Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Εργαστηριακή Άσκηση 2

Κούτση Χριστίνα
ΑΕΜ: 9871
email: cvkoutsi@ece.auth.gr

Απρίλιος, 2022

1 Θέμα 1

1.1 Θεωρητική Ανάλυση

Στο θέμα 1 μας ζητείται η εκτίμηση παραμέτρων του συστήματος

$$\dot{x} = -ax + bu, \quad x(0) = 0 \quad (1)$$

με τη μέθοδο της μέγιστης καθόδοου. Αρχικά, πριν ξεκινήσυμε την διαδικασία εκτίμησης των άγνωστων παραμέτρων a και b, θα πρέπει να φέρουμε το μοντέλο σε γραμικά παραμετρική μορφή:

$$\begin{gathered}\dot{x} = -ax + bu \Leftrightarrow \dot{x} = a_m x - a_m x - ax + bu \Leftrightarrow \\ \dot{x} + a_m x = a_m x - ax + bu \Leftrightarrow \dot{x} + a_m x = (a_m - a)x + bu\end{gathered}$$

Εφαρμόζω μετασχηματισμό Laplace στην τελευταία σχέση και, εφόσον έχω υποθέσει μηδενικές αρχικές συνθήκες, έχω:

$$\begin{gathered}sX(s) + a_m X(s) = (a_m - a)X(s) + bU(s) \Leftrightarrow \\ X(s) = \frac{1}{s + a_m}\begin{bmatrix}(a_m - a)X(s) & bU(s)\end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ X = {\theta^*}^T \varphi\end{gathered}$$

Όπου $a_m =$ και

$$\begin{gathered}{\theta^*}^T = \begin{bmatrix}a_m - a & b\end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix}\theta_1^{*T} & \theta_2^{*T}\end{bmatrix}^\top \\ \varphi = \begin{bmatrix}\frac{1}{s + a_m}X & \frac{1}{s + a_m}U\end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\end{bmatrix}^\top\end{gathered}$$

Σχεδιάζουμε το σύστημα εκτίμησης των άγνωστων παραμέτρων σύμφωνα με την μέθοδο κλίσης. Για το σύστημα εκτίμησης έχουμε

$$\begin{cases}\dot{\varphi}_1 = -a_m\varphi_1 + x \\ \dot{\varphi}_2 = -a_m\varphi_2 + u \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma e \varphi_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma e \varphi_2 \\ \dot{\hat{x}} = -\hat{a}\hat{x} + \hat{b}u = -(a_m - \hat{\theta}_1)\hat{x} + \hat{\theta}_2 u\end{cases}$$

Από τις παραπάνω αλλά και από την (1) εξάγουμε τις εξισώσεις κατάστασης του συνολικού συστήματος, δηλαδή του συστήματος αναγνώρισης και του πραγματικού.

$$\begin{cases}x_1 = x \\ x_2 = \hat{\theta}_1 \\ x_3 = \hat{\theta}_2 \\ x_4 = \varphi_1 \\ x_5 = \varphi_2 \\ x_6 = \hat{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dot{x}_1 = \dot{x} = -ax_1 + bu \\ \dot{x}_2 = \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma e \varphi_1 = \gamma e x_4 \\ \dot{x}_3 = \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma e \varphi_2 = \gamma e x_5 \\ \dot{x}_4 = \dot{\varphi}_1 = -a_m\varphi_1 + x = -a_m x_4 + x_1 \\ \dot{x}_5 = \dot{\varphi}_2 = -a_m\varphi_2 + u = -a_m x_5 + u \\ \dot{x}_6 = \dot{\hat{x}} = (\hat{\theta}_1 - a_m)\hat{x} + \hat{\theta}_2 u = (x_2 - a_m)x_6 + x_3 u\end{cases}$$

Για το σφάλμα e ισχύει:

$$e = x - \hat{\theta}\varphi = x_1 - (\hat{\theta}_1\varphi_1 + \hat{\theta}_2\varphi_2) = x_1 - (x_2 x_4 + x_3 x_5)$$

Τελικά οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος είναι:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = \gamma x_4(x_1 - (x_2x_4 + x_3x_5)) \\ \dot{x_3} = \gamma x_5(x_1 - (x_2x_4 + x_3x_5)) \\ \dot{x_4} = -a_m x_4 + x_1 \\ \dot{x_5} = -a_m x_5 + u \\ \dot{x_6} = (x_2 - a_m)x_6 + x_3 u \end{cases} \tag{2}$$

1.2 Ερώτημα Α

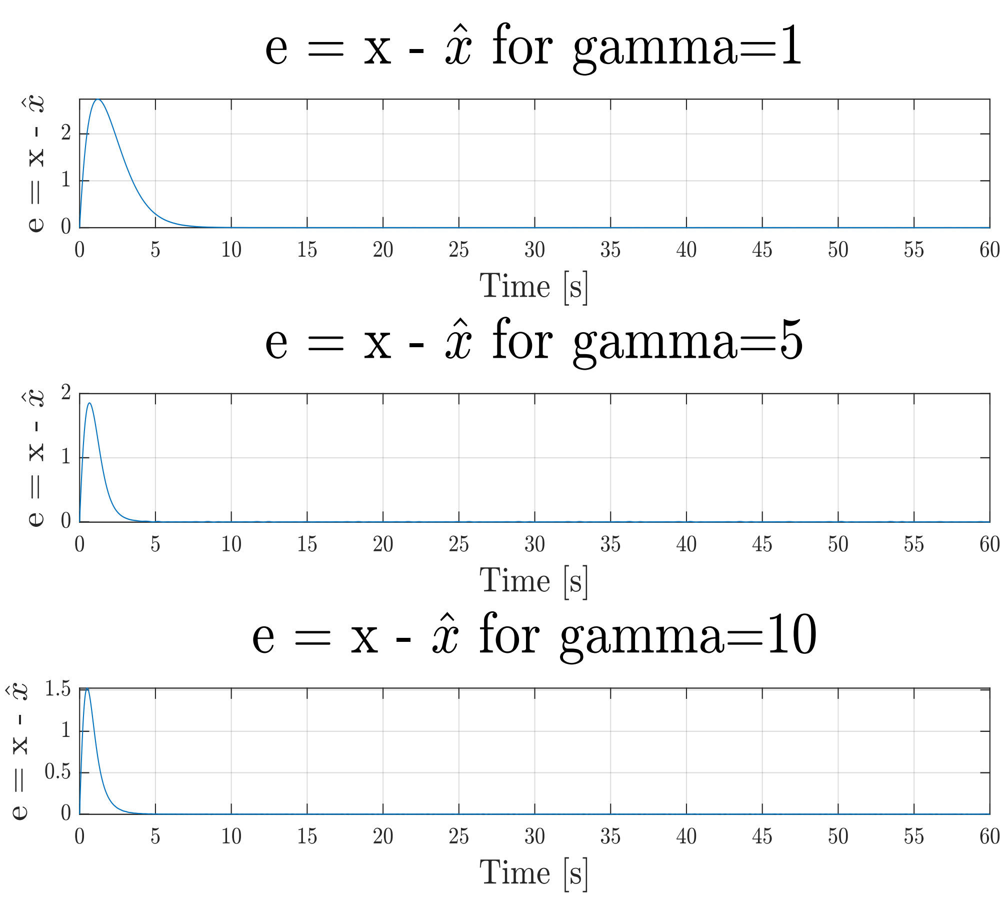
Για να βρούμε τις εκτιμήσεις των άγνωστων παραμέτρων a και b με τη βοήθεια της μεθόδου κλίσης αρκεί να λύσουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (2) με δοθείσα είσοδο

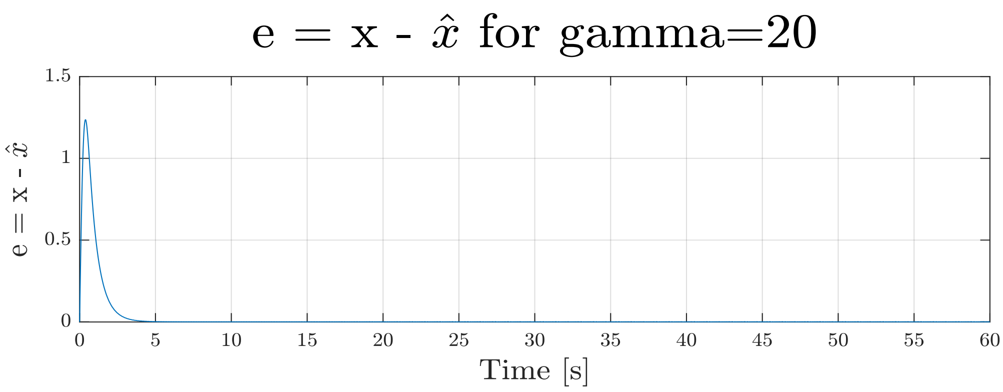
u = 3

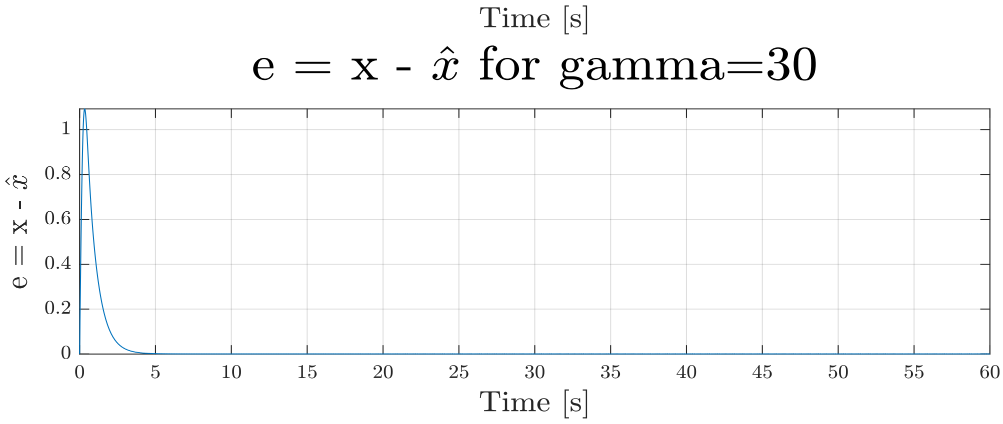
και με κατάλληλες παραμέτρους γ και a_m. Ακολουθεί ανάλυση για την κατάλληλη επιλογή των δύο αυτών σταθερών:

1.2.1 Επιλογή βήματος γ

Για την αξιολόγηση και επιλογή κατάλληλου βήματος γ θα τρέξουμε τον αλγόριθμο για σταθερό am = 5 και για γ = [1,5,10,20,30]



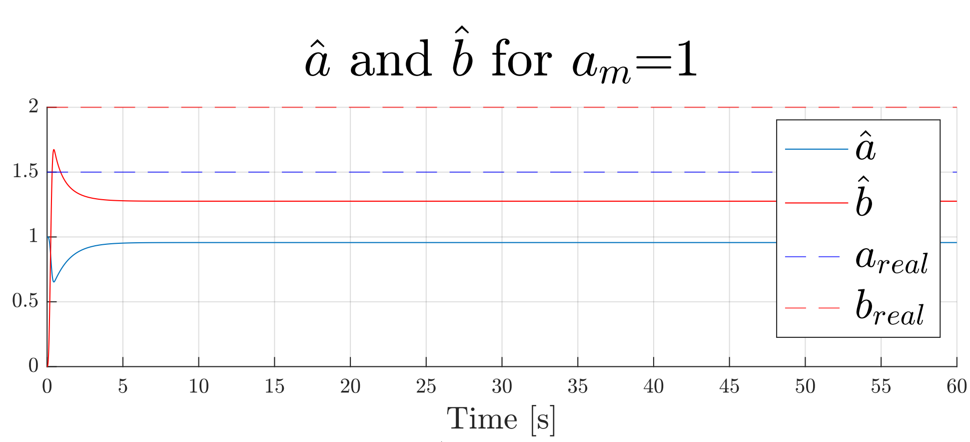


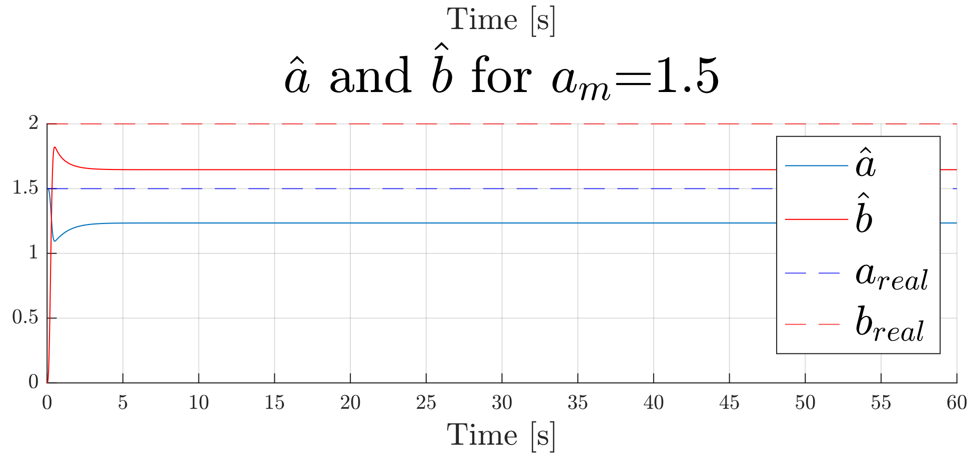


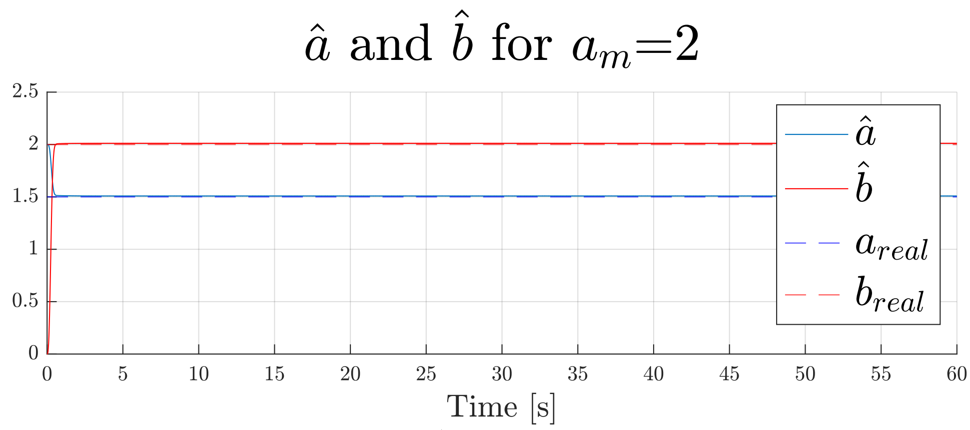
Παρατηρώ ότι το σφάλμα συγκλίνει γρηγορότερα στο μηδέν για μεγαλύτερα γ, επομένως επιλέγω γ=20.

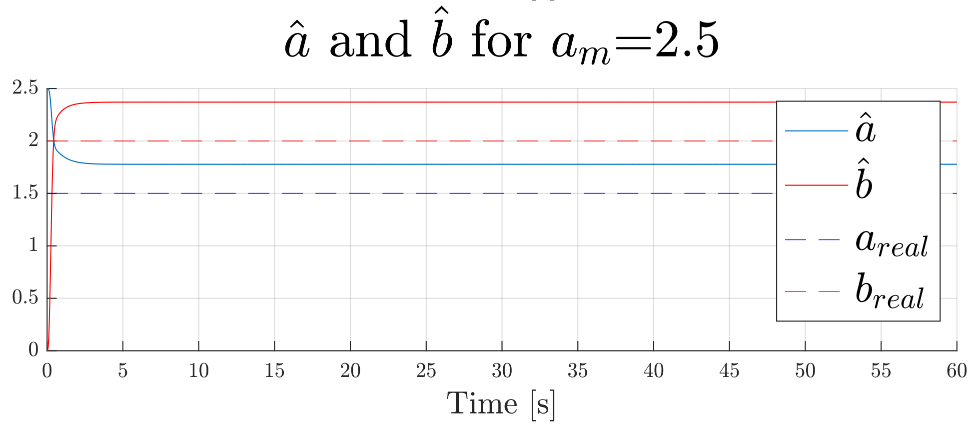
1.2.2 Επιλογή πόλου a_m

Για την επιλογή κατάλληλου πόλου a_m τρέχουμε τον αλγόριθμο για γ = 20 και για a_m = [1,1.5,2,2.5]







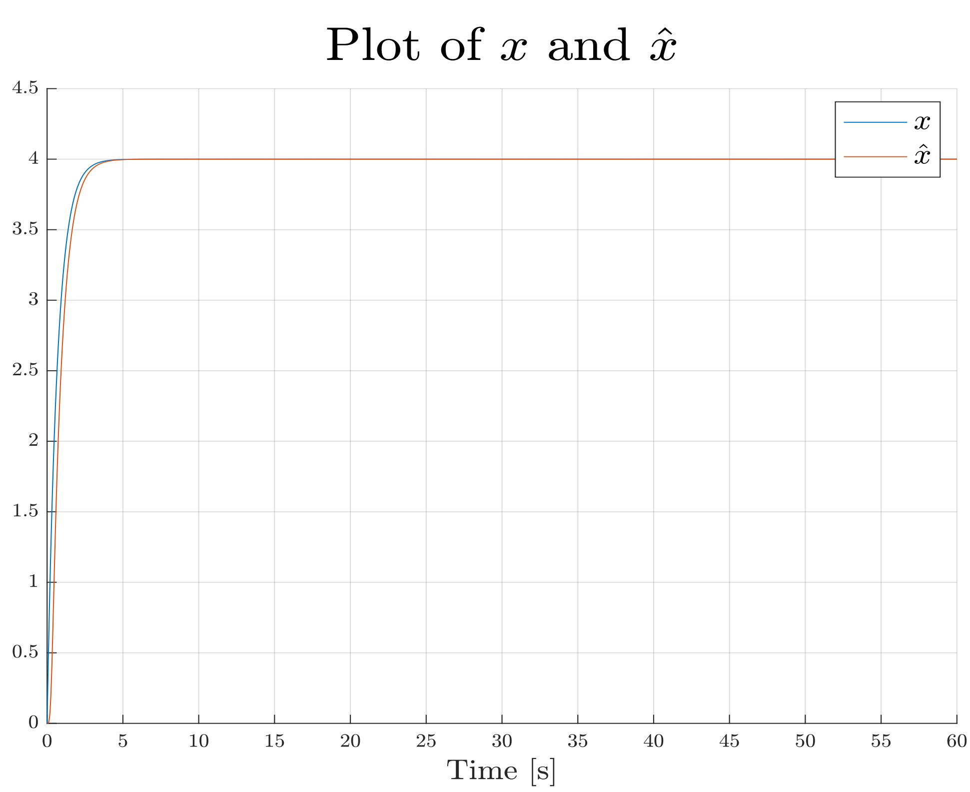


Παρατηρώ ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει στις πραγματικές τιμές του a και b για a_m=2.

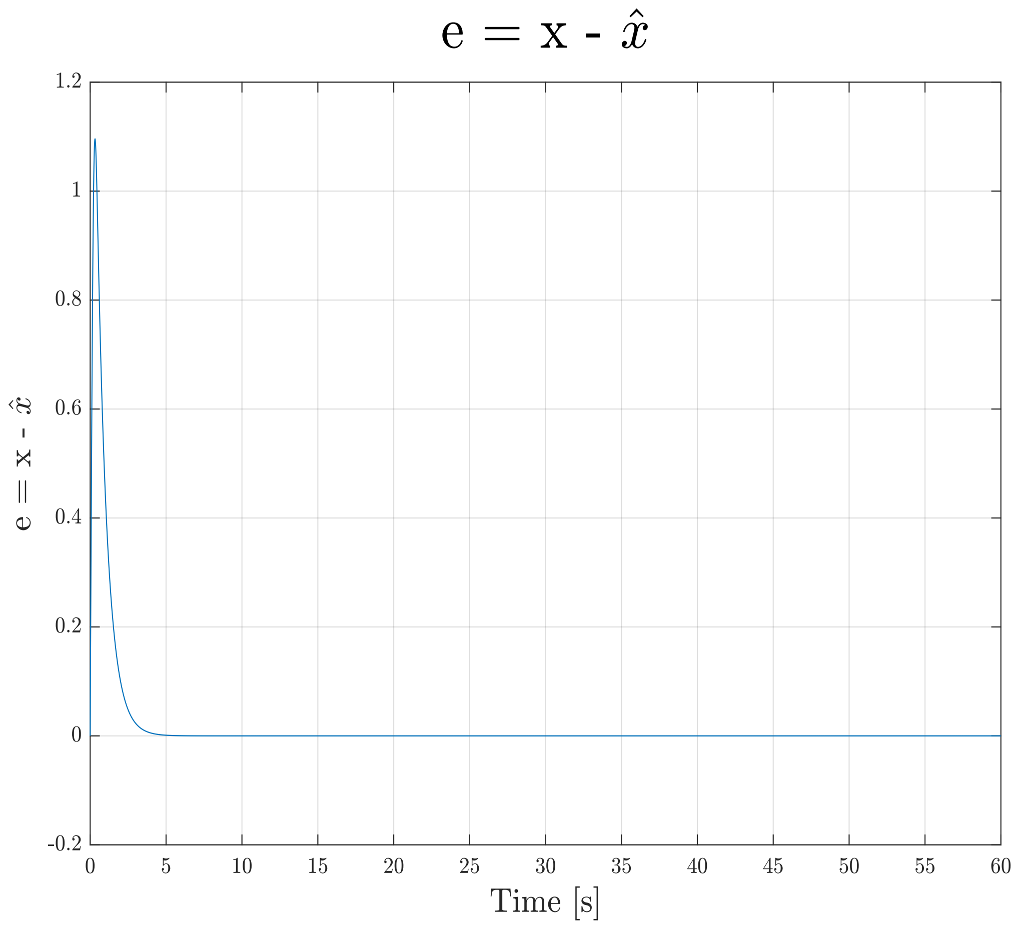
1.2.3 Εύρεση άγνωστων παραμέτρων με την μέθοδο κλίσης

Εφόσον έχουμε βρει τις παραμέτρους του και a_m, τρέχουμε τον αλγόριθμο για γ=20 και a_m= 2 ώστε να βρούμε τις άγνωστες παραμέτρους a και b.

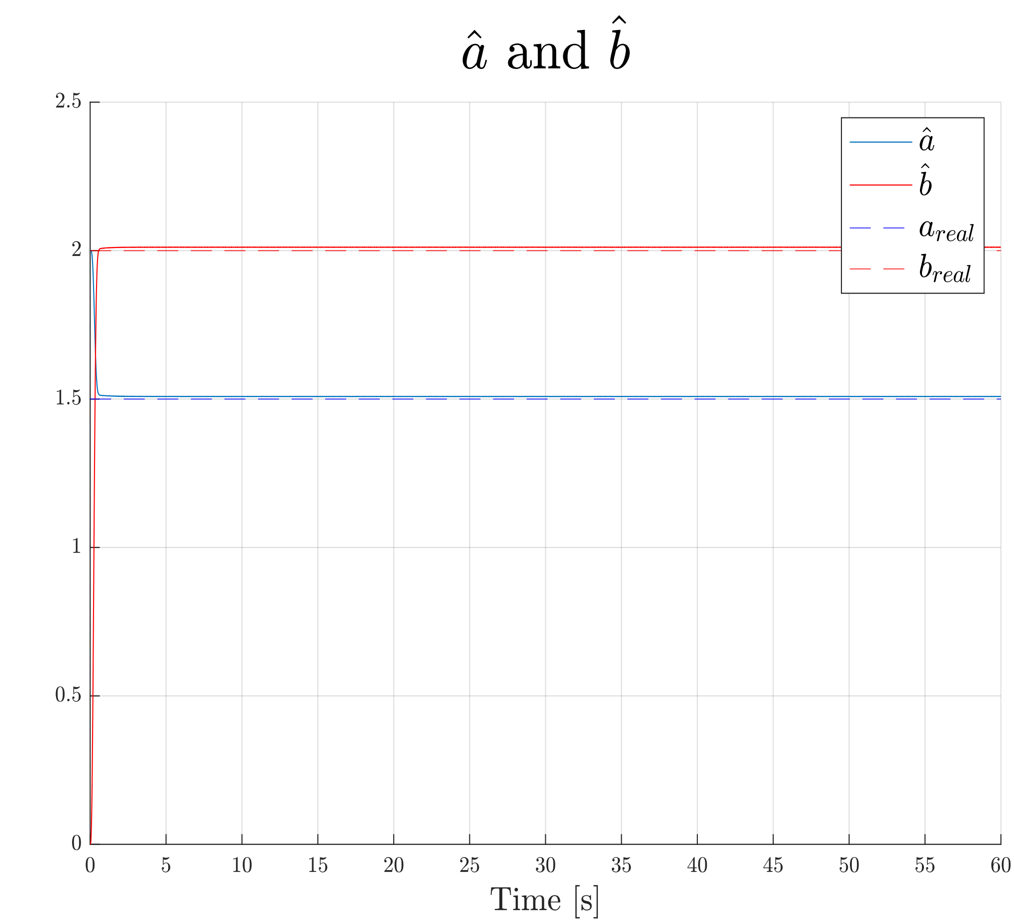
- Γραφική παράσταση του x και $\hat{x}$



- Γραφική παράσταση του $e = x - \hat{x}$



- Γραφική παράσταση των a, b, $\hat{a}$, $\hat{b}$



1.3 Ερώτημα Β

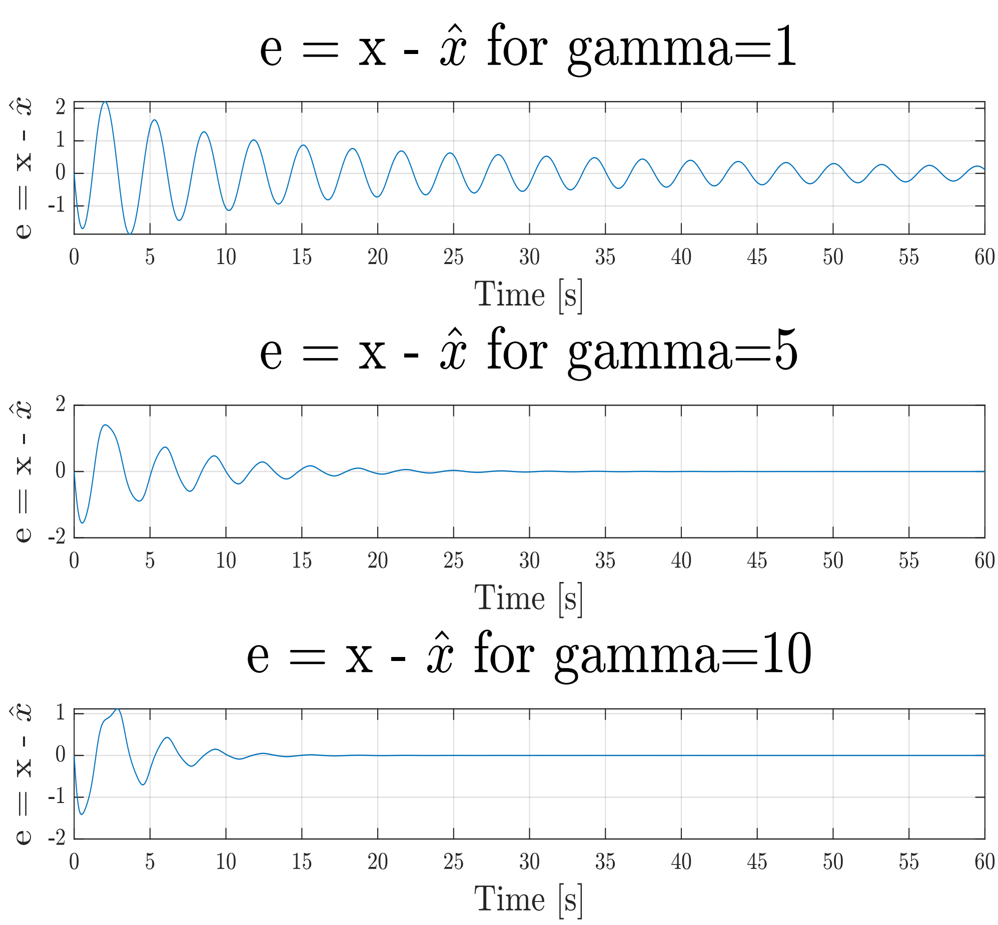
Για να βρούμε τις εκτιμήσεις των άγνωστων παραμέτρων a και b με τη βοήθεια της μεθόδου κλίσης αρκεί να λύσουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (2) με δοθείσα είσοδο

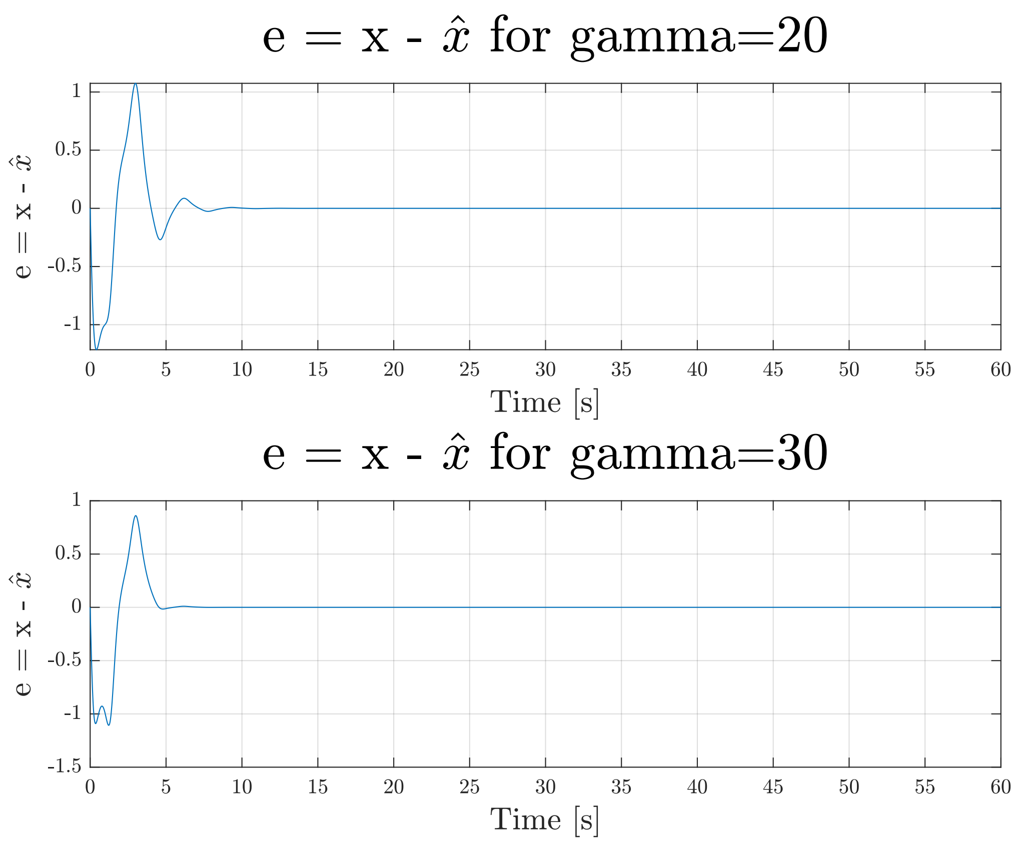
$$u(t) = 3\cos(2t)$$

και με κατάλληλες παραμέτρους γ και a_m. Ακολουθεί ανάλυση για την κατάλληλη επιλογή των δύο αυτών σταθερών:

1.3.1 Επιλογή βήματος γ

Για την αξιολόγηση και επιλογή κατάλληλου βήματος γ θα τρέξουμε τον αλγόριθμο για σταθερό am = 6 και για γ = [1,5,10,20,30]

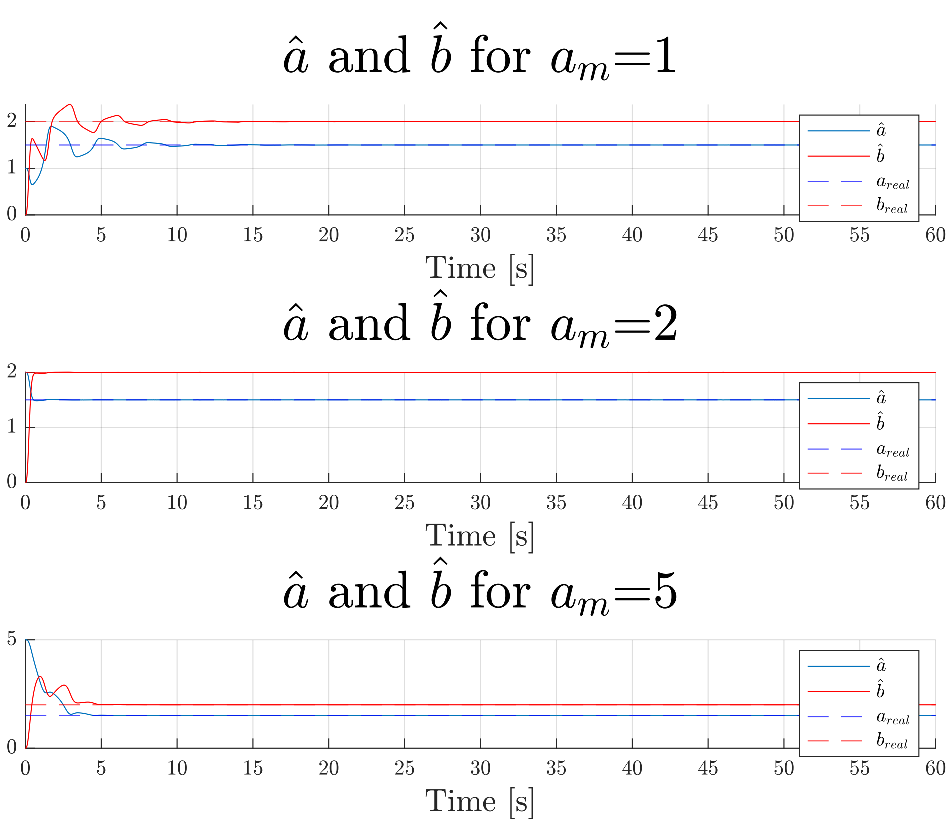


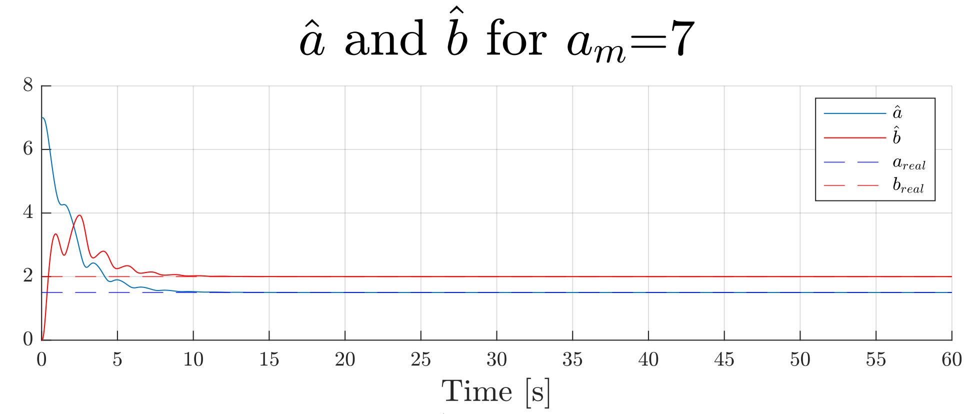


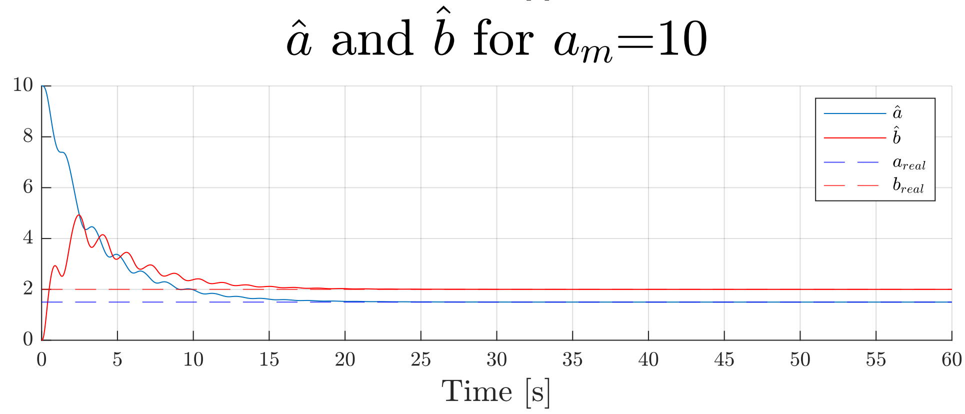
Παρατηρώ ότι για γ= [1,5,10] το σφάλμα συγκλίνει αργά στο μηδέν. Επιλέγω γ = 20 γιατί για μεγαλύτερο γ παρατηρώ μικρή μεταβολή στο σφάλμα.

1.3.2 Επιλογή πόλου a_m

Για την επιλογή κατάλληλου πόλου a_m τρέχουμε τον αλγόριθμο για γ = 20 και για a_m = [1,2,5,7,10]





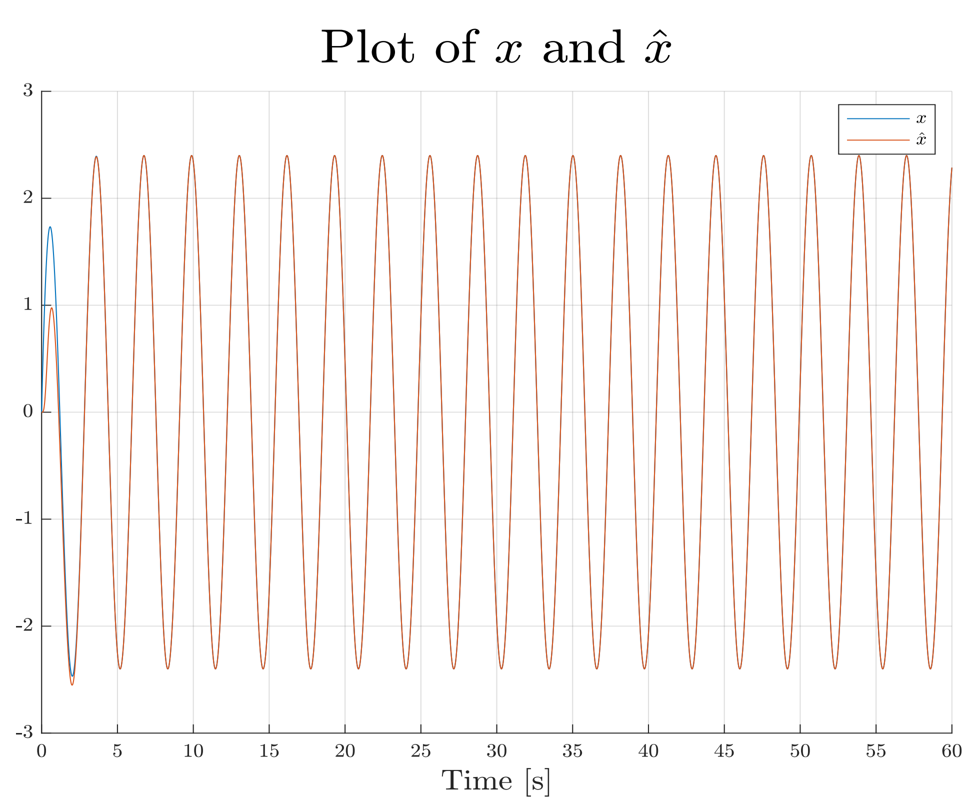


Για μεγαλύτερα a_m η σύγκλιση των $\hat{a}$, $\hat{b}$ στις πραγματικές τους τιμές γίνεται πιο αργή. Παρατηρώ ότι καλύτερη σύγκλιση έχω για $a_m = 2$.

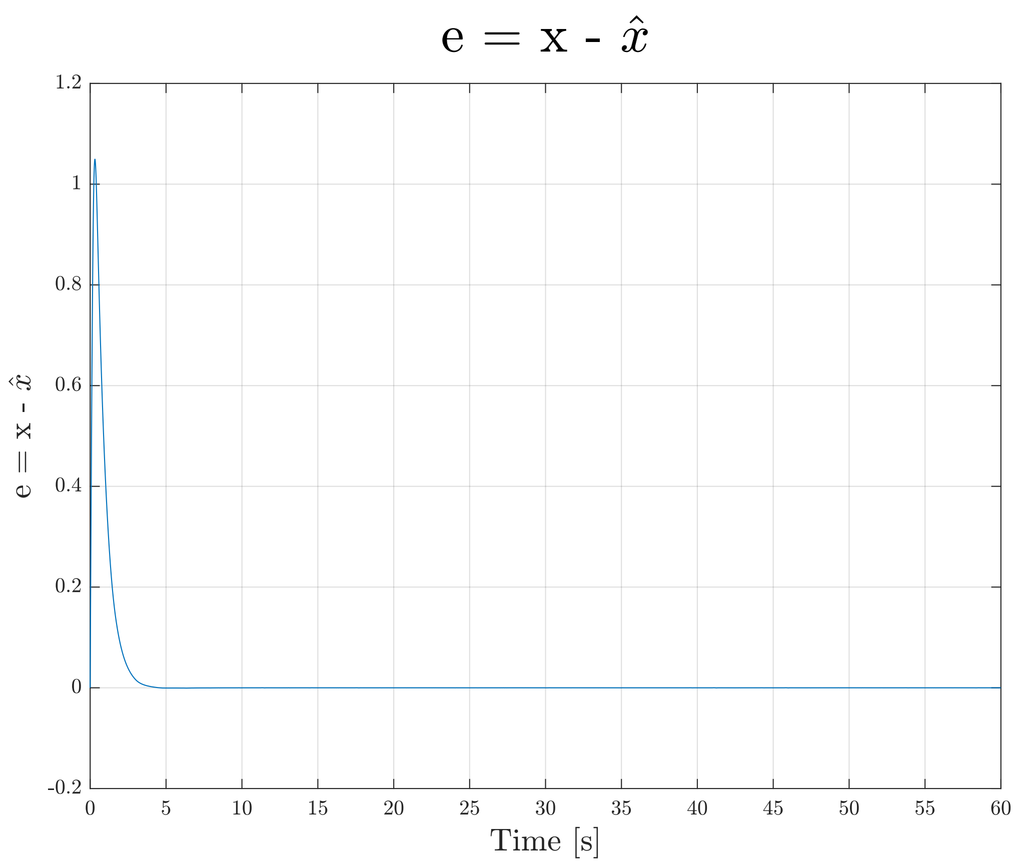
1.3.3 Εύρεση άγνωστων παραμέτρων με την μέθοδο κλίσης

Εφόσον έχουμε βρει τις παραμέτρους του και a_m, τρέχουμε τον αλγόριθμο για γ=20 και a_m= 2 ώστε να βρούμε τις άγνωστες παραμέτρους a και b.

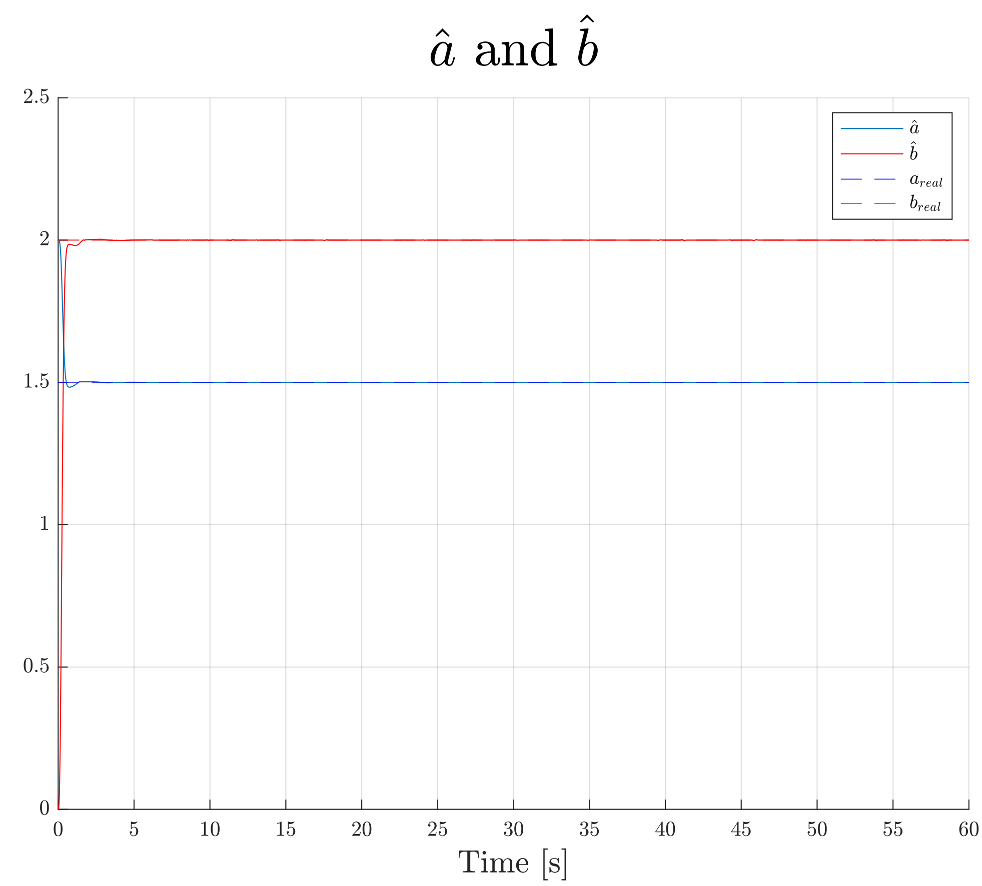
- Γραφική παράσταση του x και $\hat{x}$



- Γραφική παράσταση του $e = x - \hat{x}$



- Γραφική παράσταση των a, b, $\hat{a}$, $\hat{b}$



1.4 Παρατηρήσεις

- Παρατηρώ ότι και στις δύο περιπτώσεις το σφάλμα e τείνει στο μηδέν. Αυτό συμβαίνει γιατί και οι δύο είσοδοι του συστήματος ικανοποιούν την Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης, γεγονός που επιβεβαιώνεται και μαθηματικά.
- Για το σύστημα του ερωτήματος Α, παρατηρώ ότι συγκλίνει στις σωστές τιμές του a και b για συγκεκριμένες τιμές του γ και a_m, ειδάλλως ο αλγόριθμος οδηγεί σε λανθασμένα αποτελέσματα.
- Λόγω της συνημιτονοειδούς εισόδου, στο ερώτημα Β έχουμε ταλάντωση πριν ο αλγόριθμος καταλήξει στο $\bar{\theta}$, ενώ στο ερώτημα Α ο σλγόριθμος οδηγείται εξ αρχής στο επιθυμητό σημείο.

2 Θέμα **2**

2.1 Εκτιμητής πραγματικού χρόνου παράλληλης δομής

2.1.1 Θεωρητική Ανάλυση

Για το σύστημα

$$\dot{x} = -ax + bu = -\theta_1 x + \theta_2 u \qquad x(0) = 0$$

θεωρούμε το σύστημα αναγνώρισης παράλληλης δομής το οποίο μας επιστρέφει την εκτίμηση της εξόδου:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u$$

Το σφάλμα e της εκτίμησης της παράλληλης δομής είναι:

$$\begin{gathered} e = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \Leftrightarrow \\ \dot{e} = -\theta_1 x + \theta_2 u + \hat{\theta}_1 \hat{x} - \hat{\theta}_2 u = -\theta_1 x + \theta_2 u + \hat{\theta}_1 \hat{x} - \hat{\theta}_2 u + \theta_1 \hat{x} - \theta_1 \hat{x} \Leftrightarrow \\ \dot{e} = -\theta_1 (x - \hat{x}) + (\hat{\theta}_1 - \theta_1)\hat{x} - (\hat{\theta}_2 - \theta_2) u \Leftrightarrow \\ \dot{e} = -\theta_1 e + \bar{\theta}_1 \hat{x} - \hat{\theta}_2 u \quad (1) \end{gathered}$$

όπου $\bar{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_1$ και $\bar{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2$

Από τη σχέση (1) ορίζουμε την συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα:

$$V = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\bar{\theta}_1^{\,2} + \frac{1}{2\gamma_2}\bar{\theta}_2^{\,2}$$

Απαιτώντας V > 0 και $\dot{V} \leq 0$ ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος Lyapunov, επιλέγουμε

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e \hat{x} \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = -\gamma_2 e u \end{cases}$$

Σε περίπτωση που η κατάσταση x του συστήματός μας μετριέται με θόρυβο, έχουμε

$$\begin{gathered} x_{in} = x + \eta \Leftrightarrow \\ e = x + \eta - \hat{x} \end{gathered}$$

Από τα παραπάνω εξάγουμε τις εξισώσεις κατάστασης του συνολικού συστήματος:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \hat{\theta}_1 \\ x_3 = \hat{\theta}_2 \\ x_4 = \hat{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x_1} = \dot{x} = -ax + bu = -ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e\hat{x} = -\gamma_1 e x_4 \\ \dot{x_3} = \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 eu \\ \dot{x_4} = \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1\hat{x} + \hat{\theta}_2 u = -x_2x_4 + x_3u \end{cases}$$

Για το σφάλμα **e** ισχύει:

- Σφάλμα πρόβλεψης όταν το x λαμβάνεται χωρίς θόρυβο

$$e = x - \bar{x} = x_1 - x_4$$

- Σφάλμα πρόβλεψης όταν το x λαμβάνεται με θόρυβο

$$e = x + \eta - \bar{x} = x_1 + \eta - x_4$$

Επομένως οι εξισώσεις κατάστασης για σύστημα χωρίς θόρυβο είναι:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = -\gamma_1 x_4(x_1 - x_4) \\ \dot{x_3} = \gamma_2 u(x_1 - x_4) \\ \dot{x_4} = -x_2x_4 + x_3u \end{cases}$$

Ενώ όταν έχουμε θόρυβο οι εξισώσεις κατάστασης είναι οι εξής:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = -\gamma_1 x_4(x_1 + \eta - x_4) \\ \dot{x_3} = \gamma_2 u(x_1 + \eta - x_4) \\ \dot{x_4} = -x_2x_4 + x_3u \end{cases}$$

2.1.2 Εύρεση παραμέτρων με χρήση της μεθόδου **Lyapunov**

Για την εύρεση των παραμέτρων και την εκτέλεση του αλγορίθμου θα πρέπει να επιλέξουμε και πάλι τα γ_1 και γ_2. Για το σκοπό αυτό δημιουργήθηκε η συνάρτηση choose_g1_g2, η οποία τρέχει τον αλγόριθμο της μεθόδου Lyapunov για την εκτίμηση παραμέτρων για ένα εύρος γ1 και γ2. Η συνάρτηση αυτή επιστρέφει τον συνδιασμό [γ1,γ2], για τον οποίο η μέθοδος Lyapunov μας έδωσε την εκτίμηση με το μικρότερο μέσο απόλυτο σφάλμα. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, για τον εκτιμητή παράλληλης δομής δίνουμε σαν όρισμα στην συνάρτηση τα εύρη

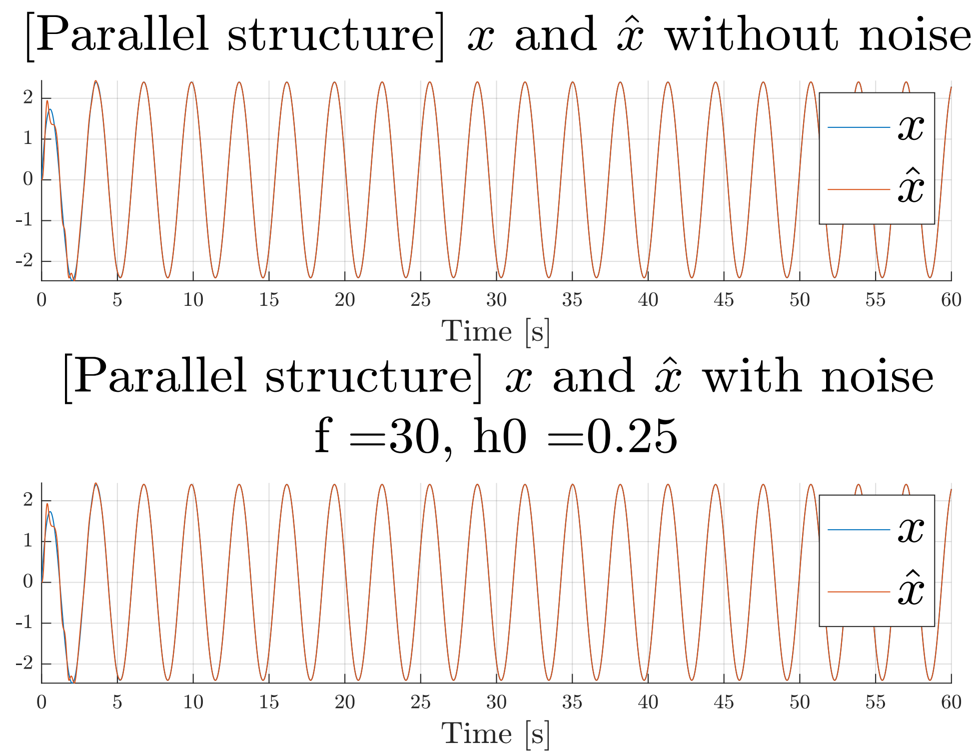
$$\gamma_1 = [10, 15, 20, 25, 30] \gamma_2 = [10, 15, 20, 25, 30]$$

Τρέχουμε την συνάρτηση και παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα:

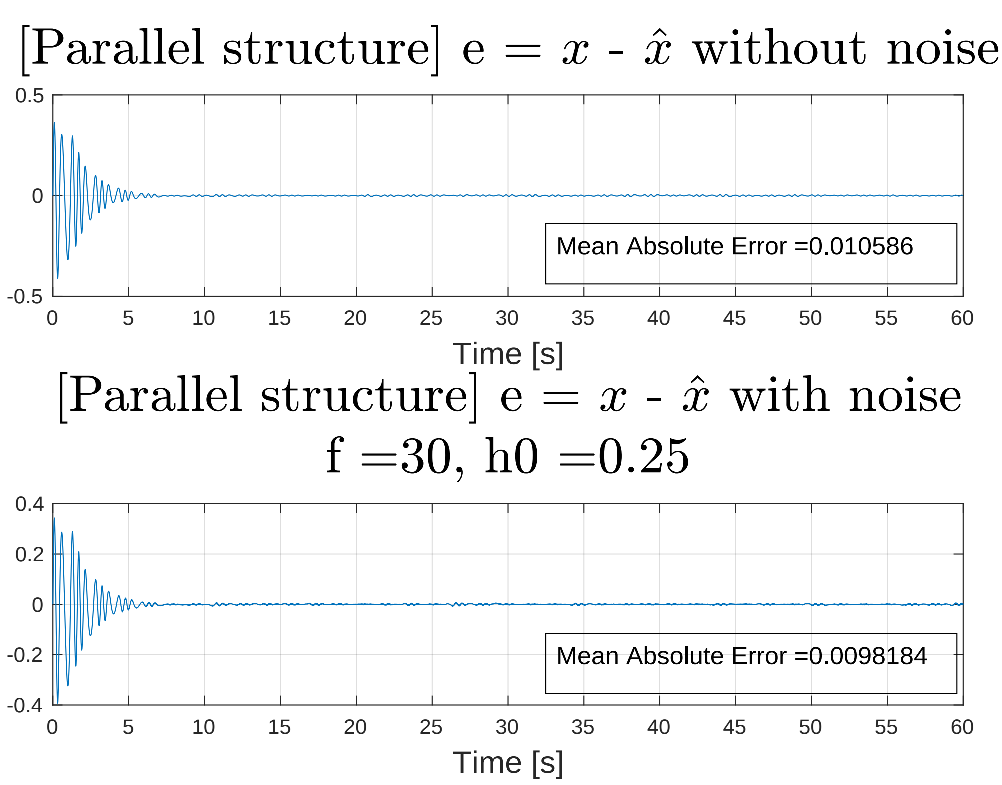
```
[Parallel Structure] Find optimal g1 and g2
for g1 = 10 and g2 = 10, Mean Absulute Error = 0.015546
for g1 = 10 and g2 = 15, Mean Absulute Error = 0.014801
for g1 = 10 and g2 = 20, Mean Absulute Error = 0.012952
for g1 = 10 and g2 = 25, Mean Absulute Error = 0.012580
for g1 = 10 and g2 = 30, Mean Absulute Error = 0.011674
for g1 = 15 and g2 = 10, Mean Absulute Error = 0.014699
for g1 = 15 and g2 = 15, Mean Absulute Error = 0.013214
for g1 = 15 and g2 = 20, Mean Absulute Error = 0.011370
for g1 = 15 and g2 = 25, Mean Absulute Error = 0.010586
for g1 = 15 and g2 = 30, Mean Absulute Error = 0.011322
for g1 = 20 and g2 = 10, Mean Absulute Error = 0.013153
for g1 = 20 and g2 = 15, Mean Absulute Error = 0.011569
for g1 = 20 and g2 = 20, Mean Absulute Error = 0.010790
for g1 = 20 and g2 = 25, Mean Absulute Error = 0.011416
for g1 = 20 and g2 = 30, Mean Absulute Error = 0.012032
for g1 = 25 and g2 = 10, Mean Absulute Error = 0.013010
for g1 = 25 and g2 = 15, Mean Absulute Error = 0.011304
for g1 = 25 and g2 = 20, Mean Absulute Error = 0.011588
for g1 = 25 and g2 = 25, Mean Absulute Error = 0.012025
for g1 = 25 and g2 = 30, Mean Absulute Error = 0.012137
for g1 = 30 and g2 = 10, Mean Absulute Error = 0.013310
for g1 = 30 and g2 = 15, Mean Absulute Error = 0.011054
for g1 = 30 and g2 = 20, Mean Absulute Error = 0.011628
for g1 = 30 and g2 = 25, Mean Absulute Error = 0.012096
for g1 = 30 and g2 = 30, Mean Absulute Error = 0.012659
Optimal pair: [g1,g2] = [15,25]
```

Επομένως, για τον εκτιμητή παράλληλης δομής, το μικρότερο μέσο απόλυτο σφάλμα έχουμε για $[\gamma_1, \gamma_2] = [15, 25]$ οπότε επιλέγουμε αυτές τις τιμές για την ανάλυσή μας.

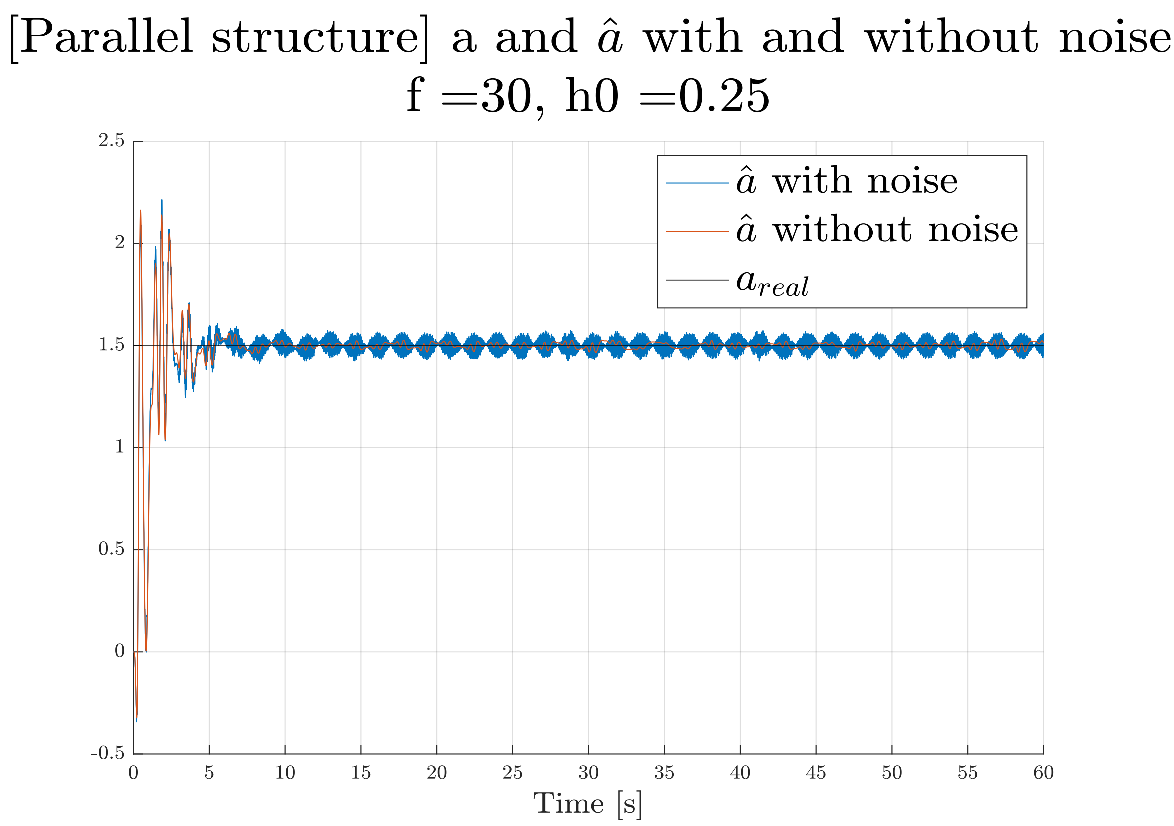
- Γραφική παράσταση του x και $\hat{x}$ με και χωρίς θόρυβο



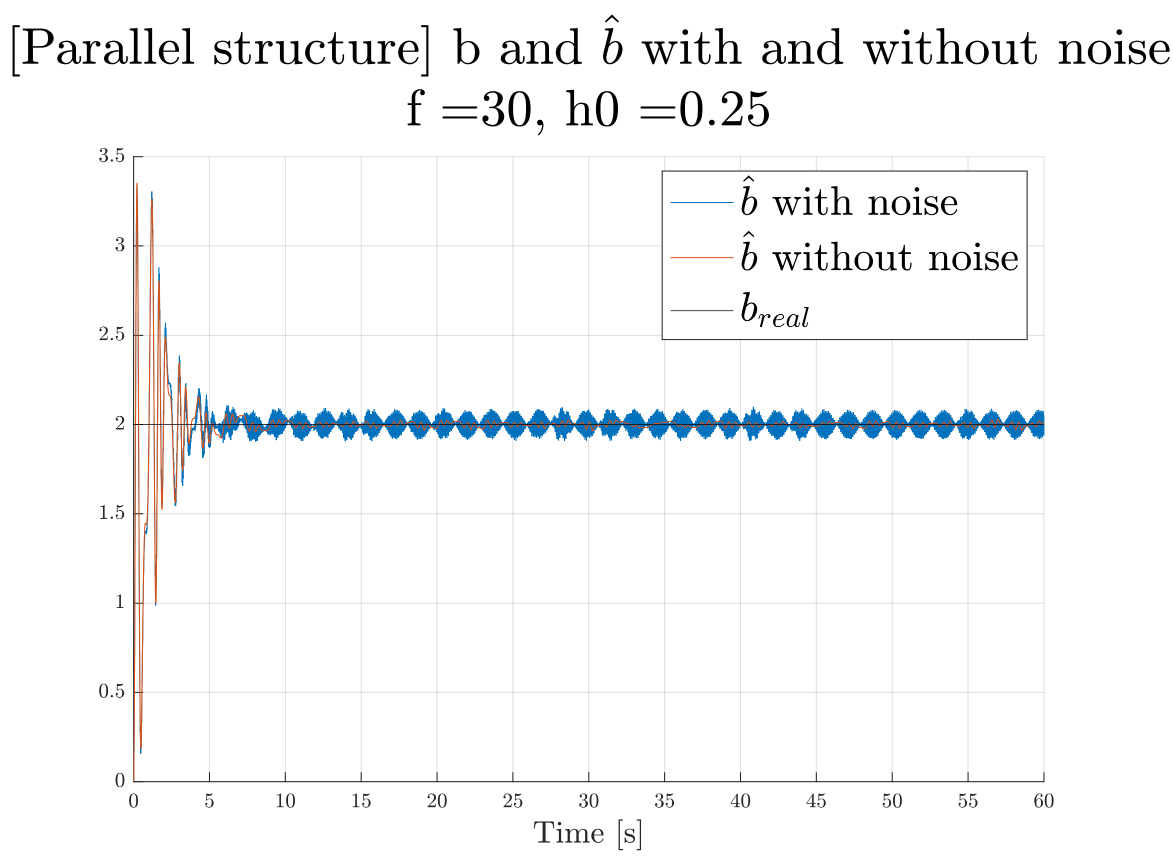
- Γραφική παράσταση του $e = x - \hat{x}$ με και χωρίς θόρυβο



- Γραφική παράσταση των a και $\hat{a}$ με και χωρίς θόρυβο



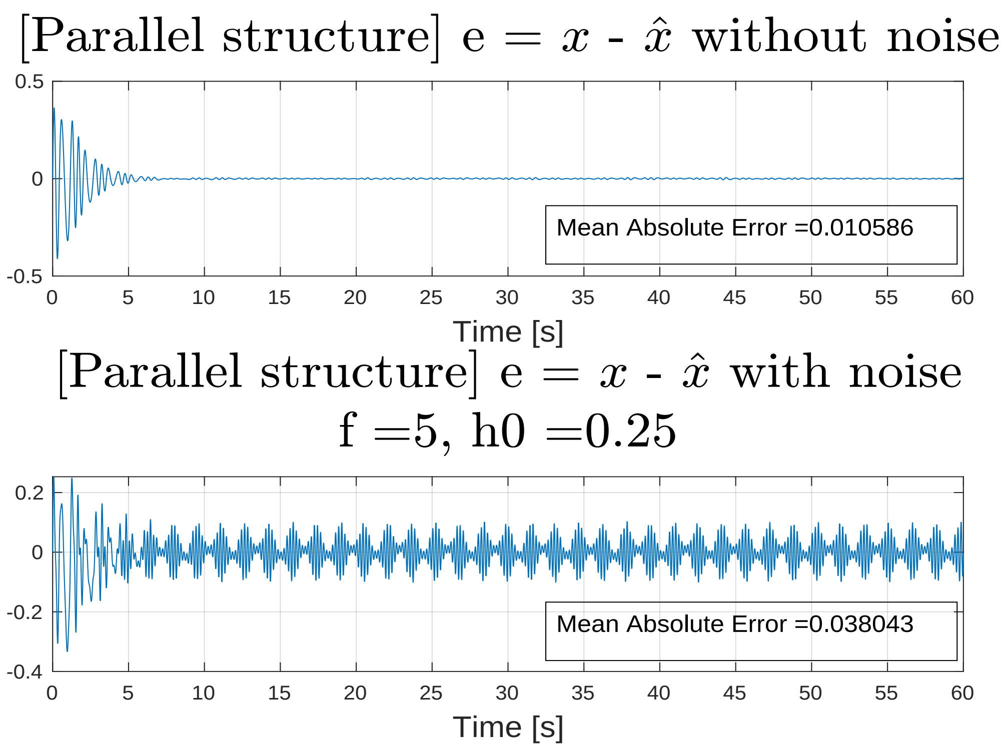
- Γραφική παράσταση των b και $\hat{b}$ με και χωρίς θόρυβο



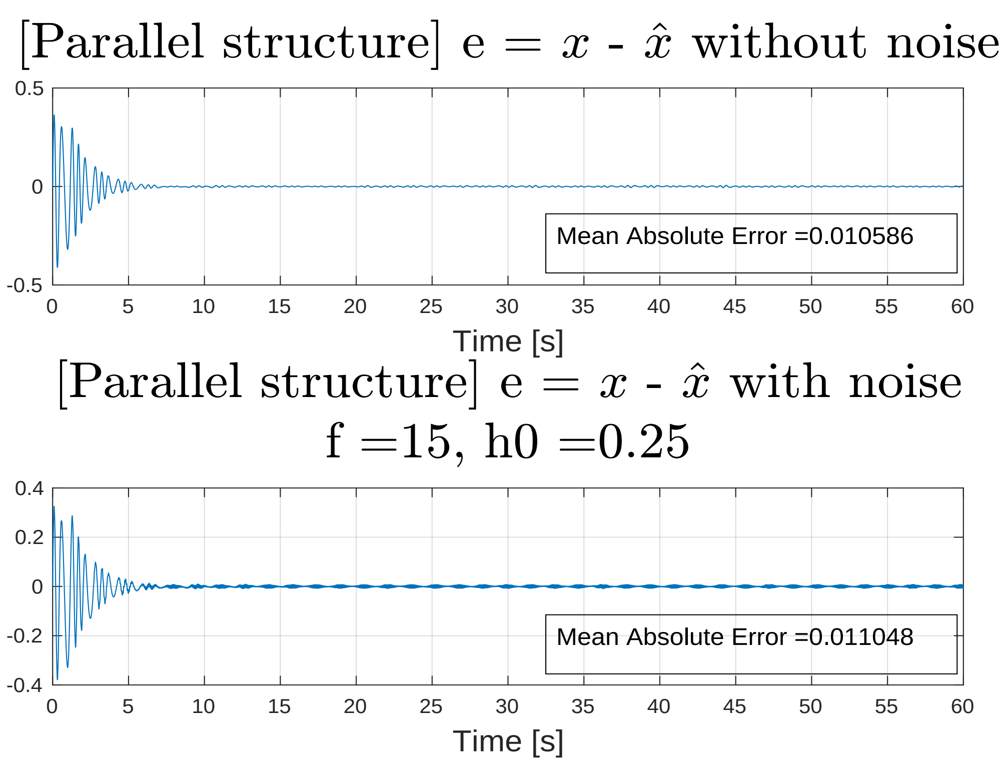
2.1.3 Εύρεση των παραμέτρων με χρήση της μεθόδου **Lyapunov** για διάφορες συχνότητες **f**

Εφαρμόζουμε την μέθοδο Lyapunov για την εύρεση των παραμέτρων του συστήματος όταν η είσοδος λαμβάνεται με θόρυβο συχνότητας f.
Αρχικά μειώνουμε την συχνότητα f και υπολογίζουμε τις παραμέτρους. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι:

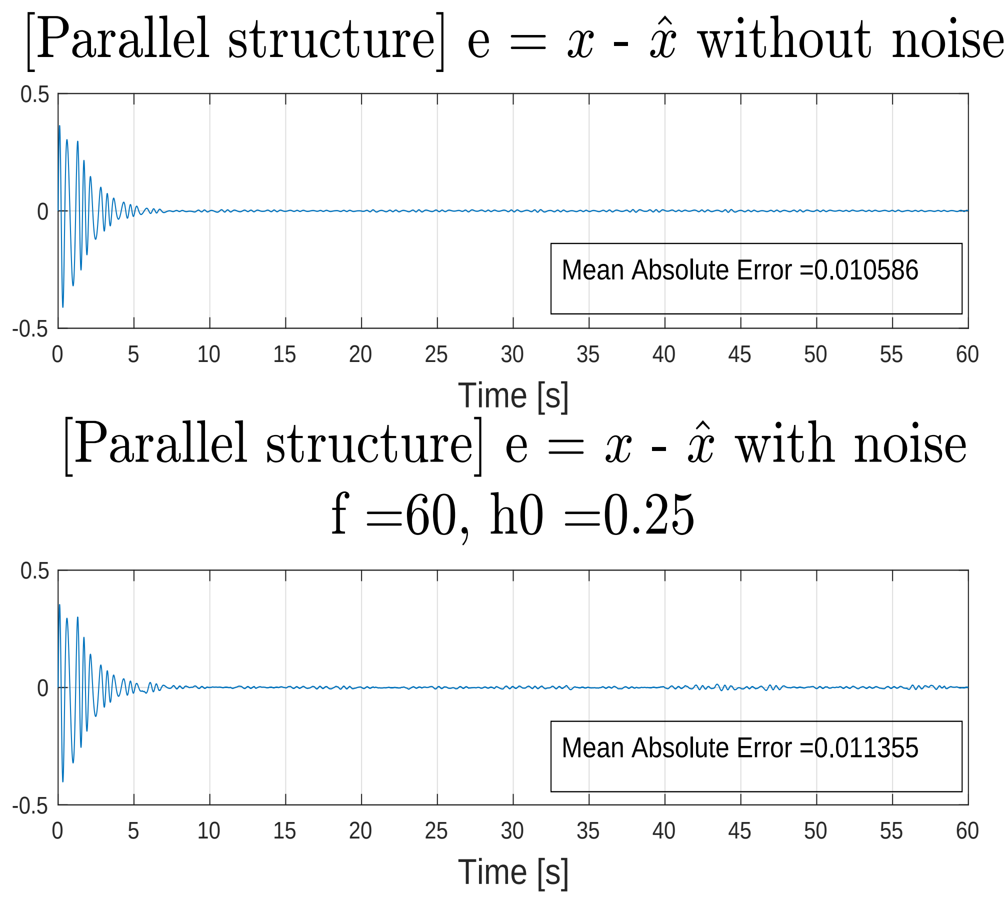
- f = 5



- f = 15

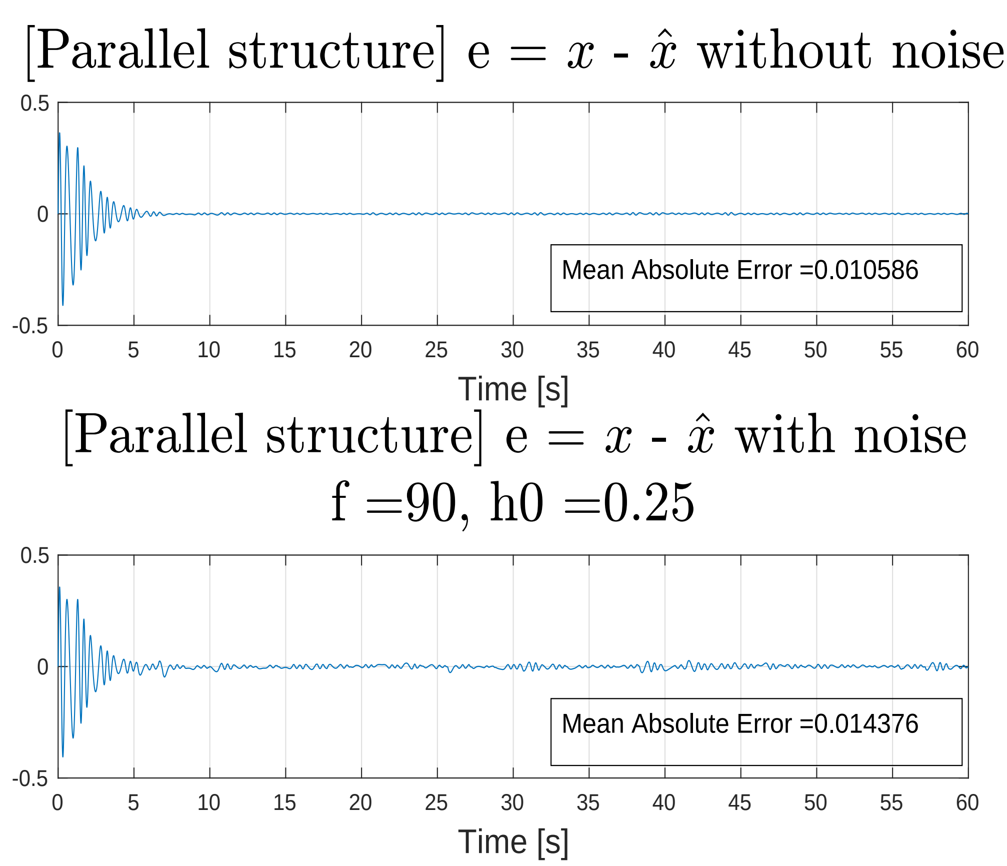


- f = 60



[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
0.5
0
-0.5
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60
Mean Absolute Error =0.010586
Time [s]
[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =60, h0 =0.25
0.5
0
-0.5
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60
Mean Absolute Error =0.011355
Time [s]

- f = 90



[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
0.5
0
-0.5
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60
Mean Absolute Error =0.010586
Time [s]
[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =90, h0 =0.25
0.5
0
-0.5
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60
Mean Absolute Error =0.014376
Time [s]

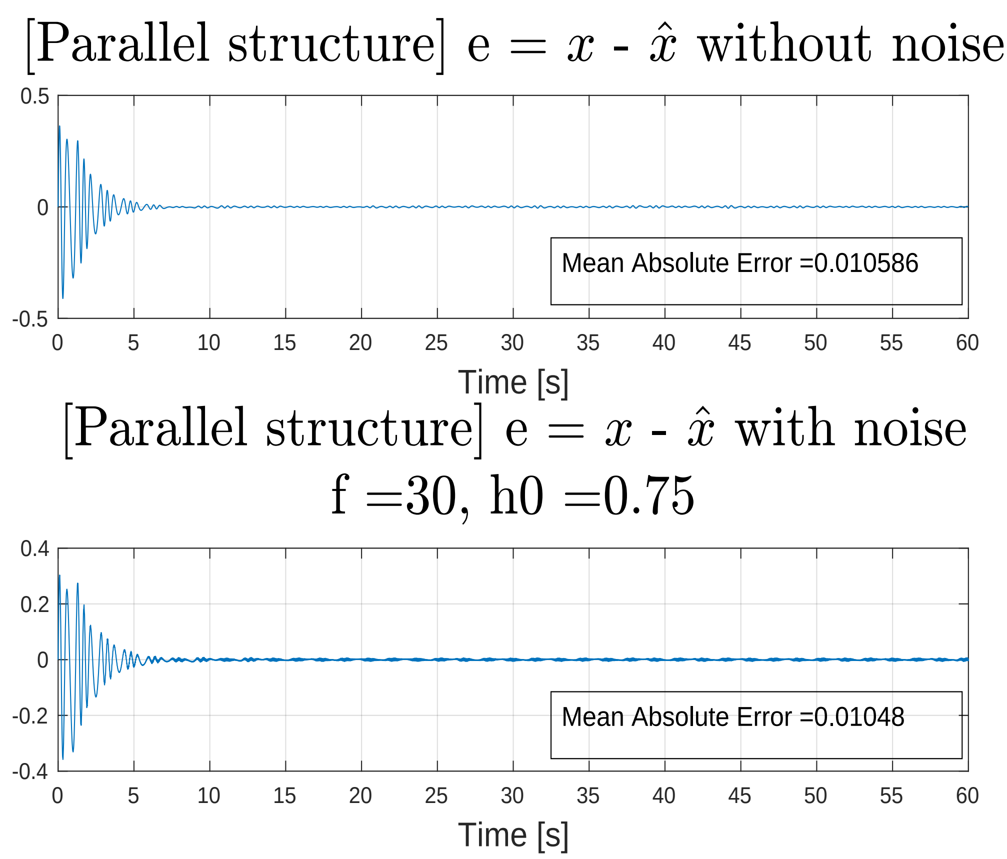
- Παρατηρήσεις
  - Η αλλαγή στην συχνότητα έχει εμφανή επίδραση στο σφάλμα **e** όταν το **x** λαμβάνεται με θόρυβο, ιδιαίτερα για μικρότερες συχνότητες, όπου παρατηρούμε ταλαντώσεις μεγάλου πλάτους γύρω από το μηδέν.
  - Το μέσο απόλυτο σφάλμα αυξάνεται όταν μεταβάλλουμε την συχνότητα. Την μεγαλύτερη αυξηση την παρατηρούμε όταν μειώσουμε την συχνότητα και συγκεριμένα για f = 5 Hz.

2.1.4 Εύρεση των παραμέτρων με χρήση της μεθόδου **Lyapunov** για μεγαλύτερες τιμές του η_0

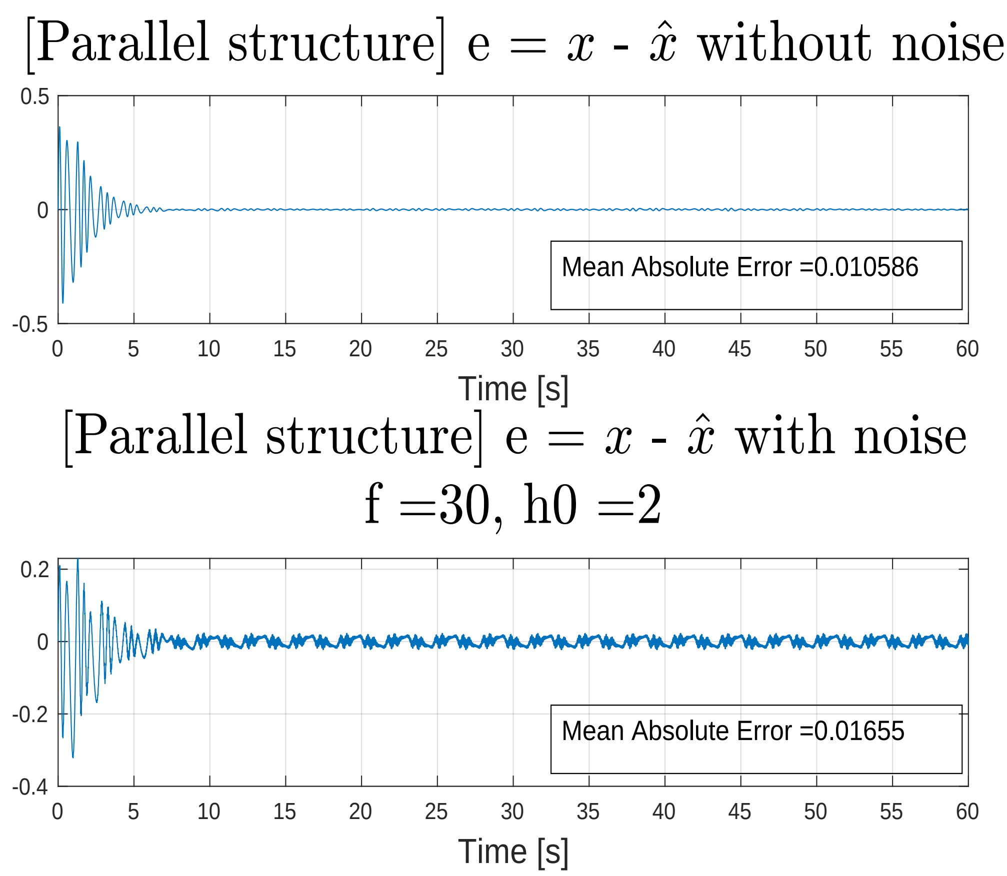
Εφαρμόζουμε την μέθοδο Lyapunov για την εύρεση των παραμέτρων του συστήματος όταν η είσοδος λαμβάνεται με θόρυβο συχνότητας f=30 Hz και για διάφορες τιμές του η_0. Για την ανάλυσή μας επιλέγουμε:

$$\eta_0 = [0.75, 2, 5]$$

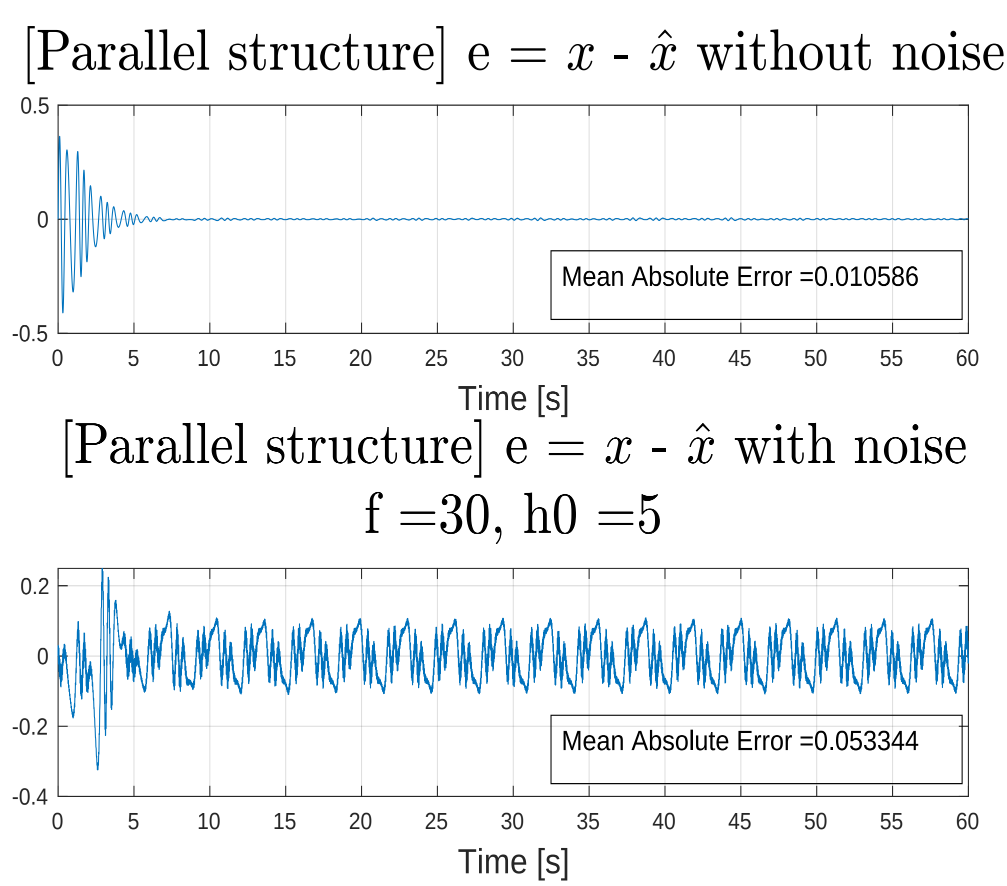
- $\eta_0 = 0.75$



- $\eta_0 = 2$


[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
Mean Absolute Error =0.010586
Time [s]
[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =30, h0 =2
Mean Absolute Error =0.01655
Time [s]

- $\eta_0 = 5$


[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
Mean Absolute Error =0.010586
Time [s]
[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =30, h0 =5
Mean Absolute Error =0.053344
Time [s]

- Παρατηρήσεις
  - Για το σφάλμα e παρατηρούμε μεγάλη απόκλιση από το μηδέν, ιδιαίτερα όταν το η_0 είναι αρκετά μεγαλύτερο του 1.
  - Παρατηρούμε μια μικρή αύξηση του μέσου απόλυτου σφάλματος για $\eta_0 = 0.75, 2$ και τη μέγιστη αύξηση παρατηρούμε για $\eta_0 = 2$
  - Όσο αυξάνουμε σταδιακά την παράμετρο η_0, αυτή θα ξεπεράσει κάποια στιγμή ένα κατώφλι, οπότε και δεν θα ισχύει η συνθήκη επιμένουσας διέγερσης. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα την απόκλιση της εκτίμησης των παραμέτρων του συστήματος από τις πραγματικές τους τιμές.

2.2 Εκτιμητής πραγματικού χρόνου μικτής δομής

2.2.1 Θεωρητική Ανάλυση

Για το σύστημα

$$\dot{x} = -ax + bu = -\theta_1 x + \theta_2 u \quad \text{x(0) = 0}$$

θεωρούμε το σύστημα αναγνώρισης μικτής δομής το οποίο μας επιστρέφει την εκτίμηση της εξόδου:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 x + \hat{\theta}_2 u + \theta_m (x - \hat{x})$$

Ακολουθώντας την ίδια μαθηματική ανάλυση με αυτή που ακολουθήσαμε για τον εκτιμητή παράλληλης δομής καταλήγουμε στις δύο εκτιμήσεις των μεταβλητών:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e x \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = -\gamma_2 e u \end{cases}$$

Οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος είναι:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \hat{\theta}_1 \\ x_3 = \hat{\theta}_2 \\ x_4 = \hat{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \dot{x} = -ax + bu = -ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e x = -\gamma_1 e x_1 \\ \dot{x_3} = \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u \\ \dot{x_4} = \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u + \theta_m (x - \bar{x}) = -x_2 x_4 + x_3 u + \theta_m e \end{cases}$$

Για το σφάλμα e ισχύει:

- Σφάλμα πρόβλεψης όταν το x λαμβάνεται χωρίς θόρυβο

$$e = x - \bar{x} = x_1 - x_4$$

- Σφάλμα πρόβλεψης όταν το x λαμβάνεται με θόρυβο

$$e = x + \eta - \bar{x} = x_1 + \eta - x_4$$

Επομένως οι εξισώσεις κατάστασης για σύστημα χωρίς θόρυβο είναι:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = -\gamma_1 x_1(x_1 - x_4) \\ \dot{x_3} = \gamma_2 u(x_1 - x_4) \\ \dot{x_4} = -x_2 x_4 + x_3 u + \theta_m(x_1 - x_4) \end{cases}$$

Ενώ όταν έχουμε θόρυβο οι εξισώσεις κατάστασης είναι οι εξής:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = -\gamma_1(x_1 + \eta)(x_1 + \eta - x_4) \\ \dot{x_3} = \gamma_2 u(x_1 + \eta - x_4) \\ \dot{x_4} = -x_2 x_4 + x_3 u + \theta_m(x_1 + \eta - x_4) \end{cases}$$

2.2.2 Εύρεση παραμέτρων με χρήση της μεθόδου **Lyapunov**

Για την εύρεση των παραμέτρων και την εκτέλεση του αλγορίθμου θα πρέπει να επιλέξουμε και πάλι τα γ_1 και γ_2. Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τη συνάρτηση choose_g1_g2, η οποία μας επιστρέφει τον συνδιασμό [γ1,γ2], για τον οποίο η μέθοδος Lyapunov μας έδωσε την εκτίμηση με το μικρότερο μέσο απόλυτο σφάλμα. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, για τον εκτιμητή μικτής δομής δίνουμε σαν όρισμα στην συνάρτηση τα εύρη

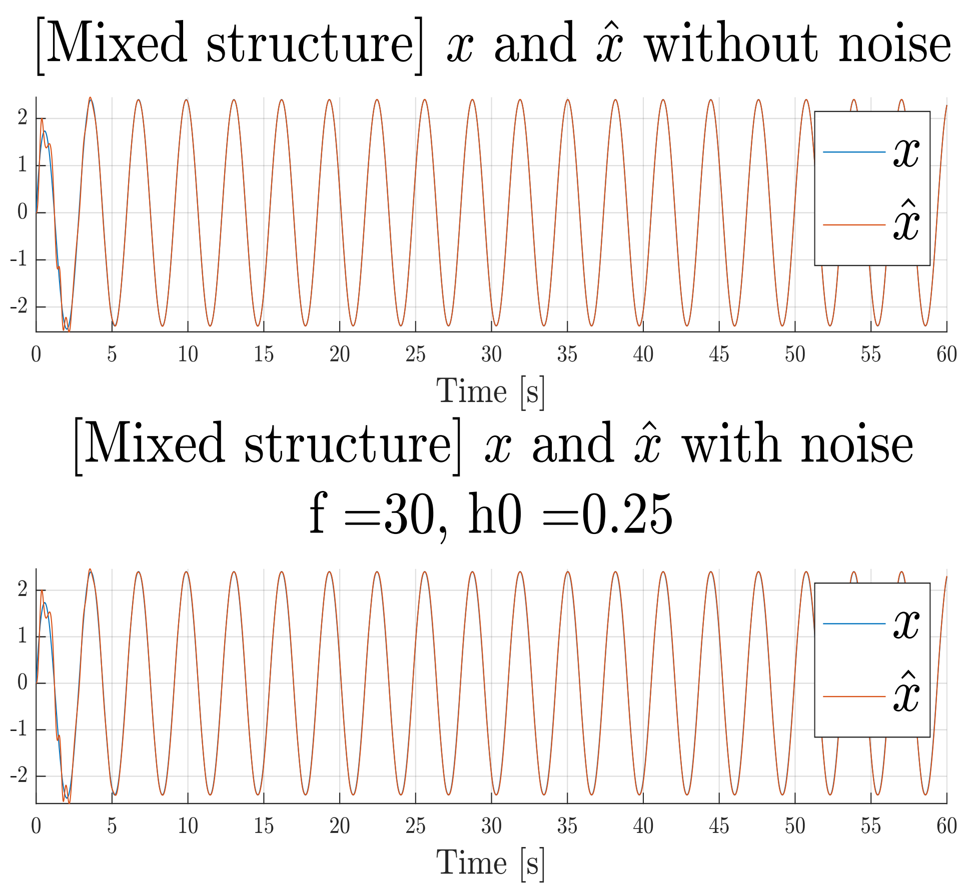
$$\gamma_1 = [10, 15, 20, 25, 30] \gamma_2 = [10, 15, 20, 25, 30]$$

Τρέχουμε την συνάρτηση και παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα:

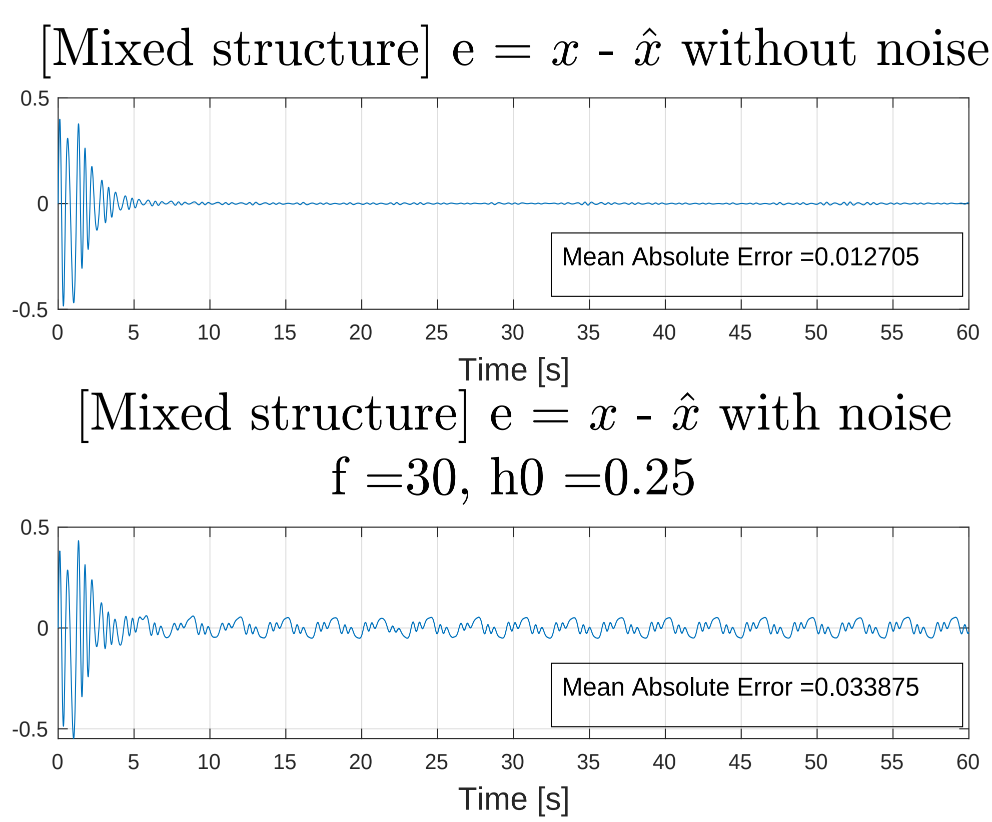
```
[Mixed Structure] Find optimal g1 and g2
for g1 = 10 and g2 = 10 Mean Absolute Error = 0.014669
for g1 = 10 and g2 = 15 Mean Absolute Error = 0.014104
for g1 = 10 and g2 = 20 Mean Absolute Error = 0.012171
for g1 = 10 and g2 = 25 Mean Absolute Error = 0.011786
for g1 = 10 and g2 = 30 Mean Absolute Error = 0.010960
for g1 = 15 and g2 = 10 Mean Absolute Error = 0.013808
for g1 = 15 and g2 = 15 Mean Absolute Error = 0.012743
for g1 = 15 and g2 = 20 Mean Absolute Error = 0.010870
for g1 = 15 and g2 = 25 Mean Absolute Error = 0.010035
for g1 = 15 and g2 = 30 Mean Absolute Error = 0.010623
for g1 = 20 and g2 = 10 Mean Absolute Error = 0.012255
for g1 = 20 and g2 = 15 Mean Absolute Error = 0.011228
for g1 = 20 and g2 = 20 Mean Absolute Error = 0.009901
for g1 = 20 and g2 = 25 Mean Absolute Error = 0.010750
for g1 = 20 and g2 = 30 Mean Absolute Error = 0.011380
for g1 = 25 and g2 = 10 Mean Absolute Error = 0.012312
for g1 = 25 and g2 = 15 Mean Absolute Error = 0.010533
for g1 = 25 and g2 = 20 Mean Absolute Error = 0.011124
for g1 = 25 and g2 = 25 Mean Absolute Error = 0.011235
for g1 = 25 and g2 = 30 Mean Absolute Error = 0.011421
for g1 = 30 and g2 = 10 Mean Absolute Error = 0.012393
for g1 = 30 and g2 = 15 Mean Absolute Error = 0.010088
for g1 = 30 and g2 = 20 Mean Absolute Error = 0.011060
for g1 = 30 and g2 = 25 Mean Absolute Error = 0.011294
for g1 = 30 and g2 = 30 Mean Absolute Error = 0.011841
Optimal pair: [g1,g2] = [20,20]
```

Επομένως, για τον εκτιμητή μικτής δομής, το μικρότερο μέσο απόλυτο σφάλμα έχουμε για $[\gamma_1, \gamma_2] = [20, 20]$ οπότε επιλέγουμε αυτές τις τιμές για την ανάλυσή μας.

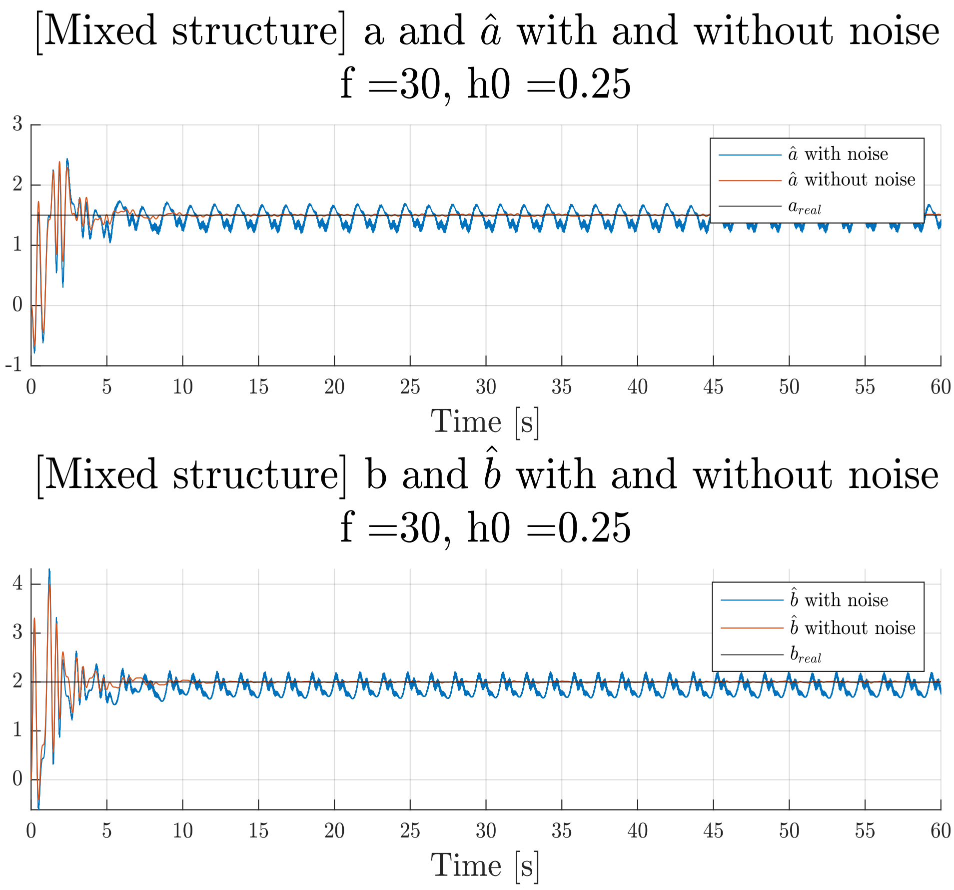
- Γραφική παράσταση του x και $\hat{x}$ με και χωρίς θόρυβο



- Γραφική παράσταση του $e = x - \hat{x}$ με και χωρίς θόρυβο



- Γραφική παράσταση των a,b και $\hat{a}$,$\hat{b}$ με και χωρίς θόρυβο



- Παρατήρηση:
Παρατηρώ ότι η εκτίμηση των παραμέτρων a και b παρουσία θορύβου δεν είναι καλή όταν χρησιμοποιούμε εκτιμητή μικτής δομής, σε αντίθεση με την εκτίμηση που παίρνουμε όταν χρησιμοποιούμε εκτιμητή παράλληλης δομής. Συγκεκριμένα, οι εκτιμήσεις τον παραμέτρων δεν τείνουν να γίνουν ίσες με τις πραγματικές τιμές, αλλά ταλαντώνονται γύρω από τις πραγματικές τιμές. Το σφάλμα επίσης δεν τείνει στο μηδέν όσο περνάει ο χρόνος, αλλά ταλαντώνεται γύρω από το μηδέν.Τα παραπάνω συμβαίνουν διότι η προσέγγιση των παραμέτρων όταν χρησιμοποιούμε παράλληλη και μικτή δομή αντίστοιχα, είναι:

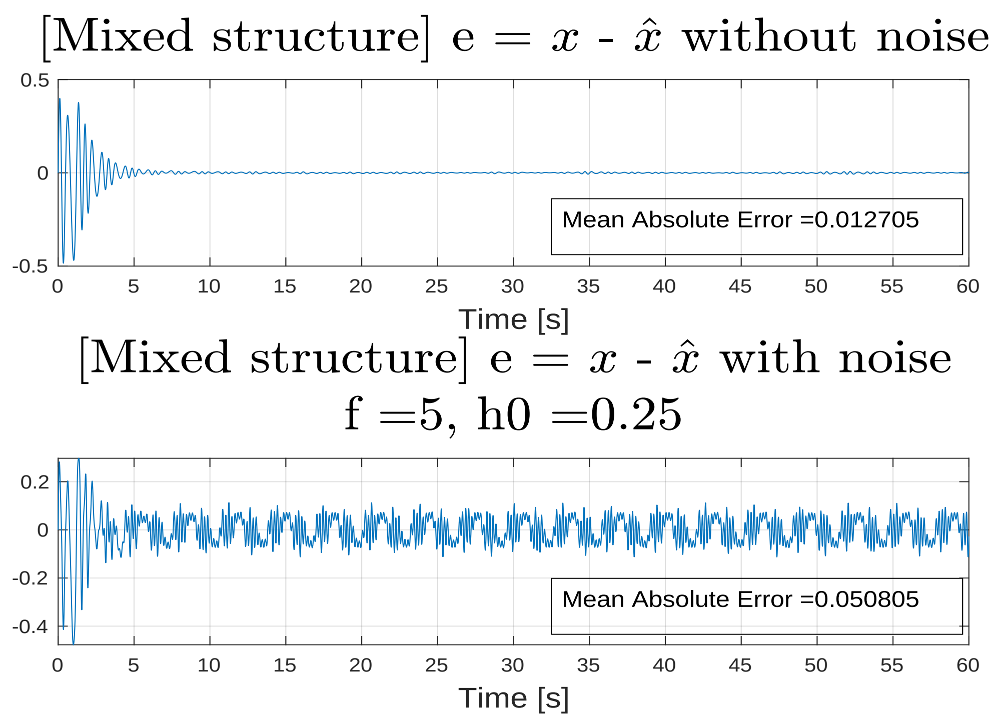
$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 x\hat{x} + \gamma_1 \hat{x}^2 \quad \text{(Παράλληλη Δομή)}$$
$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 x^2 + \gamma_1 x\hat{x} \quad \text{(Μεικτή Δομή)}$$

Ο θόρυβος εμπλέκεται στο x. Στην μεικτή δομή ο θόρυβος εμφανίζεται στο τετράγωνο ενώ στην παράλληλη δομή εμφανίζεται στην πρώτη. Επομένως ο θόρυβος έχει μεγαλύτερη επίδραση στην μικτή δομή και συνεπώς με την μικτή δομή θα πάρουμε χειρότερη προσέγγιση.
Τα παραπάνω είναι εμφανή και από το μέσο απόλυτο σφαλμα, το οποίο γενικα είναι μεγαλύτερο για τον εκτιμητή μικτής δομής.

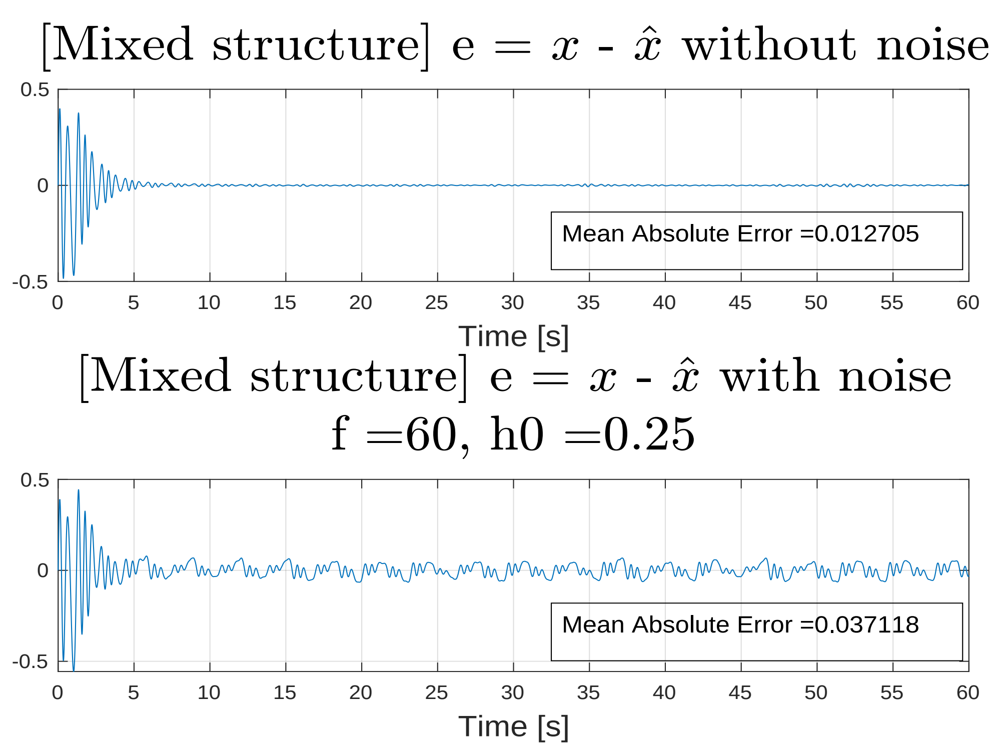
2.2.3 Εύρεση των παραμέτρων με χρήση της μεθόδου **Lyapunov** για διάφορες συχνότητες **f**

Εφαρμόζουμε την μέθοδο Lyapunov για την εύρεση των παραμέτρων του συστήματος όταν η είσοδος λαμβάνεται με θόρυβο συχνότητας f = [5,15,60,90]. Παρακάτω παρουσιάζονται κάποια ενδεικτικά διαγράμματα για f=5 και f=60.

- f = 5 Hz



- f = 60 Hz



- Παρατηρήσεις
  - Η μεταβολή της συχνότητας έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση ταλαντώσεων του σφάλματος γύρω από το μηδέν. Παρατηρούμε μεγαλύτερο πλάτος της ταλάντωσης όταν μειώνουμε την συχνότητα.
  - Το μέσο απόλυτο σφάλμα μεγαλώνει με την αλλαγή της συχνότητας. Παρατηρούμε ότι η μείωση της συχνότητας αυξάνει περισσοτερο το μέσο απόλυτο σφάλμα

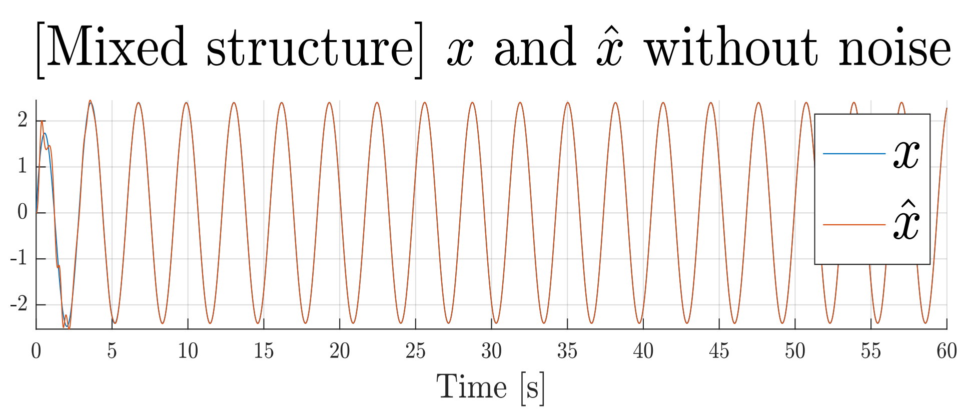
2.2.4 Εύρεση των παραμέτρων με χρήση της μεθόδου **Lyapunov** για μεγαλύτερες τιμές του η_0

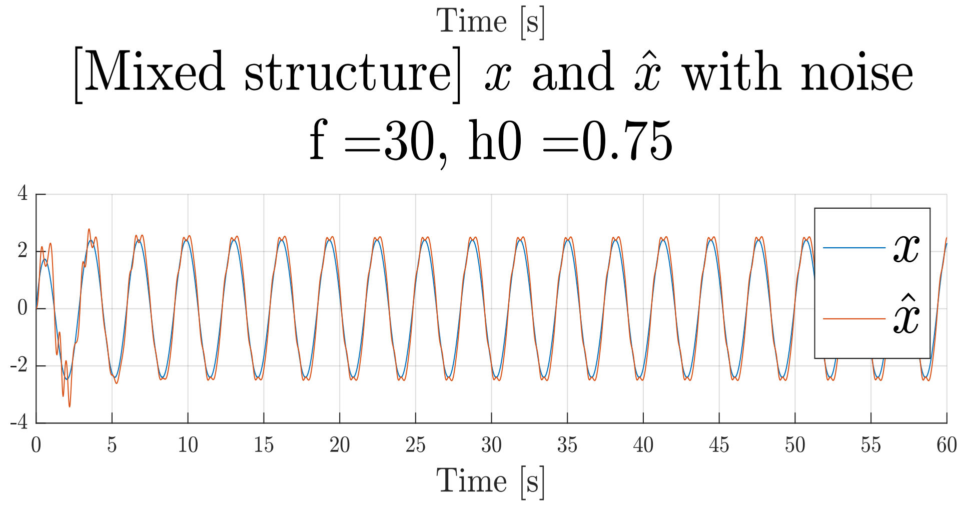
Εφαρμόζουμε την μέθοδο Lyapunov για την εύρεση των παραμέτρων του συστήματος όταν η είσοδος λαμβάνεται με θόρυβο συχνότητας f=30 Hz και για διάφορες τιμές του η_0. Για την ανάλυσή μας επιλέγουμε:

$$\eta_0 = [0.5, 0.75, 1, 1.2]$$

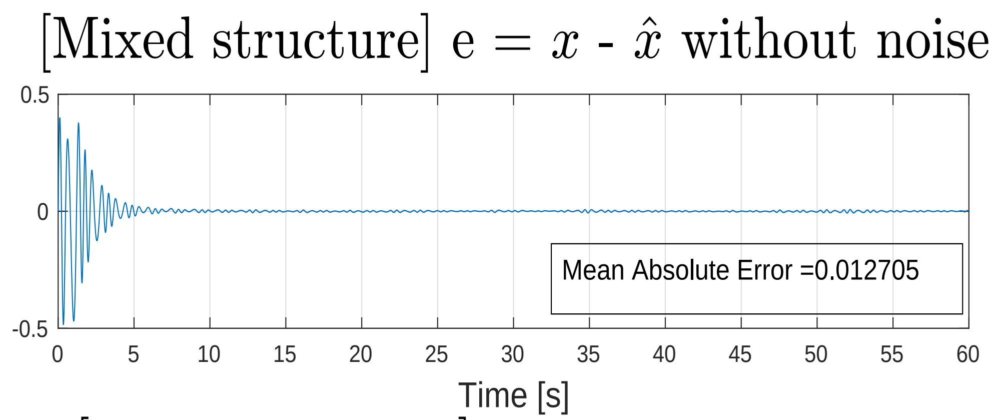
Παρακάτω παρουσιάζονται κάποια ενδεικτικά διαγράμματα για η_0 =0.75 και η_0 = 1.2

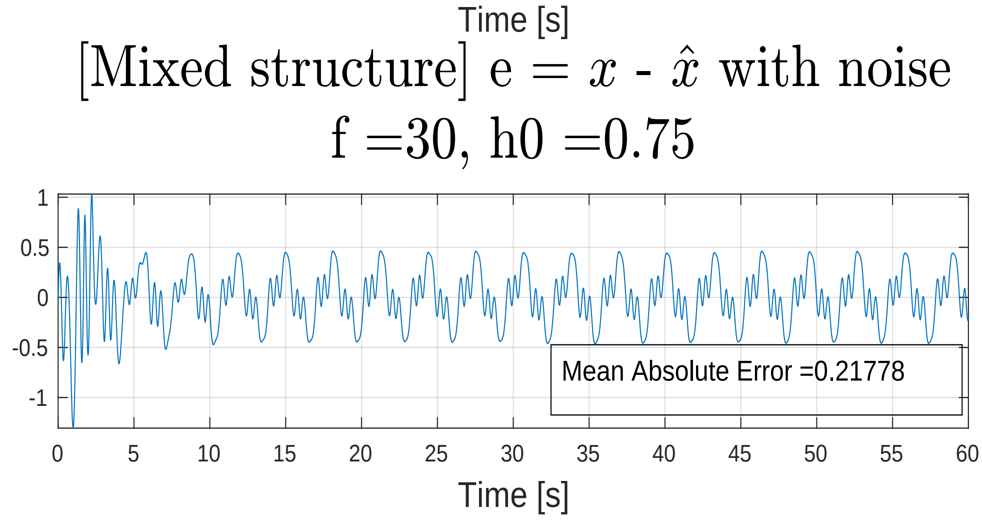
- $\eta_0 = 0.75$
  - Γραφική παράσταση του x και $\hat{x}$ με και χωρίς θόρυβο



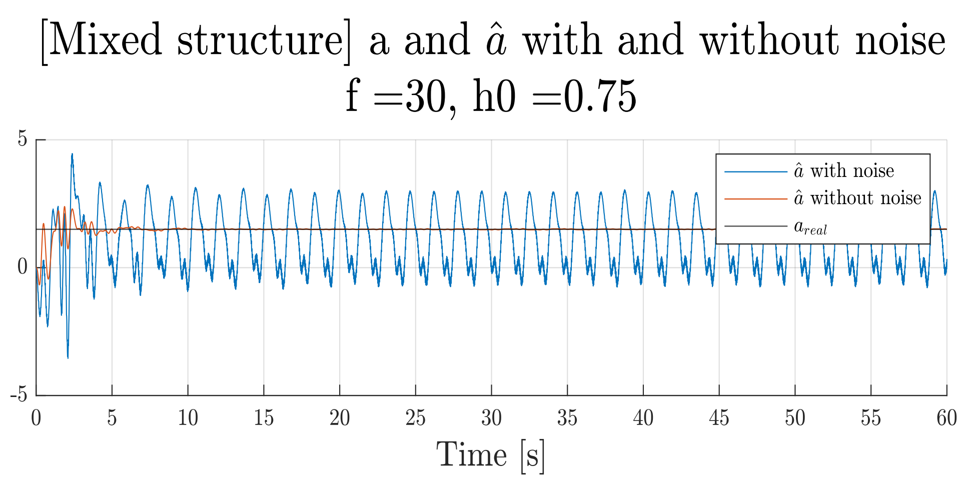


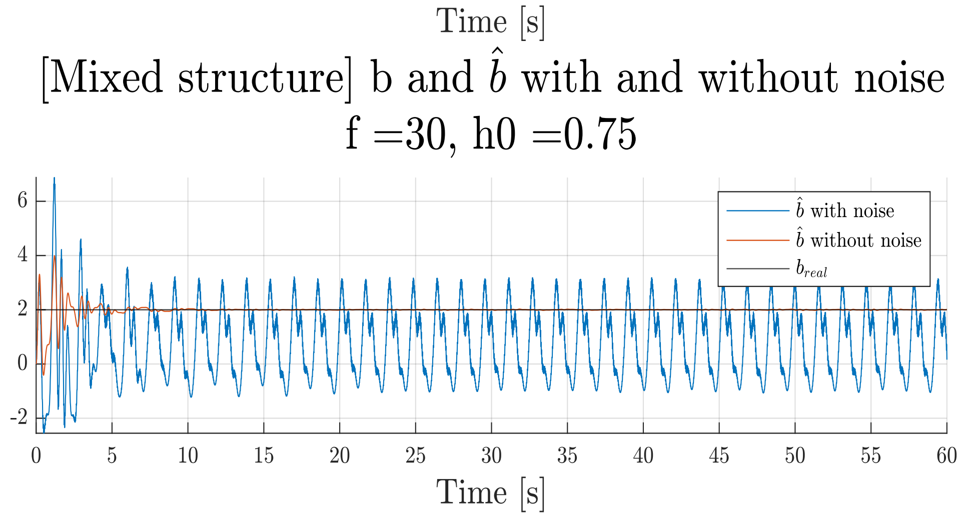
- Γραφική παράσταση του $e = x - \hat{x}$ με και χωρίς θόρυβο



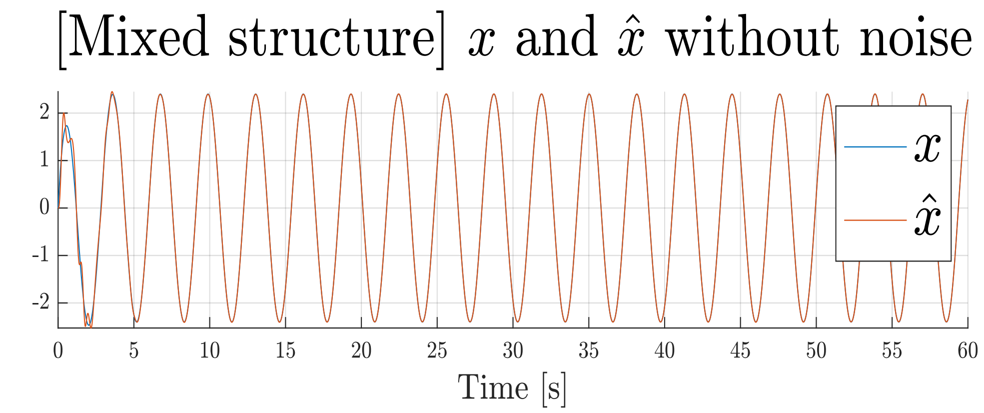


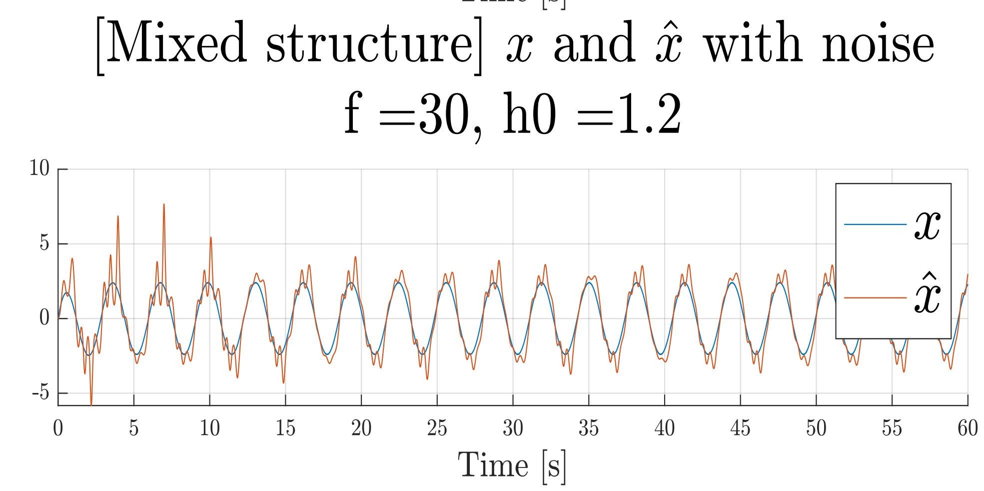
- Γραφική παράσταση των a,b και $\hat{a}$,$\hat{b}$ με και χωρίς θόρυβο



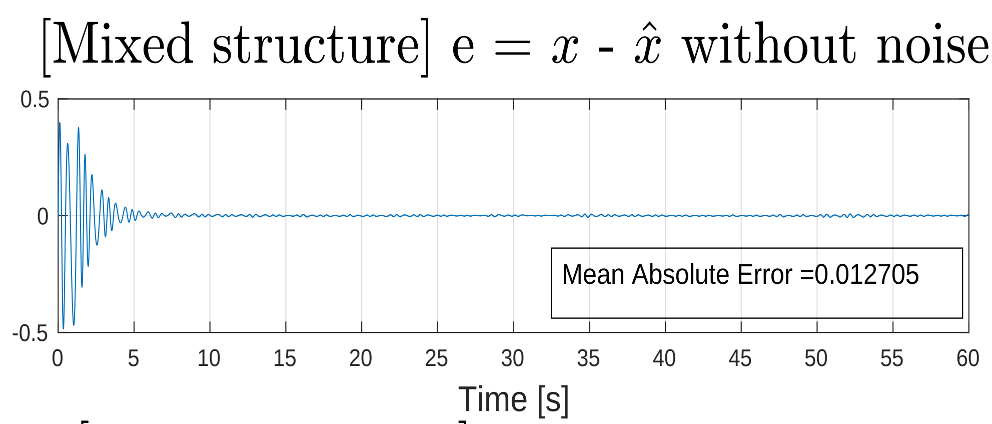


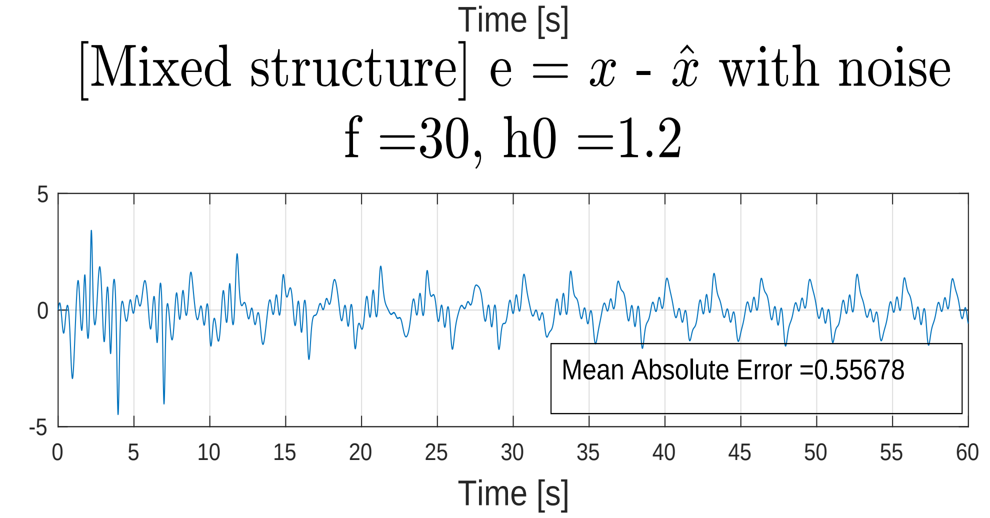
- $\eta_0 = 1.2$
  - Γραφική παράσταση του x και $\hat{x}$ με και χωρίς θόρυβο



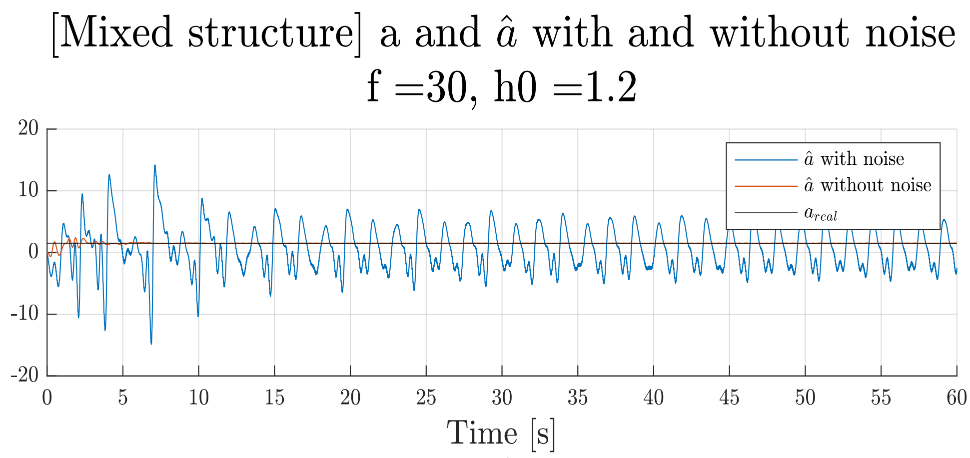


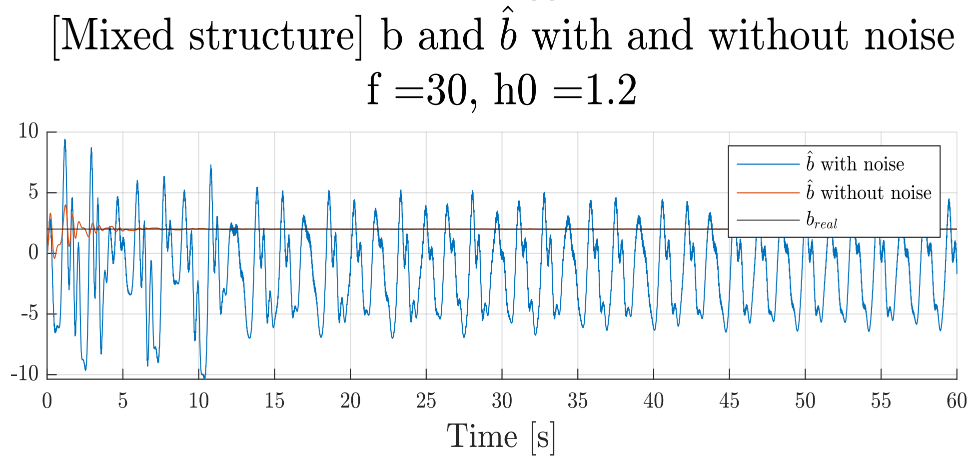
  - Γραφική παράσταση του $e = x - \hat{x}$ με και χωρίς θόρυβο





– Γραφική παράσταση των a,b και $\hat{a}$,$\hat{b}$ με και χωρίς θόρυβο





- Παρατηρήσεις
  - Γραφική παράσταση του $e = x - \hat{x}$ με και χωρίς θόρυβο
    Παρατηρώ ότι η αύξηση του η_0 επηρεάζει την εκτίμηση της εξόδου του συστήματος, ιδιαίτερα για μεγαλύτερες τιμές
  - Γραφική παράσταση του $e = x - \hat{x}$ με και χωρίς θόρυβο
    Το σφάλμα **e** για μεγαλύτερες τιμές του η_0 αποκλίνει από το μηδέν και παρουσιάζει ταλαντώσεις με σχετικά μεγάλο πλάτος. Το μέσο απόλυτο σφάλμα αυξάνεται αρκετά με την αύξηση του η_0.
  - Γραφική παράσταση των a,b και $\hat{a}$,$\hat{b}$ με και χωρίς θόρυβο
    Η εκτίμηση των παραμέτρων για μεγαλύτερο η_0 παρουσιάζει ταλαντώσεις γύρω από τις πραγματικές τους τιμές, οι οποίες έχουν μεγάλο πλάτος για μεγάλες τιμές του η_0.

2.3 Θέμα 3

2.4 Θεωρητική Ανάλυση

Στο θέμα 3 μας ζητείται η εκτίμηση παραμέτρων του συστήματος

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

με εκτιμητή πραγματικού χρόνου παράλληλης δομής βασισμένο στη μέθοδο Lyapunov. Αν αναλύσουμε τα διανύσματα του παραπάνω συστήματος στις συνιστώσες τους έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + b_1 u \\ \dot{x_2} = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + b_2 u \end{cases} \qquad (1)$$

Θεωρούμε το σύστημα αναγνώρισης παράλληλης δομής το οποίο μας επιστρέφει την εκτίμηση της εξόδου:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x_1}} \\ \dot{\hat{x_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a_{1,1}} & \hat{a_{1,2}} \\ \hat{a_{2,1}} & \hat{a_{2,2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x_1} \\ \hat{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{b_1} \\ \hat{b_2} \end{bmatrix} u \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \dot{\hat{x_1}} = \hat{a_{1,1}}\hat{x_1} + \hat{a_{1,2}}\hat{x_2} + +\hat{b_1}u \\ \dot{\hat{x_2}} = \hat{a_{2,1}}\hat{x_1} + \hat{a_{2,2}}\hat{x_2} + +\hat{b_2}u \end{cases} \qquad (2)$$

όπου, σύμφωνα με την θεωρία, για να ισχύει το θεώρημα Lyapunov, ισχύει:

$$\dot{\hat{A}} = \gamma_1 e \hat{x}^\top \Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{a_{1,1}}} & \dot{\hat{a_{1,2}}} \\ \dot{\hat{a_{2,1}}} & \dot{\hat{a_{2,2}}} \end{bmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x_1} \\ x_2 - \hat{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x_1} & \hat{x_2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{a_{1,1}}} & \dot{\hat{a_{1,2}}} \\ \dot{\hat{a_{2,1}}} & \dot{\hat{a_{2,2}}} \end{bmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} \hat{x_1}(x_1 - \hat{x_1}) & \hat{x_2}(x_1 - \hat{x_1}) \\ \hat{x_1}(x_2 - \hat{x_2}) & \hat{x_2}(x_2 - \hat{x_2}) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \dot{\hat{a_{1,1}}} = \gamma_1 \hat{x_1}(x_1 - \hat{x_1}) \\ \dot{\hat{a_{1,2}}} = \gamma_1 \hat{x_2}(x_1 - \hat{x_1}) \\ \dot{\hat{a_{2,1}}} = \gamma_1 \hat{x_1}(x_2 - \hat{x_2}) \\ \dot{\hat{a_{2,2}}} = \gamma_1 \hat{x_2}(x_2 - \hat{x_2}) \end{cases} \qquad (3)$$

Επιπλέον, ισχύει:

$$\dot{\hat{B}} = \gamma_2 u e \Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{b_1}} \\ \dot{\hat{b_2}} \end{bmatrix} = \gamma_2 u \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x_1} \\ x_2 - \hat{x_2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \dot{\hat{b_1}} = \gamma_2 u(x_1 - \hat{x_1}) \\ \dot{\hat{b_2}} = \gamma_2 u(x_2 - \hat{x_2}) \end{cases} \qquad (4)$$

Από τις (1),(2),(3),(4) εξάγουμε τις εξισώσεις κατάστασης του συστήματος:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = \hat{a_{1,1}} \\ y_4 = \hat{a_{1,2}} \\ y_5 = \hat{a_{2,1}} \\ y_6 = \hat{a_{2,2}} \\ y_7 = \hat{b_1} \\ y_8 = \hat{b_2} \\ y_9 = \hat{x_1} \\ y_{10} = \hat{x_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y_1} = \dot{x_1} = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + b_1 u \\ \dot{y_2} = \dot{x_2} = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + b_2 u \\ \dot{y_3} = \dot{\hat{a_{1,1}}} = \gamma_1 \hat{x_1}(x_1 - \hat{x_1}) \\ \dot{y_4} = \dot{\hat{a_{1,2}}} = \gamma_1 \hat{x_2}(x_1 - \hat{x_1}) \\ \dot{y_5} = \dot{\hat{a_{2,1}}} = \gamma_1 \hat{x_1}(x_2 - \hat{x_2}) \\ \dot{y_6} = \dot{\hat{a_{2,2}}} = \gamma_1 \hat{x_2}(x_2 - \hat{x_2} \\ \dot{y_7} = \dot{\hat{b_1}} = \gamma_2 u(x_1 - \hat{x_1}) \\ \dot{y_8} = \dot{\hat{b_2}} = \gamma_2 u(x_2 - \hat{x_2}) \\ \dot{y_9} = \dot{\hat{x_1}} = \hat{a_{1,1}}\hat{x_1} + \hat{a_{1,2}}\hat{x_2} + +\hat{b_1}u \\ \dot{y_{10}} = \dot{\hat{x_2}} = \hat{a_{2,1}}\hat{x_1} + \hat{a_{2,2}}\hat{x_2} + +\hat{b_2}u \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{y_1} = a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + b_1 u \\ \dot{y_2} = a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + b_2 u \\ \dot{y_3} = \gamma_1 y_9(y_1 - y_9) \\ \dot{y_4} = \gamma_1 y_{10}(y_1 - y_9) \\ \dot{y_5} = \gamma_1 y_9(y_2 - y_{10}) \\ \dot{y_6} = \gamma_1 y_{10}(y_2 - y_{10}) \\ \dot{y_7} = \gamma_2 u(y_1 - y_9) \\ \dot{y_8} = \gamma_2 u(y_2 - y_{10}) \\ \dot{y_9} = y_3 y_9 + y_4 y_{10} + y_7 u \\ \dot{y_{10}} = y_5 y_9 + y_6 y_{10} + y_8 u \end{cases} \qquad (5)$$

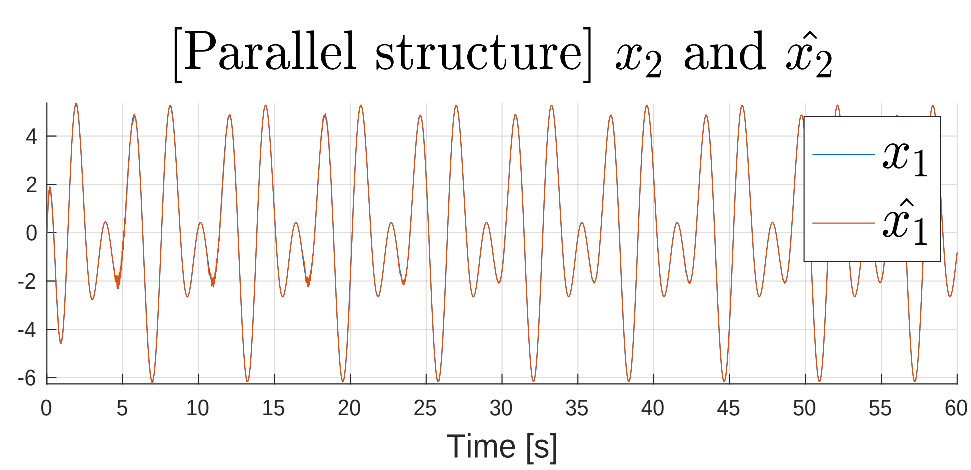
2.5 Εύρεση παραμέτρων με χρήση της μεθόδου **Lyapunov**

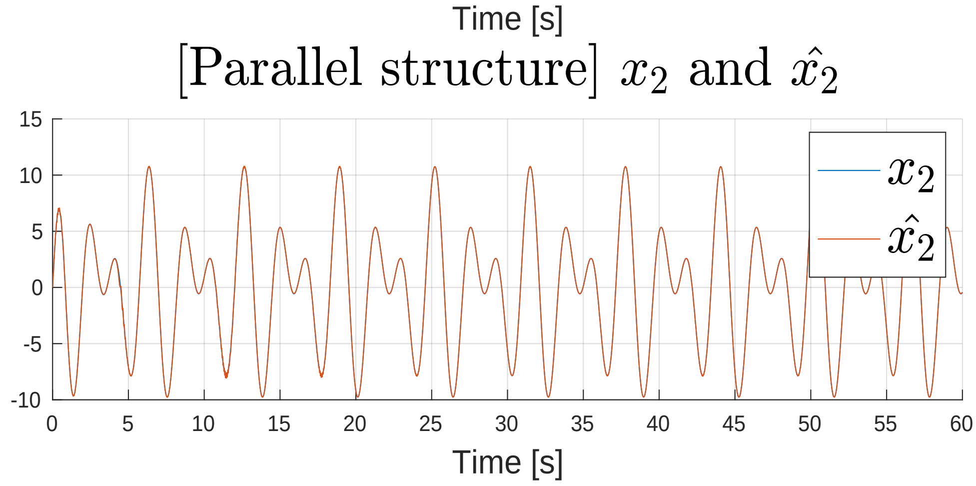
Χρησιμοποιούμε και πάλι την συνάρτηση choose_g1_g2 για να βρούμε τις σταθερές γ_1 και γ_2 για τις οποίες η μέθοδος Lyapunov παράγει την εκτίμηση με το μικρότερο μέσο απόλυτο σφάλμα. Δίνουμε σαν όρισμα το εύρος:

γ_1 = [20,25,30,40,50], γ_2 = [20,25,30,40,50] και παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα:

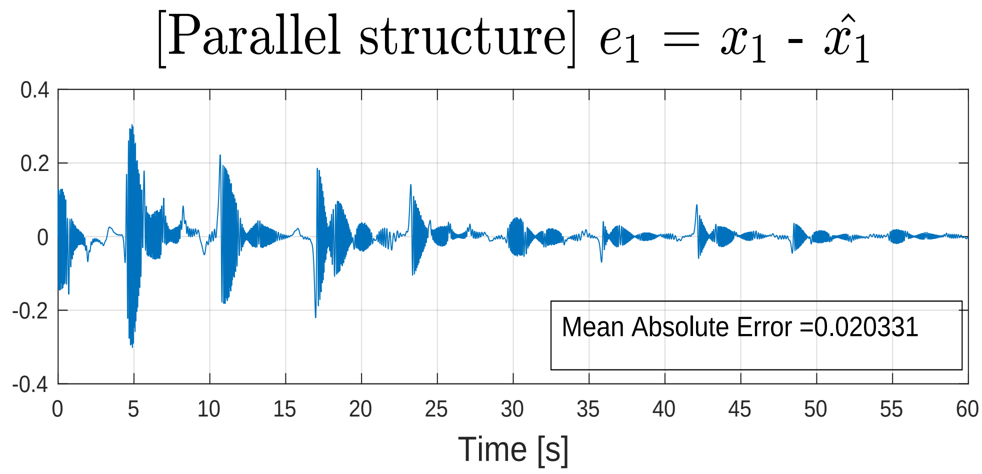
```
[Parallel Structure] Find optimal g1 and g2
for g1 = 20 and g2 = 20, Mean Absulute Error = 0.028728
for g1 = 20 and g2 = 25, Mean Absulute Error = 0.027611
for g1 = 20 and g2 = 30, Mean Absulute Error = 0.029739
for g1 = 20 and g2 = 40, Mean Absulute Error = 0.026885
for g1 = 20 and g2 = 50, Mean Absulute Error = 0.029276
for g1 = 25 and g2 = 20, Mean Absulute Error = 0.028566
for g1 = 25 and g2 = 25, Mean Absulute Error = 0.026813
for g1 = 25 and g2 = 30, Mean Absulute Error = 0.025554
for g1 = 25 and g2 = 40, Mean Absulute Error = 0.025588
for g1 = 25 and g2 = 50, Mean Absulute Error = 0.025426
for g1 = 30 and g2 = 20, Mean Absulute Error = 0.027136
for g1 = 30 and g2 = 25, Mean Absulute Error = 0.026119
for g1 = 30 and g2 = 30, Mean Absulute Error = 0.025511
for g1 = 30 and g2 = 40, Mean Absulute Error = 0.023666
for g1 = 30 and g2 = 50, Mean Absulute Error = 0.021889
for g1 = 40 and g2 = 20, Mean Absulute Error = 0.025099
for g1 = 40 and g2 = 25, Mean Absulute Error = 0.024492
for g1 = 40 and g2 = 30, Mean Absulute Error = 0.023900
for g1 = 40 and g2 = 40, Mean Absulute Error = 0.022359
for g1 = 40 and g2 = 50, Mean Absulute Error = 0.021029
for g1 = 50 and g2 = 20, Mean Absulute Error = 0.023202
for g1 = 50 and g2 = 25, Mean Absulute Error = 0.022703
for g1 = 50 and g2 = 30, Mean Absulute Error = 0.022492
for g1 = 50 and g2 = 40, Mean Absulute Error = 0.021191
for g1 = 50 and g2 = 50, Mean Absulute Error = 0.020331
Optimal pair:  [g1,g2] = [50,50]
>>
```

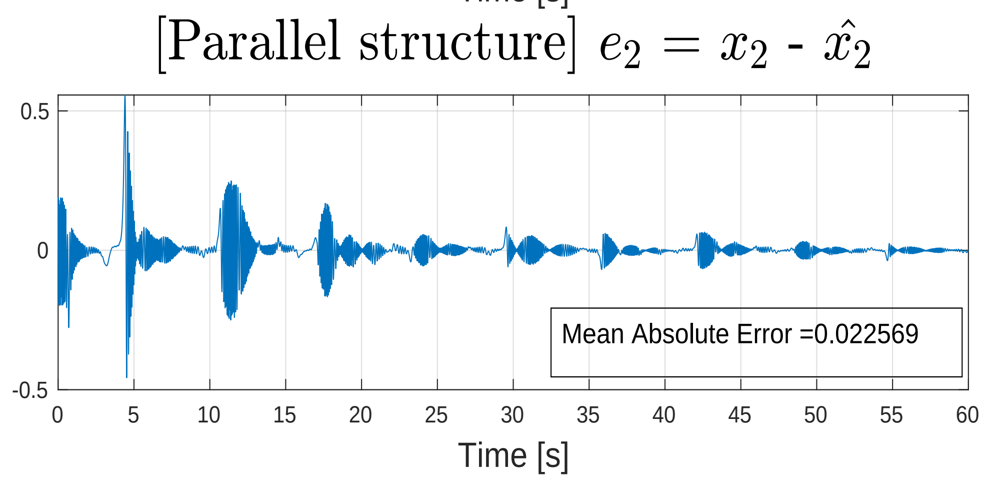
- Γραφική παράσταση των x_1, x_2 και $\hat{x}_1$,$\hat{x}_2$



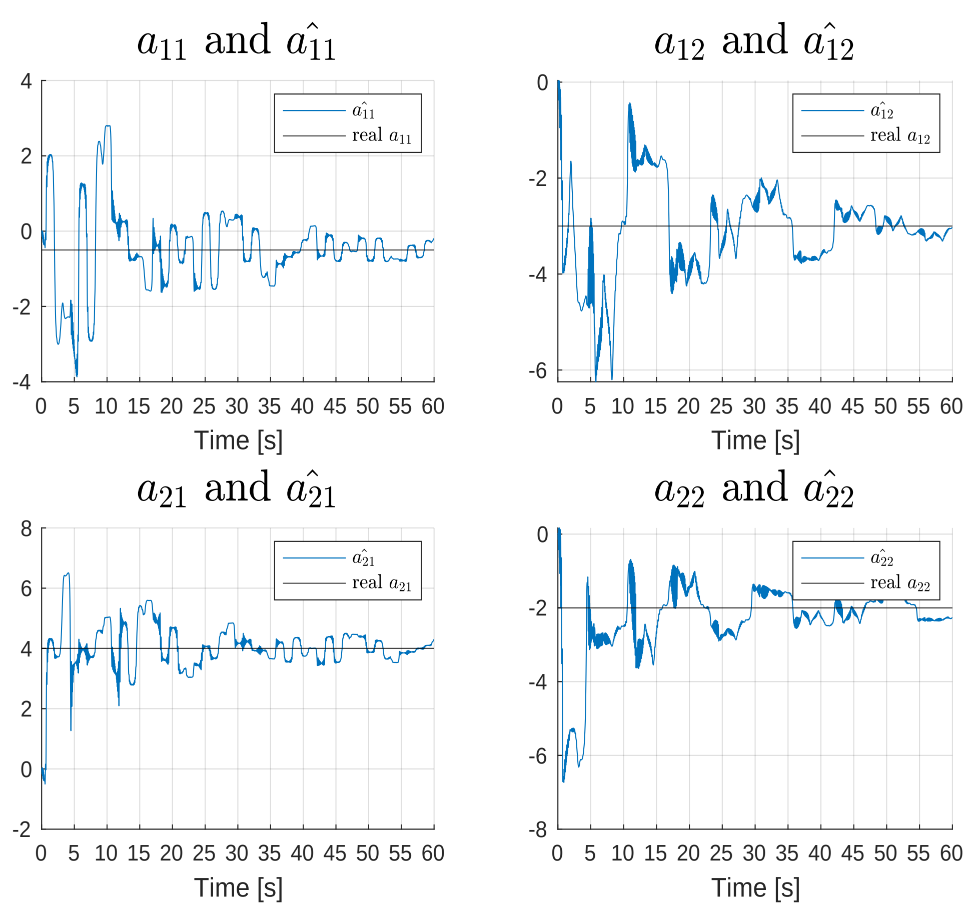


- Γραφική παράσταση των $e_1 = x_1 - \hat{x_1}$ και $e_2 = x_2 - \hat{x_2}$

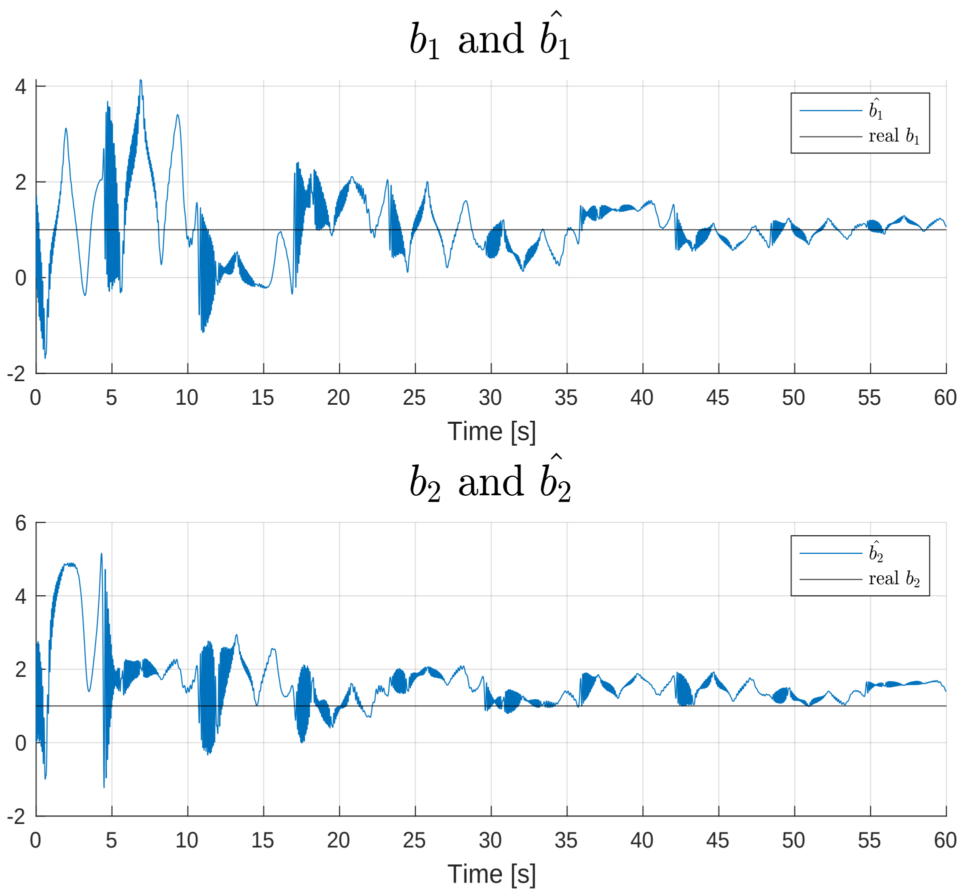




- Γραφική παράσταση των a_{11},a_{12},a_{21},a_{22} και $\hat{a_{11}}$, $\hat{a_{12}}$, $\hat{a_{21}}$, $\hat{a_{22}}$



- Γραφική παράσταση των b_{11},b_{12},b_{21},b_{22} και $\hat{b_{11}}$, $\hat{b_{12}}$, $\hat{b_{21}}$, $\hat{b_{22}}$



- Παρατηρήσεις
  - Γραφική παράσταση των x_1, x_2 και $\hat{x}_1$,$\hat{x}_2$
    Παρατηρώ ότι οι εκτιμήσεις των x_1 και x_2 είναι πολύ κοντά στις πραγματικές τους τιμές.
  - Γραφική παράσταση των $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ και $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$
    Παρατηρώ ότι τα σφάλματα e_1 και e_2 τείνουν στο μηδέν όσο περνάει ο χρόνος. Επίσης το μέσο απόλυτο σφάλμα είναι σχετικά μικρό. dfigure
  - Γραφική παράσταση των παραμέτρων
    Παρατηρώ ότι οι παράμετροι τείνουν στις πραγματικές τους τιμές όσο περνάει ο χρόνος.