Interpolation

Lagrange

- $p_n(x) = \sum y_i L_i(x)$
- $L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$
- $L_i(x_i) = 1$, $L_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$

Newton (table)

- Différences divisées : $f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots$
- Polynôme :

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots$$

Erreur interpolation

$$\text{Erreur} \sim \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_n)$$

Splines

Conditions spline cubique

- Polynômes de degré 3 par morceaux
- Continuité : S, S', S''
- Spline naturelle : $S''(x_0) = 0$, $S''(x_n) = 0$

Vérification (exemple)

- $p_0(x) = x + x^3$, $p_1(x) = (x-1)^3 + 2x^2$
- $p_0(1) = p_1(1), \quad p_0'(1) = p_1'(1)$
- $p_0''(1) \neq p_1''(1)$ pas cubique

Trapèze

Formules classiques

- $h = \frac{b-a}{n}$
- Trapèze composé :

$$\frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum f(x_i) + f(x_n)\right]$$

Erreur trapèze

$$E(h) \leq \frac{(b-a)^3}{12N^2} \cdot \max |f''(x)| \Rightarrow N \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 \cdot M}{12\varepsilon}}$$

Quadrature

Quadrature mixte

- $Q(f) = \alpha f(0) + \beta f(1) + \gamma f'(0)$
- Exacte jusqu'au degré 2 si :

$$\alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{6}$$

Degré de précision d'une quadrature

But : Déterminer jusqu'à quel degré de polynôme $p(x)$ la formule est exacte.

Forme générale :

$$Q(f) = w_1 f(a) + w_2 f(t_2) + w_3 f(b)$$

Méthode : Tester les polynômes $f(x) = 1, x, x^2, \ldots$

- Calculer :

$$\int_a^b x^k dx \quad \text{et} \quad Q(x^k)$$

- Tant que $Q(x^k) = \int x^k dx$, continuer
- Dès que $Q(x^k) \neq \int x^k dx$, le **degré d'exactitude est** $\boxed{k-1}$

Exemple :

$$Q(f) = \frac{1}{4}f(0) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}f(1)$$

- $\int_0^1 1\, dx = 1 \quad$ et $\quad Q(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$
- $\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2} \quad$ et $\quad Q(x) = \frac{1}{2}$
- $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3} \quad$ et $\quad Q(x^2) = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ **Degré d'exactitude** $= \boxed{1}$

Formule de quadrature – système pour poids optimaux

Objectif : Trouver w_1, w_2, w_3, t_2 pour maximiser le degré d'exactitude de :

$$Q(f) = w_1 f(0) + w_2 f(t_2) + w_3 f(1)$$

Méthode :

- On veut que la formule soit exacte pour les monômes : $f(x) = 1, x, x^2, x^3$
- Cela donne un système de $\boxed{\text{4 équations}}$ avec $\boxed{\text{4 inconnues}}$

Système à résoudre :

$$\begin{cases} 1 = w_1 + w_2 + w_3 \\ \frac{1}{2} = w_2 t_2 + w_3 \\ \frac{1}{3} = w_2 t_2^2 + w_3 \\ \frac{1}{4} = w_2 t_2^3 + w_3 \end{cases}$$

Conclusion (partie c) :

- 4 inconnues espérer une précision jusqu'à $\boxed{\text{degré 3}}$

Gauss, Richardson, Taylor

Gauss-Legendre (2 pts)

- $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$
- $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $I \approx \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{t_1+1}{2}\right) + f\left(\frac{t_2+1}{2}\right)\right]$

Précision de Gauss-Legendre (théorique)

- La formule de Gauss-Legendre à n points est exacte pour les polynômes de degré :

$$\boxed{2n-1}$$

- Exemple :
  - $n = 2 \Rightarrow$ exacte jusqu'au degré 3
  - $n = 3 \Rightarrow$ exacte jusqu'au degré 5 **erreur = 0** pour tout polynôme deg ≤ 5
- Si la fonction à intégrer est un polynôme deg $\leq 2n-1$, alors :

$$\boxed{\text{Erreur} = 0}$$

Richardson (ordre 3)

$$R(h) = \frac{4T(h/2) - T(h)}{3}$$

Taylor

- $f(x+h) = f + f'h + \frac{f''}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}}{6}h^3 + \ldots$
- $f(x-h) = f - f'h + \frac{f''}{2}h^2 - \frac{f^{(3)}}{6}h^3 + \ldots$
- $f(x+2h) = f + 2f'h + \frac{(2h)^2}{2}f'' + \ldots$

Dérivée centrée

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^2 + \mathcal{O}(h^4)$$

Erreur d'interpolation – Taylor / Divisées

Forme générale (ordre n) :

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

Encadrement de l'erreur :

$$\min |f^{(n+1)}(\xi)| \leq \frac{|E_n(x)|}{|(x - x_0)\cdots(x - x_n)|} \cdot (n+$$

Méthode pour conclure :

- Estimer le produit $|(x - x_0)\cdots(x - x_n)|$

- Multiplier par les bornes de $|f^{(n+1)}(x)|$
- Comparer l'intervalle de $E_n(x)$ avec l'erreur cible
- Si le minimum est déjà $>$ erreur cible **impossible**

Exemple (comme c) :

$$|f^{(5)}(x)| \in [0.025,\ 0.05], \quad x = 1.5, \quad |E_4(x)| \leq ?$$

$$E_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_4) \Rightarrow \text{Comparer avec } 0.5 \times 10^{-3}$$

Conclusion : si borne inférieure $> 0.5 \times 10^{-3}$ **impossible**

EDO – Euler modifiée et erreur absolue

Étapes pour approximer $y(t)$ avec pas h :

- On avance en $t_0, t_1 = t_0 + h, t_2 = t_0 + 2h, \ldots$
- À chaque étape, utiliser la prédiction ($\hat{y}$) puis la correction

Erreur absolue à un point donné t_k :

$$E(h, t_k) = |y_k - y(t_k)|$$

Erreur globale sur $[0, t_{\textbf{final}}]$:

$$E(h) = \max_{t_i} |y_i - y(t_i)|$$

Exemple (comme image) :

- Pour $h = 0.2$, une seule itération pour atteindre $t_1 = 0.2$

$$E(0.2) = |y_1 - y(0.2)|$$

- Pour $h = 0.1$, deux itérations pour atteindre $t_2 = 0.2$

$$E(0.1) = \max\left(|y_1 - y(0.1)|, |y_2 - y(0.2)|\right)$$

EDO d'ordre 2 – Euler explicite

Exemple : Résoudre le premier pas pour :

$$y''(t) = 2y'(t) + t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad h$$

1. Réduction à un système du 1^{er} ordre :

$$\begin{cases} y_1 = y, \quad y_2 = y' \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = 2y_2 + t \end{cases} \qquad \text{avec } y_1(0) = 1,\ y_2(0$$

2. Formule d'Euler explicite :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

3. Application à $t_0 = 0$:

$$\begin{cases} y_1^1 = y_1^0 + hy_2^0 = 1 + 0.1 \cdot 0 = \boxed{1} \\ y_2^1 = y_2^0 + h(2y_2^0 + t_0) = 0 + 0.1 \cdot 0 = \boxed{0} \end{cases}$$

Résultat au pas $t = 0.1$:

$$y(0.1) \approx 1, \quad y'(0.1) \approx 0$$