概念学习

初值问题

所谓初值问题，就是给出条件

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ \quad y(0) = y_0 \end{cases}$$

要求计算预估解函数y=y(x)在特定点$x=x_0$处的近似值。

解决初值问题常用的差分格式

1. 显式Euler法

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n,\ y_n)$$

2.隐式Euler法

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1},\ y_{n+1})$$

3.梯形格式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n,\ y_n) + f(x_{n+1},\ y_{n+1})]$$

4.两步Euler公式

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n,\ y_n)$$

5.改进的Euler公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n,\ y_n) + f(x_{n+1},\ y_n + hf(x_n,\ y_n))]$$

6.显式Runge-Kutta方法

$$\text{一般形式：}\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{m}\lambda_i K_i, \\ K_i = f(x_n + a_i h,\ y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}K_j), i = 1, 2, \cdots, m \end{cases}$$

$$\text{其中，}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1, a_1 = 0, a_i \le 1(i \ne 1), \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} = 1, m\text{为所使用的}f\text{值的个数，}b_{ij}\text{为待定参数}$$

$$m = 4\text{时，得到四阶经典的}Runge - Kutta\text{格式：}$$
$$\begin{cases} y_{n+1} &= & y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 &= & f(x_n,\ y_n) \\ K_2 &= & f(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2}K_1), n = 0, 1, 2, \cdots \\ K_3 &= & f(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 &= & f(x_n + h,\ y_n + hK_3) \end{cases}$$

$$\text{特别地，改进型}Euler\text{公式等价于二阶}Runge - Kutta\text{格式：}$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)))$$
$$\text{相当于}K_1 = f(x_n, y_n),\ K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1)$$

考点1--运用单步差分迭代计算初值问题

对于这类题目，题目大多不会给出单步差分迭代的具体表达式，而是给出我们熟知的单步迭代式的名字，因此做出此类题就有两个要求

1. 熟练记忆常见的差分格式
2. 熟练运用差分格式进行计算

> 最常考的就是显式Euler与改进型Euler公式

例题

$$\text{用改进型}Euler\text{方法计算初值问题：}\begin{cases} y' = x + y^2 & , \quad x > 0 \\ y(0) = 1 & . \end{cases}\text{的解函数}y(x)\text{在}x = 0.2\text{处的近似值（取步长}h = 0.1)$$

首先对于这种题目指明使用的差分格式，而没有给出具体表达式，我们要能够熟练默写出对应差分表达式

$$\text{改进型}Euler\text{方法差分格式为：}y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

知道对应的差分形式后，需要做的就是根据题目条件对应的带值计算了

$$\text{本题中，}f(x, y) = x + y^2,\ h = 0.1,\ x_0 = 0,\ x_1 = 0.1,\ x_2 = 0.2,\ \text{需要预估的便是}y(0.2)$$
$$\text{我们通过}y(0.2) \approx y_2\text{来进行预估，接下来要做就是通过差分迭代得到}y_2$$

$$\text{由题知 } y_0 = 1$$
$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \tfrac{h}{2}\{x_0 + y_0^2 + x_1 + [y_0 + h(x_0 + y_0^2)]^2\} \\ &= 1 + 0.05 * \{0 + 1 + 0.1 + [1 + 0.1 * (0 + 1)]^2\} \\ &= 1.1155 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \tfrac{h}{2}\{x_1 + y_1^2 + x_2 + [y_1 + h(x_1 + y_1^2)]^2\} \\ &= 1.1155 + 0.05 * \{0.1 + 1.1155^2 + 0.2 + [1.1155 + 0.1 * (0.1 + 1.1155^2)]^2\} \\ &\approx 1.2708 \end{aligned}$$
$$\text{故解函数}y(x)\text{在}x = 0.2\text{处}y(0.2) \approx y_2 = 1.2708$$

考点2--差分方法格式的阶数（精度）

差分格式的阶数通过方法的**局部截断误差**来进行计算

对于单步差分格式，可以统一的写作：$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n,\ x_{n+1},\ y_n,\ y_{n+1},\ h)$

其中φ与初值问题中的具体$f(x,y)$形式相关，若φ中不含y_{n+1}，则说明该方法为显示，反之为隐式

整体截断误差：从x_0开始计算后考虑每一步的误差直到x_n，　$e_n = y(x_n) - y_n$

局部阶段误差：做出假设x_n之前的计算均无误，$y_n = y(x_n)$，即仅考虑$x_n \to x_{n+1}$的局部误差

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\varphi(x_n,\ x_{n+1},\ y_n,\ y_{n+1},\ h)$$

进一步将T_{n+1}在x_n做泰勒展开即可得局部截断误差的具体表达式

定义：若给定方法的局部截断误差时$T_{n+1} = O(h^{p+1})$，便称该方法时p阶的，或称其具有p阶精度

常见差分格式的阶数推导

1.显式$Euler$格式：$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

假设$y(x_n) = y_n$，　已知$y'(x_n) = f(x_n, y_n)$

$$y_{n+1} = y(x_n) + hy'(x_n)$$

对于$y(x_{n+1})$由泰勒展开可得$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)$

于是局部截断误差$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3) = O(h^2)$

因此显式$Euler$格式为一阶方法，具有一阶代数精度

2.隐式$Euler$格式：$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$

假设$y(x_n) = y_n$，　已知$y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y_{n+1})$

由泰勒展开可得：$y'(x_{n+1}) = y'(x_n) + hy''(x_n) + O(h^2)$

于是$y_{n+1} = y(x_n) + hy'(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(n) + h^2y''(x_n) + O(h^3)$

对于$y(x_{n+1})$由泰勒展开可得：$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)$

于是局部截断误差$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3) = O(h^2)$

因此隐式$Euler$格式为一阶方法，具有一阶代数精度

3.梯形格式：$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})$

假设$y(x_n) = y_n$，　已知$y'(x_n) = f(x_n, y_n)$，$y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y_{n+1})$

由泰勒展开可得：$y'(x_{n+1}) = y'(x_n) + hy''(x_n) + \frac{h^2}{2}y'''(x_n) + O(h^3)$

于是$y_{n+1} = y(x_n) + \frac{h}{2}[y'(x_n) + y'(x_{n+1})]$

$$= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{4}y'''(x_n) + O(h^4)$$

对于$y(x_{n+1})$由泰勒展开可得：$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + O(h^4)$

于是局部截断误差$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{h^3}{12}y'''(x_n) + O(h^4) = O(h^3)$

因此梯形格式为二阶方法，具有二阶代数精度

$$4.\text{改进}Euler\text{格式}: y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

$$\text{假设}y(x_n) = y_n, \quad \text{已知}y'(x_n) = f(x_n, y_n),$$

$$y' = f(x, y)\text{两边对}x\text{求导可得：} y''(x) = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)y'(x)$$

$$\text{代入}x_n\text{可得：} y''(x_n) = f'_x(x_n, y_n) + f'_y(x_n, y_n)y'(x_n)$$

$$\text{由多元函数泰勒公式可得：} f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) = f(x_n, y_n) + hf'_x(x_n, y_n) + hf(x_n, y_n)f'_y(x_n, y_n) + O(h^2)$$

$$f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) = y'(x_n) + h[f'_x(x_n, y_n) + f'_y(x_n, y_n)y'(x_n)] + O(h^2)$$

$$= y'(x_n) + hy''(x_n) + O(h^2)$$

$$\text{因此}y_{n+1} = y(x_n) + \frac{h}{2}[y'(x_n) + y'(x_n) + hy''(x_n) + O(h^2)]$$

$$= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)$$

$$\text{对于}y(x_{n+1})\text{由泰勒展开可得：} y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + O(h^4)$$

$$\text{于是局部截断误差}T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + O(h^4) = O(h^3)$$

$$\text{因此改进}Euler\text{格式为二阶方法，具有二阶代数精度}$$

$$\text{对于高阶}Runge-Kutta\text{而言，推导过程需要更高阶多元函数的泰勒公式知识}$$

$$\text{此处不作推导，记忆即可，改进}Euler\text{格式为二阶精度，}Runge-Kutta\text{方法精度与其对应公式阶数相同}$$

一般普通差分格式的阶数计算或证明

例题

$$\text{试证明由}y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h[4f(x_n, y_n) + 2f(x_{n+1}, y_{n+1}) + hf'(x_n, y_n)]\text{所定义的隐式单步格式为三阶的}$$

$$\text{要证明公式的阶数为三阶，只需证该公式的局部截断误差阶为}O(h^4)$$

$$\text{假设}y_n = y(x_n)$$

$$\text{已知}y'(x_n) = f(x_n, y_n)\text{，}y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y_{n+1})\text{，}y''(x_n) = f'(x_n, y_n)$$

$$\text{由泰勒展开可得：} y'(x_{n+1}) = y'(x_n) + hy''(x_n) + \frac{h^2}{2}y'''(x_n) + \frac{h^3}{6}y^{(4)}(x_n) + O(h^4)$$

$$\text{于是}y_{n+1} = y(x_n) + \frac{h}{6}[4y'(x_n) + 2y''(x_{n+1}) + hy''(x_n)]$$

$$= y(x_n) + \frac{h}{6}[4y'(x_n) + 2(y'(x_n) + hy''(x_n) + \frac{h^2}{2}y'''(x_n) + \frac{h^3}{6}y^{(4)}(x_n) + O(h^4)) + hy''(x_n)]$$

$$= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + \frac{h^4}{18}y^{(4)}(x_n) + O(h^5)$$

$$\text{对于}y(x_{n+1})\text{由泰勒展开可得：}$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(x_n) + O(h^5)$$

$$\text{于是局部截断误差}T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{h^4}{72}y^{(4)}(x_n) + O(h^5) = O(h^4)$$

$$\text{即得证，该公式为三阶方法，具有三阶代数精度}$$

给定公式具体阶数，反过来确定具体系数

例题

确定求解$y' = f(x, y)$的公式 $y_{n+1} = y_n + \beta_0 hf(x_n, y_n) + \beta_1 hf(x_{n+1}, y_{n+1})$的参数$\beta_0, \beta_1$使得该公式具有二阶精度。

$$要确定公式的阶数为二阶，只需求参数使得该公式的局部截断误差阶为O(h^3)$$
$$假设y_n=y(x_n)$$
$$已知y'(x_n)=f(x_n,y_n)，y'(x_{n+1})=f(x_{n+1},y_{n+1})$$
$$由泰勒展开可得：y'(x_{n+1})=y'(x_n)+hy''(x_n)+\frac{h^2}{2}y'''(x_n)+O(h^3)$$
$$于是y_{n+1}=y(x_n)+\beta_0hy'(x_n)+\beta_1hy'(x_{n+1})$$
$$=y(x_n)+\beta_0hy'(x_n)+\beta_1h(y'(x_n)+hy''(x_n)+\frac{h^2}{2}y'''(x_n)+O(h^3))$$
$$=y(x_n)+(\beta_0+\beta_1)hy'(x_n)+\beta_1h^2y''(x_n)+\frac{\beta_1h^3}{2}y'''(x_n)+O(h^4)$$
$$对于y(x_{n+1})由泰勒展开可得：$$
$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{6}y'''(x_n)+O(h^4)$$
$$于是局部截断误差T_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}=(1-\beta_0-\beta_1)hy'(x_n)+\frac{(1-2\beta_1)h^2}{2}y''(x_n)+\frac{(1-3\beta_1)h^3}{6}y'''(x_n)+O(h^4)$$
$$要是该公式精度为三阶，那么则有\begin{cases}1-\beta_0-\beta_1=0\\1-2\beta_1=0\\1-3\beta_1\neq0\end{cases}\to\begin{cases}\beta_0=\frac{1}{2}\\\beta_1=\frac{1}{2}\end{cases}$$

考点3--差分方法格式的稳定性与绝对稳定区间

稳定性问题为了简化讨论，仅考察

$$模型方程：y'=\lambda y,\lambda<0$$
$$对于任何一种单步法应用于模型方程，其中\lambda=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$
$$均有：y_{n+1}=E(\lambda h)y_n$$

若满足$|E(\lambda h)|\le1$，则称该单步法是绝对稳定的，复平面上λh满足的区域称为绝对稳定区域，与实轴的交称作绝对稳定区间

几种常见单步法的绝对稳定区间

$$1.显示Euler法:y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$$
$$代入模型方程y'=\lambda y,即有f(x,y)=\lambda y$$
$$y_{n+1}=y_n+\lambda hy_n=(1+\lambda h)y_n$$
$$E(\lambda h)=1+\lambda h$$
$$令|E(\lambda h)|\le1,即|1+\lambda h|\le1$$
$$解得其绝对稳定区间为-2\le\lambda h\le0$$

$$2.改进Euler法:y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))]$$
$$代入模型方程y'=\lambda y,即有f(x,y)=\lambda y$$
$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[\lambda y_n+\lambda(y_n+\lambda hy_n]=(1+\lambda h+\frac{(\lambda h)^2}{2})y_n$$
$$E(\lambda h)=1+\lambda h+\frac{(\lambda h)^2}{2}$$
$$令|E(\lambda h)|\le1,即|1+\lambda h+\frac{(\lambda h)^2}{2}|\le1$$
$$解得其绝对稳定区间为-2\le\lambda h\le0$$

$$3.\text{隐式}Euler\text{法}: y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$$

$$\text{代入模型方程}y'=\lambda y,\text{即有}f(x,y)=\lambda y$$

$$y_{n+1}=y_n+\lambda h y_{n+1},\ y_{n+1}=\frac{1}{1-\lambda h}y_n$$

$$E(\lambda h)=\frac{1}{1-\lambda h}$$

$$\text{令}|E(\lambda h)|\le 1,\text{即}|\frac{1}{1-\lambda h}|\le 1$$

$$\text{解得其绝对稳定区间为}-\infty\le\lambda h\le 0,\text{可称该格式是无条件稳定的!}$$

$$4.\text{梯形公式}: y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

$$\text{代入模型方程}y'=\lambda y,\text{即有}f(x,y)=\lambda y$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(\lambda y_n+\lambda y_{n+1}),\ y_{n+1}=\frac{2+\lambda h}{2-\lambda h}y_n$$

$$\text{令}|E(\lambda h)|\le 1,\text{即}|\frac{2+\lambda h}{2-\lambda h}|\le 1$$

$$\text{解得其绝对稳定区间为}-\infty\le\lambda h\le 0,\text{可称该格式是无条件稳定的!}$$

一般单步法格式的稳定性判别

例题

$$\text{讨论二阶中点公式}y_{n+1}=y_n+hf(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n))\text{的稳定性。}$$

$$\text{代入模型方程}y'=\lambda y,\ \text{即有}f(x,y)=\lambda y$$

$$y_{n+1}=y_n+\lambda h(y_n+\frac{h}{2}\lambda y_n)=(1+\lambda h+\frac{(\lambda h)^2}{2})y_n$$

$$E(\lambda h)=1+\lambda h+\frac{(\lambda h)^2}{2}$$

$$\text{令}|E(\lambda h)|\le 1,\text{即}|1+\lambda h+\frac{(\lambda h)^2}{2}|\le 1$$

$$\text{解得其绝对稳定区间为}-2\le\lambda h\le 0$$