考点1--普通迭代的区间上收敛性

迭代公式区间上收敛性的判定定理：

$$
\begin{gathered}
\text{对于方程} x=\varphi(x), \varphi(x) \in C[a, b], \\
\text{若}(1) \text{ 当} x \in[a, b] \text{时，} \varphi(x) \in[a, b] \\
(2) \ \exists 0 \leq L<1 \text{，使得} |\varphi^{\prime}(x)| \leq L<1 \text{对} \forall x \in(a, b) \text{成立} \\
\text{则任取} x_0 \in[a, b] \text{，由} x_{k+1}=\varphi(x_k) \text{得到的序列} \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \text{收敛于} \varphi(x) \text{在}[a, b] \text{上的唯一不动点} \\
\text{并且有误差估计式}: |x^*-x_k| \leq \frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|, \quad |x^*-x_k| \leq \frac{L^*}{1-L}|x_1-x_0| \\
\text{且存在极限} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k}=\varphi^{\prime}(x^*)
\end{gathered}
$$

例题

1. 课堂习题T_3

$$
\text{求设方程} x=e^{-x} \text{，分析迭代格式} x_0=0.5 \text{，} x_{n+1}=e^{-x_n} \text{，} n=0,1,2, \cdots \text{，的收敛性。}
$$

对于**指定初值x_0或初值区间**的题目询问迭代公式的收敛性，考察的则是迭代公式区间上收敛；使用上述判定定理进行证明。

$$
\begin{gathered}
\text{可取区间} x \in[0,1] \text{，对于方程} x=e^{-x}, \varphi(x)=e^{-x} \\
(1) \ x \in[0,1] \text{时，} \varphi(x) \in[e^{-1}, 1] \subseteq[0,1] \\
\varphi^{\prime}(x)=-e^{-x} \text{，} |\varphi^{\prime}(-x)|<1 \text{对于} x \in(0,1) \text{成立} \\
(2) \ \ \exists 0 \leq L<1 \text{，使得} |\varphi^{\prime}(x)| \leq L<1 \text{对} \forall x \in(0,1) \text{成立} \\
\text{则对于任意} x_0 \in[0,1] \text{由} x_{k+1}=e^{-x_k} \text{得到的序列} \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \text{收敛于} \varphi(x) \text{在}[a, b] \text{上的唯一不动点} x^* \\
\text{因此迭代格式} x_0=0.5 \text{，} x_{n+1}=e^{-x_n} \text{，} n=0,1,2, \cdots \text{，的收敛。}
\end{gathered}
$$

2. 应用工程数学16年第八大题

$$
\begin{gathered}
\text{已知} x=\varphi(x) \text{的} \varphi^{\prime}(x) \text{满足} |\varphi^{\prime}(x)-a|<1 \text{，} (a>2) \text{，试问如何利用} \varphi(x) \text{构造一个} \\
\text{收敛的简单迭代函数} \psi(x) \text{，使得} x_{k+1}=\psi(x) \text{，} k=0,1,2, \cdots \text{收敛？}
\end{gathered}
$$

本题中没有指定具体区间，但默认的含义便是对于x∈R都成立，因此实际上仍是一个迭代公式区间上收敛的题目。

$$\text{由}x=\varphi(x),\text{可得 } x-ax=\varphi(x)-ax$$

$$\text{即}x=\frac{1}{1-a}(\varphi(x)-ax)=\psi(x).$$

$$\text{因}\psi'(x)=\frac{1}{1-a}(\varphi'(x)-a)$$

$$\text{故}|\psi'(x)|=\frac{1}{|1-a|}|\varphi'(x)-a|<\frac{1}{a-1}$$

$$\text{又}a>2\text{，因此}|\psi'(x)|<\frac{1}{a-1}<1.$$

$$\text{故}x_{k+1}=\psi(x_k)=\frac{1}{1-a}[\varphi(x_k)-ax_k],k=0,1,2,\cdots\text{收敛.}$$

考点2--迭代公式的局部收敛性及收敛阶数

迭代公式的局部收敛性定义:

若存在x^*的某个邻域R：$|x-x^*|\le\delta$，使迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$对于任意初值$x_0\in R$均收敛，则称迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$在根x^*的邻近具有局部收敛性

局部收敛性的判定定理:

设x^*为方程$x=\varphi(x)$的根，$\varphi(x)$在x^*的邻近连续，且

$$|\varphi'(x^*)|<1$$

则迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$在x^*邻近具有局部收敛性

局部收敛性的阶数定义:

设迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$收敛于方程$x=\varphi(x)$的根x^*，若迭代误差$e_k=x_k-x^*$，

$$\text{当}k\to\infty\text{时成立下列渐进关系式}\quad\frac{e_{k+1}}{e_k^p}\to c(c\ne0\text{为常数}),$$

则称该迭代过程是p阶收敛的。特别地，$p=1$时称线性收敛，$p>1$时称超线性收敛，$p=2$时称平方收敛。

局部收敛性的判定定理推论:

若在局部收敛性判定定理的前提下还有$\varphi'(x^*)\ne0$, 即$\varphi'(x^*)$满足

$$0<|\varphi'(x^*)|<1,$$

则迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$是线性收敛的

局部收敛性阶数判定定理:

设x^*是$x=\varphi(x)$的根，若有正整数$p\ge2$，使得$\varphi^{(p)}(x)$在x^*的邻域上连续，且满足

$$\varphi^{(l)}(x^*)=0,\ l=1,2,\cdots,p-1,$$

$$\varphi^{(p)}(x^*)\ne0,$$

则称迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$局部收敛，并且误差$e_k=x_k-x^*$满足

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}$$

从而该迭代方法是p阶收敛的。

例题

1. 应用工程数学19年填空题T_8

$$\text{若求解方程的迭代公式}x_{k+1}=ax_k+sin(x_k)\text{在根}x^*=0\text{附近收敛，则}a\text{满足\_。}$$
$$\text{若}a=0.5\text{，初值}x_0\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\text{，则以上迭代公式是否保证收敛\_.}$$

分析：提取题目关键字，迭代公式，根x*附近收敛。显然这一题第一空考察的迭代公式局部收敛性的判定。

回顾局部收敛性判定定理：

$$\text{设}x^*\text{为方程}x=\varphi(x)\text{的根，}\varphi(x)\text{在}x^*\text{的邻近连续，且}$$
$$|\varphi'(x^*)|<1$$
$$\text{则迭代过程}x_{k+1}=\varphi(x_k)\text{在}x^*\text{邻近具有局部收敛性}$$

显然这个题代入判定定理反求参数即可。

$$\text{由题知迭代公式}x_{k+1}=ax_k+sin(x_k)\text{在根}x^*=0\text{附近收敛}$$
$$\text{其中}\varphi(x)=ax+\sin x\text{，}\quad\varphi'(x)=a+\cos x$$
$$\text{由判定定理可得}:|\varphi'(x^*)|<1\text{，即}|a+\cos 0|<1$$
$$\text{解得：}\quad-2<a<0$$

$$a=0.5\text{时，}x_0\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\text{时，考虑收敛性则对应普通迭代的区间收敛判定定理}$$
$$(1)\ x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\text{时，}\varphi(x)\in[-\frac{\pi}{4}-1,\frac{\pi}{4}+1]\nsubseteq[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$
$$\text{并且}(2)\ |\varphi'(x)|_{\max}=\frac{3}{2}>1$$
$$\text{因此在此区间上任取}x_0\text{并不能保证该迭代公式收敛！}$$

2. 应用工程数学17年填空题T_8

$$\text{若求解方程的简单迭代格式}x_{k+1}=ax_k+\frac{b}{x_k}\text{在根}x^*=\sqrt{3}\text{附近平方收敛，则}a=\_\text{，}b=\_$$

分析：题目关键字，迭代公式，根x*附近**平方收敛**，显然这题考察的是局部收敛性的**阶数判定。**

回顾局部收敛性的阶数判定定理：

$$\text{设}x^*\text{是}x=\varphi(x)\text{的根，若有正整数}p\geq 2\text{，使得}\varphi^{(p)}(x)\text{在}x^*\text{的邻域上连续，且满足}$$
$$\varphi^{(l)}(x^*)=0,\ l=1,2,\cdots,p-1,$$
$$\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0,$$
$$\text{则称迭代法}x_{k+1}=\varphi(x_k)\text{局部收敛，并且误差}e_k=x_k-x^*\text{满足}$$
$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}$$
$$\text{从而该迭代方法是}p\text{阶收敛的。}$$

本题中的平方收敛对应2阶收敛，反求参数；

$$\text{由题知}\varphi(x)=ax+\frac{b}{x}，\varphi'(x)=a-\frac{b}{x^2}，\varphi''(x)=\frac{2b}{x^3}$$

$$\text{根据判定定理我们易知}\begin{cases}\varphi'(x^*)=0\\ \varphi''(x^*)\neq 0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a-\frac{b}{3}=0\\ \frac{2b}{3\sqrt{3}}\neq 0\end{cases}$$

$$\text{但显然根据上面的方程我们无法解出参数值，因此还需挖掘条件。}$$

$$x^*\text{另一层含义其实是}\varphi(x)\text{的不动点，即可得}x^*=\varphi(x^*)$$

$$\text{于是便有}\begin{cases}\sqrt{3}a+\frac{b}{\sqrt{3}} & = & \sqrt{3}\\ a-\frac{b}{3} & = & 0\\ \frac{2b}{3\sqrt{3}} & \neq & 0\end{cases}\rightarrow\text{解得}\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{3}{2}\end{cases}$$

3. 数值分析19年T_8

$\varphi(x)=x+\lambda(x^2-5)$，要是迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$局部收敛到$x^*=\sqrt{5}$, 则$\lambda$的取值范围是_

本题与前面题型无异，考察的仍是局部收敛性的判定定理:

$$\varphi(x)=x+\lambda(x^2-5)，\varphi'(x)=1+2\lambda x$$

$$\text{迭代公式在}x^*=\sqrt{5}\text{处局部收敛，则有}|\varphi'(x^*)|<1$$

$$\text{即}|1+2\sqrt{5}\lambda|<1\text{，解得}-\frac{1}{\sqrt{5}}<\lambda<0$$

考点3--Newton迭代公式及重根改造

Newton迭代法

$$\text{设有非线性方程}f(x)=0\text{。设}x^*\text{是方程}f(x)=0\text{的实根，}x_k\text{是某个近似根，则有}$$

$$0=f(x^*)\approx f(x_K)+f'(x_k)(x^*-x_k)$$

$$\text{当}f'(x_k)\neq 0\text{时，从中解出}x^*\approx x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\text{将右端看作新的迭代值}x_{k+1}\text{，所得迭代过程}$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ k=0,1,2,\cdots\quad\text{称为}Newton\text{迭代法。}$$

Newton迭代的收敛性阶数

1. $f(x^*)=0, f'(x^*)\neq 0$，$f''(x)$在x^*的邻域上连续，(等价于x^*为$f(x)=0$的单根)

则$Newton$迭代法在点x^*处局部收敛，并有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

从而$Newton$至少具有平方阶收敛

2. 当x^*为$f(x)=0$的重根时，则$Newton$迭代函数$\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$在$x^*$的导数为

$$\varphi'(x^*)=\lim_{x\to x^*}\varphi'(x)=\lim_{x\to x^*}\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$=\lim_{x\to x^*}\frac{(m-1)f^{(m)}(\xi_1)f^{(m)}(\xi_3)}{m[f^{(m)}(\xi_2)]^2}=1-\frac{1}{m}$$

其中m为根x^*的重数，$m\geq 2$，从而$0<\varphi'(x)<1$

因此x^*为重根时，$Newton$迭代只具有线性收敛

Newton迭代的重根改造

改善重根时Newton迭代仅具有线性的收敛性，使其在重根的邻近至少具有平方阶收敛。

1. 构造迭代法（用于重根次数m已知时）

$$x_{k+1}=\psi(x_k)=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

此时$\psi(x)=x-m\dfrac{f(x)}{f'(x)}$满足$\psi(x^*)=x^*, \psi'(x^*)=0$

这便说明x^*是方程$f(x)=0$的m重根时，变形的$Newton$迭代

$$x_{k+1}=\psi(x_k)=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

不仅收敛于x^*，而且仍具有至少二阶的收敛速度。

2. 再次Newton法（用于m未知）

令$u(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，对$u(x)$使用$Newton$法，

对应迭代函数为 $g(x)=x-\dfrac{u(x)}{u'(x)}=x-\dfrac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}$

于是得到新的迭代公式为：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)}\quad k=0,1,2,\cdots$$

例题

应用工程数学17年第九大题

试证用牛顿法求方程$f(x)=(x^2-a)^2=0(a>0)$的根$x^*=\sqrt{a}$是线性收敛的，

并将$Newton$公式变形，使其在$x^*=\sqrt{a}$附近具有局部二阶收敛性

本题中不难看出x^*是一个重根，因此本题分为两部分，先证明重根的Newton迭代只具有线性收敛，再对重根时的Newton迭代进行改造使其具有局部二阶收敛性。

要证迭代格式是线性收敛的，只需证迭代函数$\varphi(x)$满足$\begin{cases}\varphi(x^*)=x^*\\ \varphi'(x^*)\neq 0\end{cases}$

对于$f(x)=(x^2-a^2)^2=0$，由$Newton$迭代法得迭代函数为

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{x^2-a^2}{4x}$$

$$\varphi'(x)=1-\frac{2x\cdot 4x-4\cdot x^2}{16x^2}=\frac{3}{4}\quad(x\neq 0)$$

显然$\varphi(x^*)=x^*$，$\varphi'(x^*)\neq 0$

因此$Newton$求方程$f(x)=(x^2-a)^2=0(a>0)$的根$x^*=\sqrt{a}$是线性收敛的；

不难看出$x^*=\sqrt{a}$是方程$f(x)=(x^2-a)^2=0(a>0)$的二重根

因此可构造迭代函数$\psi(x)=x-2\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

要证新的迭代格式是局部平方收敛的，只需证迭代函数$\psi(x)$满足$\begin{cases}\psi(x^*)=x^*\\ \psi'(x^*)=0\end{cases}$

$$\psi(x)=x-2\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{x^2-a^2}{2x}$$

$$\psi'(x)=1-\frac{2x\cdot 4x-4\cdot x^2}{4x^2}=0\quad(x\neq 0)$$

显然$\psi(x^*)=x^*$，$\psi'(x^*)=0$

因此迭代格式$x_{k+1}=x_k-2\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\dfrac{x_k^2+a^2}{2x_k}$在$x^*=\sqrt{a}$附近具有局部二阶收敛性