概念学习

函数的内积（可以理解为连续性向量内积）

函数f(x)与g(x)∈C[a,b]，在权函数p(x)上的内积记作：

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

函数的欧式范数（理解为连续性向量的模）

f(x)∈C[a,b]，f(x)的欧式范数记作：

函数的带权正交

函数f(x)与g(x)∈C[a,b]

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx=0$$

则称f与g在[a,b]上带权p(x)正交。

线性无关函数族（理解为线性无关连续性向量组）

$$\begin{gathered}\text{若}\phi_0(x),\cdots,\phi_{n-1}(x)\text{在}[a,b]\text{上连续，且有}\\ a_0\phi_0(x)+a_1\phi_1(x)+\cdots+a_{n-1}\phi_{n-1}(x)=0\\ \text{当且仅当}a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0\text{成立，则称}\phi_0,\cdots,\phi_{n-1}\text{在}[a,b]\text{上线性无关}\\ \text{函数族}\{\phi_k\}(k=0,1,\cdots,\ )\text{中任意有限个}\phi_k\text{线性无关，则称}\{\phi_k\}\text{为线性无关函数族}\end{gathered}$$

考题中最常用的线性无关函数族即为多项式函数族{x^k}(k=0,1,2,......,)

正交函数族（比线性无关条件更强）

$$若\phi_0(x),\cdots,\phi_{n-1}(x)在[a,b]上连续，且有$$

$$(\phi_j,\phi_k)=\int_a^b \rho(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx=\begin{cases} 0 & , & j\neq k & ; \\ A_k>0 & , & j=k & ; \end{cases}$$

$$称\{\phi_k\}是[a,b]上带权\rho(x)的正交函数族$$

$$若A_k\equiv 1,称\{\phi_k\}为标准正交函数族$$

常见的几种正交多项式

正交多项式即为线性无关函数族{x_k}(k=0,1,2,....)m正交化后所得的正交函数族

Legendre多项式

前置条件：在区间[-1,1]上带权p(x)=1

1. Legendre多项式系{P_n(x)}是区间[-1,1]上的正交多项式系，有：

$$\begin{cases} P_0(x) &=& 1, \\ P_n(x) &=& \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n], n=1,2,\cdots \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases} 0, n\neq m, \\ \frac{2}{2n+1}, n=m. \end{cases}$$

$$P_n(x)最高次项系数为：a_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

2. Legendre多项式具有奇偶性

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$$

3. P_n(x)满足递推关系

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

$$一般而言记忆前四项就足够了$$

$$P_0(x)=1,P_1(x)=x,P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

4. 在所有最高项系数为1的 次多项式中，Legendre多项式P_n(x)在 [-1,1]上与零的平方误差最小

5. P_n(x)在区间[-1,1]内有n个不同的实零点

Chebyshev多项式

前置条件：在区间[-1,1]上带权p(x)=1/sqrt(1-x^2)

1. Chebyshev多项式系{T_n(x)}是区间[-1,1]上带权1/sqrt(1-x^2)的正交多项式系，有：

$$T_n(x)=cos(narccosx),\ -1\leq x\leq 1$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases} 0, & i\neq j, \\ \frac{\pi}{2}, & i=j\neq 0, \\ \pi, & i=j=0. \end{cases}$$

$$n\geq 1时，最高次项系数为：a_n=2^{n-1}$$

2. Chebyshev多项式具有奇偶性

$$T_n(-x)=(-1)^n T_n(x)$$

3. T_n(x)满足递推关系

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$$

$$一般而言记忆前四项就足够了$$

$$T_0(x)=1,T_1(x)=x,T_2(x)=2x^2-1,T_3(x)=4x^3-3x$$

4. $T_n(x)$与零偏差最小

5. $T_n(x)$在区间[-1,1]内有n个零点

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, k = 1, 2, \cdots, n.$$

考点1--根据正交信息，计算未知数

题目信息：设f(x)=x^2+ax+b与1和x在[0,2]上带权p(x)=1正交，求a，b。

分析：本题考察重点在于**正交概念**之上。正交则说明f(x)与1和x都有相应的积分式=0，这样就能得到两个关于a,b的等式， 实质最终计算就是一个二元二次方程而已。

解答：

$$\text{由题正交信息可知：}\begin{cases}\int_0^2 \rho(x)f(x)\cdot 1dx = 0\\ \int_0^2 \rho(x)f(x)\cdot xdx = 0\end{cases}$$

$$\text{即}\begin{cases}\int_0^2 x^2+ax+bdx &= \frac{8}{3}+2a+2b=0\\ \int_0^2 (x^2+ax+b)xdx &= 4+\frac{8}{3}a+2b=0\end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases}a=-2\\ b=\frac{2}{3}\end{cases}$$

考点2--函数f(x)的最佳平方逼近

所谓最佳平方逼近

$$\text{即对于函数}f(x)\in C[a,b]\text{及}C[a,b]\text{中的一个子集线性无关函数族：}$$
$$\Phi = span\{\phi_0,\phi_1,\cdots,\phi_n\}$$
$$\text{存在}S^*(x)\in\Phi,\text{使得：}\|f-S^*\|_2^2\text{最小}$$
$$\text{又}S^*(x)\text{可以表示为}S^*(x)=\sum_{k=0}^n a_k^*\phi_k(x)$$
$$\text{于是}\|f-S^*\|_2^2=\|f(x)-\sum_{k=0}^n a_k^*\phi_k(x)\|_2^2=\int_a^b\rho(x)[f(x)-\sum_{k=0}^n a_k^*\phi_k(x)]^2dx$$
$$\text{因此最佳逼近函数的问题等价为}I(a_0,a_1,\cdots,a_n)=\int_a^b\rho(x)[f(x)-\sum_{k=0}^n a_k^*\phi_k(x)]^2dx\text{的最小值问题}$$
$$\text{根据多元函数极值存在的必要条件，进一步问题可以转化为：}\sum_{j=0}^n(\phi_k,\phi_j)a_j=(f,\phi_j)(k=0,1,\cdots,n)$$
$$\text{不难证明这个关于}a_0,a_1,\cdots,a_n\text{的线性方程组有唯一解，该解即为所求！}$$
$$\text{至此，最佳平方逼近问题转化为一个非齐次线性方程组的求解问题，而方程的解}a_k=a_k^*(k=0,1,\cdots,n)$$
$$\text{便可推出我们需要的最佳平方逼近函数}S^*(x)=a_0^*\phi_0(x)+a_1^*\phi_1(x)+\cdots+a_n^*\phi_n(x)$$

此类题目大多数为指定次幂多项式，此时我们使用线性无关函数族即为$\{x_k\}$(k=0,1,2,......)

则很容易可以设逼近函数$S(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$

接下来的解题重点就在于写出解出a_0，a_1，......，a_n的线性方程组进行求解

此处给出一个例题来辅助理解题过程。

例题

求一次多项式$P_1(x)$使得$\int_0^2(x^3-P_1(x))^2dx$的值最小。(也就是求$f(x)=x^3$在$[0,2]$上的一次最佳平方逼近函数$P_1(x)$)

$$根据题目信息不难可设P_1(x)=a_0+a_1x,即本题的线性无关函数族为\{1,x\}，我们需要计算的就是a_0,a_1$$

$$根据前面分析过程，我们只需要写出对应关于(a_0,a_1)的线性方程组就行求解即可$$

$$\sum_{j=0}^{k}(\phi_k,\phi_j)a_j=(f,\phi_j)(k=0,1,\cdots,n):\begin{pmatrix}(\phi_0,\phi_0) & (\phi_0,\phi_1)\\(\phi_1,\phi_0) & (\phi_1,\phi_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\phi_0,f)\\(\phi_1,f)\end{pmatrix}$$

$$本题中显化该线性方程组即为：\begin{pmatrix}(1,1) & (1,x)\\(x,1) & (x,x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,f)\\(x,f)\end{pmatrix}$$

$$进一步可得：\begin{pmatrix}\int_0^2 1^2dx & \int_0^2 1\cdot xdx\\\int_0^2 x\cdot 1dx & \int_0^2 x^2dx\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\int_0^2 1\cdot x^3dx\\\int_0^2 x\cdot x^3dx\end{pmatrix}$$

$$即：\begin{pmatrix}2 & 2\\2 & \frac{8}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\\frac{32}{5}\end{pmatrix}$$

$$解得：\begin{cases}a_0=-\frac{8}{5}\\a_1=\frac{18}{5}\end{cases}$$

$$故P_1(x)=-\frac{8}{5}+\frac{18}{5}x，即为所求的f(x)=x^3在[0,2]上一次最佳平方逼近函数$$

平方误差的计算

$$此外有些题让计算完最佳平方逼近函数后，还需要进一步计算平方误差：$$

$$也就是计算\|f-S^*\|_2^2=(f-S^*,f-S^*)=(f,f)-(S^*,f)=\|f\|_2^2-\sum_{k=0}^{n}a_k^*(\phi_k,f)$$

$$即\int_0^2(x^3)^2dx-(a_0\cdot\int_0^2 1\cdot x^3dx)+a_1\cdot\int_0^2 x\cdot x^3dx)=\frac{128}{7}-(-\frac{8}{5}\cdot 4+\frac{18}{5}\cdot\frac{32}{5})=1.6457$$

总结：本例题中所使用的方法属于是最佳平方逼近函数计算的通法，适用于任何线性无关函数族，只需要照着葫芦画瓢通过计算先写出对应的线性方程组，再进行求解得到我们需要的系数a_k^*(k=0,1,2,....,n)即可。

但这种情况下，在计算线性方程组前我们就需要计算(n+1)*(n+2)个积分得到线性方程组中的所有系数，如果n过大时，计算量是难以估计的，这个时候**正交函数族**就有了其的用武之地。

考点3--使用正交函数族进行最佳平方逼近

正交函数族的优势：相较于一般的线性无关函数族，正交函数族有如下性质，

$$(\phi_j,\phi_k)=\int_a^b\rho(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx=\begin{cases}0 & , & j\neq k & ;\\A_k>0 & , & j=k & ;\end{cases}$$

这就保证了正交函数族所组成的线性方程组的系数矩阵是一个**对角矩阵**，这样解线性方程前的计算积分的任务就会小很多，并且，解线性方程也就变成了简单的对应问题，计算量十分的小！

在正交函数族下，计算量仅仅只需要计算出系数矩阵的对角阵与增广矩阵的最后一列即可。同时这个时候就可以用到我们前面学习的正交多项式了。

例题

$$求f(x)=e^x在[-1,1]上的三次最佳平方逼近多项式，要求用Legendre多项式作为基函数(正交函数族)$$

$$对于在[-1,1]区间，权函数\rho(x)=1的最佳平方逼近题，我们可以使用Legendre多项式作为正交函数族$$

$$所以对于此类题，最重要的就是对于Legendre多项式的记忆，一般不会超过4项$$

$$首先可以记忆其递推式：(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

$$前两项容易记忆P_0(x)=1,P_1(x)=x,后面可以记忆，也可以递推P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$\text{此题中要求的是三次最佳平方逼近多项式，因此可设}$$
$$S(x) = a_0(x)P_0(x) + a_1(x)P_1(x) + a_2(x)P_2(x) + a_3(x)P_3(x)$$
$$\text{相应的我们可以写出对应的线性方程组为：}$$
$$\begin{pmatrix} (P_0,P_0) & & & \\ & (P_1,P_1) & & \\ & & (P_2,P_2) & \\ & & & (P_3,P_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_0,f) \\ (P_1,f) \\ (P_2,f) \\ (P_3,f) \end{pmatrix}$$
$$\text{不难看出}a_k = \frac{(P_k,f)}{(P_k,P_k)}$$

相比较普通的线性无关函数族，正交函数族，整个过程中只需要计算2(n+1)个积分便可得到所需的解，而代价只是增加一部分记忆而已。

$$(P_0,P_0) = \int_{-1}^{1} 1^2 dx = 2,\ (P_1,P_1) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$
$$(P_2,P_2) = \int_{-1}^{1} [\frac{1}{2}(3x^2-1)]^2 dx = \frac{2}{5},\ (P_3,P_3) = \int_{-1}^{1} [\frac{1}{2}(5x^3-3x)]^2 dx = \frac{2}{7}$$
$$\text{可记忆：}(P_n,P_n) = \int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$
$$\text{所以}a_k = \frac{2k+1}{2}(P_k,f)$$

所以实质需要计算的就只剩增广矩阵的最后一列的

$$(P_k,f)(k=0,1,\cdots,n)$$
$$(P_0,f) = \int_{-1}^{1} e^x dx = e - e^{-1},\ (P_1,f) = \int_{-1}^{1} xe^x dx = 2e^{-1}$$
$$(P_2,f) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3x^2-1)e^x dx = e - 7e^{-1},\ (P_3,f) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(5x^3-3x)e^x dx = 37e^{-1} - 5e$$

然后就不难得出

$$a_0 = \frac{1}{2}(e-e^{-1}),\ a_1 = \frac{3}{2}(2e^{-1}) = 3e^{-1}$$
$$a_2 = \frac{5}{2}(e-7e^{-1}),\ a_3 = \frac{7}{2}(37e^{-1}-5e)$$
$$\begin{aligned} S^*(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k P_k(x) &= \frac{1}{2}(e-e^{-1}) + 3e^{-1}x + \frac{5}{2}(e-7e^{-1})\frac{1}{2}(3x^2-1) + \frac{7}{2}(37e^{-1}-5e)\frac{1}{2}(5x^3-3x) \\ &= \frac{1}{2}(e-e^{-1}) + 3e^{-1}x + \frac{5}{4}(e-7e^{-1})(3x^2-1) + \frac{7}{4}(37e^{-1}-5e)(5x^3-3x) \end{aligned}$$

Legendre下平方误差的计算更加简便

$$\|\delta_n\|_2^2 = (f,f) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} a_k^{*2}$$

考点4--离散点的最小二乘拟合

多项式线性无关函数族拟合

对于离散点的最小二乘拟合，整体计算思想与函数的最佳平方拟合无异，只不过区别在于内积的离散性与连续性而已

$$\text{内积的离散形式与连续形式：}$$
$$(f,g) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \omega(x_i)f(x_i)g(x_i) & ,\quad \text{离散型,} \\ \int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx & ,\quad \text{连续型.} \end{cases}$$

对于多项式拟合而言，计算过程只不过就是把(f,g)的计算换为了离散型的内积，其他计算过程一概相同

例题

试使用二次和三次多项式以最小二乘拟合表中的数据，并比较优劣

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-0.1	0.1	0.4	0.9	1.6

对于离散型既可以如同之间那般一个个计算线性方程组的系数，然后解线性方程组，当然还有一个更快的解题方法

$$
\text{对于离散型的而言，若是求多项式拟合，线性方程组可抽象记作：}\\
A^TAa=A^TY\\
\text{其中}A=\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{bmatrix},a=\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{n-1}\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\\
\text{此时平方误差可记作：}\sigma=Y^T(Y-Aa)
$$

本题中即为:

$$
\text{设二次多项式}y_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2,\text{利用法方程：}A^TAa=A^TY\\
\text{其中线性无关函数族为}\{\phi_0(x)=1,\phi_1(x)=x,\phi_2(x)=x^2\},a=(a_0,a_1,a_2)^T\\
A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix},Y=\begin{pmatrix}-0.1\\ 0.1\\ 0.4\\ 0.9\\ 1.6\end{pmatrix},A^TA=\begin{bmatrix}5 & 0 & 10\\ 0 & 10 & 0\\ 10 & 0 & 34\end{bmatrix},A^TY=\begin{pmatrix}2.9\\ 4.2\\ 7\end{pmatrix}\\
\begin{bmatrix}5 & 0 & 10\\ 0 & 10 & 0\\ 10 & 0 & 34\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.9\\ 4.2\\ 7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}a_0 &= & 0.4086\\ a_1 &= & 0.42\\ a_2 &= & 0.0857\end{cases}\\
y_2(x)=0.4086+0.42x+0.0857x^2\\
\text{对应的误差平方和}\sigma_2=Y^T(Y-Aa)=0.00116
$$

$$
\text{相应的可设三次多项式为}y_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3,\text{同样有法方程：}A^TAa=A^TY\\
\begin{bmatrix}5 & 0 & 10 & 0\\ 0 & 10 & 0 & 34\\ 10 & 0 & 34 & 0\\ 0 & 34 & 0 & 130\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.9\\ 4.2\\ 7\\ 14.4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}a_0 &= & 0.4086\\ a_1 &= & 0.39167\\ a_2 &= & 0.0857\\ a_4 &= & 0.00833\end{cases}\\
y_3(x)=0.4086+0.39167x+0.0857x^2+0.00833x^3\\
\text{对应的误差平方和}\sigma_3=Y^T(Y-Aa)=0.000194\\
\text{通过对比误差平方和，不难看出三次多项式的精度更好。}
$$

正交多项式函数族拟合

即在多项式子空间找出另一组正交多项式函数族，有了正交多项式族，我们a_i的计算就可以简化为:

$$
a_i=\frac{(\phi_i,y)}{(\phi_i,\phi_i)}(i=0,1,\cdots,n)
$$

当然对于离散点而言，内积过程是带入点x_i的乘积累加

而正交多项式函数族则不再能够使用之前现有的，需要通过推导式自行推导:

$$最高项系数为1的正交多项式\phi_k(x)中任何相邻三个多项式满足：$$
$$\phi_{k+1}(x)=(x-\alpha_{k+1})\phi_k(x)-\beta_k\phi_{k-1}(x)(k=0,1,2,\cdots)$$
$$其中\alpha_{k+1}=\frac{(x\phi_k,\phi_k)}{(\phi_k,\phi_k)},\beta_0=0,\beta_k=\frac{(\phi_k,\phi_k)}{(\phi_{k-1},\phi_{k-1})},k=1,2,\cdots$$

例题

$$对于\omega=1,用y=c_0+c_1x+c_2x^2来拟合下表数据$$

x	1	2	3	4
y	4	10	18	26

$$首先\phi_0(x)=1是已知，接着我们就从这个信息，开始逐步推导正交函数族和a_i$$
$$a_0=\frac{(\phi_0,y)}{(\phi_0,\phi_0)}=\frac{4+10+18+26}{1+1+1+1}=\frac{29}{2}$$
$$\alpha_1=\frac{(x\phi_0,\phi_0)}{(\phi_0,\phi_0)}=\frac{1+2+3+4}{1+1+1+1}=\frac{5}{2}$$
$$\phi_1(x)=(x-\alpha_1)\phi_0(x)=x-\frac{5}{2}$$
$$a_1=\frac{(\phi_1,y)}{(\phi_1,\phi_1)}=\frac{-\frac{3}{2}\cdot4+-\frac{1}{2}\cdot10+\frac{1}{2}\cdot18+\frac{3}{2}\cdot26}{(-\frac{3}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{37}{5}$$
$$\alpha_2=\frac{(x\phi_1,\phi_1)}{(\phi_1,\phi_1)}-=\frac{(-\frac{3}{2})^2+(-\frac{1}{2})\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cdot6}{(-\frac{3}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{5}{2}$$
$$\beta_1=\frac{(\phi_1,\phi_1)}{(\phi_0,\phi_)}=\frac{(-\frac{3}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+(\frac{3}{2})^2}{1+1+1+1}=\frac{5}{4}$$
$$\phi_2(x)=(x-\alpha_2)\phi_1(x)-\beta_1\phi_0(x)=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{5}{4}=x^2-5x+5$$
$$a_2=\frac{(\phi_2,y)}{(\phi_2,\phi_2)}=\frac{4-10-18+26}{1^2+(-1)^2+(-1)^2+1^2}=\frac{1}{2}$$
$$综上y_2(x)=a_0\phi_0(x)+a_1\phi_1(x)+a_2\phi_2(x)$$
$$=\frac{29}{2}+\frac{37}{5}(x-\frac{5}{2})+\frac{1}{2}(x^2-5x+5)$$
$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{49}{10}x-\frac{3}{2}$$

考点5--非多项式的最小二乘拟合

重点在于将非多项式关系的y与x，通过处理转换为线性或多项式相关的Y与X关系，继续借用之前的思路就是参数A,B，从而算出相应的参数a,b

$$例如需要拟合形如指数函数y=ae^{bx}形式曲线时，我们可以先做一个变换：$$
$$将指数函数取对数可得,\ln y=\ln a+bx$$
$$便可令Y=\ln y,X=x,A=\ln a,B=b$$
$$于是就得到了关于Y，X的线性关系Y=A+BX$$
$$同时将原来的点集(x_i,y_i)\to(X_i,Y_i),进行一次多项式的拟合求出A,B$$
$$便可得到a=e^A,b=B$$

对于上面的例子，给出如下点集，进行实践：

x	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

令$Y=\ln y, X=x$,可得到点集(X_i,Y_i)

X	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
Y	1.63	1.76	1.88	2.01	2.14

接下来在此点集合上拟合一次多项式$Y=A+BX$,则有法方程组$A^TAa=A^TY$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.25\\ 1 & 1.50\\ 1 & 1.75\\ 1 & 2\end{bmatrix}, Y=\begin{pmatrix}1.63\\ 1.75\\ 1.88\\ 2.01\\ 2.14\end{pmatrix}, A^TA=\begin{bmatrix}5 & 7.5\\ 7.5 & 11.875\end{bmatrix}, A^TY=\begin{pmatrix}9.41\\ 14.435\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}5 & 7.5\\ 7.5 & 11.875\end{bmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9.41\\ 14.435\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}A & = & 1.114\\ B & = & 0.512\end{cases}$$

$$\text{则可知}\begin{cases}a & = & e^A=e^{1.114} & = & 3.047\\ b & = & B & = & 0.512\end{cases}$$

故可得拟合曲线为$y=ae^{bx}=3.047e^{0.512x}, x=1.35$估计值为$6.08$