概念学习

向量范数

1. 向量的∞-范数（最大范数）：

$$\|X\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

2. 向量的1-范数：

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

3. 向量的2-范数：

$$\|X\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

4. 向量的p-范数：

$$\|X\|_p = (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}},\ p \in [1, +\infty)$$

矩阵的算子范数

1. 矩阵的∞-范数（行范数）：

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

2. 矩阵的1-范数（列范数）：

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

3. 矩阵的2-范数：

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)},\quad \lambda_{max}(A^TA)\text{表示}A^TA\text{的最大特征值}$$

矩阵的谱半径

$$\text{设}A \in R^{n\times n}\text{的特征值为}\lambda_i(i=1,2,\cdots,n),\text{称}\rho(A) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|\text{为}A\text{的谱半径}$$

谱半径又称矩阵A的特征值上界

$$\rho(A) \le \|A\|_v\ (v = 1, 2\text{或}\infty)$$

若A为对称矩阵，则

$$\|A\|_2=\rho(A)$$

矩阵的条件数

$$若A^{-1}存在，则称数cond(A)=\|A^{-1}\|\|A\|为矩阵A的条件数，\|\bullet\|是矩阵的算子范数$$

常用条件数

$$1.A的\infty-条件数：\ cond_\infty(A)=\|A^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty$$
$$2.A的1-条件数：\ cond_1(A)=\|A^{-1}\|_1\|A\|_1$$
$$3.A的2-条件数：\ cond_2(A)=\|A^{-1}\|_2\|A\|_2=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^TA)}{\lambda_{\min}(A^TA)}}$$
$$当A为对称矩阵时，A^TA=A^2,A的特征值为\lambda,对应的A^2的特征值为\lambda^2$$
$$此时cond_2(A)=\frac{|\lambda|_{\max}}{|\lambda|_{\min}}$$

条件数的性质

$$cond(A)\geq 1,\ cond(A)=cond(A^{-1}),\ cond(\alpha A)=cond(A)$$

考点1-范数与条件数的计算

这一部分熟练记忆向量范数，矩阵范数、条件数的对应概念及计算规则即可

例题

$$设A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&3&0\\0&0&3\end{pmatrix},X=(-6,5,4),则\|XA\|_\infty=\_,\ cond(A)_2=\_$$

$$首先要明确计算的范数是矩阵的，还是向量的$$
$$XA=(-6,5,4)\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=(-28,27,12)$$
$$显然XA是一个行向量，因此\|XA\|_\infty计算的是向量的\infty-范数$$
$$\|XA\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|=28$$
$$而对于条件数,cond(A)_2=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^TA)}{\lambda_{\min}(A^TA)}}$$
$$A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&3&0\\0&0&3\end{pmatrix},\ 不难看出A是一个对称矩阵，A^T=A$$
$$此时cond(A)_2=\frac{|\lambda|\max}{|\lambda|\min}\quad \lambda为A的特征值$$
$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)=0$$
$$显然cond(A)_2=5$$

考点2--矩阵A的LU分解并求解线性方程组

若方阵A可写成A=LU的形式，其中L是单位下三角阵，U是上三角阵，则称此式为A的一个三角分解或Doolittle分解

对于线性方程组AX=b，对A进行三角分解后，方程的求解过程可以等价为求解两个三角形方程组：

$$LY=b,\quad 求解Y$$
$$UX=Y,\quad 求解X$$

矩阵的LU 分解

$$设A为n阶矩阵，如果A的顺序主子式D_i \neq 0(i=1,2,\cdots,n-1),则A可分解为$$
$$一个单位下三角矩阵L与一个上三角矩阵U的乘积，且这种分解是唯一的,A=LU$$
$$A=\begin{pmatrix}1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn}\end{pmatrix}$$

例题

$$设方程组\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 \\ 1 \\ 1\end{bmatrix}，设系数矩阵为A，求A的LU分解并求解该方程$$
$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33}\end{pmatrix}$$
$$于是L=\begin{pmatrix}1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 \\ & -1 & 3 \\ & & -1\end{pmatrix}$$
$$参数的求解过程可遵循，u_{1j}=a_{1j}(j=1,2,3)\rightarrow l_{i1}(i=2,3)\rightarrow u_{2j}(j=2,3)\rightarrow l_{32}\rightarrow u_{33}$$
$$接下来求解该方程组$$
$$先解LY=b，即\begin{pmatrix}1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}y_1 \\ y_2 \\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 \\ 1 \\ 1\end{bmatrix}\rightarrow Y=\begin{bmatrix}1 \\ 0 \\ -1\end{bmatrix}$$
$$再解UX=Y，即\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 \\ & -1 & 3 \\ & & -1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 \\ 0 \\ -1\end{bmatrix}\rightarrow X=\begin{bmatrix}-3 \\ 3 \\ 1\end{bmatrix}$$
$$故线性方程组AX=b的解为X=\begin{bmatrix}-3 \\ 3 \\ 1\end{bmatrix}$$

考点3--线性方程组的迭代解法

$$设AX=b,\ 其中A\in R^{n\times n},\ X,b\in R^n,\ A^{-1}存在$$
$$若AX=变形为等价的方程组\quad X=BX+f$$
$$由此建立迭代公式\quad X^{(k+1)}=BX^{(k)}+f,k=0,1,2,\cdots$$
$$此时给定初始向量X^{(0)},按此公式计算得近似解向量序列\{X^{(k)}\}$$
$$若对于任意X^{(0)}，经过无数次迭代后得到的\{X^{(k)}\}都有相同的极限X^*$$
$$即\lim_{k\to\infty}X^{(k)}=X^*,\ 对应的显然有X^*=BX^*+f$$
$$则称迭代公式是收敛的，否则是发散的，相应的，迭代格式中的矩阵B称为迭代矩阵$$

对于不同的迭代矩阵得到不同的迭代格式

1. Jacobi迭代

对于方程组

$$AX=b\ 其中A为非奇异阵且a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$$

$$将系数矩阵A分裂为：$$

$$\begin{aligned}A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & 0\end{pmatrix} \\ &= L+D+U\end{aligned}$$

于是便可得到矩阵形式的Jacobi迭代格式

$$X^{(k+1)} = BX^{(k)} + f$$
$$\begin{cases} X^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)X^{(k)} + D^{-1}b, \\ B = -D^{-1}(L+U),\ f = D^{-1}b \end{cases}$$
$$\text{其中} B = -D^{-1}(L+U) = -D^{-1}(L+U+D-D) = I - D^{-1}A \text{称为} Jacobi \text{迭代阵，记作} B_J$$

例题

$$\text{设方程组} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\text{，设系数矩阵为} A\text{，求} AX = b \text{的} Jacobi \text{迭代式}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{系数矩阵} A \text{分裂为}$$
$$A = L + D + U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$Jacobi \text{迭代格式为} \begin{cases} X^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)X^{(k)} + D^{-1}b, \\ B = -D^{-1}(L+U),\ f = D^{-1}b \end{cases}$$
$$\text{对于矩阵} A \text{对应的有}$$
$$D^{-1} = D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},\ (L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B = -D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ f = D^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\text{即可得对应} Jacobi \text{迭代格式为：} X^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} X^{(k)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Gauss-Seidel迭代

矩阵A做Jacobi迭代同样分裂方式得到A=L+D+U

Gauss-Seidel迭代格式矩阵形式为

$$X^{(k+1)} = BX^{(k)} + f$$
$$\begin{cases} X^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}UX^{(k)} + (D+L)^{-1}b, \\ B = -(D+L)^{-1}U,\ f = (D+L)^{-1}b \end{cases}$$
$$\text{其中} B = -(D+L)^{-1}U \text{称为} Gauss - Seidel \text{迭代阵，记作} B_G$$

相应的因为矩阵$(D+L)^{-1}$的计算比较复杂，因此迭代形式可以改写为

$$(D+L)X^{(k+1)} = UX^{(k)} + b$$

例题

$$\text{设方程组} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\text{，设系数矩阵为} A\text{，求} AX = b \text{的} Gauss - Seidel \text{迭代式}$$

$$Gauss-Seidel\text{迭代格式通式为：}(D+L)X^{(k+1)}=UX^{(k)}+b$$

$$\text{矩阵}A\text{分裂为},A=L+D+U=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\2&2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\text{对应代入即可的该方程组解的}Gauss-Seidel\text{迭代格式}:$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}X^{(k+1)}=\begin{pmatrix}0&2&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}X^{(k)}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

考点4--迭代格式的收敛性判定

$$1.\text{迭代法的基本定理}$$

$$\text{设有方程组}X=BX+f$$

$$\text{对于任意初始向量}X^{(0)}\text{和任意}f\text{，解此方程组的迭代法}(\text{即}X^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f)\text{收敛的充要条件}$$

$$\text{迭代矩阵}B\text{的谱半径小于}1\text{，即}\rho(B)<1$$

$$2.\text{迭代法收敛的充分条件}$$

$$\text{方程组的迭代公式为}X^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f(\text{对于任意初始向量}X^{(0)})$$

$$\text{且迭代矩阵}B\text{的某一种范数}\|B\|_v=q<1(v=1,2\text{或}\infty),\text{则迭代法收敛！}$$

$$3.\text{迭代法的收敛速度：}R(B)=-\ln\rho(B)$$

因为矩阵的∞（行范数）与1范数（列范数）计算相比与计算谱半径的特征值计算要方便的多

因此一般可以先计算矩阵的∞（行范数）与1范数（列范数），若存在二者之一小于1那么根据充分条件，可推收敛

若不存在小于1，由于矩阵的2-范数涉及A^TA的特征值最大值计算，相比之下反而谱半径计算更加方便

因此接下来在计算矩阵谱半径--即矩阵的特征值绝对值的最大值

例题

$$\text{证明}Jacobi\text{迭代格式：}X^{(k+1)}=\begin{pmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{pmatrix}X^{(k)}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\text{是收敛的。}$$

$$\text{该}Jacobi\text{迭代公式中，迭代矩阵}B=\begin{pmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{pmatrix}$$

$$\text{首先计算}B\text{的}\infty-\text{范数，}1-\text{范数}$$

$$\|B\|_\infty=\max_{1\le i\le 3}\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|=max\{4,2,4\}=4>1$$

$$\|B\|_1=\max_{1\le j\le 3}\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}|=max\{3,4,3\}=4>1$$

$$\text{通过充分条件计算迭代矩阵范数来证明收敛不易行}$$

$$\text{因此回归充要条件，计算矩阵}B\text{的谱半径}\rho(B)$$

$$\rho(B)=\max_{1\le i\le 3}|\lambda_i|$$

$$\text{计算矩阵的特征值，即对特征方程}|\lambda I-B|=0\text{进行求解}$$

$$\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\1&\lambda&1\\2&2&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&2-\lambda&-2-\lambda\\1&\lambda-1&0\\2&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)[\lambda(\lambda-1)-(2-\lambda)]+(-2-\lambda)[-2(\lambda-1)]$$

$$=\lambda^3=0$$

$$\text{解得}\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

$$\text{因此}\rho(B)=0\le 1\text{，故该方程组的}Jacobi\text{迭代格式是收敛的。}$$