概念学习
数值积分公式
近似求积公式的代数精度
插值型求积公式
考点1--确定一个求积公式代数精度或已知精度反求参数
考点2--Newton-Cotes求积公式
考点3--复化求积公式
复化梯形公式
复化Simpson公式
考点4--Gauss求积公式
Gauss-Legendre求积公式
Gauss-Chebyshev求积公式

概念学习

数值积分公式

对于积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx$$

利用数值方法求I(f)的值，就是用被积函数f(x)在区间[a,b]上一些节点x_k处的函数值$f(x_k)$的线性组合

$$I_n(f)=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

去近似I(f)，称x_k为求积节点，A_k为求积系数，I_n(f)为近似求积公式。

确定求积公式的过程就是确定x_k，A_k。

近似求积公式的代数精度

对于一个定积分I(f)的近似求积公式$I_n(f)$，对于一切不高于m次的代数多项式P_m准确成立

$$I(P_m)=I_n(P_m)$$

而对于某个m+1次的代数多项式P_{m+1}并不准确成立

$$I(P_{m+1})\neq I_n(P_{m+1})$$

则称近似求积公式$I_n(f)$具有**m次代数精度**！

近似求积公式的余项：

$$R(f)=I(f)-I_n(f)$$

插值型求积公式

对于求积系数

$$A_k=\int_a^b l_k(x)dx=\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-xj}{x_k-x_j}dx$$

$$\text{其实}l_k(x)\text{即为}Lagrange\text{插值函数的基函数！}$$

则称对应的A_k组成的求积公式为插值型求积公式。

插值型求积公式

$$I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$$

至少由n次代数精度！

插值型求积公式的余项为：

$$R[f]=I-I_n=\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$$
$$\text{其中}\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

考点1--确定一个求积公式代数精度或已知精度反求参数

非插值型求积公式或Guass求积公式时，确定求积公式的代数精度，就只能按照定义来一项项确定

$$I(P_m)=I_n(P_m)$$
$$\text{即逐项验证，}1,x,x^2,x^3\ldots\ldots,\text{直到}x^n\text{公式不成立时，代数精度即为}n-1$$

例题

$$\text{若求积公式}\int_0^4f(x)dx=A_1f(1)+A_2f(4)\text{有一次代数精度，则}A_1,A_2\text{的值为}$$
$$\text{根据定义知道，求积公式具有一次代数精度，则其对于}f(x)=1,x\text{的情况下是恒成立}$$
$$\text{则可将}f(x)=1\text{，}x\text{分别代入求积公式，便可得到关于}A_1,A_2\text{的线性方程组：}$$
$$\begin{cases}A_1+A_2=\int_0^4 1dx=4\\A_1+4A_2=\int_0^4 xdx=8\end{cases}$$
$$\text{即可解得：}\begin{cases}A_1=\frac{8}{3}\\A_2=\frac{4}{3}\end{cases}$$

考点2--Newton-Cotes求积公式

利用插值型积分公式而言，我们可以看出，具体的求积结果与f(x)的选取无关，只与节点x_k的选择相关。

$$\text{当节点在}[a,b]\text{等距分布时，}x_k=a+kh,h=\frac{b-a}{n},k=0,1,\cdots,n$$
$$A_k=\int_{x_0}^{x_n}l_k(x)dx=\int_{x_0}^{x_k}\prod_{j\neq k}\frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}dx=C_k^{(n)}(b-a)$$
$$C_k^{(n)}\text{被称作}Cotes\text{系数}$$

对于不同阶n所对应有不同的Cotes系数，一般常用的为前三阶，Cotes系数表如下

n\k	0	1	2	3	4
1	1/2	1/2			
2	1/6	2/3	1/6		
3	1/8	3/8	3/8	1/8	
4	7/90	16/45	2/15	16/45	7/90

相应的对于不同阶数n下有相应的求积公式为：

$$n=1,\text{梯形公式}\qquad \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)],1\text{次代数精度}$$

$$\text{余项}\qquad R(f)=-\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)=-\frac{1}{12}h^3 f''(\xi),a\le\xi\le b,h=b-a$$

$$n=2\text{，}Simpson\text{公式}\qquad \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{b+a}{2})+f(b)]\text{，}3\text{次代数精度}$$

$$\text{余项}\qquad R(f)=-\frac{1}{2880}(b-a)^5 f^{(4)}(\xi)=-\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi),a\le\xi\le b,h=\frac{b-a}{2}$$

$$n=3\text{，}Simpson\frac{3}{8}\text{公式}\qquad 3\text{次代数精度}$$

$$\text{余项}\qquad R(f)=-\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi),a\le\xi\le b,h=\frac{b-a}{3}$$

$$n=4\text{，}Cotes\text{公式}\qquad 5\text{次代数精度}$$

$$\text{余项}\qquad R(f)=-\frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\xi),a\le\xi\le b\text{，}h=\frac{b-a}{4}$$

$$\text{对于}Newton-Cotes\text{公式，代数精度可如下记忆：}\begin{cases}\text{至少}n\text{次代数精度，}n\text{为奇数}\\ \text{至少}n+1\text{次代数精度，}n\text{为偶数}\end{cases}$$

例题

$$\text{使用梯形公式和}Simpson\text{公式计算积分}\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}dx\text{的及近似值与截断误差}$$

$$\text{由梯形公式可得，}\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}dx\approx\frac{2-1}{2}(e+e^{\frac{1}{2}})=2.1835$$

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}},f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}},f''(x)=(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4})e^{\frac{1}{x}}$$

$$\max_{1\le x\le 2}|f''(x)|=f''(1)=3e$$

$$\text{则截断误差为}|R_1|\le\frac{(2-1)^3}{12}\max_{1\le x\le 2}|f''(x)|=0.6796$$

$$\text{同理对于}Simpson\text{公式有}\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}dx\approx\frac{2-1}{6}(e+4e^{\frac{2}{3}}+e^{\frac{1}{2}})=2.0263$$

$$f^{(4)}(x)=(\frac{1}{x^8}+\frac{12}{x^7}+\frac{36}{x^6}+\frac{24}{x^5})e^{\frac{1}{x}}$$

$$\max_{1\le x\le 2}|f^{(4)}(x)|=f^{(4)}(1)=73e$$

$$|R_2|\le\frac{(2-1)^5}{2880}\max_{1\le x\le 2}|f^{(4)}(x)|=0.06890$$

考点3--复化求积公式

所谓复化求积公式就是将一个大区间[a,b]等距的划分多个小区间[x_k,x_{k+1}]，在每个小区间上分别使用Newton-Cotes公式，最后将每个区间上的求积结果加和即为大区间上的求积结果。

主要使用的就是复化梯形公式与复化Simpson公式

$$\text{对于区间}[a,b]\text{上的}f(x)\text{积分，将区间}[a,b]n\text{等分，步长}h=\frac{b-a}{n}\text{得到}n\text{个等距区间}[x_k,x_{k+1}](k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

$$\text{每个小区间上积分记作}Newton-Cotes\text{低阶求积公式计算结果为}I_k,\text{再求和}\sum_{k=0}^{n-1}I_k\text{即为所求积分值}I\text{的近似值}$$

复化梯形公式

$$T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)]$$

$$\text{其中}h=\frac{b-a}{n},x_k=a+kh(k=0,1,2,\cdots,n)$$

$$\text{余项}R(f)=I-T_n=--\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta),\eta\in[a,b]$$

复化Simpson公式

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{6}[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]$$

$$=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)]$$

$$\text{其中}x_{k+\frac{1}{2}}\text{是子区间}[x_k,x_{k+1}]\text{的中点}$$

$$\text{余项}R(f)=I-S_n=-\frac{b-a}{180}(\frac{h}{2})^4f^{(4)}(\eta),\eta\in[a,b]$$

考点4--Gauss求积公式

对于带权积分

$$I(f)=\int_a^b\rho(x)f(x)dx,\rho(x)\geq0\text{为权函数}$$

$$\text{当}\int_a^b\rho(x)f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$$

$$\text{对于此类插值型求积公式的代数精度为}2n+1\text{时，称该积分公式为}Gauss\text{型求积公式}$$

$$\text{对应的求积节点}x_k\text{称为}Gauss\text{点}$$

$$\text{求积节点为}Gauss\text{点的充要条件为：}$$

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\text{与任意不超过}n\text{次的多项式}P(x)\text{带权正交}$$

$$\text{即}\int_a^b\rho(x)P(x)\omega_{n+1}(x)dx=0$$

$$\text{推论：}[a,b]\text{上带权}\rho(x)\text{正交的多项式}\phi_{n+1}(x)\text{的零点是}Gauss\text{点}$$

Gauss求积公式的余项：

$$R(f)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b\rho(x)\omega_{n+1}^2(x)dx,a\leq\xi\leq b$$

Gauss-Legendre求积公式

Legendre多项式是区间[-1,1],p(x)=1的正交多项式，以Legendre多项式为零点为Gauss点的求积公式称作Gauss-Legendre求积公式。

当p(x)=1,区间在[a,b]上时，可做变量代换:

$$x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2},x\in[a,b],t\in[-1,1]$$

$$\int_a^bf(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_a^bf(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2})dt\approx\frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{n}A_kf(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2})$$

对于积分公式中A_k与x_k可用下表记忆，一般而言记忆至$n=2$即可

$$\begin{vmatrix} n & 点数 & x_k & A_k \\ 1 & 2 & \pm 1/\sqrt{3} & 1.0 \\ 2 & 3 & \begin{matrix} \pm\sqrt{3/5} \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 5/9 \\ 8/9 \end{matrix} \end{vmatrix}$$

转化成求积公式的形式即是：

$$n=1时，两点Gauss求积公式\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})dx$$

$$n=2时，三点Gauss求积公式\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{9}[5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\frac{3}{5}})]$$

Gauss-Chebyshev求积公式

Chebyshev多项式是区间[-1,1],p(x)=1/sqrt(1-x^2)的正交多项式，以Chebyshev n+1次多项式的零点

$$x_k = cos[\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi], k=0,1,2,\cdots,n$$

为Gauss点，相应的求积系数为

$$A_k = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} l_k(x)dx = \frac{\pi}{n+1}, k=0,1,2,\cdots,n$$

其中$l_k(x)$时关于所选节点的$Lagrange$插值基函数

从而得到相应的求积公式为

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(x_k)$$

称作Gauss-Chebyshev求积公式

常见的两点$Gauss-Chebyshev$求积公式：

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx = \frac{\pi}{2} f(\cos\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{2} f(cos\frac{3\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}[f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + f(\frac{\sqrt{2}}{2})]$$

代数精度为：3次，因此不大于3次的多项式积分使用该求积公式截断误差为0

常见的三点$Guass-Chebyshev$求积公式：

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx = \frac{\pi}{3} f(\cos\frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{3} f(cos\frac{3\pi}{6}) + \frac{\pi}{3} f(cos\frac{5\pi}{6})$$

$$= \frac{\pi}{3}[f(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + f(0) + f(\frac{\sqrt{3}}{2})]$$

代数精度为：5次，因此对于不大于5次的多项式积分使用该求积公式截断误差为0