# Maths Expertes - DM 5

Scott Hamilton

# 1

### 62p110

### Partie A

## 1.1

$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{i-2+3i}{6-i-2+3i} = \frac{-2+4i}{4+2i} = \frac{-1+2i}{2+i} \frac{(2-i)(-1+2i)}{5} = \frac{-2+4i+i+2}{5} = \frac{5i}{5} = i$

## 1.2

$(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = arg(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A})[2\pi] = arg(i)[2\pi] = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i \Rightarrow \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = |i| \Rightarrow \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = 1 \Rightarrow \frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow AB = AC$$

Donc ABC est isocèle rectangle en A.

### Partie B

## 1.3

$z_{D'} = i\frac{z_D - 2 + 3i}{z_D - i} = i\frac{1-i-2+3i}{1-i-i} = i\frac{-1+2i}{1-2i} = i\frac{(1+2i)(-1+2i)}{5} = i\frac{-1+2i-2i-4}{5} = i\frac{-5}{5} = -i$

## 1.4

### 1.4.1

On suppose que $E$ existe. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
i\frac{z_E - 2 + 3i}{z_E - i} &= 2i \\
\Leftrightarrow \frac{z_E - 2 + 3i}{2(z_E - i)} &= 1 \\
\Leftrightarrow z_E - 2 + 3i &= 2(z_E - i) \text{ (et } z_E \neq i) \\
\Leftrightarrow z_E - 2 + 3i &= 2z_E - 2i \text{ (et } z_E \neq i) \\
\Leftrightarrow z_E - 2z_E &= -2i - 3i + 2 \text{ (et } z_E \neq i) \\
\Leftrightarrow -z_E &= 2 - 5i \text{ (et } z_E \neq i) \\
\Leftrightarrow z_E &= -2 + 5i \text{ (et } z_E \neq i)
\end{aligned}$$

Pas de contradiction, il existe bien un unique point $E(-2+5i)$ tel que $z'_E = 2i$.

### 1.4.2

$$\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E} = \frac{i + 2 - 5i}{2 - 3i + 2 - 5i} = \frac{2 - 4i}{4 - 8i} = \frac{1 - 2i}{2 - 4i} = \frac{(2+4i)(1-2i)}{20} = \frac{2 - 4i + 4i + 8}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$arg\left(\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E}\right) = 0[2\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EB}) = 0[2\pi] \Rightarrow E \in (AB)$$

## 1.5

$$\frac{AM}{BM} = \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right| = \left|\frac{z-2+3i}{z-i}\right|$$

$$OM' = |z'| = \left|i\frac{z-2+3i}{z-i}\right| = |i|\left|\frac{z-2+3i}{z-i}\right| = \left|\frac{z-2+3i}{z-i}\right| = \frac{AM}{BM}$$

## 1.6

$$(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM'}) = arg(z')[2\pi] = arg\left(i\frac{z-2+3i}{z-i}\right)[2\pi] = arg(i) + arg\left(\frac{z-2+3i}{z-i}\right)[2\pi] = \frac{\pi}{2} + arg\left(\frac{z-2+3i}{z-i}\right)[2\pi]$$

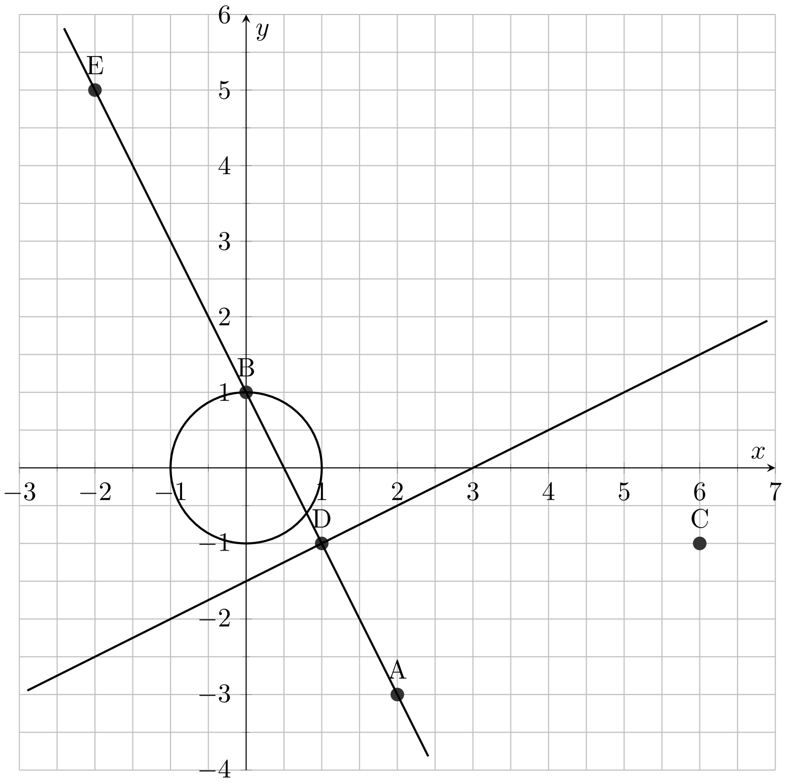
$$= \frac{\pi}{2} + arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)[2\pi] = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})[2\pi]$$

## 1.7

$M(z)$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ $\Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow |z-2+3i| = |z-i| \Leftrightarrow \frac{|z-2+3i|}{|z-i|} = 1$ (ou $z=i$) $\Leftrightarrow \left|\frac{z-2+3i}{z-i}\right| = |1|$ (ou $z=i$) $\Leftrightarrow |i|\left|\frac{z-2+3i}{z-i}\right| = |i||1|$ (ou $z=i$) $\Leftrightarrow \left|i\frac{z-2+3i}{z-i}\right| = 1$ (ou $z=i$) $\Leftrightarrow |z'| = 1$ (car $|i|=1$) $\Leftrightarrow z' \in \mathbb{U} \Leftrightarrow M' \in \mathscr{C}(O;1)$

## 1.8

$$\begin{aligned}
&M'(z') \text{ appartient à l'axe des imaginaires purs privé de B}\\
&\Leftrightarrow z' \in i\mathbb{R} \text{ (et } z' \neq i)\\
&\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}, z' = iy \text{ (et } z' \neq i)\\
&\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}, i\frac{z-2+3i}{z-i} = iy \text{ (et } z' \neq i)\\
&\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}, \frac{z-2+3i}{z-i} = y \text{ (et } z' \neq i)\\
&\Leftrightarrow \frac{z-2+3i}{z-i} \in \mathbb{R} \text{ (et } z' \neq i)\\
&\Rightarrow arg\left(\frac{z-2+3i}{z-i}\right) = 0[\pi] \text{ (et } z' \neq i)\\
&\Rightarrow arg\left(\frac{z-(2-3i)}{z-i}\right) = 0[\pi] \text{ (et } z' \neq i)\\
&\Rightarrow arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = 0[\pi] \text{ (et } z' \neq i)\\
&\Rightarrow (\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}) = 0[\pi] \text{ (et } z' \neq i)\\
&\Rightarrow M \in (AB) \text{ (et } M \neq B).
\end{aligned}$$




### 1.9

**Exercice 2**

### 1.10

Si n est un multiple de 3, alors $\exists k, n = 3k \Rightarrow z^n = z^{3k} = (1 - i\sqrt{3})^{3k} \Rightarrow$
$arg\left((1 - i\sqrt{3})^{3k}\right) = 3k \cdot arg(1 - i\sqrt{3})[2\pi] \Rightarrow arg(z^n) = 3k \cdot arg\left(2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)[2\pi] \Rightarrow arg(z^n) = 3k \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right)[2\pi] \Rightarrow$
$arg(z^n) = -k\pi[2\pi] \Rightarrow z^n \in \mathbb{R}$, Vrai.

### 1.11

$a = 2 - i$, $b = \frac{1+i}{2}a = \frac{1+i}{2}(2 - i) = \frac{2+2i-i+1}{2} = \frac{3+i}{2}$
$(\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{BA}) = arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_O - z_B}\right)[2\pi] = arg\left(\frac{2-i-\frac{3+i}{2}}{0-\frac{3+i}{2}}\right)[2\pi] = arg\left(\frac{\frac{4-2i-3-i}{2}}{\frac{-3-i}{2}}\right)[2\pi] = arg\left(\frac{4-2i-3-i}{-3-i}\right)[2\pi] =$
$arg\left(\frac{1-3i}{-3-i}\right)[2\pi] = arg\left(\frac{(1-3i)(-3+i)}{10}\right)[2\pi] = arg\left(\frac{-3+i+9i+3}{10}\right)[2\pi] = arg\left(\frac{10i}{10}\right)[2\pi] = arg(i)[2\pi] = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\frac{z_A - z_B}{z_O - z_B} = i \Rightarrow \left|\frac{z_A - z_B}{z_O - z_B}\right| = |i| \Rightarrow \frac{|z_A - z_B|}{|z_O - z_B|} = 1 \Rightarrow \frac{BA}{BO} = 1 \Rightarrow BA = BO$ (car $BO \neq 0$) $\Rightarrow$
$OAB$ est isocèle rectangle en B, Vrai.

## 1.12

On raisonne par l'absurde, s'il existe un point $M$ tel que $O$, $M$ et $M'$ ne sont pas alignés alors,

$$
\begin{aligned}
(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}) &\neq 0[\pi] \\
\Leftrightarrow arg\left(\frac{z_{M'}-z_O}{z_M-z_O}\right) &\neq 0[\pi] \\
\Leftrightarrow arg\left(\frac{z'-0}{z-0}\right) &\neq 0[\pi] \\
\Leftrightarrow arg\left(\frac{z'}{z}\right) &\neq 0[\pi] \\
\Leftrightarrow arg\left(\frac{-\frac{10}{\overline{z}}}{z}\right) &\neq 0[\pi] \\
\Leftrightarrow arg\left(\frac{-10}{z\overline{z}}\right) &\neq 0[\pi] \\
\text{Impossible car } z\overline{z}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow arg\left(\frac{-10}{z\overline{z}}\right) &= 0[\pi]
\end{aligned}
$$

Faux.