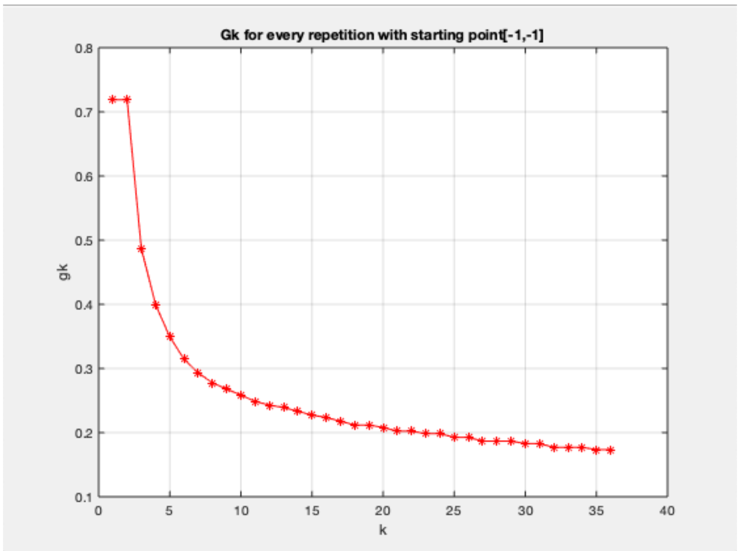
<u>Παρατήρηση:</u> Ο αλγόριθμος τερματίζει πολύ πιο γρήγορα για σημείο εκκίνησης [1,1], που είναι θετικό καθώς τερματίζει η λανθασμένη σύγκλιση γύρω από το μέγιστο.

<u>iii) Εκτίμηση του ελαχίστου με εύρεση του γκ με χρήση του κανόνα Armijo</u>
Για την εύρεση του γκ χρησιμοποιώ τον κανόνα Armijo (αρχείο armijo.m). Εφαρμόζω την μέθοδο της μέγιστης καθόδου για ε = 0.01. Για κάθε σημείο εκκίνησης έχω τα εξής:

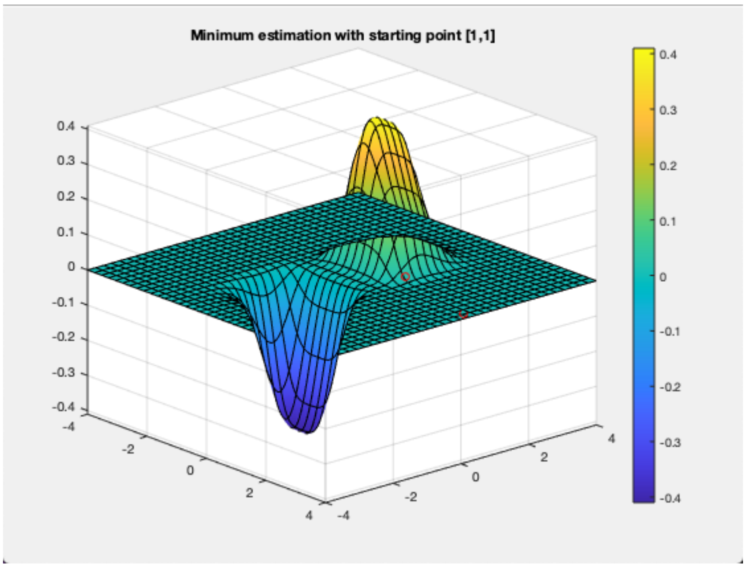
- Σημείο εκκίνησης [-1,-1]

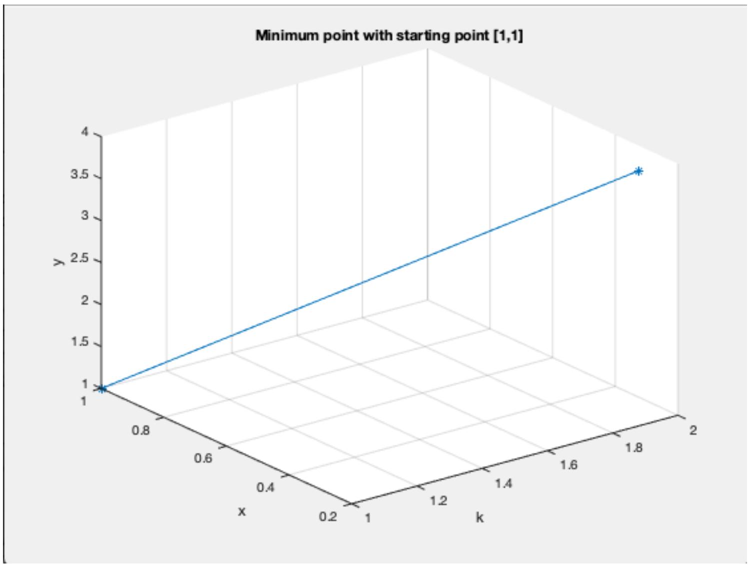


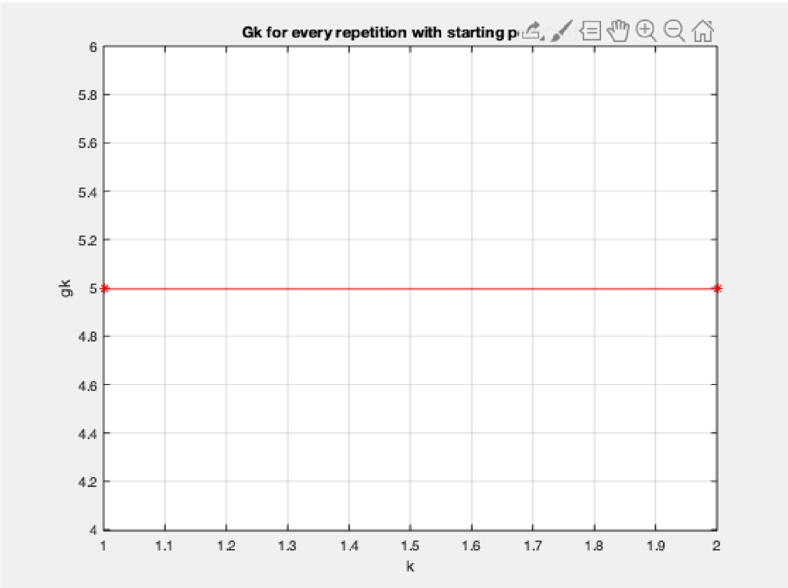




- Σημείο εκκίνησης [1,1]







Σημείο εκκίνησης	x	y	f(x,y)	κ
[-1,-1]	-1.224642	0.134190	-0.409783	3
[1,1]	0.052653	4.789388	0	2

Παρατήρηση: Ο αλγόριθμος τερματίζει και πάλι πολύ γρήγορα για σημείο εκκίνησης [1,1], και για σημείο εκκίνησης [-1,-1] συγκλίνει πολύ γρήγορα στο πραγματικό ελάχιστο.

Θέμα 3-Μέθοδος Newton

Στο θέμα 3 μας ζητάται να εκτιμήσουμε το ελάχιστο της συνάρτησης f με χρήση της μεθόδου του Newton

Το θέμα αυτό έχει τρία ζητούμενα:
i)Την εκτίμηση του ελαχίστου με σταθερό γκ (αρχείο exe3_a.m)
ii) Την εκτίμηση του ελαχίστου με εύρεση του γκ ελαχιστοποιώντας την f(xk -γk*dk) (αρχείο exe3_b.m)
iii) Την εκτίμηση του ελαχίστου με εύρεση του γκ με χρήση του κανόνα Armijo (αρχείο exe3_c.m)

Ο εσσιανός πίνακας και για τα τρία σημεία εκκίνησης δεν είναι θετικά ορισμένος. Επομένως δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Newton. Παρόλα αυτά ο κώδικας μπορεί να βρεθεί στον φάκελο "Μέθοδος Newton".

Θέμα 4-Μέθοδος Levenberg-Marquardt

Στο θέμα 4 μας ζητάται να εκτιμήσουμε το ελάχιστο της συνάρτησης f με χρήση της μεθόδου του Levenberg- Marquardt. Ουσιαστικά με την μέθοδο αυτή αλλάζουμε τον εσσιανό πινακα ώστε να είναι θετικά ορισμένος. Σε κάθε επανάληψη, ελέγχουμε αν ικανοποιούνται τα κριτήρια 3 και 4 του θεωρήματος 5.2.6 του βιβλίου.

Το θέμα αυτό έχει τρία ζητούμενα:
i)Την εκτίμηση του ελαχίστου με σταθερό γκ (αρχείο exe4_a.m)
ii) Την εκτίμηση του ελαχίστου με εύρεση του γκ ελαχιστοποιώντας την f(xk -γk*dk) (αρχείο exe4_b.m)
iii) Την εκτίμηση του ελαχίστου με εύρεση του γκ με χρήση του κανόνα Armijo (αρχείο exe4_c.m)

Τρέχοντας τα αρχεία κώδικα που έχω δημιουργήσει και καλώντας την συνάρτηση check.m που ελέγχει αν τα κριτήρια 3 και 4 ικανοποιούνται, παίρνω ως αποτέλεσμα ότι τα κριτήρια 3 και 4 δεν ικανοποιούνται για κανένα σημείο εκκίνησης οπότε ο αλγόριθμος τερματίζει.
Αναγνωρίζω πως ο αλγόριθμος θα έπρεπε να τρέξει τουλάχιστον για ένα από τα σημεία εκκίνησης, άλλα λόγω έλλειψης χρόνου δεν μπόρεσα να το διερευνήσω περαιτέρω.