

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Εργαστηριακή Άσκηση 1

Κούτση Χριστίνα
AEM: 9871
email: cvkoutsis@ece.auth.gr

April, 2022

1 Θέμα 1

1.1 Ερώτημα Α

Έστω το σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα του σχήματος. Θεωρούμε ως σταθερές του συστήματος:

1. Τη μάζα m του σώματος
2. Τη σταθερά του ελατηρίου k
3. Τη σταθερά απόσβεσης του αποσβεστήρα b

Στην ανάλυση μας θα θεωρήσουμε ότι το ελατήριο έχει φυσικό μήκος $l_0=0$. Επομένως, από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα μάζας m έχουμε:

$$\Sigma F = m \ddot{y} \Leftrightarrow u - ky - b\dot{y} = m \ddot{y} \Leftrightarrow m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u \Leftrightarrow \ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}u$$

Επομένως το σύστημα περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση 2ης τάξης

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}u \quad (1)$$

Συγκεντρώνουμε όλες τις παραμέτρους σε ένα διάνυσμα θ^* και όλα τα σήματα εισόδου-εξόδου σε ένα διάνυσμα Δ

$$\theta^* = \left[\frac{b}{m} \quad \frac{k}{m} \quad \frac{1}{m} \right]^T = [\theta_1^* \quad \theta_2^*]^T, \Delta = [-\dot{y} \quad -y \quad u]^T$$

Επομένως το σύστημα μπορεί να περιγραφεί από την σχέση

$$\ddot{y} = \theta^{*T} \Delta \quad (2)$$

Φιλτράρω την (2) με το ευσταθές φίλτρο $\frac{1}{\Lambda(s)}$, όπου

$$\Lambda(s) = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2 = s^2 + 4s + 2$$

Τότε

$$y = \theta_\lambda^T \zeta$$

Όπου

$$\theta_\lambda^T = \left[\theta_1^{*T} - \lambda^T \quad \theta_2^{*T} \right]^T = \left[\frac{b}{m} - 4 \quad \frac{k}{m} - 2 \quad \frac{1}{m} \right]^T$$

και

$$\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)}y & \frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)}u \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{[s \ 1]^T}{\Lambda(s)}y & \frac{1}{\Lambda(s)}u \end{bmatrix}^T =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)}y & -\frac{1}{\Lambda(s)}y & \frac{1}{\Lambda(s)}u \end{bmatrix}^T$$

1.2 Ερώτημα Β

Εφόσον έχουμε παραμετροποιήσει το σύστημά μας στην μορφή

$$y = \theta_\lambda^T \zeta$$

μπορούμε να εφαρμόσουμε μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για να βρούμε τις παραμέτρους θ^* . Έστω ότι παίρνουμε μετρήσεις \mathbf{n} του \mathbf{Y} . Έχουμε:

$$\mathbf{Y} = [Y(1) \quad Y(2) \quad \dots \quad Y(n)]$$

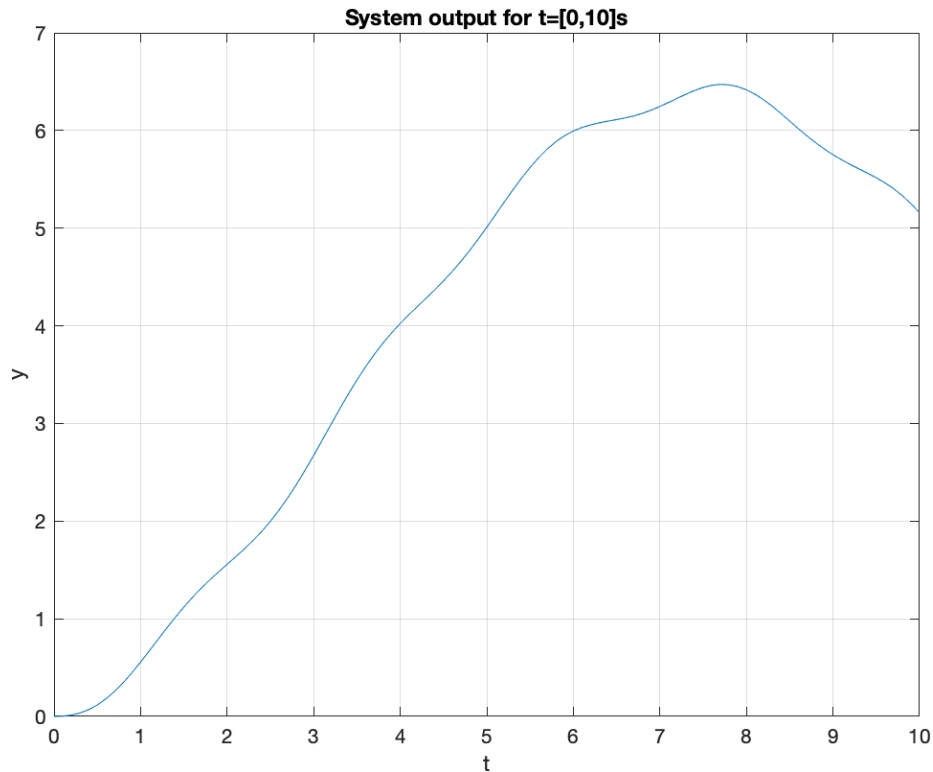
$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \varphi_3(2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(n) & \varphi_2(n) & \varphi_3(n) \end{bmatrix}$$

Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε το θ_0 που ελαχιστοποιεί το σφάλμα πρόβλεψης, από τον τύπο

$$\theta_0^T \Phi^T \Phi = \mathbf{Y}^T \Phi$$

1.3 Ερώτημα Γ

Αντικαθιστώντας τις δοθέντες σταθερές και με την βοήθεια της συνάρτησης **ode45**, λύνουμε την διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα και παίρνουμε τελικά την έξοδο (μετατόπιση) του συστήματος, αν το προσομοιώσουμε για $t=[0,10]$ s.



Στη συνέχεια, εκτιμούμε τις παραμέτρους $\mathbf{m}, \mathbf{b}, \mathbf{k}$ με την βοήθεια της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων. Αρχικά υπολογίζουμε τους πίνακες \mathbf{Y} και $\mathbf{\Phi}$ για το επιθυμητό χρονικό διάστημα $t = [0,10]\text{s}$ και στην συνέχεια υπολογίζουμε τις παραμέτρους εφαρμόζοντας τον τύπο

$$\theta_0^T \Phi^T \Phi = \mathbf{Y}^T \Phi$$

Ο αλγόριθμος μας επιστρέφει ένα 1×3 διάνυσμα

1	2	3
-3.9702	-1.8501	0.1000

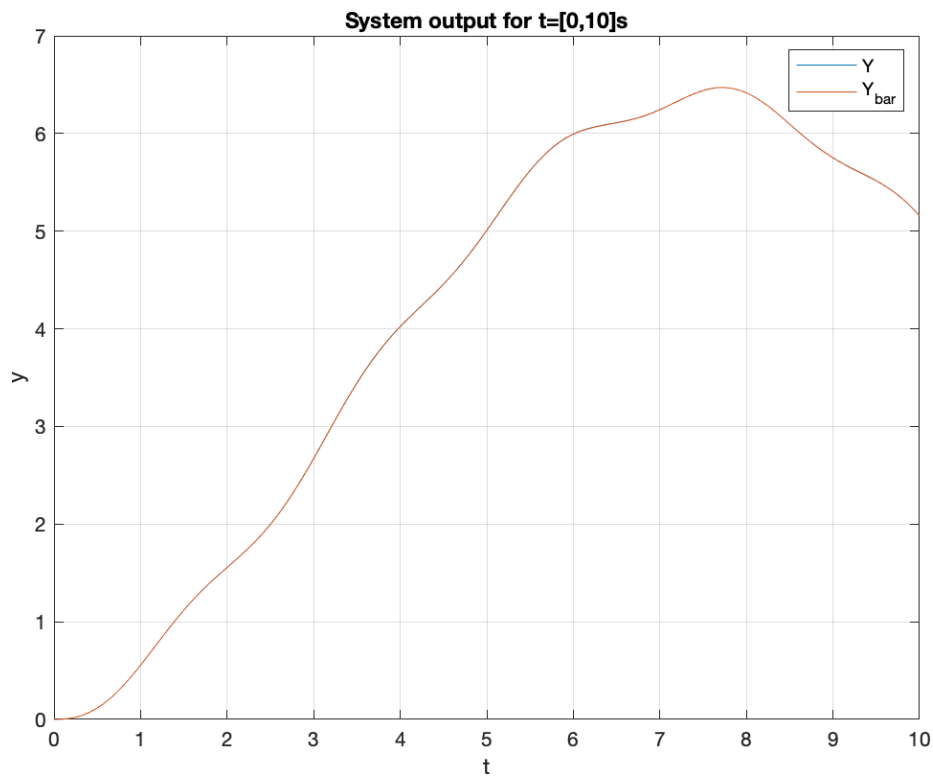
Αυτό που μας επιστρέφει ο αλγόριθμος, είναι το διάνυσμα θ_λ^* , το οποίο ισούται με

$$\theta_\lambda^T = \left[\frac{b}{m} - 4 \quad \frac{k}{m} - 2 \quad \frac{1}{m} \right]^T$$

Επομένως, λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} \frac{b}{m} - 4 = -3.9702 \\ \frac{k}{m} - 2 = -1.8501 \\ \frac{1}{m} = 0.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0.298 \\ k = 1.499 \\ m = 10 \end{cases}$$

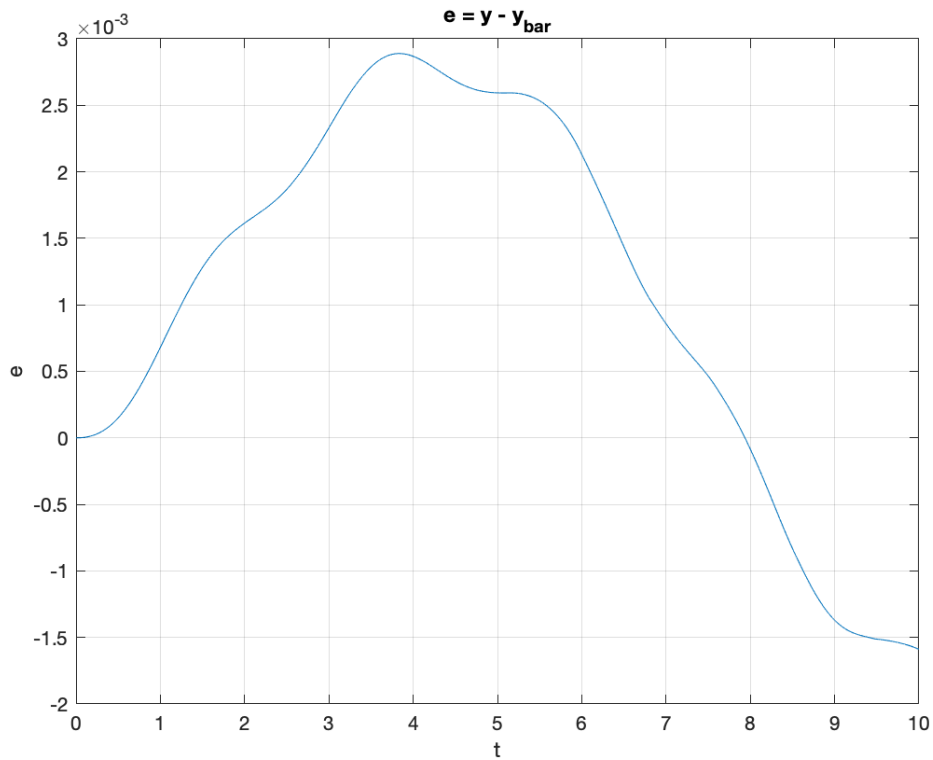
Παρατηρώ ότι η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων μας οδήγησε σε αρκετά ακριβή υπολογισμό των παραμέτρων του συστήματος και συνεπώς σε ακριβή υπολογισμό της εξόδου του συστήματος. Αυτό φαίνεται και από την γραφική απεικόνιση του \bar{Y} , το οποίο φαίνεται σχεδόν να συμπίπτει με το Y .



Το ίδιο παρατηρούμε υπολογίζοντας το σφάλμα πρόβλεψης

$$e = Y - \bar{Y}$$

όπου \bar{Y} η έξοδος που θα μας δώσει το σύστημα αν το προσομοιάσουμε για τον ίδιο χρόνο, αλλά με τις παραμέτρους που υπολογίσαμε με την βοήθεια της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων.



2 Θέμα 2

2.1 Ερώτημα Α

Αρχικά θα εφαρμόσουμε κυκλωματική ανάλυση ώστε να βρούμε το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει το σύστημα.

Από την θεωρία κυκλωμάτων, γνωρίζουμε ότι το πηνίο περιγράφεται από την σχέση

$$V = L \frac{di}{dt}$$

και ο πυνωτής από την σχέση

$$I = C \frac{dV}{dt}$$

Επομένως, αν I_1 το ρεύμα που διαρρέει τον πάνω βρόχο και I_2 το ρεύμα που διαρρέει τον κάτω βρόχο,

$$I_1 = \frac{V_R}{R}, I_2 = C \dot{V}_C$$

Έστω B_1 ο πάνω βρόχος, B_2 ο κάτω βρόχος και B_3 ο υπερβρόχος. Εφαρμόζω τον νόμο τάσεων του **Kirchhoff**

$$B_1 : u_1(t) = V_R + L\dot{I}_1 - L\dot{I}_2 = V_R + L\frac{\dot{V}_R}{R} - LC\ddot{V}_C \Leftrightarrow$$

$$u_1(t) = V_R + L\left(\frac{\dot{V}_R}{R} - C\ddot{V}_C\right) \quad (1)$$

$$B_2 : u_2(t) = V_C + L\dot{I}_2 - L\dot{I}_1 = V_C + LC\ddot{V}_C - L\frac{\dot{V}_R}{R} \Leftrightarrow$$

$$u_2(t) = V_C - L\left(\frac{\dot{V}_R}{R} - C\ddot{V}_C\right) \quad (2)$$

$$B_3 : u_1(t) + u_2(t) = V_R + V_C \quad (3)$$

Λύνοντας την (3) ως προς V_R και αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$\ddot{V}_C + \frac{1}{RC}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{RC}u_1(t) + \frac{1}{RC}u_2(t) + \frac{1}{LC}u_2(t) \quad (4)$$

Αντίστοιχα, λύνοντας την (3) ως προς V_C και αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε

$$\ddot{V}_R + \frac{1}{RC}\dot{V}_R + \frac{1}{LC}V_R = \ddot{u}_1(t) + \frac{1}{LC}u_1(t) + \ddot{u}_2(t) \quad (5)$$

Παίρνοντας μετασχηματισμό **Laplace** και στα δύο μέρη της (4) και υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{V}_C + \frac{1}{RC}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_C\} &= \mathcal{L}\{\frac{1}{RC}u_1(t) + \frac{1}{RC}u_2(t) + \frac{1}{LC}u_2(t)\} \Leftrightarrow \\ s^2V_C(s) + \frac{s}{RC}V_C(s) + \frac{1}{LC}V_C(s) &= \frac{s}{RC}u_1(s) + \frac{s}{RC}u_2(s) + \frac{1}{LC}u_2(s) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_C(s)(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}) &= \frac{s}{RC}u_1(s) + u_2(s)(\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}) \Leftrightarrow \\
V_C(s) &= u_1(s) \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} + u_2(s) \frac{\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \quad (6)
\end{aligned}$$

Ομοίως εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace και για την (5):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\ddot{V}_R + \frac{1}{RC}\dot{V}_R + \frac{1}{LC}V_R\} &= \mathcal{L}\{\frac{1}{LC}u_1(t) + \ddot{u}_1(t) + \ddot{u}_2(t)\} \Leftrightarrow \\
s^2V_R(s) + \frac{s}{RC}V_R(s) + \frac{1}{LC}V_R(s) &= s^2u_1(s) + \frac{1}{LC}u_1(s) + s^2u_2(s) \Leftrightarrow \\
V_R(s)(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}) &= u_1(s)(s^2 + \frac{1}{LC}) + s^2u_2(s) \Leftrightarrow \\
V_R(s) &= u_1(s) \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} + u_2(s) \frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \quad (7)
\end{aligned}$$

Από τις (6) και (7):

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{aligned} V_C(s) &= u_1(s) \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} + u_2(s) \frac{\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \\ V_R(s) &= u_1(s) \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} + u_2(s) \frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \\
&\begin{bmatrix} V_C(s) \\ V_R(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} & \frac{\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \\ \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} & \frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow V(s) = G(s)U(s)$$

Επομένως, για να βρούμε τον πίνακα μεταφοράς θα πρέπει να υπολογίσουμε τις παραμέτρους R, C, L .

Για τον υπολογισμό των παραμέτρων θα εφαρμόσουμε την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων στην σχέση (4):

$$\ddot{V}_C + \frac{1}{RC}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{RC}\dot{u}_1(t) + \frac{1}{RC}\dot{u}_2(t) + \frac{1}{LC}u_2(t)$$

Συγκεντρώνοντας όλες τις παράμετρους σε ένα διάνυσμα θ^* και όλα τα σήματα εισόδου εξόδου σε ένα διάνυσμα Δ , έχουμε

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}^T$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} -\dot{V}_C & -V_C & \dot{u}_1(t) & u_1(t) & \dot{u}_2(t) & u_2 \end{bmatrix}^T$$

Επομένως η (4) γράφεται

$$\ddot{V}_C = \theta^{*T} \Delta \quad (8)$$

Φιλτράρω την (8) με το ευσταθές φίλτρο $\Lambda(s)$:

$$\Lambda(s) = (s + \rho_1)(s + \rho_2) = s^2 + (\rho_1 + \rho_2)s + \rho_1\rho_2 = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2$$

Επιλέγω πόλους $\rho_1 = 110$ και $\rho_2 = 150$. Τότε

$$V_C = \theta_\lambda^T \zeta$$

Όπου

$$\theta_\lambda^T = \begin{bmatrix} \theta_1^{*T} - \lambda^T & \theta_2^{*T} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} - \lambda_1 & \frac{1}{LC} - \lambda_2 & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}^T$$

και

$$\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)}y & \frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)}u_1 & \frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)}u_2 \end{bmatrix}^T =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{[s \ 1]^T}{\Lambda(s)}y & \frac{[s \ 1]^T}{\Lambda(s)}u_1 & \frac{[s \ 1]^T}{\Lambda(s)}u_2 \end{bmatrix}^T =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)}y & -\frac{1}{\Lambda(s)}y & \frac{s}{\Lambda(s)}u_1 & \frac{1}{\Lambda(s)}u_1 & \frac{s}{\Lambda(s)}u_2 & \frac{1}{\Lambda(s)}u_2 \end{bmatrix}^T$$

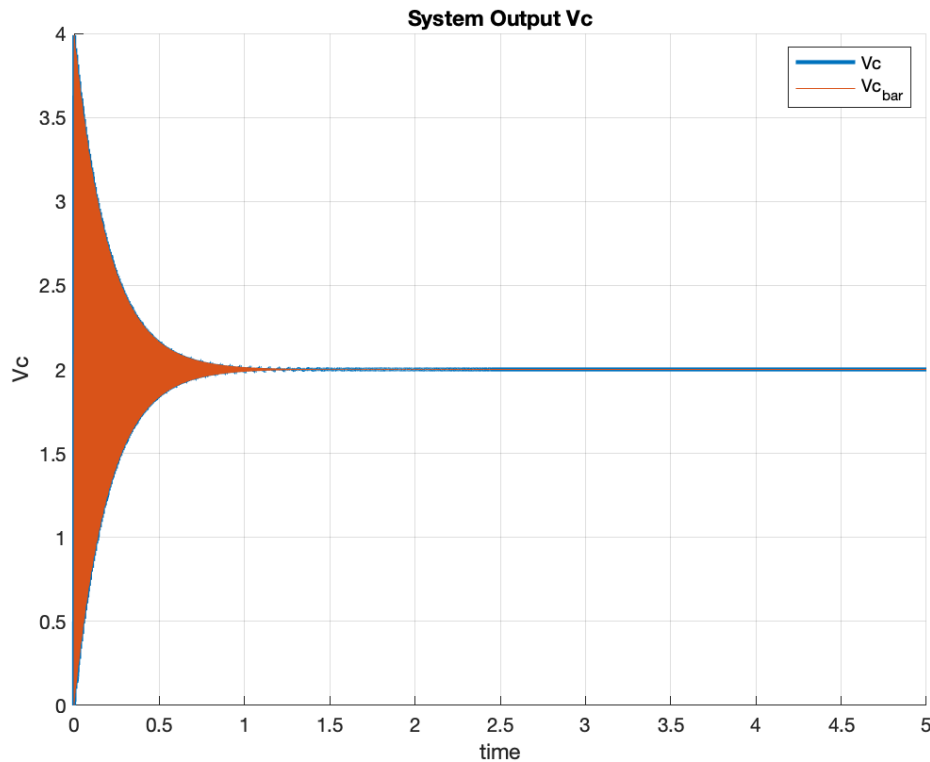
Τρέχουμε τον αλγόριθμο ελαχίστων τετραγώνων για $t = [0, 4]$ και με περίοδο δειγματοληψίας $T = 10^{-4}$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον πίνακα Φ και έπειτα το θ_0 από τον τύπο

$$\theta_0^T \Phi^T \Phi = V_C^T \Phi$$

και έπειτα υπολογίζω το \bar{V}_C ως

$$\bar{V}_C = \theta_0^T \Phi^T$$

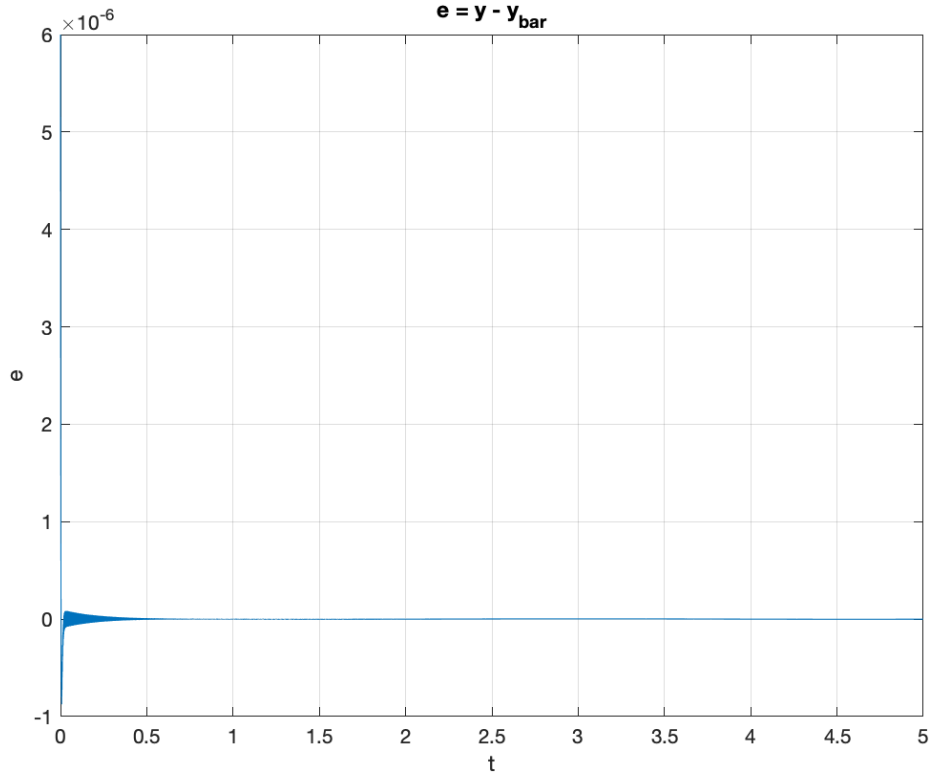
Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων οδηγεί σε μια αρκετά ικανοποιητική προσέγγιση του \bar{V}_C και αυτό είναι εμφανές αν απεικονίσουμε γραφικά την έξοδο V_C και την εκτίμηση \bar{V}_C που υπολογίσαμε: Όπου παρατηρούμε ότι τα δύο δια-



γράμματα συμπίπτουν. Επίσης, το σφάλμα

$$e = V_C - \bar{V}_C$$

είναι αρκετά μικρό αρχικά και μετά από κάποιο χρονικό διάστημα παραμένει σταθερά στο μηδέν.



Τέλος, λύνοντας το σύστημα εξισώσεων

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} - \lambda_1 & \frac{1}{LC} - \lambda_2 & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}^T$$

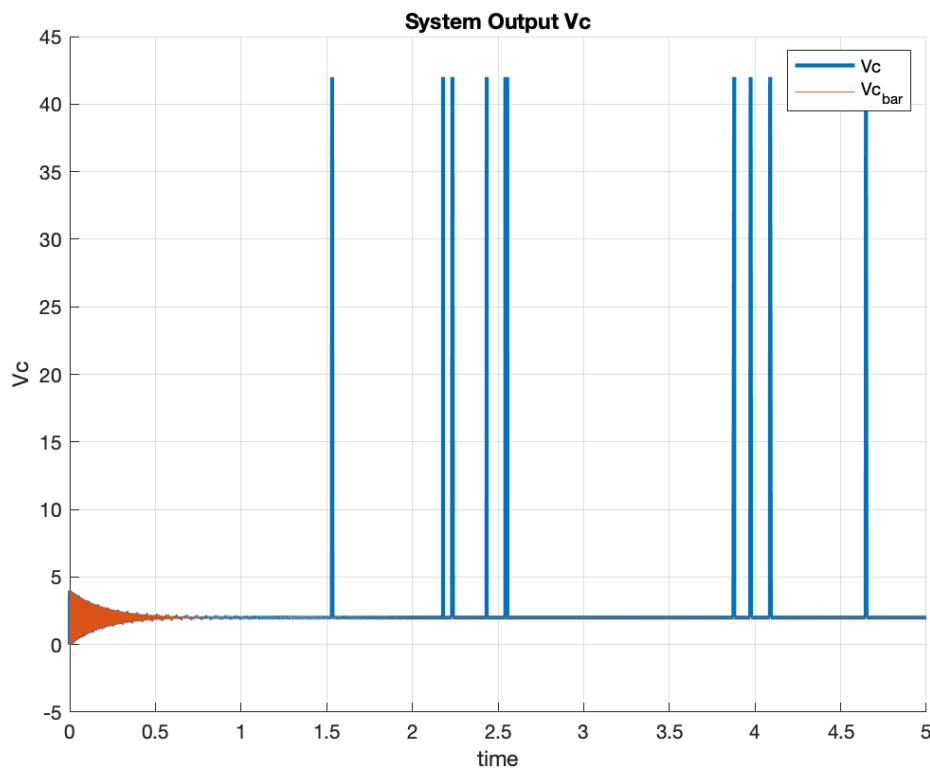
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{RC} - \lambda_1 = \theta_0(1) \\ \frac{1}{LC} - \lambda_2 = \theta_0(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{RC} = 7.983226 \\ \frac{1}{LC} = 10083463.727 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας στην (8) προκύπτει ο πίνακας μεταφοράς.

2.2 Ερώτημα Β

Προκειμένου να προσθέσουμε τυχαία σφάλματα στις μετρήσεις της V_C , αρχικά παράγουμε τυχαία 10 μετρήσεις της V_C στις οποίες θα προσθέσουμε ένα σφάλμα το οποίο ισούται με 20 φορές την πραγματική τιμή της V_C για εκείνη

την μέτρηση. Στη συνέχεια ακολουθούμε την ίδια διαδικασία, δηλαδή υπολογίζουμε τον πίνακα Φ και στη συνέχεια υπολογίζουμε τις παραμέτρους θ_0 και την νέα πρόβλεψη \bar{V}_C . Παρατηρώ ότι το τυχαίο σφάλμα δεν έχει "περάσει" στην εκτίμηση \bar{V}_C και η μέθοδος ελαχίστων εκτίμησε το μοντέλο "κόβοντας" τα σφάλματα του αρχικού μοντέλου. Αυτό είναι εμφανές από την γραφική απεικόνιση του V_C και του \bar{V}_C , καθώς οι απότομες κορυφές που αποδίδονται στα σφάλματα εμφανίζονται μόνο για το V_C και όχι για το \bar{V}_C .



Αυτό είναι εμφανές και παρατηρώντας το σφάλμα $e = V_C - \bar{V}_C$, όπου βλέπουμε απότομες κορυφές τις χρονικές στιγμές στις οποίες το V_C λαμβάνεται με σφάλμα, που σημαίνει μεγάλη διαφορά στις τιμές του V_C και \bar{V}_C για εκείνες τις χρονικές στιγμές.

