矩阵论

考点1--向量y在一组基(α1,α2,α3,α4,....)下的坐标表示x

解法：本质上就是求非齐次线性方程的[α1,α2,α3,α4] x = y的解，因此只需将[α1,α2,α3,α4,y]一同进行初等行变换，化为阶梯型，因为一个向量在一组基底下仅有一钟坐标表示形式，因此该非齐次线性方程也仅有一解，即为我们所求。

考点2--一个空间R^n的两个不同基B_1,B_2之间的变换

解法：基B_1到基B_2的基变换矩阵为P，则有$B_2=B_1P$，因此$P=B_1^{-1} B_2$即为所求。此时同一个向量y在B_1，B_2下的坐标表示分别即为x_1，x_2，则有$y=B_1 x_1=B_2x_2=B_1Px_2$，即$x_1=Px_2$。

进一步计算在**不同基下的相同坐标表示的向量y**，则有$x_1=Px_2$，$x_1=x_2$，因此即求齐次线性方程（P-E）x=0的解！

考点3--计算子空间的和+与交∩的基、维数

基础公式：dim（w_1+w_2）+dim（$w_1∩w_2$) = dim(w_1) + dim(w_2)

解法：

1. 先计算w_1+w_2的维数，具体计算方法，将w_1，w_2子空间向量拼凑为矩阵进行初等行变换，得到的阶梯矩阵秩即为w_1+w_2的dim。
2. 根据w_1+w_2的维数以及阶梯矩阵的形式，选取w_1，w_2子空间向量中的对应秩大小的无关组即为w_1+w_2的基。
3. 根据公式dim（w_1+w_2）+dim（$w_1∩w_2$) = dim(w_1) + dim(w_2），可轻易求得$w_1∩w_2$的维数dim。
4. 计算$w_1∩w_2$的基则需通过解齐次线性方程组求得。具体步骤，$w_1∩w_2$下的向量ξ既满足w_1的表示又满足w_2的表示，因此联立便可得一个系数矩阵为w_1,-w_2向量联立的矩阵。解次齐次线性方程组所得解便对应w_1，-w_2示出的ξ的系数关系，进一步便可得出即为所求。

考点4--子空间w_1+w_2为直和的证明

$$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$$

证明方法：

1.

$$W_1 \cap W_2 = \{0\};$$

2. 若$\xi_1 + \xi_2 = 0, \xi_i \in W_i (i = 1,2)$,则$\xi_1 = \xi_2 = 0$;
3. $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

三者等价！

若子空间之间满足直和关系，则有维数dim的直加关系。

因此常考察证明两个子空间的直和构成一个完备的n维线性空间V^n。

证明方法，先证明为直和，通过交集为0向量，即使用上文提高过的解方程法来证明，发现齐次线性方程**仅有0解**从而说明交集为零向量！进一步证明子空间的dim之和为n即可！

考点5--T为线性变换的证明

证明方法，通过定义证明满足对应的公式

证明：

$$T(\alpha+\beta) = T\alpha + T\beta, T(k\alpha) = kT\alpha$$

定义 V^n到V^m的变换T称为线性的，如果对任意的数k及V^n中的任意向量α,β，恒有

$$T(\alpha+\beta) = T\alpha + T\beta, T(k\alpha) = kT\alpha.$$

记$\xi = T\alpha \in V^m$,则称ξ为α在T下的**像**，α称为ξ的**原像**。特别，当T是V^n到自身的一个线性变换，则称T是V^n的**线性变换**。

考点6--线性变换T在一对基偶下的矩阵

为了简化记法和便于运算，令 $TB_a \triangleq [T\alpha_1 T\alpha_2 \cdots T\alpha_n]$，那么上式可简写为

$$TB_\alpha = B_\beta A, \qquad (1.2\text{-}1)$$

其中 $m\times n$ 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

（1.2-1）式叫做T的矩阵表示，称A为T在基偶 $\{B_\alpha, B_\beta\}$ 下的矩阵。

线性变换T在基下的矩阵求法

特别，若T是 V^n 到自身的线性变换，这时 $V^m = V^n$,并规定 B_β 取为 B_α，则（1.2-1）式为

$$TB_\alpha = B_\alpha A,$$

称 n 阶方阵A为T在基 B_α 下的矩阵。

$$T\alpha = TB_a x = B_\beta A x. \qquad (1.2\text{-}2)$$

这就是说，若x是α在 B_a 下的坐标向量，那么其像 $T\alpha$ 在 B_β 下的坐标向量是 Ax.

线性变换矩阵同维空间下不同基下的矩阵表示之间的关系

$TB_1 = B_1A_1$， $TB_2 = B_2A_2$

两个基底B_1与B_2存在变换矩阵P，满足$B_1P=B_2$

进一步便可推出$A_2=P^{-1}A_1P$,其中$P=B_1^{-1}B_2$

于是，V^n到V^m的一个线性变换T在不同基偶下的矩阵是相抵关系的，而 V^n 的线性变换T在不同基下的矩阵是相似关系。

线性变换矩阵T的特征多项式

考点7--线性变换T的特征值、特征向量

转换为求线性变换在对应基偶下的矩阵表示A的特征值与特征向量

T的特征值问题与 A 的特征值问题是一一对应的。由于相似矩阵有相同的特征多项式，所以我们可以把A的特征多项式

$$f(\lambda)\triangleq\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n$$

称为T的**特征多项式**，于是T的特征值就是T的特征多项式的根。

考点8--线性变换T是否可对角化的判断

判断方法：

定义 T称为是可对角化的，如果存在 V^n的基B，使T在B下的矩阵是对角矩阵。

定理 T是可对角化的充分必要条件是下列等价条件之一成立：

（1）T 有n个线性无关的特征向量；

（2）$\dim V_{\lambda_i} = n_i, 1 \le i \le s.$

（3）$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} = V^n$;

常见判断：

1. 幂零矩阵不可相似对角化

   幂零矩阵的特征值为n重特征值0，对应的特征向量个数也就是方程Ax=0的解向量个数，即为n-r（A）个解向量，又A为非零矩阵，r（A）>=1,因此幂零矩阵没有n个线性无关的解向量，故不可相似对角化！

2. A^k=E的矩阵A可相似对角化。（**复数域中**）

考点9--镜像变换矩阵的特征值与迹小结论

例1 求镜像变换的Householder矩阵

$$H = I_n - 2\omega\omega^T$$

的特征值及它的迹和行列式.

解 令 $A=2\omega, B=\omega^T$,则$AB=2\omega\omega^T$, $BA=2\omega^T\omega=2$,故

$$\det(\lambda I_n - H)=\det[(\lambda-1)I_n+2\omega\omega^T]$$
$$=(\lambda-1)^{n-1}\det(\lambda-1+2\omega^T\omega)=(\lambda-1)^{n-1}(\lambda+1).$$

因而$\lambda=1$是H的$n-1$重特征值, $\lambda=-1$是单重特征值.

再由(2.1-1)和(2.1-2)式知

$$\mathrm{tr}H=n-1+(-1)=n-2,\ \det H=-1.$$

考点10--矩阵A的矩阵多项式g（A）计算

A的特征多项式即为A的一个零化多项式

定理(Cayley-Hamilton) 设n阶方阵A的特征多项式为

$$f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\lambda+b_n$$

则$f(A)=O$,即A的特征多项式是A的一个零化多项式.

解法：多项式有时十分复杂，直接计算不太现实，因此要借用A的零化多项式来进行一定的化简。而最简单的零化多项式即为A的特征多项式！

1. 计算A的特征多项式，得到A的零化多项式。
2. 将需要计算的矩阵多项式g（A）进行因式分解一部分，整除的对象即为零化多项式，这样便可消去一部分的计算
3. 计算矩阵多项式整除后余项即为所求。

考点11--最小多项式的计算

最小多项式的定义

定义 A的零化多项式中，次数最低的首一多项式称为A的**最小多项式**，记为 $m_A(\lambda)$ 。

定理 A的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 可整除A的任何零化多项式$g(\lambda)$，且 $m_A(\lambda)$ 是唯一的。

最小多项式的判断依据

事实上，设A的所有不同的特征值是$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s, A$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s},$$

且$n_1+n_2+\cdots+n_s=n$ ，则A的最小多项式一定有如下形式：

$$m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s},$$

并且

$$1\le k_i\le n_i \quad (i=1,2,\cdots,s)$$

若A 的特征值的代数重数都为1，那么 $m_A(\lambda)=f(\lambda)$。

计算方法：

1. 若A阶数比较低，并且计算简单，可以同过特征多项式的组合来进行试解，幂次最低且为零多项式的即为所求。
2. A可以分为对角阵且特征值个数不多时，通过特征值λE-A来分块逐个判断每个特征值对应的矩阵λE-A需要自乘为零矩阵的次数。对应的便是最小多项式中（$\lambda-\lambda_i$）的次数。
3. A可以分块为对角矩阵，分别计算对角块中A_1,A_2的最小多项式，二者多项式的最小公倍数即为所求。

考点12--Jordan标准型

Jordan块及jordan矩阵的定义

§2.2 Jordan标准形

定义 形式为

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{r\times r}$$

的$r \geq 1$阶方阵称为一个Jordan块，其中λ是实数或复数.

由若干个(包括单个)Jordan块所构成的对角块矩阵称为Jordan矩阵。

k级根向量定义的理解

定义 设λ_0是方阵A的特征值. 如果对于向量x, 存在一个正整数k，使

$$(A-\lambda_0 I)^{k-1}x \neq 0, \text{但}(A-\lambda_0 I)^{K}x = 0, \qquad (2.2\text{-}1)$$

则称x为A关于λ_0的k**级根向量**(或**广义特征向量**). 简称x为λ_0的k级根向量.

按根向量的定义可知, 1级根向量为特征向量, 反之, 特征向量必为1级根向量. 而例1中的x_3是2级根向量.

两个定理

1. 矩阵A关于不同特征值的根向量是线性无关的。
2. 矩阵A同一特征值下的不同级根向量是线性无关的。

Jordan标准型的确定

先决条件:

（1）A的Jordan标准形中子Jordan矩阵的数目等于A的不同的特征值的个数；

（2）每个子Jordan矩阵的阶数等于相应的根空间的维数，亦即相应特征值的代数重数；

（3）每个子Jordan矩阵中Jordan块的数目恰好等于相应特征值的线性无关的特征向量的个数，即特征子空间的维数，亦即相应特征值的几何重数；

（4）每个子Jordan矩阵中Jordan块的最大阶数恰好等于相应特征值的指标，也即相应的根空间中根向量的最高级数。

解法：

1. 不同特征值的个数---》Jordan矩阵的数目
2. 每个特征值对应的代数重数--》对应子Jordan矩阵的阶数
3. 每个特征值对应的几何重数--》对应子Jordan矩阵中Jordan块的个数
4. 每个特征值对应的根向量最高级数k--》子Jordan矩阵中Jordan块的最大阶数。

通过以上四条在不需要计算可逆矩阵P的情况下，花比较少的计算量便可推导出Jordan标准型的结构！

考点13--通过特征多项式与最小多项式推导Jordan标准型

特征多项式包含的信息：

1. 特征值的个数---对应因式分解，因式的数目
2. 每个特征值的代数重数--对应因式的幂次

最小多项式包含的信息：

1. 若对应特征值的因式幂次均为1，则矩阵A可对角化。
2. 最小多项式中每个特征值对应的因式幂次--子Jordan矩阵中Jordan块大的最大阶数。

通过以上信息的推导，便可推导出Jordan标准型的可能形式

考点14--Jordan标准型的具体计算及可逆矩阵P的计算

矩阵A可对角化时，可逆矩阵P即为特征向量的组合，对应Jordan标准型即为特征值所组成的对角矩阵。

矩阵A不可对角化时，可逆矩阵P为特征向量与对应k级根向量的组合，Jordan标准型则为各Jordan块的对角分块阵拼接。

因此重点便在于k级根向量的求解

解法：

1. 先计算出矩阵A的特征多项式，得到特征值及其代数重数
2. 计算每个特征值对应的特征方程（A-λE）x=0，求出解向量，也就是该特征值对应的线性无关特征向量，对应个数即其几何重数。
3. 比较几何重数与代数重数，相等则无需下一步计算。若不等，说明存在二级或以上的根向量，进一步计算根向量。

4. 根向量的计算考虑通过与前一级根向量产生联系，计算一下非齐次线性方程来进行求解

$$(A-\lambda_i I)^2 x = (A-\lambda_i I)(A-\lambda_i I)x = 0$$

所以若令 $$(A-\lambda_i I)x = y, \qquad (2.2\text{-}7)$$

则 $(A-\lambda_i I)y = 0$，且 $y \neq 0$. 这就是说，y 是属于 λ_i 的1级根向量。

由于（2.2-7）式是非齐次线性方程组，所以要求它有解，增广矩阵 $[A-\lambda_i I \vdots y]$ 的秩必须也是 r_i .这就对 y 的选取作了限制.

如果还有更高级的根向量，我们仍是利用(2.2-7)式从这级的根向量 y 求高一级的根向量 x ，但要注意 y 的选取应使方程组(2.2-7)的解存在.

5. 当根向量空间的维数等于代数重数，则说明无下一级根向量，停止计算。

6. 最后所有特征向量与二级或以上根向量的组合即为所求的可逆矩阵P。