Matematički fakultet

Odgovori na teorijska ispitna pitanja iz analize 2

Radili
Lazar Jovanović 34/2023
Jana Vuković 124/2022
Igor Stojanović 159/2022

Profesor
dr Marek Svetlik

Beograd, 2024/2025

Sadržaj

1 Neodređeni integrali

1.1 Primitivna funkcija

Posmatrajmo neku funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, na primer $f(x) = x^2$. Možemo da pronađemo koeficijent pravca u tački $x_0 \in \mathbb{R}$ računanjem izraza $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. U našem primeru dobijamo $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2-(x_0)^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2x_0 + h = 2x_0$. Dakle, koeficijent pravca funkcije f u tački x_0 jeste broj $2x_0$. Na ovaj način imamo određenu novu funkciju $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisanu sa $\phi(x) = 2x$. Uobičajeno je da funkciju ϕ nazivamo izvodna funkcija (izvod, prvi izvod) funkcije f. Funkciju ϕ drugačije označavamo sa f'.

Sada razmotrimo obratan problem. Odredimo funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ako je poznato da je funkcija $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f'(x) = 2x$. Iz prošlog primera možemo da zaključimo da je $f(x) = x^2$ jedno rešenje. Zapitajmo se da li je i jedino. Nije, na primer funkcija $f(x) = x^2 + 1$ je takođe rešenje.

Pokušajmo da odredimo funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ako je poznato da je funkcija $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa:

$$f'(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1, \ x > 0 \\ 0, \ x = 0 \\ -1, \ x < 0 \end{cases}$$

Takvo f ne postoji, jer f' ima prekid prve vrste.

Definicija 1.1 *Neka je $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Funkciju $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ nazivamo primitivna funkcija za funkciju f na intervalu (a, b) ako je funkcija F diferencijabilna na (a, b) i za svako $x \in (a, b)$ važi $F'(x) = f(x)$.*

Prirodno se postavljaju pitanja da li za datu funkciju postoji primitivna funkcija i ako postoji koliko primitivnih funkcija ima.

Stav 1.1 *Neka je $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ i neka je $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija za funkciju f na intervalu (a, b) i neka je $C \in \mathbb{R}$ proizvoljno. Tada je funkcija $G : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $G(x) = F(x) + C$ primitivna funkcija za funkciju f na intervalu (a, b).*

Dokaz: G je diferencijabilna na (a, b) jer je zbir dve diferencijabilne funkcije i za svako x iz intervala (a, b) važi $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ što smo i hteli da dokažemo. ■

Ovim smo dokazali da ako je $F_1(x)$ primitivna funkcija, onda je i $F_1(x) + C$ primitivna funkcija. Sledeće pitanje je da li može da postoji neka funkcija $F_2(x)$ koja nije ovog oblika. O tome nam govori sledeća teorema.

Teorema 1.1 *Neka je $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ i neka su $F_1, F_2 : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ primitivne funkcije za funkciju f na intervalu $(a,\ b)$. Tada postoji $C \in \mathbb{R}$ takvo da $\forall x \in (a, b)$ važi $F_1(x) = F_2(x) + C$.*

Dokaz: Neka je funkcija $G : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Tada važi:

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Izaberimo proizvoljne $x_1, x_2 \in (a, b)$ takve da važi $x_1 < x_2$. Dokažimo da je $G(x_1) = G(x_2)$.

(1) G je neprekidna na $[x_1, x_2] \subset (a, b)$

(2) G je diferencijabilna na $(x_1, x_2) \subset (a, b)$

Iz (1) i (2), a na osnovu Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti, sledi da postoji $x_0 \in (x_1, x_2)$ takvo da:

$$G(x_1) - G(x_2) = G'(x_0)(x_2 - x_1) = 0(x_2 - x_1) = 0$$

Dakle, $G(x_1) = G(x_2)$. Kako su x_1 i x_2 proizvoljni, sledi da je G konstantna funkcija. Važi $\exists C \in \mathbb{R}$ takvo da $\forall x \in (a, b)$ važi $C = G(x) = F_1(x) - F_2(x)$ tj. $F_1(x) = F_2(x) + C$. ■

Podsetnik Lagranžove teoreme: Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i difernecijabilna na (a, b). Tada će postojati tačka $x_0 \in (a, b)$ takva da važi $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.

Primer 1.1 *Neka je* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definisana sa:* $f(x) = 2x$. *Odrediti:*

a) *Sve primitivne funkcije za funkciju* f.
To su funkcije $x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}$.

b) *Funkciju* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *koja je primitivna za funkciju* f *i za koju važi* $g(0) = \sqrt{2}$.
$g(x) = x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}$
$g(0) = 0^2 + C = \sqrt{2} \Rightarrow C = \sqrt{2}$
Rešenje je $g(x) = x^2 + \sqrt{2}$.

Primer 1.2 *Odrediti sve dvaput diferencijabilne funkcije* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *takve da* $\forall x \in \mathbb{R}$ *važi* $f''(x) = 0$.
$(f'(x))' = 0$
$f'(x) = C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$
$f(x) = C_1x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
Rešenje je $f(x) = C_1x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

1.2 Definicija i osnovna svojstva neodređenog integrala

Definicija 1.2 *Neka je* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. *Neodređeni integral funkcije* f *na intervalu* (a, b) *je skup svih primitivnih funkcija za funkciju* f *na intervalu* (a, b). *Neodređeni integral funkcije* f *obeležavamo sa* $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = \{F \mid F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R},\ (\forall x \in (a, b))(F'(x) = f(x))\}$$

Neka je $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *proizvoljna primitivna funkcija za funkciju* f *na* (a, b). *Tada je:*

$$\int f(x)\,dx = \{G \mid G : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, (\exists C \in \mathbb{R})(\forall x \in (a, b))(G(x) = F(x) + C)\} \tag{1}$$

Jednakost (1) *skraćeno zapisujemo na sledeći način:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Napomena: U jednakosti (2) ne vidi se interval (a, b) što stvara potencijalnu opasnost.

Primer 1.3 *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *i neka su* $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. *Naći integral:* $\int (a_nx^n + ... + a_0)dx$.

Nagađanjem možemo da dođemo do rešenja: $\int (a_nx^n + ... + a_0)dx = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + ... + a_0x + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Primer 1.4 *Naći* $\int \frac{1}{x}dx$.

Neka je $f(x) = \frac{1}{x}$. Nije naglašeno koji interval posmatramo zbog čega uzimamo domen funkcije. $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
Imamo dva intervala pa posmatramo dva slučaja:

1. slučaj: $x \in (0, +\infty)$ $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C_1 = \ln|x| + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$
2. slučaj: $x \in (-\infty, 0)$ $\int \frac{1}{x}dx = \ln(-x) + C_2 = \ln|x| + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}$

Bitno je naglasiti da se konstante C_1 i C_2 odnose na intervale. One u opštem slučaju ne moraju da budu jednake. U sledećem primeru vidimo gde može da nastane problem.

Primer 1.5 *Odrediti funkciju* $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, *takvu da* $f(1) = 0$, $f(-1) = 1$ *i za svako* $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ *važi* $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Pogrešno rešenje:
$f(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
$f(1) = 0 = \ln(1) + C \implies C = 0$
$f(-1) = 1 = \ln(1) + C \implies C = 1$
Dobijamo da je $C = 0 = 1$ što je kontradikcija.
Tačno rešenje:
Posmatrajmo $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ definisanu sa:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x) + 1, & x < 0 \end{cases}$$

Njen izvod je:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

Dakle, funkcija f je tražena funkcija jer važi $f(1) = 0$, $f(-1) = 1$. U ovom primeru je $C_1 = 0$, a $C_2 = 1$.

Stav 1.2 *Neka su* $f_1, f_2 : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcije koje imaju primitivne funkcije na* (a, b) *i neka su* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. *Tada funkcija* $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *ima primitivnu funkciju na* (a, b) *i važi:*

$$\int (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) dx = \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx$$

Dokaz: Neka je funkcija $F_1 : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija za f_1 i neka je funkcija $F_2 : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija za f_2. Tada po definiciji primitivne funkcije važe jednakosti:

$$F_1'(x) = f_1(x), \ x \in (a, b) \tag{1}$$

$$F_2'(x) = f_2(x), \ x \in (a, b) \tag{2}$$

Iz (1) i (2) zaključujemo:

$$(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2)'(x) = \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) \tag{3}$$

Ako krenemo od desne strane jednakosti koju dokazujemo i primenimo prethodne jednakosti dobijamo:

$$\begin{aligned} D &= \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx \\ &= \lambda_1 (F_1(x) + C_1) + \lambda_2 (F_2(x) + C_2) \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C \\ &= (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2)(x) + C \\ &= \int (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) dx \\ &= L \end{aligned}$$

gde su $C_1, \ C_2 \in \mathbb{R}$, a $C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$. Ovim završavamo dokaz. ■

Primer 1.6 *Naći* $\int(\frac{3}{\sqrt{x}} + \cos\frac{x}{3} - 52^x)dx,\ x > 0.$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{\sqrt{x}}dx + \int \cos\frac{x}{3}dx - 5\int 2^x dx \\ &= 6\sqrt{x} + C_1 + 3\sin\frac{x}{3} + C_2 - 5\frac{2^x}{\ln 2} - 5C_3 \\ &= 6\sqrt{x} + 3\sin\frac{x}{3} - 5\frac{2^x}{\ln 2} + C \end{aligned}$$

gde su $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$, a $C = C_1 + C_2 - 5C_3$.

Tablica integrala:	
$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ x \in (0,+\infty) \quad \int x^\alpha dx$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
$n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R} \quad \int x^n dx$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$n \in \mathbb{N}\backslash\{1\},\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad \int x^{-n}dx$	$\frac{1}{1-n}x^{1-n} + C_1,\ x \in (-\infty,0)$ $\frac{1}{1-n}x^{1-n} + C_2,\ x \in (0,+\infty)$
$x \in \mathbb{R} \quad \int x^{-1}dx$	$\ln\lvert x\rvert + C_1,\ x \in (-\infty,0)$ $\ln\lvert x\rvert + C_2,\ x \in (0,+\infty)$
$a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R} \quad \int a^x dx$	$\frac{1}{\ln a}a^x + C$
$x \in \mathbb{R} \quad \int \sin x dx$	$-\cos x + C$
$x \in \mathbb{R} \quad \int \cos x dx$	$\sin x + C$
$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi) \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx$	$tgx + C_k,\ x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi, \pi + k\pi) \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	$-ctgx + C_k,\ x \in (k\pi, \pi + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
$x \in (-1,1) \quad \int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}dx$	$arcsinx + C$
$x \in \mathbb{R} \quad \int \frac{1}{1+x^2}dx$	$arctgx + C$
$x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad \int x^0 dx$	$x + C_1,\ x \in (-\infty,0)$ $x + C_2,\ x \in (0,+\infty)$

1.3 Metode integracije

Teorema 1.2 *(Teorema o smeni promenljive 1) Neka je* $F : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *primitivna funkcija za funkciju* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *i neka je* $g : (\alpha,\beta) \longrightarrow (a,b)$ *diferencijabilna funkcija na* (α,β)*. Tada postoji primitivna funkcija za funkciju* $(f \circ g)g' : (\alpha,\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ *i važi:*

$$\int((f \circ g)g')(x)dx = F(g(x)) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Dokaz: Neka je $x \in (a, b)$ proizvoljno.

$$\begin{aligned}(F(g(x)) + C)' &= ((F \circ g)(x) + C)' \\ &= ((F \circ g)(x))' + 0 \\ &= F'(g(x))g'(x) && \text{(teorema o izvodu kompozicije)} \\ &= f(g(x))g'(x) \\ &= ((f \circ g)g')(x)\end{aligned}$$

■

Primer 1.7 *Neka su* $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$. *Naći:* $\int (ax + b)^n dx$.

Neka su $f(t) = t^n$ i $g(x) = ax + b$. Tada važi $F(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$ i $g'(x) = a$.

$$\begin{aligned}\int (ax + b)^n dx = \int f(g(x))dx = \int \frac{1}{a} f(g(x))g'(x)dx \\ &= \frac{1}{a}\int f(g(x))g'(x)dx \\ &= \frac{1}{a}F(g(x)) + C \\ &= \frac{1}{a}\frac{1}{1+n}(ax + b)^{1+n}\end{aligned}$$

Primitivna funkcija koju smo dobili je definisana na $x \in \mathbb{R}$ za $n > 0$.
Za $n \in \mathbb{Z} \cap ((-\infty, -1) \cup \{0\})$ je definisana na $x \in (-\infty, -\frac{b}{a}) \cup (-\frac{b}{a}, +\infty)$.
Napomena: Izdvajamo slučaj kad je $n = 0$ jer za $x = -\frac{b}{a}$ dobijamo 0^0. Iako važi $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = 1$, izraz 0^0 nije definisan jer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^y$ ne postoji.

Primer 1.8 *Naći* $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

Neka su $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ i $g(x) = e^x + 1$. Tada važi $F(t) = 2\sqrt{t}$ i $g'(x) = e^x$.

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}}dx = \int f(g(x))e^x dx = \int f(g(x))g'(x)dx \\ &= F(g(x)) + C \\ &= 2\sqrt{e^x + 1}\end{aligned}$$

Teorema 1.3 *(Teorema o smeni promenljive 2) Neka je* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, *neka je* $g : (\alpha, \beta) \longrightarrow (a, b)$ *diferencijabilna funkcija takva da postoji* $g^{-1} : (a, b) \longrightarrow (\alpha, \beta)$ *koja je takođe diferencijabilna i neka je* $F : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ *primitivna funkcija za funkciju* $(f \circ g)g' : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$. *Tada postoji primitivna funkcija za funkciju* f *i važi:* $\int f(x)dx = F(g^{-1}(x)) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Izaberimo proizvoljno $x \in (a, b)$. Tada:

$$\begin{aligned}(F(g^{-1}(x)) + C)' &= (F(g^{-1}(x)))' + 0 = F'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) \\ &= ((f \circ g)g')(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) \\ &= (f \circ g)(g^{-1}(x))g'(g^{-1})(g^{-1})'(x) \\ &= (f(x))(g \circ g^{-1})'(x) \\ &= f(x)x' \\ &= f(x)\end{aligned}$$

■

Pogledajmo sada par primera koji ilustruju kad smemo da koristimo teoremu 1.3.

Primer 1.9 *Neka je* $g : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ *definisano sa* $g(t) = e^t$ *i neka je* $g^{-1} : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definisano sa* $g^{-1}(x) = \ln x$.

Funkcije g i g^{-1} su diferencijabilne na svojim domenima pa možemo primeniti teoremu.

Primer 1.10 *Neka je* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definisano sa* $g(t) = t^3$ *i neka je* $g^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definisano sa* $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu. Ostaje da proverimo da li je i funkcija g^{-1}. Proverimo da li je ona diferencijabilna u nuli: $(g^{-1})'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{g^{-1}(h) - g^{-1}(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$. Dakle, nije diferencijabilno, zbog čega ne može primeniti teoremu.

Primer 1.11 *Neka je* $g : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ *definisano sa* $g(t) = t^3$ *i neka je* $g^{-1} : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ *definisano sa* $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu. Za izvod funkcije g^{-1} dobijamo: $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Ovo je definisano na celom domenu pa možemo da primenimo teoremu.

Sledi primer korišćenja teoreme 1.3.

Primer 1.12 *Neka je* $a > 0$. *Naći* $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Neka je $f : (-a, a) \longrightarrow (0, a]$ definisano sa $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ i neka je $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow (-a, a)$ definisano sa $g(x) = a \sin x$. Tada je $g^{-1} : (-a, a) \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definisano sa $g^{-1}(x) = arcsin\frac{x}{a}$.
Izvod $g'(x) = a \cos x$ je definisan na celom domenu pa možemo da koristimo teoremu 1.3. Zbog preglednijeg zapisa, neka je $g^{-1}(x) = t$.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int f(x) dx = F(g^{-1}(x)) + C = \int ((f \circ g) g')(t) dt = \int a \cos(t) \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(t)} dt \\
&= \int a \cos(t) \sqrt{a^2 (1 - \sin^2(t))} dt = \int a^2 \cos(t) \sqrt{1 - \sin^2(t)} dt = \int a^2 \cos^2(t) dt \\
&= \int \frac{a^2}{2} (1 + \cos(2t)) dt = \int \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \cos(2t) dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin(2t) + C
\end{aligned}$$

Dobili smo rešenje integrala, ali ovo rešenje možemo još da sredimo.

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \sin(2 arcsin\frac{x}{a}) + C \\
=&\frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} 2 sin(arcsin\frac{x}{a}) cos(arcsin\frac{x}{a}) + C && \textit{(formula za polovinu ugla sinusa)} \\
=&\frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \frac{x}{a} cos(arcsin\frac{x}{a}) + C && \textit{napomena} \\
=&\frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + \frac{ax}{2} \sqrt{cos^2(arcsin\frac{x}{a})} + C && \textit{(kosinus na domenu je pozitivan)} \\
=&\frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + \frac{ax}{2} \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin\frac{x}{a})} + C \\
=&\frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + \frac{ax}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C \\
=&\frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C
\end{aligned}$$

Napomena: Iako važi da je $\sin(\arcsin(x)) = x$, ne mora da važi da je $\arcsin(\sin(x)) = x$.
Na kraju možemo da proverimo da li smo dobili tačno rešenje tako što uradimo izvod primitivne funkcije.

Opisali smo kako se ponaša integral linearnih kombinacije funkcija i kako se uvode smene. Ostaje da vidimo šta se dešava sa integralom proizvoda dve funkcije. O tome nam govori sledeća teorema.

Teorema 1.4 *(Teorema o parcijalnoj integraciji) Neka su $u, v : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije. Tada funkcija $uv' : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ima primitivnu funkciju ako i samo ako funkcija $u'v : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ima primitvnu funkciju. Važi:*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Dokaz: Neka je $x \in (a, b)$ proizvoljno.

$$(uv)'(x) = (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \tag{1}$$

Pretpostavimo da $u'v$ ima primitivnu funkciju. Tada iz (1) dobijamo:

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x) \tag{2}$$

Kako $(u(x)v(x))'$ i $u'(x)v(x)$ imaju primitivne funkcije, iz (2) sledi da je i $u(x)v'(x)$. Osim toga važi:

$$\int u(x)v'(x)dx = \int (u(x)v(x))'dx - \int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Drugi smer dokaza je potpuno analogan. ∎

Primer 1.13 *Naći $\int e^x \sin x dx$.*

Primenjujemo teoremu 1.4.

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x \quad v'(x) = \sin x \\ u'(x) &= e^x \quad v(x) = -\cos x \end{aligned}$$

$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$
Ostaje da se izračuna $\int e^x \cos x dx$. Ponovo primenjujemo teoremu 1.4.

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x \quad v'(x) = \cos x \\ u'(x) &= e^x \quad v(x) = \sin x \end{aligned}$$

$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$
Uvrstimo dobijeni izraz u prethodnu jednakost.

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \\ 2\int e^x \sin x dx &= -e^x \cos x + e^x \sin x + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R} \\ \int e^x \sin x dx &= \frac{1}{2}(-e^x \cos x + e^x \sin x) + C,\ C = \frac{C_1}{2} \end{aligned}$$

Primer 1.14 *Naći $\int \frac{1}{x} dx$ za $x > 0$.*

Iskoristićemo teoremu 1.4.

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{x} \quad v'(x) = 1 \\ u'(x) &= -\frac{1}{x^2} \quad v(x) = x \end{aligned}$$

Dobijamo jednakost $\int \frac{1}{x} dx = \frac{x}{x} + \int \frac{1}{x} = 1 + \int \frac{1}{x}$. Greška koja se često pravi je da se integrali skrate i da se dobije $1 = 0$, što znači da ovaj integral ne postoji. Ovo nije tačno jer ovu jednakost možemo da zapišemo i kao $F + C_1 = 1 + F + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Ako skratimo primitivne funkcije dobijamo vezu između konstanti što nam nije od pomoći. Ovaj integral je tablični, pa možemo da rešimo metodom pogađanja rešenja.

1.4 Integracija racionalnih funkcija

Integraciju racionalnih funkcija možemo da rešavamo po algoritmu. Za algoritam je potrebno da znamo rešenja integrala oblika: $\int \frac{A}{x-a}dx$, $\int \frac{1}{(x-a)^k}dx$, $\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}dx$ i $\int \frac{Mx+N}{(x^2+bx+c)^n}dx$, gde su $A, a, M, N, b, c \in \mathbb{R}$, $b^2 - 4c < 0$, $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Lema 1.1 $\int \frac{A}{x-a}dx$, *gde su* $A, a \in \mathbb{R}$.

Neka je funkcija $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(t) = \frac{A}{t}$ i funkcija $g : \mathbb{R}\backslash\{a\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ definisana sa $g(x) = x - a$. Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu, gde je $g'(x) = 1$, a primitivna funkcija funkcije f je funkcija $F(t) = A \ln|t|$. Tada možemo da primenimo teoremu 1.2.

$$\int \frac{A}{x-a}dx = \int ((f \circ g)g')(x)dx = F(g(x)) + C = A \ln|x-a| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Napomenimo da C za $x > a$ i C za $x < a$ mogu biti različiti.

Lema 1.2 $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx$, *gde su* $A, a \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Neka je funkcija $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(t) = \frac{A}{t^k}$ i funkcija $g : \mathbb{R}\backslash\{a\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ definisana sa $g(x) = x - a$. Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu, gde je $g'(x) = 1$, a primitivna funkcija funkcije f je funkcija $F(t) = \frac{A}{(1-k)t^{k-1}}$. Tada možemo da primenimo teoremu 1.2.

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \int ((f \circ g)g')(x)dx = F(g(x)) + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Lema 1.3 $\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}dx$, *gde su* $M, N, b, c \in \mathbb{R},\ b^2 - 4c < 0$.

Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(t) = \frac{Mt}{t^2+1} + \frac{2N-bM}{(t^2+1)\sqrt{4c-b^2}}$ i funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana sa $g(x) = \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}$. Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu, gde je $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}$. Potrebno je da izračunamo primitivnu funkciju:

$$\begin{aligned}
\int f(t)dt &= \int \frac{Mt}{t^2+1} + \frac{2N-bM}{(t^2+1)\sqrt{4c-b^2}}dt \\
&= \frac{M}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}dt + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}}\int \frac{1}{t^2+1}dt \\
&= \frac{M}{2}\ln(t^2+1) + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan t + C,\ C \in \mathbb{R} \\
&= F(t) + C
\end{aligned}$$

Tada možemo da primenimo teoremu 1.2.

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}dx &= \int ((f \circ g)g')(x)dx \\
&= F(g(x)) + C \\
&= \frac{M}{2}\ln\Big(\Big(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\Big)^2 + 1\Big) + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\Big(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\Big) + C,\ C \in \mathbb{R} \\
&= \frac{M}{2}\ln\Big(\frac{4x^2+4xb+b^2+4c}{4c-b^2}\Big) + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\Big(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\Big) + C \\
&= \frac{M}{2}\Big(\ln(x^2+xb+c) - \ln\Big(c - \frac{b^2}{4}\Big)\Big) + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\Big(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\Big) + C \\
&= \frac{M}{2}\ln(x^2+xb+c) + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\Big(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\Big) + C_1,\ C_1 = C + \frac{M}{2}\ln\Big(c - \frac{b^2}{4}\Big)
\end{aligned}$$

$M, N, b, c \in \mathbb{R}, \ , n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$
$\int \frac{Mx+N}{(x^2+bx+c)^n}$

$$I_n(x) = \int \frac{Mx+N}{((x+\frac{b}{2})^2 + \frac{4c-b^2}{4})^n} dx = \int \frac{M(x+\frac{b}{2})+P}{((x+\frac{b}{2})^2+\alpha^2)^n} = \int \frac{Mt+P}{(t^2+\alpha^2)^n} = M\int \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n} + P\int \frac{1}{(t^2+\alpha^2)^n}$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Smena za prvi deo} \\ s = t^2+\alpha^2 \\ \frac{ds}{2} = tdt \end{array} \right| = \frac{M}{2}\int \frac{1}{s^n} + \frac{P}{\alpha^{2n}}\int \frac{1}{(\frac{t^2}{\alpha^2}+1)^n} = \frac{M}{2}\int s^{-n} + \frac{P}{\alpha^{2n}}\int \frac{1}{(\frac{t^2}{\alpha^2}+1)^n}$$

$$= \frac{M}{2}\frac{1}{1-n}s^{1-n} + C + \frac{P}{\alpha^{2n}}\int \frac{1}{(\frac{t^2}{\alpha^2}+1)^n} = \frac{M}{2}\frac{1}{1-n}(x^2+bx+c)^s + C + \frac{P}{\alpha^{2n-1}}\int \frac{1}{(s^2+1)^n}$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \frac{1}{(s^2+1)^n} & dv = ds \\ du = \frac{2s}{(s^2+1)^{n+1}} & v = s \end{array} \right| = \frac{M}{2}\frac{1}{1-n}s^{1-n} + C + \frac{s}{(s^2+1)^n} - \int \frac{2s^2}{(s^2+1)^{2n+1}}$$

$$= \frac{M}{2}\frac{1}{1-n}s^{1-n} + C + \frac{2s}{(s^2+1)^n} - 2\int \frac{s^2+1}{(s^2+1)^{2n+1}} + 2\int \frac{1}{(s^2+1)^{2n+1}}$$
$$= \frac{M}{2}\frac{1}{1-n}s^{1-n} + C + \frac{2s}{(s^2+1)^n} - 2\int \frac{1}{(s^2+1)^{2n}} + 2\int \frac{1}{(s^2+1)^{2n+1}}$$
$$= \frac{M}{2}\frac{1}{1-n}s^{1-n} + C + \frac{2s}{(s^2+1)^n} - 2I_n + 2I_{n+1}$$

Neka su $P, Q : R \longrightarrow R$ polinomi. pri cemu je stepen od $P >= 0, \ Q >= 1$. Algoritam za nalazenje $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$.

Ako polinom Q nema realnih nula primitivnu funkciju za funkciju $\frac{P}{Q}$ nalazimo na intervalu $(-\inf, +\inf)$. Ako su $a_1 < a_2 < ... < a_l$ realne nule polinoma Q, primitivnu funkciju, za funkciju $\frac{P}{Q}$ nalazimo na intervalima $(-\inf, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup ... \cup (a_l, +\inf)$

K1: Ako je $stP < stQ$ idi na K2
Ako je $stP \geq stQ$ Vršimo deljenje, tj.
$P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$. S i R su polinomi, $stR < stQ$.
$\frac{P}{Q} = \frac{SQ}{Q} + \frac{R}{Q}$
$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{dx} = \int S(x)\mathrm{dx} + \frac{R(x)}{Q(x)}\mathrm{dx}$
Idi na korak 2

K2: $Q(x) = q(x-a1)^{k_1}...(x-as)^{k_s}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}...(x^2+b_tx+c_t)^{n_t}$
$q \in \mathbb{R}\backslash 0$ najstariji koeficijent polinoma Q.
$a_1...a_s$ razlicite nule polinoma Q
$b_1...b_t, \ c_1....,c_t \in \mathbb{R}$ i $b_i^2 * 4c_i < 0$ za i iz $1..t$
$k_1...k_s \in \mathbb{N}_0$
$n_1...n_t \in \mathbb{N}_0$
$k_1 + .. + k_s + 2(n_1 + ... + n_t) = \text{st } Q$.
$Q(z) = q(z-z_1) * ... * (z - z_{\text{st } Q})$.
z_1,..., $z_{\text{st}Q}$ kompleksne nule polinoma Q.

K3: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{s}(\frac{A_{i1}}{(x-a_i)} + \frac{A_{i2}}{(x-a_i)^2} + ... + \frac{A_{iki}}{(x-a_i)^{k}i} + \sum_{j=1}^{t}\frac{(M_{j1}x+N_{j1})}{(x^2+b_jx+c_j)} + ... + \frac{(M_{jnj}x+N_{jnj})}{(x^2+b_jx+c_j)^{nj}}$.
$Ai\nu, Mj\nu, Nj\nu$ su koeficijenti koje treba odrediti.
Tih koeficijenata ima $k_1 + k_2 + ... + k_s + 2(n_1 + ... + n_t) = \text{st}Q$

K4: Određivanje integrala P/Q svodi se na određivanje $k_1 + ... + k_s + n_1 + ... + n_t$ integrala koji su jednaki integralima u prethodne četiri stavke.

1.5 Integracija trigonometrijskih funkcija

Oznaku $\int \mathrm{R}(u,v)$ koristimo za oznaku racionalnih funkcija argumenata u i v. Npr. $\mathrm{R}(u,v) = \frac{u+v}{u-v+2}$.
$\int \mathrm{R}(\sin x, \cos x)\mathrm{dx}$ rešavamo smenom:
$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ definisano svuda sem u $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$...
$x = 2\mathrm{arctg}t$
Neka $x \in (-\pi, \pi)$ tj $\frac{x}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ Ove funkcije su uzajamno inverzne na ovom domenu.
Neophodan nam je sledeći deo za izvođenje:

$$\frac{1}{\cos^2 s} = \frac{\cos^2 s + \sin^2 s}{\cos^2 s} = 1 + (\frac{\sin s}{\cos s})^2 = 1 + \mathrm{tg}^2 s$$

Izvedimo prvo sin x:

$$\begin{aligned}\sin x =& \sin(2\mathrm{arctg}t) = 2\sin(\mathrm{arctg}t)\cos(\mathrm{arctg}t) = 2\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}t)\cos^2(\mathrm{arctg}t)\\ =& 2t\cos^2(\mathrm{arctg}t) = \frac{2t}{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}t)} = \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

Izvedimo sada cos x:

$$\begin{aligned}\cos x =& \cos(2\mathrm{arctg}t) = \cos^2(\mathrm{arctg}t) - \sin^2(\mathrm{arctg}t) = 2\cos^2(\mathrm{arctg}t) - 1\\ =& \frac{2}{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}t)} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

$\int \mathrm{R}(\sin x, \cos x)\mathrm{dx} = \int \mathrm{R}(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}\mathrm{dt}$
Smena je bijektivna pa je smemo vratiti.

Primer 1.15 $\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5} dx$

$D_f = \mathbb{R}$ i tražimo $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tkd. $F'(x) = f(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}$
Primenom smene dobijamo sledeće, s tim da smo ograničeni tj. $x \in (-\pi, \pi)$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5}\frac{2}{1+t^2}\mathrm{dt} = \int \frac{2}{\frac{4t-1+t^2+5+5t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt} = \int \frac{\mathrm{dt}}{3t^2+2t+2}\\ = \int \frac{\mathrm{dt}}{3((t+\frac{1}{3})^2 + \frac{5}{9})} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}(\frac{3\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}) + C\end{aligned}$$

$C \in \mathbb{R}, x \in (-\pi, \pi)$ ovo $F : (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$
Razmatrajmo zadatak na sledeći način:
$G(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3\mathrm{tg}\frac{x}{2}+10}{\sqrt{5}}$
$D_G = \mathbb{R}\backslash\{(2l+1)\pi | l \in \mathbb{Z}\}$
$G'(x) = f(x)$ za svako $x \in D_G$
Primetimo da je funkcija definisana na svakom intervalu oblika $((2l+1)\pi, (2l+3)\pi)$ $l \in \mathbb{Z}$ samim tim za $x \in ((2l-1)\pi, (2l+1)\pi)$ će važiti:
$\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\mathrm{dx} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C_l$ $C_l \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} \dots \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C_{-1}, & x \in (-3\pi, -\pi) \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C_0, & x \in (-\pi, \pi) \\ \dots \end{cases}$$

$F(\pi) = ?F(-\pi) = ?$... Obzirom da je $f : (a,b)$ neprekidna, sledi da postoji $F : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tkd. $F'(x) = f(x)$ za svako $x \in (a,b)$
Da bi funkcija bila neprekidna u neko x mora zadovoljiti sledeće:
$F(x) = \lim_{x \to -\pi-} F(x) = \lim_{x \to -\pi+} F(x)$
$\lim_{x \to \pi-} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_0$

$\lim\limits_{x\to\pi+} F(x) = \dfrac{-\pi}{2\sqrt{5}} + C_1$
$C_1 = \frac{\pi}{\sqrt{5}} + C_0$
$F((2l+1)\pi) = \lim\limits_{x\to(2l+1)\pi+} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\text{arctg}\dfrac{3\text{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C_l = \dfrac{-\pi}{2\sqrt{5}} + C_{l+1} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_l$
$C_{l+1} = \frac{\pi}{\sqrt{5}} + C_l$
$C_{l+1} = \frac{(l+1)\pi}{\sqrt{5}} + C_0$
$(2l-1)\pi < x < (2l+1)\pi$
$\frac{x-\pi}{2\pi} < l < \frac{x+\pi}{2\pi},\ l \in \mathbb{Z}$
$l = [\frac{x+\pi}{2\pi}]$
$C_l = [\frac{x+\pi}{2\pi}]\frac{\pi}{\sqrt{5}} + C_0$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}\text{arctg}\frac{3\text{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + [\frac{x+\pi}{2\pi}]\frac{\pi}{\sqrt{5}} + C_0,\ x \in \mathbb{R}\backslash\{(2l+1)\pi | l \in \mathbb{Z}\} \\ \frac{(2l+1)\pi}{2\sqrt{5}} + C_0,\ x = (2l+1)\pi, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2 Određeni integrali

Motivacija: Neka je $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ neprekidna funkcija, i neka je $\phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le f(x)\}$
P(ϕ) je povrsina figure ϕ
$f : [0,1] \to [0,+\infty)$
$f(x) = x^2$
$n \in \mathbb{N}, x_k = \frac{k}{n}, k \in \{0,...,n\}$
$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, ..., x_n = 1$
$P_k = [x_{k-1}, x_k] \times [0, f(x_k)], k = 1,...,n$
S_n je suma površine svih pravougaonika P_k pri čemu $k = 1,..,n$
$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{k}{n})^2\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2 = \dfrac{1}{n^3}\dfrac{(2n+1)n(n+1)}{6}$
$n \to \infty$ sledi da je $S_n = \frac{1}{3}$
$P(\phi) = \frac{1}{3}$ Kasnije ćemo zapisivati $\displaystyle\int_0^1 x^2 \text{dx} = \dfrac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{1} = \dfrac{1}{3} - 0$
$\displaystyle\int_a^b f(x)\text{dx} = F(b) - F(a)$
$t \in [a,b],\ C(a_1,b_1),\ f : (a_1,b_1) \to [0,+\infty)$ i definišemo $A(t) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le t, 0 \le y \le f(x)\}$ i neka je P(t) površina figure A(t).
Primetimo da je $P(t)$ funkcija koja slika $[a,b]$ u $[0,+\infty]$ tj. $P(a) = 0$ i $P(b)$ je površina figure ϕ.
Dodatno pretpostavimo da $t \in [a,b)$ i da je $h > 0$ takvo da je $t + h \in [a,b)$.
Neka je $M = \max\limits_{t\le x\le t+h} f(x)$ i $m = \min_{t\le xleqt+h} f(x)$ zbog neprekidnosti funkcije f, postoje $\theta_1 = \theta_1(t,h)$ i $\theta_2 = \theta_2(t,h)$ takvi da je $0 \le \theta_1 \le 1$ i $0 \le \theta_2 \le 1$ i $M = f(t+\theta_1 h)$ i $m = f(t+\theta_2 h)$
$mh \le P(t+h) - P(t) \le Mh$ tj $f(t+\theta_2 h)h \le P(t+h) - P(t) \le f(t+\theta_1 h)h$
$f(t+\theta_2 h) \le \frac{P(t+h)-P(t)}{h} \le f(t+\theta_1 h)$
$\lim\limits_{h\to 0^+} f(t+\theta_2 h) \le \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{P(t+h)-P(t)}{h} \le \lim\limits_{h\to 0^+} f(t+\theta_1 h)$
$f(t) \le P'(t) \le f(t)$
Dakle, za $t \in [a,b)$ imamo $P'(t) = f(t)$. Drugim rečima P je primitivna funkcija za f : na intervalu (a,b).
Neka je $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ proizvoljna primitvna funkcija funkcije f. Tada je $P(t) = F(t) + C$ gde je $C \in \mathbb{R}$. Ali kako je $P(a) = 0$. Imamo $C = -F(a)$.
Dakle, $P(b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\text{dx} = F(b) - F(a)$.

2.1 Integrabilnost nekih klasa funkcija

Teorema 2.1 *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funckija na $[a,b]$. Tada je funkcija f Riman integrabilna na $[a,b]$.*

Bez dokaza! :)

Teorema 2.2 *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona funkcija na $[a,b]$. Tada je funkcija Riman integrabilna na $[a,b]$.*

Šta znači da je funckija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona?
Ako za svako $x_1, x_2 \in [a,b]$ iz $x_1 < x_2$ sledi $f(x_1) \leq f(x_2)$ odnosno $f(x_1) \geq f(x_2)$ onda je funkcija monotono rastuća odnosno monotono opadajuća na $[a,b]$.
Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je funkcija monotono rastuća na $[a,b]$. Primetimo najpre da je funkcija ograničena na $[a,b]$. Zaista za svako $x \in [a,b]$ važi $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.
Pretpostavimo da funkcija nije const.
Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i neka je $P \in \mathrm{P}[a,b]$??? $P = \{[x_0, x_1], ..., [x_{n-1}, x_n]\}$ takav da je parametar podele $\lambda(P) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Tada je:

$$S(f,P)-s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i-x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1}) <$$

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b)-f(a)) = \varepsilon$$

Teorema 2.3 *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija na $[a,b]$ takva da je skup tačaka u kojima nije neprekidna konačan. Tada je funkcija f Riman integrabilna na $[a,b]$. Bez dokaza :). Kolege, to bi trebalo vec da znate, kako ste ovde zavrsili bez toga. Sramota!*

Teorema 2.4 *Neka su $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilne funkcije na $[a,b]$ koje se razlikuju samo u konačno mnogo tačaka. Tada je:*
$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$. *Bez dokaza.*

$R[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{je Riman integrabilna na } [a,b]\}$

2.2 Svojstva određenog integrala

Stav 2.1 *Neka su $f, g \in R[a,b]$ i neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tada*
$\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ i važi:
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Dokaz: Neka je (P, ξ) proizvoljna podela sa istaknutim tačkama $[a,b]$ i formirajmo sledeće:

$$\sigma(f+g,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(f+g)(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(f(\xi_i)+g(\xi_1)) = \sigma(f,P,\xi)+\sigma(g,P,\xi)$$

Kako je $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi) = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ i $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(g,P,\xi) = \int_a^b g(x)\mathrm{dx}$ Tada postoji i važi:

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f+g,P,\xi) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi) + \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(g,P,\xi) = \int_a^b f(x)\mathrm{dx} + \int_a^b g(x)\mathrm{dx} = \int_a^b (f+g)(x)\mathrm{dx}$$

Dokažimo da je $\alpha f \in R[a,b]$ i da je $\int_a^b (\alpha f)(x)\mathrm{dx} = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$.
Neka je (P, ξ) proizvoljna podela sa istanknutim tačkama na $[a,b]$.Tada je:

$$\sigma(\alpha f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(\alpha f)(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\alpha f(\xi_i) = \alpha\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i) = \alpha\sigma(f,P,\xi) = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$$

Tada važi sledeće:

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(\alpha f,P,\xi) = \alpha \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi) = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$$

Stav 2.2 *Neka su $f, g \in R[a,b]$ Tada je:*

1. $fg \in R[a,b]$ *(Ne mora biti* $\int_a^b (fg)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$
2. $|f| \in R[a,b]$ *(Ne mora biti* $\int_a^b |f(x)|dx = |\int_a^b f(x)dx|$*)*
3. $\frac{1}{f} \in R[a,b]$ *pod pretpostavkom da postoji* $c > 0$ *tako da za svako* $x \in [a,b]$ *važi* $|f(x)| > c$

Stav 2.3 *Neka je $f \in R[a,b]$ i $[c,d] \subset [a,b]$. Tada je $f \in R[c,d]$.*

Stav 2.4 *Neka je $f \in R[a,b]$ i $c \in (a,b)$. Tada je $f \in R[a,c]$ i $f \in R[c,b]$ i važi:* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

$f : \{a\} \to \mathbb{R} \quad \int_a^a =^{\text{def}}= 0$

$f \in R[a,b] \quad \int_b^a f(x)\text{dx} =^{\text{def}}= -\int_a^b f(x)\text{dx}$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

$f : [\min\{a,b,c\}, \max\{a,b,c\}] \to \mathbb{R}$

$f \in R[\min\{a,b,c\}, \max\{a,b,c\}]$

$\int_a^b f(x)\text{dx} = \int_a^c f(x)\text{dx} + \int_a^b f(x)\text{dx}$

Stav 2.5 *Neka je $f \in R[a,b]$ i $f(x) \geq 0$ za svako $x \in [a,b]$. Tada je* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Neka (P, ξ) proizvoljna podela sa istaknutim tačkama na $[a,b]$. Tada je $\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \geq 0$

Otuda je $\lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma(f, P, \xi) \geq 0$ tj $\int_a^b f(x)\text{dx} \geq 0$

Stav 2.6 *Neka je $f \in R[a,b]$. Tada je* $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Kako je $|f(x)| - f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ sledi $\int_a^b f(x)\text{dx} \leq \int_a^b |f(x)|\text{dx}$

Kako je $|f(x)| + f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ sledi $-\int_a^b f(x)\text{dx} \leq \int_a^b |f(x)|\text{dx}$

Stav 2.7 *Neka su $f, g \in R[a,b]$ i neka za svako $x \in [a,b]$ važi $f(x) \leq g(x)$. Tada je* $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. *Tada je* $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Primetimo da je $g - f \in R[a,b]$ i da je $(g-f)(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$. Tada je $\int_a^b (g-f)(x)\text{dx} \geq 0$. Otuda je $\int_a^b f(x)\text{dx} - \int_a^b g(x)\text{dx} \geq 0$.

Stav 2.8 *Neka je $f \in R[a,b]$ i neka su $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ i $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Tada postoji $\mu \in [m,M]$ takvo da je $\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$.*

Kako za svako $x \in [a,b]$ važi $m \le f(x) \le M$
$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)$. Otuda je
$m \le \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{(b-a)} \le M$ tj. $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \in [m,M]$
Dakle $\exists \mu \in [m,M]$ takvo da je $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Stav 2.9 *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a,b]$. Tada postoji $c \in [a,b]$ takvo da je: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$*

Kako je funkcija f neprekidna na $[a,b]$ sledi da je f ograničena na $[a,b]$ i važi $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \min\limits_{x\in[a,b] f(x)}$ i $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \max\limits_{x\in[a,b] f(x)}$. Neka su $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ i $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.
Na osnovu prethodnog stava sledi da postoji $\mu \in [m,M]$ takvo da je $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a)$. Kako je funkcija f neprekidna na $[a,b]$ sledi da je $f([a,b]) = [m,M]$. Otuda za postojeće $\mu \in [m,M]$ postoji $c \in [a,b]$ takvo da je $f(c) = \mu$.

2.3 Veza određenog integrala i izvoda. Njutn-Lajbnicova formula

Neka je $f \in R[a,b]$. Ima smisla razmatrati funkciju $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definisanu sa $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.
Funkciju φ nazivamo integral sa promenljivom gornjom granicom.

Teorema 2.5 *Funkcija φ je neprekidna na $[a,b]$*

Neka je $x_0 \in [a,b]$ proizvoljno. Dokažimo da je funkcija φ neprekidna u x_0. Neka je $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada za $x \in [a,b]$ važi:
$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t\right| \le \left|\int_{x_0}^x |f(t)|\mathrm{d}t\right| \le M|x-x_0|$
Otuda ako je $|x-x_0| < \frac{\varepsilon}{M} = \delta$ sledi da je $|\varphi(x)-\varphi(x_0)| < \frac{M\varepsilon}{M} = \varepsilon$, pa na osnovu $\varepsilon - \delta$ definicije neprekidnosti funkcije sledi da je neprekidna u x_0.
$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in [a,b])(|x-x_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(x)-\varphi(x_0)| < \varepsilon)$

Teorema 2.6 *Ako je funkcija f neprekidna na $[a,b]$ onda je funkcija φ neprekidno diferencijabilna na $[a,b]$ i $\forall x \in [a,b]$ važi $\varphi'(x) = f(x)$ preciznije $\forall x \in [a,b]$ važi $\varphi'(x) = f(x)$, $\quad \varphi'_+(a) = f(a) \quad$ i $\quad \varphi'_-(b) = f(b)$.*

Neka je $x \in [a,b]$ proizvoljno i $h \in \mathbb{R}$ takvo da je $x+h \in [a,b]$. Tada je:
$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \frac{1}{h}(\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{h}f(x+\theta(x,h)h)(x+h-x)$
$x+\theta(x,h)h \in [\min\{x,x+h\}, \max\{x,x+h\}] \quad 0 \le \theta(x,h) \le 1$
$= f(x+\theta(x,h)h)$ Otuda je $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} f(x+\theta(x,h)h)$
$\varphi'(x) = f(x)$

Tvrdjenje 2.1 *Neka je $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a,b]$. Tada funkcija f ima primitivnu funkciju na (a,b) tj postoji $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ takvo da je $F'(x) = f(x)\ \ \forall x \in (a,b)$.*

Neka je $x_0 \in (a,b)$ fiksirana tačka i neka je $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ definisana sa $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Funkcija F

je korektno definisana, jer je f neprekidna funkcija na $[\min\{x,x_0\},\max\{x,x_0\}] \subset (a,b)$. Neka je $x \in (a,b)$ proizvoljno i neka je $h \in \mathbb{R}$ takvo da je $x+h \in (a,b)$ Tada je:
$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} f(t)\mathrm{dt} - \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{dt}\right) = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\mathrm{dt}$
Prema prethodnoj teoremi ovo je jednako: $f(x+\theta(x,h)h), \quad 0 \le \theta(x,h) \le 1$
Otuda je $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} f(x+\theta(x,h)h) = f(x)$ tj. $F'(x) = f(x)$.
Primer funkcije koja nije neprekidna ali ima primitivnu funkciju:
$F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \in (-1,0)\cup(0,1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \in (-1,0)\cup(0,1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Teorema 2.7 *(Njutn-Lajbnicova formula) Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a,b]$ i neka je $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije f na $[a,b]$. Pri čemu važi $F'_+(a) = f(a)$ $F'_-(b) = f(b)$. Tada je:* $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Neka je $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definisana sa $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{dt}$. Na osnovu prethodnih teorema znamo da za svako $x \in [a,b]$ važi $\Phi'(x) = f(x)$ tj Φ je primitivna funkcija funkcije f. Stoga postoji $c \in \mathbb{R}$ takvo da za svako $x \in [a,b]$ važi:
$\Phi(x) = F(x) + c$. Kako je $\Phi(a) = 0 \quad \Phi(a) = F(a) + c$
$\Phi(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{dt}$ i $\Phi(b) = F(b) + c$ Sledi da je:
$\int_a^b f(t)\mathrm{dt} = \Phi(b) = F(b) + c = F(b) + \Phi(a) - F(a) = F(b) - F(a)$

2.4 Smena promenljive i parcijalna integracija u određenom integralu

Teorema 2.8 *(O smeni promenljive) Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a,b]$ i neka je $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ neprekidno diferencijabilna funkcija na $[\alpha,\beta]$ tada je:*
$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi\varphi')(t)\,dt.$

Neka je $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Tada je:
$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{dx} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$ (1)
S druge strane za funkciju $\psi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ definisanu sa $\phi(t) = F(\varphi(t))$ važi:
$\psi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \quad \forall t \in [\alpha,\beta]$. Dakle funkcija ψ je primitivna funkcija funkcije $(f\circ\varphi)\varphi'$ na $[\alpha,\beta]$. Pa važi:
$\int_\alpha^\beta ((f\circ\varphi)\varphi')(t)\mathrm{dt} = \psi(\beta) - \psi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$ (2)
Iz (1) i (2) dobijamo $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{dx} = \int_\alpha^\beta ((f\circ\varphi)\varphi')(t)\mathrm{dt}$

Teorema 2.9 *(O parcijalnoj integraciji) Neka su $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilne funkcije na $[a,b]$. Tada je:*
$\int_a^b (uv')(x)\,dx = (uv)(b) - (uv)(a) - \int_a^b (u'v)(x)\,dx$

Primetimo da je:
1) $\int_a^b (uv)'(x)\mathrm{dx} = (uv)(b) - (uv)(a)$
I da je:
2) $\int_a^b (uv)'(x)\mathrm{dx} = \int_a^b (u'v + uv')(x)\mathrm{dx} = \int_a^b (u'v)(x)\mathrm{dx} + \int_a^b (uv')(x)\mathrm{dx}$

2.5 Primene određenog integrala

2.5.1 Izdračunavanje površine u ravni

Neka je $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ neprekidna funkcija na $[a, b]$ i neka je:
$\Phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$
Tada je površina $P(\Phi)$ figure Φ jednaka $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$.
Neka su $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije na $[a, b]$ takve da za svako $x \in [a, b]$ važi $f(x) \geq g(x)$. Neka je
$\Phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq f(x)\}$
Tada je površina $P(\Phi)$ figure Φ jednaka $\displaystyle\int_a^b (f - g)(x)\mathrm{dx}$.
Neka je $m = \min\limits_{x\in[a,b]} g(x),\ F(x) = f(x) - m,\ G(x) = g(x) - m$ i
$\Phi_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad a \leq x \leq b, \quad G(x) \leq y \leq F(x)\}$
Jasno je da je $P(\Phi) = P(\Phi_1) = \displaystyle\int_a^b F(x)\mathrm{dx} - \int_a^b G(x)\mathrm{dx} =$
$= \displaystyle\int_a^b (f(x) - m)\mathrm{dx} - \int_a^b (g(x) - m)\mathrm{dx} = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{dx}$