Matematički fakultet

Odgovori na teorijska ispitna pitanja iz geometrije

Radio
Lazar Jovanović 34/2023

Profesor
dr Srđan Vukmirović

Beograd, 2024/2025

Sadržaj

1 Konvencije

Sve konvencije važe dok se ne naglasi drugačije.

Množenje i skalarni proizvod: Množenje se neće označavati posebnom oznakom, dok će se za skalarni proizvod koristiti oznaka $\cdot$.

Mase tačaka: Za tačku A, oznaka $A(m_A)$ znači da tačka A ima dodeljenu masu m_A. Podrazumevaće se i da se oznaka m_A odnosi na tačku A. Umesto A može da stoji proizvoljna oznaka tačke.

2 Pitanja

2.1 Vektori i osnovne operacije sa vektorima

Sabiranje i množenje skalarom, nula vektor, suprotan vektor, kolinearni i komplanarni vektori, jedinični vektor, Dokaz T1.1 (tvrđenja S1-S4).

Definicija vektora: Klasa ekvivalencije usmerenih duži koje imaju isti pravac, smer i intenzitet.

Sabiranje vektora: Pri sabiranju se vektori nadovezuju, posmatraju se samo početna i krajnja tačka.

Množenje vektora skalarom: Vektor $\alpha\overrightarrow{v}$ ima isti pravac kao $\overrightarrow{v}$, ima intenzitet $|\alpha||\overrightarrow{v}|$ i ima isti smer ako je $\alpha > 0$, a različit smer ako je $\alpha < 0$. Specijalno, ako je $\alpha = 0$, svaki vektor $\overrightarrow{v}$ postaje nula vektor.

Nula vektor: Vektor $\overrightarrow{v}$ je nula vektor (zapisujemo kao $\overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{AA}$) ako je njegov intenzitet jednak nuli. Nula vektor nema ni pravac ni smer.

Suprotni vektor: Suprotni vektor vektora $\overrightarrow{v}$ (zapisujemo sa $-\overrightarrow{v}$) ima isti intenzitet i pravac kao vektor $\overrightarrow{v}$, a suprotan smer. Takođe, suprotan vektor vektora $\overrightarrow{AB}$ možemo da zapišemo i kao $\overrightarrow{BA}$

Kolinearni vektori: Vektori su kolinearni ako pripadaju istoj pravoj.

Komplanarni vektori: Vektori su komplanarni ako pripadaju istoj ravni.

Jedinični vektor: Jedinični vektor je vektor koji je intenziteta 1. Od svakog ne-nula vektora možemo da napravimo jedinični vektor normalizacijom.

Normalizacija vektora: Normalizacijom se od vektora $\overrightarrow{v}$ dobija jedinični vektor $\frac{1}{|\overrightarrow{v}|}\overrightarrow{v}$. Ovaj vektor ima isti pravac i smer kao početni vektor, a intenzitet mu je 1.

T1.1: Neka su $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{V}$. Tada važe sledeća tvrđenja:
(S1) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$
Dokaz: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$
(S2) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u}$
Dokaz: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB}$
(S3) $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$
Dokaz: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$
(S4) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
Dokaz: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$

2.2 Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Definicija, primeri, T1.3 (dokaz), T1.4.

Definicija linearne nezavisnosti: Vektori $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ su linearno nezavisni ako važi:

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0} \iff \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$

T1.3: U ravni postoje dva linearno nezavisna vektora, a svaka tri su zavisna.
Dokaz: U ravni postoje 3 nekolinearne tačke O, A, B. Tada su vektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ linearno nezavisni.
Posmatrajmo $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ koji pripadaju istoj ravni. Ako su $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ linearno zavisni tada važi $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v} \implies 1\overrightarrow{u} - \alpha\overrightarrow{v} + 0\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$. Dakle i $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ su linearno zavisni.
Pretpostavimo da su $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ linearno nezavisni. Posmatrajmo tačke u ravni O, A, B, C takve da $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$. Obeležimo tačke X i Y na pravim OA i OB tako da je $OXCY$ paralelogram. Važi $\overrightarrow{OX} = \alpha\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OY} = \beta\overrightarrow{OB}$. Tada:

$$\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} \implies \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$$

što je kraj dokaza.

T1.4: U prostoru postoje tri linearno nezavisna vektora, a svaka četiri su linearno zavisni. Dokaz je potpuno analogan dokazu T1.3.

2.3 Koordinate vektora i tačaka

Baza i dimenzija vektorskog prostora, koordinate vektora u bazi, primer, reper Oe, koordinate tačke u reperu, primer, koordinate vektora $\overrightarrow{AB}$ preko koordinata tačaka A, B (dokaz).

Definicija baze: Baza je maksimalan skup linearno nezavisnih vektora.

Definicija dimenzije: Dimenzija je broj vektora u bazi.

Koordinate vektora u bazi: Ako je baza vektorskog prostora $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, tada se svaki vektor može zapisati kao $\overrightarrow{v} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2}$ i kažemo da su njegove koordinate (α_1, α_2). Njih zapisujemo sa $[\overrightarrow{v}]_e = [\alpha_1, \alpha_2]^T$.

Reper Oe: Ako fiksiramo bazu e i tačku O, Oe ćemo zvati reperom ili koodinatnim sistemom.

Koordinate tačke u reperu: Koordinate tačke X u reperu Oe su: $[X]_{Oe} := [\overrightarrow{OX}]_e$.

Koordinate vektora $\overrightarrow{AB}$ preko koordinata tačaka A i B:

$$[\overrightarrow{AB}]_e = [\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}]_e = [\overrightarrow{AO}]_e + [\overrightarrow{OB}]_e = -[\overrightarrow{OA}]_e + [\overrightarrow{OB}]_e = [B]_{Oe} - [A]_{Oe}$$

2.4 Skalarni proizvod

Definicija, osobine, pojam ON baze, formula za skalarni proizvod u ON bazi (dokaz), računanje dužina i uglova skalarnim proizvodom, primeri.

Definicija skalarnog proizvoda: Skalarni proizvod vektora $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}$ je definisan kao $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \cos(\angle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v})$.

Osobine:

1) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ (simetričnost)

2) $\overrightarrow{u} \cdot (\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}) = \alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + \beta(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})$ (linearnost)

3) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}|^2 \geq 0$ (pozitivnost)

4) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \iff \overrightarrow{u} = 0$ (nedegenerisanost)

Definicija ON baze: ON baza je svaka baza $e = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ za koju važi da je svaki vektor jedinični i svaka dva su međusobno ortogonalna. Važi: $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$.

Formula za skalarni proizvod u ON bazi: Neka za vektore $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \in \mathbb{V}$ važi $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}$ i $\overrightarrow{u} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2}$. Tada je:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} &= (x_1\overrightarrow{v} + x_2\overrightarrow{v}) \cdot (y_1\overrightarrow{u} + y_2\overrightarrow{u}) \\ &= x_1y_1(\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1}) + x_2y_1(\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2}) + x_1y_2(\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2}) + x_2y_2(\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2}) \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 \end{aligned}$$

Računanje dužine skalarnim proizvodom: $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{|\overrightarrow{v}|^2} = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}$.

Računanje ugla skalarnim proizvodom: $\angle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = \arccos(\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|})$

Skalarni proizvod $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ možemo da zapišemo i kao $u^T v$ gde su u i v redom kolone vektora $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$.

2.5 Vektorski proizvod

Orijentacija u ravni, orijentacija u prostoru, definicija vektorskog proizvoda, osobine, vektorski proizvod baznih vektora ON+ baze, formula za vektorski proizvod u ON+ bazi (dokaz), matrica vektorskog množenja (dokaz), računanje površine i orijentacije trougla vektorskim proizvodom (dokaz), kolinearnost tačaka, da li tačka pripada trouglu (dokaz), primeri.

Orijentacija u ravni: Pozitivna ako je obrnuta od smera kazaljke na satu, inače negativna.

Orijentacija u prostoru: Koristimo pravilo desne ruke.

Definicija vektorskog proizvoda: Pravac vektorskog proizvoda je normalan na ravan koju obrazuju vektori $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$. Intenzitet vektorskog proizvoda $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\sin(\angle\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v})$. Smer je takav da je baza $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})$ pozitivno orijentisana.

Osobine:

1) $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u}$ (antisimetričnost)

2) $(\alpha\cdot\overrightarrow{u}+\beta\cdot\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w} = \alpha\cdot(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w})+\beta\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})$ (linearnost)

Vektorski proizvod baznih vektora u ON+ bazi: Vektorski proizvod baznih vektora u ON+ bazi vidimo iz tabele desno. Takođe, na osnovu tabele možemo da napravimo krug sa kog čitamo rezultate. Vektore $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ i $\overrightarrow{e_3}$ postavimo u krug i strelicama povežemo $\overrightarrow{e_1}$ sa $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_2}$ sa $\overrightarrow{e_3}$ i $\overrightarrow{e_3}$ sa $\overrightarrow{e_1}$. Tada, na primer, ako tražimo $\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_1}$ vidimo da strelica pokazuje sa $\overrightarrow{e_1}$ na $\overrightarrow{e_2}$ pa je znak negativan, a jedini neiskorišćen vektor je $\overrightarrow{e_3}$ pa je rešenje $-\overrightarrow{e_3}$.

$\times$	$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_3}$
$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{0}$	$-\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_2}$
$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{0}$	$-\overrightarrow{e_1}$
$\overrightarrow{e_3}$	$-\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{0}$

Formula za vektorski proizvod u ON+ bazi: Neka su $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\in\mathbb{V}$ i $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+x_3\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{u} = y_1\overrightarrow{e_1}+y_2\overrightarrow{e_2}+y_3\overrightarrow{e_3}$. Tada:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u} &= (x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+x_3\overrightarrow{e_3})\times(y_1\overrightarrow{e_1}+y_2\overrightarrow{e_2}+y_3\overrightarrow{e_3})\\
&= x_1y_1(\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_1})+x_1y_2(\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2})+x_1y_3(\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_3})\\
&+ x_2y_1(\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_1})+x_2y_2(\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_2})+x_2y_3(\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3})\\
&+ x_3y_1(\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_1})+x_3y_2(\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_2})+x_3y_3(\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_3})\\
&= x_1y_1\overrightarrow{0}+x_1y_2\overrightarrow{e_3}-x_1y_3\overrightarrow{e_2}\\
&- x_2y_1\overrightarrow{e_3}+x_2y_2\overrightarrow{0}+x_2y_3\overrightarrow{e_1}\\
&+ x_3y_1\overrightarrow{e_2}-x_3y_2\overrightarrow{e_1}+x_3y_3\overrightarrow{0}\\
&= \begin{vmatrix}\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Matrica vektorskog množenja: $\overrightarrow{v}_\times$ je matrica vektorskog množenja za fiksirani vektor $\overrightarrow{v}$. Kada se ona pomnoži nekim vektorom $\overrightarrow{u}$ dobija se $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u}$. Izvodi se izračunavanjem $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{e_1}$ (prva kolona), $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{e_2}$ (druga kolona), $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{e_3}$ (treća kolona). Neka je $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+x_3\overrightarrow{e_3}$.

Tada $\overrightarrow{v}_\times = \begin{bmatrix}0 & x_3 & -x_2\\ -x_3 & 0 & x_1\\ x_2 & -x_1 & 0\end{bmatrix}$.

Površina trougla ABC:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BA}|\sin(\angle\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BC}|$$

Orijentacija trougla ABC: Trougao ABC u reperu Oe je zadat sa $[A]_{Oe} = (x_1, x_2)^T$, $[B]_{Oe} = (y_1, y_2)^T$ i $[C]_{Oe} = (z_1, z_2)^T$. Njegove koordinate možemo da proširimo sa $[A]_{Oe} =$

$(x_1, x_2, 0)^T$, $[B]_{Oe} = (y_1, y_2, 0)^T$ i $[C]_{Oe} = (z_1, z_2, 0)^T$. Kažemo da je trougao ABC pozitivno orijentisan ako je $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ istog pravca i smera kao $\overrightarrow{e_3}$.

Kolinearnost tačaka: Tri tačke su kolinearne ako je "površina trougla" koji obrazuju 0. Dakle $\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BC}| = 0$.

Da li tačka pripada trouglu: Tačka P pripada trouglu ABC ako su trouglovi ABP, BCP i CAP iste orijentacije.

2.6 Mešoviti proizvod

Definicija, osobine, formula za mešoviti proizvod u ON+ bazi (dokaz), zapremina paralelopipeda - T1.7 (dokaz), zapremina tetraedra, orijentacija baze prostora, nezavisnost tri vektora prostora, primeri.

Definicija mešovitog proizvoda: $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$.

Osobine:

1) $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}]$ (antisimetričnost)

2) $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}]$ (cikličnost)

3) $[\alpha \cdot \overrightarrow{u} + \beta \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z}] = \alpha \cdot [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z}] + \beta \cdot [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z}]$ (linearnost)

Formula za mešoviti proizvod u ON+ bazi:

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x_{\overrightarrow{u}} & y_{\overrightarrow{u}} & z_{\overrightarrow{u}} \\ x_{\overrightarrow{v}} & y_{\overrightarrow{v}} & z_{\overrightarrow{v}} \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{w} = \text{*sredi se*} = \begin{vmatrix} x_{\overrightarrow{u}} & y_{\overrightarrow{u}} & z_{\overrightarrow{u}} \\ x_{\overrightarrow{v}} & y_{\overrightarrow{v}} & z_{\overrightarrow{v}} \\ x_{\overrightarrow{w}} & y_{\overrightarrow{w}} & z_{\overrightarrow{w}} \end{vmatrix}$$

T1.7: Zapremina paralelopipeda jednaka je mešovitom proizvodu tri vektora.
Dokaz: Neka je dat paralelopiped $ABCDA_1B_1C_1D_1$ i neka su $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{w}$. Tada je zapremina $V = P_{ABCD} \cdot h = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| \cdot h = ||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| \cdot \overrightarrow{w}| \cos(\angle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})| = |(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}| = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]|$.

Zapremina tetraedra: $\frac{1}{6}|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]|$.
Dokaz: Tražimo zapreminu tetraedra $ABDA_1$. Dopunimo tetraedar do paralelopipeda $ABCDA_1B_1C_1D_1$. On je izgrađen od dve trostrane prizme $ABDA_1B_1D_1$ i $BCDB_1C_1D_1$ koje su jednakih jednakih zapremina. Posmatrajmo trostranu prizmu $ABDA_1B_1D_1$. Iz nje možemo da izdvojimo tetraedre $ABDA_1$, BDA_1B_1 i $DA_1B_1D_1$. Tetraedri $ABDA_1$ i BDA_1B_1 imaju iste površine baza ABA_1 i BA_1B_1 i iste visine iz tačke D pa su im i zapremine iste. Tetraedri $ABDA_1$ i $DA_1B_1D_1$ imaju iste površine baza AA_1D i DA_1D_1 i iste visine iz tačke B pa su im i zapremine iste. Dakle, trostrana prizma $ADCA_1B_1D_1$ se sastoji od tri tetraedra jednakih zapremina. Zapremina tetraedra $ABDA_1$ je jedna šestina zapremine što se i tražilo paralelopipeda.

Orijentacija baze prostora: Ako je $[\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}] > 0$ onda je orijentacija pozitivna.

Nezavisnost tri vektora prostora: Tri vektora su nezavisna ako je zapremina paralelopipeda koji obrazuju veća od nule.

2.7 Težište, centar mase i baricentričke koordinate

Zakon poluge, rešavanje zakona poluge centrom mase dve tačke, centar mase tri tačke, "rešavanje trougla" centrom mase tri tačke, centar mase n tačaka, težište n tačaka, dokaz da definicija težišta trougla ne zavisi od tačke O - vežbe, primeri, baricentričke koordinate.

Zakon poluge: Iz jednakosti momenta sila se izvodi zakon poluge $|AT| : |TB| = m_B : m_A$ ili vektorski $m_A\overrightarrow{TA} + m_B\overrightarrow{TB} = \overrightarrow{0}$.

Centar mase tačaka $A(m_A)$ **i** $B(m_B)$**:** $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_A+m_B}(m_A\overrightarrow{OA} + m_B\overrightarrow{OB})$.

Centar mase tri tačke: $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_A+m_B+m_C}(m_A\overrightarrow{OA} + m_B\overrightarrow{OB} + m_C\overrightarrow{OC})$.

Centar mase n **tačaka:** $\frac{1}{m_{A_1}+\ldots+m_{A_n}}(m_{A_1}\overrightarrow{OA_1} + \ldots + m_{A_n}\overrightarrow{OA_n}) = \overrightarrow{OT}$.

Težište n **tačaka:** Težište n tačaka se dobija kada su sve mase jednake. Neka važi $m_{A_1} = \ldots = m_{A_n} = m$. Tada je:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \frac{1}{m_{A_1}+\ldots+m_{A_n}}(m_{A_1}\overrightarrow{OA_1} + \ldots + m_{A_n}\overrightarrow{OA_n}) \\ &= \frac{1}{nm}(m\overrightarrow{OA_1} + \ldots + m\overrightarrow{OA_n}) \\ &= \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n})\end{aligned}$$

Dokaz da definicija težišta trougla ne zavisi od tačke O**:** Neka su date tačke A, B, C i njihove mase i neka važi $m_A + m_B + m_C = M$. Tada:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \frac{1}{M}(m_A\overrightarrow{OA} + m_B\overrightarrow{OB} + m_C\overrightarrow{OC}) \\ \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{ST} &= \frac{1}{M}(m_A(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA}) + m_B(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SB}) + m_C(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SC})) \\ \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{ST} &= \frac{1}{M}(m_A\overrightarrow{SA} + m_B\overrightarrow{SB} + m_C\overrightarrow{SC}) + \overrightarrow{OS} \\ \overrightarrow{ST} &= \frac{1}{M}(m_A\overrightarrow{SA} + m_B\overrightarrow{SB} + m_C\overrightarrow{SC})\end{aligned}$$

Baricentričke koordinate: Baricentričke koordinate tačke M su mase koje je potrebno dodeliti tačkama $A_1, \ldots, A_n$ tako da tačka M postane njihov centar mase. Baricentričke koordinate se dele na homogene i nehomogene. U slučaju n tačaka $A_1(m_{A_1}), \ldots, A_n(m_{A_n})$, homogene baricentričke koordinate će biti $(m_{A_1} : \ldots : m_{A_n})$. Homogene baricentričke koordinate su određene do na proporcionalnost. Za normalizovane ili nehomogene baricentričke koordinate važi da je $m_{A_1} + ... + m_{A_n} = 1$. Za proizvoljne mase $m_{A_1}, \ldots, m_{A_n}$ nehomogene baricentričke koordinate dobijamo sa: $(\frac{m(A_1)}{m(A_1)+...+m(A_n)}, \ldots, \frac{m(A_n)}{m(A_1)+...+m(A_n)})$.

2.8 Transformacije koordinata vektora i tačaka

Matrica prelaska, veza koordinata vektora u različitim bazama, primer, transformacija koordinata tačaka - formule (1.23, 1.24) izvođenje, primer.

Matrica prelaska: Matrica u kojoj se u i-toj koloni nalaze koordinate i-tog vektora nove baze u staroj bazi.

Transformacije koordinata tačaka: Pretpostavimo da iz repera Oe prelazimo u reper Qf. Dodatno, neka je C matrica prelaska iz baze e u bazu f. Tada:

$$[X]_{Qf} = [\overrightarrow{QX}]_f = [\overrightarrow{QO}]_f + [\overrightarrow{OX}]_e = [O]_{Qf} + C[\overrightarrow{OX}]_e = [O]_{Qf} + C[\overrightarrow{X}]_{Oe} \ (1.23)$$

Ako je $[X]_{Oe} = x'$, $[X]_{Qf} = x$ i $[O]_{Qf} = q$, tada dobijamo $x = q + Cx'$ (1.24).

2.9 Transformacije koordinata u ON bazama ravni

Slučaj baza iste orijentacije, matrica rotacije, osobine matrice rotacije, slučaj baza različite orijentacije, matrica refleksije, osobine matrica refleksije, grupe $SO(2)$ i $O(2)$.

I slučaj: Neka su baze Oe i Qf ON i iste orijentacije. Neka je $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ i $f = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ i neka je $\angle(\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{f_1}) = \phi$, $\phi \in [0, 2 \cdot \pi)$. Tada je:
$\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} \cdot \cos(\phi) + \overrightarrow{e_2} \cdot \sin(\phi)$
$\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} \cdot \cos(\phi + \frac{\pi}{2}) + \overrightarrow{e_2} \cdot \sin(\phi + \frac{\pi}{2}) = \overrightarrow{e_1} \cdot (-\sin(\phi)) + \overrightarrow{e_2} \cdot \cos(\phi)$.
Odavde dobijamo formulu za istu orijentaciju: $x = q + \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \cdot x'$.
Matrica koju smo dobili je matrica rotacije oko O za ugao ϕ.
Osobine matrice rotacije:
$(R_\phi)^{-1} = R_{-\phi} = (R_\phi)^T$
$det(R_\phi) = 1$
$R_\phi \cdot R_\psi = R_{\phi+\psi} = R_\psi \cdot R_\phi$
II slučaj: Neka su baze Oe i Qf ON i različite orijentacije. Neka je $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ i $f = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ i neka je $\angle(\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{f_1}) = \phi$, $\phi \in [0, 2 \cdot \pi)$. Tada je:
$\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} \cdot \cos(\phi) + \overrightarrow{e_2} \cdot \sin(\phi)$
$\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} \cdot \cos(\phi - \frac{\pi}{2}) + \overrightarrow{e_2} \cdot \sin(\phi - \frac{\pi}{2}) = \overrightarrow{e_1} \cdot \sin(\phi) + \overrightarrow{e_2} \cdot (-\cos(\phi))$.
Odavde dobijamo formulu za istu orijentaciju: $x = q + \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{bmatrix} \cdot x'$.
Matrica koju smo dobili je matrica refleksije u odnosu na pravu p_0 koja prolazi kroz O i gradi sa $\overrightarrow{e_1}$ ugao $\frac{\phi}{2}$.
Osobine matrice refleksije:
$(S_\phi)^{-1} = (S_\phi)^T$
$(S_\phi)^2 = E$

$det(S_\phi) = -1$
$S_\phi \cdot S_\psi = R_{\phi-\psi}$
Specijalna ortogonalna grupa reda 2: $SO(2) = \{R_\phi \mid \phi \in \mathbb{R}\}$.
Ortogonalna grupa reda 2: $O(2) = SO(2) \cup \{S_\phi \mid \phi \in \mathbb{R}\} = \{A \in Gl_2(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}$.

2.10 Afina preslikavanja

Definicija, pasivna i aktivna tačka gledišta, osobine afinih preslikavanja (T5.2) (dokaz), odredjenost afinog preslikavanja sa tri para odgovarajućih tačaka, predstavljanje afinih preslikavanja ravni 3 x 3 matricama, translacija, rotacija (oko O i oko proizvoljne tačke), refleksija u odnosu na pravu, skaliranje, smicanje, primeri.

Definicija afinih preslikavanja: Neka je $\overline{f} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ linearno preslikavanje vektorskog prostora koji je pridružen prostoru tačaka $\mathbb{E}$. Afino preslikavanje $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ je preslikavanje tačaka koje je indukovano sa $\overline{f}$ u smislu da važi $f(M) = M' \wedge f(N) = N' \iff \overline{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$.
Pasivna tačka gledišta je kada fiksiramo tačku i posmatramo je iz više repera.
Aktivna tačka gledišta je kada fiksiramo reper i posmatramo neku tačku pre i posle afinog preslikavanja.
Teorema: Svako afino preslikavanje f, u fiksiranom reperu Oe, ima oblik:
$[f(M)]_{Oe} = [\overline{f}]_e \cdot [M]_{Oe} + [f(O)]_{Oe}$.
Dokaz:

$$\begin{aligned}
[f(M)]_{Oe} - [f(O)]_{Oe} &= [\overrightarrow{Of(M)}]_e - [\overrightarrow{Of(O)}]_e = [\overrightarrow{Of(M)}]_e + [\overrightarrow{f(O)O}]_e \\
&= [\overrightarrow{f(O)f(M)}]_e = [\overline{f}(\overrightarrow{OM})]_e = [\overline{f}]_e \cdot [\overrightarrow{OM}]_e \\
&= [\overline{f}]_e \cdot [M]_{Oe}
\end{aligned}$$

Napomena: Kolone matrice $[\overline{f}]_e$ su zapravo slike baznih vektora baze e ($\overline{f}(\overrightarrow{e_i})$).
Osobine afinih preslikavanja ravni (*T5.2*):
Preslikaju prave u prave:
S obzirom da je svako afino preslikavanje indukovano linearnim preslikavanjem vektorskog prostora, a linearno preslikavanje vektorskog prostora čuva kolinearnost, tada i afino preslikavanje čuva kolinearnost, odnosno slika prave u prave.
Čuvaju razmeru kolinearnih duži:
Analogno prošloj osobini.
Čuvaju paralelnost pravih:
Ako se posmatraju po dve tačke na dve paralelne prave, dobijamo 2 kolinearna vektora. Odavde se analogno završava dokaz.
Odnos površina slike i originala jednak je $|det(a_{ij})|$:
Napomenimo da je a_{ij} zapravo matrica $[\overline{f}]_e$. Zbog jednostavnijeg zapisa i jer je reper fiksiran ćemo izostaviti reper iz zapisa.
Neka je $f(O) = O'$, $f(A) = A'$ i $f(B) = B'$. Površina trougla OAB je $\frac{1}{2} \cdot |det(\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB})|$, a

površina trougla $O'A'B'$ je $\frac{1}{2} \cdot |det(\overrightarrow{O'A'}\overrightarrow{O'B'})|$. Takođe su $\overrightarrow{O'A'} = a_{ij} \cdot \overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{O'B'} = a_{ij} \cdot \overrightarrow{OB}$. Za kraj, koristimo svojstvo $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.

$$1 = \frac{det(\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB})}{det(\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB})}$$
$$det(a_{ij}) = \frac{det(a_{ij} \cdot \overrightarrow{OA}\ a_{ij} \cdot \overrightarrow{OB})}{det(\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB})}$$
$$det(a_{ij}) = \frac{det(\overrightarrow{O'A'}\ \overrightarrow{O'B'})}{det(\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB})}$$

Čuvaju centar mase i baricentričke koordinate:
Ovo sledi direktno iz čuvanja razmere.
Preslikavanja za koje važi $det(a_{ij}) > 0$ čuvaju orijentaciju, inače menjaju:
Po algebarskoj definiciji, dve baze su iste orijentacije ako je determinanta matrice prelaska iz jedne u drugu veća od nule. Ovo je aktivna varijanta ove definicije.
Ako su date tri nekolinearne tačke i njihove slike može se odrediti jedinstveno afino preslikavanje ravni.
Matrica translacije: $\mathcal{T}_{\overrightarrow{t}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_t \\ 0 & 1 & y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, gde je $\overrightarrow{t} = (x_t, y_t)$.
Matrica rotacije oko O: $\mathcal{R}_\phi = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, gde je ϕ ugao za koji se rotira.
Rotacija oko proizvoljne tačke M: $\mathcal{T}_{\overrightarrow{OM}} \circ \mathcal{R}_\phi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MO}}$.
Matrica refleksija u odnosu na pravu koja prolazi kroz O: $\mathcal{S}_{p_0} = \begin{bmatrix} cos(\phi) & sin(\phi) & 0 \\ sin(\phi) & -cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, gde je $\frac{\phi}{2}$ ugao između x ose i p_0.
Refleksija u odnosu na pravu koja prolazi kroz tačku M se dobija analogno kao rotacija.
Matrica skaliranja sa centrom u tački O: $\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, gde je λ_1 koeficijent skaliranja u pravcu prvog baznog vektora, a λ_2 koeficijent skaliranja u pravcu drugog baznog vektora.
Skaliranje sa centrom u proizvoljnoj tački analogno rotaciji.
Smicanje preslikava kvadrat u pravougaonik iste površine.
Matrice smicanja:
$\mathcal{S}_x(\lambda) = \begin{bmatrix} x & \lambda & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, gde je λ koeficijent smicanja u pravcu x ose.
$\mathcal{S}_y(\lambda) = \begin{bmatrix} x & \lambda & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, gde je λ koeficijent smicanja u pravcu y ose.

2.11 Izometrije ravni i prostora

Defincija, direktne i indirekne izometrije, ortogonalne matrice i njihova determinanta, opis afinih transformacija ravni (pitanje 9), rotacija oko prave u prostoru, rotacije oko koordinatnih osa, Rodrigezova formula, refleksija u odnosu na ravan (računanje), Prva Ojlerova teorema, Ojlerovi uglovi, Druga Ojlerova teorema, veza sopstvenih i svetskih rotacija - smisao, slučaj zaključanog žiroskopa.

Definicija izometrije: Preslikavanje koje čuva dužine u prostoru $\mathbb{E}$ proizvoljne dimenzije.
Direktna izometrija čuva orijentaciju, to su kretanja.
Indirektna izometrija menja orijentaciju.
Ortogonalna matrica je matrica A za koju važi $A \cdot A^T = E$.
Za determinantu ortogonalne matrice važi:
$1 = det(E) = det(A \cdot A^T) = det(A) \cdot det(A^T) = det(A) \cdot det(A) = det(A)^2$.
pitanje 9

Matrica rotacje oko x ose: $\mathcal{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin\phi \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$

Matrica rotacje oko y ose: $\mathcal{R}_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$

Matrica rotacje oko z ose: $\mathcal{R}_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin\phi & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rotacija oko proizvoljne prave koja sadrži koordinatni početak (Rodrigezova formula):
Neka su date tačka M i prava p koja sadrži koordinatni početak O i ugao ϕ za koji rotiramo tačku M oko prave p. Neka je jedinični vektor pravca prave p vektor $\overrightarrow{p}$. Posmatrajmo ravan α koja sadrži tačku M i njen normalni vektor je vektor $\overrightarrow{p}$. Neka je $\alpha \cap p = \{O'\}$ i neka su $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{OO'}$ i $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{O'M}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{p} + \overrightarrow{x_2} \\ \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{x} &= \lambda \cdot \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p} + \overrightarrow{x_2} \cdot \overrightarrow{p} \\ &= \lambda \cdot |\overrightarrow{p}|^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Dobijamo:
$\overrightarrow{x_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p} \cdot \lambda = \overrightarrow{p} \cdot (\overrightarrow{p}^T \cdot \overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p}^T) \cdot \overrightarrow{x}$. Treća jednakost važi jer se skalarni proizvod može preko koordinata zapisati kao $\overrightarrow{u}^T \cdot \overrightarrow{v}$.
$\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_1} = E \cdot \overrightarrow{x} - (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p}^T) \cdot \overrightarrow{x} = (E - \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p}^T) \cdot \overrightarrow{x}$.
Neka je M' tačka koja se dobija rotacijom tačke M oko prave p za ugao ϕ. Možemo da

posmatramo ortogonalnu bazu $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{x_2})$.
Tada $\overrightarrow{O'M'} = \cos(\phi) \cdot \overrightarrow{x_2} + \sin(\phi)(\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{x_2}) = \cos(\phi) \cdot \overrightarrow{x_2} + \sin(\phi)(\overrightarrow{p} \times (\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2})) = \cos(\phi) \cdot \overrightarrow{x_2} + \sin(\phi)(\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{x})$. Na kraju dobijamo:

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'} = (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p}^T) \cdot \overrightarrow{x} + \cos(\phi) \cdot (E - \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p}^T) \cdot \overrightarrow{x} + \sin(\phi)(\overrightarrow{p}_\times \cdot \overrightarrow{x})$$

Odavde dobijamo matricu: $[R_p(\phi)]_e = p \cdot p^T + \cos(\phi) \cdot (E - p \cdot p^T) + \sin(\phi) \cdot \overrightarrow{p}_\times$ koju nazivamo Rodrigezova formula.
Refleksija u odnosu na ravan koja sadrži koordinatni početak:
Neka je α ravan koja prolazi kroz O zadata jediničnim normalnim vektorom $\overrightarrow{p}$ i neka je data tačka M na koju hoćemo da primenimo refleksiju u odnosu na ravan i neka se tom refleksijom dobija tačka M'. Neka je $\alpha \cap MM' = \{O'\}$.
$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM} - 2 \cdot \overrightarrow{O'M}$. Analogno sa pitanjem za Rodrigezovu formulu:
$\overrightarrow{O'M} = \lambda \cdot \overrightarrow{p}$
$\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{p} \cdot (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{OM} = \lambda$
$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{p} \cdot (\overrightarrow{p}^T \cdot \overrightarrow{OM})$
$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - 2 \cdot (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p}^T) \cdot \overrightarrow{OM}$
Odavde dobijamo matricu: $[S_\alpha]_e = E - 2 \cdot p \cdot p^T$.
Prva Ojlerova teorema: Svako kretanje koje ima fiksiranu tačku O' se može predstaviti kao rotacija oko neke orijentisane prave koja sadrži tačku O'.
Druga Ojlerova teorema: Svako kretanje koje fiksira koordinatni početak se može izraziti kao kompozicija tri sopstvene rotacije oko koordinatnih osa:
$R_{Ox_2}(\phi) \circ R_{Oy_1}(\theta) \circ R_{Oz}(\psi)$ gde su $\phi, \psi \in [0, 2 \cdot \pi), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Uglovi ϕ,θ,ψ se nazivaju Ojerovi uglovi. Prvom rotacijom se $Oxyz$ slika u $Ox_1y_1z_1$, drugom rotacijom u $Ox_2y_2z_2$ i trećom rotacijom u $Ox_3y_3z_3$.
Veza sopstvenih i svetskih koordinata je:
$[R_{Ox_2}(\phi) \circ R_{Oy_1}(\theta) \circ R_{Oz}(\psi)]_e = R_{Oz}(\psi) \circ R_{Oy}(\theta) \circ R_{Ox}(\phi)$.
Zaključavanje žiroskopa se javlja kada se ravni Oxy i Oy_3z_3 poklope. Tada je $|Oz| = |Ox_3|$ zbog čega imamo jedan stepen slobode manje.

2.12 Kvaternioni

Definicija, sabiranje, množenje, osobine, inverzni kvaternion, primeri, konjugacija kvaternionom i izometrije.

Definicija: $\mathbb{H} = \{x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k + w \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$
Sabiranje: normalno.
Množenje: $i \cdot j = k = -j \cdot i$ i $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.
Ako posmatramo kvaternion $q = x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k + w$:
Realni deo je $\mathcal{R}(q) = w$.
Imaginarni deo je $\mathcal{I}(q) = x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k = \overrightarrow{v}$.
Važi $q = x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k + w = \mathcal{I}(q) + \mathcal{R}(q) = [(x, y, z), w] = [\overrightarrow{v}, w]$.
Osobine:

$q + q_1 = [\overrightarrow{v}, w] + [\overrightarrow{v_1}, w_1] = [\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v_1}, w + w_1]$
$q \cdot q_1 = [\overrightarrow{v}, 0] \cdot [\overrightarrow{v_1}, 0] = [\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v_1}, -\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_1} \rangle]$
$q \cdot q_1 = [\overrightarrow{v}, w_1] \cdot [\overrightarrow{v_1}, w_1] = [\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v_1} + w \cdot \overrightarrow{v_1} + w_1 \cdot \overrightarrow{v}, w \cdot w_1 - \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_1} \rangle]$
Napomena: $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$ je drugi zapis za skalarni proizvod.
Konjugovani kvaternion: $\overline{q} = -x \cdot i - y \cdot j - z \cdot k + w$.
Inverzni kvaternion: $q \cdot q^{-1} = 1$.
Osobina: $q \cdot \overline{q} = |q|^2 \implies q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}$.
Konjugacije kvaternionom:
Svaki kvaternion različit od nule određuje konjugaciju: $C_q = q \cdot p \cdot q^{-1}$. Dve konjugacije su iste ako i samo ako važi $q = \lambda \cdot h$, gde je $\lambda \in \mathbb{R}$.
Konjugacija C_q je izometrija prostora $\mathcal{I}\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$.
Konjugacija kvaternionom $q = [\overrightarrow{v} \cdot \sin(\frac{\alpha}{2}), \cos(\frac{\alpha}{2})]$ je rotacija oko jediničnog vektora $\overrightarrow{v}$ za ugao α u pozitivnom smeru.

2.13 Afina geometrija ravni

Predstavljanje prave, razne jednačine pravih, normalni vektor prave, vektor pravca prave, presek dve prave zadate jednačinama, presek pravih zadatih tačkom i vektorom pravca (dokaz), presek dve duži, parametarsko zadavanje trougla, paralelograma.

Implicitna jednačina prave: $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$.
Parametarska jednačina prave: $M(t) = P + t \cdot \overrightarrow{p}$.
Iz implicitnog zapisa možemo da pročitamo normalni vektor $\overrightarrow{n_p} = (a, b)$.
Iz parametarskog zapisa možemo da pročitamo vektor pravca $\overrightarrow{p}$.
Presek pravih se dobija rešavanjem dve jednačine prave sa dve nepoznate.
Duž AB možemo da zadamo sa parametarski sa: $M(t) = A + t \cdot \overrightarrow{AB}, t \in [0, 1]$.
Presek duži: možemo da odredimo gde se nalazi presek rešavanjem jednačina, a zatim da proverimo da li je ta tačka između tačaka A_1, B_1 i A_2, B_2.
Trougao možemo da zadamo sa: $M(t_1, t_2) = A + t_1 \cdot \overrightarrow{AB} + t_2 \cdot \overrightarrow{AC}, t_1, t_2 \in [0, 1], t_1 + t_2 \leq 1$.
Paralelogram možemo da zadamo sa: $M(t_1, t_2) = A + t_1 \cdot \overrightarrow{AB} + t_2 \cdot \overrightarrow{AC}, t_1, t_2 \in [0, 1]$.

2.14 Ravan u prostoru

Zadavanje ravni tačkom i normalnim vektorom (dokaz), skiciranje ravni, specijalni slučajevi ravni, parametarska jednačina ravni, jednačina ravni kroz 3 tačke, primeri.

Zadavanje ravni tačkom i normalnim vektorom:
Neka je dat normalni vektor $\overrightarrow{n_\alpha} = (a, b, c)$ i tačka $P = (x_1, y_1, z_1)$ koja pripada ravni. Posmatrajmo tačku sa ravni $A = (x, y, z)$. Važi da je $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = 0$. Odavde: $\overrightarrow{PA} \circ \overrightarrow{n_\alpha} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \circ (a, b, c) = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z - (a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1) = 0$. Ako obeležimo $d = -(a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1)$ dobijamo $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$. Skiciranje ravni može da se vrši tako što se prvo izračunaju i označe preseci sa osama.

Parametarska jednačina ravni: $M(t,s) = A + t \cdot \overrightarrow{v} + s \cdot \overrightarrow{u}$, gde je A tačka koja pripada ravni, a $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{u}$ su vektori paralelni sa ravni.
Jednačina ravni kroz tri tačke:
Ako su date nekolinearne tačke A, B i C, tada je jednačine ravni: $M(t,s) = A + t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$.
Ako su tačke kolinearna ne može se jednoznačno odrediti ravan koja ih sadrži.

2.15 Prava u prostoru

Parametarska i "kanonska" jednačina prave, prava AB i podela duži AB na jednake delove, prava kao presek dve ravni, pramen ravni, primeri.

Parametarska jednačina: $M(t) = A + t \cdot \overrightarrow{p}$, gde je A tačka na pravoj, a $\overrightarrow{p}$ je vektor pravca.
"Kanonska" jednačina je pod navodnicima jer nešto što je kanonsko bi trebalo da bude jedinstveno, ali ova jednačina nije jedinstvena.
Kanonska jednačina prave: $\frac{x-x_0}{p_x} = \frac{y-y_0}{p_y} = \frac{z-z_0}{p_z} = t$.
Ako želimo da podelimo duž AB na n delova i želimo da nađemo m-tu tačku podele to radimo sa: $T_m = A + \overrightarrow{AB} \cdot \frac{m}{n}$, važi da je $T_0 = A$ i $T_n = B$.
Prava kao presek dve ravni se dobija kao rešenje sistema dve jednačine od tri nepoznate. Može da nema rešenja, ravni su paralelne, ima beskonačno mnogo rešenja koje će formirati prava, ravni se seku po pravoj ili ima beskonačno mnogo rešenja koje će formirati ravan, ravni se poklapaju.
Ako se dve ravni seku u pravoj, njihovom linearnom kombinacijom se dobija svaka ravan koja sadrži tu pravu i ovo se naziva pramen ravni. Opšti primer:
$\alpha : a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z + d_1 = 0$
$\beta : a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z + d_2 = 0$
Tada je pramen ravni:
$\lambda_1 \cdot (a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z + d_1) + \lambda_2 \cdot (a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z + d_2) = 0$.

2.16 Međusobni položaji pravih i ravni

Međusobni položaji dve prave (zadatih tačkom i vektorom pravca) u prostoru, međusobni položaj prave i ravni, međusobni položaji dve ravni, mimoilazne prave, zajednička normala - T4.3 (dokaz), rastojanje mimoilaznih pravih - T4.4 (dokaz).

Dve prave mogu da budu paralelne, mimoilazne, da se poklapaju i da se seku. Možemo da rešavamo dve jednačine sa dve nepoznate. Ako postoji jedno rešenje onda se seku. Ako postoji beskonačno mnogo rešenja onda se poklapaju. Ako nema rešenja a vektori su kolinearni onda su prave paralelne. Ako ništa od prethodnog ne važi onda su mimoilazne.
Prava i ravan mogu da budu paralelne, da se seku ili da ravan sadrži pravu. Ako sistem jednačina ima jedinstveno rešenje, onda se seku, ako ima beskonačno mnogo rešenja onda ravan sadrži pravu, inače su paralelne. Dve ravni mogu da se poklapaju, budu paralelne ili da se seku. Analogni su slučajevi pravoj i ravni.

Mimoilazne prave su prave preko kojih ne može da se postavi ravan.
T4.3 Mimoilazne prave p i q imaju jedinstvenu zajedničku normalu:
Dokaz:
Neka su date prave p i q. Vektor pravca prave n koja je normalna na obe prave će biti $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$ gde su $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$ vektori pravca pravih p i q. Sve prave čiji su vektori pravca ortogonalni i sa $\overrightarrow{p}$ i sa $\overrightarrow{q}$ i koje seku pravu p će pripadati ravni α koja se konstruiše jednom tačkom sa prave p i vektorima $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$. Analogno možemo da konstruišemo ravan β koja će sadržati sve prave čiji su vektori pravca ortogonalni i sa $\overrightarrow{p}$ i sa $\overrightarrow{q}$ i koje seku pravu q. Presek ove dve ravni će biti prava n koja je jedinstvena jer su p i q mimoilazne. Prava n je normalna na prave p i q jer je njen koeficijent pravca $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$ i seče ih po konstrukciji.
T4.4 Rastojanje između mimoilaznih pravih je: $\frac{|[\overrightarrow{p},\overrightarrow{q},\overrightarrow{PQ}]|}{|p \times q|}$ gde su P i $\overrightarrow{p}$ tačka i vektor pravca prave p, a Q i $\overrightarrow{q}$ tačka i vektor pravca prave q.
Dokaz:
U brojiocu je zapravo zapremina paralelopipeda, a u imeniocu je površina baze pa se deljenjem tačno dobija visina koju tražimo.

2.17 Projekcije

Normalna projekcija na ravan Oxy (je linearno preslikavanje), normalna projekcija na proizvoljnu ravan (dokaz), centralna projekcija, formule centralne projekcije iz $C(0,0,0)$ na ravan $z = f$, kartografske projekcije, definicija i formule stereografska projekcija.

$$\text{Matrica normalne projekcije na } Oxy \text{ ravan: } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica normalne projekcije na proizvoljnu ravan koja sadrži koordinatni početak: Neka je α ravan koja prolazi kroz O zadata jediničnim normalnim vektorom $\overrightarrow{p}$ i neka je data tačka M koju hoćemo da projektujemo na ravan i neka se tom projekcijom dobija tačka M'.
$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{M'M}$. $\overrightarrow{M'M} = \lambda \cdot \overrightarrow{p}$
$\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{p} \cdot (\overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{OM} = \lambda$
$\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{p} \cdot (\overrightarrow{p}^T \cdot \overrightarrow{OM})$
$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p}^T) \cdot \overrightarrow{OM}$
Odavde dobijamo matricu: $x' = (E - p \cdot p^T) \cdot x$.
Centralna projekcija: Za centralnu projekciju je potrebno da fiksiramo ravan na koju projektujemo i tačku u odnosu na koju projektujemo (iz koje posmatramo).
Centralna projekcija u odnosu na tačku $C(0,0,0)$ na ravan $z = d$: Posmatrajmo proizvoljnu tačku $M(x,y,z)$. Neka je njena projekcija tačka $M'(x',y',z')$. Tada je $x' = \frac{d}{z} \cdot x$, $y' = \frac{d}{z} \cdot y$ i $z' = \frac{d}{z} \cdot z = d$. Ovo možemo izraziti matrično preko homogenih koordinata:
Neka je $x' = \frac{x_1'}{x_4'}$, $y' = \frac{x_2'}{x_4'}$ i $z' = \frac{x_3'}{x_4'}$. Tada se centralna projekcija može predstaviti matricom:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kartografske projekcije projektuju zakrivljene površine na ravan.
Stereografska projekcija je specijalan slučaj centralne projekcije kojom se jedinična sfera projektuje na ravan. centar projekcije je neka tačka sfere, a ravan na koju se projektuje tangira sferu.
Izvođenje formula:
Neka je $C = (0, 0, 1)$ i $z = -1$. Posmatrajmo tačku na lopti $M = (x, y, z)$ i pravu $p(\lambda) = C + \lambda \cdot \overrightarrow{CM}$. Važi $x' = \lambda \cdot x$, $y' = \lambda \cdot y$ i $z' = \lambda \cdot z + \lambda = -1$. Odavde dobijamo $\lambda = \frac{1}{1-z}$. Na kraju dobijamo formule stereografske projekcije: $x' = \frac{x}{1-z}$, $y' = \frac{y}{1-z}$ i $z' = -1$.

2.18 Uglovi između pravih i ravni

Merenje uglova (stepeni, radijani, nagib u procentima), ugao između 2 prave, ugao između prave i ravni, ugao između dve ravni, ugao između pljosni tetraedra (na dva načina), računski primeri.

Veza stepena i radijana: $180° = \pi$.
Radijan predstavlja odnos dužine luka i dužine poluprečnika.
Merenje nagiba u procentima: Ako merimo ugao između hipotenuze i jedne katete i dužina te katete je a, a dužina druge katete je b, tada će nagib biti $\frac{b}{a} \cdot 100\%$. Dakle, ako je dužina jedne hipotenuze 1 metar, a dužina druge hipotenuze 5 centimetara, tada će nagib hipotenuze biti 5%. Ugao između dve prave se određuje kao ugao između vektora pravca tih pravi.
Ugao između prave i ravni se određuje kao $\frac{\pi}{2} - \angle(\overrightarrow{n_\alpha}\overrightarrow{p})$ gde je $\overrightarrow{n_\alpha}$ normalni vektor ravni, a $\overrightarrow{p}$ vektor pravca prave.
Ugao između dve ravni je ugao između njihovih normalnih vektora. Ugao između pljosni tetraedra:
Prvi način:
Posmatrajmo jediničnu kocku $ABCDA'B'C'D'$. Tačke $ACB'D'$ formiraju pravilni tetraedar. Lako možemo da odredimo koordinate ovih tačaka.
Drugi način:
Posmatrajmo pravilni jedinični tetraedar $ABCD$. Označimo sredinu stranice AB sa M. Izdvojimo trougao MDC. Zanima nas ugao CMD. Neka je $|MD| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|DC| = 1$ i $|MC| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Preko kosinusne teoreme dobijamo:
$|DC|^2 = |MD|^2 + |MC|^2 - 2 \cdot |MD| \cdot |MC| \cos(\gamma)$. Odavde je $\gamma = \arccos(\frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{3}{4}}) = \arccos(\frac{1}{3})$.

2.19 Rastojanja

Rastojanje između tačke i prave (sa izvodjenjem), rastojanje između tačke i ravni (dokaz), rastojanje između mimoilaznih pravih (pitanje 16).

Rastojanje između tačke i prave:
Neka je data prava p i tačka A čije rastojanje se traži. Možemo da izaberemo neku tačku P na pravi i da izračunamo površinu paralelograma zadatog vektorima: $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{p}$. Tada se tražena visina dobija formulom: $d(A,p) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{p}|}{|\overrightarrow{p}|}$.
Rastojanje između tačke i ravni: potpuno analogno osim što se umesto površine i dužine koristi zapreina i površina.
pitanje 16.