

MATEMATIČKI FAKULTET

Odgovori na teorijska ispitna pitanja iz analize 2

Radili

Lazar Jovanović 34/2023

Jana Vuković 124/2022

Profesor

dr Marek Svetlik

Beograd, 2024/2025

Sadržaj

1	Neodređeni integrali	2
1.1	Primitivna funkcija	2
1.2	Definicija i osnovna svojstva neodređenog integrala	3
1.3	Metode integracije	5
1.4	Integracija racionalnih funkcija	9
1.5	Integracija trigonometrijskih funkcija	11
2	Određeni integrali	13
2.1	Definicija određenog integrala	13
2.1.1	Uraditi	13
2.1.2	Dokazati	15
2.2	Integrabilnost nekih klasa funkcija	15
2.3	Svojstva određenog integrala	16
2.4	Veza određenog integrala i izvoda. Njutn-Lajbnicova formula	18
2.5	Smena promenljive i parcijalna integracija u određenom integralu	20

1 Neodređeni integrali

1.1 Primitivna funkcija

Posmatrajmo neku funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, na primer $f(x) = x^2$. Možemo da pronađemo koeficijent pravca u tački $x_0 \in \mathbb{R}$ računanjem izraza $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. U našem primeru dobijamo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^2 - (x_0)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h = 2x_0$. Dakle, koeficijent pravca funkcije f u tački x_0 jeste broj $2x_0$. Na ovaj način imamo određenu novu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisanu sa $\varphi(x) = 2x$. Uobičajeno je da funkciju φ nazivamo izvodna funkcija (izvod, prvi izvod) funkcije f . Funkciju φ drugačije označavamo sa f' .

Sada razmotrimo obratan problem. Odredimo funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ako je poznato da je funkcija $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f'(x) = 2x$. Iz prošlog primera možemo da zaključimo da je $f(x) = x^2$ jedno rešenje. Zapitajmo se da li je i jedino. Nije, na primer funkcija $f(x) = x^2 + 1$ je takođe rešenje.

Pokušajmo da odredimo funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ako je poznato da je:

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Takvo f ne postoji, jer funkcija sgn ima prekid prve vrste.

Podsetnik teoreme: Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Tada funkcija f' ne može imati prekide prve vrste.

Podsetnik definicije prekida prve vrste: Za funkciju f , tačka x_0 je prekid prve vrste ako postoje konačni $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ i različiti su.

Definicija 1.1 Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Funkciju $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nazivamo primitivna funkcija za funkciju f na intervalu (a, b) ako je funkcija F diferencijabilna na (a, b) i za svako $x \in (a, b)$ važi $F'(x) = f(x)$.

Prirodno se postavljaju pitanja da li za datu funkciju postoji primitivna funkcija i ako postoji koliko primitivnih funkcija ima. O broju primitivnih funkcija nam govori sledeći stav.

Stav 1.1 Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ i neka je $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija za funkciju f na intervalu (a, b) i neka je $C \in \mathbb{R}$ proizvoljno. Tada je funkcija $G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $G(x) = F(x) + C$ primitivna funkcija za funkciju f na intervalu (a, b) .

Dokaz: G je diferencijabilna na (a, b) jer je zbir dve diferencijabilne funkcije i za svako x iz intervala (a, b) važi $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ što smo i hteli da dokažemo. ■

Ovim smo dokazali da ako je $F_1(x)$ primitivna funkcija, onda je i $F_1(x) + C$ primitivna funkcija. Sledeće pitanje je da li može da postoji neka funkcija $F_2(x)$ koja nije ovog oblika. O tome nam govori sledeća teorema.

Podsetnik Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti: Neka je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na (a, b) . Tada će postojati tačka $x_0 \in (a, b)$ takva da važi $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.

Teorema 1.1 Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ i neka su $F_1, F_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivne funkcije za funkciju f na intervalu (a, b) . Tada postoji $C \in \mathbb{R}$ takvo da za svako $x \in (a, b)$ važi $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Dokaz: Neka je funkcija $G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Tada važi:

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Izaberimo proizvoljne $x_1, x_2 \in (a, b)$ takve da važi $x_1 < x_2$. Dokažimo da je $G(x_1) = G(x_2)$.

- (1) G je neprekidna na $[x_1, x_2] \subset (a, b)$
- (2) G je diferencijabilna na $(x_1, x_2) \subset (a, b)$

Iz (1) i (2), a na osnovu Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti, sledi da postoji $x_0 \in (x_1, x_2)$ takvo da:

$$G(x_1) - G(x_2) = G'(x_0)(x_2 - x_1) = 0(x_2 - x_1) = 0.$$

Dakle, $G(x_1) = G(x_2)$. Kako su x_1 i x_2 proizvoljni, sledi da je G konstantna funkcija. Važi da postoji $C \in \mathbb{R}$ takvo da za svako $x \in (a, b)$ važi jednakost $C = G(x) = F_1(x) - F_2(x)$, odakle je $F_1(x) = F_2(x) + C$. ■

Primer 1.1 Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa: $f(x) = 2x$. Odrediti:

a) Sve primitivne funkcije za funkciju f . To su funkcije $x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

b) Funkciju $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koja je primitivna za funkciju f i za koju važi.

$$g(0) = \sqrt{2}.$$

$$g(x) = x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$g(0) = 0^2 + C = \sqrt{2} \rightarrow C = \sqrt{2}$$

$$\text{Rešenje je } g(x) = x^2 + \sqrt{2}.$$

Primer 1.2 Odrediti sve dvaput diferencijabilne funkcije $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da $\forall x \in \mathbb{R}$ važi $f''(x) = 0$.

$$(f'(x))' = 0$$

$$f'(x) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = C_1x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Rešenje je } f(x) = C_1x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

1.2 Definicija i osnovna svojstva neodređenog integrala

Definicija 1.2 Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Neodređeni integral funkcije f na intervalu (a, b) je skup svih primitivnih funkcija za funkciju f na intervalu (a, b) . Neodređeni integral funkcije f obeležavamo sa $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = \{F \mid F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, (\forall x \in (a, b))(F'(x) = f(x))\}$$

Neka je $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ proizvoljna primitivna funkcija za funkciju f na (a, b) . Tada je:

$$\int f(x) dx = \{G \mid G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, (\exists C \in \mathbb{R})(\forall x \in (a, b))(G(x) = F(x) + C)\} \quad (1)$$

Jednakost (1) skraćeno zapisujemo na sledeći način:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Napomena: U jednakosti (2) ne vidi se interval (a, b) što stvara potencijalnu opasnost.

Primer 1.3 Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Naći integral: $\int (a_n x^n + \dots + a_0)dx$.

Nagađanjem možemo da dodemo do rešenja: $\int (a_n x^n + \dots + a_0)dx = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \dots + a_0 x + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Primer 1.4 Naći $\int \frac{1}{x} dx$.

Neka je $f(x) = \frac{1}{x}$. Nije naglašeno na kom intervalu rešavamo integral, zbog čega uzimamo domen funkcije $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Imamo dva intervala pa posmatramo dva slučaja:

$$1. \text{ slučaj: } x \in (0, +\infty) \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C_1 = \ln |x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R};$$

$$2. \text{ slučaj: } x \in (-\infty, 0) \int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C_2 = \ln |x| + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Bitno je naglasiti da se konstante C_1 i C_2 odnose na intervale. One u opštem slučaju ne moraju da budu jednake. U sledećem primeru vidimo gde može da nastane problem.

Primer 1.5 Odrediti funkciju $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, takvu da $f(1) = 0$, $f(-1) = 1$ i za svako $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ važi $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Pogrešno rešenje:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \\ f(1) = 0 &= \ln(1) + C \implies C = 0 \\ f(-1) = 1 &= \ln(1) + C \implies C = 1 \end{aligned}$$

Dobijamo da je $C = 0 = 1$ što je kontradikcija.

Tačno rešenje:

Posmatrajmo $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ definisanu sa:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x) + 1, & x < 0 \end{cases}$$

Njen izvod je:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

Dakle, funkcija f je tražena funkcija jer važi $f(1) = 0$, $f(-1) = 1$. U ovom primeru je $C_1 = 0$, a $C_2 = 1$.

Stav 1.2 Neka su $f_1, f_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije koje imaju primitivne funkcije na (a, b) i neka su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Tada funkcija $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ima primitivnu funkciju na (a, b) i važi:

$$\int (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) dx = \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx$$

Dokaz: Neka je funkcija $F_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija za f_1 i neka je funkcija $F_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija za f_2 . Tada po definiciji primitivne funkcije važe jednakosti:

$$F_1'(x) = f_1(x), \quad x \in (a, b) \quad (1)$$

$$F_2'(x) = f_2(x), \quad x \in (a, b) \quad (2)$$

Iz (1) i (2) zaključujemo:

$$(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2)'(x) = \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) \quad (3)$$

Ako krenemo od desne strane jednakosti koju dokazujemo i primenimo prethodne jednakosti dobijamo:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx &= \lambda_1 (F_1(x) + C_1) + \lambda_2 (F_2(x) + C_2) \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C \\ &= (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2)(x) + C \\ &= \int (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) dx \end{aligned}$$

gde su $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, a $C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$. Ovim završavamo dokaz. ■

Primer 1.6 Naći $\int (\frac{3}{\sqrt{x}} + \cos \frac{x}{3} - 5 \cdot 2^x) dx$, $x > 0$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{\sqrt{x}} dx + \int \cos \frac{x}{3} dx - 5 \int 2^x dx \\ &= 6\sqrt{x} + C_1 + 3 \sin \frac{x}{3} + C_2 - 5 \frac{2^x}{\ln 2} - 5C_3 \\ &= 6\sqrt{x} + 3 \sin \frac{x}{3} - 5 \frac{2^x}{\ln 2} + C \end{aligned}$$

gde su $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$, a $C = C_1 + C_2 - 5C_3$.

Tablica integrala:	
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x \in (0, +\infty) \quad \int x^\alpha dx$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \quad \int x^n dx$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int x^{-n} dx$	$\frac{1}{1-n} x^{1-n} + C_1, x \in (-\infty, 0)$ $\frac{1}{1-n} x^{1-n} + C_2, x \in (0, +\infty)$
$x \in \mathbb{R} \quad \int x^{-1} dx$	$\ln x + C_1, x \in (-\infty, 0)$ $\ln x + C_2, x \in (0, +\infty)$
$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R} \quad \int a^x dx$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$
$x \in \mathbb{R} \quad \int \sin x dx$	$-\cos x + C$
$x \in \mathbb{R} \quad \int \cos x dx$	$\sin x + C$
$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi) \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C_k, x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, \pi + k\pi) \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\operatorname{ctg} x + C_k, x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$x \in (-1, 1) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\arcsin x + C$
$x \in \mathbb{R} \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx$	$\operatorname{arctg} x + C$
$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int x^0 dx$	$x + C_1, x \in (-\infty, 0)$ $x + C_2, x \in (0, +\infty)$

1.3 Metode integracije

Teorema 1.2 (Teorema o smeni promenljive 1) Neka je $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija za funkciju $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ i neka je $g : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ diferencijabilna funkcija na (α, β) . Tada postoji primitivna funkcija za funkciju $(f \circ g)g' : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ i važi:

$$\int ((f \circ g)g')(x) dx = F(g(x)) + C, C \in \mathbb{R}$$

Dokaz: Neka je $x \in (a, b)$ proizvoljno.

$$\begin{aligned}
 (F(g(x)) + C)' &= ((F \circ g)(x) + C)' \\
 &= ((F \circ g)(x))' + 0 \\
 &= F'(g(x))g'(x) && \text{(teorema o izvodu kompozicije)} \\
 &= f(g(x))g'(x) \\
 &= ((f \circ g)g')(x)
 \end{aligned}$$

■

Primer 1.7 Neka su $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Naći: $\int (ax + b)^n dx$.

Neka su $f(t) = t^n$ i $g(x) = ax + b$. Tada važi $F(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$ i $g'(x) = a$.

$$\begin{aligned}
 \int (ax + b)^n dx &= \int f(g(x))dx = \int \frac{1}{a} f(g(x))g'(x)dx \\
 &= \frac{1}{a} \int f(g(x))g'(x)dx \\
 &= \frac{1}{a} F(g(x)) + C \\
 &= \frac{1}{a} \frac{1}{n+1} (ax + b)^{n+1}
 \end{aligned}$$

Primitivna funkcija koju smo dobili je definisana na $x \in \mathbb{R}$ za $n > 0$.

Za $n \in \mathbb{Z} \cap ((-\infty, -1) \cup \{0\})$ je definisana na $x \in (-\infty, -\frac{b}{a}) \cup (-\frac{b}{a}, +\infty)$.

Napomena: Izdvajamo slučaj kad je $n = 0$ jer za $x = -\frac{b}{a}$ dobijamo 0^0 . Iako važi $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1$, izraz 0^0 nije definisan jer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^y$ ne postoji.

Primer 1.8 Naći $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$.

Neka su $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ i $g(x) = e^x + 1$. Tada važi $F(t) = 2\sqrt{t}$ i $g'(x) = e^x$.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx &= \int f(g(x))e^x dx = \int f(g(x))g'(x)dx \\
 &= F(g(x)) + C \\
 &= 2\sqrt{e^x+1}
 \end{aligned}$$

Teorema 1.3 (Teorema o smeni promenljive 2) Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, neka je $g : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ diferencijabilna funkcija takva da postoji $g^{-1} : (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$ koja je takođe diferencijabilna i neka je $F : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija za funkciju $(f \circ g)g' : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$. Tada postoji primitivna funkcija za funkciju f i važi: $\int f(x)dx = F(g^{-1}(x)) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Izaberimo proizvoljno $x \in (a, b)$. Tada:

$$\begin{aligned}
 (F(g^{-1}(x)) + C)' &= (F(g^{-1}(x)))' + 0 = F'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) \\
 &= ((f \circ g)g')(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) \\
 &= (f \circ g)(g^{-1}(x))g'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) \\
 &= (f(x))(g \circ g^{-1})'(x) \\
 &= f(x)x' \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

■

Pogledajmo sada par primera koji ilustruju kad smemo da koristimo [teoremu 1.3](#).

Primer 1.9 Neka je $g : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ definisano sa $g(t) = e^t$ i neka je $g^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definisano sa $g^{-1}(x) = \ln x$.

Funkcije g i g^{-1} su diferencijabilne na svojim domenima pa možemo primeniti teoremu.

Primer 1.10 Neka je $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisano sa $g(t) = t^3$ i neka je $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisano sa $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu. Ostaje da proverimo da li je i funkcija g^{-1} . Proverimo da li je ona diferencijabilna u nuli: $(g^{-1})'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^{-1}(h) - g^{-1}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$. Dakle, nije diferencijabilno, zbog čega ne može primeniti teoremu.

Primer 1.11 Neka je $g : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ definisano sa $g(t) = t^3$ i neka je $g^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ definisano sa $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu. Za izvod funkcije g^{-1} dobijamo: $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Ovo je definisano na celom domenu pa možemo da primenimo teoremu.

Sledi primer korišćenja [teoreme 1.3](#).

Primer 1.12 Neka je $a > 0$. Naći $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Neka je $f : (-a, a) \rightarrow (0, a]$ definisano sa $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ i neka je $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-a, a)$ definisano sa $g(x) = a \sin x$. Tada je $g^{-1} : (-a, a) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definisano sa $g^{-1}(x) = \arcsin \frac{x}{a}$. Izvod $g'(x) = a \cos x$ je definisan na celom domenu pa možemo da koristimo [teoremu 1.3](#). Zbog preglednijeg zapisa, neka je $g^{-1}(x) = t$.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int f(x) dx = F(g^{-1}(x)) + C = \int ((f \circ g)g')(t) dt = \int a \cos(t) \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(t)} dt \\ &= \int a \cos(t) \sqrt{a^2(1 - \sin^2(t))} dt = \int a^2 \cos(t) \sqrt{1 - \sin^2(t)} dt = \int a^2 \cos^2(t) dt \\ &= \int \frac{a^2}{2} (1 + \cos(2t)) dt = \int \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \cos(2t) dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin(2t) + C \end{aligned}$$

Dobili smo rešenje integrala, ali ovo rešenje možemo još da sredimo.

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \sin(2 \arcsin \frac{x}{a}) + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} 2 \sin(\arcsin \frac{x}{a}) \cos(\arcsin \frac{x}{a}) + C && \text{(formula za polovinu ugla sinusa)} \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \frac{x}{a} \cos(\arcsin \frac{x}{a}) + C && \text{napomena} \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{ax}{2} \sqrt{\cos^2(\arcsin \frac{x}{a})} + C && \text{(kosinus na domenu je pozitivan)} \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{ax}{2} \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin \frac{x}{a})} + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{ax}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C \end{aligned}$$

Napomena: Iako važi da je $\sin(\arcsin(x)) = x$, ne mora da važi da je $\arcsin(\sin(x)) = x$.

Na kraju možemo da proverimo da li smo dobili tačno rešenje tako što uradimo izvod primitivne funkcije.

Opisali smo kako se ponaša integral linearnih kombinacije funkcija i kako se uvode smene. Ostaje da vidimo šta se dešava sa integralom proizvoda dve funkcije. O tome nam govori sledeća teorema.

Teorema 1.4 (Teorema o parcijalnoj integraciji) Neka su $u, v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije. Tada funkcija $uv' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ima primitivnu funkciju ako i samo ako funkcija $u'v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ima primitivnu funkciju. Važi:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Dokaz: Neka je $x \in (a, b)$ proizvoljno.

$$(uv)'(x) = (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad (1)$$

Pretpostavimo da $u'v$ ima primitivnu funkciju. Tada iz (1) dobijamo:

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x) \quad (2)$$

Kako $(u(x)v(x))'$ i $u'(x)v(x)$ imaju primitivne funkcije, iz (2) sledi da je i $u(x)v'(x)$. Osim toga važi:

$$\int u(x)v'(x)dx = \int (u(x)v(x))'dx - \int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Drugi smer dokaza je potpuno analogan. ■

Primer 1.13 Naći $\int e^x \sin x dx$.

Primenjujemo [teoremu 1.4](#).

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x & v'(x) &= \sin x \\ u'(x) &= e^x & v(x) &= -\cos x \end{aligned}$$

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

Ostaje da se izračuna $\int e^x \cos x dx$. Ponovo primenjujemo [teoremu 1.4](#).

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x & v'(x) &= \cos x \\ u'(x) &= e^x & v(x) &= \sin x \end{aligned}$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

Uvrstimo dobijeni izraz u prethodnu jednakost.

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \\ 2 \int e^x \sin x dx &= -e^x \cos x + e^x \sin x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\ \int e^x \sin x dx &= \frac{1}{2}(-e^x \cos x + e^x \sin x) + C, \quad C = \frac{C_1}{2} \end{aligned}$$

Primer 1.14 Naći $\int \frac{1}{x} dx$ za $x > 0$.

Iskoristićemo [teoremu 1.4](#).

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{x} & v'(x) &= 1 \\ u'(x) &= -\frac{1}{x^2} & v(x) &= x \end{aligned}$$

Dobijamo jednakost $\int \frac{1}{x} dx = \frac{x}{x} + \int \frac{1}{x} dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx$. Greška koja se često pravi je da se integrali skrate i da se dobije $1 = 0$, što znači da ovaj integral ne postoji. Ovo nije tačno jer ovu jednakost možemo da zapišemo i kao $F + C_1 = 1 + F + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Ako skratimo primitivne funkcije dobijamo vezu između konstanti što nam nije od pomoći. Ovaj integral je tablični, pa možemo da rešimo metodom pogađanja rešenja.

1.4 Integracija racionalnih funkcija

Integraciju racionalnih funkcija možemo da rešavamo po algoritmu. Potrebno je da znamo rešenja integrala polinoma i integrala oblika $\int \frac{A}{x-a} dx$, $\int \frac{1}{(x-a)^k} dx$, $\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c} dx$ i $\int \frac{Mx+N}{(x^2+bx+c)^k} dx$, gde su $A, a, M, N, b, c \in \mathbb{R}$, $b^2 - 4c < 0$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Integral polinoma već znamo, a u sledećim lemapa ćemo pokazati proces nalaženja ovih integrala.

Lema 1.1 Važi $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$, gde su $A, a, C \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(t) = \frac{A}{t}$ i funkcija $g : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definisana sa $g(x) = x - a$. Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu, gde je $g'(x) = 1$, a primitivna funkcija funkcije f je funkcija $F(t) = A \ln|t|$. Tada možemo da primenimo [teoremu 1.2](#).

$$\int \frac{A}{x-a} dx = \int ((f \circ g)g')(x) dx = F(g(x)) + C = A \ln|x-a| + C.$$

Napomenimo da C za $x > a$ i C za $x < a$ mogu biti različiti. ■

Lema 1.2 Važi $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$, gde su $A, a, C \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Dokaz: Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(t) = \frac{A}{t^k}$ i funkcija $g : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definisana sa $g(x) = x - a$. Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu, gde je $g'(x) = 1$, a primitivna funkcija funkcije f je funkcija $F(t) = \frac{A}{(1-k)t^{k-1}}$. Tada možemo da primenimo [teoremu 1.2](#).

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \int ((f \circ g)g')(x) dx = F(g(x)) + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

■

Lema 1.3 Važi $\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2 + xb + c) + \frac{2N - bM}{\sqrt{4c - b^2}} \arctg(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}) + C$, gde su $M, N, b, c, C \in \mathbb{R}$, $b^2 - 4c < 0$.

Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(t) = \frac{Mt}{t^2+1} + \frac{2N-bM}{(t^2+1)\sqrt{4c-b^2}}$ i funkcija $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $g(x) = \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}$. Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu, gde je $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}$. Potrebno je da izračunamo primitivnu funkciju:

$$\begin{aligned} \int f(t) dt &= \int \frac{Mt}{t^2+1} + \frac{2N-bM}{(t^2+1)\sqrt{4c-b^2}} dt \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}} \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= \frac{M}{2} \ln(t^2+1) + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}} \arctg t + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\ &= F(t) + C_1 \end{aligned}$$

Tada možemo da primenimo [teoremu 1.2](#):

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c} dx &= \int ((f \circ g)g')(x) dx \\ &= F(g(x)) + C_1 \\ &= \frac{M}{2} \ln\left(\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2 + 1\right) + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}} \arctg\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right) + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\ &= \frac{M}{2} \ln\left(\frac{4x^2+4xb+b^2+4c}{4c-b^2}\right) + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}} \arctg\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right) + C_1 \\ &= \frac{M}{2} (\ln(x^2+xb+c) - \ln(c - \frac{b^2}{4})) + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}} \arctg\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right) + C_1 \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2+xb+c) + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}} \arctg\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right) + C, \quad C = C_1 + \frac{M}{2} \ln(c - \frac{b^2}{4}) \end{aligned}$$

Lema 1.4 Važi $\int \frac{Mx + N}{(x^2 + bx + c)^k} dx = \frac{M}{2} \frac{1}{(1-k)(x^2 + bx + c)^{k-1}} + (N - \frac{Mb}{2})I_k$, gde su $M, N, b, c \in \mathbb{R}$, $b^2 - 4c < 0$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $I_k = \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx$ i naći vezu između I_k i I_{k-1} .

Dokaz: Prvo ćemo početni integral razložiti na dva lakša:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{(x^2 + bx + c)^k} dx &= \int \frac{\frac{M}{2}(2x + b) - \frac{Mb}{2} + N}{(x^2 + bx + c)^k} dx \\ &= \int \frac{\frac{M}{2}(2x + b)}{(x^2 + bx + c)^k} dx + \int \frac{N - \frac{Mb}{2}}{(x^2 + bx + c)^k} dx \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^k} dx + (N - \frac{Mb}{2}) \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx \end{aligned}$$

Prvi integral možemo da rešimo [teoremom 1.2](#). Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ definisana sa $f(t) = \frac{1}{t^k}$ i neka je funkcija $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definisana sa $g(x) = x^2 + bx + c$. Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu i važi $g'(x) = 2x + b$. Jedna od primitivnih funkcija funkcije f je $F(t) = \frac{1}{(1-k)t^{k-1}}$. Primenom [teoreme 1.2](#) dobijamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^k} dx &= \int ((f \circ g)g')(x) dx \\ &= F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{(1-k)(x^2 + bx + c)^{k-1}} + C \end{aligned}$$

Za drugi integral koristimo nov metod rešavanja. Neka je $I_k = \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx$. Želimo da nađemo vezu između I_k i I_{k-1} jer onda rekursivno možemo da rešimo integral I_k (znamo rešenje I_1 iz [leme 1.1.3](#)). Koristićemo [teoremu 1.4](#). Neka su $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisane sa $u(x) = \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k}$ i $v(x) = x$. Funkcije u i v su diferencijabilne na svojim domenima i važe jednakosti $u'(x) = -\frac{(2x+b)k}{(x^2 + bx + c)^{k+1}}$ i $v'(x) = 1$. Primenom [teoreme 1.4](#) dobijamo:

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx = \int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + bx + c)^k} + k \int \frac{2x^2 + 2bx + 2c - bx - 2c}{(x^2 + bx + c)^{k+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + bx + c)^k} + 2k \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx - k \int \frac{bx + 2c}{(x^2 + bx + c)^{k+1}} dx \\ (1 - 2k)I_k &= \frac{x}{(x^2 + bx + c)^k} - k \int \frac{bx + 2c}{(x^2 + bx + c)^{k+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + bx + c)^k} - k \int \frac{\frac{b}{2}(2x + b) - \frac{b^2}{2} + 2c}{(x^2 + bx + c)^{k+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + bx + c)^k} + \frac{b}{2} \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} - (2c - \frac{b^2}{2})k \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^{k+1}} dx \\ &= \frac{x + \frac{b}{2}}{(x^2 + bx + c)^k} - (2c - \frac{b^2}{2})k I_{k+1} \end{aligned}$$

Odredili smo vezu između I_k i I_{k+1} , pomeranjem indeksa za jedan naniže dobijamo odnos između I_{k-1} i I_k

$$I_k = \frac{2x + b}{(4c - b^2)(x^2 + bx + c)^k} - \frac{2 - 4k}{4c - b^2} I_{k-1}.$$

Na kraju, vraćanjem svega u početni integral dobijamo:

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + bx + c)^k} dx = \frac{M}{2} \frac{1}{(1-k)(x^2 + bx + c)^{k-1}} + (N - \frac{Mb}{2})I_k.$$

Stav 1.3 (Osnovni stav algebre) Svaki kompleksni polinom jedne promenljive stepena n , $n > 0$, ima tačno n kompleksnih nula.

Dodatno, uz osnovni stav algebre važi da i ako je neki ne-realni broj jedna nula polinoma, tada je i njegov kompleksno konjugovani par takođe nula. Zbog toga važi sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 1.1 Svaki polinom $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stepena n može se zapisati u obliku:

$$P(x) = p(x - a_1)^{s_1} \dots (x - a_k)^{s_k} (x - d_{11})^{t_1} (x - d_{12})^{t_1} \dots (x - d_{l1})^{t_l} (x - d_{l2})^{t_l}$$

gde je p koeficijent uz najstariji član, a_i , $i \in \{1 \dots k\}$, realna nula polinoma P mnogostrukosti s_i , važi $(\forall i_1, i_2 \in \{1 \dots k\})(a_{i_1} = a_{i_2} \iff i_1 = i_2)$, a d_{j1} i d_{j2} , $j \in \{1 \dots l\}$, konjugovano kompleksne ne-realne nule polinoma P mnogostrukosti t_j , važi $(\forall j_1, j_2 \in \{1 \dots l\})((d_{j_11} = d_{j_21} \iff j_1 = j_2) \wedge (d_{j_11} \neq d_{j_22}))$. Takođe, zbog osnovnog stava algebre, važi jednakost $n = s_1 + \dots + s_k + 2(t_1 + \dots + t_l)$. Dodatno, množenjem konjugovano kompleksnih nula dobijamo izraze oblika $x^2 + bx + c$, $b, c \in \mathbb{R}$, $b^2 - 4c < 0$, pa izraz možemo da zapišemo u obliku:

$$P(x) = p(x - a_1)^{s_1} \dots (x - a_k)^{s_k} (x^2 + b_1x + c_1)^{t_1} \dots (x^2 + b_lx + c_l)^{t_l}$$

Pokazali smo kako se nalaze integrali nekih vrsta racionalnih funkcija. Ostaje da pokažemo kako da proizvoljnu racionalnu funkciju svedemo na integrale ovih vrsta.

Algoritam 1.1 Neka funkcija $st(P)$ vraća stepen polinoma. Neka su dati polinomi $P, Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pri čemu važi $st(P) \geq 0$, $st(Q) \geq 1$. Ako polinom Q nema realnih nula, primitivnu funkciju za funkciju $\frac{P}{Q}$ nalazimo na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Inače, ako su $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ realne nule polinoma Q , primitivnu funkciju tražimo na intervalima $(-\infty, a_1)$, (a_1, a_2) , \dots , (a_{k-1}, a_k) , $(a_k, +\infty)$. Integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ nalazimo sledećim koracima:

K1 Ako je $st(P) < st(Q)$ primenjujemo K2 na integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$.

Inače, vršimo deljenje polinoma P polinomom Q . Neka je S rezultat deljenja, a R ostatak pri deljenju. Tada važi $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$, $st(R) < st(Q)$. Zbog linearnosti integrala važi jednakost $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$. Znamo da izračunamo integral polinoma $S(x)$, primenjujemo K2 na integral $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$.

K2: U tvrđenju 1.1 smo naveli da se svaki polinom, pa i polinom Q , može zapisati u obliku:

$$Q(x) = q(x - a_1)^{s_1} \dots (x - a_k)^{s_k} (x^2 + b_1x + c_1)^{t_1} \dots (x^2 + b_lx + c_l)^{t_l}$$

gde je q koeficijent uz najstariji član, a_i , $i \in \{1 \dots k\}$, realna nula polinoma Q mnogostrukosti s_i , važi $(\forall i_1, i_2 \in \{1 \dots k\})(a_{i_1} = a_{i_2} \iff i_1 = i_2)$, a $x^2 + b_jx + c_j$, $j \in \{1 \dots l\}$, proizvod $(x - d_{j1})$ i $(x - d_{j2})$, gde su d_{j1} i d_{j2} konjugovano kompleksne ne-realne nule polinoma Q mnogostrukosti t_j , važi $(\forall j_1, j_2 \in \{1 \dots l\})((d_{j_11} = d_{j_21} \iff j_1 = j_2) \wedge (d_{j_11} \neq d_{j_22}))$. Takođe, zbog osnovnog stava algebre, važi jednakost $n = s_1 + \dots + s_k + 2(t_1 + \dots + t_l)$. Posle faktorizacije polinoma Q prelazimo na K3.

K3: U ovom koraku je cilj da odredimo konstante u brojiocu takve da važi jednakost:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{A_{i1}}{(x - a_i)} + \dots + \frac{A_{is_i}}{(x - a_i)^{s_i}} \right) + \sum_{j=1}^l \left(\frac{M_{j1}x + N_{j1}}{(x^2 + b_jx + c_j)} + \dots + \frac{M_{jt_j}x + N_{jt_j}}{(x^2 + b_jx + c_j)^{t_j}} \right)$$

To postizemo rešavanjem linearnih jednačina koje nastaju svodenjem svih sabiraka na isti imenilac. Nakon nalaženja ovih konstanti prelazimo na K4.

K4: Određujemo integral zbira koji smo dobili u prethodnom koraku. Svi sabirci su istih oblika kao i integrali koji su navedeni u lemmama 1, 2, 3 i 4.

1.5 Integracija trigonometrijskih funkcija

Oznaku $R(u, v)$ koristimo za predstavljanje racionalnih funkcija argumenata u i v . Na primer, $R(u, v) = \frac{u+v}{u-v+2}$. Integrale oblika $\int R(\sin x, \cos x) dx$ rešavamo smenom $t = \tan \frac{x}{2}$, definisanom svuda sem u $x \in \{(2l+1)\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}$.

Formalno, neka je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = R(\sin x, \cos x)$ i neka je funkcija $g_0 : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi, \pi)$ definisana sa $g_0(x) = 2 \arctg x$. Funkcija g_0 je bijektivna pa postoji inverz $g_0^{-1} : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definisan sa $g_0^{-1}(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Važi i da su g_0 i g_0^{-1} diferencijabilne. Potrebno je još da odredimo $(f \circ g_0)(x)$. Važe jednakosti $(f \circ g_0)(x) = f(g_0(x)) = R(\sin(g_0(x)), \cos(g_0(x))) = R(\sin(2 \arctg(x)), \cos(2 \arctg(x)))$. Ostaje da redukujemo izraze $\sin(2 \arctg(x))$ i $\cos(2 \arctg(x))$:

$$\begin{aligned}\sin(2 \arctg(x)) &= 2 \sin(\arctg(x)) \cos(\arctg(x)) = 2 \operatorname{tg}(\arctg(x)) \cos^2(\arctg(x)) \\ &= \frac{2x}{\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{2x}{\operatorname{tg}^2(\arctg(x)) + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1} \\ \cos(2 \arctg(x)) &= \cos^2(\arctg(x)) - \sin^2(\arctg(x)) = \cos^2(\arctg(x))(1 - \operatorname{tg}^2(\arctg(x))) \\ &= \frac{1 - x^2}{\frac{\sin^2(\arctg(x)) + \cos^2(\arctg(x))}{\cos^2(\arctg(x))}} = \frac{1 - x^2}{\operatorname{tg}^2(\arctg(x)) + 1} = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}\end{aligned}$$

Oдавde dobijamo $(f \circ g_0)(x) = R(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2})$.

Možemo da odredimo integral $\int ((f \circ g_0)g'_0)(x)dx = \int R(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}) \frac{2}{1+x^2} dx = F(x) + C_0$, $C_0 \in \mathbb{R}$, jer je to integral racionalne funkcije. Primenom [teoreme 1.3](#) dobijamo $\int f(x)dx = F(g_0^{-1}(x)) + C_0$.

Rešili smo integral na intervalu $(-\pi, \pi)$. Posmatrajmo intervale oblika $((2m-1)\pi, (2m+1)\pi)$, $m \in \mathbb{Z}$. Funkcija $g_m(x) = 2 \arctg(x) + 2m\pi$ je diferencijabilna i ima inverz $g_m^{-1}(x) = \operatorname{tg}(\frac{x+2m\pi}{2}) = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$. Analogno kao za g_0 dobijamo $(f \circ g_m)(x) = R(\sin(2 \arctg(x) + 2m\pi), \cos(2 \arctg(x) + 2m\pi)) = R(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2})$.

Dakle, analogno rešavanju integrala na intervalu $(-\pi, \pi)$ dobijamo $\int f(x)dx = F(g_m^{-1}(x)) + C_m$.

Rešili smo integrale na $\mathbb{R} \setminus \{(2l+1)\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}$. Zbog neprekidnosti mora da važi da je

$$(\forall l \in \mathbb{Z}) (\lim_{x \rightarrow (2l+1)\pi^-} F(g_l^{-1}(x)) + C_l = \lim_{x \rightarrow (2l+1)\pi^+} F(g_{l+1}^{-1}(x)) + C_{l+1}).$$

Nalaženjem veze između konstanti C_l i C_{l+1} rešavamo integral i u tačkama $(2l+1)\pi$, gde je l ceo broj, čime smo rešili integral na celom \mathbb{R} .

Napomenimo da izvođenje zavisi od konkretne funkcije f . Za f koje nije definisano na celom \mathbb{R} ćemo raditi presek \mathbb{R} sa D_f i posmatrati drugačije intervale, ali će postupak ostati analogan.

Primer 1.15 Odrediti integral $\int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx$.

Neka je $f(x) = \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5}$. Domen funkcije je \mathbb{R} . Primenjujemo prethodnu diskusiju

$$(\forall l \in \mathbb{R}) (f \circ g_l)(x) = R(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}) = \frac{1}{\frac{4x}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{1+x^2} + 5} = \frac{1+x^2}{6x^2 + 4x + 4}$$

Ima l integrala oblika:

$$\begin{aligned}\int ((f \circ g_l)g'_l)(x)dx &= \int \frac{1+x^2}{6x^2 + 4x + 4} \frac{2}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{3(x^2 + 2\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{5}{9})} = \int \frac{dx}{3(x + \frac{1}{3})^2 + \frac{5}{3}} \\ &= \frac{3}{5} \int \frac{dx}{(\frac{3}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg(\frac{3}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}) + C_l\end{aligned}$$

Dobijamo da je $I_l = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg(\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}(\frac{x}{2}) + \frac{1}{\sqrt{5}}) + C_l$. Ostaje da nađemo leve i desne limese u nedefinisanim tačkama.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (2l+1)\pi^-} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg(\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}(\frac{x}{2}) + \frac{1}{\sqrt{5}}) + C_l &= \lim_{x \rightarrow (2l+1)\pi^+} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg(\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}(\frac{x}{2}) + \frac{1}{\sqrt{5}}) + C_{l+1} \\ \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_l &= -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_{l+1} \\ C_{l+1} &= C_l + \frac{\pi}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

Tada je $C_l = \frac{l\pi}{\sqrt{5}} + C_0$. Važi da je $(2l-1)\pi < x < (2l+1)\pi$ odakle je $\frac{x-\pi}{2\pi} < l < \frac{x+\pi}{2\pi}$, $l = [\frac{x+\pi}{2\pi}]$. Dobijamo da je rešenje integrala

$$\int f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg(\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}(\frac{x}{2}) + \frac{1}{\sqrt{5}}) + [\frac{x+\pi}{2\pi}] \frac{\pi}{\sqrt{5}} + C_0$$

2 Određeni integrali

2.1 Definicija određenog integrala

Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Želimo da definišemo $\int_a^b f(x)dx$.

Definicija 2.1 Neka su $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ tačke takve da važi $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Tada:

- skup intervala $\mathcal{P} = \{[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]\}$ nazivamo **podela** intervala $[a, b]$;
- tačke x_0, x_1, \dots, x_n nazivamo **podeone tačke** podele \mathcal{P} ;
- sa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, gde je $i \in \{1, \dots, n\}$, obeležavamo dužinu intervala $[x_{i-1}, x_i]$;
- skup svih podela intervala $[a, b]$ obeležavamo sa $\mathcal{P}[a, b]$;
- funkciju $\lambda : \mathcal{P}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definisanu sa $\lambda(\mathcal{P}) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \Delta x_i$ nazivamo **parametar** podele \mathcal{P} ;
- za podele $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathcal{P}[a, b]$ kažemo da je podela \mathcal{P}' finija od podele \mathcal{P} , odnosno da je podela \mathcal{P} grublja od podele \mathcal{P}' ako je skup podeonih tačaka podele \mathcal{P} podskup skupa podeonih tačaka podele \mathcal{P}' ;
- uređenu n -torku $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$ nazivamo **istaknute tačke** podele \mathcal{P} ;
- uređen par (\mathcal{P}, ξ) nazivamo **podela sa istaknutim tačkama** intervala $[a, b]$.

Definicija 2.2 Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i (\mathcal{P}, ξ) podela sa istaknutim tačkama intervala $[a, b]$. Tada zbir $\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ nazivamo **integralna suma** funkcije f za datu podelu sa istaknutim tačkama (\mathcal{P}, ξ) intervala $[a, b]$.

Definicija 2.3 Ako za $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $I \in \mathbb{R}$ važi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (\mathcal{P}, \xi) | \mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]) \lambda(\mathcal{P}) < \delta \implies |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| < \varepsilon$$

tada kažemo da je I **Rimanov integral funkcije** f na intervalu $[a, b]$ i pišemo:

$$I = \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \int_a^b f(x)dx$$

Rimanov integral nazivamo i **određeni integral**.

Ako za funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ postoji Rimanov integral, kažemo da je funkcija f **R-integrabilna** na intervalu $[a, b]$.

2.1.1 Uraditi

Primer 2.1 $f(x) = c$

Primer 2.2 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ 0, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a, b] \end{cases}$

Primer 2.3 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Negacija definicije Rimanovog integrala za $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $I \in \mathbb{R}$:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists(\mathcal{P}, \xi) | \mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]) \lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| \geq \varepsilon$$

Teorema 2.1 Ako $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nije ograničena na $[a, b]$, onda ona nije R-integrabilna.

Definicija 2.4 Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena na svom intervalu i neka je \mathcal{P} podela intervala. Za $i \in \{1, \dots, n\}$ definišemo $m_i = \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ i $M_i = \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Tada:

- zbir $s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ nazivamo **donja Darbuova suma** funkcije f za datu podelu \mathcal{P} intervala $[a, b]$;
- zbir $S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ nazivamo **gornja Darbuova suma** funkcije f za datu podelu \mathcal{P} intervala $[a, b]$.

Definicija 2.5 Za svake dve podele $\mathcal{P}', \mathcal{P}'' \in \mathcal{P}[a, b]$ postoji finija podela $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]$. Ako je skup podeonih tačaka podele \mathcal{P} unija podeonih tačaka podele \mathcal{P}' i \mathcal{P}'' , tada se podela \mathcal{P} naziva **superpozicija** podele \mathcal{P}' i \mathcal{P}'' .

Stav 2.1 Dokazati da za $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathcal{P}[a, b]$, gde je skup podeonih tačaka podele \mathcal{P} podskup skupa podeonih tačaka podele \mathcal{P}' , važi

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}).$$

Dokaz: Dovoljno je dokazati slučaj kad je skup podeonih tačaka podele $\mathcal{P} \{x_0, \dots, x_n\}$, a skup podeonih tačaka podele $\mathcal{P}' \{x_0, \dots, x_{k-1}, x', x_k, \dots, x_n\}$. Neka je $s' = \sum_{i=1}^{k-1} m_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n m_i \Delta x_i$ i neka su $m'_k = \inf\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x']\}$ i $m''_k = \inf\{f(x) | x \in [x', x_k]\}$. Tada je

$$s(f, \mathcal{P}) = s' + m_k(x_k - x_{k-1})$$

i

$$s(f, \mathcal{P}') = s' + m'_k(x' - x_{k-1}) + m''_k(x_k - x').$$

Važi da je $m_k = \min(m'_k, m''_k)$, odakle dobijamo:

$$\begin{aligned} m_k(x_k - x') + m_k(x' - x_{k-1}) &\leq m''_k(x_k - x') + m'_k(x' - x_{k-1}) \\ s' + m_k(x_k - x_{k-1}) &\leq s' + m''_k(x_k - x') + m'_k(x' - x_{k-1}) \\ s(f, \mathcal{P}) &\leq s(f, \mathcal{P}'). \end{aligned}$$

Treća nejednakost se slično dokazuje. ■

Stav 2.2 Neka su $\mathcal{P}', \mathcal{P}'' \in \mathcal{P}[a, b]$. Tada je $s(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}'')$.

Dokaz: Neka je \mathcal{P} superpozicija podele \mathcal{P}' i \mathcal{P}'' . Iz [prethodnog stava](#) važi da je

$$s(f, \mathcal{P}') \leq s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P})$$

i da je

$$s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}'')$$

odakle dobijamo

$$s(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}'').$$

Za $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ skup $\{s(f, \mathcal{P}) | \mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]\}$ je neprazan i prema [prethodnom stavu](#) ograničen odozgo brojem $S(f, \mathcal{P})$ za proizvoljno $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]$, pa prema aksiomi o egzistenciji supremuma postoji supremum ovog skupa. ■

Definicija 2.6 *Donji Rimanov integral* funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jeste

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\{s(f, P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Za $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ skup $\{S(f, P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}$ je neprazan i prema [prethodnom stavu](#) ograničen odozdo brojem $s(f, P)$ za proizvoljno $P \in \mathcal{P}[a, b]$, pa prema teoremi o egzistenciji infimuma postoji infimum ovog skupa.

Definicija 2.7 *Gornji Rimanov integral* funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jeste

$$\int_a^b f(x) dx = \inf\{S(f, P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Jasno je da važi $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$.

Definicija 2.8 Ako važi da je $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = I$, onda broj I nazivamo **Rimanov integral** funkcije f na $[a, b]$ i pišemo:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema 2.2 *Epsilon-delta definicija Rimanovog integrala i definicija Rimanovog integrala preko gornjeg i donjeg Rimanovog integrala su ekvivalentne.*

Stav 2.3 Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena. Tada je funkcija f R-integrabilna na $[a, b]$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $P \in \mathcal{P}[a, b]$ takvo da je $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

2.1.2 Dokazati

2.2 Integrabilnost nekih klasa funkcija

Teorema 2.3 Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a, b]$. Tada je funkcija f Riman integrabilna na $[a, b]$.

Podsetnik definicije monotonosti funkcije: Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je monotono rastuća ako važi

$$(\forall x_1, x_2 \in [a, b])(x_1 \leq x_2) \implies (f(x_1) \leq f(x_2)),$$

a monotono opadajuća ako važi

$$(\forall x_1, x_2 \in [a, b])(x_1 \leq x_2) \implies (f(x_1) \geq f(x_2)),$$

Teorema 2.4 Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotona funkcija na $[a, b]$. Tada je funkcija Riman integrabilna na $[a, b]$.

Dokaz: Bez umanjavanja opštosti, pretpostavimo da je funkcija monotono rastuća na $[a, b]$. Primetimo najpre da je funkcija ograničena na $[a, b]$. Zaista, za svako $x \in [a, b]$ važi $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Pretpostavimo da funkcija nije konstantna, za konstantne funkcije već znamo da su R-integrabilne. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i neka je

podela $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]$ takva da je parametar podele $\lambda(\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Tada je

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Dakle, važi $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$ za proizvoljno ε , pa po [stavu 2.3](#) važi da je f R-integrabilna na $[a, b]$. ■

Teorema 2.5 Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena funkcija na $[a, b]$ takva da je skup tačaka u kojima nije neprekidna konačan. Tada je funkcija f Riman integrabilna na $[a, b]$.

Teorema 2.6 Neka su $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ R-integrabilne funkcije na $[a, b]$ koje se razlikuju samo u konačno mnogo tačaka. Tada je:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Definicija 2.9 Skup svih Riman integrabilnih funkcija na intervalu $[a, b]$ označavamo sa $R[a, b]$.

2.3 Svojstva određenog integrala

Stav 2.4 Neka su $f, g \in R[a, b]$ i neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ i važi:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Dokaz: Neka je (\mathcal{P}, ξ) proizvoljna podela sa istaknutim tačkama na $[a, b]$. Tada

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha f + \beta g, \mathcal{P}, \xi) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(\alpha f + \beta g)(\xi_i) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})((\alpha f)(\xi_i) + (\beta g)(\xi_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(\alpha f)(\xi_i) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(\beta g)(\xi_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(\xi_i) + \beta \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})g(\xi_i) \\ &= \alpha \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) + \beta \sigma(g, \mathcal{P}, \xi) \end{aligned}$$

Po definiciji važi $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \int_a^b f(x) dx$ i $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(g, \mathcal{P}, \xi) = \int_a^b g(x) dx$. Tada

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx &= \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(\alpha f + \beta g, \mathcal{P}, \xi) \\ &= \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} (\alpha \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) + \beta \sigma(g, \mathcal{P}, \xi)) \\ &= \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \alpha \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) + \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \beta \sigma(g, \mathcal{P}, \xi) \\ &= \alpha \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) + \beta \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(g, \mathcal{P}, \xi) \\ &= \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

■

Stav 2.5 Neka su $f, g \in R[a, b]$. Tada:

- ako je $fg \in R[a, b]$, ne mora da važi $\int_a^b (fg)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$;
- ako je $|f| \in R[a, b]$, ne mora da važi $\int_a^b |f(x)|dx = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$;
- $\frac{1}{f} \in R[a, b]$, pod pretpostavkom da postoji $c > 0$ takvo da za svako $x \in [a, b]$ važi $|f(x)| > c$.

Stav 2.6 Neka je $f \in R[a, b]$ i $[c, d] \subset [a, b]$. Tada $f \in R[c, d]$.

Stav 2.7 Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $c \in (a, b)$. Tada $f \in R[a, b]$ ako i samo ako $f \in R[a, c]$ i $f \in R[c, b]$ i važi $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Definicija 2.10 Neka je $f : \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$. Tada $\int_a^a f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Definicija 2.11 Neka je $f \in R[a, b]$. Tada $\int_b^a f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} - \int_a^b f(x)dx$.

Definicija 2.12 Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $f : [\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}] \rightarrow \mathbb{R}$. Tada je f Riman integrabilna na $[\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}]$ i važi $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Stav 2.8 Neka je $f \in R[a, b]$ i $f(x) \geq 0$, za svako $x \in [a, b]$. Tada je $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Dokaz: Neka (\mathcal{P}, ξ) proizvoljna podela sa istaknutim tačkama na $[a, b]$. Tada je

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0.$$

Otuda je $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) \geq 0$, tačnije, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. ■

Stav 2.9 Neka je $f \in R[a, b]$. Tada je $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Dokaz: Kako važi $f(x) - |f(x)| \leq 0$, za svako $x \in [a, b]$, sledi $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$. Takođe, važi $0 \leq |f(x)| + f(x)$, za svako $x \in [a, b]$, odakle je $-\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$. Dakle, $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$. ■

Stav 2.10 Neka su $f, g \in R[a, b]$ i neka za svako $x \in [a, b]$ važi $f(x) \leq g(x)$. Tada je

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Dokaz: Primetimo da je $g - f \in R[a, b]$ i da je $(g - f)(x) \geq 0$, za svako $x \in [a, b]$. Tada je $\int_a^b (g - f)(x) dx \geq 0$, odakle dobijamo $\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$. ■

Stav 2.11 Neka je $f \in R[a, b]$ i neka su $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ i $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. Tada postoji $\mu \in [m, M]$ takvo da je $\int_a^b f(x) dx = \mu(b - a)$.

Dokaz: Za svako $x \in [a, b]$ važi:

$$\begin{aligned} m &\leq f(x) \leq M \\ m(b - a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \\ m &\leq \frac{1}{(b - a)} \int_a^b f(x) dx \leq M \end{aligned}$$

Dakle, postoji $\mu \in [m, M]$, takvo da je $\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$. ■

Podsetnik Vajerstrasove teoreme: Ako je funkcija neprekidna na intervalu $[a, b]$, ona je ograničena i dostiže svoj maksimum i minimum.

Stav 2.12 Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a, b]$. Tada postoji $c \in [a, b]$ takvo da je

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Dokaz: Kako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ po Vajersstrasovoj teoremi važi da je $\inf_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ i $\sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. Neka su $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ i $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. Na osnovu prethodnog stava sledi da postoji $\mu \in [m, M]$ takvo da je $\int_a^b f(x) dx = \mu(b - a)$. Kako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ sledi da je $f([a, b]) = [m, M]$. Otuda za $\mu \in [m, M]$ postoji $c \in [a, b]$ takvo da je $f(c) = \mu$. ■

2.4 Veza određenog integrala i izvoda. Njutn-Lajbnicova formula

Definicija 2.13 Neka je $f \in R[a, b]$. Ima smisla razmatrati funkciju $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definisanu sa $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$. Tada funkciju φ nazivamo **integral sa promenljivom gornjom granicom**.

Teorema 2.7 Funkcija φ je neprekidna na $[a, b]$.

Dokaz: Neka je $x_0 \in [a, b]$ proizvoljno. Dokažimo da je funkcija φ neprekidna u x_0 . Neka je $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada za $x \in [a, b]$ važi:

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t)| dt \right| \leq M|x - x_0|$$

Neka je $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Tada na osnovu $\varepsilon - \delta$ definicije važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [a, b])(|x - x_0| < \delta \rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon),$$

čime smo dokazali da je φ neprekidna u proizvoljnoj tački, zbog čega je neprekidna i na celom intervalu. ■

Teorema 2.8 Ako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ onda za funkciju φ važi da je diferencijabilna na (a, b) i važi $\varphi'_+(a) = f(a)$ i $\varphi'_-(b) = f(b)$.

Dokaz: Neka je $x \in [a, b]$ proizvoljno i $h \in \mathbb{R}$, takvo da je $x + h \in [a, b]$. Tada je

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Po stavu 2.12 postoji $c \in [\min\{x, x+h\}, \max\{x, x+h\}]$ takvo da $\int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)(x+h-x)$. Neka je $c = x + h\theta(x, h)$, $\theta \in [0, 1]$. Tada je

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \frac{1}{h} f(x + h\theta(x, h))(x+h-x) = f(x + h\theta(x, h)).$$

Odatle dobijamo $\varphi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x + h\theta(x, h)) = f(x)$. Slično se dokazuje i za $\varphi'_+(a)$ i $\varphi'_-(b)$. ■

Tvrđenje 2.1 Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na (a, b) . Tada funkcija f ima primitivnu funkciju $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ na (a, b) .

Neka je $x_0 \in (a, b)$ fiksirana tačka i neka je $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$. Funkcija F je korektno definisana, jer je f neprekidna funkcija na $[\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\}] \subset (a, b)$. Neka je $x \in (a, b)$ proizvoljno i neka je $h \in \mathbb{R}$ takvo da je $x+h \in (a, b)$. Tada analogono dokazu prethodne teoreme dobijamo $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$. Analogno prethodnoj teoremi dobijamo $f(x+h\theta(x, h))$, gde je $\theta(x, h) \in [0, 1]$. Otuda je $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h\theta(x, h)) = f(x)$, tačnije $F'(x) = f(x)$. ■

Primer 2.4 Navesti primer funkcije koja nije neprekidna, ali ima primitivnu funkciju.

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Teorema 2.9 (Njutn-Lajbnicova formula) Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a, b]$ i neka je $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije f na $[a, b]$. Pri čemu važi $F'_+(a) = f(a)$ i $F'_-(b) = f(b)$. Tada je

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz: Neka je $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$. Na osnovu prethodnih teorema znamo da za svako $x \in [a, b]$ važi $\varphi'(x) = f(x)$, tačnije, φ je primitivna funkcija funkcije f . Stoga, postoji $C \in \mathbb{R}$, takvo da za svako $x \in [a, b]$ važi $\varphi(x) = F(x) + C$ i $\varphi(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$. Sledi da je

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \varphi(b) = F(b) + C = F(b) + C + \varphi(a) - \varphi(a) \\ &= F(b) + C + \varphi(a) - F(a) - C = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

■

2.5 Smena promenljive i parcijalna integracija u određenom integralu

Teorema 2.10 (*Teorema o smeni promenljive*) Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a, b]$ i neka je $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ neprekidna funkcija na $[\alpha, \beta]$. Tada je:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} ((f \circ \varphi)\varphi')(t) dt$$

Dokaz: Neka je $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tada je po Njutn-Lajbnicovoj formuli:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \quad (3)$$

S druge strane za funkciju $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ definisanu sa $\psi(t) = F(\varphi(t))$ važi:

$$\psi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = ((f \circ \varphi)\varphi')(t)$$

Dakle, funkcija ψ je primitivna funkcija funkcije $(f \circ \varphi)\varphi'$ na intervalu $[\alpha, \beta]$, odakle važi:

$$\int_{\alpha}^{\beta} ((f \circ \varphi)\varphi')(t) dt = \psi(\beta) - \psi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \quad (4)$$

Iz (3) i (4) dobijamo $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} ((f \circ \varphi)\varphi')(t) dt$ što je kraj dokaza. ■

Teorema 2.11 (*Teorema o parcijalnoj integraciji*) Neka su $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilne funkcije na $[a, b]$. Tada je:

$$\int_a^b (uv')(x) dx = (uv)(b) - (uv)(a) - \int_a^b (u'v)(x) dx$$

Dokaz: Po Njutn-Lajbnicovoj formuli važi:

$$\int_a^b (uv)'(x) dx = (uv)(b) - (uv)(a) \quad (5)$$

Zbog linearnosti određenih integrala važi:

$$\int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b (u'v + uv')(x) dx = \int_a^b (u'v)(x) dx + \int_a^b (uv')(x) dx \quad (6)$$

Iz jednakosti (5) i (6) važi:

$$\int_a^b (uv')(x) dx = \int_a^b (uv)'(x) dx - \int_a^b (u'v)(x) dx = (uv)(b) - (uv)(a) - \int_a^b (u'v)(x) dx$$

■