

0.1. Modelado de la Planta

En el desarrollo de este capítulo, se explican los conceptos utilizados para realizar el modelo de la planta en vuelo libre. Un Quadrotor es controlado mediante la actuación de cuatro motores eléctricos como se muestra en la figura ???. Cada motor con su respectiva hélice acoplada produce empuje y torque, los cuales al combinarse generan el empuje principal y los momentos yaw, pitch y roll. Cabe destacar desde ya que el sistema es subactuado en vuelo libre. Dado el vector de entradas a la planta (el torque y empuje generado por los cuatro motores), éste no puede producir un movimiento del vehículo en una trayectoria arbitraria, sus entradas son menos que sus salidas, en otras palabras, el vehículo no puede moverse horizontalmente sin tener que cambiar su inclinación y altura.

De la figura ?? se puede observar que los motores M_i para $(i = 1, \dots, 4)$ producen las fuerzas f_i y los torques τ_{M_i} y el empuje principal u , los que serán descritos posteriormente. Los motores del frente M_1 y de la parte posterior M_3 giran en contra del sentido de las manecillas del reloj, mientras que los motores de izquierda y derecha, M_2 y M_4 respectivamente, giran en el sentido de las manecillas del reloj. Con ésto, los efectos giroscópicos y torques aerodinámicos se tienden a cancelar.

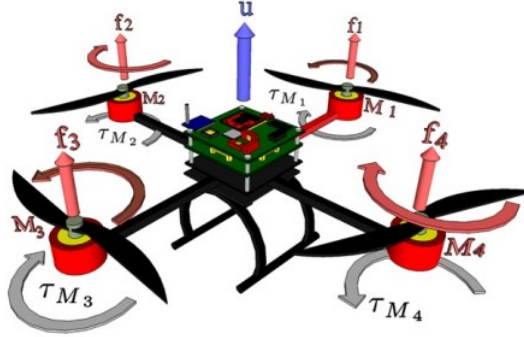


Figura 1: Diagrama de Cuerpo Libre de Quadrotor.

Para un mejor entendimiento, se separa el capítulo de modelado en cuatro secciones que cubren el comportamiento aerodinámico del vehículo, la relación entre los marcos de referencia, el enfoque lagrangeano y el enfoque de Newton-Euler estudiados para el modelado.

0.1.1. Aerodinámica de Motores: Momentos y Hélices

Para desarrollar un modelo del comportamiento de la aerodinámica de las hélices y motores, se considera que el empuje esta dado por el cambio en el momentum del aire que es desplazado hacia abajo por el giro de la hélice. Bajo esta lógica, la relación entre la magnitud del empuje y la magnitud de la velocidad inducida en el aire [9] es:

$$f_i = 2\rho A v_i^2 \quad (1)$$

Donde f_i es el empuje iésimo, ρ es la densidad del aire, A es el área del disco que cubre la hélice al girar y v_i es la velocidad inducida al aire por el motor iésimo. El empuje total también puede ser expresado en función de la velocidad angular del rotor [10] mediante la siguiente ecuación:

$$f_i = C_T \rho A (\omega R)^2 \quad (2)$$

donde f_i es el empuje total producido por el rotor iésimo, R es el radio del rotor y C_T es un coeficiente adimensional de empuje. Por lo tanto, se tienen dos formas de levantar un cuerpo por la acción de una hélice giratoria. Se puede tener una hélice de diametro pequeño girando a gran velocidad, o se puede tener una hélice de diámetro mayor girando a menor velocidad.

Para la implementación del proyecto se cuenta con hélices que poseen las mismas características, el área cubierta por cada una es igual. Por otro lado la densidad del aire es contante y el radio del rotor también, lo que permite concentrar todas estas constantes en una sola y reescribir la ecuación simplificada.

$$f(\omega_i) = b \cdot \omega_i^2 \quad (3)$$

En general la constate b es difícil de estimar, dado que no se conocen los parámetros aerodinámicos de las hélices con exactitud, puesto que las especificaciones del fabricante no están disponibles. Por lo tanto, deberá ser determinada empíricamente por medio de un banco de pruebas que será descrito posteriormente.

De manera similar, el torque de cada motor para maniobras casi estacionarias se puede representar mediante una relación cuadrática de la velocidad angular [11].

$$\tau_{M_i}(\omega_i) = K_M \omega_i^2 \quad (4)$$

Para determinar la constante K_M también es necesario realizar pruebas para determinarla. Entonces como se muestra en la figura ??, la suma de cada una de las fuerzas de empuje desplazadas hacia el centro de masa del vehículo corresponde al empuje principal u . Describiendolo matemáticamente se tiene:

$$u = \sum_{i=1}^4 f_i \quad (5)$$

El movimiento de giro pitch hacia adelante se obtiene disminuyendo la velocidad de giro del motor M_1 y aumentando la velocidad del motor M_3 . Así también para el movimiento roll hacia la derecha, basta con disminuir la velocidad del motor M_4 y aumentar la velocidad del motor M_2 . Por último el movimiento en yaw se logra incrementando el torque (por lo tanto también velocidad angular) de los motores delantero M_1 y trasero M_3 , mientras se disminuye el torque de los motores laterales M_2 y M_4 . Los tipos de movimientos descritos se visualizan de mejor forma en la siguiente figura.

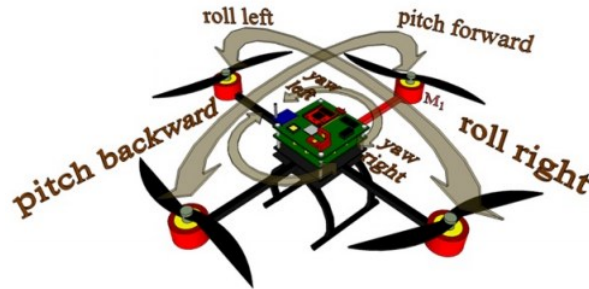


Figura 2: Torques yaw, pitch y roll de vehículo Quadrotor.

Escribiendo matemáticamente los momentos resultantes de la interacción de los torques y fuerzas producidos por los motores descritos en el párrafo anterior, se tiene la siguiente equivalencia:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} (f_2 - f_4) \cdot \ell \\ (f_3 - f_1) \cdot \ell \\ \tau_{M_1} + \tau_{M_3} - \tau_{M_2} - \tau_{M_4} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Donde ϕ representa al ángulo en el eje de alabeo Roll, θ en el eje de elevación Pitch y ψ el giro en el ángulo de dirección Yaw. Además, ℓ representa la distancia desde el rotor hasta el centro de masa del vehículo y τ_{M_i} para $i = 1, \dots, 4$ son los torques producidos por lo motores.

0.1.2. Marcos de Referencia y Matriz de Rotación

Para el análisis de la dinámica del quadrotor existen dos marcos de coordenadas, el primero es el marco de referencia cuyo origen está en el centro de masa del vehículo, lo denominaremos \mathcal{A} , mientras que el segundo corresponde al sistema de referencia inercial en tierra que lo denominaremos \mathcal{I} . La siguiente figura muestra dichos sistemas de referencia.

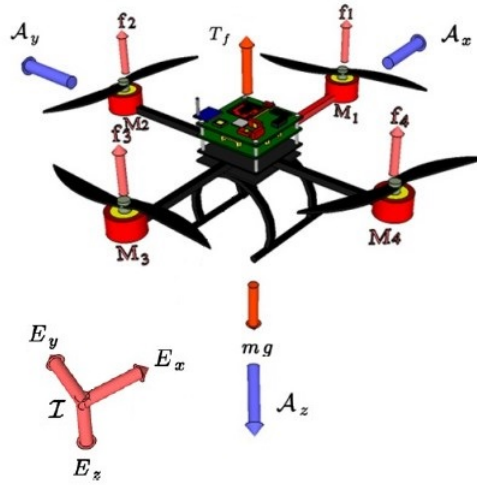


Figura 3: Sistemas de coordenadas para análisis dinámico del quadrotor.

Dado que los sensores estarán fijos en la estructura del vehículo, las mediciones se corresponden con el sistema de referencia \mathcal{A} que rota en conjunto con éste. Por lo tanto, si el objetivo fuese hacer un control de trayectoria, se necesita adecuar estas mediciones al sistema de referencia inercial en tierra. Si bien el objetivo final no es el mencionado anteriormente, se modelarán y simularán todos los aspectos del vuelo del vehículo, tanto los rotacionales como los traslacionales. Por lo tanto para obtener las respectivas aceleraciones y velocidades en sistema inercial I , es necesaria la inclusión de una matriz de rotación R , que se deduce a continuación con la ayuda de la figura ??, donde se muestra la rotación del sistema de referencia en los ángulos pitch, roll y yaw.

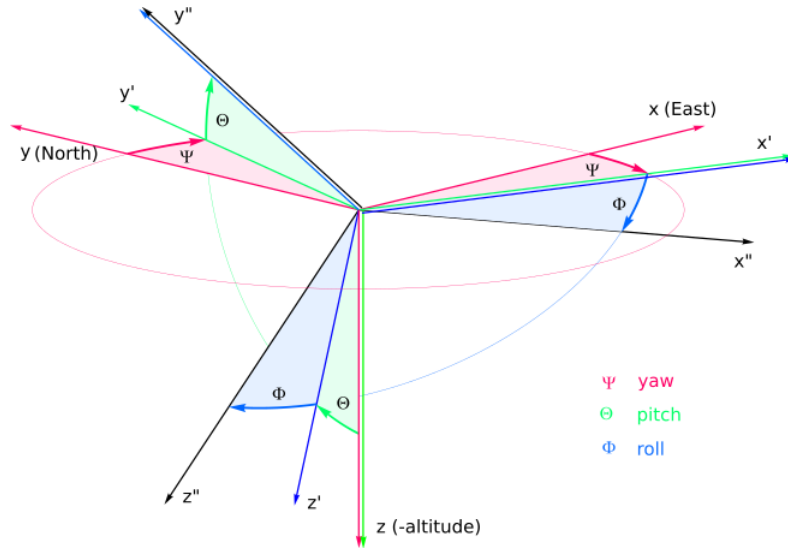


Figura 4: Giro de sistema de referencia \mathcal{A} respecto a sistema inercial \mathcal{I} compartiendo el origen.

Supongamos que se hace una rotación en el plano $x - y$, dejando el eje z fijo y utilizándolo como eje de rotación. De acuerdo al supuesto, el sistema de referencia \mathcal{A} está girando respecto al sistema inercial \mathcal{I} una cantidad definida por el ángulo de rotación yaw ψ . Dicha rotación tiene asociada una matriz de transformación, por lo tanto se descomponen los nuevos ejes en los vectores que los conforman. Utilizando la notación que describe la figura ?? se tiene la siguiente equivalencia:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [T_z] \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (7)$$

Donde T_z representa la matriz de rotación en torno al eje z .

$$[T_z] = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Siguiendo la misma lógica, los giros en dirección del ángulo pitch θ y roll ϕ quedan descritos por las matrices T_y y T_x respectivamente.

$$[T_x] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad [T_y] = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (9)$$

Así se obtiene la matriz de rotación R del sistema en los tres ejes, donde $c\theta$ representa $\cos\theta$ y $s\theta$ representa $\sin\theta$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [T_x][T_y][T_z] \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (10)$$

Por otro lado para saber como influye la razón de cambio de los ángulos de Euler en el vector velocidad angular en el marco \mathcal{A} , que apunta en dirección al eje de rotación, se tiene la siguiente definición [12]:

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = Id \cdot \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [T_x] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + [T_x][T_y] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = W_n \dot{\eta} \quad (12)$$

0.1.3. Modelo dinámico del quadrotor: Enfoque de Euler Lagrange

En el libro Quad Rotorcraft Control Vision-Based Hovering and Navigation, se utiliza este método para modelar la dinámica del quadrotor. El modelo se sustenta en el supuesto de que las dinámicas de los motores son mucho más rápidas que las del sistema, por lo tanto pueden ser despreciadas. Por otro lado, las hélices de los motores se asumen simétricas, iguales y rígidas. Además se asume un modelo donde se desprecian los efectos de perturbaciones causadas por el viento en ambientes exteriores.

Las ecuaciones de movimiento del vehículo se desarrollan a partir de las expresiones de energía cinética traslacional y rotacional del sistema. Sea el vector q de coordenadas generalizadas referidas al sistema inercial en tierra \mathcal{I} :

$$q = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T \quad (13)$$

Esta coordenadas generales pueden ser separadas en componentes traslacionales y rotacionales

$$\xi = [x \ y \ z]^T \quad \eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T \quad (14)$$

Por lo tanto se tiene

$$q = [\xi \ \eta]^T \quad (15)$$

El Lagrangeano se obtiene mediante la diferencia entre la energía cinética y energía potencial del sistema. La energía cinética tiene componentes rotacionales y traslacionales, mientras que la energía potencial está relacionada con la altura del centro de masa del vehículo. Por lo tanto el Lagrangeano del vehículo se puede expresar como:

$$L = E_c - E_p \quad (16)$$

Donde E_c es la energía cinética del sistema y E_p corresponde a la energía potencial. La energía cinética total del sistema es la suma de la energía del movimiento traslacional y del rotacional, mientras que la potencial depende de la altura y la masa constante del vehículo.

Antes de enunciar las expresiones para dichas energías, se define la matriz $\mathbb{J} = \mathbb{J}(\eta) = W_\eta^T I W_\eta$, que representa la matriz de inercia para la cinética rotacional expresada en términos de las coordenadas generalizadas η .

Por lo tanto la expresión para el Lagrangeano es finalmente:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T m \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta} - mgz \quad (17)$$

Dado que el Lagrangeano no contiene términos cruzados entre la energía cinética traslacional y la energía cinética rotacional, la ecuación de Euler-Lagrange puede ser dividida en dinámicas diferentes para cada tipo de movimiento, para las coordenadas ξ y η .

La ecuación de Euler-Lagrange para el movimiento traslacional es:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L_{Tras}}{\partial \dot{\xi}} \right] - \frac{\partial L_{Tras}}{\partial \xi} = F_\xi \quad (18)$$

Por lo tanto la dinámica traslacional es finalmente:

$$m\ddot{\xi} + mg\hat{z} = F_\xi \quad (19)$$

Las fuerzas traslacionales son las de empuje resultantes de cada motor, y las fuerzas rotacionales son las resultantes de los momentos causados por las fuerzas de los motores opuestos sobre el centro de gravedad. Dado que para el desarrollo del modelo no se están considerando los efectos giroscópicos y se mantiene lo más simple posible, la fuerza traslacional está dada por:

$$F_{rotor} = [0 \ 0 \ u]^T \quad (20)$$

Donde u es el empuje total como se describe en la ecuación ???. Es claro que dicha

fuerza de empuje apunta en la dirección del eje z, pero dado que los sensores adquieren los datos para el sistema de referencia que se mueve junto al vehículo, se debe relacionar esta cantidad respecto al sistema inercial descrito en la sección anterior. Por lo tanto,

$$F_{\xi} = R \cdot F_{rotor} = \begin{bmatrix} -u \cdot (s\phi s\psi + c\phi c\psi s\theta) \\ u \cdot (c\phi s\theta s\psi - c\psi s\phi) \\ u \cdot c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (21)$$

Escribiendo la dinámica traslacional de forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -g \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{u}{m} \cdot \begin{bmatrix} -(s\phi s\psi + c\phi c\psi s\theta) \\ c\phi s\theta s\psi - c\psi s\phi \\ c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (22)$$

Luego la ecuación de Euler-Lagrange para el movimiento rotacional es:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L_{Rot}}{\partial \dot{\eta}} \right] - \frac{\partial L_{Rot}}{\partial \eta} = \tau \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta})}{\partial \dot{\eta}} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta})}{\partial \eta} = \tau \quad (24)$$

$$\mathbb{J} \ddot{\eta} + \dot{\mathbb{J}} \dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}) = \tau \quad (25)$$

$$\mathbb{J} \ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta} = \tau \quad (26)$$

El término $C(\eta, \dot{\eta})$ de la ecuación (26) es conocido como matriz de Coriolis, que contiene las componentes giroscópicas y centrípetas. El modelo anterior es de segundo orden y no lineal, dadas las matrices \mathbb{J} y $C(\eta, \dot{\eta})$.

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & -S_{\theta} I_x \\ 0 & I_y C_{\phi}^2 - I_z S_{\phi}^2 & (I_y - I_z) C_{\phi} C_{\theta} S_{\phi} \\ -S_{\theta} I_x & (I_y - I_z) C_{\phi} C_{\theta} S_{\phi} & S_{\theta}^2 I_x + I_y C_{\theta}^2 S_{\phi}^2 + I_z C_{\theta}^2 C_{\phi}^2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$C(\eta, \dot{\eta}) = (\mathbb{J} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J})) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Donde:

$$C_{11} = 0; \quad C_{12} = (I_y - I_z)(\dot{\theta}C_\phi S_\phi + \dot{\psi}S_\phi^2 C_\theta) + (I_z - I_y)\dot{\psi}C_\phi^2 C_\theta - I_x \dot{\psi}C_\theta \quad (29)$$

$$C_{13} = (I_z - I_y)\dot{\psi}C_\phi S_\phi C_\theta^2 \quad (30)$$

$$C_{21} = (I_z - I_y) \cdot (\dot{\theta}C_\phi S_\phi + \dot{\psi}S_\phi C_\theta) + (I_y - I_z)\dot{\psi}C_\phi^2 C_\theta + I_x \dot{\psi}C_\theta \quad (31)$$

$$C_{22} = (I_z - I_y)\dot{\phi}C_\phi S_\phi \quad (32)$$

$$C_{23} = -I_x \dot{\psi}S_\theta C_\theta + I_y \dot{\psi}S_\phi^2 S_\theta C_\theta + I_z \dot{\psi}C_\phi^2 S_\theta C_\theta \quad (33)$$

$$C_{31} = (I_y - I_z)\dot{\psi}C_\theta^2 S_\phi C_\theta - I_x \dot{\theta}C_\theta \quad (34)$$

$$C_{32} = (I_z - I_y) \cdot (\dot{\theta}C_\phi S_\phi S_\theta + \dot{\phi}S_\phi^2 C_\theta) + (I_y - I_z)\dot{\phi}C_\phi^2 C_\theta + I_x \dot{\psi}S_\theta C_\theta - I_y \dot{\psi}S_\phi^2 S_\theta C_\theta - I_z \dot{\psi}C_\phi^2 S_\theta C_\theta \quad (35)$$

$$C_{33} = (I_y - I_z)\dot{\phi}C_\phi S_\theta C_\theta^2 - I_y \dot{\theta}S_\phi^2 C_\theta S_\theta - I_z \dot{\theta}C_\phi^2 C_\theta S_\theta + I_x \dot{\theta}C_\theta S_\theta \quad (36)$$

La ecuación (??), conduce a las ecuaciones diferenciales para el modelo de la aceleración angular.

$$\ddot{\eta} = \mathbb{J}^{-1}(\tau - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}) \quad (37)$$

0.1.4. Modelo dinámico del quadrotor: Enfoque de Newton Euler

Dada la extensión y complejidad de la parte rotacional del modelo previamente deducido mediante el enfoque de Euler-Lagrange, es que se considera desarrollar un segundo enfoque para el modelado de dicha dinámica. Ésto surge como estrategia para la etapa de simulación, donde se utiliza el modelo equivalente de Newton-Euler, el cual es más simple de implementar.

En primer lugar se supondrá que el vehículo es rígido, por lo cual se puede utilizar la ecuación de dinámica de cuerpos rígidos en el sistema de referencia \mathcal{A} (cuerpo del vehículo). También se asume que el vehículo posee una estructura simétrica con los cuatro brazos alineados con los ejes x e y , por lo tanto su matriz de inercia es constante, diagonal y simétrica con $I_x = I_y$.

Antes del desarrollo de la ecuación, se define el vector de velocidad angular en el sistema de referencia del vehículo.

$$\nu = W_\eta \dot{\eta} \implies \nu = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\phi & C_\theta S_\phi \\ 0 & -S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Donde la matriz W_η será invertible si $\theta \neq (2k - 1)\phi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto la ecuación de Euler para la dinámica de cuerpos rígidos es:

$$I\dot{\nu} + \nu \times (I\nu) = \tau \quad (39)$$

$$\dot{\nu} = I^{-1} \left(- \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_x p \\ I_y q \\ I_z r \end{bmatrix} + \tau \right) \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_y - I_z)qr/I_x \\ (I_z - I_x)pr/I_y \\ (I_x - I_y)pq/I_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_\phi/I_x \\ \tau_\theta/I_y \\ \tau_\psi/I_z \end{bmatrix} \quad (41)$$

Por lo tanto este modelo describe el vector aceleración en el marco inercial del vehículo,

la que es más simple de implementar en la simulación. Para obtener el modelo equivalente deducido por el método de Euler-Lagrange, se puede obtener la aceleración angular en el marco inercial mediante la matriz W_η^{-1} y su derivada en el tiempo

$$\ddot{\eta} = \frac{d}{dt}(W_\eta^{-1}\nu) = \frac{d}{dt}(W_\eta^{-1})\nu + W_\eta\dot{\nu} \quad (42)$$