

# MATEMATIČKI FAKULTET

---

## Odgovori na teorijska ispitna pitanja iz analize 2

---

*Radili*

Lazar Jovanović 34/2023

Jana Vuković 124/2022

*Profesor*

dr Marek Svetlik

Beograd, 2024/2025

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Neodređeni integrali</b>	<b>2</b>
1.1	Primitivna funkcija . . . . .	2
1.2	Definicija i osnovna svojstva neodređenog integrala . . . . .	3
1.3	Metode integracije . . . . .	5
1.4	Integracija racionalnih funkcija . . . . .	9
1.5	Integracija trigonometrijskih funkcija . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Određeni integrali</b>	<b>13</b>
2.1	Definicija određenog integrala . . . . .	13
2.2	Integrabilnost nekih klasa funkcija . . . . .	18
2.3	Svojstva određenog integrala . . . . .	18
2.4	Veza određenog integrala i izvoda. Njutn-Lajbnicova formula . . . . .	21
2.5	Smena promenljive i parcijalna integracija u određenom integralu . . . . .	22

# 1 Neodređeni integrali

## 1.1 Primitivna funkcija

Posmatrajmo neku funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , na primer  $f(x) = x^2$ . Možemo da pronađemo koeficijent pravca u tački  $x_0 \in \mathbb{R}$  računanjem izraza  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ . U našem primeru dobijamo  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h = 2x_0$ . Dakle, koeficijent pravca funkcije  $f$  u tački  $x_0$  jeste broj  $2x_0$ . Na ovaj način imamo određenu novu funkciju  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definisanu sa  $\varphi(x) = 2x$ . Uobičajeno je da funkciju  $\varphi$  nazivamo izvodna funkcija (izvod, prvi izvod) funkcije  $f$ . Funkciju  $\varphi$  drugačije označavamo sa  $f'$ .

Sada razmotrimo obratan problem. Odredimo funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ako je poznato da je funkcija  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa  $f'(x) = 2x$ . Iz prošlog primera možemo da zaključimo da je  $f(x) = x^2$  jedno rešenje. Zapitajmo se da li je i jedino. Nije, na primer funkcija  $f(x) = x^2 + 1$  je takođe rešenje.

Pokušajmo da odredimo funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ako je poznato da je

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Takvo  $f$  ne postoji, jer funkcija  $\operatorname{sgn}$  ima prekid prve vrste.

**Podsetnik teoreme:** Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferencijabilna funkcija. Tada funkcija  $f'$  ne može imati prekide prve vrste.

**Podsetnik definicije prekida prve vrste:** Za funkciju  $f$ , tačka  $x_0$  je prekid prve vrste ako postoje konačni  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  i različiti su.

**Definicija 1.1** Neka je  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Funkciju  $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  nazivamo primitivna funkcija za funkciju  $f$  na intervalu  $(a, b)$  ako je funkcija  $F$  diferencijabilna na  $(a, b)$  i za svako  $x \in (a, b)$  važi  $F'(x) = f(x)$ .

Prirodno se postavljaju pitanja da li za datu funkciju postoji primitivna funkcija i ako postoji koliko primitivnih funkcija ima. O broju primitivnih funkcija nam govori sledeći stav.

**Stav 1.1** Neka je  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  i neka je  $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  primitivna funkcija za funkciju  $f$  na intervalu  $(a, b)$  i neka je  $C \in \mathbb{R}$  proizvoljno. Tada je funkcija  $G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , definisana sa  $G(x) = F(x) + C$ , primitivna funkcija za funkciju  $f$  na intervalu  $(a, b)$ .

*Dokaz:*  $G$  je diferencijabilna na  $(a, b)$  jer je zbir dve diferencijabilne funkcije i za svako  $x$  iz intervala  $(a, b)$  važi  $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ , što smo i hteli da dokažemo. ■

Ovim smo dokazali da ako je  $F_1(x)$  primitivna funkcija, onda je i  $F_1(x) + C$  primitivna funkcija. Sledeće pitanje je da li može da postoji neka funkcija  $F_2(x)$  koja nije ovog oblika. O tome nam govori sledeća teorema.

**Podsetnik Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti:** Neka je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna na  $[a, b]$  i diferencijabilna na  $(a, b)$ . Tada će postojati tačka  $x_0 \in (a, b)$  takva da važi

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

**Teorema 1.1** Neka je  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  i neka su  $F_1, F_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  primitivne funkcije za funkciju  $f$  na intervalu  $(a, b)$ . Tada postoji  $C \in \mathbb{R}$  takvo da za svako  $x \in (a, b)$  važi  $F_1(x) = F_2(x) + C$ .

*Dokaz:* Neka je funkcija  $G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa  $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$ . Tada važi

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Izaberimo proizvoljne  $x_1, x_2 \in (a, b)$  takve da važi  $x_1 < x_2$ . Dokažimo da je  $G(x_1) = G(x_2)$ .

(1)  $G$  je neprekidna na  $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ .

(2)  $G$  je diferencijabilna na  $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ .

Iz (1) i (2), a na osnovu [Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti](#), sledi da postoji  $x_0 \in (x_1, x_2)$  takvo da

$$G(x_1) - G(x_2) = G'(x_0)(x_2 - x_1) = 0(x_2 - x_1) = 0.$$

Dakle,  $G(x_1) = G(x_2)$ . Kako su  $x_1$  i  $x_2$  proizvoljni, sledi da je  $G$  konstantna funkcija. Važi da postoji  $C \in \mathbb{R}$  takvo da za svako  $x \in (a, b)$  važi jednakost  $C = G(x) = F_1(x) - F_2(x)$ , odakle je  $F_1(x) = F_2(x) + C$ . ■

**Primer 1.1** Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa  $f(x) = 2x$ . Odrediti:

a) sve primitivne funkcije za funkciju  $f$ .

To su funkcije  $x^2 + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

b) funkciju  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koja je primitivna za funkciju  $f$  i za koju važi  $g(0) = \sqrt{2}$  i  $g(x) = x^2 + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Rešenje je  $g(x) = x^2 + \sqrt{2}$ .

**Primer 1.2** Odrediti sve dvaput diferencijabilne funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da za svako  $x \in \mathbb{R}$  važi  $f''(x) = 0$ .

Ako je  $(f'(x))' = 0$  tada pogađanjem dobijamo  $f'(x) = C_1$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}$  i  $f(x) = C_1x + C_2$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}$ . Rešenje je  $f(x) = C_1x + C_2$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

## 1.2 Definicija i osnovna svojstva neodređenog integrala

**Definicija 1.2** Neka je  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Neodređeni integral funkcije  $f$  na intervalu  $(a, b)$  je skup svih primitivnih funkcija za funkciju  $f$  na intervalu  $(a, b)$ . Neodređeni integral funkcije  $f$  obeležavamo sa  $\int f(x) dx$ . Formalno

$$\int f(x) dx = \left\{ F \mid F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, (\forall x \in (a, b)) (F'(x) = f(x)) \right\}.$$

Neka je  $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  proizvoljna primitivna funkcija za funkciju  $f$  na  $(a, b)$ . Tada je

$$\int f(x) dx = \left\{ G \mid G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, (\exists C \in \mathbb{R}) (\forall x \in (a, b)) (G(x) = F(x) + C) \right\}. \quad (1)$$

Jednakost (1) skraćeno zapisujemo na sledeći način

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

*Napomena:* U jednakosti (2) se ne vidi interval  $(a, b)$ , što stvara potencijalnu opasnost.

**Primer 1.3** Neka je  $n \in \mathbb{N}$  i neka su  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ . Naći integral  $\int (a_n x^n + \dots + a_0) dx$ .

Nagađanjem možemo da dodemo do rešenja:  $\int (a_n x^n + \dots + a_0) dx = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \dots + a_0 x + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

**Primer 1.4** Naći  $\int \frac{1}{x} dx$ .

Neka je  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Nije naglašeno na kom intervalu rešavamo integral, zbog čega uzimamo domen funkcije  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ . Imamo dva intervala pa posmatramo dva slučaja.

1. slučaj:  $x \in (0, +\infty)$   $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C_1 = \ln|x| + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$ .

2. slučaj:  $x \in (-\infty, 0)$   $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C_2 = \ln|x| + C_2, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Bitno je naglasiti da se konstante  $C_1$  i  $C_2$  odnose na intervale. One u opštem slučaju ne moraju da budu jednake. U sledećem primeru vidimo gde može da nastane problem.

**Primer 1.5** Odrediti funkciju  $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , takvu da  $f(1) = 0$ ,  $f(-1) = 1$  i za svako  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  važi  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

**Pogrešno rešenje:** Iz prethodnog primera dobijamo  $f(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ . Ubacivanjem vrednosti dobijamo  $f(1) = 0 = \ln(1) + C = C$  i  $f(-1) = 1 = \ln(1) + C = C$ . Dobijamo da je  $C = 0 = 1$ , što je kontradikcija.

**Tačno rešenje:**

Posmatrajmo  $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  definisanu sa

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x), & x > 0 \\ \ln(-x) + 1, & x < 0 \end{cases}.$$

Njen izvod je

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}.$$

Dakle, funkcija  $f$  je tražena funkcija jer važi  $f(1) = 0$  i  $f(-1) = 1$ . U ovom primeru je  $C_1 = 0$ , a  $C_2 = 1$ .

**Stav 1.2** Neka su  $f_1, f_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  funkcije koje imaju primitivne funkcije na  $(a, b)$  i neka su  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Tada funkcija  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ima primitivnu funkciju na  $(a, b)$  i važi

$$\int (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) dx = \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx.$$

*Dokaz:* Neka je funkcija  $F_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  primitivna funkcija za  $f_1$  i neka je funkcija  $F_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  primitivna funkcija za  $f_2$ . Tada, po definiciji primitivne funkcije, za svako  $x \in (a, b)$  važe jednakosti  $F_1'(x) = f_1(x)$  i  $F_2'(x) = f_2(x)$ . Odatle zaključujemo

$$(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2)'(x) = \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x).$$

Ako krenemo od desne strane jednakosti koju dokazujemo i primenimo prethodne jednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx &= \lambda_1 (F_1(x) + C_1) + \lambda_2 (F_2(x) + C_2) \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C \\ &= (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2)(x) + C \\ &= \int (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) dx, \end{aligned}$$

gde su  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ , a  $C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ . Ovim završavamo dokaz. ■

**Primer 1.6** Naći  $\int \left( \frac{3}{\sqrt{x}} + \cos \frac{x}{3} - 5 \cdot 2^x \right) dx$ ,  $x > 0$ .

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{\sqrt{x}} dx + \int \cos \frac{x}{3} dx - 5 \int 2^x dx \\ &= 6\sqrt{x} + C_1 + 3 \sin \frac{x}{3} + C_2 - 5 \frac{2^x}{\ln 2} - 5C_3 \\ &= 6\sqrt{x} + 3 \sin \frac{x}{3} - 5 \frac{2^x}{\ln 2} + C, \end{aligned}$$

gde su  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ , a  $C = C_1 + C_2 - 5C_3$ .

Tablica integrala:	
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x \in (0, +\infty) \quad \int x^\alpha dx$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \quad \int x^n dx$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int x^{-n} dx$	$\frac{1}{1-n} x^{1-n} + C_1, x \in (-\infty, 0)$ $\frac{1}{1-n} x^{1-n} + C_2, x \in (0, +\infty)$
$x \in \mathbb{R} \quad \int x^{-1} dx$	$\ln  x  + C_1, x \in (-\infty, 0)$ $\ln  x  + C_2, x \in (0, +\infty)$
$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R} \quad \int a^x dx$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$
$x \in \mathbb{R} \quad \int \sin x dx$	$-\cos x + C$
$x \in \mathbb{R} \quad \int \cos x dx$	$\sin x + C$
$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi \right) \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C_k, x \in \left( \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$
$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, \pi + k\pi) \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\operatorname{ctg} x + C_k, x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$x \in (-1, 1) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\arcsin x + C$
$x \in \mathbb{R} \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx$	$\operatorname{arctg} x + C$
$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int x^0 dx$	$x + C_1, x \in (-\infty, 0)$ $x + C_2, x \in (0, +\infty)$

### 1.3 Metode integracije

**Teorema 1.2** (Teorema o smeni promenljive 1) Neka je  $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  primitivna funkcija za funkciju  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  i neka je  $g : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$  diferencijabilna funkcija na  $(\alpha, \beta)$ . Tada postoji primitivna funkcija za funkciju  $(f \circ g)g' : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  i važi

$$\int ((f \circ g)g')(x) dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

*Dokaz:* Neka je  $x \in (a, b)$  proizvoljno. Tada

$$\begin{aligned}(F(g(x)) + C)' &= ((F \circ g)(x) + C)' = ((F \circ g)(x))' + 0 \\ &= F'(g(x)) g'(x) = f(g(x)) g'(x) \\ &= ((f \circ g)g')(x).\end{aligned}$$

■

**Primer 1.7** Neka su  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ . Naći  $\int (ax + b)^n dx$ .

Neka su  $f(t) = t^{n+1}$  i  $g(x) = ax + b$ . Tada važi  $F(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$  i  $g'(x) = a$ . Primenom [teoreme o smeni promenljive 1](#) dobijamo

$$\begin{aligned}\int (ax + b)^n dx &= \int f(g(x)) dx = \int \frac{1}{a} f(g(x)) g'(x) dx \\ &= \frac{1}{a} \int f(g(x)) g'(x) dx \\ &= \frac{1}{a} F(g(x)) + C \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{n+1} (ax + b)^{n+1}.\end{aligned}$$

Primitivna funkcija koju smo dobili je definisana na  $x \in \mathbb{R}$  za  $n > 0$ .

Za  $n \in \mathbb{Z} \cap ((-\infty, -1) \cup \{0\})$  je definisana na  $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right) \cup \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ .

Napomena: Izdvajamo slučaj kada je  $n = 0$  jer za  $x = -\frac{b}{a}$  dobijamo  $0^0$ . Iako važi  $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1$ , izraz  $0^0$  nije definisan jer  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^y$  ne postoji.

**Primer 1.8** Naći  $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$ .

Neka su  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$  i  $g(x) = e^x + 1$ . Tada važi  $F(t) = 2\sqrt{t}$  i  $g'(x) = e^x$ . Primenom [teoreme o smeni promenljive 1](#) dobijamo

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx &= \int f(g(x)) e^x dx = \int f(g(x)) g'(x) dx \\ &= F(g(x)) + C \\ &= 2\sqrt{e^x + 1}.\end{aligned}$$

**Teorema 1.3** (Teorema o smeni promenljive 2) Neka je  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , neka je  $g : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$  diferencijabilna funkcija takva da postoji  $g^{-1} : (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$  koja je takođe diferencijabilna i neka je  $F : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  primitivna funkcija za funkciju  $(f \circ g)g' : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ . Tada postoji primitivna funkcija za funkciju  $f$  i važi:  $\int f(x) dx = F(g^{-1}(x)) + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

*Dokaz:* Izaberimo proizvoljno  $x \in (a, b)$ . Tada

$$\begin{aligned}(F(g^{-1}(x)) + C)' &= (F(g^{-1}(x)))' + 0 = F'(g^{-1}(x)) (g^{-1})'(x) \\ &= ((f \circ g)g')(g^{-1}(x)) (g^{-1})'(x) \\ &= (f \circ g)(g^{-1}(x)) g'(g^{-1}(x)) (g^{-1})'(x) \\ &= (f(x)) (g \circ g^{-1})'(x) = f(x) x' = f(x).\end{aligned}$$

■

Pogledajmo sada par primera koji ilustruju kad smemo da koristimo [teoremu 1.3](#).

**Primer 1.9** Neka je  $g : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  definisano sa  $g(t) = e^t$  i neka je  $g^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definisano sa  $g^{-1}(x) = \ln x$ .

Funkcije  $g$  i  $g^{-1}$  su diferencijabilne na svojim domenima pa možemo primeniti teoremu.

**Primer 1.10** Neka je  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definisano sa  $g(t) = t^3$  i neka je  $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definisano sa  $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ .

Funkcija  $g$  je diferencijabilna na svom domenu. Proverimo da li je  $g^{-1}$  diferencijabilna u nuli:

$$(g^{-1})'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^{-1}(h) - g^{-1}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$$

Dakle, nije diferencijabilno, zbog čega ne može primeniti teoremu.

**Primer 1.11** Neka je  $g : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  definisano sa  $g(t) = t^3$  i neka je  $g^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  definisano sa  $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ .

Funkcija  $g$  je diferencijabilna na svom domenu. Za izvod funkcije  $g^{-1}$  dobijamo:  $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ . Ovo je definisano na celom domenu pa možemo da primenimo teoremu.

Sledi primer korišćenja [teoreme 1.3](#).

**Primer 1.12** Neka je  $a > 0$ . Naći  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ .

Neka je  $f : (-a, a) \rightarrow (0, a]$  definisano sa  $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$  i neka je  $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-a, a)$  definisano sa  $g(x) = a \sin x$ . Tada je  $g^{-1} : (-a, a) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  definisano sa  $g^{-1}(x) = \arcsin \frac{x}{a}$ .

Izvod  $g'(x) = a \cos x$  je definisan na celom domenu pa možemo da koristimo [teorem 1.3](#). Zbog preglednijeg zapisa, neka je  $g^{-1}(x) = t$ .

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int f(x) dx = F(g^{-1}(x)) + C = \int ((f \circ g)'(t)) dt = \int a \cos(t) \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(t)} dt \\ &= \int a \cos(t) \sqrt{a^2 (1 - \sin^2(t))} dt = \int a^2 \cos(t) \sqrt{1 - \sin^2(t)} dt = \int a^2 \cos^2(t) dt \\ &= \int \frac{a^2}{2} (1 + \cos(2t)) dt = \int \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \cos(2t) dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin(2t) + C. \end{aligned}$$

Dobili smo rešenje integrala, ali ovo rešenje možemo još da sredimo:

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \sin \left( 2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} 2 \sin \left( \arcsin \frac{x}{a} \right) \cos \left( \arcsin \frac{x}{a} \right) + C && \text{(formula za polovinu ugla sinusa)} \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \frac{x}{a} \cos \left( \arcsin \frac{x}{a} \right) + C && \text{napomena} \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{ax}{2} \sqrt{\cos^2 \left( \arcsin \frac{x}{a} \right)} + C && \text{(kosinus na domenu je pozitivan)} \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{ax}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \left( \arcsin \frac{x}{a} \right)} + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{ax}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C. \end{aligned}$$

Napomena: Iako važi da je  $\sin(\arcsin(x)) = x$ , ne mora da važi da je  $\arcsin(\sin(x)) = x$ .

Na kraju možemo da proverimo da li smo dobili tačno rešenje tako što uradimo izvod primitivne funkcije.



Opisali smo kako se ponaša integral linearnih kombinacije funkcija i kako se uvode smene. Ostaje da vidimo šta se dešava sa integralom proizvoda dve funkcije. O tome nam govori sledeća teorema.

**Teorema 1.4** (Teorema o parcijalnoj integraciji) Neka su  $u, v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  diferencijabilne funkcije. Tada funkcija  $uv' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ima primitivnu funkciju ako i samo ako funkcija  $u'v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ima primitivnu funkciju. Važi

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx.$$

Dokaz: Neka je  $x \in (a, b)$  proizvoljno. Tada

$$(uv)'(x) = (u(x) v(x))' = u'(x) v(x) + u(x) v'(x) \quad (3)$$

Pretpostavimo da  $u'v$  ima primitivnu funkciju. Tada iz (3) dobijamo

$$u(x) v'(x) = (u(x) v(x))' - u'(x) v(x) \quad (4)$$

Kako  $(u(x) v(x))'$  i  $u'(x) v(x)$  imaju primitivne funkcije, iz (4) sledi da je i  $u(x) v'(x)$  ima. Osim toga važi

$$\int u(x) v'(x) dx = \int (u(x) v(x))' dx - \int u'(x) v(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx.$$

Drugi smer dokaza je potpuno analogan. ■

**Primer 1.13** Naći  $\int e^x \sin x dx$ .

Primenjujemo [teoremu o parcijalnoj integraciji](#) za  $u(x) = e^x$  i  $v(x) = -\cos x$ :

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

Ostaje da se izračuna  $\int e^x \cos x dx$ . Ponovo primenjujemo [teoremu o parcijalnoj integraciji](#), ovaj put za  $u(x) = e^x$  i  $v(x) = \sin x$ :

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Uvrstimo dobijeni izraz u prethodnu jednakost:

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \\ 2 \int e^x \sin x dx &= -e^x \cos x + e^x \sin x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\ \int e^x \sin x dx &= \frac{1}{2} (-e^x \cos x + e^x \sin x) + C, \quad C = \frac{C_1}{2}. \end{aligned}$$

**Primer 1.14** Naći  $\int \frac{1}{x} dx$  za  $x > 0$ .

Iskoristićemo [teoremu o parcijalnoj integraciji](#) na  $u(x) = \frac{1}{x}$  i  $v(x) = x$ . Dobijamo jednakost

$$\int \frac{1}{x} dx = \frac{x}{x} + \int \frac{1}{x} = 1 + \int \frac{1}{x}.$$

Greška koja se često pravi je da se integrali skrate i da se dobije  $1 = 0$ , što znači da ovaj integral ne postoji. Ovo nije tačno jer ovu jednakost možemo da zapišemo i kao  $F + C_1 = 1 + F + C_2$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Ako skratimo primitivne funkcije dobijamo vezu između konstanti, što nam nije od pomoći. Metodom pogađanja rešenja dobijamo

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

## 1.4 Integracija racionalnih funkcija

Integraciju racionalnih funkcija možemo da rešavamo po algoritmu. Potrebno je da znamo rešenja integrala polinoma i integrala oblika  $\int \frac{A}{x-a} dx$ ,  $\int \frac{1}{(x-a)^k} dx$ ,  $\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c} dx$  i  $\int \frac{Mx+N}{(x^2+bx+c)^k} dx$ , gde su  $A, a, M, N, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $b^2 - 4c < 0$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Integral polinoma već znamo, a u sledećim lemapa ćemo pokazati proces nalaženja ovih integrala.

**Lema 1.1** Važi  $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$ , gde su  $A, a, C \in \mathbb{R}$ .

*Dokaz:* Neka je funkcija  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa  $f(t) = \frac{A}{t}$  i funkcija  $g: \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  definisana sa  $g(x) = x - a$ . Funkcija  $g$  je diferencijabilna na svom domenu, gde je  $g'(x) = 1$ , a primitivna funkcija funkcije  $f$  je funkcija  $F(t) = A \ln|t|$ . Tada možemo da primenimo [teoremu 1.2](#):

$$\int \frac{A}{x-a} dx = \int ((f \circ g) g')(x) dx = F(g(x)) + C = A \ln|x-a| + C.$$

Napomenimo da  $C$  za  $x > a$  i  $C$  za  $x < a$  mogu biti različiti. ■

**Lema 1.2** Važi  $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$ , gde su  $A, a, C \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .

*Dokaz:* Neka je funkcija  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa  $f(t) = \frac{A}{t^k}$  i funkcija  $g: \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  definisana sa  $g(x) = x - a$ . Funkcija  $g$  je diferencijabilna na svom domenu, gde je  $g'(x) = 1$ , a primitivna funkcija funkcije  $f$  je funkcija  $F(t) = \frac{A}{(1-k)t^{k-1}}$ . Tada možemo da primenimo [teoremu 1.2](#):

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \int ((f \circ g) g')(x) dx = F(g(x)) + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

■

**Lema 1.3** Važi  $\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2+bx+c) + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}} \arctg\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right) + C$ , gde su  $M, N, b, c, C \in \mathbb{R}$ ,  $b^2 - 4c < 0$ .

*Dokaz:* Neka je funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa  $f(t) = \frac{Mt}{t^2+1} + \frac{2N-bM}{(t^2+1)\sqrt{4c-b^2}}$  i funkcija  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa  $g(x) = \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}$ . Funkcija  $g$  je diferencijabilna na svom domenu, gde je  $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}$ . Potrebno je da izračunamo primitivnu funkciju

$$\begin{aligned} \int f(t) dt &= \int \frac{Mt}{t^2+1} + \frac{2N-bM}{(t^2+1)\sqrt{4c-b^2}} dt \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}} \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= \frac{M}{2} \ln(t^2+1) + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}} \arctg t + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\ &= F(t) + C_1. \end{aligned}$$

Tada možemo da primenimo [teoremu o smeni promenljive 1](#):

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx + N}{x^2 + bx + c} dx &= \int ((f \circ g) g') (x) dx \\
&= F(g(x)) + C_1 \\
&= \frac{M}{2} \ln \left( \left( \frac{2x + b}{\sqrt{4c - b^2}} \right)^2 + 1 \right) + \frac{2N - bM}{\sqrt{4c - b^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2x + b}{\sqrt{4c - b^2}} \right) + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\
&= \frac{M}{2} \ln \left( \frac{4x^2 + 4xb + b^2 + 4c}{4c - b^2} \right) + \frac{2N - bM}{\sqrt{4c - b^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2x + b}{\sqrt{4c - b^2}} \right) + C_1 \\
&= \frac{M}{2} \left( \ln(x^2 + bx + c) - \ln \left( c - \frac{b^2}{4} \right) \right) + \frac{2N - bM}{\sqrt{4c - b^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2x + b}{\sqrt{4c - b^2}} \right) + C_1 \\
&= \frac{M}{2} \ln(x^2 + bx + c) + \frac{2N - bM}{\sqrt{4c - b^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2x + b}{\sqrt{4c - b^2}} \right) + C, \quad C = C_1 + \frac{M}{2} \ln \left( c - \frac{b^2}{4} \right).
\end{aligned}$$

■

**Lema 1.4** Važi  $\int \frac{Mx + N}{(x^2 + bx + c)^k} dx = \frac{M}{2} \frac{1}{(1 - k)(x^2 + bx + c)^{k-1}} + \left( N - \frac{Mb}{2} \right) I_k$ , gde su  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ,  $M, N, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $b^2 - 4c < 0$ ,  $I_k = \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx$  i naći vezu između  $I_k$  i  $I_{k-1}$ .

*Dokaz:* Prvo ćemo početni integral razložiti na dva lakša

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx + N}{(x^2 + bx + c)^k} dx &= \int \frac{\frac{M}{2}(2x + b) - \frac{Mb}{2} + N}{(x^2 + bx + c)^k} dx \\
&= \int \frac{\frac{M}{2}(2x + b)}{(x^2 + bx + c)^k} dx + \int \frac{N - \frac{Mb}{2}}{(x^2 + bx + c)^k} dx \\
&= \frac{M}{2} \int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^k} dx + \left( N - \frac{Mb}{2} \right) \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx.
\end{aligned}$$

Prvi integral možemo da rešimo [teoremom o smeni promenljive 1](#). Neka je funkcija  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  definisana sa  $f(t) = \frac{1}{t^k}$  i neka je funkcija  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definisana sa  $g(x) = x^2 + bx + c$ . Funkcija  $g$  je diferencijabilna na svom domenu i važi  $g'(x) = 2x + b$ . Jedna od primitivnih funkcija funkcije  $f$  je  $F(t) = \frac{1}{(1 - k)t^{k-1}}$ . Primenom [teoreme o smeni promenljive 1](#) dobijamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^k} dx &= \int ((f \circ g) g') (x) dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{(1 - k)(x^2 + bx + c)^{k-1}} + C.
\end{aligned}$$

Za drugi integral koristimo nov metod rešavanja. Neka je  $I_k = \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx$ . Želimo da nađemo vezu između  $I_k$  i  $I_{k-1}$  jer onda rekursivno možemo da rešimo integral  $I_k$  (znamo rešenje  $I_1$  iz [leme 1.3](#)). Koristićemo [teoremu 1.4](#). Neka su  $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definisane sa  $u(x) = \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k}$  i  $v(x) = x$ . Funkcije  $u$  i  $v$  su diferencijabilne na svojim domenima i važe jednakosti  $u'(x) = -\frac{(2x + b)k}{(x^2 + bx + c)^{k+1}}$  i  $v'(x) = 1$ . Primenom

teoreme o parcijalnoj integraciji dobijamo

$$\begin{aligned}
I_k &= \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx = \int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx \\
&= \frac{x}{(x^2 + bx + c)^k} + k \int \frac{2x^2 + 2bx + 2c - bx - 2c}{(x^2 + bx + c)^{k+1}} dx \\
&= \frac{x}{(x^2 + bx + c)^k} + 2k \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx - k \int \frac{bx + 2c}{(x^2 + bx + c)^{k+1}} dx \\
(1 - 2k) I_k &= \frac{x}{(x^2 + bx + c)^k} - k \int \frac{bx + 2c}{(x^2 + bx + c)^{k+1}} dx \\
&= \frac{x}{(x^2 + bx + c)^k} - k \int \frac{\frac{b}{2}(2x + b) - \frac{b^2}{2} + 2c}{(x^2 + bx + c)^{k+1}} dx \\
&= \frac{x}{(x^2 + bx + c)^k} + \frac{b}{2} \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} - \left(2c - \frac{b^2}{2}\right) k \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^{k+1}} dx \\
&= \frac{x + \frac{b}{2}}{(x^2 + bx + c)^k} - \left(2c - \frac{b^2}{2}\right) k I_{k+1}.
\end{aligned}$$

Odredili smo vezu između  $I_k$  i  $I_{k+1}$ , pomeranjem indeksa za jedan naniže dobijamo vezu između  $I_{k-1}$  i  $I_k$

$$I_k = \frac{2x + b}{(4c - b^2)(x^2 + bx + c)^k} - \frac{2 - 4k}{4c - b^2} I_{k-1}.$$

Na kraju, vraćanjem svega u početni integral dobijamo

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + bx + c)^k} dx = \frac{M}{2} \frac{1}{(1 - k)(x^2 + bx + c)^{k-1}} + \left(N - \frac{Mb}{2}\right) I_k.$$

■

**Stav 1.3** (Posledica osnovnog stava algebre) Svaki polinom sa koeficijentima iz polja kompleksnih brojeva stepena  $n$ , gde je  $n \geq 1$ , ima tačno  $n$  nula u polju kompleksnih brojeva, računajući njihovu višestrukost.

**Tvrđenje 1.1** Svaki polinom  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stepena  $n$  može se zapisati u obliku

$$P(x) = p(x - a_1)^{s_1} \dots (x - a_k)^{s_k} (x - d_{11})^{t_1} (x - d_{12})^{t_1} \dots (x - d_{l1})^{t_l} (x - d_{l2})^{t_l}$$

gde je  $p$  koeficijent uz najstariji član,  $a_i, i \in \{1 \dots k\}$ , realna nula polinoma  $P$  višestrukosti  $s_i$  za koju važi

$$(\forall i_1, i_2 \in \{1 \dots k\}) (a_{i_1} = a_{i_2} \iff i_1 = i_2),$$

a  $d_{j1}$  i  $d_{j2}, j \in \{1 \dots l\}$ , konjugovano kompleksne nule polinoma  $P$ , koje nisu realne, koje su višestrukosti  $t_j$  i za koje važi

$$(\forall j_1, j_2 \in \{1 \dots l\}) ((d_{j_11} = d_{j_21} \iff j_1 = j_2) \wedge (d_{j_11} \neq d_{j_22})).$$

Takođe, zbog posledice osnovnog stava algebre, važi jednakost  $n = s_1 + \dots + s_k + 2(t_1 + \dots + t_l)$ . Dodatno, množenjem konjugovano kompleksnih nula dobijamo izraze oblika  $x^2 + bx + c, b, c \in \mathbb{R}, b^2 - 4c < 0$ , pa izraz možemo da zapišemo u obliku

$$P(x) = p(x - a_1)^{s_1} \dots (x - a_k)^{s_k} (x^2 + b_1x + c_1)^{t_1} \dots (x^2 + b_lx + c_l)^{t_l}.$$

Pokazali smo kako se nalaze integrali nekih vrsta racionalnih funkcija. Ostaje da pokažemo kako da proizvoljnu racionalnu funkciju svedemo na integrale ovih vrsta.

**Algoritam 1.1** Neka funkcija  $st(P)$  vraća stepen polinoma. Neka su dati polinomi  $P, Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , pri čemu važi  $st(P) \geq 0$ ,  $st(Q) \geq 1$ . Ako polinom  $Q$  nema realnih nula, primitivnu funkciju za funkciju  $\frac{P}{Q}$  nalazimo na intervalu  $(-\inf, +\inf)$ . Inače, ako su  $a_1 < a_2 < \dots < a_k$  realne nule polinoma  $Q$ , primitivnu funkciju tražimo na intervalima  $(-\inf, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{k-1}, a_k), (a_k, +\inf)$ . Integral  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  nalazimo sledećim koracima:

K1: Ako je  $st(P) < st(Q)$  primenjujemo K2 na integral  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ .

Inače, vršimo deljenje polinoma  $P$  polinomom  $Q$ . Neka je  $S$  rezultat deljenja, a  $R$  ostatak pri deljenju. Tada važi  $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ ,  $st(R) < st(Q)$ . Zbog linearnosti integrala važi jednakost  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$ . Znamo da izračunamo integral polinoma  $S(x)$ , primenjujemo K2 na integral  $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$ .

K2: Koristimo tvđenje 1.1 i zapisujemo polinom  $Q$  u obliku

$$Q(x) = p(x - a_1)^{s_1} \dots (x - a_k)^{s_k} (x^2 + b_1x + c_1)^{t_1} \dots (x^2 + b_lx + c_l)^{t_l}.$$

Prelazimo na korak K3.

K3: U ovom koraku je cilj da odredimo konstante u brojiocu takve da važi jednakost

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^k \left( \frac{A_{i1}}{(x - a_i)} + \dots + \frac{A_{is_i}}{(x - a_i)^{s_i}} \right) + \sum_{j=1}^l \left( \frac{M_{j1}x + N_{j1}}{(x^2 + b_jx + c_j)} + \dots + \frac{M_{jt_j}x + N_{jt_j}}{(x^2 + b_jx + c_j)^{t_j}} \right).$$

To postizemo rešavanjem linearnih jednačina koje nastaju svodenjem svih sabiraka na isti imenilac. Nakon nalaženja ovih konstanti prelazimo na K4.

K4: Određujemo integral zbira koji smo dobili u prethodnom koraku. Svi sabirci su istih oblika kao i integrali koji su navedeni u lemana 1, 2, 3 i 4.

## 1.5 Integracija trigonometrijskih funkcija

Oznaku  $R(u, v)$  koristimo za predstavljanje racionalnih funkcija sa argumenatima  $u$  i  $v$ . Na primer, neka je  $R(u, v) = \frac{u+v}{u-v+2}$ . Integrale oblika  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  rešavamo smenom  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , definisanom svuda sem u  $x \in \{(2l+1)\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}$ . Formalno, neka je funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa  $f(x) = R(\sin x, \cos x)$  i neka je funkcija  $g_0 : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi, \pi)$  definisana sa  $g_0(x) = 2 \arctg x$ . Funkcija  $g_0$  je bijektivna pa postoji inverz  $g_0^{-1} : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  definisan sa  $g_0^{-1}(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Važi i da su  $g_0$  i  $g_0^{-1}$  diferencijabilne. Potrebno je još da odredimo  $(f \circ g_0)(x)$ . Važe jednakosti

$$(f \circ g_0)(x) = f(g_0(x)) = R(\sin(g_0(x)), \cos(g_0(x))) = R(\sin(2 \arctg(x)), \cos(2 \arctg(x))).$$

Ostaje da redukujemo izraze  $\sin(2 \arctg(x))$  i  $\cos(2 \arctg(x))$ .

$$\begin{aligned} \sin(2 \arctg(x)) &= 2 \sin(\arctg(x)) \cos(\arctg(x)) = 2 \operatorname{tg}(\arctg(x)) \cos^2(\arctg(x)) \\ &= \frac{2x}{\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{2x}{\operatorname{tg}^2(\arctg(x)) + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}; \\ \cos(2 \arctg(x)) &= \cos^2(\arctg(x)) - \sin^2(\arctg(x)) = \cos^2(\arctg(x)) (1 - \operatorname{tg}^2(\arctg(x))) \\ &= \frac{1 - x^2}{\frac{\sin^2(\arctg(x)) + \cos^2(\arctg(x))}{\cos^2(\arctg(x))}} = \frac{1 - x^2}{\operatorname{tg}^2(\arctg(x)) + 1} = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Odavde dobijamo  $(f \circ g_0)(x) = R\left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ .

Možemo da odredimo integral  $\int ((f \circ g_0)g_0')(x) dx = \int R\left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \frac{2}{1+x^2} dx = F(x) + C_0$ ,  $C_0 \in$

$\mathbb{R}$ , jer je to integral racionalne funkcije. Primenom teoreme 1.3 dobijamo  $\int f(x) dx = F(g_0^{-1}(x)) + C_0$ .

Rešili smo integral na intervalu  $(-\pi, \pi)$ . Posmatrajmo intervale oblika  $((2m-1)\pi, (2m+1)\pi)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Funkcija  $g_m(x) = 2 \operatorname{arctg}(x) + 2m\pi$  je diferencijabilna i ima inverz  $g_m^{-1}(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x+2m\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ . Analogno kao za  $g_0$  dobijamo  $(f \circ g_m)(x) = R(\sin(2 \operatorname{arctg}(x) + 2m\pi), \cos(2 \operatorname{arctg}(x) + 2m\pi)) = R\left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ .

Dakle, analogno rešavanju integrala na intervalu  $(-\pi, \pi)$  dobijamo  $\int f(x) dx = F(g_m^{-1}(x)) + C_m$ .

Rešili smo integrale na  $\mathbb{R} \setminus \{(2l+1)\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}$ . Zbog neprekidnosti mora da važi da je

$$(\forall l \in \mathbb{Z}) \left( \lim_{x \rightarrow (2l+1)\pi^-} F(g_l^{-1}(x)) + C_l = \lim_{x \rightarrow (2l+1)\pi^+} F(g_{l+1}^{-1}(x)) + C_{l+1} \right).$$

Nalaženjem veze između konstanti  $C_l$  i  $C_{l+1}$  rešavamo integral i u tačkama  $(2l+1)\pi$ , gde je  $l$  ceo broj, čime smo rešili integral na celom  $\mathbb{R}$ .

Napomenimo da izvođenje zavisi od konkretne funkcije  $f$ . Za  $f$  koje nije definisano na celom  $\mathbb{R}$  ćemo raditi presek  $\mathbb{R}$  sa  $D_f$  i posmatrati drugačije intervale, ali će postupak ostati analogan.

**Primer 1.15** *Odrediti integral*  $\int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx$ .

Neka je  $f(x) = \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5}$ . Domen funkcije je  $\mathbb{R}$ . Primenjujemo prethodnu diskusiju

$$(\forall l \in \mathbb{R}) \quad (f \circ g_l)(x) = R\left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \frac{1}{\frac{4x}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{1+x^2} + 5} = \frac{1+x^2}{6x^2 + 4x + 4}.$$

Ima  $l$  integrala oblika

$$\begin{aligned} \int ((f \circ g_l) g'_l)(x) dx &= \int \frac{1+x^2}{6x^2 + 4x + 4} \frac{2}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{3(x^2 + 2\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{5}{9})} = \int \frac{dx}{3(x + \frac{1}{3})^2 + \frac{5}{3}} \\ &= \frac{3}{5} \int \frac{dx}{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C_l. \end{aligned}$$

Dobijamo da je  $I_l = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C_l$ . Ostaje da nađemo leve i desne limese u nedefinisanim tačkama. Tada

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (2l+1)\pi^-} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C_l &= \lim_{x \rightarrow (2l+1)\pi^+} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C_{l+1} \\ \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_l &= -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_{l+1} \\ C_{l+1} &= C_l + \frac{\pi}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Tada je  $C_l = \frac{l\pi}{\sqrt{5}} + C_0$ . Važi da je  $(2l-1)\pi < x < (2l+1)\pi$ , odakle je  $\frac{x-\pi}{2\pi} < l < \frac{x+\pi}{2\pi}$ ,  $l = \left\lfloor \frac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor$ .

Dobijamo da je rešenje integrala

$$\int f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left\lfloor \frac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor \frac{\pi}{\sqrt{5}} + C_0.$$

## 2 Određeni integrali

### 2.1 Definicija određenog integrala

Neka je  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Želimo da definišemo  $\int_a^b f(x) dx$ .

**Definicija 2.1** Neka su  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$  tačke takve da važi  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Tada:

- skup intervala  $\mathcal{P} = \{[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]\}$  nazivamo **podela** intervala  $[a, b]$ ;
- tačke  $x_0, x_1, \dots, x_n$  nazivamo **podeone tačke** podele  $\mathcal{P}$ ;
- sa  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , gde je  $i \in \{1, \dots, n\}$ , obeležavamo dužinu intervala  $[x_{i-1}, x_i]$ ;
- skup svih podela intervala  $[a, b]$  obeležavamo sa  $\mathcal{P}[a, b]$ ;
- funkciju  $\lambda : \mathcal{P}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definisanu sa  $\lambda(\mathcal{P}) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \Delta x_i$  nazivamo **parametar** podele  $\mathcal{P}$ ;
- za podele  $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathcal{P}[a, b]$  kažemo da je podela  $\mathcal{P}'$  finija od podele  $\mathcal{P}$ , odnosno da je podela  $\mathcal{P}$  grublja od podele  $\mathcal{P}'$  ako je skup podeonih tačaka podele  $\mathcal{P}$  podskup skupa podeonih tačaka podele  $\mathcal{P}'$ ;
- uređenu  $n$ -torku  $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ,  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  nazivamo **istaknute tačke** podele  $\mathcal{P}$ ;
- uređen par  $(\mathcal{P}, \xi)$  nazivamo **podela sa istaknutim tačkama** intervala  $[a, b]$ .

**Definicija 2.2** Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i  $(\mathcal{P}, \xi)$  podela sa istaknutim tačkama intervala  $[a, b]$ . Tada zbir  $\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  nazivamo **integralna suma** funkcije  $f$  za datu podelu sa istaknutim tačkama  $(\mathcal{P}, \xi)$  intervala  $[a, b]$ .

**Definicija 2.3** Ako za  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i  $I \in \mathbb{R}$  važi

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall (\mathcal{P}, \xi) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]) \quad \lambda(\mathcal{P}) < \delta \implies |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| < \varepsilon.$$

tada kažemo da je  $I$  **Rimanov integral funkcije**  $f$  na intervalu  $[a, b]$  i pišemo

$$I = \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \int_a^b f(x) dx.$$

Rimanov integral nazivamo i **određeni integral**.

Ako za funkciju  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  postoji Rimanov integral, kažemo da je funkcija  $f$  **R-integrabilna** na intervalu  $[a, b]$ .

**Primer 2.1** Ispitati da li je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definisana sa  $f(x) = c$ , R-integrabilna i ako jeste, odrediti njen određeni integral.

Uzmimo proizvoljnu podelu  $\mathcal{P}$  i proizvoljan skup istaknutih tačaka  $\xi$  za podelu  $\mathcal{P}$ . Tada važi

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n c \Delta x_i = c(b-a). \quad (5)$$

Za svako  $\varepsilon > 0$  važi  $|\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - c(b-a)| = 0 < \varepsilon$ , dakle možemo da izaberemo proizvoljno  $\delta$  i važi  $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = c(b-a)$ .

**Primer 2.2** Ispitati da li je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definisana sa  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ 0, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a, b] \end{cases}$ ,  $R$ -integrabilna i ako jeste, odrediti njen određeni integral.

Dokažimo da ova funkcija nije  $R$ -integrabilna.

Neka je  $\mathcal{P}$  proizvoljna podela intervala  $[a, b]$ . Neka je  $\xi' = (\xi'_1, \dots, \xi'_n)$  skup istaknutih tačaka podele  $\mathcal{P}$ , gde je  $\xi'_i \in \mathbb{Q}$ , za svako  $i \in \{1, \dots, n\}$  i važi

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi') = \sum_{i=1}^n f(\xi'_i) \Delta x_i = b - a. \quad (6)$$

i neka je  $\xi'' = (\xi''_1, \dots, \xi''_n)$  skup istaknutih tačaka podele  $\mathcal{P}$ , gde je  $\xi''_i \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ , za svako  $i \in \{1, \dots, n\}$  i važi

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi'') = \sum_{i=1}^n f(\xi''_i) \Delta x_i = 0. \quad (7)$$

Treba da dokažemo da za svako  $I \in \mathbb{R}$  postoji  $\varepsilon > 0$  takvo da za svako  $\delta > 0$  postoji podela  $\mathcal{P}$  intervala  $[a, b]$  sa istaknutim tačkama  $\xi$  takva da je  $\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| \geq \varepsilon$ .

Prvi slučaj je kad je  $I \neq 0$ .

Neka je  $\varepsilon = |I|$ , neka je  $\delta$  proizvoljno, neka je  $\mathcal{P} = \left\{ \left[ a, a + \frac{b-a}{n} \right], \dots, \left[ a + (n-1) \frac{b-a}{n}, b \right] \right\}$ , gde je  $\frac{b-a}{n} = \lambda(\mathcal{P}) < \delta$  i neka je  $\xi$  izabrano kao  $\xi''$ . Tada važi

$$\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| = |0 - I| \geq |I| = \varepsilon.$$

Drugi slučaj je kad je  $I = 0$ .

Neka je  $\varepsilon = b - a$ , neka je  $\delta$  proizvoljno, neka je  $\mathcal{P} = \left\{ \left[ a, a + \frac{b-a}{n} \right], \dots, \left[ a + (n-1) \frac{b-a}{n}, b \right] \right\}$ , gde je  $\frac{b-a}{n} = \lambda(\mathcal{P}) < \delta$  i neka je  $\xi$  izabrano kao  $\xi'$ . Tada važi

$$\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| = |b - a - 0| \geq |b - a| = \varepsilon.$$

**Primer 2.3** Ispitati da li je funkcija  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definisana sa  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ,  $R$ -integrabilna i ako jeste, odrediti njen određeni integral.

Dokažimo da ova funkcija nije  $R$ -integrabilna.

Neka je podela  $\mathcal{P} = \left\{ \left[ 0, \frac{1}{n} \right], \dots, \left[ \frac{n-1}{n}, 1 \right] \right\}$  i neka je  $n$ -torka istaknutih tačaka  $\xi = (\frac{1}{n^4}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n})$ . Važi

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq \frac{f(\xi_1)}{n} = \frac{f(\frac{1}{n^4})}{n} = n.$$

Treba da dokažemo da za svako  $I \in \mathbb{R}$  postoji  $\varepsilon > 0$  takvo da za svako  $\delta > 0$  postoji podela  $\mathcal{P}$  intervala  $[a, b]$  sa istaknutim tačkama  $\xi$  takva da je  $\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| \geq \varepsilon$ .

Prvi slučaj je kad je  $I \geq 0$ .

Neka je  $\varepsilon = 1$ , neka je  $\delta$  proizvoljno, neka je  $\mathcal{P} = \left\{ \left[ 0, \frac{1}{n} \right], \dots, \left[ \frac{n-1}{n}, 1 \right] \right\}$ , gde je  $\frac{1}{n} = \lambda(\mathcal{P}) < \delta$  i  $n = [I] + 1 + k$ , gde je  $k \in \mathbb{N}$  i neka je  $\xi$  izabrano kao  $\xi''$ . Tada važi

$$\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| \geq |n - I| = |[I] + 1 + k - I| \geq |k| \geq 1.$$

Drugi slučaj je kad je  $I < 0$ .

Neka je  $\varepsilon = 1$ , neka je  $\delta$  proizvoljno, neka je  $\mathcal{P} = \left\{ \left[ 0, \frac{1}{n} \right], \dots, \left[ \frac{n-1}{n}, 1 \right] \right\}$ , gde je  $\frac{1}{n} = \lambda(\mathcal{P}) < \delta$  i neka je  $\xi$  izabrano kao  $\xi'$ . Tada važi

$$\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| \geq n - I \geq 1.$$



**Teorema 2.1** Ako  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nije ograničena na  $[a, b]$ , onda ona nije  $R$ -integrabilna.

**Definicija 2.4** Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ograničena na svom intervalu i neka je  $\mathcal{P}$  podela intervala. Za  $i \in \{1, \dots, n\}$  definišemo  $m_i = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$  i  $M_i = \sup \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ . Tada:

- zbir  $s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$  nazivamo **donja Darbuova suma** funkcije  $f$  za datu podelu  $\mathcal{P}$  intervala  $[a, b]$ ;
- zbir  $S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$  nazivamo **gornja Darbuova suma** funkcije  $f$  za datu podelu  $\mathcal{P}$  intervala  $[a, b]$ .

**Definicija 2.5** Za svake dve podele  $\mathcal{P}', \mathcal{P}'' \in \mathcal{P}[a, b]$  postoji finija podela  $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]$ . Ako je skup podeonih tačaka podele  $\mathcal{P}$  unija podeonih tačaka podele  $\mathcal{P}'$  i  $\mathcal{P}''$ , tada se podela  $\mathcal{P}$  naziva **superpozicija** podele  $\mathcal{P}'$  i  $\mathcal{P}''$ .

**Stav 2.1** Dokazati da za  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i  $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathcal{P}[a, b]$ , gde je skup podeonih tačaka podele  $\mathcal{P}$  podskup skupa podeonih tačaka podele  $\mathcal{P}'$ , važi

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}).$$

*Dokaz:* Dovoljno je dokazati slučaj kad je skup podeonih tačaka podele  $\mathcal{P} \{x_0, \dots, x_n\}$ , a skup podeonih tačaka podele  $\mathcal{P}' \{x_0, \dots, x_{k-1}, x', x_k, \dots, x_n\}$ . Neka je  $s' = \sum_{i=1}^{k-1} m_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n m_i \Delta x_i$  i neka su  $m'_k = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x']\}$  i  $m''_k = \inf \{f(x) \mid x \in [x', x_k]\}$ . Tada je

$$s(f, \mathcal{P}) = s' + m_k (x_k - x_{k-1})$$

i

$$s(f, \mathcal{P}') = s' + m'_k (x' - x_{k-1}) + m''_k (x_k - x').$$

Važi da je  $m_k = \min(m'_k, m''_k)$ , odakle dobijamo

$$\begin{aligned} m_k (x_k - x') + m_k (x' - x_{k-1}) &\leq m''_k (x_k - x') + m'_k (x' - x_{k-1}) \\ s' + m_k (x_k - x_{k-1}) &\leq s' + m''_k (x_k - x') + m'_k (x' - x_{k-1}) \\ s(f, \mathcal{P}) &\leq s(f, \mathcal{P}'). \end{aligned}$$

Treća nejednakost se slično dokazuje. ■

**Stav 2.2** Neka su  $\mathcal{P}', \mathcal{P}'' \in \mathcal{P}[a, b]$ . Tada je  $s(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}'')$ .

*Dokaz:* Neka je  $\mathcal{P}$  superpozicija podele  $\mathcal{P}'$  i  $\mathcal{P}''$ . Iz **prethodnog stava** važi da je

$$s(f, \mathcal{P}') \leq s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P})$$

i da je

$$s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}''),$$

odakle dobijamo

$$s(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}'').$$

Za  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  skup  $\{s(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]\}$  je neprazan i prema **prethodnom stavu** ograničen odozgo brojem  $S(f, \mathcal{P})$  za proizvoljno  $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]$ , pa prema aksiomi o egzistenciji supremuma postoji supremum ovog skupa. ■

**Definicija 2.6** Donji Rimanov integral funkcije  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jeste

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \{s(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Za  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  skup  $\{S(f, P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}$  je neprazan i prema [prethodnom stavu](#) ograničen odozdo brojem  $s(f, \mathcal{P})$  za proizvoljno  $P \in \mathcal{P}[a, b]$ , pa prema teoremi o egzistenciji infimuma postoji infimum ovog skupa.

**Definicija 2.7** *Gornji Rimanov integral funkcije  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jeste*

$$\int_a^b f(x) dx = \inf \{S(f, P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Jasno je da važi  $\int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx}$ .

**Definicija 2.8** *Ako važi da je  $\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx} = I$ , onda broj  $I$  nazivamo **Rimanov integral** funkcije  $f$  na  $[a, b]$  i pišemo*

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

**Teorema 2.2**  *$\varepsilon - \delta$  definicija Rimanovog integrala i definicija Rimanovog integrala preko gornjeg i donjeg Rimanovog integrala su ekvivalentne.*

**Stav 2.3** *Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ograničena. Tada je funkcija  $f$  R-integrabilna na  $[a, b]$  ako i samo ako za svako  $\varepsilon > 0$  postoji  $P \in \mathcal{P}[a, b]$  takvo da je  $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$ .*

( $\Rightarrow$ ) Neka je  $\varepsilon$  proizvoljno. Na osnovu definicije infimuma skupa postoji  $P' \in \mathcal{P}[a, b]$  takvo da je

$$\int_a^b f(x) dx \leq S(f, P') < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8)$$

Na osnovu definicije supremuma skupa postoji  $P'' \in \mathcal{P}[a, b]$  takvo da je

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, P'') \leq \int_a^b f(x) dx. \quad (9)$$

Neka je  $\mathcal{P}$  superpozicija podela  $P'$  i  $P''$ . Tada je zbog posledice [stava 2.1](#)

$$s(f, P'') \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq S(f, P'). \quad (10)$$

Iz (8) i (9) dobijamo

$$S(f, P') - s(f, P'') < \varepsilon, \quad (11)$$

dok iz (10) dobijamo

$$S(f, P) - s(f, P) \leq S(f, P') - s(f, P''). \quad (12)$$

Konačno, iz (11) i (12) važi

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon. \quad (13)$$

( $\Leftarrow$ ) Važi

$$\begin{aligned} s(f, P) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} \leq S(f, P) \\ 0 &\leq \overline{\int_a^b f(x) dx} - \int_a^b f(x) dx \leq S(f, P) - s(f, P) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

odakle je

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} = \int_a^b f(x) dx,$$

pa je po [definiciji 2.8](#)  $f$  R-integrabilna. ■

## 2.2 Integrabilnost nekih klasa funkcija

**Teorema 2.3** *Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija na  $[a, b]$ . Tada je funkcija  $f$  Riman integrabilna na  $[a, b]$ .*

**Podsetnik definicije monotonosti funkcije:** Funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je monotono rastuća ako važi

$$(\forall x_1, x_2 \in [a, b]) (x_1 \leq x_2) \implies (f(x_1) \leq f(x_2)),$$

a monotono opadajuća ako važi

$$(\forall x_1, x_2 \in [a, b]) (x_1 \leq x_2) \implies (f(x_1) \geq f(x_2)),$$

**Teorema 2.4** *Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monotona funkcija na  $[a, b]$ . Tada je funkcija Riman integrabilna na  $[a, b]$ .*

*Dokaz:* Bez umanjavanja opštosti, pretpostavimo da je funkcija monotono rastuća na  $[a, b]$ . Primetimo najpre da je funkcija ograničena na  $[a, b]$ . Zaista, za svako  $x \in [a, b]$  važi  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ . Pretpostavimo da funkcija nije konstantna, za konstantne funkcije već znamo da su R-integrabilne. Neka je  $\varepsilon > 0$  proizvoljno i neka je podela  $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]$  takva da je parametar podele  $\lambda(\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ . Tada je

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Dakle, važi  $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$  za proizvoljno  $\varepsilon$ , pa po [stavu 2.3](#) važi da je  $f$  R-integrabilna na  $[a, b]$ . ■

**Teorema 2.5** *Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ograničena funkcija na  $[a, b]$  takva da je skup tačaka u kojima nije neprekidna konačan. Tada je funkcija  $f$  Riman integrabilna na  $[a, b]$ .*

**Teorema 2.6** *Neka su  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  R-integrabilne funkcije na  $[a, b]$  koje se razlikuju samo u konačno mnogo tačaka. Tada je*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

**Definicija 2.9** *Skup svih Riman integrabilnih funkcija na intervalu  $[a, b]$  označavamo sa  $R[a, b]$ .*

## 2.3 Svojstva određenog integrala

**Stav 2.4** *Neka su  $f, g \in R[a, b]$  i neka su  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Tada  $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$  i važi*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

*Dokaz:* Neka je  $(\mathcal{P}, \xi)$  proizvoljna podela sa istaknutim tačkama na  $[a, b]$ . Tada

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha f + \beta g, \mathcal{P}, \xi) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) (\alpha f + \beta g)(\xi_i) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) ((\alpha f)(\xi_i) + (\beta g)(\xi_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) (\alpha f)(\xi_i) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) (\beta g)(\xi_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) + \beta \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) g(\xi_i) \\ &= \alpha \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) + \beta \sigma(g, \mathcal{P}, \xi).\end{aligned}$$

Po definiciji važi  $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \int_a^b f(x) dx$  i  $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(g, \mathcal{P}, \xi) = \int_a^b g(x) dx$ . Tada

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx &= \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(\alpha f + \beta g, \mathcal{P}, \xi) \\ &= \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} (\alpha \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) + \beta \sigma(g, \mathcal{P}, \xi)) \\ &= \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \alpha \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) + \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \beta \sigma(g, \mathcal{P}, \xi) \\ &= \alpha \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) + \beta \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(g, \mathcal{P}, \xi) \\ &= \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.\end{aligned}$$

■

**Stav 2.5** Neka su  $f, g \in R[a, b]$ . Tada:

- ako je  $fg \in R[a, b]$ , ne mora da važi  $\int_a^b (fg)(x) dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$ ;
- ako je  $|f| \in R[a, b]$ , ne mora da važi  $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$ ;
- $\frac{1}{f} \in R[a, b]$ , pod pretpostavkom da postoji  $c > 0$  takvo da za svako  $x \in [a, b]$  važi  $|f(x)| > c$ .

**Stav 2.6** Neka je  $f \in R[a, b]$  i  $[c, d] \subset [a, b]$ . Tada  $f \in R[c, d]$ .

**Stav 2.7** Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i  $c \in (a, b)$ . Tada  $f \in R[a, b]$  ako i samo ako  $f \in R[a, c]$  i  $f \in R[c, b]$  i važi  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

**Definicija 2.10** Neka je  $f : \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Tada  $\int_a^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} 0$ .

**Definicija 2.11** Neka je  $f \in R[a, b]$ . Tada  $\int_b^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} - \int_a^b f(x) dx$ .

**Definicija 2.12** Neka su  $a, b, c \in \mathbb{R}$  i  $f : [\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}] \rightarrow \mathbb{R}$ . Tada je  $f$  Riman integrabilna na  $[\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}]$  i važi  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

**Stav 2.8** Neka je  $f \in R[a, b]$  i  $f(x) \geq 0$ , za svako  $x \in [a, b]$ . Tada je  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

*Dokaz:* Neka  $(\mathcal{P}, \xi)$  proizvoljna podela sa istaknutim tačkama na  $[a, b]$ . Tada je

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0.$$

Otuda je  $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) \geq 0$ , tačnije,  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ . ■

**Stav 2.9** Neka je  $f \in R[a, b]$ . Tada je

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

*Dokaz:* Kako važi  $f(x) - |f(x)| \leq 0$ , za svako  $x \in [a, b]$ , sledi  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$ . Takođe, važi  $0 \leq |f(x)| + f(x)$ , za svako  $x \in [a, b]$ , odakle je  $-\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$ . Dakle,  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ . ■

**Stav 2.10** Neka su  $f, g \in R[a, b]$  i neka za svako  $x \in [a, b]$  važi  $f(x) \leq g(x)$ . Tada je

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

*Dokaz:* Primetimo da je  $g - f \in R[a, b]$  i da je  $(g - f)(x) \geq 0$ , za svako  $x \in [a, b]$ . Tada je po stavu 2.8  $\int_a^b (g - f)(x) dx \geq 0$ , odakle dobijamo  $\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$ . ■

**Stav 2.11** Neka je  $f \in R[a, b]$  i neka su  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$  i  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ . Tada postoji  $\mu \in [m, M]$  takvo da je

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b - a).$$

*Dokaz:* Za svako  $x \in [a, b]$  važi:

$$\begin{aligned} m &\leq f(x) \leq M \\ m(b - a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \\ m &\leq \frac{1}{(b - a)} \int_a^b f(x) dx \leq M. \end{aligned}$$

Dakle, postoji  $\mu \in [m, M]$ , takvo da je  $\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$ . ■

**Podsetnik Vajerštrasove teoreme:** Ako je funkcija neprekidna na intervalu  $[a, b]$ , ona je ograničena i dostiže svoj maksimum i minimum.

**Stav 2.12** Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija na  $[a, b]$ . Tada postoji  $c \in [a, b]$  takvo da je

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

*Dokaz:* Kako je funkcija  $f$  neprekidna na  $[a, b]$  po [Vajerštrasovoj teoremi](#) važi da je  $\inf_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$  i  $\sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ . Neka su  $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$  i  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ . Na osnovu prethodnog stava sledi da postoji  $\mu \in [m, M]$  takvo da je  $\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$ . Kako je funkcija  $f$  neprekidna na  $[a, b]$  sledi da je  $f([a, b]) = [m, M]$ . Otuda za  $\mu \in [m, M]$  postoji  $c \in [a, b]$  takvo da je  $f(c) = \mu$ . ■

## 2.4 Veza određenog integrala i izvoda. Njutn-Lajbnicova formula

**Definicija 2.13** Neka je  $f \in R[a, b]$ . Ima smisla razmatrati funkciju  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definisanu sa  $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Tada funkciju  $\varphi$  nazivamo **integral sa promenljivom gornjom granicom**.

**Teorema 2.7** Funkcija  $\varphi$  je neprekidna na  $[a, b]$ .

*Dokaz:* Neka je  $x_0 \in [a, b]$  proizvoljno. Dokažimo da je funkcija  $\varphi$  neprekidna u  $x_0$ . Neka je  $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$  i neka je  $\varepsilon > 0$  proizvoljno. Tada za  $x \in [a, b]$  važi

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t)| dt \right| \leq M|x - x_0|.$$

Neka je  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ . Tada na osnovu  $\varepsilon - \delta$  definicije važi

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in [a, b]) (|x - x_0| < \delta \rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon),$$

čime smo dokazali da je  $\varphi$  neprekidna u proizvoljnoj tački, zbog čega je neprekidna i na celom intervalu. ■

**Teorema 2.8** Ako je funkcija  $f$  neprekidna na  $[a, b]$  onda za funkciju  $\varphi$  važi da je diferencijabilna na  $(a, b)$  i važi  $\varphi'_+(a) = f(a)$  i  $\varphi'_-(b) = f(b)$ .

*Dokaz:* Neka je  $x \in [a, b]$  proizvoljno i  $h \in \mathbb{R}$ , takvo da je  $x + h \in [a, b]$ . Tada je

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Po [stavu 2.12](#) postoji  $c \in [\min\{x, x+h\}, \max\{x, x+h\}]$  takvo da  $\int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)(x+h-x)$ . Neka je  $c = x + h\theta(x, h)$ ,  $\theta \in [0, 1]$ . Tada je

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \frac{1}{h} f(x + h\theta(x, h))(x+h-x) = f(x + h\theta(x, h)).$$

Odatle dobijamo  $\varphi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x + h\theta(x, h)) = f(x)$ . Slično se dokazuje i za  $\varphi'_+(a)$  i  $\varphi'_-(b)$ . ■

**Tvrđenje 2.1** Neka je  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija na  $(a, b)$ . Tada funkcija  $f$  ima primitivnu funkciju  $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  na  $(a, b)$ .

*Dokaz:* Neka je  $x_0 \in (a, b)$  fiksirana tačka i neka je  $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ . Funkcija  $F$  je korektno definisana, jer je  $f$  neprekidna funkcija na  $[\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\}] \subset (a, b)$ . Neka je  $x \in (a, b)$  proizvoljno i neka je  $h \in \mathbb{R}$  takvo da je  $x+h \in (a, b)$ . Tada analogono dokazu prethodne teoreme dobijamo  $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$ . Analogno prethodnoj teoremi dobijamo  $f(x + h\theta(x, h))$ , gde je  $\theta(x, h) \in [0, 1]$ . Otuda je  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x + h\theta(x, h)) = f(x)$ , tačnije  $F'(x) = f(x)$ . ■

**Primer 2.4** Navesti primer funkcije koja nije neprekidna, ali ima primitivnu funkciju.

Posmatrajmo funkciju  $F : (-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definisanu sa  $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ .

Proverimo neprekidnost u tački  $x_0 = 0$ . Sinus je ograničena funkcija pa važi  $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$  odakle je  $F(x)$  neprekidna. Odredimo njen izvod. Važi

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Levi i desni izvod u nuli ne postoje, pa ova funkcija nije neprekidna. Dakle, primer funkcije koja nije neprekidna, ali ima primitivnu funkciju je  $f(x)$ .

**Teorema 2.9** (Njutn-Lajbnicova formula) Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija na  $[a, b]$  i neka je  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  primitivna funkcija funkcije  $f$  na  $[a, b]$ . Pri čemu važi  $F'_+(a) = f(a)$   $F'_-(b) = f(b)$ . Tada je

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

*Dokaz:* Neka je  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa  $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Na osnovu prethodnih teorema znamo da za svako  $x \in [a, b]$  važi  $\varphi'(x) = f(x)$ , tačnije,  $\varphi$  je primitivna funkcija funkcije  $f$ . Stoga, postoji  $C \in \mathbb{R}$ , takvo da za svako  $x \in [a, b]$  važi  $\varphi(x) = F(x) + C$  i  $\varphi(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ . Sledi da je

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \varphi(b) = F(b) + C = F(b) + C + \varphi(a) - \varphi(a) \\ &= F(b) + C + \varphi(a) - F(a) - C = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

■

## 2.5 Smena promenljive i parcijalna integracija u određenom integralu

**Teorema 2.10** (Teorema o smeni promenljive) Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija na  $[a, b]$  i neka je  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  neprekidna funkcija na  $[\alpha, \beta]$ . Tada je

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} ((f \circ \varphi) \varphi')(t) dt.$$

*Dokaz:* Neka je  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  primitivna funkcija funkcije  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Tada je po Njutn-Lajbnicovoj formuli

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)). \quad (14)$$

S druge strane za funkciju  $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  definisanu sa  $\psi(t) = F(\varphi(t))$  važi

$$\psi'(t) = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = ((f \circ \varphi) \varphi')(t).$$

Dakle, funkcija  $\psi$  je primitivna funkcija funkcije  $(f \circ \varphi) \varphi'$  na intervalu  $[\alpha, \beta]$ , odakle važi

$$\int_{\alpha}^{\beta} ((f \circ \varphi) \varphi')(t) dt = \psi(\beta) - \psi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)). \quad (15)$$

Iz (14) i (15) dobijamo  $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} ((f \circ \varphi) \varphi')(t) dt$  što je kraj dokaza. ■

**Teorema 2.11** (*Teorema o parcijalnoj integraciji*) Neka su  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidno diferencijabilne funkcije na  $[a, b]$ . Tada je

$$\int_a^b (uv)'(x) \, dx = (uv)(b) - (uv)(a) - \int_a^b (u'v)(x) \, dx.$$

*Dokaz:* Po Njutm-Lajbnicovoj formuli važi

$$\int_a^b (uv)'(x) \, dx = (uv)(b) - (uv)(a). \quad (16)$$

Zbog linearnosti određenih integrala važi

$$\int_a^b (uv)'(x) \, dx = \int_a^b (u'v + uv')(x) \, dx = \int_a^b (u'v)(x) \, dx + \int_a^b (uv')(x) \, dx. \quad (17)$$

Iz jednakosti (16) i (17) važi

$$\int_a^b (uv')(x) \, dx = \int_a^b (uv)'(x) \, dx - \int_a^b (u'v)(x) \, dx = (uv)(b) - (uv)(a) - \int_a^b (u'v)(x) \, dx.$$

■