Matematički fakultet

Odgovori na teorijska ispitna pitanja iz analize 2

Radili
Lazar Jovanović 34/2023
Jana Vuković 124/2022

Profesor
dr Marek Svetlik

Beograd, 2024/2025

Sadržaj

1 Neodređeni integrali

1.1 Primitivna funkcija

Posmatrajmo neku funkciju $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, na primer $f(x)=x^2$. Možemo da pronađemo koeficijent pravca u tački $x_0\in\mathbb{R}$ računanjem izraza $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. U našem primeru dobijamo $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-(x_0)^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}2x_0+h=2x_0$. Dakle, koeficijent pravca funkcije f u tački x_0 jeste broj $2x_0$. Na ovaj način imamo određenu novu funkciju $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definisanu sa $\varphi(x)=2x$. Uobičajeno je da funkciju φ nazivamo izvodna funkcija (izvod, prvi izvod) funkcije f. Funkciju φ drugačije označavamo sa f'.

Sada razmotrimo obratan problem. Odredimo funkciju $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, ako je poznato da je funkcija $f':\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definisana sa $f'(x)=2x$. Iz prošlog primera možemo da zaključimo da je $f(x)=x^2$ jedno rešenje. Zapitajmo se da li je i jedino. Nije, na primer funkcija $f(x)=x^2+1$ je takođe rešenje.

Pokušajmo da odredimo funkciju $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ako je poznato da je

$$f'(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}.$$

Takvo f ne postoji, jer funkcija sgn ima prekid prve vrste.

Podsetnik teoreme: Neka je $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Tada funkcija f' ne može imati prekide prve vrste.

Podsetnik definicije prekida prve vrste: Za funkciju f, tačka x_0 je prekid prve vrste ako postoje konačni $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ i različiti su.

Definicija 1.1 *Neka je $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$. Funkciju $F:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ nazivamo primitivna funkcija za funkciju f na intervalu (a,b) ako je funkcija F diferencijabilna na (a,b) i za svako $x\in(a,b)$ važi $F'(x)=f(x)$.*

Prirodno se postavljaju pitanja da li za datu funkciju postoji primitivna funkcija i ako postoji koliko primitivnih funkcija ima. O broju primitivnih funkcija nam govori sledeći stav.

Stav 1.1 *Neka je $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ i neka je $F:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ primitivna funkcija za funkciju f na intervalu (a,b) i neka je $C\in\mathbb{R}$ proizvoljno. Tada je funkcija $G:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$, definisana sa $G(x)=F(x)+C$, primitivna funkcija za funkciju f na intervalu (a,b).*

Dokaz: G je diferencijabilna na (a,b) jer je zbir dve diferencijabilne funkcije i za svako x iz intervala (a,b) važi $G'(x)=F'(x)+0=f(x)$, što smo i hteli da dokažemo. ■

Ovim smo dokazali da ako je $F_1(x)$ primitivna funkcija, onda je i $F_1(x)+C$ primitivna funkcija. Sledeće pitanje je da li može da postoji neka funkcija $F_2(x)$ koja nije ovog oblika. O tome nam govori sledeća teorema.

Podsetnik Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti: Neka je funkcija $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ neprekidna na $[a,b]$ i difernecijabilna na (a,b). Tada će postojati tačka $x_0\in(a,b)$ takva da važi

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0).$$

Teorema 1.1 *Neka je $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ i neka su $F_1,F_2:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ primitivne funkcije za funkciju f na intervalu (a,b). Tada postoji $C\in\mathbb{R}$ takvo da za svako $x\in(a,b)$ važi $F_1(x)=F_2(x)+C$.*

Dokaz: Neka je funkcija $G:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ definisana sa $G(x)=F_1(x)-F_2(x)$. Tada važi

$$G'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Izaberimo proizvoljne $x_1,x_2\in(a,b)$ takve da važi $x_1<x_2$. Dokažimo da je $G(x_1)=G(x_2)$.

(1) G je neprekidna na $[x_1,x_2]\subset(a,b)$.

(2) G je diferencijabilna na $(x_1, x_2) \subset (a, b)$.

Iz (1) i (2), a na osnovu Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti, sledi da postoji $x_0 \in (x_1, x_2)$ takvo da

$$G(x_1) - G(x_2) = G'(x_0)(x_2 - x_1) = 0(x_2 - x_1) = 0.$$

Dakle, $G(x_1) = G(x_2)$. Kako su x_1 i x_2 proizvoljni, sledi da je G konstantna funkcija. Važi da postoji $C \in \mathbb{R}$ takvo da za svako $x \in (a, b)$ važi jednakost $C = G(x) = F_1(x) - F_2(x)$, odakle je $F_1(x) = F_2(x) + C$. ∎

Primer 1.1 *Neka je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = 2x$. Odrediti:*

a) sve primitivne funkcije za funkciju f.

To su funkcije $x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}$.

b) funkciju $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ koja je primitivna za funkciju f i za koju važi $g(0) = \sqrt{2}$ i $g(x) = x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Rešenje je $g(x) = x^2 + \sqrt{2}$.

Primer 1.2 *Odrediti sve dvaput diferencijabilne funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ takve da za svako $x \in \mathbb{R}$ važi $f''(x) = 0$.*

Ako je $(f'(x))' = 0$ tada pogađanjem dobijamo $f'(x) = C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$ i $f(x) = C_1 x + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}$. Rešenje je $f(x) = C_1 x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

1.2 Definicija i osnovna svojstva neodređenog integrala

Definicija 1.2 *Neka je $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Neodređeni integral funkcije f na intervalu (a, b) je skup svih primitivnih funkcija za funkciju f na intervalu (a, b). Neodređeni integral funkcije f obeležavamo sa $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{dx}$. Formalno*

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = \left\{F \;\middle|\; F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R},\ (\forall x \in (a, b))\,(F'(x) = f(x))\right\}.$$

Neka je $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ proizvoljna primitivna funkcija za funkciju f na (a, b). Tada je

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = \left\{G \;\middle|\; G : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R},\ (\exists C \in \mathbb{R})\big(\forall x \in (a, b)\big)\big(G(x) = F(x) + C\big)\right\}. \tag{1}$$

*Jednakost (**??**) skraćeno zapisujemo na sledeći način*

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Napomena: U jednakosti (**??**) se ne vidi interval (a, b), što stvara potencijalnu opasnost.

Primer 1.3 *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Naći integral $\displaystyle\int (a_n x^n + \ldots + a_0)\,\mathrm{dx}$.*

Nagađanjem možemo da dođemo do rešenja: $\displaystyle\int (a_n x^n + \ldots + a_0)\,\mathrm{dx} = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \ldots + a_0 x + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Primer 1.4 *Naći* $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx}$.

Neka je $f(x) = \frac{1}{x}$. Nije naglašeno na kom intervalu rešavamo integral, zbog čega uzimamo domen funkcije $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Imamo dva intervala pa posmatramo dva slučaja.

1. slučaj: $x \in (0, +\infty)$ $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \ln(x) + C_1 = \ln|x| + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$.

2. slučaj: $x \in (-\infty, 0)$ $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \ln(-x) + C_2 = \ln|x| + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Bitno je naglasiti da se konstante C_1 i C_2 odnose na intervale. One u opštem slučaju ne moraju da budu jednake. U sledećem primeru vidimo gde može da nastane problem.

Primer 1.5 *Odrediti funkciju* $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, *takvu da* $f(1) = 0$, $f(-1) = 1$ *i za svako* $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ *važi* $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Pogrešno rešenje: Iz prethodnog primera dobijamo $f(x) = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \ln|x| + C$. Ubacivanjem vrednosti dobijamo $f(1) = 0 = \ln(1) + C = C$ i $f(-1) = 1 = \ln(1) + C = C$. Dobijamo da je $C = 0 = 1$, što je kontradikcija.
Tačno rešenje:
Posmatrajmo $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ definisanu sa

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x), & x > 0 \\ \ln(-x) + 1, & x < 0 \end{cases}.$$

Njen izvod je

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}.$$

Dakle, funkcija f je tražena funkcija jer važi $f(1) = 0$ i $f(-1) = 1$. U ovom primeru je $C_1 = 0$, a $C_2 = 1$.

Stav 1.2 *Neka su* $f_1, f_2 : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcije koje imaju primitivne funkcije na* (a, b) *i neka su* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. *Tada funkcija* $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *ima primitivnu funkciju na* (a, b) *i važi*

$$\int (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)\,\mathrm{dx} = \lambda_1 \int f_1(x)\,\mathrm{dx} + \lambda_2 \int f_2(x)\,\mathrm{dx}.$$

Dokaz: Neka je funkcija $F_1 : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija za f_1 i neka je funkcija $F_2 : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija za f_2. Tada, po definiciji primitivne funkcije, za svako $x \in (a, b)$ važe jednakosti $F_1'(x) = f_1(x)$ i $F_2'(x) = f_2(x)$. Odatle zaključujemo

$$(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2)'(x) = \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x).$$

Ako krenemo od desne strane jednakosti koju dokazujemo i primenimo prethodne jednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int f_1(x)\,\mathrm{dx} + \lambda_2 \int f_2(x)\,\mathrm{dx} &= \lambda_1 (F_1(x) + C_1) + \lambda_2 (F_2(x) + C_2) \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C \\ &= (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2)(x) + C \\ &= \int (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)\,\mathrm{dx}, \end{aligned}$$

gde su $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, a $C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$. Ovim završavamo dokaz. ■

Primer 1.6 *Naći* $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}+\cos\frac{x}{3}-5\cdot 2^x\right)\mathrm{dx},\ x>0.$

$$\begin{aligned} I &= \int\frac{3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx}+\int\cos\frac{x}{3}\,\mathrm{dx}-5\int 2^x\,\mathrm{dx}\\ &= 6\sqrt{x}+C_1+3\sin\frac{x}{3}+C_2-5\frac{2^x}{\ln 2}-5C_3\\ &= 6\sqrt{x}+3\sin\frac{x}{3}-5\frac{2^x}{\ln 2}+C, \end{aligned}$$

gde su $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$, a $C = C_1 + C_2 - 5C_3$.

Tablica integrala:	
$\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ x\in(0,+\infty)$ $\int x^\alpha\,\mathrm{dx}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$
$n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}$ $\int x^n\,\mathrm{dx}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$
$n\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\int x^{-n}\,\mathrm{dx}$	$\frac{1}{1-n}x^{1-n}+C_1,\ x\in(-\infty,0)$ $\frac{1}{1-n}x^{1-n}+C_2,\ x\in(0,+\infty)$
$x\in\mathbb{R}$ $\int x^{-1}\,\mathrm{dx}$	$\ln\lvert x\rvert+C_1,\ x\in(-\infty,0)$ $\ln\lvert x\rvert+C_2,\ x\in(0,+\infty)$
$a>0,\ a\neq 1,\ x\in\mathbb{R}$ $\int a^x\,\mathrm{dx}$	$\frac{1}{\ln a}a^x+C$
$x\in\mathbb{R}$ $\int\sin x\,\mathrm{dx}$	$-\cos x+C$
$x\in\mathbb{R}$ $\int\cos x\,\mathrm{dx}$	$\sin x+C$
$x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{3\pi}{2}+k\pi\right)$ $\int\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{dx}$	$\operatorname{tg}x+C_k,\ x\in\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{3\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$
$x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi,\pi+k\pi)$ $\int\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{dx}$	$-\operatorname{ctg}x+C_k,\ x\in(k\pi,\pi+k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$
$x\in(-1,1)$ $\int\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\,\mathrm{dx}$	$\arcsin x+C$
$x\in\mathbb{R}$ $\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{dx}$	$\operatorname{arctg}x+C$
$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\int x^0\,\mathrm{dx}$	$x+C_1,\ x\in(-\infty,0)$ $x+C_2,\ x\in(0,+\infty)$

1.3 Metode integracije

Teorema 1.2 *(Teorema o smeni promenljive 1) Neka je* $F:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ *primitivna funkcija za funkciju* $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ *i neka je* $g:(\alpha,\beta)\longrightarrow(a,b)$ *diferencijabilna funkcija na* (α,β)*. Tada postoji primitivna funkcija za funkciju* $(f\circ g)\,g':(\alpha,\beta)\longrightarrow\mathbb{R}$ *i važi*

$$\int((f\circ g)\,g')(x)\,\mathrm{dx}=F(g(x))+C,\ \ C\in\mathbb{R}.$$

Dokaz: Neka je $x \in (a,b)$ proizvoljno. Tada

$$\begin{aligned}(F(g(x)) + C)' &= ((F \circ g)(x) + C)' = ((F \circ g)(x))' + 0 \\ &= F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x) \\ &= ((f \circ g)\, g')(x).\end{aligned}$$

■

Primer 1.7 *Neka su* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. *Naći* $\int (ax+b)^n \, \mathrm{dx}$.

Neka su $f(t) = t^n$ i $g(x) = ax + b$. Tada važi $F(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ i $g'(x) = a$. Primenom teoreme o smeni promenljive 1 dobijamo

$$\begin{aligned}\int (ax+b)^n \, \mathrm{dx} &= \int f(g(x)) \, \mathrm{dx} = \int \frac{1}{a} f(g(x))\, g'(x) \, \mathrm{dx} \\ &= \frac{1}{a} \int f(g(x))\, g'(x) \, \mathrm{dx} \\ &= \frac{1}{a} F(g(x)) + C \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{1+n} (ax+b)^{1+n}.\end{aligned}$$

Primitivna funkcija koju smo dobili je definisana na $x \in \mathbb{R}$ za $n > 0$.
Za $n \in \mathbb{Z} \cap ((-\infty, -1) \cup \{0\})$ je definisana na $x \in \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right) \cup \left(-\dfrac{b}{a}, +\infty\right)$.

Napomena: Izdvajamo slučaj kada je $n = 0$ jer za $x = -\dfrac{b}{a}$ dobijamo 0^0. Iako važi $\lim\limits_{x \longrightarrow 0+} x^x = 1$, izraz 0^0 nije definisan jer $\lim\limits_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} x^y$ ne postoji.

Primer 1.8 *Naći* $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} \, \mathrm{dx}$.

Neka su $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ i $g(x) = e^x + 1$. Tada važi $F(t) = 2\sqrt{t}$ i $g'(x) = e^x$. Primernom teoreme o smeni promenljive 1 dobijamo

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \, \mathrm{dx} &= \int f(g(x))\, e^x \, \mathrm{dx} = \int f(g(x))\, g'(x) \, \mathrm{dx} \\ &= F(g(x)) + C \\ &= 2\sqrt{e^x + 1}.\end{aligned}$$

Teorema 1.3 *(Teorema o smeni promenljive 2) Neka je* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, *neka je* $g : (\alpha, \beta) \longrightarrow (a,b)$ *diferencijabilna funkcija takva da postoji* $g^{-1} : (a,b) \longrightarrow (\alpha, \beta)$ *koja je takođe diferencijabilna i neka je* $F : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ *primitivna funkcija za funkciju* $(f \circ g)\, g' : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$. *Tada postoji primitivna funkcija za funkciju* f *i važi:* $\int f(x) \, \mathrm{dx} = F\left(g^{-1}(x)\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Izaberimo proizvoljno $x \in (a,b)$. Tada

$$\begin{aligned}\left(F\left(g^{-1}(x)\right) + C\right)' &= \left(F\left(g^{-1}(x)\right)\right)' + 0 = F'\left(g^{-1}(x)\right) \left(g^{-1}\right)'(x) \\ &= ((f \circ g)\, g')\left(g^{-1}(x)\right) \left(g^{-1}\right)'(x) \\ &= (f \circ g)\left(g^{-1}(x)\right) g'\left(g^{-1}\right) \left(g^{-1}\right)'(x) \\ &= (f(x)) \left(g \circ g^{-1}\right)'(x) = f(x)\, x' = f(x).\end{aligned}$$

■

Pogledajmo sada par primera koji ilustruju kad smemo da koristimo teoremu 1.3.

Primer 1.9 *Neka je* $g : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ *definisano sa* $g(t) = e^t$ *i neka je* $g^{-1} : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definisano sa* $g^{-1}(x) = \ln x$.

Funkcije g i g^{-1} su diferencijabilne na svojim domenima pa možemo primeniti teoremu.

Primer 1.10 *Neka je* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definisano sa* $g(t) = t^3$ *i neka je* $g^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definisano sa* $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu. Proverimo da li je g^{-1} diferencijabilna u nuli:

$$\left(g^{-1}\right)'(0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{g^{-1}(h) - g^{-1}(0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$$

Dakle, nije diferencijabilno, zbog čega ne može primeniti teoremu.

Primer 1.11 *Neka je* $g : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ *definisano sa* $g(t) = t^3$ *i neka je* $g^{-1} : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ *definisano sa* $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu. Za izvod funkcije g^{-1} dobijamo: $\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Ovo je definisano na celom domenu pa možemo da primenimo teoremu.

Sledi primer korišćenja teoreme 1.3.

Primer 1.12 *Neka je* $a > 0$. *Naći* $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{dx}$.

Neka je $f : (-a, a) \longrightarrow (0, a]$ definisano sa $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ i neka je $g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow (-a, a)$ definisano sa $g(x) = a \sin x$. Tada je $g^{-1} : (-a, a) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ definisano sa $g^{-1}(x) = \arcsin \frac{x}{a}$.
Izvod $g'(x) = a \cos x$ je definisan na celom domenu pa možemo da koristimo teoremu 1.3. Zbog preglednijeg zapisa, neka je $g^{-1}(x) = t$.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{dx} &= \int f(x)\,\mathrm{dx} = F\left(g^{-1}(x)\right) + C = \int \left((f \circ g)\, g'\right)(t)\, dt = \int a \cos(t) \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(t)} dt \\
&= \int a \cos(t) \sqrt{a^2 \left(1 - \sin^2(t)\right)} dt = \int a^2 \cos(t) \sqrt{1 - \sin^2(t)} dt = \int a^2 \cos^2(t)\, dt \\
&= \int \frac{a^2}{2} \left(1 + \cos(2t)\right) dt = \int \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \cos(2t)\, dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin(2t) + C.
\end{aligned}$$

Dobili smo rešenje integrala, ali ovo rešenje možemo još da sredimo:

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \sin\left(2 \arcsin \frac{x}{a}\right) + C \\
=&\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} 2 sin\left(\arcsin \frac{x}{a}\right) cos\left(\arcsin \frac{x}{a}\right) + C && \textit{(formula za polovinu ugla sinusa)} \\
=&\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \frac{x}{a} cos\left(\arcsin \frac{x}{a}\right) + C && \textit{napomena} \\
=&\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{ax}{2} \sqrt{cos^2\left(\arcsin \frac{x}{a}\right)} + C && \textit{(kosinus na domenu je pozitivan)} \\
=&\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{ax}{2} \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin \frac{x}{a}\right)} + C \\
=&\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{ax}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C \\
=&\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.
\end{aligned}$$

Napomena: Iako važi da je $\sin(\arcsin(x)) = x$, ne mora da važi da je $\arcsin(\sin(x)) = x$.
Na kraju možemo da proverimo da li smo dobili tačno rešenje tako što uradimo izvod primitivne funkcije.

Opisali smo kako se ponaša integral linearnih kombinacije funkcija i kako se uvode smene. Ostaje da vidimo šta se dešava sa integralom proizvoda dve funkcije. O tome nam govori sledeća teorema.

Teorema 1.4 *(Teorema o parcijalnoj integraciji) Neka su* $u, v : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferencijabilne funkcije. Tada funkcija* $uv' : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *ima primitivnu funkciju ako i samo ako funkcija* $u'v : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *ima primitvnu funkciju. Važi*

$$\int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{dx} = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{dx}\,.$$

Dokaz: Neka je $x \in (a,b)$ proizvoljno. Tada

$$(uv)'(x) = \big(u(x)\, v(x)\big)' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x) \tag{3}$$

Pretpostavimo da $u'v$ ima primitivnu funkciju. Tada iz (**??**) dobijamo

$$u(x)\, v'(x) = \big(u(x)\, v(x)\big)' - u'(x)\, v(x) \tag{4}$$

Kako $\big(u(x)\, v(x)\big)'$ i $u'(x)\, v(x)$ imaju primitivne funkcije, iz (**??**) sledi da je i $u(x)\, v'(x)$ ima. Osim toga važi

$$\int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{dx} = \int (u(x)\, v(x))'\, \mathrm{dx} - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{dx} = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{dx}\,.$$

Drugi smer dokaza je potpuno analogan. ■

Primer 1.13 *Naći* $\int e^x \sin x\, \mathrm{dx}$.

Primenjujemo teoremu o parcijalnoj integraciji za $u(x) = e^x$ i $v(x) = -\cos x$:

$$\int e^x \sin x\, \mathrm{dx} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, \mathrm{dx}\,.$$

Ostaje da se izračuna $\int e^x \cos x\, \mathrm{dx}$. Ponovo primenjujemo teoremu o parcijalnoj integraciji, ovaj put za $u(x) = e^x$ i $v(x) = \sin x$:

$$\int e^x \cos x\, \mathrm{dx} = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, \mathrm{dx}\,.$$

Uvrstimo dobijeni izraz u prethodnu jednakost:

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x\, \mathrm{dx} &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, \mathrm{dx} \\
2\int e^x \sin x\, \mathrm{dx} &= -e^x \cos x + e^x \sin x + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R} \\
\int e^x \sin x\, \mathrm{dx} &= \frac{1}{2}\left(-e^x \cos x + e^x \sin x\right) + C,\ C = \frac{C_1}{2}.
\end{aligned}$$

Primer 1.14 *Naći* $\int \frac{1}{x}\, \mathrm{dx}$ *za* $x > 0$.

Iskoristićemo teoremu o parcijalnoj integraciji na $u(x) = \frac{1}{x}$ i $v(x) = x$. Dobijamo jednakost

$$\int \frac{1}{x}\, \mathrm{dx} = \frac{x}{x} + \int \frac{1}{x} = 1 + \int \frac{1}{x}.$$

Greška koja se često pravi je da se integrali skrate i da se dobije $1 = 0$, što znači da ovaj integral ne postoji. Ovo nije tačno jer ovu jednakost možemo da zapišemo i kao $F + C_1 = 1 + F + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Ako skratimo primitivne funkcije dobijamo vezu između konstanti, što nam nije od pomoći. Metodom pogađanja rešenja dobijamo

$$\int \frac{1}{x}\, \mathrm{dx} = \ln x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

1.4 Integracija racionalnih funkcija

Integraciju racionalnih funkcija možemo da rešavamo po algoritmu. Potrebno je da znamo rešenja integrala polinoma i integrala oblika $\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{dx}$, $\int \frac{1}{(x-a)^k}\,\mathrm{dx}$, $\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx}$ i $\int \frac{Mx+N}{(x^2+bx+c)^k}\,\mathrm{dx}$, gde su $A, a, M, N, b, c \in \mathbb{R}$, $b^2-4c<0$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Integral polinoma već znamo, a u sledećim lemama ćemo pokazati proces nalaženja ovih integrala.

Lema 1.1 *Važi* $\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{dx} = A\ln|x-a| + C$, *gde su* $A, a, C \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Neka je funkcija $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(t) = \frac{A}{t}$ i funkcija $g : \mathbb{R}\setminus\{a\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$ definisana sa $g(x) = x-a$. Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu, gde je $g'(x) = 1$, a primitivna funkcija funkcije f je funkcija $F(t) = A\ln|t|$. Tada možemo da primenimo teoremu 1.2:

$$\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{dx} = \int ((f\circ g)\,g')(x)\,\mathrm{dx} = F(g(x)) + C = A\ln|x-a| + C.$$

Napomenimo da C za $x>a$ i C za $x<a$ mogu biti različiti. ■

Lema 1.2 *Važi* $\int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{dx} = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$, *gde su* $A, a, C \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Dokaz: Neka je funkcija $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(t) = \frac{A}{t^k}$ i funkcija $g : \mathbb{R}\setminus\{a\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$ definisana sa $g(x) = x-a$. Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu, gde je $g'(x) = 1$, a primitivna funkcija funkcije f je funkcija $F(t) = \frac{A}{(1-k)t^{k-1}}$. Tada možemo da primenimo teoremu 1.2:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{dx} = \int ((f\circ g)\,g')(x)\,\mathrm{dx} = F(g(x)) + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

■

Lema 1.3 *Važi* $\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx} = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+xb+c\right) + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right) + C$, *gde su* $M, N, b, c, C \in \mathbb{R}$, $b^2-4c<0$.

Dokaz: Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(t) = \frac{Mt}{t^2+1} + \frac{2N-bM}{(t^2+1)\sqrt{4c-b^2}}$ i funkcija $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $g(x) = \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}$. Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu, gde je $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}$. Potrebno je da izračunamo primitivnu funkciju

$$\begin{aligned}
\int f(t)\,dt &= \int \frac{Mt}{t^2+1} + \frac{2N-bM}{(t^2+1)\sqrt{4c-b^2}}dt \\
&= \frac{M}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}dt + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}}\int \frac{1}{t^2+1}dt \\
&= \frac{M}{2}\ln\left(t^2+1\right) + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}}\operatorname{arctg} t + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R} \\
&= F(t) + C_1.
\end{aligned}$$

Tada možemo da primenimo teoremu o smeni promenljive 1:

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx} &= \int \left(\left(f\circ g\right)g'\right)(x)\,\mathrm{dx}\\
&= F\left(g\left(x\right)\right)+C_1\\
&= \frac{M}{2}\ln\left(\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2+1\right)+\frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)+C_1,\ C_1\in\mathbb{R}\\
&= \frac{M}{2}\ln\left(\frac{4x^2+4xb+b^2+4c}{4c-b^2}\right)+\frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)+C_1\\
&= \frac{M}{2}\left(\ln\left(x^2+xb+c\right)-\ln\left(c-\frac{b^2}{4}\right)\right)+\frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)+C_1\\
&= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+xb+c\right)+\frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)+C,\ C=C_1+\frac{M}{2}\ln\left(c-\frac{b^2}{4}\right).
\end{aligned}$$

■

Lema 1.4 *Važi* $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{dx} = \frac{M}{2}\frac{1}{\left(1-k\right)\left(x^2+bx+c\right)^{k-1}}+\left(N-\frac{Mb}{2}\right)I_k$*, gde su* $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$*,* $M,N,b,c\in\mathbb{R}$*,* $b^2-4c<0$*,* $I_k=\displaystyle\int\frac{1}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{dx}$ *i naći vezu između* I_k *i* I_{k-1}*.*

Dokaz: Prvo ćemo početni integral razložiti na dva lakša

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{dx} &= \int \frac{\frac{M}{2}\left(2x+b\right)-\frac{Mb}{2}+N}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{dx}\\
&= \int \frac{\frac{M}{2}\left(2x+b\right)}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{dx}+\int\frac{N-\frac{Mb}{2}}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{dx}\\
&= \frac{M}{2}\int\frac{2x+b}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{dx}+\left(N-\frac{Mb}{2}\right)\int\frac{1}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{dx}\,.
\end{aligned}$$

Prvi integral možemo da rešimo teoremomu o smeni promenljive 1. Neka je funkcija $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ definisana sa $f\left(t\right)=\dfrac{1}{t^k}$ i neka je funkcija $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ definisana sa $g\left(x\right)=x^2+bx+c$. Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu i važi $g'\left(x\right)=2x+b$. Jedna od primitivnih funkcija funkcije f je $F\left(t\right)=\dfrac{1}{\left(1-k\right)t^{k-1}}$. Primenom teoreme o smeni promenljive 1 dobijamo

$$\begin{aligned}
\int\frac{2x+b}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{dx} &= \int\left(\left(f\circ g\right)g'\right)(x)\,\mathrm{dx}=F\left(g\left(x\right)\right)+C,\ C\in\mathbb{R}\\
&= \frac{1}{\left(1-k\right)\left(x^2+bx+c\right)^{k-1}}+C.
\end{aligned}$$

Za drugi integral koristimo nov metod rešavanja. Neka je $I_k=\displaystyle\int\frac{1}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{dx}$. Želimo da nađemo vezu između I_k i I_{k-1} jer onda rekurzivno možemo da rešimo integral I_k (znamo rešenje I_1 iz leme 1.3). Koristićemo teoremu 1.4. Neka su $u,v:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definisane sa $u\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(x^2+bx+c\right)^k}$ i $v\left(x\right)=x$. Funkcije u i v su diferencijabilne na svojim domenima i važe jednakosti $u'\left(x\right)=-\dfrac{\left(2x+b\right)k}{\left(x^2+bx+c\right)^{k+1}}$ i $v'\left(x\right)=1$. Primenom teoereme o parcijalnoj integraciji dobijamo

$$\begin{aligned}
I_k &= \int \frac{1}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{dx} = \int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{dx} = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{x}{\left(x^2+bx+c\right)^k} + k\int \frac{2x^2+2bx+2c-bx-2c}{\left(x^2+bx+c\right)^{k+1}}\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{x}{\left(x^2+bx+c\right)^k} + 2k\int \frac{1}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{dx} - k\int \frac{bx+2c}{\left(x^2+bx+c\right)^{k+1}}\,\mathrm{dx} \\
(1-2k)\,I_k &= \frac{x}{\left(x^2+bx+c\right)^k} - k\int \frac{bx+2c}{\left(x^2+bx+c\right)^{k+1}}\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{x}{\left(x^2+bx+c\right)^k} - k\int \frac{\frac{b}{2}(2x+b)-\frac{b^2}{2}+2c}{\left(x^2+bx+c\right)^{k+1}}\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{x}{\left(x^2+bx+c\right)^k} + \frac{b}{2}\frac{1}{\left(x^2+bx+c\right)^k} - \left(2c-\frac{b^2}{2}\right)k\int \frac{1}{\left(x^2+bx+c\right)^{k+1}}\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{x+\frac{b}{2}}{\left(x^2+bx+c\right)^k} - \left(2c-\frac{b^2}{2}\right)kI_{k+1}.
\end{aligned}$$

Odredili smo vezu između I_k i I_{k+1}, pomeranjem indeksa za jedan naniže dobijamo vezu između I_{k-1} i I_k

$$I_k = \frac{2x+b}{\left(4c-b^2\right)\left(x^2+bx+c\right)^k} - \frac{2-4k}{4c-b^2}I_{k-1}.$$

Na kraju, vraćanjem svega u početni integral dobijamo

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{dx} = \frac{M}{2}\frac{1}{(1-k)\left(x^2+bx+c\right)^{k-1}} + \left(N-\frac{Mb}{2}\right)I_k.$$

■

Stav 1.3 *(Posledica osnovnog stava algebre) Svaki polinom sa koeficijentima iz polja kompleksnih brojeva stepena n, gde je $n \geq 1$, ima tačno n nula u polju kompleksnih brojeva, računajući njihovu višestrukost.*

Tvrđenje 1.1 *Svaki polinom $P:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ stepena n može se zapisati u obliku*

$$P(x) = p\,(x-a_1)^{s_1}\ldots(x-a_k)^{s_k}\,(x-d_{11})^{t_1}\,(x-d_{12})^{t_1}\ldots(x-d_{l1})^{t_l}\,(x-d_{l2})^{t_l}$$

gde je p koeficijent uz najstariji član, a_i, $i\in\{1\ldots k\}$, realna nula polinoma P višestrukosti s_i za koju važi

$$(\forall i_1,i_2\in\{1\ldots k\})\,(a_{i_1}=a_{i_2} \iff i_1=i_2),$$

a d_{j1} i d_{j2}, $j\in\{1\ldots l\}$, konjugovano kompleksne nule polinoma P, koje nisu realne, koje su višestrukosti t_j i za koje važi

$$(\forall j_1,j_2\in\{1\ldots l\})\,((d_{j_11}=d_{j_21} \iff j_1=j_2)\wedge(d_{j_11}\neq d_{j_22})).$$

Takođe, zbog posledice osnovnog stava algebre, važi jednakost $n=s_1+\ldots+s_k+2\,(t_1+\ldots+t_l)$. Dodatno, množenjem konjugovano kompleksnih nula dobijamo izraze oblika x^2+bx+c, $b,c\in R$, $b^2-4c<0$, pa izraz možemo da zapišemo u obliku

$$P(x) = p\,(x-a_1)^{s_1}\ldots(x-a_k)^{s_k}\left(x^2+b_1x+c_1\right)^{t_1}\ldots\left(x^2+b_lx+c_l\right)^{t_l}.$$

Pokazali smo kako se nalaze integrali nekih vrsta racionalnih funkcija. Ostaje da pokažemo kako da proizvoljnu racionalnu funkciju svedemo na integrale ovih vrsta.

Algoritam 1.1 *Neka funkcija* $st(P)$ *vraća stepen polinoma. Neka su dati polinomi* $P, Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, pri čemu važi* $st(P) \geq 0$, $st(Q) \geq 1$. *Ako polinom* Q *nema realnih nula, primitivnu funkciju za funkciju* $\frac{P}{Q}$ *nalazimo na intervalu* $(-\inf, +\inf)$. *Inače, ako su* $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ *realne nule polinoma* Q*, primitivnu funkciju tražimo na intervalima* $(-\inf, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_{k-1}, a_k), (a_k, +\inf)$. *Integral* $\int \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{dx}$ *nalazimo sledećim koracima:*

K1: Ako je $st(P) < st(Q)$ primenjujemo K2 na integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{dx}$.
Inače, vršimo deljenje polinoma P polinomom Q. Neka je S rezultat deljenja, a Q ostatak pri deljenju. Tada važi $P(x) = S(x) Q(x) + R(x)$, $st(R) < st(Q)$. Zbog linearnosti integrala važi jednakost $\int \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{dx} = \int S(x) \mathrm{dx} + \int \frac{R(x)}{Q(x)} \mathrm{dx}$. Znamo da izračunamo integral polinoma $S(x)$, primenjujemo K2 na integral $\int \frac{R(x)}{Q(x)} \mathrm{dx}$.

K2: Koristimo tvrđenje 1.1 i zapisujemo polinom Q u obliku

$$Q(x) = p(x-a_1)^{s_1} \ldots (x-a_k)^{s_k} \left(x^2 + b_1 x + c_1\right)^{t_1} \ldots \left(x^2 + b_l x + c_l\right)^{t_l}.$$

Prelazimo na korak K3.

K3: U ovom koraku je cilj da odredimo konstante u brojiocu takve da važi jednakost

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{A_{i1}}{(x-a_i)} + \ldots + \frac{A_{is_i}}{(x-a_i)^{s_i}} \right) + \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{M_{j1}x + N_{j1}}{(x^2 + b_j x + c_j)} + \ldots + \frac{M_{jt_j}x + N_{jt_j}}{(x^2 + b_j x + c_j)^{t_j}} \right).$$

To postižemo rešavanjem linearnih jednačina koje nastaju svođenjem svih sabiraka na isti imenilac. Nakon nalaženja ovih konstanti prelazimo na K4.

K4: Određujemo integral zbira koji smo dobili u prethodnom koraku. Svi sabirci su istih oblika kao i integrali koji su navedeni u lemama 1, 2, 3 i 4.

1.5 Integracija trigonometrijskih funkcija

Oznaku $R(u, v)$ koristimo za predstavljanje racionalnih funkcija sa argumenatima u i v. Na primer, neka je $R(u, v) = \frac{u+v}{u-v+2}$. Integrale oblika $\int R(\sin x, \cos x) \mathrm{dx}$ rešavamo smenom $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, definisanom svuda sem u $x \in \{(2l+1)\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}$. Formalno, neka je funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = R(\sin x, \cos x)$ i neka je funkcija $g_0 : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi, \pi)$ definisana sa $g_0(x) = 2 \operatorname{arctg} x$. Funkcija g_0 je bijektivna pa postoji inverz $g_0^{-1} : (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ definisan sa $g_0^{-1}(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Važi i da su g_0 i g_0^{-1} diferencijabilne. Potrebno je još da odredimo $(f \circ g_0)(x)$. Važe jednakosti

$$(f \circ g_0)(x) = f(g_0(x)) = R(\sin(g_0(x)), \cos(g_0(x))) = R(\sin(2 \operatorname{arctg}(x)), \cos(2 \operatorname{arctg}(x))).$$

Ostaje da redukujemo izraze $\sin(2 \operatorname{arctg}(x))$ i $\cos(2 \operatorname{arctg}(x))$.

$$\begin{aligned}
\sin(2 \operatorname{arctg}(x)) &= 2 \sin(\operatorname{arctg}(x)) \cos(\operatorname{arctg}(x)) = 2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x)) \cos^2(\operatorname{arctg}(x)) \\
&= \frac{2x}{\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{2x}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x)) + 1} = \frac{2x}{x^2+1}; \\
\cos(2 \operatorname{arctg}(x)) &= \cos^2(\operatorname{arctg}(x)) - \sin^2(\operatorname{arctg}(x)) = \cos^2(\operatorname{arctg}(x)) \left(1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))\right) \\
&= \frac{1-x^2}{\frac{\sin^2(\operatorname{arctg}(x)) + \cos^2(\operatorname{arctg}(x))}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))}} = \frac{1-x^2}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x)) + 1} = \frac{1-x^2}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

Odavde dobijamo $(f \circ g_0)(x) = R\left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Možemo da odredimo integral $\int ((f \circ g_0) g_0')(x) \mathrm{dx} = \int R\left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \frac{2}{1+x^2} \mathrm{dx} = F(x) + C_0$, $C_0 \in \mathbb{R}$, jer je to integral racionalne funkcije. Primenom teoreme 1.3 dobijamo $\int f(x) \mathrm{dx} = F\left(g_0^{-1}(x)\right) + C_0$.

Rešili smo integral na intervalu $(-\pi, \pi)$. Posmatrajmo intervale oblika $((2m-1)\pi, (2m+1)\pi)$, $m \in \mathbb{Z}$. Funkcija $g_m(x) = 2\operatorname{arctg}(x) + 2m\pi$ je diferencijabilna i ima inverz $g_m^{-1}(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x+2m\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$. Analogno kao za g_0 dobijamo $(f \circ g_m)(x) = R(\sin(2\operatorname{arctg}(x) + 2m\pi), \cos(2\operatorname{arctg}(x) + 2m\pi)) = R\left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Dakle, analogno rešavanju integrala na intervalu $(-\pi, \pi)$ dobijamo $\int f(x)\,\mathrm{dx} = F\left(g_m^{-1}(x)\right) + C_m$.

Rešili smo integrale na $\mathbb{R} \setminus \{(2l+1)\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}$. Zbog neprekidnosti mora da važi da je

$$(\forall l \in \mathbb{Z}) \left(\lim_{x \to (2l+1)\pi^-} F\left(g_l^{-1}(x)\right) + C_l = \lim_{x \to (2l+1)\pi^+} F\left(g_{l+1}^{-1}(x)\right) + C_{l+1} \right).$$

Nalaženjem veze između konstanti C_l i C_{l+1} rešavamo integral i u tačkama $(2l+1)\pi$, gde je l ceo broj, čime smo rešili integral na celom $\mathbb{R}$.

Napomenimo da izvođenje zavisi od konkretne funkcije f. Za f koje nije definisano na celom $\mathbb{R}$ ćemo raditi presek $\mathbb{R}$ sa D_f i posmatrati drugačije intervale, ali će postupak ostati analogan.

Primer 1.15 *Odrediti integral* $\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\,\mathrm{dx}$.

Neka je $f(x) = \dfrac{1}{2\sin x - \cos x + 5}$. Domen funkcije je $\mathbb{R}$. Primenjujemo prethodnu diskusiju

$$(\forall l \in \mathbb{R}) \ (f \circ g_l)(x) = R\left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \frac{1}{\frac{4x}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{1+x^2} + 5} = \frac{1+x^2}{6x^2+4x+4}.$$

Ima l integrala oblika

$$\int ((f \circ g_l)\, g_l')(x)\,\mathrm{dx} = \int \frac{1+x^2}{6x^2+4x+4} \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\mathrm{dx}}{3\left(x^2 + 2\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{5}{9}\right)} = \int \frac{\mathrm{dx}}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}}$$
$$= \frac{3}{5} \int \frac{\mathrm{dx}}{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C_l.$$

Dobijamo da je $I_l = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C_l$. Ostaje da nađemo leve i desne limese u nedefinisanim tačkama. Tada

$$\lim_{x \to (2l+1)\pi^-} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C_l = \lim_{x \to (2l+1)\pi^+} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C_{l+1}$$
$$\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_l = -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_{l+1}$$
$$C_{l+1} = C_l + \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

Tada je $C_l = \dfrac{l\pi}{\sqrt{5}} + C_0$. Važi da je $(2l-1)\pi < x < (2l+1)\pi$, odakle je $\dfrac{x-\pi}{2\pi} < l < \dfrac{x+\pi}{2\pi}$, $l = \left[\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right]$. Dobijamo da je rešenje integrala

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] \frac{\pi}{\sqrt{5}} + C_0.$$

2 Određeni integrali

2.1 Definicija određenog integrala

Neka je $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Želimo da definišemo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$.

Definicija 2.1 *Neka su $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ tačke takve da važi $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Tada:*

- *skup intervala $\mathcal{P} = \{[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]\}$ nazivamo **podela** intervala $[a,b]$;*
- *tačke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nazivamo **podeone tačke** podele $\mathcal{P}$;*
- *sa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, gde je $i \in \{1, \ldots n\}$, obeležavamo dužinu intervala $[x_{i-1}, x_i]$;*
- *skup svih podela intervala $[a,b]$ obeležavamo sa $\mathcal{P}[a,b]$;*
- *funkciju $\lambda : \mathcal{P}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definisanu sa $\lambda(\mathcal{P}) = \max\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Delta x_i$ nazivamo **parametar** podele $\mathcal{P}$;*
- *za podele $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathcal{P}[a,b]$ kažemo da je podela $\mathcal{P}'$ finija od podele $\mathcal{P}$, odnosno da je podela $\mathcal{P}$ grublja od podele $\mathcal{P}'$ ako je skup podeonih tačaka podele $\mathcal{P}$ podskup skupa podeonih tačaka podele $\mathcal{P}'$;*
- *uređenu n-torku $\xi = \{\xi_1, \ldots \xi_n\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ nazivamo **istaknute tačke** podele $\mathcal{P}$;*
- *uređen par $(\mathcal{P}, \xi)$ nazivamo **podela sa istaknutim tačkama** intervala $[a,b]$.*

Definicija 2.2 *Neka je $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ i $(\mathcal{P}, \xi)$ podela sa istaknutim tačkama intervala $[a,b]$. Tada zbir $\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$ nazivamo **integralna suma** funkije f za datu podelu sa istaknutim tačkama $(\mathcal{P}, \xi)$ intervala $[a,b]$.*

Definicija 2.3 *Ako za $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ i $I \in \mathbb{R}$ važi*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,\big(\forall (\mathcal{P}, \xi)\,\big|\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a,b]\big)\ \ \lambda(\mathcal{P}) < \delta \implies |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| < \varepsilon.$$

*tada kažemo da je I **Rimanov integral funkcije** f na intervalu $[a,b]$ i pišemo*

$$I = \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \to 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

*Rimanov integral nazivamo i **određeni integral**.*

Ako za funkciju $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ postoji Rimanov integral, kažemo da je funkcija f **R-integrabilna** na intervalu $[a,b]$.

Primer 2.1 *Ispitati da li je funkcija $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, definisana sa $f(x) = c$, R-integrabilna i ako jeste, odrediti njen određeni integral.*

Uzmimo proizvoljnu podelu $\mathcal{P}$ i proizvoljan skup istaknutih tačaka ξ za podelu $\mathcal{P}$. Tada važi

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c \Delta x_i = c\,(b-a)\,. \tag{5}$$

Za svako $\varepsilon > 0$ važi $|\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - c(b-a)| = 0 < \varepsilon$, dakle možemo da izaberemo proizvoljno δ i važi $\lim\limits_{\lambda(\mathcal{P}) \to 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = c(b-a)$.

Primer 2.2 *Ispitati da li je funkcija* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *definisana sa* $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ 0, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a,b] \end{cases}$, *R-integrabilna i ako jeste, odrediti njen određeni integral.*

Dokažimo da ova funkcija nije R-integrabilna.
Neka je $\mathcal{P}$ proizvoljna podela intervala $[a,b]$. Neka je $\xi' = (\xi_1', \dots, \xi_n')$ skup istaknutih tačaka podele $\mathcal{P}$, gde je $\xi_i' \in \mathbb{Q}$, za svako $i \in \{1, \dots, n\}$ i važi

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi') = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i') \Delta x_i = b - a. \tag{6}$$

i neka je $\xi'' = (\xi_1'', \dots, \xi_n'')$ skup istaknutih tačaka podele $\mathcal{P}$, gde je $\xi_i'' \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, za svako $i \in \{1, \dots, n\}$ i važi

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi'') = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i'') \Delta x_i = 0. \tag{7}$$

Treba da dokažemo da za svako $I \in \mathbb{R}$ postoji $\varepsilon > 0$ takvo da za svako $\delta > 0$ postoji podela $\mathcal{P}$ intervala $[a,b]$ sa istaknutim tačkama ξ takva da je $\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| \geq \varepsilon$.
Prvi slučaj je kad je $I \neq 0$.
Neka je $\varepsilon = |I|$, neka je δ proizvoljno, neka je $\mathcal{P} = \left\{ \left[a, a + \frac{b-a}{n}\right], \dots, \left[a + (n-1)\frac{b-a}{n}, b\right] \right\}$, gde je $\frac{b-a}{n} = \lambda(P) < \delta$ i neka je ξ izabrano kao ξ''. Tada važi

$$\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| = |0 - I| \geq |I| = \varepsilon.$$

Drugi slučaj je kad je $I = 0$.
Neka je $\varepsilon = b - a$, neka je δ proizvoljno, neka je $\mathcal{P} = \left\{ \left[a, a + \frac{b-a}{n}\right], \dots, \left[a + (n-1)\frac{b-a}{n}, b\right] \right\}$, gde je $\frac{b-a}{n} = \lambda(P) < \delta$ i neka je ξ izabrano kao ξ'. Tada važi

$$\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| = |b - a - 0| \geq |b - a| = \varepsilon.$$

Primer 2.3 *Ispitati da li je funkcija* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, *definisana sa* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, *R-integrabilna i ako jeste, odrediti njen određeni integral.*

Dokažimo da ova funkcija nije R-integrabilna.
Neka je podela $\mathcal{P} = \left\{ \left[0, \frac{1}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] \right\}$ i neka je n-torka istaknutih tačaka $\xi = \left(\frac{1}{n^4}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right)$.
Važi

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \geq \frac{f(\xi_1)}{n} = \frac{f\left(\frac{1}{n^4}\right)}{n} = n.$$

Treba da dokažemo da za svako $I \in \mathbb{R}$ postoji $\varepsilon > 0$ takvo da za svako $\delta > 0$ postoji podela $\mathcal{P}$ intervala $[a,b]$ sa istaknutim tačkama ξ takva da je $\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| \geq \varepsilon$.
Prvi slučaj je kad je $I \geq 0$.
Neka je $\varepsilon = 1$, neka je δ proizvoljno, neka je $\mathcal{P} = \left\{ \left[0, \frac{1}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] \right\}$, gde je $\frac{1}{n} = \lambda(P) < \delta$ i $n = [I] + 1 + k$, gde je $k \in \mathbb{N}$ i neka je ξ izabrano kao ξ''. Tada važi

$$\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| \geq |n - I| = |[I] + 1 + k - I| \geq |k| \geq 1.$$

Drugi slučaj je kad je $I < 0$.
Neka je $\varepsilon = 1$, neka je δ proizvoljno, neka je $\mathcal{P} = \left\{ \left[0, \frac{1}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] \right\}$, gde je $\frac{1}{n} = \lambda(P) < \delta$ i neka je ξ izabrano kao ξ''. Tada važi

$$\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| \geq n - I \geq 1.$$

Teorema 2.1 *Ako $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nije ograničena na $[a, b]$, onda ona nije R-integrabilna.*

Definicija 2.4 *Neka je $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ograničena na svom intervalu i neka je $\mathcal{P}$ podela intervala. Za $i \in \{1, \dots, n\}$ definišemo $m_i = inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ i $M_i = sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Tada:*

- *zbir $s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ nazivamo* ***donja Darbuova suma*** *funkcije f za datu podelu $\mathcal{P}$ intervala $[a, b]$;*
- *zbir $S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ nazivamo* ***gornja Darbuova suma*** *funkcije f za datu podelu $\mathcal{P}$ intervala $[a, b]$.*

Definicija 2.5 *Za svake dve podele $\mathcal{P}', \mathcal{P}'' \in \mathcal{P}[a, b]$ postoji finija podela $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]$. Ako je skup podeonih tačaka podele $\mathcal{P}$ unija podeonih tačaka podela $\mathcal{P}'$ i $\mathcal{P}''$, tada se podela $\mathcal{P}$ naziva* ***superpozicija*** *podela $\mathcal{P}'$ i $\mathcal{P}''$.*

Stav 2.1 *Dokazati da za $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ i $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathcal{P}[a, b]$, gde je skup podeonih tačaka podele $\mathcal{P}$ podskup skupa podeonih tačaka podele $\mathcal{P}'$, važi*

$$s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P).$$

Dokaz: Dovoljno je dokazati slučaj kad je skup podeonih tačaka podele $\mathcal{P}$ $\{x_0, \dots, x_n\}$, a skup podeonih tačaka podele $\mathcal{P}'$ $\{x_0, \dots, x_{k-1}, x', x_k, \dots, x_n\}$. Neka je $s' = \sum_{i=1}^{k-1} m_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \Delta x_i$ i neka su $m_k' = inf\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x']\}$ i $m_k'' = inf\{f(x) | x \in [x', x_k]\}$. Tada je

$$s(f, \mathcal{P}) = s' + m_k (x_k - x_{k-1})$$

i

$$s(f, \mathcal{P}') = s' + m_k' (x' - x_{k-1}) + x_k'' (x_k - x').$$

Važi da je $m_k = min(m_k', m_k'')$, odakle dobijamo

$$\begin{aligned} m_k (x_k - x') + m_k (x' - x_{k-1}) &\leq m_k'' (x_k - x') + m_k' (x' - x_{k-1}) \\ s' + m_k (x_k - x_{k-1}) &\leq s' + m_k'' (x_k - x') + m_k' (x' - x_{k-1}) \\ s(f, P) &\leq s(f, P'). \end{aligned}$$

Treća nejednakost se slično dokazuje. ■

Stav 2.2 *Neka su $\mathcal{P}', \mathcal{P}'' \in \mathcal{P}[a, b]$. Tada je $s(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}'')$.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{P}$ superpozicija podela $\mathcal{P}'$ i $\mathcal{P}''$. Iz prethodnog stava važi da je

$$s(f, P') \leq s(f, P) \leq S(f, P)$$

i da je

$$s(f, P) \leq S(f, P) \leq S(f, P''),$$

odakle dobijamo

$$s(f, P') \leq S(f, P'').$$

Za $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ skup $\{s(f, P) \,|\, \mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]\}$ je neprazan i prema prethodnom stavu ograničen odozgo brojem $S(f, \mathcal{P})$ za proizvoljno $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]$, pa prema aksiomi o egzistenciji supremuma postoji supremum ovog skupa. ■

Definicija 2.6 ***Donji Rimanov integral*** *funkcije $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jeste*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{dx} = sup\{s(f, P) \,|\, \mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Za $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ skup $\left\{S\left(f,P\right) \middle| \mathcal{P} \in \mathcal{P}\left[a,b\right]\right\}$ je neprazan i prema prethodnom stavu ograničen odozdo brojem $s\left(f,\mathcal{P}\right)$ za proizvoljno $\mathcal{P} \in \mathcal{P}\left[a,b\right]$, pa prema teoremi o egzistenciji infimuma postoji infimum ovog skupa.

Definicija 2.7 ***Gornji Rimanov integral*** *funkcije* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *jeste*

$$\overline{\int_a^b} f\left(x\right) \mathrm{dx} = inf\left\{S\left(f,P\right) \middle| \mathcal{P} \in \mathcal{P}\left[a,b\right]\right\}.$$

Jasno je da važi $\underline{\int_a^b} f\left(x\right) \mathrm{dx} \leq \overline{\int_a^b} f\left(x\right) \mathrm{dx}$.

Definicija 2.8 *Ako važi da je* $\underline{\int_a^b} f\left(x\right) \mathrm{dx} = \overline{\int_a^b} f\left(x\right) \mathrm{dx} = I$, *onda broj* I *nazivamo* ***Rimanov integral*** *funkcije* f *na* $[a,b]$ *i pišemo*

$$I = \int_a^b f\left(x\right) \mathrm{dx}.$$

Teorema 2.2 *$\varepsilon - \delta$ definicija Rimanovog integrala i definicija Rimanovog integrala preko gornjeg i donjeg Rimanovog integrala su ekvivalentne.*

Stav 2.3 *Neka je $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ograničena. Tada je funkcija f R-integrabilna na $[a,b]$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\mathcal{P} \in \mathcal{P}\left[a,b\right]$ takvo da je $S\left(f,\mathcal{P}\right) - s\left(f,\mathcal{P}\right) < \varepsilon$.*

($\Longrightarrow$) Neka je ε proizvoljno. Na osnovu definicije infimuma skupa postoji $\mathcal{P}' \in \mathcal{P}\left[a,b\right]$ takvo da je

$$\int_a^b f\left(x\right) \mathrm{dx} \leq S\left(f,\mathcal{P}'\right) < \int_a^b f\left(x\right) \mathrm{dx} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Na osnovu definicije supremuma skupa postoji $\mathcal{P}'' \in \mathcal{P}\left[a,b\right]$ takvo da je

$$\int_a^b f\left(x\right) \mathrm{dx} - \frac{\varepsilon}{2} < s\left(f,\mathcal{P}'\right) \leq \int_a^b f\left(x\right) \mathrm{dx}. \tag{9}$$

Neka je $\mathcal{P}$ superpozicija podela $\mathcal{P}'$ i $\mathcal{P}''$. Tada je zbog posledice stava 2.1

$$s\left(f,\mathcal{P}''\right) \leq s\left(f,\mathcal{P}\right) \leq S\left(f,\mathcal{P}\right) \leq S\left(f,\mathcal{P}'\right). \tag{10}$$

Iz (**??**) i (**??**) dobijamo

$$S\left(f,\mathcal{P}'\right) - s\left(f,\mathcal{P}''\right) < \varepsilon, \tag{11}$$

dok iz (**??**) dobijamo

$$S\left(f,\mathcal{P}\right) - s\left(f,\mathcal{P}\right) \leq S\left(f,\mathcal{P}'\right) - s\left(f,\mathcal{P}''\right). \tag{12}$$

Konačno, iz (**??**) i (**??**) važi

$$S\left(f,\mathcal{P}\right) - s\left(f,\mathcal{P}\right) < \varepsilon. \tag{13}$$

($\Longleftarrow$) Važi

$$s\left(f,\mathcal{P}\right) \leq \underline{\int_a^b} f\left(x\right) \mathrm{dx} \leq \overline{\int_a^b} f\left(x\right) \mathrm{dx} \leq S\left(f,\mathcal{P}\right)$$

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f\left(x\right) \mathrm{dx} - \underline{\int_a^b} f\left(x\right) \mathrm{dx} \leq S\left(f,\mathcal{P}\right) - s\left(f,\mathcal{P}\right) \leq \varepsilon,$$

odakle je

$$\overline{\int_a^b} f\left(x\right) \mathrm{dx} = \underline{\int_a^b} f\left(x\right) \mathrm{dx},$$

pa je po definiciji 2.8 f R-integrabilna. ■

2.2 Integrabilnost nekih klasa funkcija

Teorema 2.3 *Neka je $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funckija na $[a, b]$. Tada je funkcija f Riman integrabilna na $[a, b]$.*

Podsetnik definicije monotonosti funkcije: Funkcija $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ je monotono rastuća ako važi

$$(\forall x_1, x_2 \in [a, b]) (x_1 \leq x_2) \implies (f(x_1) \leq f(x_2)),$$

a monotono opadajuća ako važi

$$(\forall x_1, x_2 \in [a, b]) (x_1 \leq x_2) \implies (f(x_1) \geq f(x_2)),$$

Teorema 2.4 *Neka je $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monotona funkcija na $[a, b]$. Tada je funkcija Riman integrabilna na $[a, b]$.*

Dokaz: Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da je funkcija monotono rastuća na $[a, b]$. Primetimo najpre da je funkcija ograničena na $[a, b]$. Zaista, za svako $x \in [a, b]$ važi $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Pretpostavimo da funkcija nije konstantna, za konstantne funkcije već znamo da su R-integrabilne. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i neka je podela $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]$ takva da je parametar podele $\lambda(\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Tada je

$$\begin{aligned}
S(f, P) - s(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \\
&= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, važi $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$ za proizvoljno ε, pa po stavu 2.3 važi da je f R-integrabilna na $[a, b]$. ■

Teorema 2.5 *Neka je $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ograničena funkcija na $[a, b]$ takva da je skup tačaka u kojima nije neprekidna konačan. Tada je funkcija f Riman integrabilna na $[a, b]$.*

Teorema 2.6 *Neka su $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrabilne funkcije na $[a, b]$ koje se razlikuju samo u konačno mnogo tačaka. Tada je*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

Definicija 2.9 *Skup svih Riman integrabilnih funkcija na intervalu $[a, b]$ označavamo sa $R[a, b]$.*

2.3 Svojstva određenog integrala

Stav 2.4 *Neka su $f, g \in R[a, b]$ i neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ i važi*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\, \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Dokaz: Neka je $(\mathcal{P},\xi)$ proizvoljna podela sa istaknutim tačkama na $[a,b]$. Tada

$$\begin{aligned}
\sigma\left(\alpha f+\beta g,\mathcal{P},\xi\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)\left(\alpha f+\beta g\right)\left(\xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)\left(\left(\alpha f\right)\left(\xi_i\right)+\left(\beta g\right)\left(\xi_1\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)\left(\alpha f\right)\left(\xi_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)\left(\beta g\right)\left(\xi_1\right)\\
&= \alpha\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)f\left(\xi_i\right)+\beta\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)g\left(\xi_1\right)\\
&= \alpha\sigma\left(f,\mathcal{P},\xi\right)+\beta\sigma\left(g,\mathcal{P},\xi\right).
\end{aligned}$$

Po definiciji važi $\lim\limits_{\lambda(\mathcal{P})\longrightarrow 0}\sigma\left(f,\mathcal{P},\xi\right)=\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$ i $\lim\limits_{\lambda(\mathcal{P})\longrightarrow 0}\sigma\left(g,\mathcal{P},\xi\right)=\int_a^b g\left(x\right)\mathrm{d}x$. Tada

$$\begin{aligned}
\int_a^b\left(\alpha f+\beta g\right)\left(x\right)\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda(\mathcal{P})\longrightarrow 0}\sigma\left(\alpha f+\beta g,\mathcal{P},\xi\right)\\
&= \lim_{\lambda(\mathcal{P})\longrightarrow 0}\left(\alpha\sigma\left(f,\mathcal{P},\xi\right)+\beta\sigma\left(g,\mathcal{P},\xi\right)\right)\\
&= \lim_{\lambda(\mathcal{P})\longrightarrow 0}\alpha\sigma\left(f,\mathcal{P},\xi\right)+\lim_{\lambda(\mathcal{P})\longrightarrow 0}\beta\sigma\left(g,\mathcal{P},\xi\right)\\
&= \alpha\lim_{\lambda(\mathcal{P})\longrightarrow 0}\sigma\left(f,\mathcal{P},\xi\right)+\beta\lim_{\lambda(\mathcal{P})\longrightarrow 0}\sigma\left(g,\mathcal{P},\xi\right)\\
&= \alpha\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g\left(x\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

■

Stav 2.5 *Neka su $f,g\in R\left[a,b\right]$. Tada:*

- *ako je $fg\in R\left[a,b\right]$, ne mora da važi $\int_a^b\left(fg\right)\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x\int_a^b g\left(x\right)\mathrm{d}x$;*
- *ako je $\left|f\right|\in R\left[a,b\right]$, ne mora da važi $\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\left|\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|$;*
- *$\frac{1}{f}\in R\left[a,b\right]$, pod pretpostavkom da postoji $c>0$ takvo da za svako $x\in\left[a,b\right]$ važi $\left|f\left(x\right)\right|>c$.*

Stav 2.6 *Neka je $f\in R\left[a,b\right]$ i $\left[c,d\right]\subset\left[a,b\right]$. Tada $f\in R\left[c,d\right]$.*

Stav 2.7 *Neka je $f:\left[a,b\right]\longrightarrow\mathbb{R}$ i $c\in\left(a,b\right)$. Tada $f\in R\left[a,b\right]$ ako i samo ako $f\in R\left[a,c\right]$ i $f\in R\left[c,b\right]$ i važi $\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.*

Definicija 2.10 *Neka je $f:\{a\}\longrightarrow\mathbb{R}$. Tada $\int_a^a f\left(x\right)\mathrm{d}x\overset{def}{=}0$.*

Definicija 2.11 *Neka je $f\in R\left[a,b\right]$. Tada $\int_b^a f\left(x\right)\mathrm{d}x\overset{def}{=}-\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.*

Definicija 2.12 *Neka su $a,b,c\in\mathbb{R}$ i $f:\left[\min\left\{a,b,c\right\},\max\left\{a,b,c\right\}\right]\longrightarrow\mathbb{R}$. Tada je f Riman integrabilna na $\left[\min\left\{a,b,c\right\},\max\left\{a,b,c\right\}\right]$ i važi $\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.*

Stav 2.8 *Neka je* $f \in R[a,b]$ *i* $f(x) \geq 0$, *za svako* $x \in [a,b]$. *Tada je* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \geq 0$.

Dokaz: Neka $(\mathcal{P}, \xi)$ proizvoljna podela sa istaknutim tačkama na $[a,b]$. Tada je

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \geq 0.$$

Otuda je $\displaystyle\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \longrightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) \geq 0$, tačnije, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \geq 0$. ■

Stav 2.9 *Neka je* $f \in R[a,b]$. *Tada je*

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{dx}\,.$$

Dokaz: Kako važi $f(x) - |f(x)| \leq 0$, za svako $x \in [a,b]$, sledi $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{dx}$. Takođe, važi $0 \leq |f(x)| + f(x)$, za svako $x \in [a,b]$, odakle je $\displaystyle -\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{dx}$. Dakle, $\displaystyle\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{dx}$. ■

Stav 2.10 *Neka su* $f, g \in R[a,b]$ *i neka za svako* $x \in [a,b]$ *važi* $f(x) \leq g(x)$. *Tada je*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Dokaz: Primetimo da je $g - f \in R[a,b]$ i da je $(g-f)(x) \geq 0$, za svako $x \in [a,b]$. Tada je po stavu 2.8 $\displaystyle\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{dx} \geq 0$, odakle dobijamo $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx} \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$. ■

Stav 2.11 *Neka je* $f \in R[a,b]$ *i neka su* $m = \displaystyle\inf_{x \in [a,b]} f(x)$ *i* $M = \displaystyle\sup_{x \in [a,b]} f(x)$. *Tada postoji* $\mu \in [m, M]$ *takvo da je*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \mu\,(b-a)\,.$$

Dokaz: Za svako $x \in [a,b]$ važi:

$$\begin{aligned} m \leq & f(x) \leq M \\ m(b-a) \leq & \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq M(b-a) \\ m \leq & \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq M. \end{aligned}$$

Dakle, postoji $\mu \in [m, M]$, takvo da je $\mu = \displaystyle\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$. ■

Podsetnik Vajerštrasove teoreme: Ako je funkcija neprekidna na intervalu $[a,b]$, ona je ograničena i dostiže svoj maksimum i minimum.

Stav 2.12 *Neka je* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija na* $[a,b]$. *Tada postoji* $c \in [a,b]$ *takvo da je*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = f(c)\,(b-a)\,.$$

Dokaz: Kako je funkcija f neprekidna na $[a,b]$ po Vajerštrasovoj teoremi važi da je $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ i $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \max\limits_{x\in[a,b] f(x)} f(x)$. Neka su $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ i $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Na osnovu prethodnog stava sledi da postoji $\mu \in [m, M]$ takvo da je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \mu(b-a)$. Kako je funkcija f neprekidna na $[a,b]$ sledi da je $f([a,b]) = [m, M]$. Otuda za $\mu \in [m, M]$ postoji $c \in [a,b]$ takvo da je $f(c) = \mu$. ■

2.4 Veza određenog integrala i izvoda. Njutn-Lajbnicova formula

Definicija 2.13 *Neka je $f \in R[a,b]$. Ima smisla razmatrati funkciju $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definisanu sa $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Tada funkciju φ nazivamo* ***integral sa promenljivom gornjom granicom****.*

Teorema 2.7 *Funkcija φ je neprekidna na $[a,b]$.*

Dokaz: Neka je $x_0 \in [a,b]$ proizvoljno. Dokažimo da je funkcija φ neprekidna u x_0. Neka je $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada za $x \in [a,b]$ važi

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \left| \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{dt} \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{dt} \right| \le \left| \int_{x_0}^x |f(t)|\,\mathrm{dt} \right| \le M|x - x_0|.$$

Neka je $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Tada na osnovu $\varepsilon - \delta$ definicije važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [a,b])(|x - x_0| < \delta \longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon),$$

čime smo dokazali da je φ neprekidna u proizvoljnoj tački, zbog čega je neprekidna i na celom intervalu. ■

Teorema 2.8 *Ako je funkcija f neprekidna na $[a,b]$ onda za funkciju φ važi da je diferencijabilna na (a,b) i važi $\varphi'_+(a) = f(a)$ i $\varphi'_-(b) = f(b)$.*

Dokaz: Neka je $x \in [a,b]$ proizvoljno i $h \in \mathbb{R}$, takvo da je $x + h \in [a,b]$. Tada je

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt} \right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{dt}.$$

Po stavu 2.12 postoji $c \in [\min\{x, x+h\}, \max\{x, x+h\}]$ takvo da $\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{dt} = f(c)(x+h-x)$. Neka je $c = x + h\theta(x,h)$, $\theta \in [0,1]$. Tada je

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{dt} = \frac{1}{h} f(x + h\theta(x,h))(x+h-x) = f(x + h\theta(x,h)).$$

Odatle dobijamo $\varphi'(x) = \lim\limits_{h\longrightarrow 0} \dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \lim\limits_{h\longrightarrow 0} f(x + h\theta(x,h)) = f(x)$. Slično se dokazuje i za $\varphi'_+(a)$ i $\varphi'_-(b)$. ■

Tvrđenje 2.1 *Neka je $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na (a,b). Tada funkcija f ima primitivnu funkciju $F : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ na (a,b).*

Dokaz: Neka je $x_0 \in (a,b)$ fiksirana tačka i neka je $F : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{dt}$. Funkcija F je korektno definisana, jer je f neprekidna funkcija na $[\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\}] \subset (a,b)$. Neka je $x \in (a,b)$ proizvoljno i neka je $h \in \mathbb{R}$ takvo da je $x + h \in (a,b)$. Tada analogono dokazu prethodne teoreme dobijamo $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{dt}$. Analogno prethodnoj teoremi dobijamo $f(x + h\theta(x,h))$, gde je $\theta(x,h) \in [0,1]$. Otuda je $\lim\limits_{h\longrightarrow 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim\limits_{h\longrightarrow 0} f(x + h\theta(x,h)) = f(x)$, tačnije $F'(x) = f(x)$. ■

Primer 2.4 *Navesti primer funkcije koja nije neprekidna, ali ima primitivnu funkciju.*

Posmatrajmo funkciju $F:(-1,0)\cup(0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ definisanu sa $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 0, & x=0\end{cases}$.
Proverimo neprekidnost u tački $x_0=0$. Sinus je ograničena funkcija pa važi $\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=0=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$ odakle je $F(x)$ neprekidna. Odredimo njen izvod. Važi

$$F'(x)=f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

Levi i desni izvod u nuli ne postoje, pa ova funkcija nije neprekidna. Dakle, primer funkcije koja nije neprekidna, ali ima primitivnu funkciju je $f(x)$.

Teorema 2.9 *(Njutn-Lajbnicova formula) Neka je $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a,b]$ i neka je $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije f na $[a,b]$. Pri čemu važi $F'_+(a)=f(a)$ $F'_-(b)=f(b)$. Tada je*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}=F(b)-F(a).$$

Dokaz: Neka je $\varphi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ definisana sa $\varphi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$. Na osnovu prethodnih teorema znamo da za svako $x\in[a,b]$ važi $\varphi'(x)=f(x)$, tačnije, φ je primitivna funkcija funkcije f. Stoga, postoji $C\in\mathbb{R}$, takvo da za svako $x\in[a,b]$ važi $\varphi(x)=F(x)+C$ i $\varphi(a)=\int_a^a f(t)\,\mathrm{dt}=0$. Sledi da je

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}&=\varphi(b)=F(b)+C=F(b)+C+\varphi(a)-\varphi(a)\\&=F(b)+C+\varphi(a)-F(a)-C=F(b)-F(a).\end{aligned}$$

■

2.5 Smena promenljive i parcijalna integracija u određenom integralu

Teorema 2.10 *(Teorema o smeni promenljive) Neka je $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a,b]$ i neka je $\varphi:[\alpha,\beta]\longrightarrow[a,b]$ neprekidna funkcija na $[\alpha,\beta]$. Tada je*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{dx}=\int_\alpha^\beta((f\circ\varphi)\varphi')(t)\,dt.$$

Dokaz: Neka je $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. Tada je po Njutn-Lajbnicovoj formuli

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{dx}=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)). \tag{14}$$

S druge strane za funkciju $\psi:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$ definisanu sa $\psi(t)=F(\varphi(t))$ važi

$$\psi'(t)=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=((f\circ\varphi)\varphi')(t).$$

Dakle, funkcija ψ je primitivna funkcija funkcije $(f\circ\varphi)\varphi'$ na intervalu $[\alpha,\beta]$, odakle važi

$$\int_\alpha^\beta((f\circ\varphi)\varphi')(t)\,\mathrm{dt}=\psi(\beta)-\psi(\alpha)=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)). \tag{15}$$

Iz (**??**) i (**??**) dobijamo $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{dx}=\int_\alpha^\beta((f\circ\varphi)\varphi')(t)\,\mathrm{dt}$ što je kraj dokaza. ■

Teorema 2.11 *(Teorema o parcijalnoj integraciji) Neka su* $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *neprekidno diferencijabilne funkcije na* $[a,b]$*. Tada je*

$$\int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{dx} = (uv)(b) - (uv)(a) - \int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Dokaz: Po Njutn-Lajbnicovoj formuli važi

$$\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{dx} = (uv)(b) - (uv)(a)\,. \tag{16}$$

Zbog linearnosti određenih integrala važi

$$\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b (u'v + uv')(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{dx} + \int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{dx}\,. \tag{17}$$

Iz jednakosti (**??**) i (**??**) važi

$$\int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{dx} - \int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{dx} = (uv)(b) - (uv)(a) - \int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

■