Matematički fakultet

Odgovori na teorijska ispitna pitanja iz geometrije

Radio
Lazar Jovanović 34/2023

Profesor
dr Srđan Vukmirović

Beograd, 2024/2025

Sadržaj

1 Konvencije

Sve konvencije važe dok se ne naglasi drugačije.

Primeri: Većina primera neće biti navedena.

Množenje i skalarni proizvod: Množenje se neće označavati posebnom oznakom, dok će se za skalarni proizvod koristiti oznaka $\cdot$.

Uglovi: Uglovi između vektora će se označavati sa $\angle\overrightarrow{v}\overrightarrow{u}$, a uglovi formirani od tri tačke sa $\angle ABC$ gde će se posmatrati ugao kod tačke B. Podrazumeva se da se posmatra ugao u pozitivnom smeru od $\overrightarrow{v}$ do $\overrightarrow{u}$, odnosno, od AB do BC. Ugao je iz intervala $[0, 2\pi)$.

Oznaka vektora: Ako posmatramo vektore, onda ih označavamo sa $\overrightarrow{u}$. Ako posmatramo samo kolone koordinata vektora, onda ih označavamo sa u.

Mase tačaka: Za tačku A oznaka $A(m_A)$ znači da tačka A ima dodeljenu masu m_A. Podrazumevaće se da se i bez navedene oznake oznaka m_A odnosi na tačku A.

Baza vektorskog prostora: Označavamo i-ti vektori baze e sa $\overrightarrow{e_i}$.

Ortonormirana baza: U nastavku će se „ortonormirane baze“ skraćeno nazivati „ON baze“.

Ortonormirana baza pozitivne orijentacije: U nastavku će se „ortonormirane baze pozitivne orijentacije“ skraćeno nazivati „ON+ baze“.

Označavanje duži: Dužina duži koju formiraju tačke A i B se označava sa AB.

2 Pitanja

2.1 Vektori i osnovne operacije sa vektorima

Sabiranje i množenje skalarom, nula vektor, suprotan vektor, kolinearni i komplanarni vektori, jedinični vektor, Dokaz T1.1 (tvrđenja S1-S4).

Definicija vektora: Klasa ekvivalencije usmerenih duži koje imaju isti pravac, smer i intenzitet.

Sabiranje vektora: Pri sabiranju se vektori nadovezuju, posmatraju se samo početna i krajnja tačka.

Množenje vektora skalarom: Vektor $\alpha\overrightarrow{v}$ ima isti pravac kao $\overrightarrow{v}$, ima intenzitet $|\alpha||\overrightarrow{v}|$ i ima isti smer ako je $\alpha > 0$, a različit smer ako je $\alpha < 0$. Specijalno, ako je $\alpha = 0$, svaki vektor $\overrightarrow{v}$ postaje nula vektor.

Nula vektor: Vektor $\overrightarrow{v}$ je nula vektor (zapisujemo kao $\overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{AA}$) ako je njegov intenzitet jednak nuli. Nula vektor nema ni pravac ni smer.

Suprotni vektor: Suprotni vektor vektora $\overrightarrow{v}$ (zapisujemo sa $-\overrightarrow{v}$) ima isti intenzitet i pravac kao vektor $\overrightarrow{v}$, a suprotan smer. Takođe, suprotan vektor vektora $\overrightarrow{AB}$ možemo da zapišemo i kao $\overrightarrow{BA}$

Kolinearni vektori: Vektori su kolinearni ako pripadaju istoj pravoj.

Komplanarni vektori: Vektori su komplanarni ako pripadaju istoj ravni.

Jedinični vektor: Vektor čiji je intenzitet 1. Od svakog ne-nula vektora možemo da napravimo jedinični vektor normalizacijom.

Normalizacija vektora: Normalizacijom se od vektora $\overrightarrow{v}$ dobija jedinični vektor $\frac{1}{|\overrightarrow{v}|}\overrightarrow{v}$. Ovaj vektor ima isti pravac i smer kao početni vektor, a intenzitet mu je 1.

T1.1: Neka su $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{V}$. Tada važe sledeća tvrđenja:

(S1) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$

Dokaz: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$

(S2) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u}$

Dokaz: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB}$

(S3) $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$

Dokaz: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$

(S4) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$

Dokaz: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$

2.2 Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Definicija, primeri, T1.3 (dokaz), T1.4.

Definicija linearne nezavisnosti: Vektori $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ su linearno nezavisni ako važi:

$$\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0} \implies \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$

T1.3: U ravni postoje dva linearno nezavisna vektora, a svaka tri su zavisna.

Dokaz: U ravni postoje 3 nekolinearne tačke O, A, B. Tada su vektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ linearno nezavisni. Posmatrajmo $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ koji pripadaju istoj ravni. Ako su $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ linearno zavisni tada važi $\overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{v} \implies 1\overrightarrow{u} - \alpha\overrightarrow{v} + 0\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$. Dakle i $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ su linearno zavisni. Pretpostavimo da su $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ linearno nezavisni. Posmatrajmo tačke u ravni O, A, B, C takve da $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$. Obeležimo tačke X i Y na pravim OA i OB tako da je $OXCY$ paralelogram. Važi $\overrightarrow{OX} = \alpha\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OY} = \beta\overrightarrow{OB}$. Tada:

$$\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} \implies \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$$

iz čega zaključujemo da su linearno zavisni što je kraj dokaza.

T1.4: U prostoru postoje tri linearno nezavisna vektora, a svaka četiri su linearno zavisni. Dokaz je potpuno analogan dokazu T1.3.

2.3 Koordinate vektora i tačaka

Baza i dimenzija vektorskog prostora, koordinate vektora u bazi, primer, reper Oe, koordinate tačke u reperu, primer, koordinate vektora $\overrightarrow{AB}$ preko koordinata tačaka A, B (dokaz).

Definicija baze: Baza je maksimalan skup linearno nezavisnih vektora.

Definicija dimenzije: Dimenzija je broj vektora u bazi.

Koordinate vektora u bazi: Ako je baza vektorskog prostora $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, tada se svaki vektor može zapisati kao $\overrightarrow{v} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2}$ i kažemo da su koordinate vektora $\overrightarrow{v}$ (α_1, α_2). Njih zapisujemo sa $[\overrightarrow{v}]_e = [\alpha_1, \alpha_2]^T$.

Reper Oe: Ako fiksiramo bazu e i tačku O, Oe ćemo zvati reperom ili koodinatnim sistemom.

Koordinate tačke u reperu: Koordinate tačke X u reperu Oe su: $[X]_{Oe} := [\overrightarrow{OX}]_e$.

Koordinate vektora $\overrightarrow{AB}$ preko koordinata tačaka A i B:

$$[\overrightarrow{AB}]_e = [\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}]_e = [\overrightarrow{AO}]_e + [\overrightarrow{OB}]_e = -[\overrightarrow{OA}]_e + [\overrightarrow{OB}]_e = [B]_{Oe} - [A]_{Oe}$$

2.4 Skalarni proizvod

Definicija, osobine, pojam ON baze, formula za skalarni proizvod u ON bazi (dokaz), računanje dužina i uglova skalarnim proizvodom, primeri.

Definicija skalarnog proizvoda: Skalarni proizvod vektora $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}$ je definisan sa $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos(\angle\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v})$.

Osobine:

(1) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ (simetričnost)

(2) $\overrightarrow{u} \cdot (\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}) = \alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + \beta(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})$ (linearnost)

(3) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}|^2 \geq 0$ (pozitivnost)

(4) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \iff \overrightarrow{u} = 0$ (nedegenerisanost)

Definicija ON baze: ON baza je svaka baza $e = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ za koju važi da je svaki vektor jedinični i svaka dva su međusobno ortogonalna. Važi: $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$.

Formula za skalarni proizvod u ON bazi: Neka za vektore $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \in \mathbb{V}$ važe jednakosti $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}$ i $\overrightarrow{u} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2}$. Tada je:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} &= (x_1\overrightarrow{v} + x_2\overrightarrow{v}) \cdot (y_1\overrightarrow{u} + y_2\overrightarrow{u}) \\
&= x_1y_1(\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1}) + x_2y_1(\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2}) + x_1y_2(\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2}) + x_2y_2(\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2}) \\
&= x_1y_1 + x_2y_2
\end{aligned}$$

Računanje dužine skalarnim proizvodom: $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{|\overrightarrow{v}|^2} = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}$.

Računanje ugla skalarnim proizvodom: $\angle\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = \arccos(\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|})$

Skalarni proizvod $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ možemo da zapišemo i kao $u^T v$.

2.5 Vektorski proizvod

Orijentacija u ravni, orijentacija u prostoru, definicija vektorskog proizvoda, osobine, vektorski proizvod baznih vektora ON+ baze, formula za vektorski proizvod u ON+ bazi (dokaz), matrica vektorskog množenja (dokaz), računanje površine i orijentacije trougla vektorskim proizvodom (dokaz), kolinearnost tačaka, da li tačka pripada trouglu (dokaz), primeri.

Orijentacija u ravni: Pozitivna ako je obrnuta od smera kazaljke na satu, inače negativna.

Orijentacija u prostoru: Koristimo pravilo desne ruke.

Definicija vektorskog proizvoda: Pravac vektorskog proizvoda je normalan na ravan koju obrazuju vektori $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$. Intenzitet vektorskog proizvoda $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\sin(\angle\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v})$. Smer je takav da je baza $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$ pozitivno orijentisana.

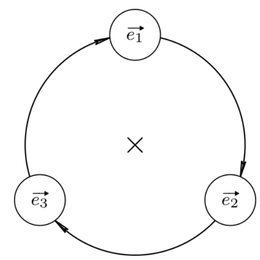
Osobine:

(1) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ (antisimetričnost)

(2) $(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \alpha(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}) + \beta(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$ (linearnost)

Vektorski proizvod baznih vektora u ON+ bazi:

Vektorski proizvod baznih vektora u ON+ bazi vidimo sa kruga desno. Na primer, ako tražimo $\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_1}$ vidimo da strelica pokazuje sa $\overrightarrow{e_1}$ na $\overrightarrow{e_2}$ pa je znak negativan, a jedini neiskorišćen vektor je $\overrightarrow{e_3}$ pa je rešenje $-\overrightarrow{e_3}$. Ako tražimo $\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1}$ vidimo da strelica pokazuje sa $\overrightarrow{e_3}$ na $\overrightarrow{e_1}$ pa je znak pozitivan. Preostali vektor je $\overrightarrow{e_2}$ pa je rešenje $+\overrightarrow{e_3}$. Ako tražimo $\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_3}$ vidimo da nema strelice koja pokazuje sa $\overrightarrow{e_3}$ na $\overrightarrow{e_3}$ pa je rešenje $\overrightarrow{0}$.



Vektorski proizvod baznih vektora [2]

Formula za vektorski proizvod u ON+ bazi: Neka su $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \in \mathbb{V}$ i važe jednakosti $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{u} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + y_3\overrightarrow{e_3}$. Tada:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} &= (x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}) \times (y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + y_3\overrightarrow{e_3}) \\
&= x_1y_1(\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_1}) + x_1y_2(\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}) + x_1y_3(\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_3}) \\
&+ x_2y_1(\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_1}) + x_2y_2(\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_2}) + x_2y_3(\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3}) \\
&+ x_3y_1(\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1}) + x_3y_2(\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_2}) + x_3y_3(\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_3}) \\
&= x_1y_1\overrightarrow{0} + x_1y_2\overrightarrow{e_3} - x_1y_3\overrightarrow{e_2} \\
&- x_2y_1\overrightarrow{e_3} + x_2y_2\overrightarrow{0} + x_2y_3\overrightarrow{e_1} \\
&+ x_3y_1\overrightarrow{e_2} - x_3y_2\overrightarrow{e_1} + x_3y_3\overrightarrow{0} \\
&= \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Matrica vektorskog množenja: $\overrightarrow{v}_\times$ je matrica vektorskog množenja za fiksirani vektor $\overrightarrow{v}$. Kada se ona pomnoži nekim vektorom $\overrightarrow{u}$ dobija se $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$. Izvodi se izračunavanjem $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{e_1}$ (prva kolona), $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{e_2}$ (druga kolona), $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{e_3}$ (treća kolona). Neka je $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$.

Tada $\overrightarrow{v}_\times = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix}$.

Površina trougla ABC**:**

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BA}|\sin(\angle\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BC}|$$

Orijentacija trougla ABC**:** Trougao ABC u reperu Oe je zadat sa $[A]_{Oe} = (x_1, x_2)^T$, $[B]_{Oe} = (y_1, y_2)^T$ i $[C]_{Oe} = (z_1, z_2)^T$. Njegove koordinate možemo da proširimo sa $[A]_{Oe} = (x_1, x_2, 0)^T$, $[B]_{Oe} = (y_1, y_2, 0)^T$ i $[C]_{Oe} = (z_1, z_2, 0)^T$. Kažemo da je trougao ABC pozitivno orijentisan ako je $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ istog pravca i smera kao $\overrightarrow{e_3}$.

Kolinearnost tačaka: Tri tačke su kolinearne ako je „površina trougla" koji obrazuju 0. Dakle $\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BC}| = 0$.

Da li tačka pripada trouglu: Tačka P pripada trouglu ABC ako su trouglovi ABP, BCP i CAP iste orijentacije.

2.6 Mešoviti proizvod

Definicija, osobine, formula za mešoviti proizvod u ON+ bazi (dokaz), zapremina paralelopipeda - T1.7 (dokaz), zapremina tetraedra, orijentacija baze prostora, nezavisnost tri vektora prostora, primeri.

Definicija mešovitog proizvoda: $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$.

Osobine:

(1) $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}]$ (antisimetričnost)

(2) $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}]$ (cikličnost)

(3) $[\alpha \cdot \overrightarrow{u} + \beta \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z}] = \alpha \cdot [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z}] + \beta \cdot [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z}]$ (linearnost)

Formula za mešoviti proizvod u ON+ bazi:

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{w} = \text{*sredi se*} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

T1.7: Zapremina paralelopipeda jednaka je apsolutnoj vrednosti mešovitog proizvoda tri vektora koji razapinju taj paralelopiped.

Dokaz: Neka je dat paralelopiped $ABCDA_1B_1C_1D_1$ i neka su $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{w}$. Tada je zapremina paralelopipeda:

$$\begin{aligned} V &= P_{ABCD}h = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|h = ||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|\,|\overrightarrow{w}|\cos(\angle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})\overrightarrow{w})| \\ &= |(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}| = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]| \end{aligned}$$

Zapremina tetraedra: $\frac{1}{6}|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]|$.

Dokaz: Tražimo zapreminu tetraedra $ABDA_1$. Dopunimo tetraedar do paralelopipeda $ABCDA_1B_1C_1D_1$. On je izgrađen od dve trostrane prizme $ABDA_1B_1D_1$ i $BCDB_1C_1D_1$ koje su jednakih jednakih zapremina. Posmatrajmo trostranu prizmu $ABDA_1B_1D_1$. Iz nje možemo da izdvojimo tetraedre $ABDA_1$, BDA_1B_1 i $DA_1B_1D_1$. Tetraedri $ABDA_1$

i BDA_1B_1 imaju iste površine baza ABA_1 i BA_1B_1 i iste visine iz tačke D pa su im i zapremine iste. Tetraedri $ABDA_1$ i $DA_1B_1D_1$ imaju iste površine baza AA_1D i DA_1D_1 i iste visine iz tačke B pa su im i zapremine iste. Dakle, trostrana prizma $ADCA_1B_1D_1$ se sastoji od tri tetraedra jednakih zapremina. Zapremina tetraedra $ABDA_1$ je jedna šestina zapremine paralelopipeda, što se i tražilo.

Orijentacija baze prostora: Ako je $[\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}] > 0$ onda je orijentacija pozitivna.

Nezavisnost tri vektora prostora: Tri vektora su nezavisna ako je zapremina paralelopipeda koji obrazuju veća od nule.

2.7 Težište, centar mase i baricentričke koordinate

Zakon poluge, rešavanje zakona poluge centrom mase dve tačke, centar mase tri tačke, "rešavanje trougla" centrom mase tri tačke, centar mase n tačaka, težište n tačaka, dokaz da definicija težišta trougla ne zavisi od tačke O - vežbe, primeri, baricentričke koordinate.

Zakon poluge: Iz jednakosti momenta sila se dobija $|AT| : |TB| = m_B : m_A$ ili vektorski $m_A\overrightarrow{TA} + m_B\overrightarrow{TB} = \overrightarrow{0}$.

Centar mase tačaka $A(m_A)$ i $B(m_B)$: $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_A+m_B}(m_A\overrightarrow{OA} + m_B\overrightarrow{OB})$.

Centar mase tri tačke: $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_A+m_B+m_C}(m_A\overrightarrow{OA} + m_B\overrightarrow{OB} + m_C\overrightarrow{OC})$.

Centar mase n tačaka: $\frac{1}{m_{A_1}+\ldots+m_{A_n}}(m_{A_1}\overrightarrow{OA_1} + \ldots + m_{A_n}\overrightarrow{OA_n}) = \overrightarrow{OT}$.

Težište n tačaka: Težište n tačaka se dobija kada su sve mase jednake. Neka važi $m_{A_1} = \ldots = m_{A_n} = m$. Tada je:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OT} &= \frac{1}{m_{A_1} + \ldots + m_{A_n}}(m_{A_1}\overrightarrow{OA_1} + \ldots + m_{A_n}\overrightarrow{OA_n}) \\
&= \frac{1}{nm}(m\overrightarrow{OA_1} + \ldots + m\overrightarrow{OA_n}) \\
&= \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n})
\end{aligned}$$

Dokaz da definicija težišta trougla ne zavisi od tačke O: Neka su date tačke A, B, C i njihove mase i neka važi $m_A + m_B + m_C = M$. Tada:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OT} &= \frac{1}{M}(m_A\overrightarrow{OA} + m_B\overrightarrow{OB} + m_C\overrightarrow{OC}) \\
\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{ST} &= \frac{1}{M}(m_A(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA}) + m_B(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SB}) + m_C(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SC})) \\
\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{ST} &= \frac{1}{M}(m_A\overrightarrow{SA} + m_B\overrightarrow{SB} + m_C\overrightarrow{SC}) + \overrightarrow{OS} \\
\overrightarrow{ST} &= \frac{1}{M}(m_A\overrightarrow{SA} + m_B\overrightarrow{SB} + m_C\overrightarrow{SC})
\end{aligned}$$

Za $m_A = m_B = m_C$ dobijamo definiciju težišta.

Baricentričke koordinate: Baricentričke koordinate tačke M su mase koje je potrebno dodeliti tačkama $A_1, \dots, A_n$ tako da tačka M postane njihov centar mase. Baricentričke koordinate se dele na homogene i nehomogene. U slučaju n tačaka $A_1(m_{A_1}), \dots, A_n(m_{A_n})$, homogene baricentričke koordinate će biti $(m_{A_1} : \dots : m_{A_n})$. Homogene baricentričke koordinate su određene do na proporcionalnost. Za normalizovane ili nehomogene baricentričke koordinate važi da je $m_{A_1} + \dots + m_{A_n} = 1$. Za proizvoljne mase $m_{A_1}, \dots, m_{A_n}$ nehomogene baricentričke koordinate dobijamo sa: $(\frac{m(A_1)}{m(A_1)+\dots+m(A_n)}, \dots, \frac{m(A_n)}{m(A_1)+\dots+m(A_n)})$.

2.8 Transformacije koordinata vektora i tačaka

Matrica prelaska, veza koordinata vektora u različitim bazama, primer, transformacija koordinata tačaka - formule (1.23, 1.24) izvođenje, primer.

Matrica prelaska: Matrica u kojoj se u i-toj koloni nalaze koordinate i-tog vektora nove baze u staroj bazi.

Transformacije koordinata tačaka: Pretpostavimo da iz repera Oe prelazimo u reper Qf. Dodatno, neka je C matrica prelaska iz baze e u bazu f. Tada:

$$[X]_{Qf} = [\overrightarrow{QX}]_f = [\overrightarrow{QO}]_f + [\overrightarrow{OX}]_e = [O]_{Qf} + C[\overrightarrow{OX}]_e = [O]_{Qf} + C[X]_{Oe} \ (1.23)$$

Ako je $[X]_{Oe} = x'$, $[X]_{Qf} = x$ i $[O]_{Qf} = q$, tada dobijamo $x = q + Cx'$ (1.24).

2.9 Transformacije koordinata u ON bazama ravni

Slučaj baza iste orijentacije, matrica rotacije, osobine matrice rotacije, slučaj baza različite orijentacije, matrica refleksije, osobine matrica refleksije, grupe $SO(2)$ i $O(2)$.

Slučaj baza iste orijentacije: Neka su dati ON reperi ravni Oe i Qf koji su iste orijentacije. Želimo da pređemo iz Oe u Qf. Označimo sa ϕ ugao $\angle\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{f_1}$. Tada važe jednakosti $\overrightarrow{f_1} = \cos(\phi)\overrightarrow{e_1} + \sin(\phi)\overrightarrow{e_2}$ i $\overrightarrow{f_2} = -\sin(\phi)\overrightarrow{e_1} + \cos(\phi)\overrightarrow{e_2}$. Dakle $[\overrightarrow{f_1}]_e = (\cos(\phi), \sin(\phi))^T$ i $[\overrightarrow{f_2}]_e = (-\sin(\phi), \cos(\phi))^T$. Odavde dobijamo formulu za ON repere iste orijentacije: $x = q + \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} x'$.

Matrica rotacije: $R_\phi = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$ je matrica rotacije vektora za ugao ϕ. Rotira se u pozitivnom smeru.

Osobine matrica rotacije:

(1) $(R_\phi)^{-1} = R_{-\phi} = (R_\phi)^T$

(2) $det(R_\phi) = 1$

(3) $R_\phi R_\psi = R_{\phi+\psi} = R_\psi R_\phi$

Slučaj baza različite orijentacije: Neka su dati ON reperi ravni Oe i Qf koji su različite orijentacije. Želimo da pređemo iz Oe u Qf. Označimo sa ϕ ugao $\angle\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{f_1}$. Tada važe jednakosti $\overrightarrow{f_1} = \cos(\phi)\overrightarrow{e_1} + \sin(\phi)\overrightarrow{e_2}$ i $\overrightarrow{f_2} = \sin(\phi)\overrightarrow{e_1} - \cos(\phi)\overrightarrow{e_2}$. Dakle $[\overrightarrow{f_1}]_e = (\cos(\phi), \sin(\phi))^T$ i $[\overrightarrow{f_2}]_e = (\sin(\phi), -\cos(\phi))^T$. Odavde dobijamo formulu za ON repere različite orijentacije: $x = q + \begin{bmatrix}\cos(\phi) & \sin(\phi)\\ \sin(\phi) & -\cos(\phi)\end{bmatrix} x'$.

Matrica refleksije: $S_\phi = \begin{bmatrix}\cos(\phi) & \sin(\phi)\\ \sin(\phi) & -\cos(\phi)\end{bmatrix}$ je matrica refleksije u odnosu na vektor $\overrightarrow{p}$. Prvi vektor baze koja se transformiše gradi sa vektorom $\overrightarrow{p}$ ugao $\frac{\phi}{2}$.

Osobine matrica refleksije:

(1) $(S_\phi)^{-1} = (S_\phi)^T$

(2) $(S_\phi)^2 = E$

(3) $det(S_\phi) = -1$

(4) $S_\phi S_\psi = R_{\phi-\psi}$

Grupa SO(2): $SO(2) = \{R_\phi \mid \phi \in \mathbb{R}\}$ je specijalna ortogonalna grupa reda 2. Broj 2 označava da se posmatra ravan.

Grupa O(2): $O(2) = SO(2) \cup \{S_\phi \mid \phi \in \mathbb{R}\} = \{A \in Gl_2(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}$ je ortogonalna grupa reda 2. Broj 2 označava da se posmatra ravan.

2.10 Afina preslikavanja

Definicija, pasivna i aktivna tačka gledišta, osobine afinih preslikavanja (T5.2) (dokaz), određenost afinog preslikavanja sa tri para odgovarajućih tačaka, predstavljanje afinih preslikavanja ravni 3×3 matricama, translacija, rotacija (oko O i oko proizvoljne tačke), refleksija u odnosu na pravu, skaliranje, smicanje, primeri.

Definicija afinih preslikavanja: Neka je $\overline{f} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ linearno preslikavanje vektorskog prostora koji je pridružen prostoru tačaka $\mathbb{E}$. Afino preslikavanje $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ je preslikavanje tačaka koje je indukovano sa $\overline{f}$ u smislu da važi sledeća ekvivalencija za svake dve tačke M i N:

$$f(M) = M' \wedge f(N) = N' \iff \overline{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$$

Pasivna tačka gledišta: Posmatramo istu tačku iz više repera. Tada se njene različite koordinate odnose na koordinate u različitim reperima.

Aktivna tačka gledišta: Posmatramo istu tačku u istom reperu pre i posle nekog afinog preslikavanja. Tada se njene različite koordinate odnose na koordinate pre i posle preslikavanja.

Teorema: Svako afino preslikavanje $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ indukovano linearnim preslikavanjem $\overline{f} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ u fiksiranom reperu Oe, ima oblik: $[f(M)]_{Oe} = [\overline{f}]_e[M]_{Oe} + [f(O)]_{Oe}$.

Dokaz:

$$\begin{aligned}
[f(M)]_{Oe} - [f(O)]_{Oe} &= [\overrightarrow{Of(M)}]_e - [\overrightarrow{Of(O)}]_e = [\overrightarrow{Of(M)}]_e + [\overrightarrow{f(O)O}]_e \\
&= [\overrightarrow{f(O)f(M)}]_e = [\overline{f}(\overrightarrow{OM})]_e = [\overline{f}]_e[\overrightarrow{OM}]_e \\
&= [\overline{f}]_e[M]_{Oe} \\
[f(M)]_{Oe} &= [\overline{f}]_e[M]_{Oe} + [f(O)]_{Oe}
\end{aligned}$$

Napomena: Kolone matrice $[\overline{f}]_e$ su zapravo slike baznih vektora baze e (i-ta kolona će biti $\overline{f}(\overrightarrow{e_i})$).

Osobine afinih preslikavanja ravni (T5.2):

(1) Preslikavaju prave u prave.

Dokaz: S obzirom da je svako afino preslikavanje indukovano linearnim preslikavanjem vektorskog prostora, a linearno preslikavanje vektorskog prostora čuva kolinearnost, tada i afino preslikavanje čuva kolinearnost, odnosno, slika prave u prave.

(2) Čuvaju razmeru kolinearnih duži.

Dokaz: Analogno prošloj osobini.

(3) Čuvaju paralelnost pravih.

Dokaz: Ako se posmatraju po dve tačke na dve paralelne prave, dobijamo 2 kolinearna vektora. Odavde se analogno završava dokaz.

(4) Odnos površina slike i originala jednak je $|det(a_{ij})|$.

Dokaz: Napomenimo da je a_{ij} zapravo matrica $[\overline{f}]_e$. Zbog jednostavnijeg zapisa i jer je reper fiksiran ćemo izostaviti reper iz zapisa. Neka je $f(O) = O'$, $f(A) = A'$ i $f(B) = B'$. Površina trougla OAB je $\frac{1}{2}|det(\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB})|$, a površina trougla $O'A'B'$ je $\frac{1}{2}|det(\overrightarrow{O'A'}\overrightarrow{O'B'})|$. Takođe su $\overrightarrow{O'A'} = a_{ij}\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{O'B'} = a_{ij}\overrightarrow{OB}$. Za kraj, koristimo svojstvo $det(AB) = det(A)det(B)$.

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{det(\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB})}{det(\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB})} \\
det(a_{ij}) &= \frac{det((a_{ij}\overrightarrow{OA})(a_{ij}\overrightarrow{OB}))}{det(\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB})} \\
det(a_{ij}) &= \frac{det(\overrightarrow{O'A'}\overrightarrow{O'B'})}{det(\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB})}
\end{aligned}$$

(5) Čuvaju centar mase i baricentričke koordinate.

Dokaz: Sledi direktno iz čuvanja razmere.

(6) Preslikavanja za koje važi $det(a_{ij}) > 0$ čuvaju orijentaciju, inače menjaju.

Dokaz: Po algebarskoj definiciji, dve baze su iste orijentacije ako je determinanta matrice prelaska iz jedne u drugu veća od nule. Ovo je aktivna varijanta ove definicije.

Određenost afinog preslikavanja sa tri para odgovarajućih tačaka: Neka su date tačke $O = (0,0)$, $A = (1,0)$ i $B = (0,1)$. Hoćemo da odredimo afino preslikavanje koje slika O, A i B u proizvoljne nekolinearne tačke O', A' i B'. Važi da je $f(O) = O'$, a kolone matrice $[\overline{f}]_e$ su kolone vektora $\overrightarrow{O'A'}$ i $\overrightarrow{O'B'}$ čime smo odredili afino preslikavanje. Hoćemo da preslikamo proizvoljne nekolinearne tačke E, F i G u E', F' i G'. Postoji afino preslikavanje g koje slika tačke O, A i B u E, F i G i postoji afino preslikavanje h koje slika tačke O, A i B u E', F' i G'. Traženo preslikavanje će biti $h \circ g^{-1}$.

Translacija: $\mathcal{T}_{\overrightarrow{t}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_t \\ 0 & 1 & y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, gde je $\overrightarrow{t} = (x_t, y_t)$ vektor za koji se translira.

Rotacija oko O: $\mathcal{R}_\phi = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, gde je ϕ ugao za koji se rotira.

Rotacija oko proizvoljne tačke: $\mathcal{T}_{\overrightarrow{OM}} \circ \mathcal{R}_\phi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MO}}$, gde je M tačka oko koje rotiramo, a ϕ ugao za koji rotiramo.

Refleksija u odnosu na pravu koja prolazi kroz O: $\mathcal{S}_{p_0} = \begin{bmatrix} cos(\phi) & sin(\phi) & 0 \\ sin(\phi) & -cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, gde je $\frac{\phi}{2}$ ugao između x ose i p_0. Refleksija u odnosu na pravu koja prolazi kroz proizvoljnu tačku se dobija analogno kao rotacija.

Skaliranja sa centrom u tački O: $\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, gde je λ_1 koeficijent skaliranja u pravcu prvog baznog vektora, a λ_2 koeficijent skaliranja u pravcu drugog baznog vektora. Skaliranje sa centrom u proizvoljnoj tački analogno rotaciji.

Smicanje: Smicanje preslikava kvadrat u pravougaonik iste površine. Matrice smicanja:

$\mathcal{S}_x(\lambda) = \begin{bmatrix} x & \lambda & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, gde je λ koeficijent smicanja u pravcu x ose.

$\mathcal{S}_y(\lambda) = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ \lambda & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, gde je λ koeficijent smicanja u pravcu y ose.

2.11 Izometrije ravni i prostora

Defincija, direktne i indirekne izometrije, ortogonalne matrice i njihova determinanta, opis afinih transformacija ravni (pitanje 9), rotacija oko prave u prostoru, rotacije oko koordinatnih osa, Rodrigezova formula, refleksija u odnosu na ravan (računanje), Prva Ojlerova teo-

rema, Ojlerovi uglovi, Druga Ojlerova teorema, veza sopstvenih i svetskih rotacija - smisao, slučaj zaključanog žiroskopa.

Definicija izometrije: Preslikavanje koje čuva dužine u prostoru $\mathbb{E}$ proizvoljne dimenzije.

Direktne izometrije: Čuvaju orijentaciju (kretanja).

Indirektne izometrije: Menjaju orijentaciju.

Ortogonalna matrica i njena determinanta: Matrica A za koju važi $AA^T = E$. Za determinantu ortogonalne matrice važi $1 = det(E) = det(AA^T) = det(A)det(A^T) = det(A)det(A) = det(A)^2$.

Opis afinih transformacija ravni: Pitanje 9.

Matrica rotacije oko x ose: $\mathcal{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin\phi \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$

Matrica rotacije oko y ose: $\mathcal{R}_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$

Matrica rotacije oko z ose: $\mathcal{R}_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin\phi & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rotacija oko proizvoljne prave koja sadrži O (Rodrigezova formula): Neka je dat ON reper Oe i neka su date tačka M i prava p_0 koja sadrži tačku O i ugao ϕ za koji rotiramo tačku M oko prave p_0. Neka je jedinični vektor pravca prave p_0 vektor $\overrightarrow{p}$. Posmatrajmo ravan α koja sadrži tačku M i njen normalni vektor je vektor $\overrightarrow{p}$. Neka je $\alpha \cap p_0 = \{O'\}$ i neka su $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{OO'}$ i $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{O'M}$. Tada:

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} = \lambda\overrightarrow{p} + \overrightarrow{x_2}$$
$$\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{x} = \lambda(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p}) + \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{x_2} = \lambda|\overrightarrow{p}|^2 = \lambda$$

Tada za x_1 dobijamo $x_1 = p\lambda = p(p^T x) = (pp^T)x$, a za x_2 dobijamo $x_2 = x - x_1 = Ex - (pp^T)x = (E - pp^T)x$. Neka je sada M' tačka koja se dobija rotacijom tačke M oko prave p za ugao ϕ. Možemo da posmatramo ortogonalnu bazu $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{x_2})$. Tada je:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'M'} &= \cos(\phi)\overrightarrow{x_2} + \sin(\phi)(\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{x_2}) \\ &= \cos(\phi)\overrightarrow{x_2} + \sin(\phi)(\overrightarrow{p} \times (\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2})) \\ &= \cos(\phi)\overrightarrow{x_2} + \sin(\phi)(\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{x}) \end{aligned}$$

Na kraju dobijamo koordinate tačke M':

$$[M']_{Oe} = [\overrightarrow{OM'}]_e = [\overrightarrow{OO'}]_e + [\overrightarrow{O'M'}]_e = (pp^T)x + \cos(\phi)(E - pp^T)x + \sin(\phi)\overrightarrow{p}_\times x$$

Možemo da izdvojimo matricu $[R_p(\phi)]_e = pp^T + \cos(\phi)(E - pp^T) + \sin(\phi)\overrightarrow{p}_\times$ koju nazivamo Rodrigezova formula.

Refleksija u odnosu na ravan koja sadrži O: Neka je dat ON reper Oe, ravan α koja prolazi kroz O zadata jediničnim normalnim vektorom $\overrightarrow{p}$ i neka je data tačka M na koju hoćemo da primenimo refleksiju u odnosu na ravan i neka se tom refleksijom dobija tačka M'. Neka je $\alpha \cap MM' = \{O'\}$. Dobijamo $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{O'M}$. Neka su sa p i x označene koordinate vektora $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{OM}$.

Analogno sa pitanjem za Rodrigezovu formulu:

$$\overrightarrow{O'M} = \lambda \overrightarrow{p}$$
$$\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{p} \cdot (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{OM} = \lambda$$

Odavde, u koordinatama dobijamo $[\overrightarrow{O'M}]_e = (pp^T)x$. Na kraju dobijamo koordinate preslikane tačke:

$$[\overrightarrow{OM'}]_e = Ex - 2(pp^T)x$$

Možemo da izdvojimo matricu: $[S_\alpha]_e = E - 2pp^T$ koju nazivamo matrica refleksije u odnosu na ravan.

Prva Ojlerova teorema: Svako kretanje koje ima fiksiranu tačku O' se može predstaviti kao rotacija oko neke orijentisane prave koja sadrži tačku O'.

Druga Ojlerova teorema: Svako kretanje koje fiksira O se može izraziti kao kompozicija tri sopstvene rotacije oko koordinatnih osa: $R_{Ox_2}(\phi) \circ R_{Oy_1}(\theta) \circ R_{Oz}(\psi)$ gde su uglovi $\phi, \psi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Uglovi ϕ, θ, ψ se nazivaju Ojlerovi uglovi. Prvom rotacijom se $Oxyz$ slika u $Ox_1y_1z_1$, drugom rotacijom u $Ox_2y_2z_2$ i trećom rotacijom u $Ox_3y_3z_3$.

Veza sopstvenih i svetskih koordinata: $[R_{Ox_2}(\phi) \circ R_{Oy_1}(\theta) \circ R_{Oz}(\psi)]_e = R_{Oz}(\psi) \circ R_{Oy}(\theta) \circ R_{Ox}(\phi)$.

Slučaj zaključanog žiroskopa: Javlja se kada se ravni Oxy i Oy_3z_3 poklope. Tada je $|Oz| = |Ox_3|$ zbog čega imamo jedan stepen slobode manje.

2.12 Kvaternioni

Definicija, sabiranje, množenje, osobine, inverzni kvaternion, primeri, konjugacija kvaternionom i izometrije.

Definicija kvaterniona: $\mathbb{H} = \{xi + yj + zk + w \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$, gde su i, j i k imaginarne jedinice.

Sabiranje kvaterniona: Normalno.

Množenje kvaterniona: $ij = k = -ji$ i $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

Realni i imaginarni deo: Realni deo: $\mathcal{R}(q) = w$, imaginarni deo: $\mathcal{I}(q) = xi + yj + zk = \overrightarrow{v}$. Važi $q = xi + yj + zk + w = \mathcal{I}(q) + \mathcal{R}(q) = [(x, y, z), w] = [\overrightarrow{v}, w]$.

Osobine:

(1) $q + q_1 = [\overrightarrow{v}, w] + [\overrightarrow{v_1}, w_1] = [\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v_1}, w + w_1]$

(2) $qq_1 = [\overrightarrow{v}, 0][\overrightarrow{v_1}, 0] = [\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v_1}, -\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_1} \rangle]$

(3) $qq_1 = [\overrightarrow{v}, w_1][\overrightarrow{v_1}, w_1] = [\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v_1} + w\overrightarrow{v_1} + w_1\overrightarrow{v}, ww_1 - \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_1} \rangle]$
Napomena: $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$ je drugi zapis za skalarni proizvod.

Konjugovani kvaternion: $\overline{q} = -xi - yj - zk + w$.

Inverzni kvaternion: $qq^{-1} = 1$. Osobina: $q\overline{q} = |q|^2 \implies q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}$.

Konjugacije kvaternionom: Svaki kvaternion različit od nule određuje konjugaciju $C_q = qpq^{-1}$. Dve konjugacije su iste ako i samo ako važi $q = \lambda h$, gde je $\lambda \in \mathbb{R}$.

Izometrije: $q = [\overrightarrow{v}\sin(\frac{\alpha}{2}), \cos(\frac{\alpha}{2})]$ je rotacija oko jediničnog vektora $\overrightarrow{v}$ za ugao α u pozitivnom smeru.

2.13 Afina geometrija ravni

Predstavljanje prave, razne jednačine pravih, normalni vektor prave, vektor pravca prave, presek dve prave zadate jednačinama, presek pravih zadatih tačkom i vektorom pravca (dokaz), presek dve duži, parametarsko zadavanje trougla, paralelograma.

Implicitna jednačina prave: $ax + by + c = 0$.

Parametarska jednačina prave: $M(t) = P + t\overrightarrow{p}$.

Normalni vektor: Iz implicitnog zapisa možemo da pročitamo normalni vektor $\overrightarrow{n_p} = (a, b)^T$.

Vektor pravca: Iz parametarskog zapisa možemo da pročitamo vektor pravca $\overrightarrow{p}$.

Presek pravih: Dobija se rešavanjem dve jednačine prave sa dve nepoznate.

Presek dve duži: Duž AB možemo da zadamo parametarski sa $M(t) = A + t\overrightarrow{AB}, t \in [0, 1]$. Za presek dve duži određujemo tačku preseka kao za prave, a zatim određujemo da li za obe prave važi da je $t \in [0, 1]$.

Parametarsko zadavanje trougla i paralelograma: Trougao možemo da zadamo sa $M(t_1, t_2) = A + t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AC}$, $t_1, t_2 \in [0, 1]$, $t_1 + t_2 \leq 1$. Paralelogram možemo da zadamo sa $M(t_1, t_2) = A + t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AC}$, $t_1, t_2 \in [0, 1]$.

2.14 Ravan u prostoru

Zadavanje ravni tačkom i normalnim vektorom (dokaz), skiciranje ravni, specijalni slučajevi ravni, parametarska jednačina ravni, jednačina ravni kroz 3 tačke, primeri.

Zadavanje ravni tačkom i normalnim vektorom: Neka je dat normalni vektor $\overrightarrow{n_\alpha} = (a, b, c)^T$ i tačka $P = (x_1, y_1, z_1)$ koja pripada ravni. Posmatrajmo tačku sa ravni $A = (x, y, z)$. Važi da je $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = 0$. Odavde: $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot (a, b, c) =$

$ax + by + cz - (ax_1 + by_1 + cz_1) = 0$. Ako obeležimo $d = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$ dobijamo $ax + by + cz + d = 0$.

Skiciranje ravni: Skiciranje ravni može da se vrši tako što se prvo izračunaju i označe preseci sa osama.

Parametarska jednačina ravni: $M(t, s) = A + t\overrightarrow{v} + s\overrightarrow{u}$, gde je A tačka koja pripada ravni, a $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{u}$ su nekolinearni vektori paralelni sa ravni.

Jednačina ravni kroz tri tačke: Ako su date nekolinearne tačke A, B i C, tada je jednačine ravni: $M(t, s) = A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$. Ako su tačke kolinearna ne može se jednoznačno odrediti ravan koja ih sadrži.

2.15 Prava u prostoru

Parametarska i "kanonska" jednačina prave, prava AB i podela duži AB na jednake delove, prava kao presek dve ravni, pramen ravni, primeri.

Parametarska jednačina: $M(t) = A + t\overrightarrow{p}$, gde je A tačka na pravoj, a $\overrightarrow{p}$ je vektor pravca.

„Kanonska“ jednačina: „Kanonska“ je pod navodnicima jer bi nešto što je kanonsko trebalo da bude jedinstveno, što ova jednačina ne mora da bude. Kanonska jednačina prave: $\frac{x-x_0}{p_x} = \frac{y-y_0}{p_y} = \frac{z-z_0}{p_z} = t$. Dopuštamo da p_x, p_y ili p_z budu nula.

Prava AB: Ako su date dve različite tačke A i B možemo jednoznačno da odredimo pravu koja prolazi kroz njih formulom $M(t) = A + t\overrightarrow{AB}$.

Podela duži AB na jednake delove: Ako želimo da podelimo duž AB na n jednakih delova i želimo da nađemo m-tu tačku podele to radimo po formuli: $T_m = A + \frac{m}{n}\overrightarrow{AB}$, važi da je $T_0 = A$ i $T_n = B$.

Prava kao presek dve ravni: Dobija se kao rešenje sistema dve jednačine od tri nepoznate. Može da nema rešenja (ravni su paralelne), ima beskonačno mnogo rešenja koja formiraju pravu (ravni se seku po pravoj) ili ima beskonačno mnogo rešenja koja formiraju ravan (ravni se poklapaju).

Pramen ravni: Ako se dve ravni seku po pravoj, njihovom linearnom kombinacijom se dobija svaka ravan koja sadrži tu pravu i ovo se naziva pramen ravni. U opštem primeru, neka je $\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ i $\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Tada je pramen ravni: $\lambda_1 \cdot (a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$.

2.16 Međusobni položaji pravih i ravni

Međusobni položaji dve prave (zadatih tačkom i vektorom pravca) u prostoru, međusobni položaj prave i ravni, međusobni položaji dve ravni, mimoilazne prave, zajednička normala -

T4.3 (dokaz), rastojanje mimoilaznih pravih - T4.4 (dokaz).

Međusobni položaj dve prave: Dve prave mogu da budu paralelne, mimoilazne, da se poklapaju i da se seku. Možemo da rešavamo dve jednačine sa dve nepoznate. Ako postoji jedno rešenje onda se seku. Ako postoji beskonačno mnogo rešenja onda se poklapaju. Ako nema rešenja, a vektori su kolinearni onda su prave paralelne. Ako ništa od prethodnog ne važi onda su mimoilazne.

Međusobni položaj prave i ravni: Prava i ravan mogu da budu paralelne, da se seku ili da ravan sadrži pravu. Ako sistem jednačina ima jedinstveno rešenje onda se seku, ako ima beskonačno mnogo rešenja onda ravan sadrži pravu, inače su paralelne.

Međusobni položaj dve ravni: Dve ravni mogu da se poklapaju, budu paralelne ili da se seku. Slučajevi su analogni slučajevima međusobnog položaja prave i ravni.

Mimoilazne prave Prave preko kojih ne može da se postavi ravan.

T4.3: Mimoilazne prave p i q imaju jedinstvenu zajedničku normalu.

Dokaz: Neka su date prave p i q. Vektor pravca prave n koja je normalna na obe prave će biti $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$, gde su $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$ vektori pravca pravih p i q. Sve prave čiji su vektori pravca ortogonalni i sa $\overrightarrow{p}$ i sa $\overrightarrow{q}$ i koje seku pravu p će pripadati ravni α koja se konstruiše jednom tačkom sa prave p i vektorima $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$. Analogno možemo da konstruišemo ravan β koja će sadržati sve prave čiji su vektori pravca ortogonalni i sa $\overrightarrow{p}$ i sa $\overrightarrow{q}$ i koje seku pravu q. Presek ove dve ravni će biti prava n koja je jedinstvena jer su p i q mimoilazne. Prava n je normalna na prave p i q jer je njen koeficijent pravca $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$ i seče ih po konstrukciji.

T4.4 Rastojanje između mimoilaznih pravih je: $\frac{|[\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|p \times q|}$ gde su P i $\overrightarrow{p}$ tačka i vektor pravca prave p, a Q i $\overrightarrow{q}$ tačka i vektor pravca prave q.

Dokaz: U brojiocu je zapravo zapremina paralelopipeda, a u imeniocu je površina baze zbog čega se deljenjem tačno dobija visina koju tražimo.

2.17 Projekcije

Normalna projekcija na ravan Oxy (je linearno preslikavanje), normalna projekcija na proizvoljnu ravan (dokaz), centralna projekcija, formule centralne projekcije iz $C(0,0,0)$ na ravan $z = f$, kartografske projekcije, definicija i formule stereografska projekcija.

Normalna projekcija na ravan Oxy: Matrica $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ je matrica normalne projekcije na ravan Oxy.

Normalna projekcija na proizvoljnu ravan: Neka je α ravan koja prolazi kroz O zadata jediničnim normalnim vektorom $\overrightarrow{p}$ i neka je data tačka M koju hoćemo da projektujemo na ravan i neka se tom projekcijom dobija tačka M'. Označimo kolone vektora $\overrightarrow{p}$,

$\overrightarrow{OM}$ i $\overrightarrow{OM'}$ redom sa p, x, x'. Tada, analogno dokazu formule refleksije u odnosu na ravan, dobijamo formulu: $x' = (E - pp^T)x$.

Centralna projekcija: Za centralnu projekciju je potrebno da fiksiramo ravan na koju projektujemo i tačku u odnosu na koju projektujemo (iz koje posmatramo).

Formula centralne projekcije u odnosu na tačku $C(0,0,0)$ na ravan $z = d$: Posmatrajmo proizvoljnu tačku $M(x,y,z)$. Neka je njena projekcija tačka $M'(x',y',z')$. Tada je $x' = \frac{d}{z}x$, $y' = \frac{d}{z}y$ i $z' = \frac{d}{z}z = d$. Ovo možemo izraziti matrično preko homogenih koordinata. Neka je $x' = \frac{x_1'}{x_4'}$, $y' = \frac{x_2'}{x_4'}$ i $z' = \frac{x_3'}{x_4'}$. Tada se centralna projekcija može predstaviti formulom: $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$.

Kartografske projekcije: Projektuju zakrivljene površine na ravan.

Definicija stereografske projekcije: Specijalan slučaj centralne projekcije, vrsta kartografske projekcije kojom se jedinična sfera projektuje na ravan. Centar projekcije je neka tačka sfere, a ravan na koju se projektuje tangira sferu.

Izvođenje formula stereografske projekcije: Neka je $C = (0,0,1)$ i $z = -1$. Posmatrajmo tačku na lopti $M = (x,y,z)$ i pravu $p(\lambda) = C + \lambda\overrightarrow{CM}$. Važi $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$ i $z' = \lambda z + \lambda = -1$. Odavde dobijamo $\lambda = \frac{1}{1-z}$. Na kraju dobijamo formule stereografske projekcije: $x' = \frac{x}{1-z}$, $y' = \frac{y}{1-z}$ i $z' = -1$.

2.18 Uglovi između pravih i ravni

Merenje uglova (stepeni, radijani, nagib u procentima), ugao između 2 prave, ugao između prave i ravni, ugao između dve ravni, ugao između pljosni tetraedra (na dva načina), računski primeri.

Merenje uglova: Veza stepena i radijana: $180° = \pi$. Radijan predstavlja odnos dužine luka i dužine poluprečnika.

Merenje nagiba u procentima: Merimo ugao između hipotenuze i nalegle katete. Označimo dužinu te katete sa a, a dužinu druge katete sa b. Tada će nagib biti $\frac{b}{a}100\%$. Dakle, ako je dužina jedne katete 1 metar, a dužina druge katete 5 centimetara, tada će nagib hipotenuze biti 5%.

Ugao između dve prave: Određuje se kao ugao između vektora pravca tih pravih.

Ugao između prave i ravni: Određuje se kao $\frac{\pi}{2} - \angle\overrightarrow{n_\alpha}\overrightarrow{p}$ gde je $\overrightarrow{n_\alpha}$ normalni vektor ravni, a $\overrightarrow{p}$ vektor pravca prave.

Ugao između dve ravni: Ugao između njihovih normalnih vektora.

Ugao između pljosni tetraedra:

(1) Posmatrajmo jediničnu kocku $ABCDA'B'C'D'$. Tačke A, C, B' i D' formiraju pravilni tetraedar. Lako možemo da odredimo koordinate ovih tačaka.

(2) Posmatrajmo pravilni jedinični tetraedar $ABCD$. Označimo sredinu stranice AB sa M. Izdvojimo trougao MDC. Zanima nas ugao $\angle CMD$. Važi $|MD| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|DC| = 1$ i $|MC| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Preko kosinusne teoreme za trougao CMD kod ugla $\angle CMD$ dobijamo $|DC|^2 = |MD|^2 + |MC|^2 - 2|MD||MC|\cos(\angle CMD)$, odakle je $\angle CMD = \arccos(\frac{1}{3})$.

2.19 Rastojanja

Rastojanje između tačke i prave (sa izvodjenjem), rastojanje između tačke i ravni (dokaz), rastojanje između mimoilaznih pravih (pitanje 16).

Rastojanje između tačke i prave: Neka je data prava p i tačka A čije rastojanje se traži. Možemo da izaberemo neku tačku B na pravoj i da izračunamo površinu paralelograma zadatog vektorima: $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{p}$. Tada se tražena visina dobija formulom $d(A,p) = \frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{p}|}{|\overrightarrow{p}|}$.

Rastojanje između tačke i ravni: Potpuno analogno osim što se umesto površine i dužine koristi zapremina i površina.

Rastojanje između mimoilaznih pravih: Pitanje 16.

2.20 Prodor prave kroz trougao

Uslov da prava prodire trougao (objašnjenje), određivanje prodorne tačke, primer. Presek trougla i ravni.

Uslov da prava prodire trougao (objašnjenje): Neka je dat trougao ABC i prava p određena tačkom P i vektorom $\overrightarrow{p}$. Označimo sa $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ vektore $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ i $\overrightarrow{PC}$. Možemo da odredimo orijentaciju vektora $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{p})$, $(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{p})$ i $(\overrightarrow{w},\overrightarrow{u},\overrightarrow{p})$. Ako su sve iste orijentacije, onda će presek pripadati trouglu. Orijentacije određujemo mešovitim proizvodom. Specijalno, ako je tačno jedan od mešovitih proizvoda jednak nula, tada će presek biti na nekoj od stranica. Ako je mešoviti proizvod neka dva jednak nula tada će tačka preseka biti podudarna sa jednim od temena.

Određivanje prodorne tačke: Označimo sa M presek ravni koja sadrži trougao sa pravom p. Tada će važiti $0 = [\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM}]$ jer su ovi vektori komplanarni i neka je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{w} - \overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{p} - \overrightarrow{u}$. Iz jednakosti dobijamo:

$$
\begin{aligned}
0 &= [\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}-\overrightarrow{u},t\overrightarrow{p}-\overrightarrow{u}]\\
&= [\overrightarrow{v},-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{u}] + [\overrightarrow{v},-\overrightarrow{u},t\overrightarrow{p}] + [\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},-\overrightarrow{u}] + [\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},t\overrightarrow{p}]\\
&\quad + [-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{u}] + [-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{u},t\overrightarrow{p}] + [-\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},-\overrightarrow{u}] + [-\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},t\overrightarrow{p}]\\
&= [\overrightarrow{v},-\overrightarrow{u},t\overrightarrow{p}] + [\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},-\overrightarrow{u}] + [\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},t\overrightarrow{p}] + [-\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},t\overrightarrow{p}]\\
&= -[\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}] - t[\overrightarrow{v},\overrightarrow{u},\overrightarrow{p}] + t[\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{p}] - t[\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{p}]\\
[\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}] &= t([\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{p}] - [\overrightarrow{v},\overrightarrow{u},\overrightarrow{p}] - [\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{p}])
\end{aligned}
$$

odakle dobijamo traženu formulu $t = \frac{[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]}{[\vec{v},\vec{w},\vec{p}]+[\vec{u},\vec{v},\vec{p}]+[\vec{w},\vec{u},\vec{p}]}$.

Presek trougla i ravni: Trougao i ravan mogu da se ne seku, da trougao pripada ravni, da trougao dodiruje ravan ivicom, da trougao dodiruje ravan temenom ili da trougao seče ravan po duži. Prvo odredimo da li neka od tačaka pripada ravni. Ako sve tri pripadaju onda trougao pripada ravni, ako tačno dve pripadaju onda ivica trougla pripada ravni. Ako samo jedna pripada ne možemo ništa da zaključimo dok ne proverimo da li naspramna ivica seče ravan, ako seče onda trougao seče ravan, ako ne seče onda trougao dodiruje ravan temenom. Ako ništa od ovoga nije ispunjeno onda proveravamo da li ivice seku ravan. Tačno dve ivice će seći ravan, ili nijedna ivica neće seći ravan. Ako tačno dve ivice seku ravan onda možemo da odredimo duž po kojoj se trougao i ravan seku. Ako nijedna ivica ne seče ravan onda se ravan i trougao ne seku.

2.21 Konusni preseci

Definicija konusnog preseka, konika, teorema o žiži i direktrisi (formulacija), konusni preseci u prirodi (kosi hitac, Keplerovi zakoni (formulacije), senka kruga, tj. sfere).

Definicija konusnog preseka: Neka se prave s i i seku u tački T. Konus se dobija kada se oko prave s rotira prava i. Prava s se naziva osa, rotirana prava i u raznim položajima izvodnica, a tačka T teme konusa. Konusni preseci su svi preseci koji se dobijaju pri preseku konusa i ravni.

Konika: Konusni presek koji ne sadrži teme konusa. Konike su krug, elipsa, parabola i hiperbola.

Teorema o žiži i direktrisi: U ravni α konike postoje prava d (direktrisa) i tačka F (žiža) takve da za svaku tačku konike M važi $const = e = \frac{|MF|}{d(M,d)}$. Broj e se naziva ekscentricitet konike i važi:

(1) za $e = 0$ krug;

(2) za $0 < e < 1$ elipsa;

(3) za $e = 1$ parabola;

(4) za $e > 1$ hiperbola.

Kosi hitac: Putanja kosog hica ima oblik parabole.

Prvi Keplerov zakon: Planete oko Sunca opisuju eliptične putanje, pri čemu se Sunce nalazi u zajedničkoj žiži.

Drugi Keplerov zakon: Planeta formira jednake površine odsečka elipse sa Suncem u jednakim vremenskim intervalima.

Treći Keplerov zakon: Kvadrati perioda obilaska planeta oko Sunca srazmerni su kubu veće poluose elipse.

Senke kruga: Senka kružnog predmeta na ravnom zidu je konika. Zid će zapravo biti ravan koja seče „konus“ formiran od svetlosti koju emituje kružni predmet.

2.22 Elipsa

Osnovni elementi elipse, Fokusna osobina elipse: formulacija, skica, (dokaz), parametarska jednačina elipse.

Poluose elipse: Za poluose a i b važi $a > b > 0$.
Žiže elipse: Tačke $F_1(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ i $F_2(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$.
Ekscentricitet elipse: $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.
Direktrise elipse: $d_1 : x = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$ i $d_2 : x = -\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$.
Kanonska jednačina elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Fokusne osobine elipse: Za proizvoljnu tačku M važi $|MF_1| + |MF_2| = 2a$.
Dokaz: Neka za tačku $M(x, y)$ važi $|MF_1|+|MF_2| = p$. Za $|MF_1|$ i $|MF_2|$ važe jednakosti $|MF_1| = \sqrt{y^2 + (x - \sqrt{a^2 - b^2})^2}$ i $|MF_2| = \sqrt{y^2 + (x + \sqrt{a^2 - b^2})^2}$. Iz jednačine elipse dobijamo $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$. Dobijamo jednakosti:

$$\begin{aligned}
p &= |MF_1| + |MF_2| \\
&= \sqrt{y^2 + (x - \sqrt{a^2 - b^2})^2} + \sqrt{y^2 + (x + \sqrt{a^2 - b^2})^2} \\
&= \sqrt{y^2 + x^2 + a^2 - b^2 - 2x\sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{y^2 + x^2 + a^2 - b^2 + 2x\sqrt{a^2 - b^2}} \\
&= \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + x^2 + a^2 - b^2 - 2x\sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + x^2 + a^2 - b^2 + 2x\sqrt{a^2 - b^2}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 + a^2 - 2x\sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 + a^2 + 2x\sqrt{a^2 - b^2}} \\
p^2 &= 2(\frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 + a^2) + 2\sqrt{(\frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 + a^2)^2 - 4x^2(a^2 - b^2)} \\
&= 2(\frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 + a^2) + 2\sqrt{(a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2)^2} \\
&= 2(\frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 + a^2) + 2(a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2) \\
&= 4a^2 \\
p &= 2a
\end{aligned}$$

Skiciranje: Ova osobina se koristila za skiciranje elipsi. Na ravnoj podlozi se pričvrste dva eksera na udaljenosti $2\sqrt{a^2 - b^2}$ i za njih se veže kanap dužine $2a$. Trag olovke koji drži kanap zategnutim će predstavljati elipsu.

Parametarska jednačina elipse: $x = a\cos(\phi)$, $y = b\sin(\phi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$, ugao ϕ ne predstavlja ugao između vektora položaja i x ose.

2.23 Hiperbola

Osnovni elementi hiperbole, fokusna osobina hiperbole: formulacija, skica, parametarska jednačina hiperbole.

Poluose hiperbole: Za poluose a i b važi $a, b > 0$.

Žiže hiperbole: Tačke $F_1(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ i $F_2(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$.

Ekscentricitet hiperbole: $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

Direktrise hiperbole: $d_1 : x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ i $d_2 : x = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Asimptote hiperbole: $a_1 : y = \frac{b}{a}x$ i $a_2 : y = -\frac{b}{a}x$.

Kanonska jednačina hiperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Fokusne osobine hiperbole: Za proizvoljnu tačku M važi $||MF_1| - |MF_2|| = 2a$.

Skiciranje: Možemo da opišemo krug poluprečnika $2a$ oko tačke F_1. Zatim postavljamo drugi krug proizvoljnog poluprečnika oko tačke M tako da dodiruje tačku F_2 i prvi krug. Ovako dobijamo sve tačke sa jedne polovine hiperbole. Analogno dobijamo i za drugu polovinu hiperbole.

Parametarska jednačina hiperbole: $x = \pm a\cosh(\phi)$, $y = b\sinh(\phi)$, $\phi \in \mathbb{R}$.

2.24 Parabola

Osnovni elementi parabole, fokusna osobina parabole, putanja kosog hica je parabola (izvodjenje putanje, domet, maksimalna visina, vreme leta...)

Parametar parabole: Broj p.

Žiže parabole: Tačka $F(\frac{p}{2}, 0)$.

Direktrisa parabole: d: $x = -\frac{p}{2}$.

Osa parabole: Prava o.

Jednačina parabole: $y^2 = 2px$.

Fokusna osobina hiperbole: Svaka tačka parabole je jednako udaljena od žiže i od direktrise.

Putanja kosog hica je parabola: Pretpostavimo da ispaljujemo kosi hitac sa početnom brzinom $\overrightarrow{v_0} = (v_{0x}, v_{0y})^T$. Na njega deluje samo gravitacija, dakle $\overrightarrow{a} = (0, -g)^T$. Ovo možemo da zapišemo i kao $a(t) = (0, -g)$. Integraljenjem dobijamo $v(t) = (cv_x, -gt + cv_y)$. Za $t = 0$ dobijamo $v(0) = (cv_x, cv_y) = (v_{0x}, v_{0y})$. Još jednim integraljenjem dobijamo $s(t) = (v_{0x}t + cs_x, v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} + cs_y)$. Za $t = 0$ dobijamo $s(0) = (cs_x, cs_y) = (0, 0)$. Dobijamo da je jednačina kosog hica $s(t) = (v_{0x}t, v_{0y}t - \frac{gt^2}{2})$. Važi da je $x = v_{0x}t$, odakle dobijamo $t = \frac{x}{v_{0x}}$. Sada za y imamo $y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_{0y}\frac{x}{v_{0x}} - \frac{gx^2}{2v_{0x}^2} = x\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - x^2\frac{g}{2v_{0x}^2}$. Ovo je oblik parabole.

Domet kosog hica i vreme leta: Domet se dobija kada je $y = t(v_{0y} - \frac{gt}{2}) = 0$. Nas zanima $t \neq 0$, dakle $t = 2\frac{v_{0y}}{g}$. Ovim dobijamo vreme leta. Da bismo izračunali domet potrebno je da izračunamo x za vreme leta. Dobijamo $x = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$.

Maksimalna visina kosog hica: Maksimalna visina se dobija za $v_{0y} = 0$. Dakle, $0 = v_{0y} - gt$ odakle dobijamo $t = \frac{v_{0y}}{g}$. Maksimalna visina je $y = \frac{v_{0y}^2}{2g}$.

2.25 Optičke osobine krivih drugog reda

Optička osobina parabole (objašnjenje, skica, dokaz, primene), optička osobina elipse i hiperbole.

Optička osobina parabole: Zraci koji izviru iz žiže parabole se odbijaju paralelno sa osom parabole.

Dokaz: Označimo sa $F(\frac{p}{2}, 0)$ žižu parabole, neka se zrak odbija od parabole u tački M i neka prolazi kroz tačku R. Neka tangenta t iz tačke M seče osu u tački $Q(x_0, y_0)$. Važi da je $|FQ| = \frac{p}{2} + x_0$ i da je $|FM| = d(M, d) + x_0 = \frac{p}{2} + x_0$. Dakle trougao FQM je jednakokraki iz čega zaključujemo da je $\angle FQM = \angle FMQ$. Iz zakona odbijanja svetlosti zaključujemo da je i $\angle(RM, t) = \angle FMQ$ što smo i hteli.

Primena: Ako parabolu rotiramo oko njene ose dobijamo rotacioni paraboloid. On se primenjuje u radarima (u kojima se prijemnik postavi u žižu), farovi automobila, reflektori, itd.

Optička osobina elipse: Svetlosni zrak koji izvire iz jedne žiže elipse se odbija i prolazi kroz drugu žižu.

Optička osobina hiperbole: Svetlosni zrak koji izvire iz jedne žiže hiperbole i odbija se je kolinearan sa drugom žižom.

2.26 Krive drugog reda

Definicija, primeri, svođenje krive drugog reda na kanonski oblik dokaz, nameštanje na pune kvadrate, primer svodjenja parabole i "xy" hiperbole.

Definicija krive drugog reda: Skup tačaka koje zadovoljavaju jednačinu drugog stepena: $a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$.

Svođenje krive drugog reda na kanonski oblik: Kanonski oblici su formula elipse ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$), hiperbole ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$), parabole ($y^2 = 2px$), praznog skupa ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$), tačke ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$), dve prave koje se seku ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$), dve paralelne prave ($x^2 = a^2$), „dvostruke“ prave ($x^2 = 0$), prazan skup ($x^2 = -a^2$). Nekim kretanjem se bilo koja jednačina može svesti na tačno jedan od ovih oblika.

Dokaz: Rotacijom možemo da eliminišemo član uz xy, a zatim dopunom do punog kvadrata i translacijom možemo da dobijemo neki od kanonskih oblika.

Nameštanje na pune kvadrate: Jednačinu $ax^2+bx+c=0$ možemo da namestimo na pun kvadrat sledećim postupkom $a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}) = a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c=0$.

2.27 Bezijeove krive

Difinicija, B. kriva stepena jedan je duž, B. krive stepena dva i tri (skica), matrični zapis, osobine B. krivih, Primer: B. kriva kroz P0(1, 1), P1(-1, 0), P2(1, -1), dokaz da je B. kriva stepena 2 parabola, De Kasteljau algoritam, Racionalna parametrizacija kruga, primer fraktala

Definicija Bezijeove krive: Neka su tačke $P_0, \ldots, P_n$, $n \geq 2$ tačke ravni. Bezijeova kriva stepena n je:

$$\alpha_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i,\ t \in [0,1]$$

B_i je Bernštajnov polinom.

Bezijeova kriva stepena jedan je duž: Neka su date tačke P_0 i P_1. Za Bezijeovu krivu dobijamo $\alpha_n(t) = (1-t)P_0 + tP_1 = P_0 + t\overrightarrow{P_0P_1}$. Ovo je duž po definiciji.

Bezijeove krive stepena dva i tri (skica): Za $n=2$ se dobija $\alpha_2(t) = (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2$. Za $n=3$ se dobija $\alpha_3(t) = (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3$.

Matrični zapis: Da bismo odredili matrični zapis prvo odredimo šta stoji uz svaku od tačaka. Za $n=2$ će matrični zapis biti $\alpha_2(t) = (1,t,t^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$.

Osobine Bezijeovih krivih:

(1) Najveći stepen α_n je n.

(2) Važi $\alpha_n(0) = P_0$ i $\alpha_n(1) = P_n$.

(3) Tangentni vektor u P_0 je $\overrightarrow{P_0P_1}$, a u P_n je $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.

(4) Osobina nenegativnosti je da su svi Bernštajnovi polinomi nenegativni.

(5) Osobina konveksnog omotača je da Bezijeova kriva pripada konveksnom omotaču kontrolnog polinoma.

(6) Osobina manje varijacije kaže da će za bilo koju pravu broj preseka sa Bezijeovom krivom biti manji ili jednak od broja preseka sa kontolnim omotačem.

(7) Afina invarijantnost kaže da ćemo ako preslikamo sva temena nekim afinim preslikavanjem, a zatim odredimo tačku $\alpha_n'(t_0)$ dobiti istu tačku kao da smo preslikali tačku $\alpha_n(t_0)$ istim afinim preslikavanjem.

Bezijeova kriva kroz $P_0(1,1)$, $P_1(-1,0)$, $P_2(1,-1)$: Imamo da je:

$$\begin{aligned}\alpha_2(t) &= (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2\\ &= (1-t)^2(1,1) + 2t(1-t)(-1,0) + t^2(1,-1)\\ &= ((1-t)^2 - 2t(1-t) + t^2, (1-t)^2 - t^2)\\ &= (t^2 - 2t + 1 - 2t + 2t^2 + t^2, t^2 - 2t + 1 - t^2)\\ &= (4t^2 - 4t + 1, -2t + 1)\end{aligned}$$

Primetimo da smo dobili $x = y^2$ što je jednačina parabole.

Dokaz da je Bezijeova kriva stepena 2 parabola: Neka su date tačke Q_0, Q_1 i Q_2. Ove tačke možemo preslikati u tačke P_0, P_1 i P_2 iz prethodnog primera. Zbog osobine afine invarijantnosti će se i Bezijeova kriva preslikati. S obzirom da je Bezijeova kriva formirana tačkama P_0, P_1 i P_2 parabola, tada je i Bezijeova kriva formirana tačkama Q_0, Q_1 i Q_2 takođe parabola.

De Kasteljau algoritam: Iterativni algoritam. Želimo da bez računanja polinoma nađemo tačku $\alpha_n(t_0)$. U nultom koraku će $P_{00} = P_0, \ldots, P_{0n} = P_n$. U i-tom koraku konstruišemo tačke tako da $P_{i-1j}P_{ij} : P_{ij}P_{i-1j+1} = t_0 : (1-t_0)$ i da tačka P_{ij} pripada duži $P_{i-1j}P_{i-1j+1}$. Poslednja tačka koju dobijemo je tražena tačka.

Racionalna parametrizacija kruga: $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$, $t \in [0,1]$.

Fraktali: Kohova kriva, Hilbertova kriva, Peanova kriva.

2.28 Poligoni

Definicija, temena, ivice, dijagonale, prost poligon, unutrašnjost prostog poligona, površina poligona (primer, objašnjenje).

Definicija poligonske linije: Ako su date tačke $A_0, \ldots, A_n$, tada je poligonska linija unije duži $A_0A_1, \ldots, A_{n-1}A_n$.

Definicija poligona: Poligonska linija za koju važi $A_0 = A_n$.

Definicija temena: Temena su tačke $A_0, \ldots, A_n$.

Definicija ivice: Ivice su duži $A_0A_1, \ldots, A_{n-1}A_n$.

Definicija dijagonale: Povezuje nesusedna temena poligona.

Definicija prostog poligona: Nikoje dve ivice se ne seku, osim susednih ivica koje imaju zajedničko teme.

Unutrašnjost prostog poligona: Skup svih tačaka za koje važi da bilo koja poluprava iz tačke seče poligon neparan broj puta.

Površina poligona: Ako je dat prost poligon površinu možemo da izračunamo formulom:

$$P(A_0, \ldots, A_(n-1)) = P(A, A_0, A_1) + \ldots + P(A, A_{n-1}, A_0)$$

gde će A biti proizvoljna tačka, a površine mogu da budu negativne u zavisnosti od orijentacije trougla.

2.29 Konveksni omotač

Pojam konveksnog skupa, konveksni omotač skupa tačaka, jednostavni algoritam, primer.

Konveksni lik: Za svake dve tačke u liku važi da i njihova duž pripada liku.

Konveksni omotač: Najmanji konveksan skup tačaka koji sadrži sve tačke poligona.

Jednostavni algoritam: Uzimamo dve tačke i proveravamo da li su sve ostale tačke sa iste strane. Ako jesu onda duž, koju dve tačke formiraju, pripada konveksnom omotaču. Ovo radimo za svake dve tačke. Na kraju sortiramo duži. Složenost algoritma je $O(n^3)$.

2.30 Triangulacija poligona

Definicija triangulacije, primeri, svaki poligon ima unutrašnju dijagonalu (dokaz), teorema o tringulaciji prostog poligona (crtež, objašnjenje, (dokaz)).

Definicija triangulacije: Razlaganje poligona na trouglove unutrašnjim dijagonalama tako da se dijagonale ne seku.

Svaki poligon ima unutrašnju dijagonalu: Svaki prost poligon koji ima više od tri temena ima unutrašnju dijagonalu.

Dokaz: Neka je dat prost poligon $A_0, \ldots, A_{n-1}$. Izaberimo tačku sa najmanjom x koordinatom, neka je to tačka A_i. Posmatrajmo trougao $A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Ako se u njemu ne nalazi nijedno teme onda je $A_{i-1}A_{i+1}$ unutrašnja dijagonala. Ako se u njemu nalaze neka temena, tada od njih uzimamo teme A_j koje ima najmanju x koordinatu. Tada posmatramo A_iA_j. Ona ne seče nijednu ivicu trougla jer bi onda postojala tačka koja ima manju x koordinatu od A_j. Dakle A_iA_j je unutrašnja dijagonala.

Teorema o tringulaciji prostog poligona: Svaki prost poligon dopušta triangulaciju i svaka triangulacija poligona od n temena ima tačno $n-2$ trougla.

Dokaz: Dokaz je principom potpune indukcije. Baza indukcije je za $n = 3$. Ovo je već sastavljeno od jednog trougla pa tvrđenje važi. Sada pretpostavimo da tvrđenje važi za svako $k < n$. Neka je dat poligon od n tačaka. Dokazali smo da postoji unutrašnja dijagonala svakog poligona. Unutrašnjom dijagonalom delimo poligon na dva poligona. Ova dva poligona imaju manje od n temena pa ih možemo triangulisati, čime smo triangulisali i traženi poligon. Sa jedne strane će biti l_1 temena, a sa druge l_2 temena. Važi da je $l_1 + l_2 = n + 2$ i važi da je broj trouglova $l_1 - 2 + l_2 - 2 = n - 2$ što je i traženo.

2.31 Poliedarske površi

Definicija, poliedar, primeri, tabela povezanosti, rub (primeri odredjivanja).

Definiija pljosni: Konveksni poligoni.

Definiija poliedarske površi: Objekat koji je unija konačno mnogo pljosni, pri čemu svaka ivica pripada najviše dvema pljosnima, a najmanje jednoj i presek dve pljosni može biti samo po ivici.

Definicija poliedra: Poliedarska površ pri čemu važi da svaka ivica pripada tačno dvema pljosnima.

Definicija povezane površi: Povezana površ je površ za koju su svake dve pljosni povezivne, a dve pljosni su povezivne ako ih možemo povezati nizom pljosni.

Tabela povezanosti: Neka je dat poliedar skupom temena i skupom pljosni. Tabela povezanosti pokazuje koja temena pripadaju kojim pljosnima. Napomenimo da se temena često označavaju samo brojevima. Na primer, ako imamo temena T_0, T_1 i T_2 koja pripadaju pljosni p_0, tada ćemo to zapisati kao $p_0 = \langle 0, 1, 2\rangle$ i ovo će biti deo tabele povezanosti.

Rub: Ivica koja pripada tačno jednoj pljosni. Nju možemo da odredimo tako što iz tabele povezanosti izdvojimo multiskup ivica i proverimo koje ivice se pojavljuju tačno jednom.

2.32 Orijentacija poliedarske površi

Definicija orijentacije, primer orijentisanja tetraedra, veza orijentacije i normale, Mebijusova traka, dokaz da nije orijentabilna, rod poliedra, Ojlerova karakteristika, primer (sfera i torus).

Deficinija orijentacije: Kažemo da je povezana poliedarska površ orijentabilna ako je moguće da svake dve susedne pljosni imaju istu orijentaciju. Dve pljosni imaju istu orijentaciju ako obilaze zajedničku ivicu u različitim smerovima.

Veza orijentacije i normale: Poliedar ima unutrašnjost i spoljašnjost. Poliedar je orijentabilan ako sve normale pokazuju ka spolja ili ka unutra. Normale određujemo pravilom desne ruke.

Mebijusova traka: Kada Mebijusovu traku presečemo po dužini na pola dobijamo jedan komad koji je dva puta uvrnut (cilindar) jer je Mobijusova traka neorijentabilna. Ako taj komad presečemo još jednom na pola po družini dobićemo dva komada koji su ulančani i uvrnuti. Kada Mebijusovu traku presečemo po dužini na pola dobijamo ulančane cilindar i Mebijusovu traku.

Dokaz da Mebijusova traka nije orijentabilna: Koristimo teoremu da su svi modeli neke glatke površi ili orijentabilni ili neorijentabilni. Mebijusovu traku možemo da predstavimo preko tri četvorougla. Jednostavno pokazujemo da je on neorijentabilan, zbog čega je i Mebijusova traka neorijentabilna.

Ojlerova karakteristika poliedarske površi: Broj $\chi(\mathcal{M}) = T - I + P$ je Ojlerova karakteristika za poliedarsku površ $\mathcal{M}$, gde je T broj temena, I broj ivica, a P broj pljosni. Važi da je za dva poliedarska modela iste glatke površi jednaka Ojlerova karakteristika.

Rod poliedra: Rod poliedra je broj r koji se intuitivno definiše kao „broj rupa" poliedra. Važi $\chi(\mathcal{M}) = 2 - 2r$

2.33 Platonova tela

Definicija, skiciranje tetraedra, heksaedra, oktaedra, dualno Platonovo telo, Ojlerova karakteristika.

Definicija Platonovog tela: Platonovo telo ili pravilni poliedar je poliedar čije su pljosni pravilni poligoni sa p ivica, a svako teme je zajedničko za q ivica. Platonova tela su tetraedar, heksaedar, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar.

Dualnost Platonovih tela: Ako uzmemo sredine pljosni tetraedra i spojimo ih dobijamo još jedan tetraedar. Ovo znači da je tetraedar dualan sam sebi. Heksaedar je uzajamno dualan oktaedru, dodekaedar je uzajamno dualan ikosaedru.

Ojlerova karakteristika: Za Platonova tela važi da je $\chi(\mathcal{M}) = 2$.

Literatura

[1] Srđan Vukmirović. Geometrija MATF. https://www.youtube.com/@geometrijamatf, 2024.

[2] Vukmirović, Srđan; Tijana Šukilović. *Geometrija za informatičare*. Matematički fakultet, 2023.

[3] Vukmirović, Srđan; Tijana Šukilović. Geometrija I-smer. Prezentacija, 2024.