Τεχνικές Βελτιστοποίησης

1η Εργαστηριακή Άσκηση- Ελαχιστοποίηση κυρτής συνάρτησης μιας μεταβλητής σε δοσμένο διάστημα

Ονοματεπώνυμο: Χριστίνα Κούτση
ΑΕΜ: 9871
email: cvkoutsi@ece.auth.gr

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία έχει σκοπό την υλοποίηση τεσσάρων αλγορίθμων εύρεσης ελαχίστου και την εφαρμογή των αλγορίθμων αυτών σε τρεις συναρτήσεις.

Για τον κάθε αλγόριθμο υπάρχει ένας φάκελος με το όνομα της μεθόδου, ο οποίος περιέχει τον κώδικα υλοποίησης του αλγορίθμου στο matlab και γραφικές παραστάσεις που αντιστοιχούν στον κάθε αλγόριθμο.

Μέσα στο αρχείο κώδικα κάθε μεθόδου υπάρχει η συνάρτηση f(a,i) η οποία αποτελεί υλοποίηση των τριών συναρτήσεων υπό μελέτη. Δέχεται δύο μεταβλητές a και i και επιστρέφει την τιμή της i- οστής συνάρτησης στο σημείο α.

Θέμα 1-Μέθοδος της διχοτόμου

Στο θέμα 1 μας ζητάται να εκτιμήσουμε τα ελάχιστα τριών συναρτήσεων με την μέθοδο της διχοτόμου, αρχικά για σταθερό l και μεταβλητό e και στη συνέχεια για σταθερό e και μεταβλητό l.

Το θέμα αυτό έχει δύο ζητούμενα:
i)Την εκτίμηση του ελαχίστου με μεταβλητό e (αρχείο exe1_1.m)
ii) Την εκτίμηση του ελαχίστου με μεταβλητό l (αρχείο exe1_2.m)

i)Αρχείο κώδικα exe1_1.m
Ορίζουμε ένα διάστημα τιμών για το e και θέτουμε l = 0.01. Λαμβάνουμε υπόψη τον περιορισμό l>2e, δηλαδή θα πρέπει e < 0.005, επομένως παίρνουμε διάστημα τιμών για το e: [0.0001,0.0045]. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της διχοτόμου, όπως περιγράφεται στο βιβλίο, υπολογίζουμε για κάθε συνάρτηση

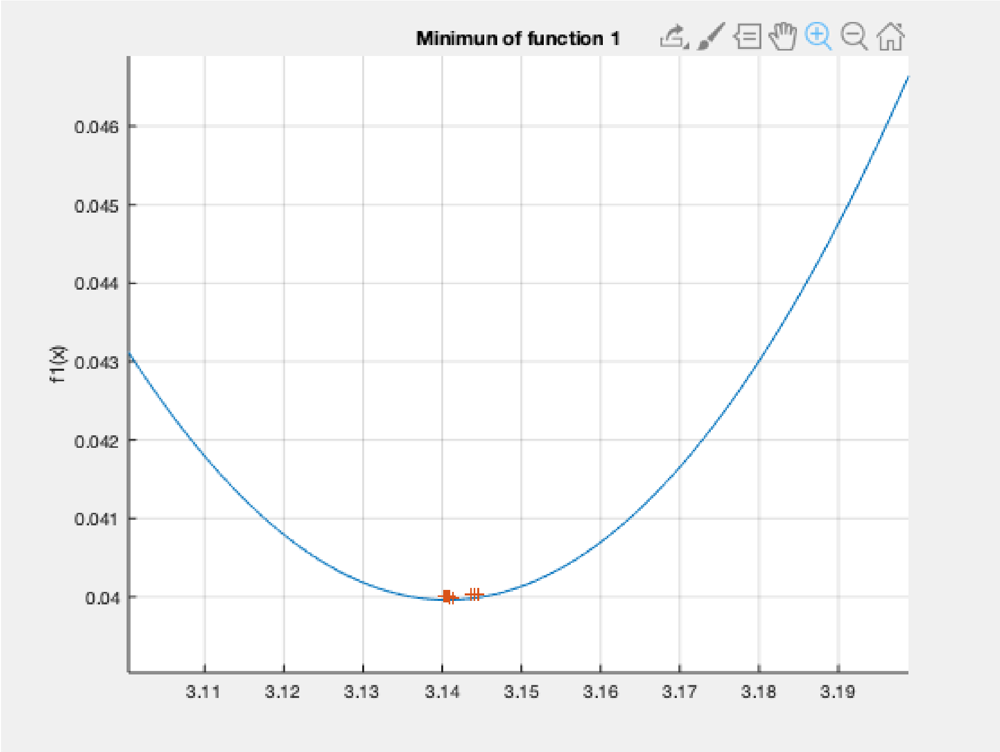
1) την εκτίμηση του f(x*)
2) την εκτίμηση του x* για μεταβλητό e
3) τον αριθμό των επαναλήψεων k που χρειάστηκαν μέχρι να ικανοποιηθεί η συνθήκη τερματισμού (b - a) >= l

Τέλος, τους υπολογισμούς που κάναμε για την κάθε συνάρτηση τους αναπαριστούμε γραφικά με τη βοήθεια του matlab.
Συγκεκριμένα για κάθε συνάρτηση, έχουμε

Για την f1:

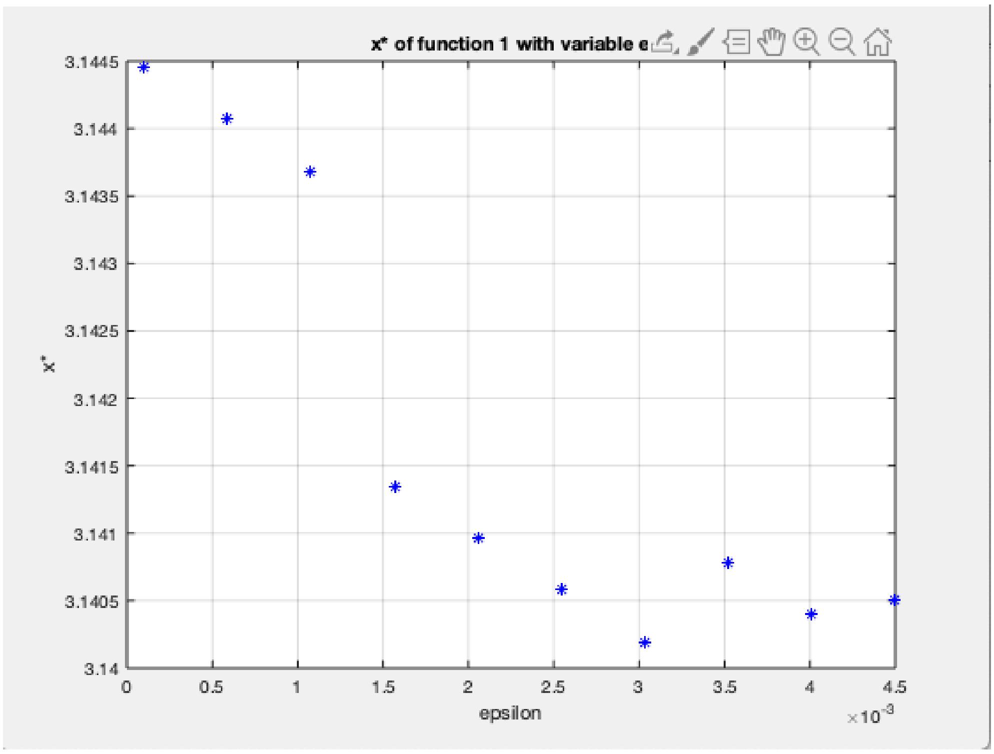
1)Εκτίμηση f(x*)

Παρατηρώ ότι για κάθε e έχω ελάχιστα διαφορετικό f(x*). Συγκεκριμένα, για τις διάφορες τιμές του e το f(x*) παίρνει τιμές στο διάστημα [0.039987, 0.040028]

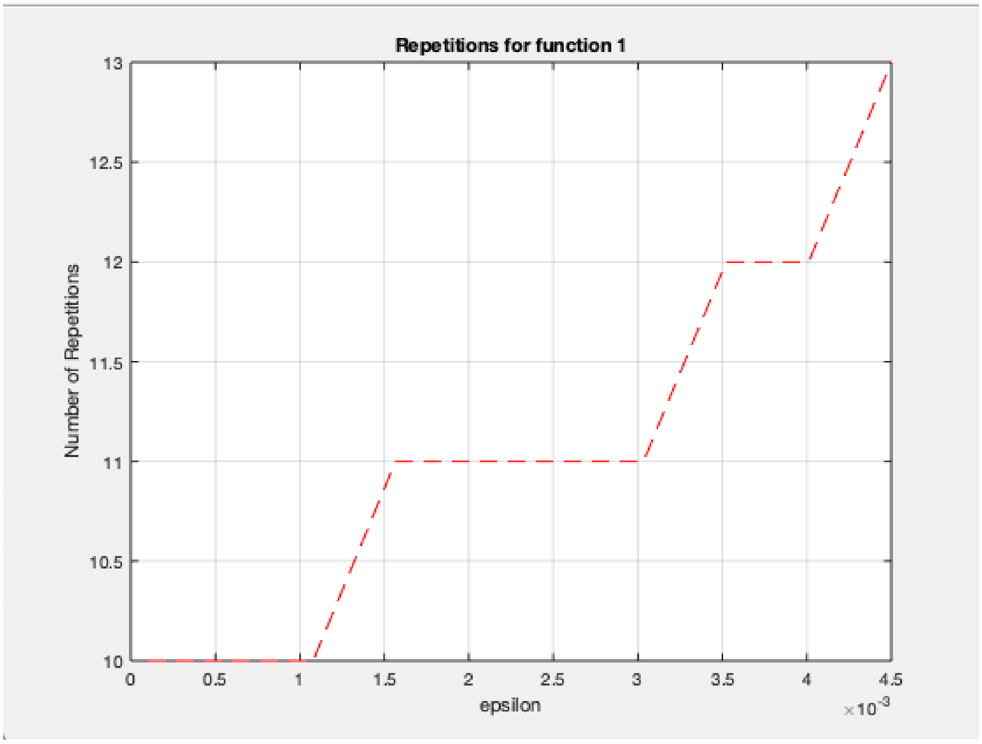


2)Εκτίμηση του x* για μεταβλητό e

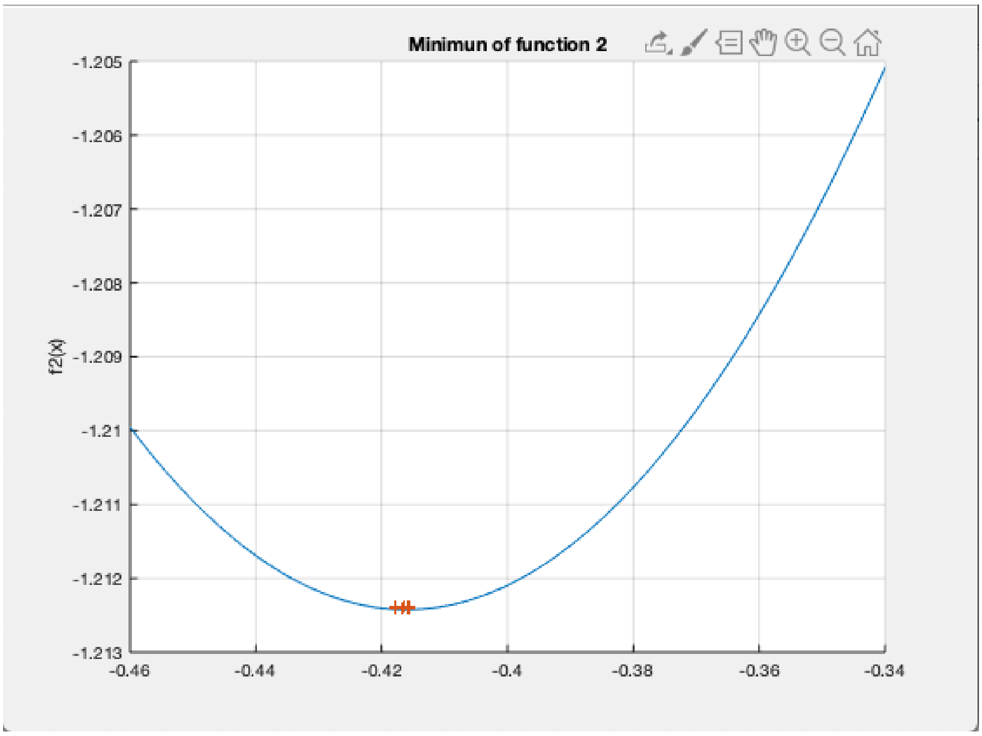
Παρατηρώ ότι για κάθε e έχω διαφορετικό x*. Συγκεκριμένα, για τις διάφορες τιμές του e το x* παίρνει τιμές στο διάστημα [3.1402, 3.1445]



3)Αριθμός επαναλήψεων k για μεταβλητό e
Ο αριθμός των επαναλήψεων αυξάνεται για μεγαλύτερες τιμές του e.

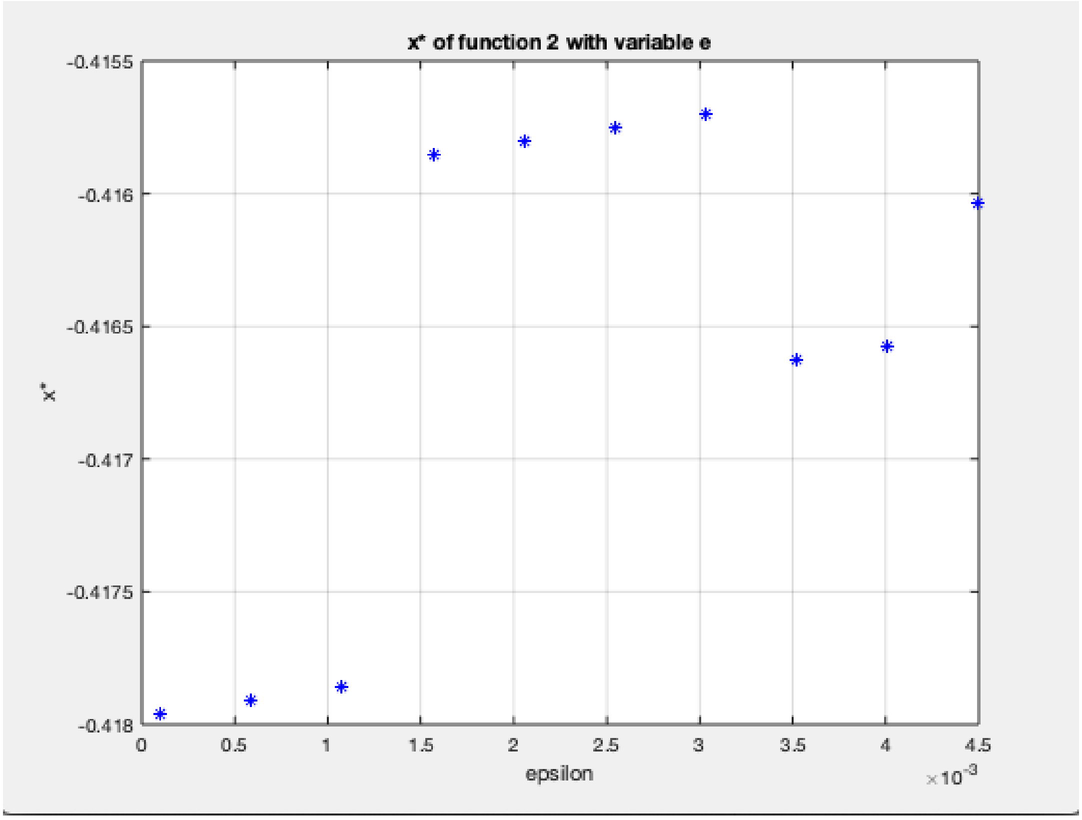


Για την f2:
1)Εκτίμηση f(x*)
Παρατηρώ ότι για κάθε e έχω ελάχιστα διαφορετικό f(x*). Συγκεκριμένα, για τις διάφορες τιμές του e το f(x*) παίρνει τιμές στο διάστημα [-1.21238, -1.2124]

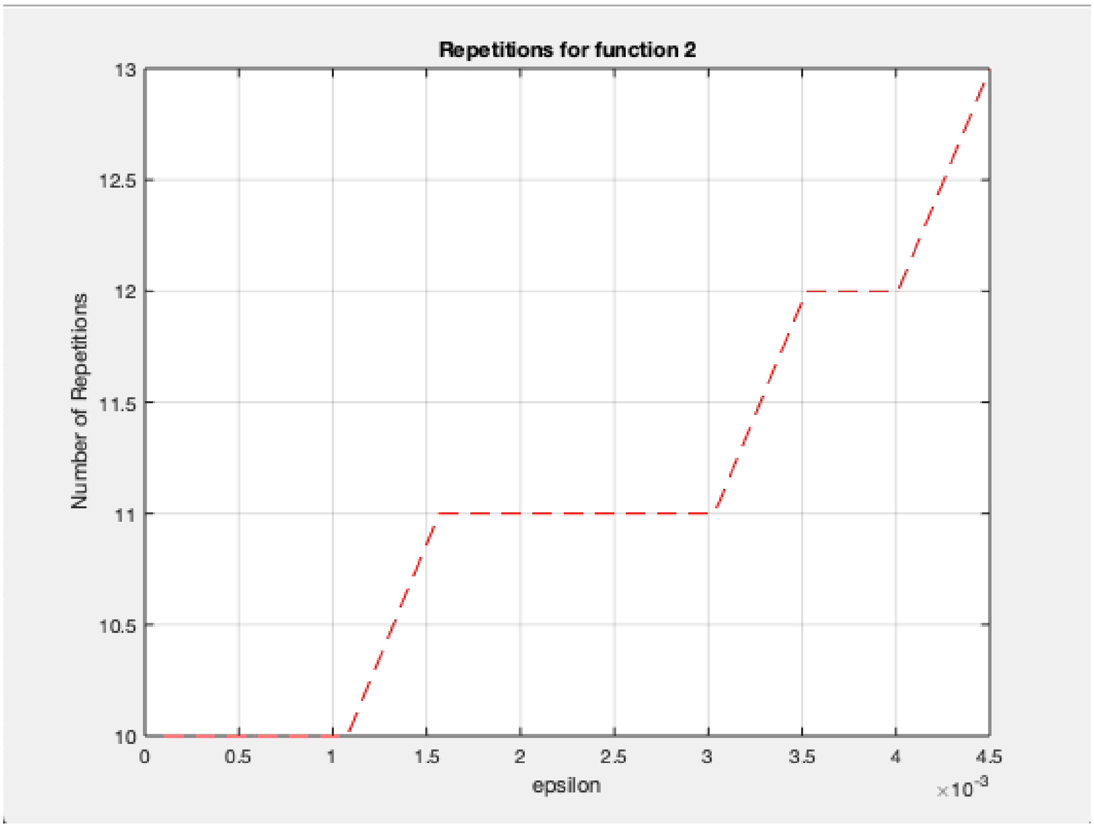


2)Εκτίμηση του x* για μεταβλητό e

Παρατηρώ ότι για κάθε e έχω διαφορετικό x*. Συγκεκριμένα, για τις διάφορες τιμές του e το x* παίρνει τιμές στο διάστημα [-0.41796, -0.4157]



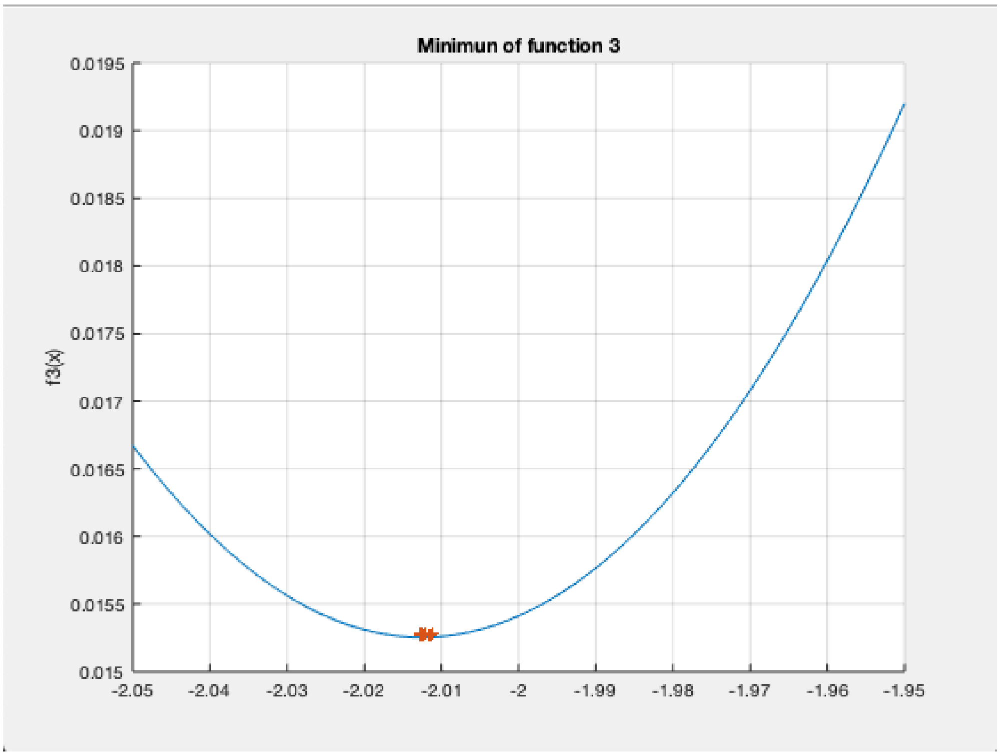
3)Αριθμός επαναλήψεων k για μεταβλητό e



Για την f3:

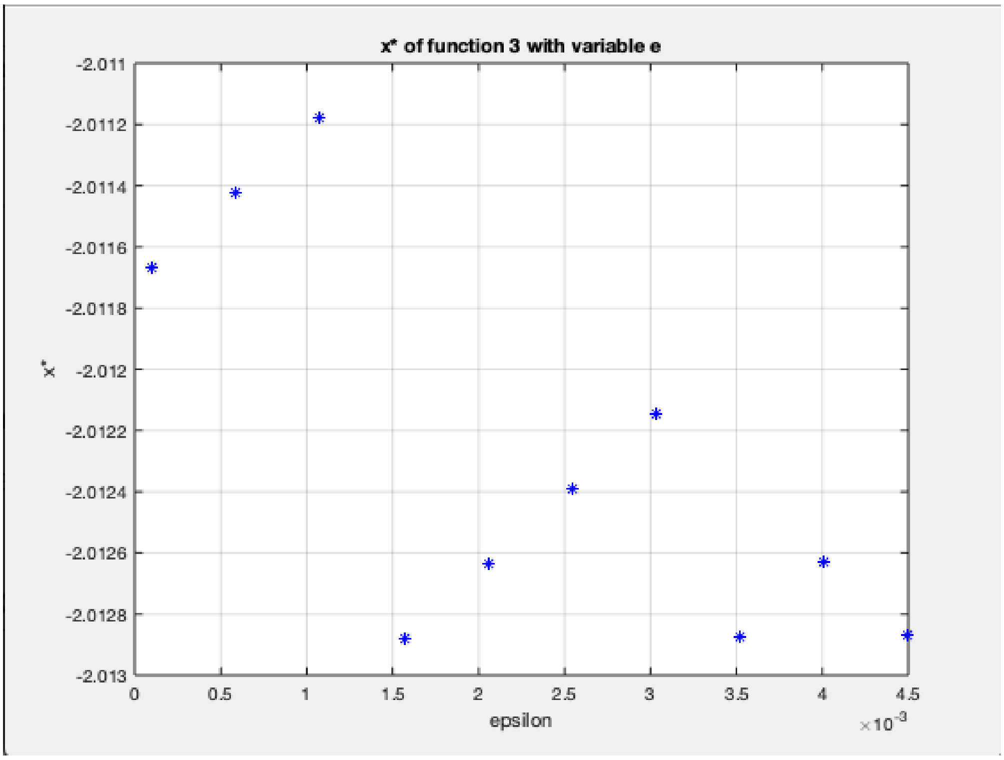
1)Εκτίμηση f(x*)

Παρατηρώ ότι για κάθε e έχω ελάχιστα διαφορετικό f(x*). Συγκεκριμένα, για τις διάφορες τιμές του e το f(x*) παίρνει τιμές στο διάστημα [0.015266, 0.01528]

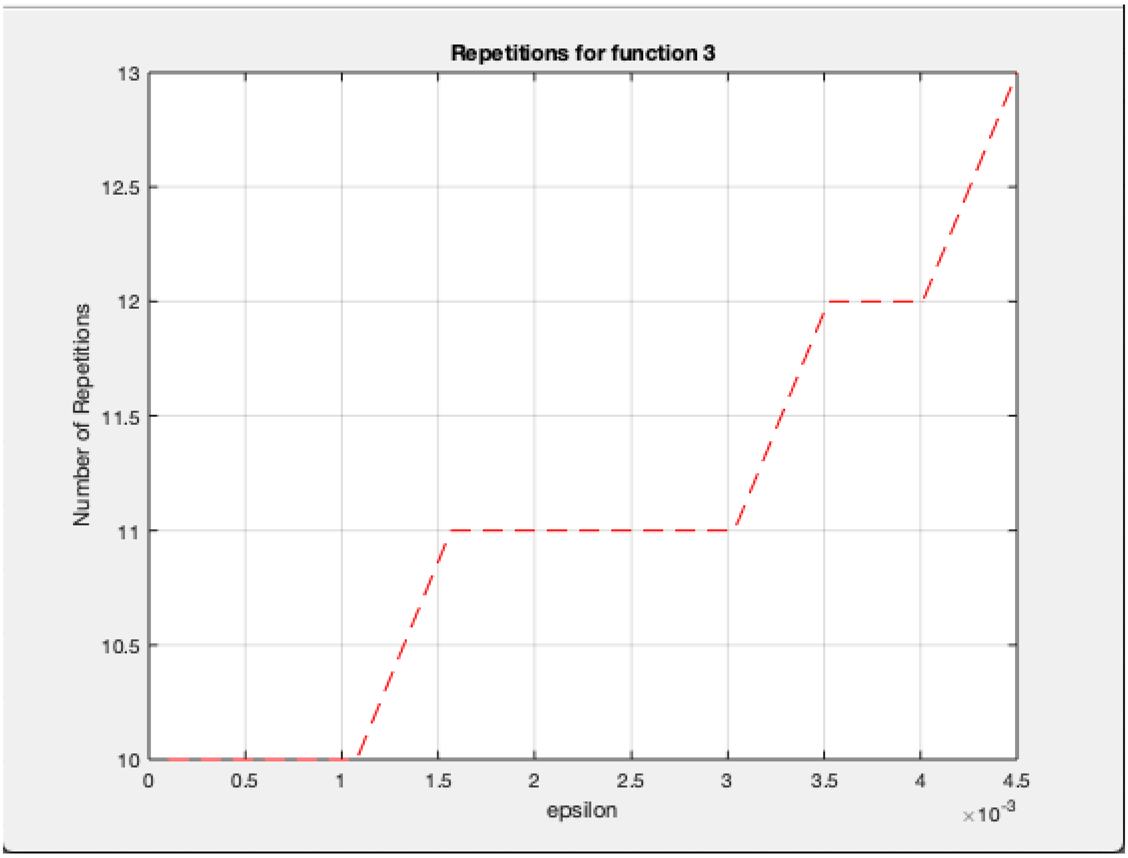


2)Εκτίμηση του x* για μεταβλητό e

Παρατηρώ ότι για κάθε e έχω διαφορετικό x*. Συγκεκριμένα, για τις διάφορες τιμές του e το x* παίρνει τιμές στο διάστημα [-2.0129, -2.0112]



3)Αριθμός επαναλήψεων k για μεταβλητό e



ii) Αρχείο κώδικα exe1_2.m

Ορίζουμε ένα διάστημα τιμών για το l και θέτουμε e = 0.001. Λαμβάνουμε υπόψη τον περιορισμό l>2e, δηλαδή θα πρέπει l > 0.002, επομένως παίρνουμε διάστημα τιμών για το l: [0.0025,0.01]. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της διχοτόμου, όπως περιγράφεται στο βιβλίο, υπολογίζουμε για κάθε συνάρτηση

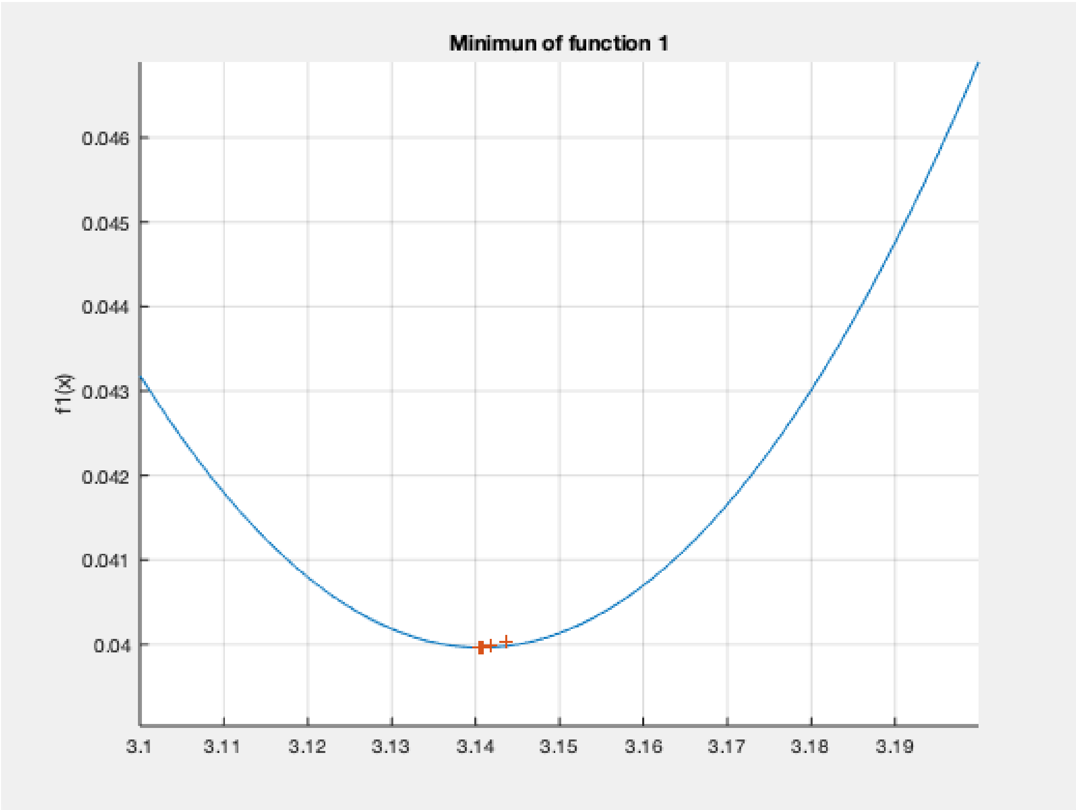
1) την εκτίμηση του f(x*)
2) την εκτίμηση του x* για μεταβλητό e
3) τον αριθμό των επαναλήψεων k που χρειάστηκαν μέχρι να ικανοποιηθεί η συνθήκη τερματισμού (b - a) < l για μεταβλητό l
4) τα διαστήματα [ak, bk] τα οποία αλλάζουν σε κάθε επανάληψη.

Εδώ να αναφέρουμε ότι η αποθήκευση των ak και bk έγινε δυναμικά στα διανύσματα lowerLimit και upperLimit αντίστοιχα, καθώς το μέγεθος των διανυσμάτων αυτών δεν είναι προκαθορισμένος και αλλάζει για διαφορετική τιμή του l.

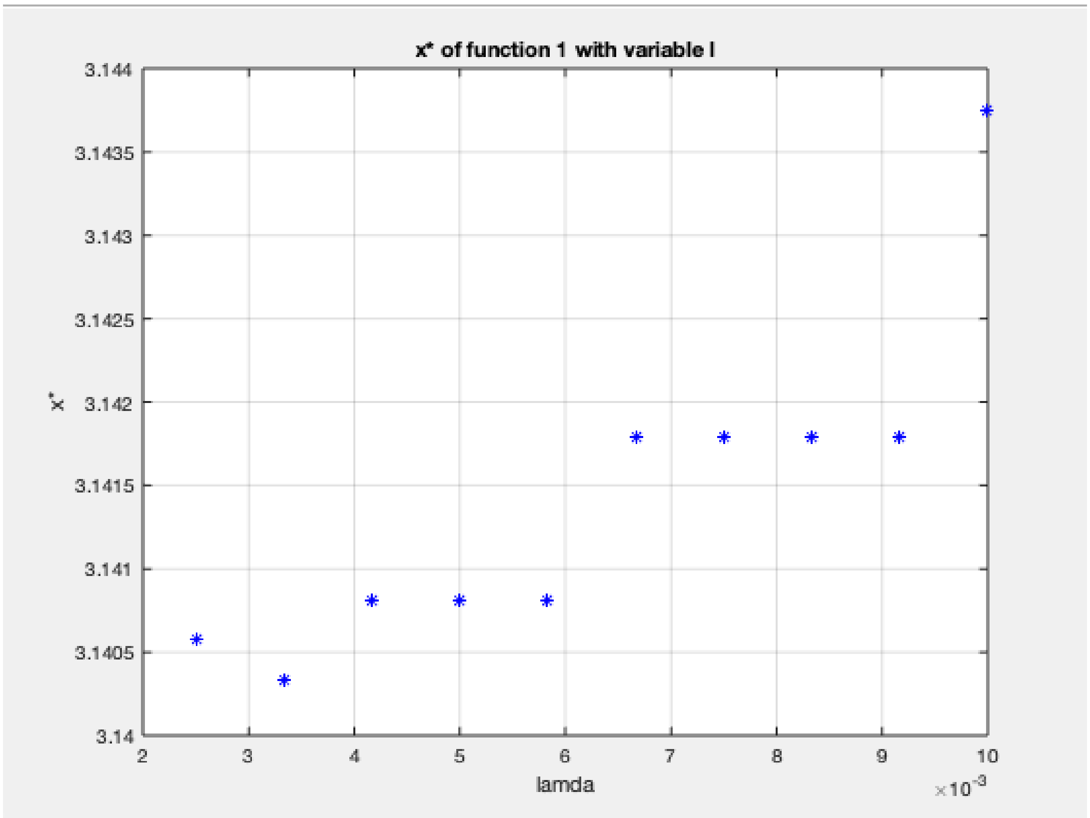
Στο εξής θα παρουσιαστούν τα γραφήματα της συνάρτησης 1. Τα γραφήματα για τις συναρτήσεις 2 και 3 μπορούν να βρεθούν στον φάκελο της κάθε μεθόδου.

Για την f1:

1)Εκτίμηση f(x*)

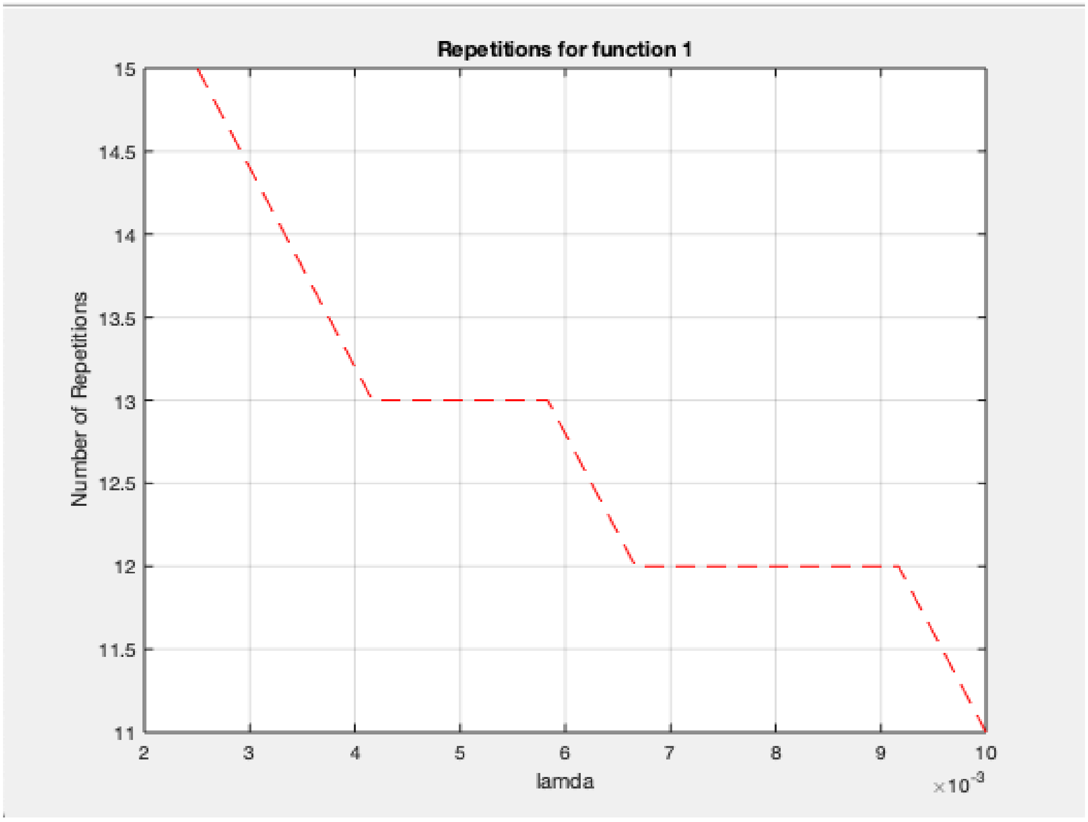


2)Εκτίμηση του x* για μεταβλητό l



3)Αριθμός επαναλήψεων k για μεταβλητό l

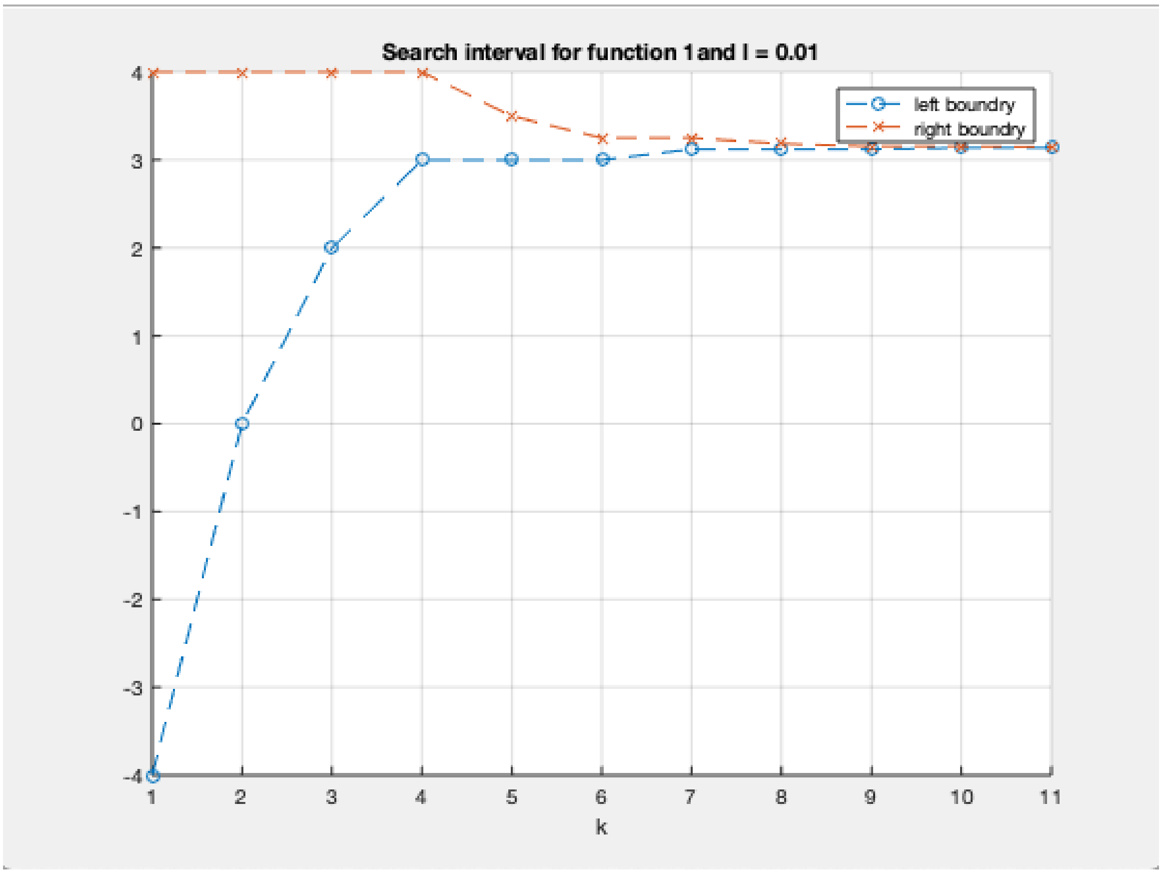
Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των επαναλήψεων μειώνεται όσο το l αυξάνεται, καθώς για μεγαλύτερα l η συνθήκη τερματισμού ικανοποιείται πιο γρήγορα

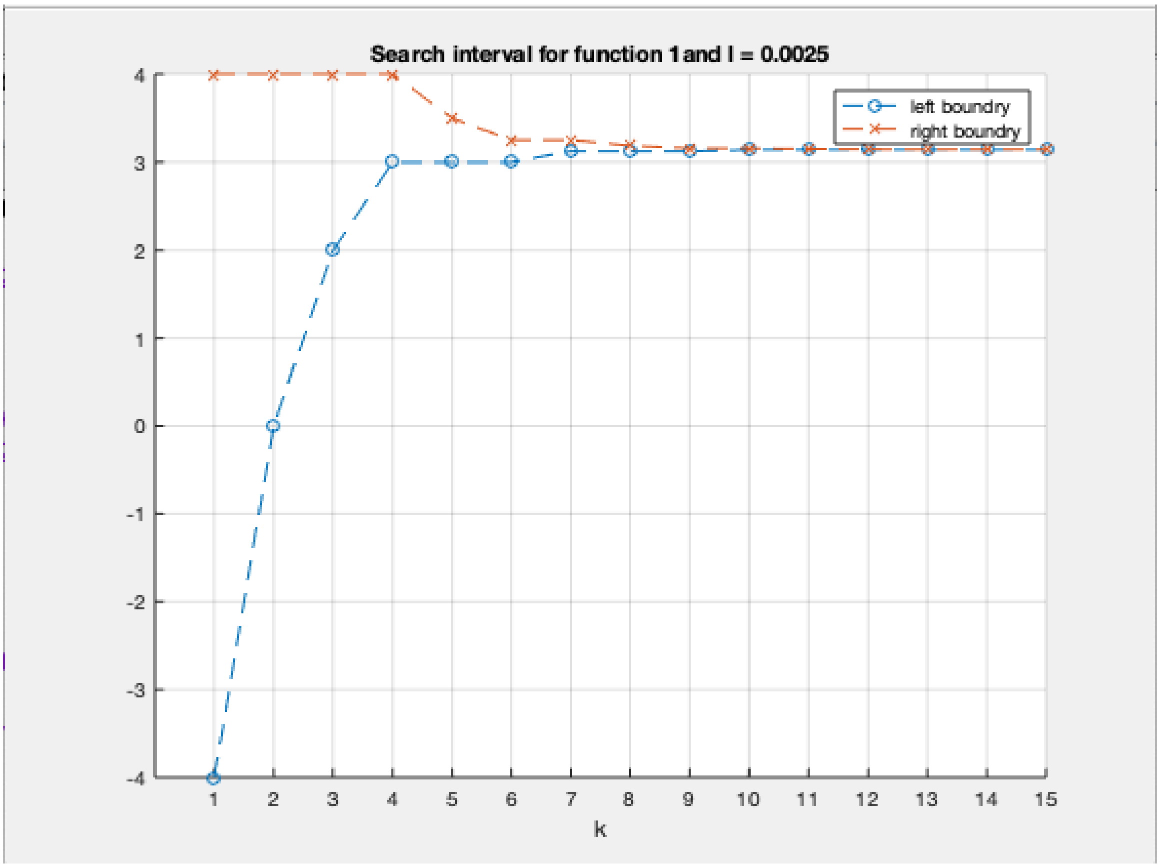


4)Διαστήματα [ak, bk] για l = 0.01 και l = 0.0025

Παρατηρούμε ότι αρχικά τα άκρα του διαστήματος είναι ακριβώς τα ίδια. Για μεγαλύτερα όμως l η συνθήκη τερματισμού ικανοποιείται πιο γρήγορα, όπως είδαμε και παραπάνω, οπότε ο αλγόριθμος τερματίζει.

Το διάστημα ακριβείας για l = 0.01 ικανοποιείται στην 11η επανάληψη, ενώ για l = 0.0023 στην 15η.


Search interval for function 1 and l = 0.01
left boundry
right boundry
k


Search interval for function 1 and l = 0.0025
left boundry
right boundry
k

Θέμα 2- Μέθοδος του χρυσού τομέα

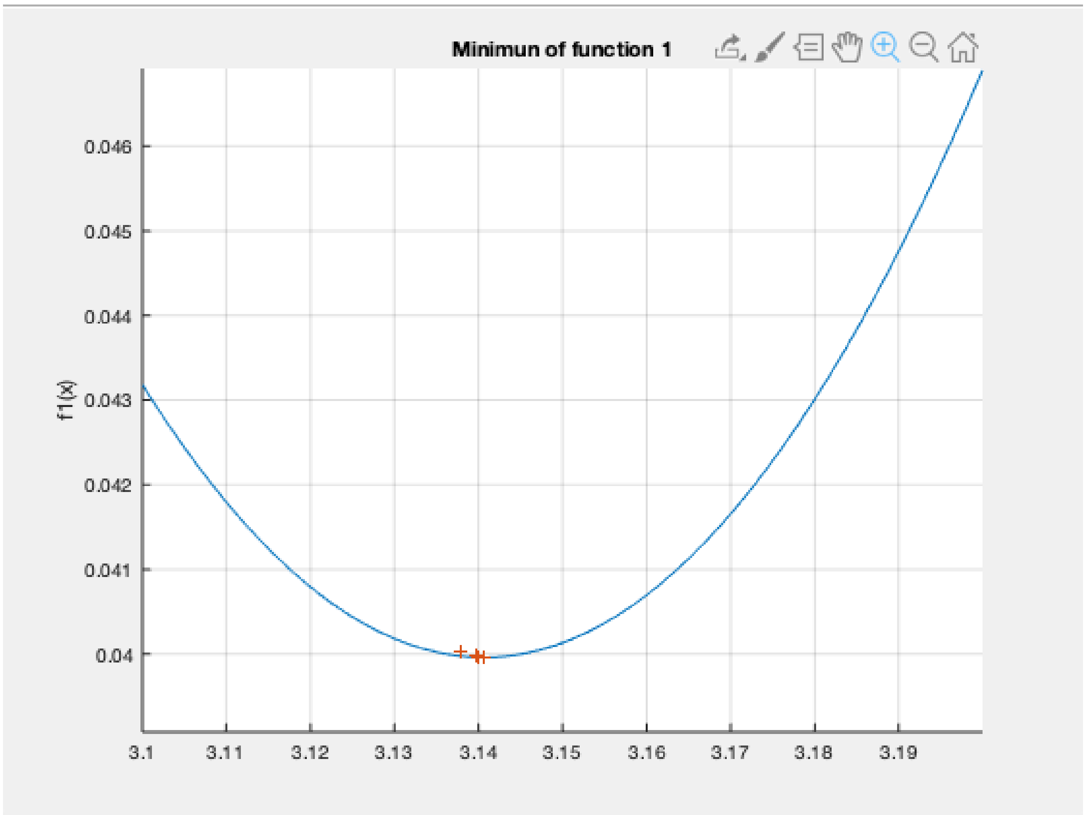
Στο θέμα 2 μας ζητάται να εκτιμήσουμε τα ελάχιστα τριών συναρτήσεων με την μέθοδο του χρυσού τομέα για σταθερό e και μεταβλητό l.
Παίρνουμε και πάλι το ίδιο διάστημα τιμών για το l: [0.0025,0.01] και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την μέθοδο του χρυσού τομέα όπως περιγράφεται στο βιβλίο, υπολογίζουμε για κάθε συνάρτηση

1)την εκτίμηση του f(x*)
2)την εκτίμηση του x* για μεταβλητό e
3)τον αριθμό των επαναλήψεων k που χρειάστηκαν μέχρι να ικανοποιηθεί η συνθήκη τερματισμού (b - a) < l για μεταβλητό l
4)τα διαστήματα [ak, bk] τα οποία αλλάζουν σε κάθε επανάληψη.

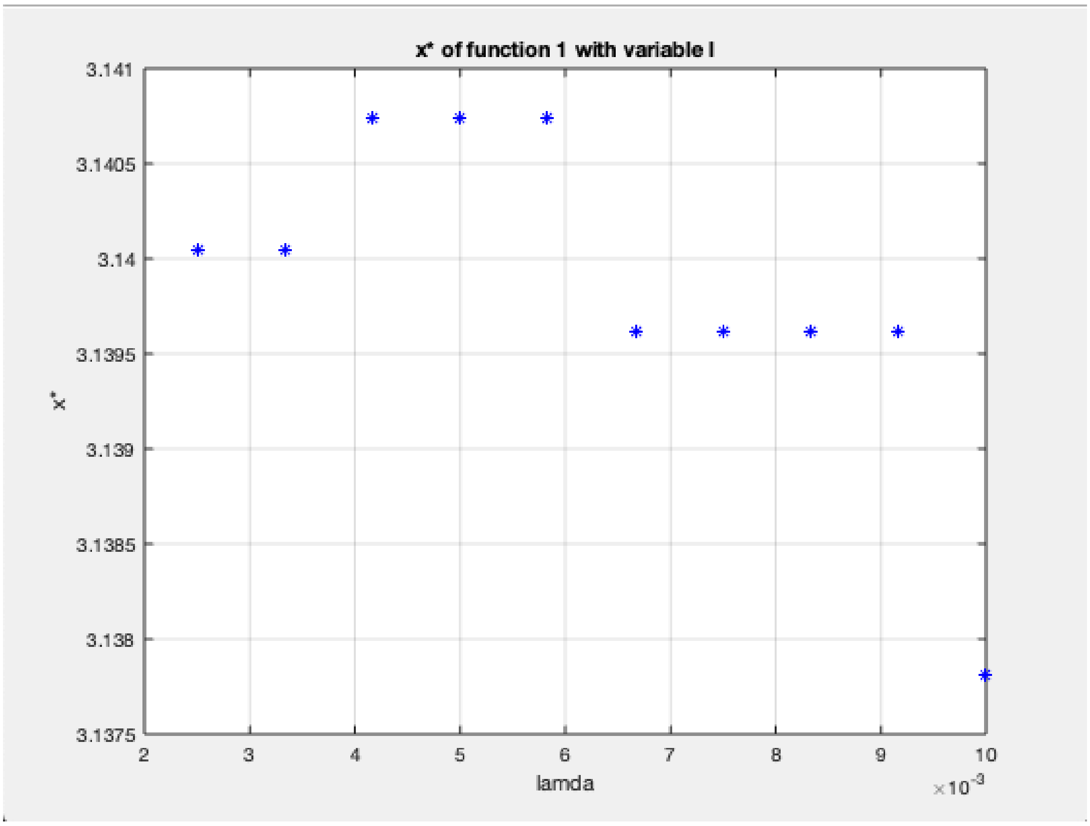
Η αποθήκευση των ak και bk έγινε και πάλι δυναμικά στα διανύσματα lowerLimit και upperLimit αντίστοιχα.

Για την f1:

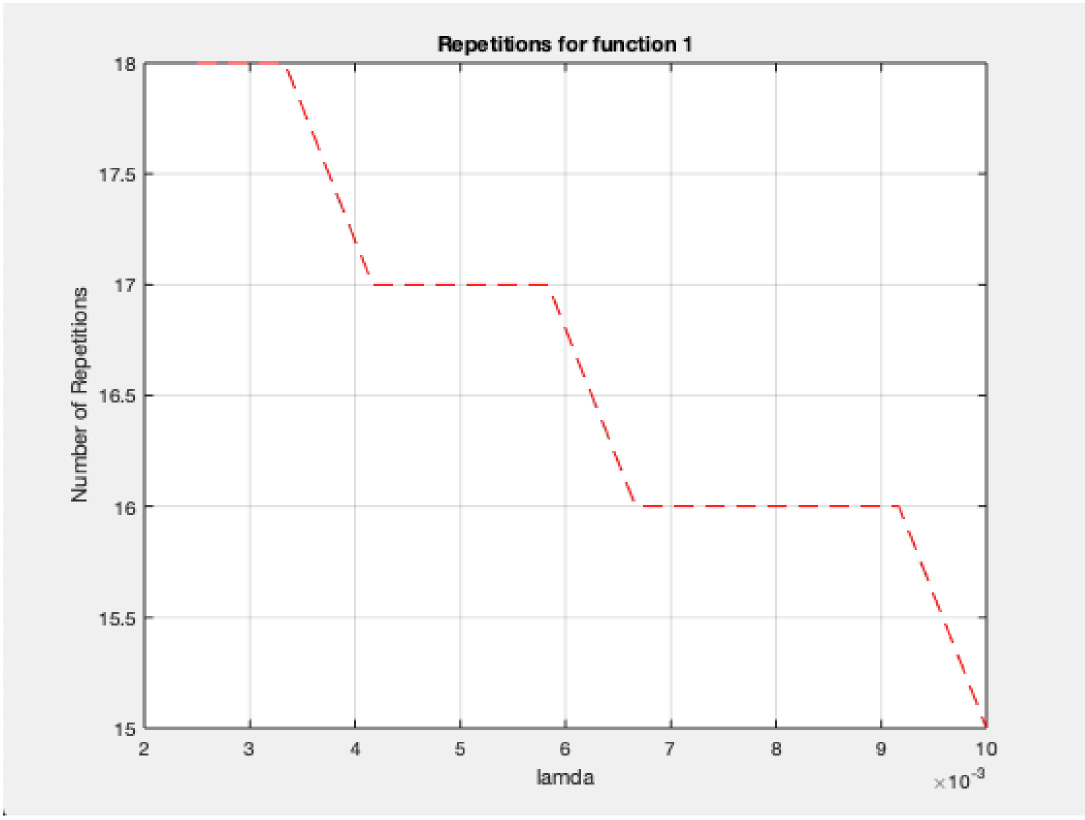
1)Εκτίμηση f(x*)



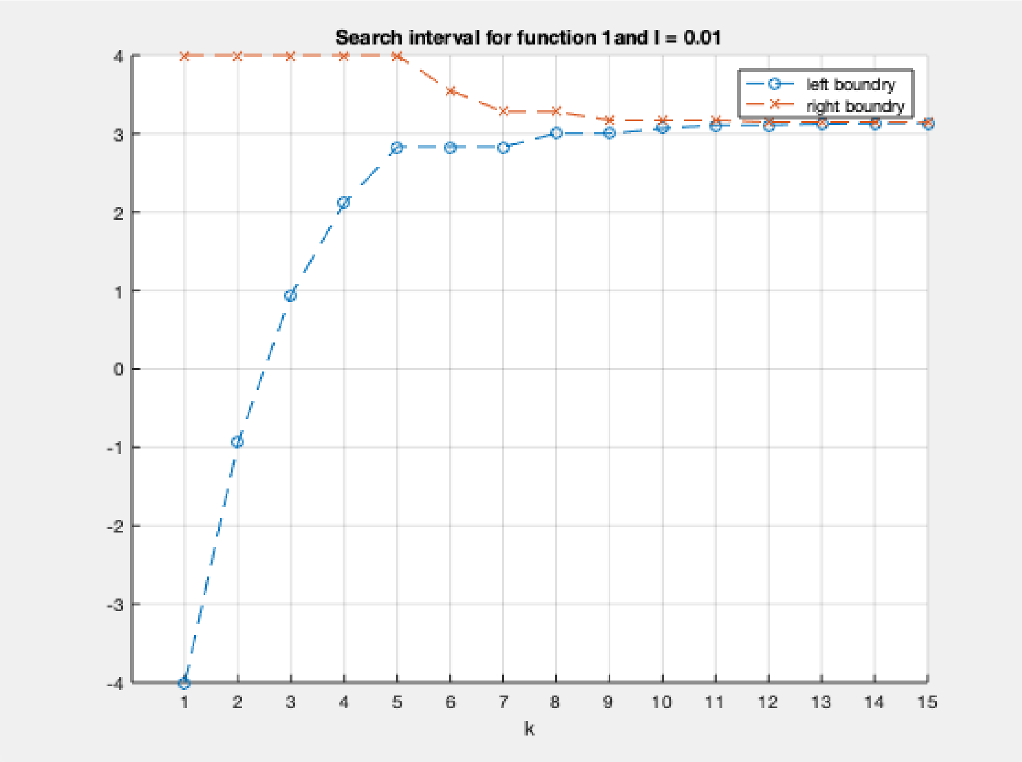
2)Εκτίμηση του x* για μεταβλητό e

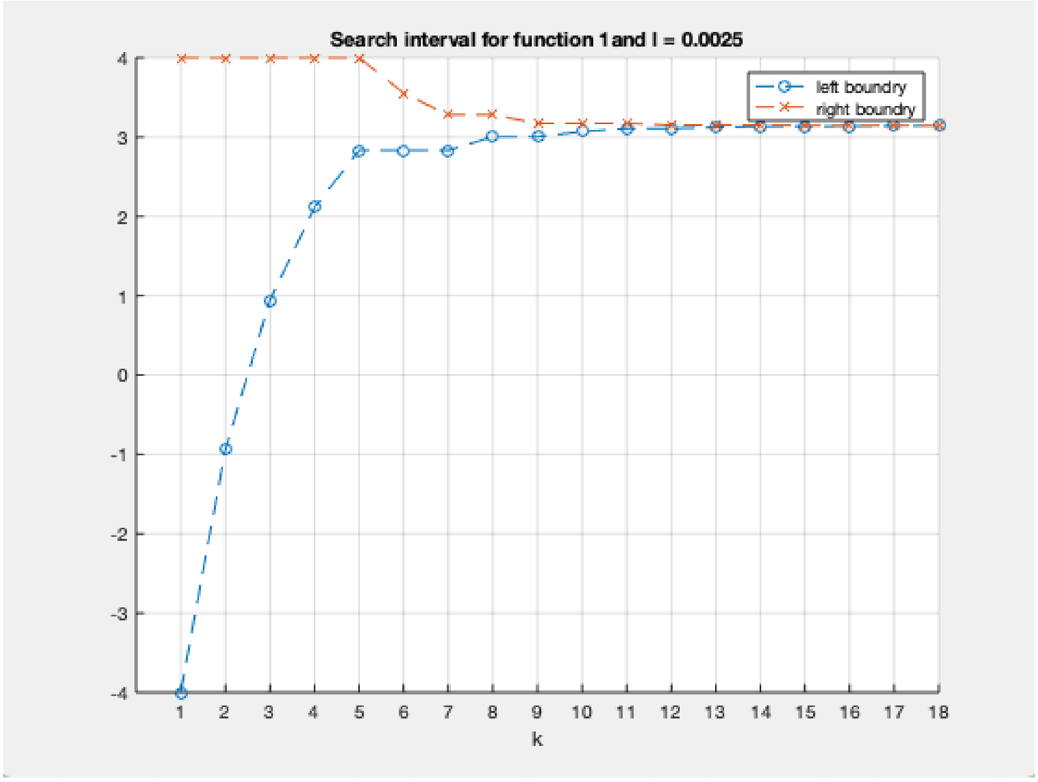


3)Αριθμός επαναλήψεων k για μεταβλητό l



4)Διαστήματα [ak, bk] για l = 0.01 και l = 0.0025





<u>Παρατήρηση</u>: Όπως γνωρίζουμε και απ' την θεωρία, σε κάθε επανάληψη έχουμε μόνο μία κλήση της συνάρτησης f. Επομένως, παρόλο που οι επαναλήψεις είναι περισσότερες από την μέθοδο της διχοτόμου, οι πράξεις που απαιτούνται είναι λιγότερες.

<u>Θέμα 3- Μέθοδος Fibonacci</u>

Στο θέμα 3 μας ζητάται να εκτιμήσουμε τα ελάχιστα τριών συναρτήσεων με την μέθοδο Fibonacci για σταθερό e και μεταβλητό l.
Παίρνουμε και πάλι το ίδιο διάστημα τιμών για το l: [0.0025,0.01] και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την μέθοδο Fibonacci όπως περιγράφεται στο βιβλίο, υπολογίζουμε για κάθε συνάρτηση

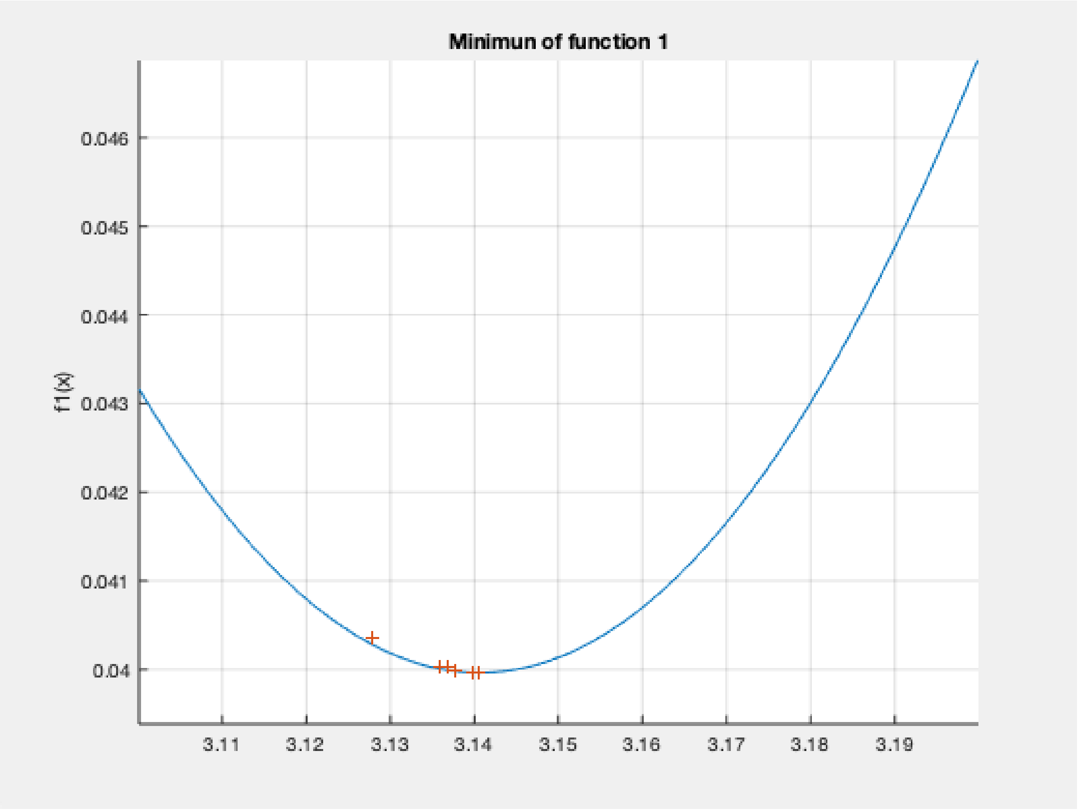
1)την εκτίμηση του f(x*)
2)την εκτίμηση του x* για μεταβλητό e
3)τον αριθμό των επαναλήψεων k που χρειάστηκαν μέχρι να ικανοποιηθεί η συνθήκη τερματισμού (b - a) < l για μεταβλητό l
4)τα διαστήματα [ak, bk] τα οποία αλλάζουν σε κάθε επανάληψη.

Η αποθήκευση των ak και bk έγινε και πάλι δυναμικά στα διανύσματα lowerLimit και upperLimit αντίστοιχα.

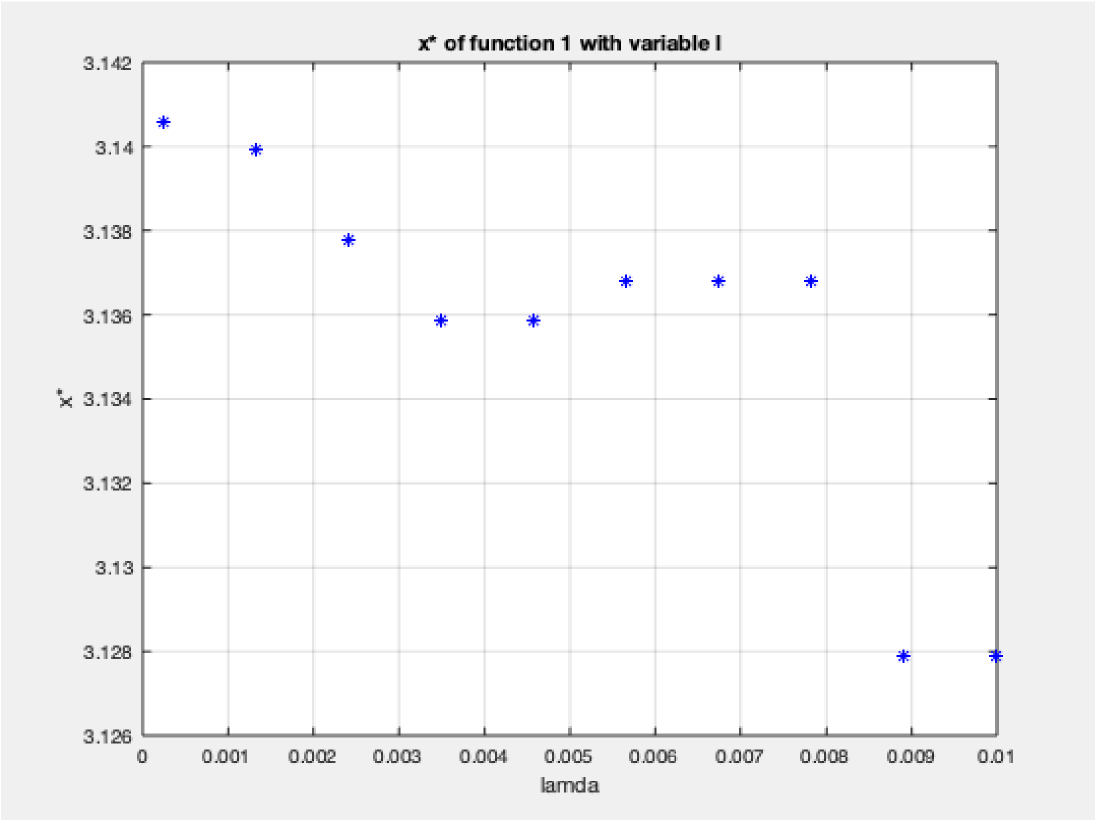
Στη μέθοδο αυτή χρησιμοποιήθηκε και η συνάρτηση find_n.m η οποία βρίσκει το κατάλληλο n ώστε να ισχύει ((b - a) / l) > fibonacci(n+1)

Για την f1:

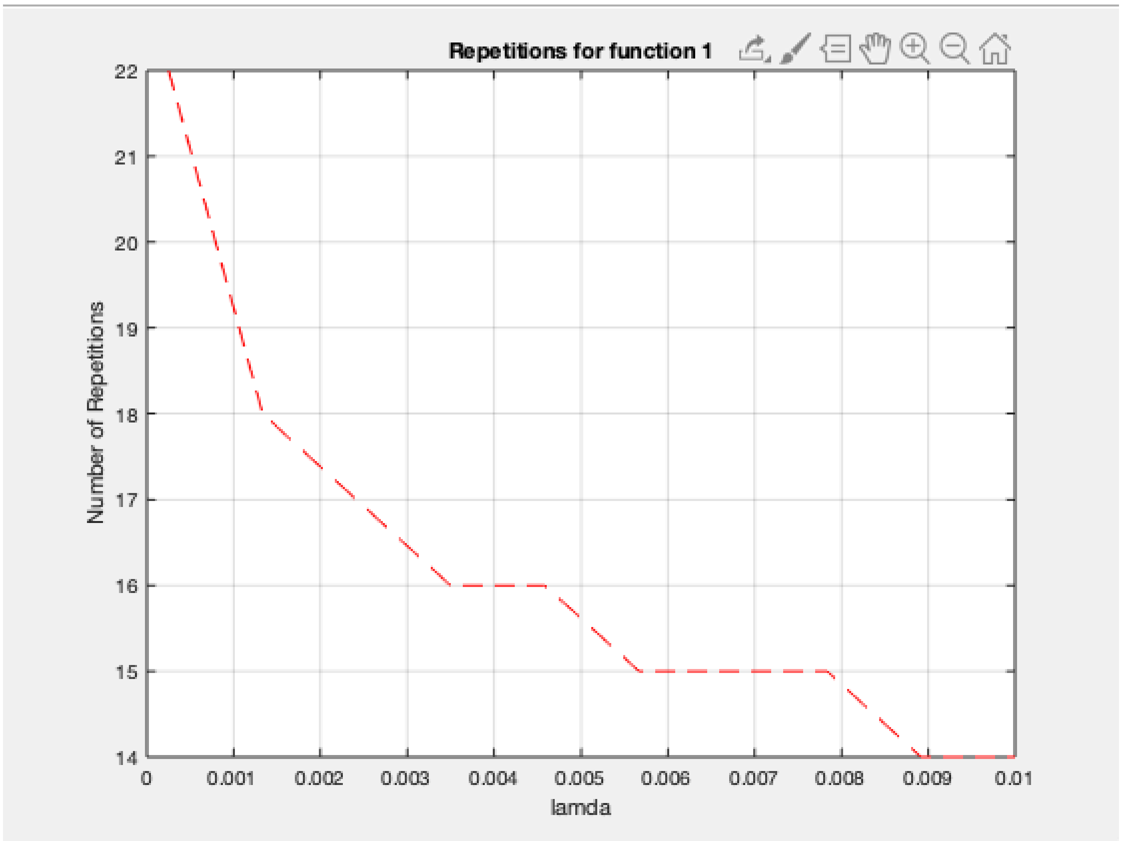
1)Εκτίμηση f(x*)



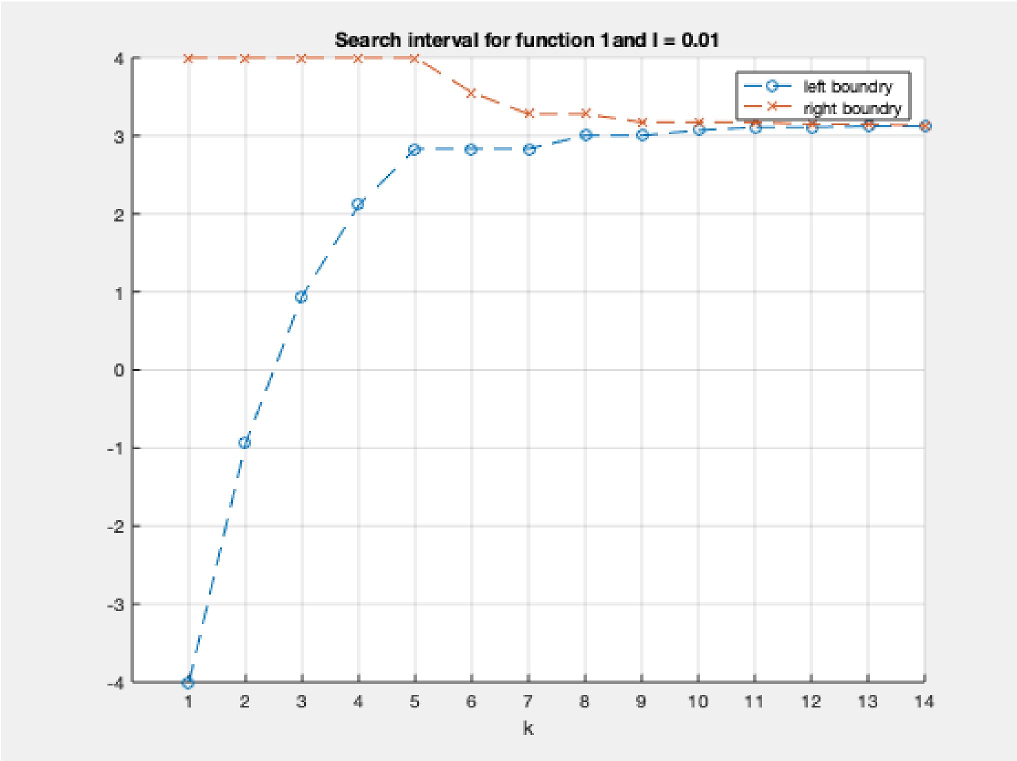
2)Εκτίμηση του x* για μεταβλητό e

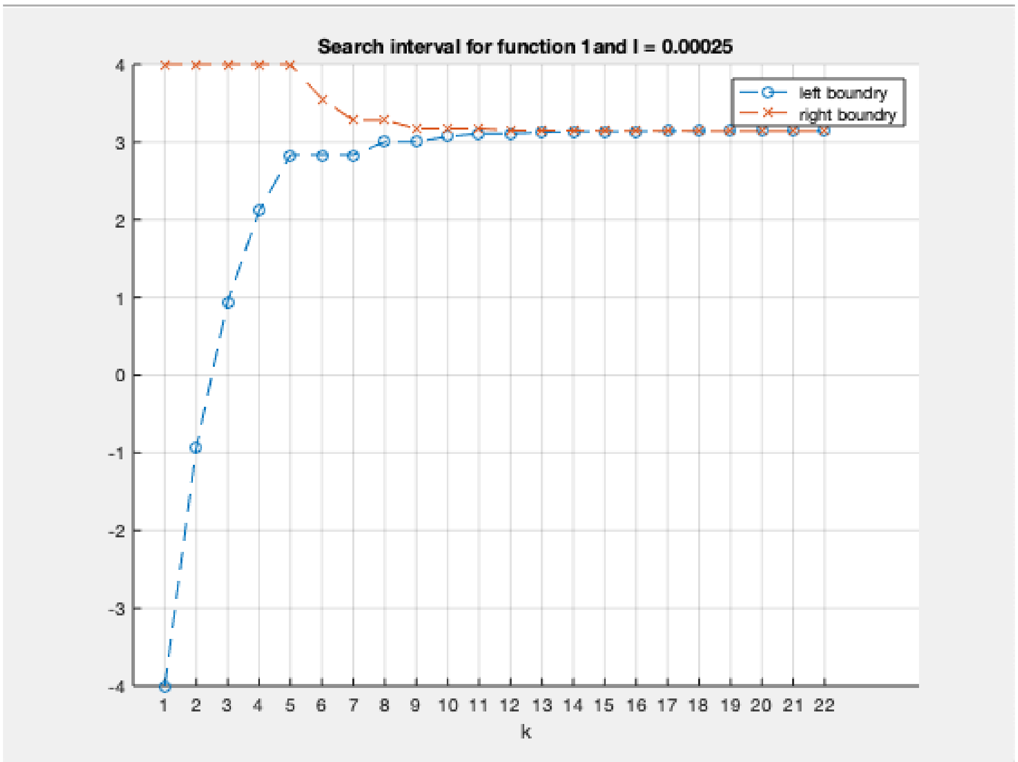


3)Αριθμός επαναλήψεων k για μεταβλητό l



4)Διαστήματα [ak, bk] για l = 0.01 και l = 0.0025





Και εδώ βλέπουμε, όπως σε όλες τις προηγούμενες μεθόδους, πως μέχρι να πιάσουμε το επιθυμητό διάστημα εμπιστοσύνης, τα άκρα για τις τρεις τιμές του l ταυτίζονται.

<u>Παρατήρηση</u>: Και με αυτή τη μέθοδο σε κάθε επανάληψη έχουμε μόνο μία κλήση της συνάρτησης f.

Θέμα 4- Μέθοδος της διχοτόμου με χρήση παραγώγων

Στο θέμα 4 μας ζητάται να εκτιμήσουμε τα ελάχιστα τριών συναρτήσεων με την μέθοδο της διχοτόμου με χρήση παραγώγων για σταθερό e και μεταβλητό l. Παίρνουμε και πάλι το ίδιο διάστημα τιμών για το l: [0.0025,0.01] και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της διχοτόμου με χρήση παραγώγων όπως περιγράφεται στο βιβλίο, υπολογίζουμε για κάθε συνάρτηση

1)την εκτίμηση του f(x*)

2)την εκτίμηση του x* για μεταβλητό e

3)τον αριθμό των επαναλήψεων k που χρειάστηκαν μέχρι να ικανοποιηθεί η συνθήκη τερματισμού (b - a) < l για μεταβλητό l

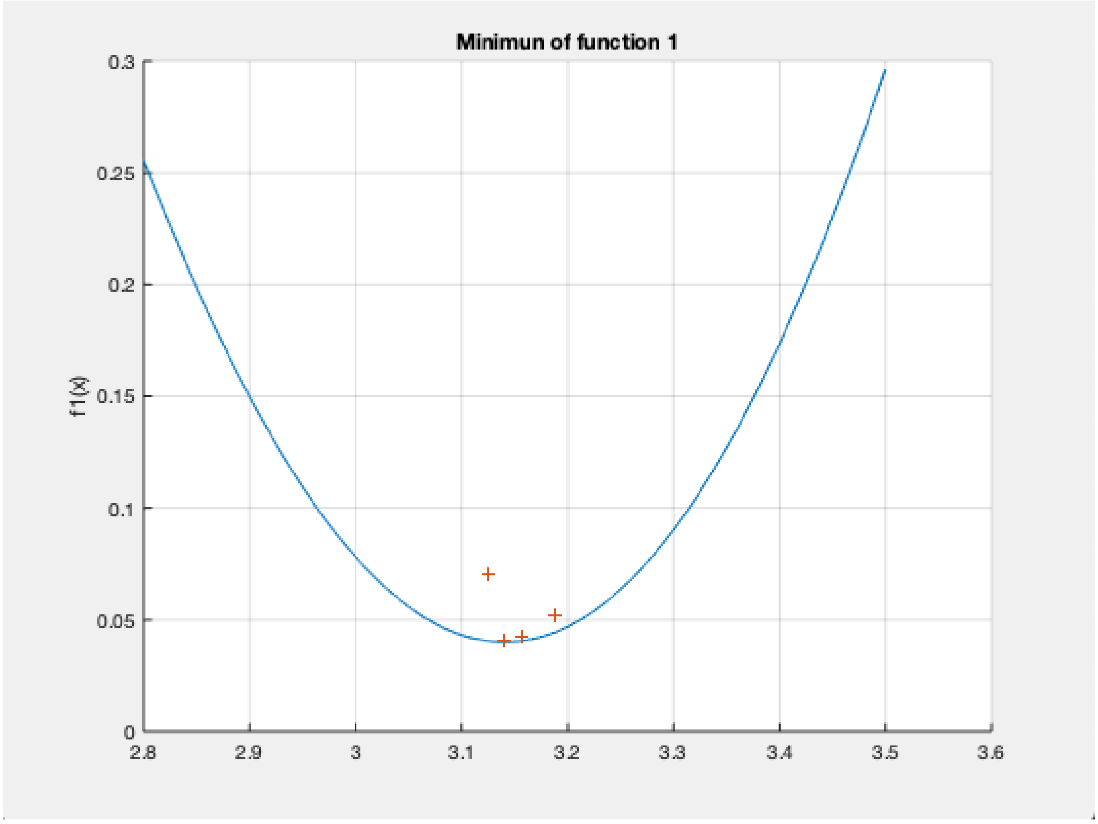
4)τα διαστήματα [ak, bk] τα οποία αλλάζουν σε κάθε επανάληψη.

Η αποθήκευση των ak και bk έγινε και πάλι δυναμικά στα διανύσματα lowerLimit και upperLimit αντίστοιχα

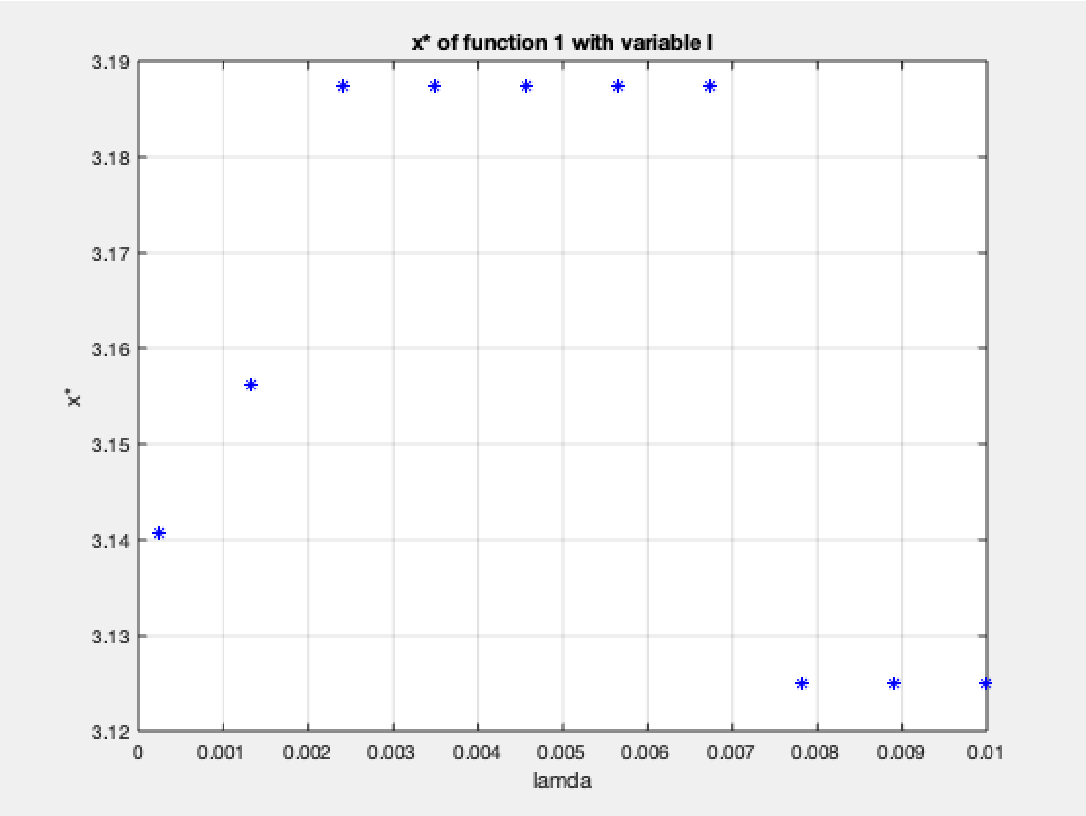
Για την υλοποίηση της μεθόδου αυτή δεν χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση f , αλλα η df(a,i), η οποία επιστρέφει την τιμή της i- στης συνάρτησης στο σημείο a.

Για την f1:

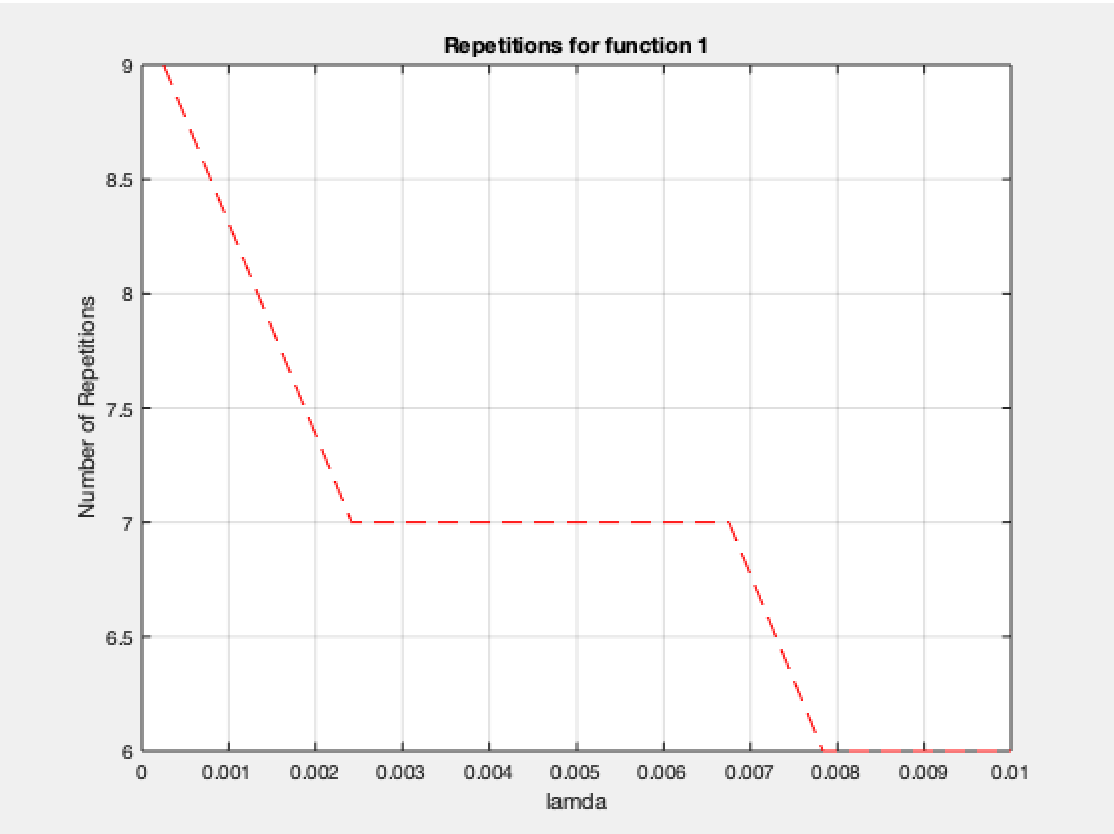
1)Εκτίμηση f(x*)



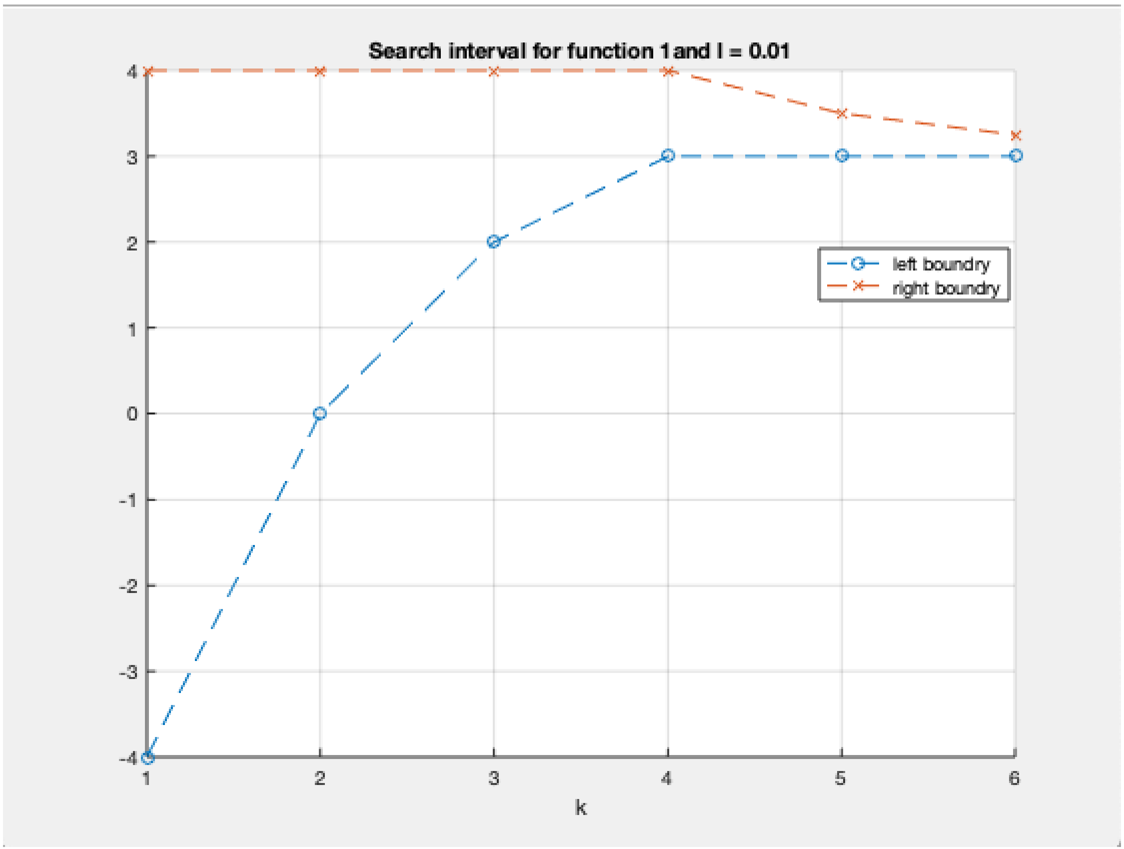
2)Εκτίμηση του x* για μεταβλητό e

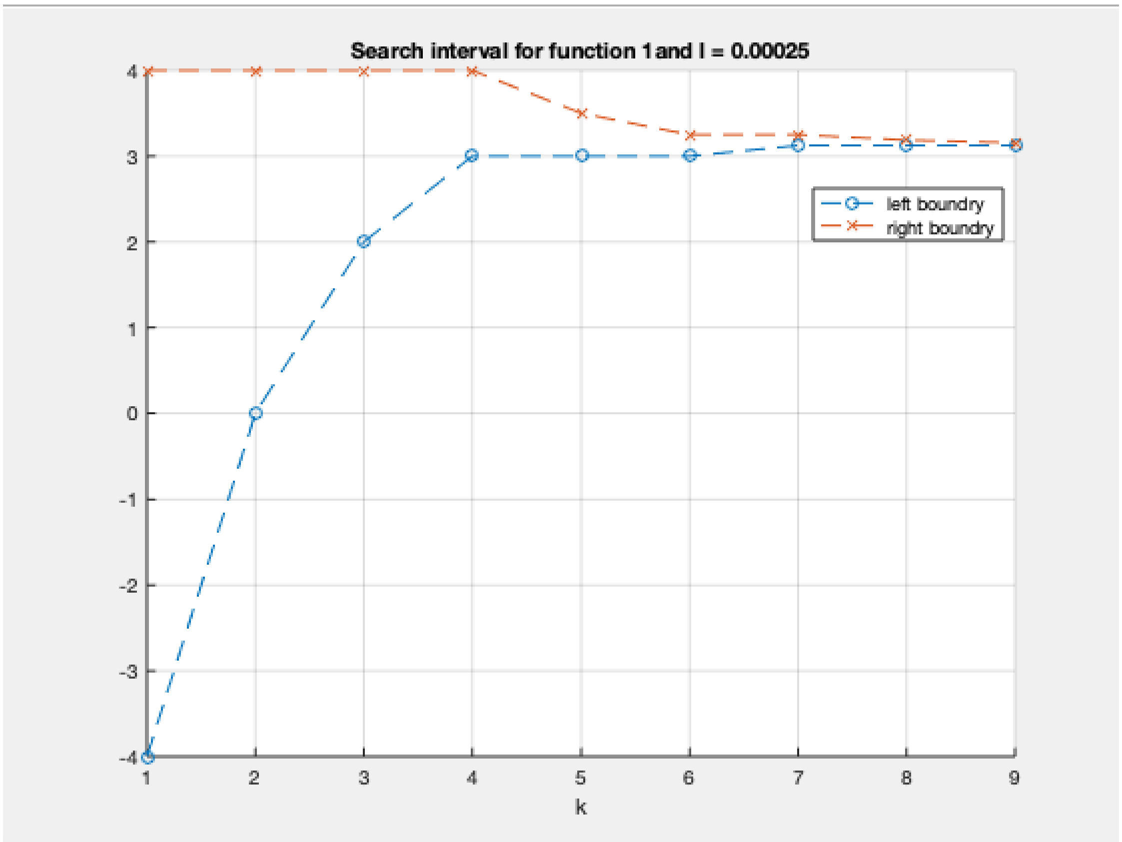


3)Αριθμός επαναλήψεων k για μεταβλητό l



4)Διαστήματα [ak, bk] για l = 0.01 και l = 0.0025





Συμπεράσματα

Εφόσον η παραπάνω ανάλυση έγινε για το ίδιο εύρος τιμών του l, μπορούμε να συγκρίνουμε την αποτελεσματικότητα των μεθόδων.

1) Μικρότερος αριθμός επαναλήψεων είναι φανερό ότι προκύπτει με την μέθοδο της διχοτόμου με χρήση παραγώγων. Επομένως, η μέθοδος αυτή είναι και η πιο αποτελεσματική.
2) Αμέσως μετά έρχονται οι μέθοδοι του χρυσού τομέα και Fibonacci, καθώς παρόλο που απαιτούν μεγαλύτερο αριθμό επαναλήψεων, σε κάθε επανάληψη έχουμε μόνο μία κλήση της συνάρτησης f.
3) Τέλος, έχουμε την μέθοδο της διχοτόμου, όπου σε κάθε επανάληψη έχουμε παραπάνω από μία κλήση της συνάρτησης f.