

MATEMATIČKI FAKULTET

Odgovori na teorijska ispitna pitanja iz analize 2

Radili

Lazar Jovanović 34/2023

Jana Vuković 124/2022

Profesor

dr Marek Svetlik

Beograd, 2024/2025

Sadržaj

1	Neodređeni integrali	2
1.1	Primitivna funkcija	2
1.2	Definicija i osnovna svojstva neodređenog integrala	3
1.3	Metode integracije	5
1.4	Integracija racionalnih funkcija	9
1.5	Integracija trigonometrijskih funkcija	12
2	Određeni integrali	13
2.1	Definicija određenog integrala	13
2.2	Integrabilnost nekih klasa funkcija	18
2.3	Svojstva određenog integrala	18
2.4	Veza određenog integrala i izvoda. Njutn-Lajbnicova formula	21
2.5	Smena promenljive i parcijalna integracija u određenom integralu	22

1 Neodređeni integrali

1.1 Primitivna funkcija

Posmatrajmo neku funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, na primer $f(x) = x^2$. Možemo da pronademo koeficijent pravca u tački $x_0 \in \mathbb{R}$ računanjem izraza $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. U našem primeru dobijamo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^2 - (x_0)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h = 2x_0$. Dakle, koeficijent pravca funkcije f u tački x_0 jeste broj $2x_0$. Na ovaj način imamo određenu novu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisanu sa $\varphi(x) = 2x$. Uobičajeno je da funkciju φ nazivamo izvodna funkcija (izvod, prvi izvod) funkcije f . Funkciju φ drugačije označavamo sa f' .

Sada razmotrimo obratan problem. Odredimo funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ako je poznato da je funkcija $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f'(x) = 2x$. Iz prošlog primera možemo da zaključimo da je $f(x) = x^2$ jedno rešenje. Zapitajmo se da li je i jedino. Nije, na primer funkcija $f(x) = x^2 + 1$ je takođe rešenje.

Pokušajmo da odredimo funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ako je poznato da je

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Takvo f ne postoji, jer funkcija sgn ima prekid prve vrste.

Podsetnik teoreme: Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Tada funkcija f' ne može imati prekide prve vrste.

Podsetnik definicije prekida prve vrste: Za funkciju f , tačka x_0 je prekid prve vrste ako postoje konačni $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ i različiti su.

Definicija 1.1 Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Funkciju $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nazivamo primitivna funkcija za funkciju f na intervalu (a, b) ako je funkcija F diferencijabilna na (a, b) i za svako $x \in (a, b)$ važi $F'(x) = f(x)$.

Prirodno se postavljaju pitanja da li za datu funkciju postoji primitivna funkcija i ako postoji koliko primitivnih funkcija ima. O broju primitivnih funkcija nam govori sledeći stav.

Stav 1.1 Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ i neka je $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija za funkciju f na intervalu (a, b) i neka je $C \in \mathbb{R}$ proizvoljno. Tada je funkcija $G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, definisana sa $G(x) = F(x) + C$, primitivna funkcija za funkciju f na intervalu (a, b) .

Dokaz: G je diferencijabilna na (a, b) jer je zbir dve diferencijabilne funkcije i za svako x iz intervala (a, b) važi $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$, što smo i hteli da dokažemo. ■

Ovim smo dokazali da ako je $F_1(x)$ primitivna funkcija, onda je i $F_1(x) + C$ primitivna funkcija. Sledeće pitanje je da li može da postoji neka funkcija $F_2(x)$ koja nije ovog oblika. O tome nam govori sledeća teorema.

Teorema 1.1 Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ i neka su $F_1, F_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivne funkcije za funkciju f na intervalu (a, b) . Tada postoji $C \in \mathbb{R}$ takvo da za svako $x \in (a, b)$ važi $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Dokaz: Neka je funkcija $G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Tada važi

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Izaberimo proizvoljne $x_1, x_2 \in (a, b)$ takve da važi $x_1 < x_2$. Dokažimo da je $G(x_1) = G(x_2)$.

- (1) G je neprekidna na $[x_1, x_2] \subset (a, b)$.
- (2) G je diferencijabilna na $(x_1, x_2) \subset (a, b)$.

Iz (1) i (2), a na osnovu Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti, sledi da postoji $x_0 \in (x_1, x_2)$ takvo da

$$G(x_1) - G(x_2) = G'(x_0)(x_2 - x_1) = 0(x_2 - x_1) = 0.$$

Dakle, $G(x_1) = G(x_2)$. Kako su x_1 i x_2 proizvoljni, sledi da je G konstantna funkcija. Važi da postoji $C \in \mathbb{R}$ takvo da za svako $x \in (a, b)$ važi jednakost $C = G(x) = F_1(x) - F_2(x)$, odakle je $F_1(x) = F_2(x) + C$. ■

Podsetnik Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti: Neka je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na (a, b) . Tada će postojati tačka $x_0 \in (a, b)$ takva da važi

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

Primer 1.1 Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa: $f(x) = 2x$. Odrediti:

a) sve primitivne funkcije za funkciju f .

To su funkcije $x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

b) funkciju $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koja je primitivna za funkciju f i za koju važi $g(0) = \sqrt{2}$ i $g(x) = x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Rešenje je $g(x) = x^2 + \sqrt{2}$.

Primer 1.2 Odrediti sve dvaput diferencijabilne funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za svako $x \in \mathbb{R}$ važi $f''(x) = 0$.

Ako je $(f'(x))' = 0$ tada pogađanjem dobijamo $f'(x) = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$ i $f(x) = C_1x + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$. v cv
Rešenje je $f(x) = C_1x + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

1.2 Definicija i osnovna svojstva neodređenog integrala

Definicija 1.2 Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Neodređeni integral funkcije f na intervalu (a, b) je skup svih primitivnih funkcija za funkciju f na intervalu (a, b) . Neodređeni integral funkcije f obeležavamo sa $\int f(x) dx$. Formalno

$$\int f(x) dx = \left\{ F \mid F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, (\forall x \in (a, b)) (F'(x) = f(x)) \right\}.$$

Neka je $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ proizvoljna primitivna funkcija za funkciju f na (a, b) . Tada je

$$\int f(x) dx = \left\{ G \mid G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, (\exists C \in \mathbb{R}) (\forall x \in (a, b)) (G(x) = F(x) + C) \right\}. \quad (1)$$

Jednakost (1) skraćeno zapisujemo na sledeći način

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Napomena: U jednakosti (2) ne vidi se interval (a, b) što stvara potencijalnu opasnost.

Primer 1.3 Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Naći integral $\int (a_n x^n + \dots + a_0) dx$.

Nagađanjem možemo da dodemo do rešenja: $\int (a_n x^n + \dots + a_0) dx = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \dots + a_0 x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Primer 1.4 Naći $\int \frac{1}{x} dx$.

Neka je $f(x) = \frac{1}{x}$. Nije naglašeno na kom intervalu rešavamo integral, zbog čega uzimamo domen funkcije $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Imamo dva intervala pa posmatramo dva slučaja.

1. slučaj: $x \in (0, +\infty)$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C_1 = \ln |x| + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$.

2. slučaj: $x \in (-\infty, 0)$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C_2 = \ln |x| + C_2, C_2 \in \mathbb{R}$.

Bitno je naglasiti da se konstante C_1 i C_2 odnose na intervale. One u opštem slučaju ne moraju da budu jednake. U sledećem primeru vidimo gde može da nastane problem.

Primer 1.5 Odrediti funkciju $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, takvu da $f(1) = 0$, $f(-1) = 1$ i za svako $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ važi $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Pogrešno rešenje: Iz prethodnog primera dobijamo $f(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$. Ubacivanjem vrednosti dobijamo $f(1) = 0 = \ln(1) + C = C$ i $f(-1) = 1 = \ln(1) + C = C$. Dobijamo da je $C = 0 = 1$, što je kontradikcija.

Tačno rešenje:

Posmatrajmo $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ definisanu sa

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x) + 1, & x < 0 \end{cases}.$$

Njen izvod je

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}.$$

Dakle, funkcija f je tražena funkcija jer važi $f(1) = 0$ i $f(-1) = 1$. U ovom primeru je $C_1 = 0$, a $C_2 = 1$.

Stav 1.2 Neka su $f_1, f_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije koje imaju primitivne funkcije na (a, b) i neka su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Tada funkcija $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ima primitivnu funkciju na (a, b) i važi:

$$\int (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) dx = \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx.$$

Dokaz: Neka je funkcija $F_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija za f_1 i neka je funkcija $F_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija za f_2 . Tada, po definiciji primitivne funkcije, za svako $x \in (a, b)$ važe jednakosti $F_1'(x) = f_1(x)$ i $F_2'(x) = f_2(x)$. Odatle zaključujemo

$$(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2)'(x) = \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x).$$

Ako krenemo od desne strane jednakosti koju dokazujemo i primenimo prethodne jednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx &= \lambda_1 (F_1(x) + C_1) + \lambda_2 (F_2(x) + C_2) \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C \\ &= (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2)(x) + C \\ &= \int (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) dx, \end{aligned}$$

gde su $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, a $C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$. Ovim završavamo dokaz. ■

Primer 1.6 Naći $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \cos \frac{x}{3} - 5 \cdot 2^x \right) dx$, $x > 0$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{\sqrt{x}} dx + \int \cos \frac{x}{3} dx - 5 \int 2^x dx \\ &= 6\sqrt{x} + C_1 + 3 \sin \frac{x}{3} + C_2 - 5 \frac{2^x}{\ln 2} - 5C_3 \\ &= 6\sqrt{x} + 3 \sin \frac{x}{3} - 5 \frac{2^x}{\ln 2} + C, \end{aligned}$$

gde su $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$, a $C = C_1 + C_2 - 5C_3$.

Tablica integrala:	
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x \in (0, +\infty) \quad \int x^\alpha dx$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \quad \int x^n dx$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int x^{-n} dx$	$\frac{1}{1-n} x^{1-n} + C_1, x \in (-\infty, 0)$ $\frac{1}{1-n} x^{1-n} + C_2, x \in (0, +\infty)$
$x \in \mathbb{R} \quad \int x^{-1} dx$	$\ln x + C_1, x \in (-\infty, 0)$ $\ln x + C_2, x \in (0, +\infty)$
$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R} \quad \int a^x dx$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$
$x \in \mathbb{R} \quad \int \sin x dx$	$-\cos x + C$
$x \in \mathbb{R} \quad \int \cos x dx$	$\sin x + C$
$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi \right) \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C_k, x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$
$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, \pi + k\pi) \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\operatorname{ctg} x + C_k, x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$x \in (-1, 1) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\arcsin x + C$
$x \in \mathbb{R} \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx$	$\operatorname{arctg} x + C$
$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int x^0 dx$	$x + C_1, x \in (-\infty, 0)$ $x + C_2, x \in (0, +\infty)$

1.3 Metode integracije

Teorema 1.2 (Teorema o smeni promenljive 1) Neka je $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija za funkciju $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ i neka je $g : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ diferencijabilna funkcija na (α, β) . Tada postoji primitivna funkcija za funkciju $(f \circ g)g' : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ i važi

$$\int ((f \circ g)g')(x) dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dokaz: Neka je $x \in (a, b)$ proizvoljno. Tada

$$\begin{aligned}(F(g(x)) + C)' &= ((F \circ g)(x) + C)' = ((F \circ g)(x))' + 0 \\ &= F'(g(x)) g'(x) = f(g(x)) g'(x) \\ &= ((f \circ g)g')(x).\end{aligned}$$

■

Primer 1.7 Neka su $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Naći $\int (ax + b)^n dx$.

Neka su $f(t) = t^{n+1}$ i $g(x) = ax + b$. Tada važi $F(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$ i $g'(x) = a$. Primenom [teoreme o smeni promenljive 1](#) dobijamo

$$\begin{aligned}\int (ax + b)^n dx &= \int f(g(x)) dx = \int \frac{1}{a} f(g(x)) g'(x) dx \\ &= \frac{1}{a} \int f(g(x)) g'(x) dx \\ &= \frac{1}{a} F(g(x)) + C \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{n+1} (ax + b)^{n+1}.\end{aligned}$$

Primitivna funkcija koju smo dobili je definisana na $x \in \mathbb{R}$ za $n > 0$.

Za $n \in \mathbb{Z} \cap ((-\infty, -1) \cup \{0\})$ je definisana na $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right) \cup \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$.

Napomena: Izdvajamo slučaj kada je $n = 0$ jer za $x = -\frac{b}{a}$ dobijamo 0^0 . Iako važi $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1$, izraz 0^0 nije definisan jer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^y$ ne postoji.

Primer 1.8 Naći $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$.

Neka su $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ i $g(x) = e^x + 1$. Tada važi $F(t) = 2\sqrt{t}$ i $g'(x) = e^x$. Primenom [teoreme o smeni promenljive 1](#) dobijamo

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx &= \int f(g(x)) e^x dx = \int f(g(x)) g'(x) dx \\ &= F(g(x)) + C \\ &= 2\sqrt{e^x + 1}.\end{aligned}$$

Teorema 1.3 (Teorema o smeni promenljive 2) Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, neka je $g : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ diferencijabilna funkcija takva da postoji $g^{-1} : (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$ koja je takođe diferencijabilna i neka je $F : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija za funkciju $(f \circ g)g' : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$. Tada postoji primitivna funkcija za funkciju f i važi: $\int f(x) dx = F(g^{-1}(x)) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Izaberimo proizvoljno $x \in (a, b)$. Tada

$$\begin{aligned}(F(g^{-1}(x)) + C)' &= (F(g^{-1}(x)))' + 0 = F'(g^{-1}(x)) (g^{-1})'(x) \\ &= ((f \circ g)g')(g^{-1}(x)) (g^{-1})'(x) \\ &= (f \circ g)(g^{-1}(x)) g'(g^{-1}(x)) (g^{-1})'(x) \\ &= (f(x)) (g \circ g^{-1})'(x) = f(x) x' = f(x).\end{aligned}$$

■

Pogledajmo sada par primera koji ilustruju kad smemo da koristimo [teoremu 1.3](#).

Primer 1.9 Neka je $g : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ definisano sa $g(t) = e^t$ i neka je $g^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definisano sa $g^{-1}(x) = \ln x$.

Funkcije g i g^{-1} su diferencijabilne na svojim domenima pa možemo primeniti teoremu.

Primer 1.10 Neka je $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisano sa $g(t) = t^3$ i neka je $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisano sa $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu. Proverimo da li je g^{-1} diferencijabilna u nuli:

$$(g^{-1})'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^{-1}(h) - g^{-1}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$$

Dakle, nije diferencijabilno, zbog čega ne može primeniti teoremu.

Primer 1.11 Neka je $g : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ definisano sa $g(t) = t^3$ i neka je $g^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ definisano sa $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu. Za izvod funkcije g^{-1} dobijamo: $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Ovo je definisano na celom domenu pa možemo da primenimo teoremu.

Sledi primer korišćenja [teoreme 1.3](#).

Primer 1.12 Neka je $a > 0$. Naći $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Neka je $f : (-a, a) \rightarrow (0, a]$ definisano sa $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ i neka je $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-a, a)$ definisano sa $g(x) = a \sin x$. Tada je $g^{-1} : (-a, a) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definisano sa $g^{-1}(x) = \arcsin \frac{x}{a}$.

Izvod $g'(x) = a \cos x$ je definisan na celom domenu pa možemo da koristimo [teorem 1.3](#). Zbog preglednijeg zapisa, neka je $g^{-1}(x) = t$.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int f(x) dx = F(g^{-1}(x)) + C = \int ((f \circ g)'(t)) dt = \int a \cos(t) \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(t)} dt \\ &= \int a \cos(t) \sqrt{a^2 (1 - \sin^2(t))} dt = \int a^2 \cos(t) \sqrt{1 - \sin^2(t)} dt = \int a^2 \cos^2(t) dt \\ &= \int \frac{a^2}{2} (1 + \cos(2t)) dt = \int \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \cos(2t) dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin(2t) + C. \end{aligned}$$

Dobili smo rešenje integrala, ali ovo rešenje možemo još da sredimo:

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \sin \left(2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} 2 \sin \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) \cos \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) + C && \text{(formula za polovinu ugla sinusa)} \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \frac{x}{a} \cos \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) + C && \text{napomena} \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{ax}{2} \sqrt{\cos^2 \left(\arcsin \frac{x}{a} \right)} + C && \text{(kosinus na domenu je pozitivan)} \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{ax}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \left(\arcsin \frac{x}{a} \right)} + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{ax}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C. \end{aligned}$$

Napomena: Iako važi da je $\sin(\arcsin(x)) = x$, ne mora da važi da je $\arcsin(\sin(x)) = x$.

Na kraju možemo da proverimo da li smo dobili tačno rešenje tako što uradimo izvod primitivne funkcije.

Opisali smo kako se ponaša integral linearnih kombinacije funkcija i kako se uvode smene. Ostaje da vidimo šta se dešava sa integralom proizvoda dve funkcije. O tome nam govori sledeća teorema.

Teorema 1.4 (Teorema o parcijalnoj integraciji) Neka su $u, v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije. Tada funkcija $uv' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ima primitivnu funkciju ako i samo ako funkcija $u'v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ima primitivnu funkciju. Važi

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx.$$

Dokaz: Neka je $x \in (a, b)$ proizvoljno. Tada

$$(uv)'(x) = (u(x) v(x))' = u'(x) v(x) + u(x) v'(x) \quad (3)$$

Pretpostavimo da $u'v$ ima primitivnu funkciju. Tada iz (3) dobijamo

$$u(x) v'(x) = (u(x) v(x))' - u'(x) v(x) \quad (4)$$

Kako $(u(x) v(x))'$ i $u'(x) v(x)$ imaju primitivne funkcije, iz (4) sledi da je i $u(x) v'(x)$ ima. Osim toga važi

$$\int u(x) v'(x) dx = \int (u(x) v(x))' dx - \int u'(x) v(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx.$$

Drugi smer dokaza je potpuno analogan. ■

Primer 1.13 Naći $\int e^x \sin x dx$.

Primenjujemo [teorem o parcijalnoj integraciji](#) za $u(x) = e^x$ i $v(x) = -\cos x$:

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

Ostaje da se izračuna $\int e^x \cos x dx$. Ponovo primenjujemo [teorem o parcijalnoj integraciji](#), ovaj put za $u(x) = e^x$ i $v(x) = \sin x$:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Uvrstimo dobijeni izraz u prethodnu jednakost:

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \\ 2 \int e^x \sin x dx &= -e^x \cos x + e^x \sin x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\ \int e^x \sin x dx &= \frac{1}{2} (-e^x \cos x + e^x \sin x) + C, \quad C = \frac{C_1}{2}. \end{aligned}$$

Primer 1.14 Naći $\int \frac{1}{x} dx$ za $x > 0$.

Iskoristićemo [teorem o parcijalnoj integraciji](#) na $u(x) = \frac{1}{x}$ i $v(x) = x$. Dobijamo jednakost

$$\int \frac{1}{x} dx = \frac{x}{x} + \int \frac{1}{x} = 1 + \int \frac{1}{x}.$$

Greška koja se često pravi je da se integrali skrate i da se dobije $1 = 0$, što znači da ovaj integral ne postoji. Ovo nije tačno jer ovu jednakost možemo da zapišemo i kao $F + C_1 = 1 + F + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Ako skratimo primitivne funkcije dobijamo vezu između konstanti, što nam nije od pomoći. Metodom pogađanja rešenja dobijamo

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.4 Integracija racionalnih funkcija

Integraciju racionalnih funkcija možemo da rešavamo po algoritmu. Potrebno je da znamo rešenja integrala polinoma i integrala oblika $\int \frac{A}{x-a} dx$, $\int \frac{1}{(x-a)^k} dx$, $\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c} dx$ i $\int \frac{Mx+N}{(x^2+bx+c)^k} dx$, gde su $A, a, M, N, b, c \in \mathbb{R}$, $b^2 - 4c < 0$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Integral polinoma već znamo, a u sledećim lemapa ćemo pokazati proces nalaženja ovih integrala.

Lema 1.1 Važi $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C$, gde su $A, a, C \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(t) = \frac{A}{t}$ i funkcija $g : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definisana sa $g(x) = x - a$. Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu, gde je $g'(x) = 1$, a primitivna funkcija funkcije f je funkcija $F(t) = A \ln |t|$. Tada možemo da primenimo [teoremu 1.2](#):

$$\int \frac{A}{x-a} dx = \int ((f \circ g) g') (x) dx = F(g(x)) + C = A \ln |x-a| + C.$$

Napomenimo da C za $x > a$ i C za $x < a$ mogu biti različiti. ■

Lema 1.2 Važi $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$, gde su $A, a, C \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Dokaz: Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(t) = \frac{A}{t^k}$ i funkcija $g : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definisana sa $g(x) = x - a$. Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu, gde je $g'(x) = 1$, a primitivna funkcija funkcije f je funkcija $F(t) = \frac{A}{(1-k)t^{k-1}}$. Tada možemo da primenimo [teoremu 1.2](#):

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \int ((f \circ g) g') (x) dx = F(g(x)) + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

■

Lema 1.3 Važi $\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2+bx+c) + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}} \arctg\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right) + C$, gde su $M, N, b, c, C \in \mathbb{R}$, $b^2 - 4c < 0$.

Dokaz: Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(t) = \frac{Mt}{t^2+1} + \frac{2N-bM}{(t^2+1)\sqrt{4c-b^2}}$ i funkcija $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $g(x) = \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}$. Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu, gde je $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}$. Potrebno je da izračunamo primitivnu funkciju

$$\begin{aligned} \int f(t) dt &= \int \frac{Mt}{t^2+1} + \frac{2N-bM}{(t^2+1)\sqrt{4c-b^2}} dt \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}} \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= \frac{M}{2} \ln(t^2+1) + \frac{2N-bM}{\sqrt{4c-b^2}} \arctg t + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\ &= F(t) + C_1. \end{aligned}$$

Tada možemo da primenimo [teorem o smeni promenljive 1](#):

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx + N}{x^2 + bx + c} dx &= \int ((f \circ g)'(x)) dx \\
&= F(g(x)) + C_1 \\
&= \frac{M}{2} \ln \left(\left(\frac{2x + b}{\sqrt{4c - b^2}} \right)^2 + 1 \right) + \frac{2N - bM}{\sqrt{4c - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x + b}{\sqrt{4c - b^2}} \right) + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\
&= \frac{M}{2} \ln \left(\frac{4x^2 + 4xb + b^2 + 4c}{4c - b^2} \right) + \frac{2N - bM}{\sqrt{4c - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x + b}{\sqrt{4c - b^2}} \right) + C_1 \\
&= \frac{M}{2} \left(\ln(x^2 + bx + c) - \ln \left(c - \frac{b^2}{4} \right) \right) + \frac{2N - bM}{\sqrt{4c - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x + b}{\sqrt{4c - b^2}} \right) + C_1 \\
&= \frac{M}{2} \ln(x^2 + bx + c) + \frac{2N - bM}{\sqrt{4c - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x + b}{\sqrt{4c - b^2}} \right) + C, \quad C = C_1 + \frac{M}{2} \ln \left(c - \frac{b^2}{4} \right).
\end{aligned}$$

■

Lema 1.4 Važi $\int \frac{Mx + N}{(x^2 + bx + c)^k} dx = \frac{M}{2} \frac{1}{(1 - k)(x^2 + bx + c)^{k-1}} + \left(N - \frac{Mb}{2} \right) I_k$, gde su $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $M, N, b, c \in \mathbb{R}$, $b^2 - 4c < 0$, $I_k = \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx$ i naći vezu između I_k i I_{k-1} .

Dokaz: Prvo ćemo početni integral razložiti na dva lakša

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx + N}{(x^2 + bx + c)^k} dx &= \int \frac{\frac{M}{2}(2x + b) - \frac{Mb}{2} + N}{(x^2 + bx + c)^k} dx \\
&= \int \frac{\frac{M}{2}(2x + b)}{(x^2 + bx + c)^k} dx + \int \frac{N - \frac{Mb}{2}}{(x^2 + bx + c)^k} dx \\
&= \frac{M}{2} \int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^k} dx + \left(N - \frac{Mb}{2} \right) \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx.
\end{aligned}$$

Prvi integral možemo da rešimo [teoremom o smeni promenljive 1](#). Neka je funkcija $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ definisana sa $f(t) = \frac{1}{t^k}$ i neka je funkcija $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definisana sa $g(x) = x^2 + bx + c$. Funkcija g je diferencijabilna na svom domenu i važi $g'(x) = 2x + b$. Jedna od primitivnih funkcija funkcije f je $F(t) = \frac{1}{(1 - k)t^{k-1}}$. Primenom [teoreme o smeni promenljive 1](#) dobijamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^k} dx &= \int ((f \circ g)'(x)) dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{(1 - k)(x^2 + bx + c)^{k-1}} + C.
\end{aligned}$$

Za drugi integral koristimo nov metod rešavanja. Neka je $I_k = \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx$. Želimo da nađemo vezu između I_k i I_{k-1} jer onda rekursivno možemo da rešimo integral I_k (znamo rešenje I_1 iz [leme 1.3](#)). Koristićemo [teorem 1.4](#). Neka su $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisane sa $u(x) = \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k}$ i $v(x) = x$. Funkcije u i v su diferencijabilne na svojim domenima i važe jednakosti $u'(x) = -\frac{(2x + b)k}{(x^2 + bx + c)^{k+1}}$ i $v'(x) = 1$. Primenom

teoreme o parcijalnoj integraciji dobijamo

$$\begin{aligned}
I_k &= \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx = \int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx \\
&= \frac{x}{(x^2 + bx + c)^k} + k \int \frac{2x^2 + 2bx + 2c - bx - 2c}{(x^2 + bx + c)^{k+1}} dx \\
&= \frac{x}{(x^2 + bx + c)^k} + 2k \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx - k \int \frac{bx + 2c}{(x^2 + bx + c)^{k+1}} dx \\
(1 - 2k) I_k &= \frac{x}{(x^2 + bx + c)^k} - k \int \frac{bx + 2c}{(x^2 + bx + c)^{k+1}} dx \\
&= \frac{x}{(x^2 + bx + c)^k} - k \int \frac{\frac{b}{2}(2x + b) - \frac{b^2}{2} + 2c}{(x^2 + bx + c)^{k+1}} dx \\
&= \frac{x}{(x^2 + bx + c)^k} + \frac{b}{2} \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} - \left(2c - \frac{b^2}{2}\right) k \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^{k+1}} dx \\
&= \frac{x + \frac{b}{2}}{(x^2 + bx + c)^k} - \left(2c - \frac{b^2}{2}\right) k I_{k+1}.
\end{aligned}$$

Odredili smo vezu između I_k i I_{k+1} , pomeranjem indeksa za jedan naniže dobijamo vezu između I_{k-1} i I_k

$$I_k = \frac{2x + b}{(4c - b^2)(x^2 + bx + c)^k} - \frac{2 - 4k}{4c - b^2} I_{k-1}.$$

Na kraju, vraćanjem svega u početni integral dobijamo

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + bx + c)^k} dx = \frac{M}{2} \frac{1}{(1 - k)(x^2 + bx + c)^{k-1}} + \left(N - \frac{Mb}{2}\right) I_k.$$

■

Stav 1.3 (Posledica osnovnog stava algebre) Svaki polinom sa koeficijentima iz polja kompleksnih brojeva stepena n , gde je $n \geq 1$, ima tačno n nula u polju kompleksnih brojeva, računajući njihovu višestrukost.

Dodatno, uz osnovni stav algebre važi da i ako je neki čisto imaginarni broj jedna nula polinoma, tada je i njegov kompleksno konjugovani par takođe nula. Zbog toga važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 1.1 Svaki polinom $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stepena n može se zapisati u obliku

$$P(x) = p(x - a_1)^{s_1} \dots (x - a_k)^{s_k} (x - d_{11})^{t_1} (x - d_{12})^{t_1} \dots (x - d_{l1})^{t_l} (x - d_{l2})^{t_l}$$

gde je p koeficijent uz najstariji član, a_i , $i \in \{1 \dots k\}$, realna nula polinoma P višestrukosti s_i , važi $(\forall i_1, i_2 \in \{1 \dots k\}) (a_{i_1} = a_{i_2} \iff i_1 = i_2)$, a d_{j1} i d_{j2} , $j \in \{1 \dots l\}$, konjugovano kompleksne nule polinoma P koje nisu realne višestrukosti t_j , važi

$$(\forall j_1, j_2 \in \{1 \dots l\}) ((d_{j_1 1} = d_{j_2 1} \iff j_1 = j_2) \wedge (d_{j_1 1} \neq d_{j_2 2})).$$

Takođe, zbog posledice osnovnog stava algebre, važi jednakost $n = s_1 + \dots + s_k + 2(t_1 + \dots + t_l)$. Dodatno, množenjem konjugovano kompleksnih nula dobijamo izraze oblika $x^2 + bx + c$, $b, c \in \mathbb{R}$, $b^2 - 4c < 0$, pa izraz možemo da zapišemo u obliku

$$P(x) = p(x - a_1)^{s_1} \dots (x - a_k)^{s_k} (x^2 + b_1x + c_1)^{t_1} \dots (x^2 + b_lx + c_l)^{t_l}.$$

Pokazali smo kako se nalaze integrali nekih vrsta racionalnih funkcija. Ostaje da pokažemo kako da proizvoljnu racionalnu funkciju svedemo na integrale ovih vrsta.

Algoritam 1.1 Neka funkcija $st(P)$ vraća stepen polinoma. Neka su dati polinomi $P, Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pri čemu važi $st(P) \geq 0$, $st(Q) \geq 1$. Ako polinom Q nema realnih nula, primitivnu funkciju za funkciju $\frac{P}{Q}$ nalazimo na intervalu $(-\inf, +\inf)$. Inače, ako su $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ realne nule polinoma Q , primitivnu funkciju tražimo na intervalima $(-\inf, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{k-1}, a_k), (a_k, +\inf)$. Integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ nalazimo sledećim koracima:

K1: Ako je $st(P) < st(Q)$ primenjujemo K2 na integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$.

Inače, vršimo deljenje polinoma P polinomom Q . Neka je S rezultat deljenja, a R ostatak pri deljenju. Tada važi $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$, $st(R) < st(Q)$. Zbog linearnosti integrala važi jednakost $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$. Znamo da izračunamo integral polinoma $S(x)$, primenjujemo K2 na integral $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$.

K2: U tvrđenju 1.1 smo naveli da se svaki polinom, pa i polinom Q , može zapisati u obliku

$$Q(x) = q(x - a_1)^{s_1} \dots (x - a_k)^{s_k} (x^2 + b_1x + c_1)^{t_1} \dots (x^2 + b_lx + c_l)^{t_l}.$$

gde je q koeficijent uz najstariji član, $a_i, i \in \{1 \dots k\}$, realna nula polinoma Q višestrukosti s_i , važi $(\forall i_1, i_2 \in \{1 \dots k\}) (a_{i_1} = a_{i_2} \iff i_1 = i_2)$, a $x^2 + b_jx + c_j, j \in \{1 \dots l\}$, proizvod $(x - d_{j1})$ i $(x - d_{j2})$, gde su d_{j1} i d_{j2} konjugovano kompleksne čisto imaginarne nule polinoma Q višestrukosti t_j , važi $(\forall j_1, j_2 \in \{1 \dots l\}) ((d_{j_11} = d_{j_21} \iff j_1 = j_2) \wedge (d_{j_11} \neq d_{j_22}))$. Takođe, zbog osnovnog stava algebre, važi jednakost $n = s_1 + \dots + s_k + 2(t_1 + \dots + t_l)$. Posle faktorizacije polinoma Q prelazimo na K3.

K3: U ovom koraku je cilj da odredimo konstante u brojiocu takve da važi jednakost

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{A_{i1}}{(x - a_i)} + \dots + \frac{A_{is_i}}{(x - a_i)^{s_i}} \right) + \sum_{j=1}^l \left(\frac{M_{j1}x + N_{j1}}{(x^2 + b_jx + c_j)} + \dots + \frac{M_{jt_j}x + N_{jt_j}}{(x^2 + b_jx + c_j)^{t_j}} \right).$$

To postizemo rešavanjem linearnih jednačina koje nastaju svodenjem svih sabiraka na isti imenilac. Nakon nalaženja ovih konstanti prelazimo na K4.

K4: Određujemo integral zbira koji smo dobili u prethodnom koraku. Svi sabirci su istih oblika kao i integrali koji su navedeni u lemana 1, 2, 3 i 4.

1.5 Integracija trigonometrijskih funkcija

Oznaku $R(u, v)$ koristimo za predstavljanje racionalnih funkcija sa argumenatima u i v . Na primer, neka je $R(u, v) = \frac{u + v}{u - v + 2}$. Integrale oblika $\int R(\sin x, \cos x) dx$ rešavamo smenom $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, definisanom svuda sem u $x \in \{(2l + 1)\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}$. Formalno, neka je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = R(\sin x, \cos x)$ i neka je funkcija $g_0 : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi, \pi)$ definisana sa $g_0(x) = 2 \arctg x$. Funkcija g_0 je bijektivna pa postoji inverz $g_0^{-1} : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definisan sa $g_0^{-1}(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Važi i da su g_0 i g_0^{-1} diferencijabilne. Potrebno je još da odredimo $(f \circ g_0)(x)$. Važe jednakosti

$$(f \circ g_0)(x) = f(g_0(x)) = R(\sin(g_0(x)), \cos(g_0(x))) = R(\sin(2 \arctg(x)), \cos(2 \arctg(x))).$$

Ostaje da redukujemo izraze $\sin(2 \arctg(x))$ i $\cos(2 \arctg(x))$.

$$\begin{aligned} \sin(2 \arctg(x)) &= 2 \sin(\arctg(x)) \cos(\arctg(x)) = 2 \operatorname{tg}(\arctg(x)) \cos^2(\arctg(x)) \\ &= \frac{2x}{\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{2x}{\operatorname{tg}^2(\arctg(x)) + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}; \\ \cos(2 \arctg(x)) &= \cos^2(\arctg(x)) - \sin^2(\arctg(x)) = \cos^2(\arctg(x)) (1 - \operatorname{tg}^2(\arctg(x))) \\ &= \frac{1 - x^2}{\frac{\sin^2(\arctg(x)) + \cos^2(\arctg(x))}{\cos^2(\arctg(x))}} = \frac{1 - x^2}{\operatorname{tg}^2(\arctg(x)) + 1} = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Oдавде dobijamo $(f \circ g_0)(x) = R\left(\frac{2x}{1 + x^2}, \frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$.

Možemo da odredimo integral $\int ((f \circ g_0) g'_0)(x) dx = \int R\left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \frac{2}{1+x^2} dx = F(x) + C_0$, $C_0 \in \mathbb{R}$, jer je to integral racionalne funkcije. Primenom [teoreme 1.3](#) dobijamo $\int f(x) dx = F(g_0^{-1}(x)) + C_0$.

Rešili smo integral na intervalu $(-\pi, \pi)$. Posmatrajmo intervale oblika $((2m-1)\pi, (2m+1)\pi)$, $m \in \mathbb{Z}$. Funkcija $g_m(x) = 2 \operatorname{arctg}(x) + 2m\pi$ je diferencijabilna i ima inverz $g_m^{-1}(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x+2m\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$. Analogno kao za g_0 dobijamo $(f \circ g_m)(x) = R(\sin(2 \operatorname{arctg}(x) + 2m\pi), \cos(2 \operatorname{arctg}(x) + 2m\pi)) = R\left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Dakle, analogno rešavanju integrala na intervalu $(-\pi, \pi)$ dobijamo $\int f(x) dx = F(g_m^{-1}(x)) + C_m$.

Rešili smo integrale na $\mathbb{R} \setminus \{(2l+1)\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}$. Zbog neprekidnosti mora da važi da je

$$(\forall l \in \mathbb{Z}) \left(\lim_{x \rightarrow (2l+1)\pi^-} F(g_l^{-1}(x)) + C_l = \lim_{x \rightarrow (2l+1)\pi^+} F(g_{l+1}^{-1}(x)) + C_{l+1} \right).$$

Nalaženjem veze između konstanti C_l i C_{l+1} rešavamo integral i u tačkama $(2l+1)\pi$, gde je l ceo broj, čime smo rešili integral na celom \mathbb{R} .

Napomenimo da izvođenje zavisi od konkretne funkcije f . Za f koje nije definisano na celom \mathbb{R} ćemo raditi presek \mathbb{R} sa D_f i posmatrati drugačije intervale, ali će postupak ostati analogan.

Primer 1.15 Odrediti integral $\int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx$.

Neka je $f(x) = \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5}$. Domen funkcije je \mathbb{R} . Primenjujemo prethodnu diskusiju

$$(\forall l \in \mathbb{R}) \quad (f \circ g_l)(x) = R\left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \frac{1}{\frac{4x}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{1+x^2} + 5} = \frac{1+x^2}{6x^2+4x+4}.$$

Ima l integrala oblika

$$\begin{aligned} \int ((f \circ g_l) g'_l)(x) dx &= \int \frac{1+x^2}{6x^2+4x+4} \frac{2}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{3(x^2+2\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}+\frac{5}{9})} = \int \frac{dx}{3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{5}{3}} \\ &= \frac{3}{5} \int \frac{dx}{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C_l. \end{aligned}$$

Dobijamo da je $I_l = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C_l$. Ostaje da nađemo leve i desne limese u nedefinisanim tačkama. Tada

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (2l+1)\pi^-} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C_l &= \lim_{x \rightarrow (2l+1)\pi^+} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C_{l+1} \\ \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_l &= -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_{l+1} \\ C_{l+1} &= C_l + \frac{\pi}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Tada je $C_l = \frac{l\pi}{\sqrt{5}} + C_0$. Važi da je $(2l-1)\pi < x < (2l+1)\pi$, odakle je $\frac{x-\pi}{2\pi} < l < \frac{x+\pi}{2\pi}$, $l = \left\lfloor \frac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor$.

Dobijamo da je rešenje integrala

$$\int f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left\lfloor \frac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor \frac{\pi}{\sqrt{5}} + C_0.$$

2 Određeni integrali

2.1 Definicija određenog integrala

Neka je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Želimo da definišemo $\int_a^b f(x) dx$.

Definicija 2.1 Neka su $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ tačke takve da važi $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Tada:

- skup intervala $\mathcal{P} = \{[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]\}$ nazivamo **podela** intervala $[a, b]$;
- tačke x_0, x_1, \dots, x_n nazivamo **podeone tačke** podele \mathcal{P} ;
- sa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, gde je $i \in \{1, \dots, n\}$, obeležavamo dužinu intervala $[x_{i-1}, x_i]$;
- skup svih podela intervala $[a, b]$ obeležavamo sa $\mathcal{P}[a, b]$;
- funkciju $\lambda : \mathcal{P}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definisanu sa $\lambda(\mathcal{P}) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \Delta x_i$ nazivamo **parametar** podele \mathcal{P} ;
- za podele $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathcal{P}[a, b]$ kažemo da je podela \mathcal{P}' finija od podele \mathcal{P} , odnosno da je podela \mathcal{P} grublja od podele \mathcal{P}' ako je skup podeonih tačaka podele \mathcal{P} podskup skupa podeonih tačaka podele \mathcal{P}' ;
- uređenu n -torku $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$ nazivamo **istaknute tačke** podele \mathcal{P} ;
- uređen par (\mathcal{P}, ξ) nazivamo **podela sa istaknutim tačkama** intervala $[a, b]$.

Definicija 2.2 Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i (\mathcal{P}, ξ) podela sa istaknutim tačkama intervala $[a, b]$. Tada zbir $\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ nazivamo **integralna suma** funkcije f za datu podelu sa istaknutim tačkama (\mathcal{P}, ξ) intervala $[a, b]$.

Definicija 2.3 Ako za $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $I \in \mathbb{R}$ važi

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall (\mathcal{P}, \xi) | \mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]) \lambda(\mathcal{P}) < \delta \implies |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| < \varepsilon.$$

tada kažemo da je I **Rimanov integral funkcije** f na intervalu $[a, b]$ i pišemo

$$I = \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \int_a^b f(x) dx.$$

Rimanov integral nazivamo i **određeni integral**.

Ako za funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ postoji Rimanov integral, kažemo da je funkcija f **R-integrabilna** na intervalu $[a, b]$.

Primer 2.1 Ispitati da li je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definisana sa $f(x) = c$, R-integrabilna i ako jeste, odrediti njen određeni integral.

Uzmimo proizvoljnu podelu \mathcal{P} i proizvoljan skup istaknutih tačaka ξ za podelu \mathcal{P} . Tada važi

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n c \Delta x_i = c(b - a). \quad (5)$$

Za svako $\varepsilon > 0$ važi $|\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - c(b - a)| = 0 < \varepsilon$, dakle možemo da izaberemo proizvoljno δ i važi $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = c(b - a)$.

Primer 2.2 Ispitati da li je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definisana sa $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ 0, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a, b] \end{cases}$, R -integrabilna i ako jeste, odrediti njen određeni integral.

Dokažimo da ova funkcija nije R -integrabilna.

Neka je \mathcal{P} proizvoljna podela intervala $[a, b]$. Neka je $\xi' = (\xi'_1, \dots, \xi'_n)$ skup istaknutih tačaka podele \mathcal{P} , gde je $\xi'_i \in \mathbb{Q}$, za svako $i \in \{1, \dots, n\}$ i važi

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi') = \sum_{i=1}^n f(\xi'_i) \Delta x_i = b - a. \quad (6)$$

i neka je $\xi'' = (\xi''_1, \dots, \xi''_n)$ skup istaknutih tačaka podele \mathcal{P} , gde je $\xi''_i \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, za svako $i \in \{1, \dots, n\}$ i važi

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi'') = \sum_{i=1}^n f(\xi''_i) \Delta x_i = 0. \quad (7)$$

Treba da dokažemo da za svako $I \in \mathbb{R}$ postoji $\varepsilon > 0$ takvo da za svako $\delta > 0$ postoji podela \mathcal{P} intervala $[a, b]$ sa istaknutim tačkama ξ takva da je $\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| \geq \varepsilon$.

Prvi slučaj je kad je $I \neq 0$.

Neka je $\varepsilon = |I|$, neka je δ proizvoljno, neka je $\mathcal{P} = \left\{ \left[a, a + \frac{b-a}{n} \right], \dots, \left[a + (n-1) \frac{b-a}{n}, b \right] \right\}$, gde je $\frac{b-a}{n} = \lambda(\mathcal{P}) < \delta$ i neka je ξ izabrano kao ξ'' . Tada važi

$$\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| = |0 - I| \geq |I| = \varepsilon.$$

Drugi slučaj je kad je $I = 0$.

Neka je $\varepsilon = b - a$, neka je δ proizvoljno, neka je $\mathcal{P} = \left\{ \left[a, a + \frac{b-a}{n} \right], \dots, \left[a + (n-1) \frac{b-a}{n}, b \right] \right\}$, gde je $\frac{b-a}{n} = \lambda(\mathcal{P}) < \delta$ i neka je ξ izabrano kao ξ' . Tada važi

$$\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| = |b - a - 0| \geq |b - a| = \varepsilon.$$

Primer 2.3 Ispitati da li je funkcija $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definisana sa $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, R -integrabilna i ako jeste, odrediti njen određeni integral.

Dokažimo da ova funkcija nije R -integrabilna.

Neka je podela $\mathcal{P} = \left\{ \left[0, \frac{1}{n} \right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1 \right] \right\}$ i neka je n -torka istaknutih tačaka $\xi = (\frac{1}{n^4}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n})$. Važi

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq \frac{f(\xi_1)}{n} = \frac{f(\frac{1}{n^4})}{n} = n.$$

Treba da dokažemo da za svako $I \in \mathbb{R}$ postoji $\varepsilon > 0$ takvo da za svako $\delta > 0$ postoji podela \mathcal{P} intervala $[a, b]$ sa istaknutim tačkama ξ takva da je $\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| \geq \varepsilon$.

Prvi slučaj je kad je $I \geq 0$.

Neka je $\varepsilon = 1$, neka je δ proizvoljno, neka je $\mathcal{P} = \left\{ \left[0, \frac{1}{n} \right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1 \right] \right\}$, gde je $\frac{1}{n} = \lambda(\mathcal{P}) < \delta$ i $n = [I] + 1 + k$, gde je $k \in \mathbb{N}$ i neka je ξ izabrano kao ξ'' . Tada važi

$$\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| \geq |n - I| = |[I] + 1 + k - I| \geq |k| \geq 1.$$

Drugi slučaj je kad je $I < 0$.

Neka je $\varepsilon = 1$, neka je δ proizvoljno, neka je $\mathcal{P} = \left\{ \left[0, \frac{1}{n} \right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1 \right] \right\}$, gde je $\frac{1}{n} = \lambda(\mathcal{P}) < \delta$ i neka je ξ izabrano kao ξ' . Tada važi

$$\lambda(\mathcal{P}) < \delta \wedge |\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) - I| \geq n - I \geq 1.$$

Teorema 2.1 Ako $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nije ograničena na $[a, b]$, onda ona nije R -integrabilna.

Definicija 2.4 Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena na svom intervalu i neka je \mathcal{P} podela intervala. Za $i \in \{1, \dots, n\}$ definišemo $m_i = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ i $M_i = \sup \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Tada:

- zbir $s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ nazivamo **donja Darbuova suma** funkcije f za datu podelu \mathcal{P} intervala $[a, b]$;
- zbir $S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ nazivamo **gornja Darbuova suma** funkcije f za datu podelu \mathcal{P} intervala $[a, b]$.

Definicija 2.5 Za svake dve podele $\mathcal{P}', \mathcal{P}'' \in \mathcal{P}[a, b]$ postoji finija podela $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]$. Ako je skup podeonih tačaka podele \mathcal{P} unija podeonih tačaka podele \mathcal{P}' i \mathcal{P}'' , tada se podela \mathcal{P} naziva **superpozicija** podele \mathcal{P}' i \mathcal{P}'' .

Stav 2.1 Dokazati da za $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathcal{P}[a, b]$, gde je skup podeonih tačaka podele \mathcal{P} podskup skupa podeonih tačaka podele \mathcal{P}' , važi

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}).$$

Dokaz: Dovoljno je dokazati slučaj kad je skup podeonih tačaka podele $\mathcal{P} \{x_0, \dots, x_n\}$, a skup podeonih tačaka podele $\mathcal{P}' \{x_0, \dots, x_{k-1}, x', x_k, \dots, x_n\}$. Neka je $s' = \sum_{i=1}^{k-1} m_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n m_i \Delta x_i$ i neka su $m'_k = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x']\}$ i $m''_k = \inf \{f(x) \mid x \in [x', x_k]\}$. Tada je

$$s(f, \mathcal{P}) = s' + m_k (x_k - x_{k-1})$$

i

$$s(f, \mathcal{P}') = s' + m'_k (x' - x_{k-1}) + m''_k (x_k - x').$$

Važi da je $m_k = \min(m'_k, m''_k)$, odakle dobijamo

$$\begin{aligned} m_k (x_k - x') + m_k (x' - x_{k-1}) &\leq m''_k (x_k - x') + m'_k (x' - x_{k-1}) \\ s' + m_k (x_k - x_{k-1}) &\leq s' + m''_k (x_k - x') + m'_k (x' - x_{k-1}) \\ s(f, \mathcal{P}) &\leq s(f, \mathcal{P}'). \end{aligned}$$

Treća nejednakost se slično dokazuje. ■

Stav 2.2 Neka su $\mathcal{P}', \mathcal{P}'' \in \mathcal{P}[a, b]$. Tada je $s(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}'')$.

Dokaz: Neka je \mathcal{P} superpozicija podele \mathcal{P}' i \mathcal{P}'' . Iz **prethodnog stava** važi da je

$$s(f, \mathcal{P}') \leq s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P})$$

i da je

$$s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}''),$$

odakle dobijamo

$$s(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}'').$$

Za $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ skup $\{s(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]\}$ je neprazan i prema **prethodnom stavu** ograničen odozgo brojem $S(f, \mathcal{P})$ za proizvoljno $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]$, pa prema aksiomi o egzistenciji supremuma postoji supremum ovog skupa. ■

Definicija 2.6 Donji Rimanov integral funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jeste

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \{s(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Za $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ skup $\{S(f, P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}$ je neprazan i prema [prethodnom stavu](#) ograničen odozdo brojem $s(f, \mathcal{P})$ za proizvoljno $P \in \mathcal{P}[a, b]$, pa prema teoremi o egzistenciji infimuma postoji infimum ovog skupa.

Definicija 2.7 *Gornji Rimanov integral funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jeste*

$$\int_a^b f(x) dx = \inf \{S(f, P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Jasno je da važi $\int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx}$.

Definicija 2.8 *Ako važi da je $\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx} = I$, onda broj I nazivamo **Rimanov integral** funkcije f na $[a, b]$ i pišemo*

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema 2.2 *$\varepsilon - \delta$ definicija Rimanovog integrala i definicija Rimanovog integrala preko gornjeg i donjeg Rimanovog integrala su ekvivalentne.*

Stav 2.3 *Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena. Tada je funkcija f R-integrabilna na $[a, b]$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $P \in \mathcal{P}[a, b]$ takvo da je $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.*

(\Rightarrow) Neka je ε proizvoljno. Na osnovu definicije infimuma skupa postoji $P' \in \mathcal{P}[a, b]$ takvo da je

$$\int_a^b f(x) dx \leq S(f, P') < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8)$$

Na osnovu definicije supremuma skupa postoji $P'' \in \mathcal{P}[a, b]$ takvo da je

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, P'') \leq \int_a^b f(x) dx. \quad (9)$$

Neka je \mathcal{P} superpozicija podela P' i P'' . Tada je zbog posledice [stava 2.1](#)

$$s(f, P'') \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq S(f, P'). \quad (10)$$

Iz (8) i (9) dobijamo

$$S(f, P') - s(f, P'') < \varepsilon, \quad (11)$$

dok iz (10) dobijamo

$$S(f, P) - s(f, P) \leq S(f, P') - s(f, P''). \quad (12)$$

Konačno, iz (11) i (12) važi

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon. \quad (13)$$

(\Leftarrow) Važi

$$\begin{aligned} s(f, P) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} \leq S(f, P) \\ 0 &\leq \overline{\int_a^b f(x) dx} - \int_a^b f(x) dx \leq S(f, P) - s(f, P) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

odakle je

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} = \int_a^b f(x) dx,$$

pa je po [definiciji 2.8](#) f R-integrabilna. ■

2.2 Integrabilnost nekih klasa funkcija

Teorema 2.3 Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a, b]$. Tada je funkcija f Riman integrabilna na $[a, b]$.

Podsetnik definicije monotonosti funkcije: Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je monotono rastuća ako važi

$$(\forall x_1, x_2 \in [a, b]) (x_1 \leq x_2) \implies (f(x_1) \leq f(x_2)),$$

a monotono opadajuća ako važi

$$(\forall x_1, x_2 \in [a, b]) (x_1 \leq x_2) \implies (f(x_1) \geq f(x_2)),$$

Teorema 2.4 Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotona funkcija na $[a, b]$. Tada je funkcija f Riman integrabilna na $[a, b]$.

Dokaz: Bez umanjavanja opštosti, pretpostavimo da je funkcija monotono rastuća na $[a, b]$. Primetimo najpre da je funkcija ograničena na $[a, b]$. Zaista, za svako $x \in [a, b]$ važi $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Pretpostavimo da funkcija nije konstantna, za konstantne funkcije već znamo da su R-integrabilne. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i neka je podela $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]$ takva da je parametar podele $\lambda(\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Tada je

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Dakle, važi $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$ za proizvoljno ε , pa po [stavu 2.3](#) važi da je f R-integrabilna na $[a, b]$. ■

Teorema 2.5 Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena funkcija na $[a, b]$ takva da je skup tačaka u kojima nije neprekidna konačan. Tada je funkcija f Riman integrabilna na $[a, b]$.

Teorema 2.6 Neka su $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ R-integrabilne funkcije na $[a, b]$ koje se razlikuju samo u konačno mnogo tačaka. Tada je

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Definicija 2.9 Skup svih Riman integrabilnih funkcija na intervalu $[a, b]$ označavamo sa $R[a, b]$.

2.3 Svojstva određenog integrala

Stav 2.4 Neka su $f, g \in R[a, b]$ i neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ i važi

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Dokaz: Neka je (\mathcal{P}, ξ) proizvoljna podela sa istaknutim tačkama na $[a, b]$. Tada

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha f + \beta g, \mathcal{P}, \xi) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) (\alpha f + \beta g)(\xi_i) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) ((\alpha f)(\xi_i) + (\beta g)(\xi_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) (\alpha f)(\xi_i) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) (\beta g)(\xi_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) + \beta \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) g(\xi_i) \\ &= \alpha \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) + \beta \sigma(g, \mathcal{P}, \xi).\end{aligned}$$

Po definiciji važi $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \int_a^b f(x) dx$ i $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(g, \mathcal{P}, \xi) = \int_a^b g(x) dx$. Tada

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx &= \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(\alpha f + \beta g, \mathcal{P}, \xi) \\ &= \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} (\alpha \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) + \beta \sigma(g, \mathcal{P}, \xi)) \\ &= \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \alpha \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) + \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \beta \sigma(g, \mathcal{P}, \xi) \\ &= \alpha \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) + \beta \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(g, \mathcal{P}, \xi) \\ &= \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.\end{aligned}$$

■

Stav 2.5 Neka su $f, g \in R[a, b]$. Tada:

- ako je $fg \in R[a, b]$, ne mora da važi $\int_a^b (fg)(x) dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$;
- ako je $|f| \in R[a, b]$, ne mora da važi $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$;
- $\frac{1}{f} \in R[a, b]$, pod pretpostavkom da postoji $c > 0$ takvo da za svako $x \in [a, b]$ važi $|f(x)| > c$.

Stav 2.6 Neka je $f \in R[a, b]$ i $[c, d] \subset [a, b]$. Tada $f \in R[c, d]$.

Stav 2.7 Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $c \in (a, b)$. Tada $f \in R[a, b]$ ako i samo ako $f \in R[a, c]$ i $f \in R[c, b]$ i važi $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Definicija 2.10 Neka je $f : \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$. Tada $\int_a^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Definicija 2.11 Neka je $f \in R[a, b]$. Tada $\int_b^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} - \int_a^b f(x) dx$.

Definicija 2.12 Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $f : [\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}] \rightarrow \mathbb{R}$. Tada je f Riman integrabilna na $[\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}]$ i važi $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Stav 2.8 Neka je $f \in R[a, b]$ i $f(x) \geq 0$, za svako $x \in [a, b]$. Tada je $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Dokaz: Neka (\mathcal{P}, ξ) proizvoljna podela sa istaknutim tačkama na $[a, b]$. Tada je

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0.$$

Otuda je $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) \geq 0$, tačnije, $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. ■

Stav 2.9 Neka je $f \in R[a, b]$. Tada je

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Dokaz: Kako važi $f(x) - |f(x)| \leq 0$, za svako $x \in [a, b]$, sledi $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$. Takođe, važi $0 \leq |f(x)| + f(x)$, za svako $x \in [a, b]$, odakle je $-\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$. Dakle, $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$. ■

Stav 2.10 Neka su $f, g \in R[a, b]$ i neka za svako $x \in [a, b]$ važi $f(x) \leq g(x)$. Tada je

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Dokaz: Primetimo da je $g - f \in R[a, b]$ i da je $(g - f)(x) \geq 0$, za svako $x \in [a, b]$. Tada je po stavu 2.8 $\int_a^b (g - f)(x) dx \geq 0$, odakle dobijamo $\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$. ■

Stav 2.11 Neka je $f \in R[a, b]$ i neka su $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ i $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. Tada postoji $\mu \in [m, M]$ takvo da je

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b - a).$$

Dokaz: Za svako $x \in [a, b]$ važi:

$$\begin{aligned} m &\leq f(x) \leq M \\ m(b - a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \\ m &\leq \frac{1}{(b - a)} \int_a^b f(x) dx \leq M. \end{aligned}$$

Dakle, postoji $\mu \in [m, M]$, takvo da je $\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$. ■

Podsetnik Vajerštrasove teoreme: Ako je funkcija neprekidna na intervalu $[a, b]$, ona je ograničena i dostiže svoj maksimum i minimum.

Stav 2.12 Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a, b]$. Tada postoji $c \in [a, b]$ takvo da je

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Dokaz: Kako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ po [Vajerštrasovoj teoremi](#) važi da je $\inf_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ i $\sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. Neka su $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ i $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. Na osnovu prethodnog stava sledi da postoji $\mu \in [m, M]$ takvo da je $\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$. Kako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ sledi da je $f([a, b]) = [m, M]$. Otuda za $\mu \in [m, M]$ postoji $c \in [a, b]$ takvo da je $f(c) = \mu$. ■

2.4 Veza određenog integrala i izvoda. Njutn-Lajbnicova formula

Definicija 2.13 Neka je $f \in R[a, b]$. Ima smisla razmatrati funkciju $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definisanu sa $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$. Tada funkciju φ nazivamo **integral sa promenljivom gornjom granicom**.

Teorema 2.7 Funkcija φ je neprekidna na $[a, b]$.

Dokaz: Neka je $x_0 \in [a, b]$ proizvoljno. Dokažimo da je funkcija φ neprekidna u x_0 . Neka je $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada za $x \in [a, b]$ važi

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t)| dt \right| \leq M|x - x_0|.$$

Neka je $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Tada na osnovu $\varepsilon - \delta$ definicije važi

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in [a, b]) (|x - x_0| < \delta \rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon),$$

čime smo dokazali da je φ neprekidna u proizvoljnoj tački, zbog čega je neprekidna i na celom intervalu. ■

Teorema 2.8 Ako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ onda za funkciju φ važi da je diferencijabilna na (a, b) i važi $\varphi'_+(a) = f(a)$ i $\varphi'_-(b) = f(b)$.

Dokaz: Neka je $x \in [a, b]$ proizvoljno i $h \in \mathbb{R}$, takvo da je $x + h \in [a, b]$. Tada je

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Po [stavu 2.12](#) postoji $c \in [\min\{x, x+h\}, \max\{x, x+h\}]$ takvo da $\int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)(x+h-x)$. Neka je $c = x + h\theta(x, h)$, $\theta \in [0, 1]$. Tada je

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \frac{1}{h} f(x + h\theta(x, h))(x+h-x) = f(x + h\theta(x, h)).$$

Odatle dobijamo $\varphi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x + h\theta(x, h)) = f(x)$. Slično se dokazuje i za $\varphi'_+(a)$ i $\varphi'_-(b)$. ■

Tvrđenje 2.1 Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na (a, b) . Tada funkcija f ima primitivnu funkciju $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ na (a, b) .

Dokaz: Neka je $x_0 \in (a, b)$ fiksirana tačka i neka je $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$. Funkcija F je korektno definisana, jer je f neprekidna funkcija na $[\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\}] \subset (a, b)$. Neka je $x \in (a, b)$ proizvoljno i neka je $h \in \mathbb{R}$ takvo da je $x + h \in (a, b)$. Tada analogono dokazu prethodne teoreme dobijamo $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$. Analogno prethodnoj teoremi dobijamo $f(x + h\theta(x, h))$, gde je $\theta(x, h) \in [0, 1]$. Otuda je $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x + h\theta(x, h)) = f(x)$, tačnije $F'(x) = f(x)$. ■

Primer 2.4 Navesti primer funkcije koja nije neprekidna, ali ima primitivnu funkciju.

Posmatrajmo funkciju $F : (-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definisanu sa $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Proverimo neprekidnost u tački $x_0 = 0$. Sinus je ograničena funkcija pa važi $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ odakle je $F(x)$ neprekidna. Odredimo njen izvod. Važi

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Levi i desni izvod u nuli ne postoje, pa ova funkcija nije neprekidna. Dakle, primer funkcije koja nije neprekidna, ali ima primitivnu funkciju je $f(x)$.

Teorema 2.9 (Njutn-Lajbnicova formula) Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a, b]$ i neka je $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije f na $[a, b]$. Pri čemu važi $F'_+(a) = f(a)$ $F'_-(b) = f(b)$. Tada je

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz: Neka je $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$. Na osnovu prethodnih teorema znamo da za svako $x \in [a, b]$ važi $\varphi'(x) = f(x)$, tačnije, φ je primitivna funkcija funkcije f . Stoga, postoji $C \in \mathbb{R}$, takvo da za svako $x \in [a, b]$ važi $\varphi(x) = F(x) + C$ i $\varphi(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$. Sledi da je

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \varphi(b) = F(b) + C = F(b) + C + \varphi(a) - \varphi(a) \\ &= F(b) + C + \varphi(a) - F(a) - C = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

■

2.5 Smena promenljive i parcijalna integracija u određenom integralu

Teorema 2.10 (Teorema o smeni promenljive) Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a, b]$ i neka je $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ neprekidna funkcija na $[\alpha, \beta]$. Tada je

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} ((f \circ \varphi) \varphi')(t) dt.$$

Dokaz: Neka je $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tada je po Njutn-Lajbnicovoj formuli

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)). \quad (14)$$

S druge strane za funkciju $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ definisanu sa $\psi(t) = F(\varphi(t))$ važi

$$\psi'(t) = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = ((f \circ \varphi) \varphi')(t).$$

Dakle, funkcija ψ je primitivna funkcija funkcije $(f \circ \varphi) \varphi'$ na intervalu $[\alpha, \beta]$, odakle važi

$$\int_{\alpha}^{\beta} ((f \circ \varphi) \varphi')(t) dt = \psi(\beta) - \psi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)). \quad (15)$$

Iz (14) i (15) dobijamo $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} ((f \circ \varphi) \varphi')(t) dt$ što je kraj dokaza. ■

Teorema 2.11 (*Teorema o parcijalnoj integraciji*) Neka su $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilne funkcije na $[a, b]$. Tada je

$$\int_a^b (uv)'(x) \, dx = (uv)(b) - (uv)(a) - \int_a^b (u'v)(x) \, dx.$$

Dokaz: Po Njutm-Lajbnicovoj formuli važi

$$\int_a^b (uv)'(x) \, dx = (uv)(b) - (uv)(a). \quad (16)$$

Zbog linearnosti određenih integrala važi

$$\int_a^b (uv)'(x) \, dx = \int_a^b (u'v + uv')(x) \, dx = \int_a^b (u'v)(x) \, dx + \int_a^b (uv')(x) \, dx. \quad (17)$$

Iz jednakosti (16) i (17) važi

$$\int_a^b (uv)'(x) \, dx = \int_a^b (uv)'(x) \, dx - \int_a^b (u'v)(x) \, dx = (uv)(b) - (uv)(a) - \int_a^b (u'v)(x) \, dx.$$

■