考点1--误差分析和有效数字判别

绝对误差

$$x^*\text{是准确值}x\text{的一个近似值，则称}$$
$$e = x - x^*\text{为}x^*\text{的绝对误差}$$
$$|e|\text{的一个上界}\varepsilon^*\text{称作近似值的误差限}$$

> 1. 误差限一般为某位的半个单位
> 2. 如刻度尺测量时，误差限即为测量精度的1/2
> 3. 四舍五入时，绝对误差限为近似值末位的半个单位

相对误差

$$e_r = \frac{x - x^*}{x}\text{，因为}x\text{未知，一般用}$$
$$e_r = \frac{e}{x^*}\text{来进行替代，一般用百分比来进行表示}$$

有效数字

若近似值 x^*的误差限是某一位的半个单位，设该位到 x^*的第一位非零数字共有 n 位，则称 x^* 有 n位**有效数字**。

$$x^*\text{存在}n\text{位有效数字时，写作标准化形式为：}$$
$$x^* = \pm a_1a_2a_3\cdots a_n \times 10^m, a_1 \neq 0, m\text{为整数}$$
$$\text{此时相对误差限可表示为：}$$
$$\varepsilon_r^* \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}$$
$$\text{相反的，若}x^*\text{的相对误差限为：}\varepsilon_r^* \leq \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-(n-1)}$$
$$\text{则称}x^*\text{至少具有}n\text{位有效数字}$$

> 1. 已知有效数字位数，反求相对误差限时，常取a_1 =1的情况来表示最不利的情况
> 2. 已知相对误差限，反推有效数字的至少位数时，常取a_1=9的情况来反推

考点2--插值法获取插值多项式

重点是Lagrange插值法和Newton差商形式下的差值公式，以及Hermite的三点三次插值与Newton插值的关系！

Lagrange插值法

$$\text{插值函数}L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)y_i$$
$$\text{其中}l_i(x) = \prod_{j\neq i\ j=0}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

特别的就有：

一点零次插值多项式：

$$L_n(x) = y_0$$

两点一次插值多项式：

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

三点两次插值多项式（这个的计算量考察概率比较大）：

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

插值余项

举例计算Lagrange插值公式

k	x_k	$f(x_k)$
0	0	3
1	1	3
2	3/2	13/4
3	2	5/3

本题是一个四点三次的Lagrange插值多项式

$$\begin{aligned}
L_3(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2(x_1-x_3)}y_1 \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3 \\
&= \frac{(x-1)(x-\frac{3}{2})(x-2)}{(-1)(-\frac{3}{2})(-2)}*3 + \frac{x(x-\frac{3}{2})(x-2)}{1(-\frac{1}{2})(-1)}*3 + \frac{x(x-1)(x-2)}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}\frac{13}{4} + \frac{x(x-1)(x-\frac{3}{2})}{2\cdot 1\cdot \frac{1}{2}}\frac{5}{3} \\
&= -(x-1)(x-\frac{3}{2})(x-2) + 6x(x-\frac{3}{2})(x-2) - \frac{26}{3}x(x-1)(x-2) + \frac{5}{3}x(x-1)(x-\frac{3}{2}) \\
&= -2x^3 + \frac{16}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + 3
\end{aligned}$$

Newton插值公式（差商形式）

$$Nn(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

$$\text{其中}f[x_0,x_1]\text{称作一阶差商，}f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$\text{同理}f[x_0,x_1,x_2]\text{称作二阶差商，}f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$\text{进一步递推的可以得到}f[x_0,x_1,\ldots,x_n] = \frac{f[x_1,x_2,\ldots,x_n]-f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

对于此类题目。一般先做出差商表，再进行计算就比较简单

Newton插值法例题

k	x_k	$f(x_k)$	$f[x_{k-1},x_k]$	$f[x_{k-2},x_{k-1},x_k]$	$f[x_{k-3},x_{k-2},x_{k-1},x_k]$
0	0	**3**			
1	1	3	**0**		
2	3/2	13/4	1/2	**1/3**	
3	2	5/3	-19/6	-11/3	**-2**

根据差商表的对角线值即为所求插值公式所需值

该四点三次Newton插值多项式即为

$$
\begin{aligned}
N_3(x) &= f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&= 3+0(x-0)+\frac{1}{3}(x-0)(x-1)+(-2)(x-0)(x-1)(x-\frac{3}{2}) \\
&= 3+(x^2-x)(\frac{10}{3}-2x) \\
&= -2x^3+\frac{16}{3}x^2-\frac{10}{3}x+3
\end{aligned}
$$

Hermite插值

Hermite插值中不仅要求函数值相同，还会要求导数值相等，与前面一致，n+1个条件可以推的n次多项式唯一！

这里推荐一个用Newton插值公式来计算Hermite插值的方法，即将某点的导数值看作一个重节点条件，再引入重节点的差商公式来进行计算：

重节点的差商公式：

$$
f[\underbrace{x,x,\cdots,x}_{k+1}]=\lim_{x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}\to x} f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x]=\frac{f^{(k)}(x)}{k!}
$$
$$
\text{最常用的就是一点含有一阶导数值，那么就可以看作一个二重节点}
$$
$$
\text{计算其对应的差商时就有：} f[x,x]=f'(x)
$$
$$
\text{同理一点含有二阶导数值时，就为三重节点，就有：} f[x,x,x]=\frac{f''(x)}{2!}
$$

使用重节点的思想，将Hermite插值转换为Newton插值计算差商

例题

求一个四次插值多项式$H_4(x)$，条件如下：

x	f(x)	f'(x)	f''(x)
0	-1	-2	
1	0	10	40

按照重节点的思想，x=0为一个二重节点，x=1为一个三重节点

并可做如下的差商表：

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0	**-1**				
0	-1	**f[0,0]=f'(0)=-2**			
1	0	f[0,1]=1	**f[0,0,1]=3**		
1	0	f[1,1]=f'(1)=10	f[0,1,1]=9	**f[0,0,1,1]=6**	
1	0	f[1,1]=f'(1)=10	f[1,1,1]=f''(1)=40/2!	f[0,1,1,1]=11	**f[0,0,1,1,1]=5**

通过差商表，便可十分轻易写处对应的插值公式为：

$$
\begin{aligned}
H_4(x) &= f(0)+f[0,0](x-0)+f[0,0,1](x-0)^2+f[0,0,1,1](x-0)^2(x-1)+f[0,0,1,1,1](x-0)^2(x-1)^2 \\
&= -1+(-2)x+3x^2+6x^2(x-1)+5x^2(x-1)^2 \\
&= 5x^4-4x^4+2x^2-2x-1
\end{aligned}
$$

通过上面的重节点处理方法下，所有的Hermite插值计算，均可以转换为Newton插值计算

考点3--插值余项与插值误差估计

插值余项

对于任意的插值方法，它们的插值余项是可以表示为同一种形式的

$$\text{总结来说，插值余项的形式即为，若插值为}n\text{次多项式，插值余项}R_n(x)$$
$$\text{第一项形式固定：}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$
$$\text{第二项则与插值节点}x_i\text{有关}(Hermite\text{插值中看作重节点！})\text{：}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$
$$\text{二者结合可得}R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

插值误差的估计

插值误差的估计，本质上还是考察插值余项，不过是将插值余项R_n（x)实例化的一个过程！

$$\text{对于插值}n\text{次多项式，我们有插值余项}R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$
$$\text{我们用将}\xi_x\text{用最大值来替代进行误差上限估计：}|f^{(n+1)}(x)|\leq M_{n+1}$$
$$\text{进一步通过均值不等式：}a_1\cdot a_2\cdots a_n\leq(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})^n$$
$$\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\leq(\frac{\sum_{i=0}^{n}(x-x_i)}{n+1})^{n+1}=(x-\frac{\sum_{i=0}^{n}x_i}{n+1})^{n+1}\leq\max_{x\in x_i}(x-\frac{\sum_{i=0}^{n}x_i}{n+1})^{n+1}$$
$$\text{综上可得插值误差的估计值}|Rn(x)|\leq\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{x\in x_i}(x-\frac{\sum_{i=0}^{n}x_i}{n+1})^{n+1}$$

例题

若p(x)是f(x)=e^{x-2}在节点0，0.1，0.2，......，0.9，1处的10次插值多项式，试估计该插值多项式在[0,1]上的插值误差。

分析：不难看出本题中的插值多项式是一个11点10次的插值多项式，并且没有重节点，因此根据前面**插值余项**的学习，很容易写出该插值多项式的插值余项为：

$$R_{10}(x)=\frac{f^{(11)}(\xi)}{(n+1)!}(x-0)(x-0.1)\cdots(x-0.9)(x-1)$$

再根据前面**插值误差的估计**

$$\text{我们接下来要计算的就是}f^{(11)}(x)\text{在}[0,1]\text{上的最大值}M_{n+1}$$
$$f^{(11)}(x)=e^{x-2},\text{显然}M_{11}=\max_{x\in[0,1]}f^{(11)}(x)=f^{(11)}(1)=e^{-1}$$
$$\text{接着根据均值不等式我们：}$$
$$(x-0)(x-0.1)\cdots(x-0.9)(x-1)\leq(x-\frac{0.1+0,2+\cdots+0.9+1}{11})^{11}=(x-0,5)^{11}$$
$$\text{进一步的}(x-0.5)^{11}\leq\max_{x\in[0,1]}(x-0.5)^{11}=0.5^{11}$$
$$\text{综上}|R_{10}(x)|\leq\frac{M_{11}}{11!}0.5^{11}=\frac{e^{-1}0.5^{11}}{11!}$$