

BACHELORARBEIT MATHEMATIK

---

# Simulation des Wackelsteines

---

*Autor*  
**Collin Wittenstein**

*Erstgutachter:*  
Prof. Dr. Hendrik Ranocha  
*Zweitgutachter:*  
Univ.-Prof. Dr. Elmar Schömer

Das ist die Online-Version meiner Bachelorarbeit. Aus urheberrechtlichen Gründen wurden die Abbildungen 1.1, 2.1 und 3.1 in dieser Version durch eigene Zeichnungen ersetzt. Sonst ist jedoch alles identisch mit der gedruckten Version.



Johannes Gutenberg-Universität Mainz  
Fachbereich 08 - Physik, Mathematik und Informatik  
Institut für Mathematik

Abgegeben am 16. Oktober 2024.

---

## Eigenständigkeitserklärung

gemäß § 19 Abs. 3, 5 und 6 der gültigen Ordnungen für die Prüfung des Studienganges **Bachelor of Science Mathematik** an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz.

Hiermit erkläre ich, Collin Wittenstein, Inhaber der Matrikelnummer 1234567, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen oder Hilfsmittel (einschließlich elektronischer Medien und Online-Quellen) benutzt habe. Mir ist bewusst, dass ein Täuschungsversuch oder ein Ordnungsverstoß vorliegt, wenn sich diese Erklärung als unwahr erweist. § 19 Abs. 3, 5 und 6 der oben genannten Ordnungen gelten in diesem Fall entsprechend.

Mainz, den 16. Oktober 2024.

Collin Wittenstein  
Institut für Mathematik  
Staudingerweg 9  
Johannes Gutenberg-Universität D-55099 Mainz  
cwittens@students.uni-mainz.de

## Übersicht

Diese Bachelorarbeit der Mathematik beschäftigt sich mit der numerischen Simulation des keltischen Wackelsteines.

Der Wackelstein (engl. Rattleback) ist ein Halbellipsoid mit einer inhomogenen Massenverteilung, welcher seine Drehrichtung im Verlauf der Drehung umdrehen kann. Dieses Phänomen lässt sich nicht intuitiv erklären, folgt aber direkt aus den Lösungen seiner Bewegungsgleichungen.



Bild eines Wackelsteines. Die inhomogene Massenverteilung ist hier durch die zusätzlichen Massen der Schildkröten gegeben. Bildquelle unter: [1]

Einleitend wiederholen wir die wichtigsten Grundlagen der Mechanik von starren Körpern, die wir für die Herleitung der Bewegungsgleichungen des Wackelsteines benötigen.

Als Ausgangspunkt nehmen wir die Beschreibung des Wackelsteines von Elmar Schömer [6]. Hier betrachten wir den Wackelstein aus Sicht des Laborsystems und bekommen für die Bewegungsgleichungen ein System aus 13 gekoppelten Differentialgleichungen.

Danach schauen wir uns die Beschreibung des Wackelsteines von Friedhelm Kuypers an [5]. Hier betrachten wir den Wackelstein nun in Komponenten des körperfesten Koordinatensystems und bekommen ein System aus sechs gekoppelten Differentialgleichungen.

Dann wollen wir diese beiden Beschreibungen miteinander vergleichen, schauen, ob diese äquivalente Ergebnisse liefern und inwieweit diese noch optimiert werden können.

Zuletzt wollen wir eine genauere Analyse der beiden Beschreibungen vornehmen, insbesondere im Hinblick auf deren Stabilität und Effizienz.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Die Physik des starren Körpers</b>	<b>4</b>
1.1	Bewegung und Koordinatensysteme . . . . .	4
1.2	Energie und Trägheitstensor . . . . .	6
1.3	Drehimpuls und Drehmoment . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Die Beschreibung nach Schömer</b>	<b>8</b>
2.1	Beschreibung des Systems . . . . .	8
2.2	Herleitung der Bewegungsgleichungen . . . . .	9
2.3	Berechnung des Vektors $\mathbf{r}_{\overline{S}\overline{A}}$ und seiner Ableitung . . . . .	11
2.4	Die Bewegungsgleichungen . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Die Beschreibung nach Kuypers</b>	<b>13</b>
3.1	Beschreibung des Systems . . . . .	13
3.2	Herleitung der Bewegungsgleichungen . . . . .	14
3.3	Die Bewegungsgleichungen . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Vergleich der beiden Beschreibungen</b>	<b>19</b>
4.1	Parameter des Wackelsteines . . . . .	19
4.2	Koordinatensysteme und Variablen der Beschreibungen . . . . .	20
4.3	Lösung der Bewegungsgleichungen . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Analyse der Modelle</b>	<b>25</b>
5.1	Qualitatives Verhalten der Lösungen . . . . .	25
5.2	Stabilität der Modelle . . . . .	28
5.3	<i>Work-Precision</i> -Diagramm . . . . .	32
5.4	Betrachtung der Schrittweiten . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>36</b>
<b>7</b>	<b>Anhang</b>	<b>37</b>
7.1	Reproduktion von Kuypers' ursprünglichen Ergebnissen . . . . .	37
7.2	Der Versuch einer Lagrange- und Hamilton Formulierung . . . . .	38
7.3	Verwendung von KI-Tools in dieser Bachelorarbeit . . . . .	42
7.4	GitHub-Repository . . . . .	43

# 1 Die Physik des starren Körpers

Dieses Kapitel orientiert sich an Kapitel 12 des Buches *Klassische Mechanik* von Friedhelm Kuypers [4] und an Kapitel 1.25 des Buches *Theoretische Physik 1* von Florian Scheck [2].

## 1.1 Bewegung und Koordinatensysteme

Zur Beschreibung der Bewegung eines starren Körpers, wie etwa des keltischen Wackelsteines, unterscheiden wir zwischen zwei verschiedenen Koordinatensystemen. Einerseits das Laborsystem  $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$  und andererseits das körperfeste Koordinatensystem  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ .

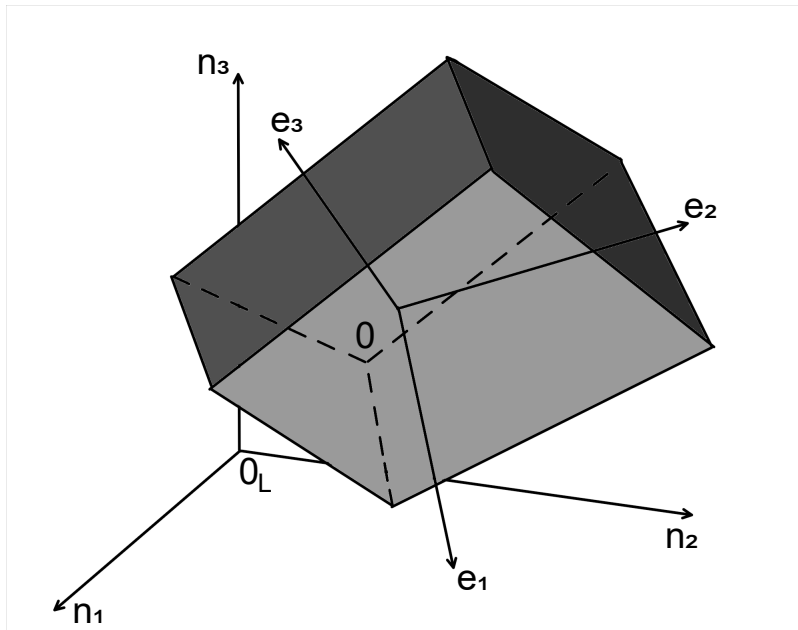


Abbildung 1.1: Labor- und körperfestes Koordinatensystem eines starren Körpers. Die Abbildung ist eine eigenständig erstellte Zeichnung basierend auf [4, Abbildung 12.1-1]. Aus urheberrechtlichen Gründen wurde in der Online-Version dieser Bachelorarbeit nicht die Originalabbildung verwendet.

Die Bewegung eines starren Körpers kann vollständig durch sechs Freiheitsgrade - drei für die Translation und drei für die Rotation - beschrieben werden. Diese sind zum Beispiel die drei Geschwindigkeiten des Schwerpunktes  $\mathbf{v}_S = (v_{S_x}, v_{S_y}, v_{S_z})^T$  und die drei Winkelgeschwindigkeiten  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ .

Die Geschwindigkeit eines allgemeinen Punktes  $\mathbf{P}$  des starren Körpers, gemessen

aus Sicht des Laborsystems, ist

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\overrightarrow{OP}}, \quad (1.1)$$

wobei  $\mathbf{v}_S$  die Geschwindigkeit des Schwerpunktes,  $\boldsymbol{\omega}$  die Winkelgeschwindigkeit und  $\mathbf{r}_{\overrightarrow{OP}}$  der Vektor der vom körperfesten Koordinatenursprung zum Punkt  $\mathbf{P}$  zeigt, ist.

### 1.1.1 Wechsel zwischen den Bezugssystemen

Der Einfachheit halber fordern wir, dass zum Zeitpunkt  $t = 0$  die Nullpunkte beider Systeme übereinstimmen.

Der Ortsvektor  $\mathbf{r}_{\overrightarrow{OP}} = \mathbf{r}$  eines Punktes  $\mathbf{P}$  ist dann in beiden System gleich, kann aber verschieden dargestellt werden

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{\text{Labor}} &= \mathbf{r}^{\text{körper}} \\ &= r_1 \mathbf{n}_1 + r_2 \mathbf{n}_2 + r_3 \mathbf{n}_3 = \tilde{r}_1 \mathbf{e}_1 + \tilde{r}_2 \mathbf{e}_2 + \tilde{r}_3 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Von nun an soll  $(\ )^L$  angeben, dass die Komponenten in der Basis des Laborsystems gegeben sind und  $(\ )^k$  soll angeben, dass die Komponenten in der Basis des körperfesten Systems gegeben sind. Explizit bedeutet das:

$$\mathbf{r}^L = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^k = \begin{pmatrix} \tilde{r}_1 \\ \tilde{r}_2 \\ \tilde{r}_3 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Die Formel

$$\mathbf{v}'_P = \mathbf{v}_P - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (1.4)$$

beschreibt die Geschwindigkeit des Punktes  $\mathbf{P}$  gemessen aus Sicht des körperfesten Systems, wobei  $\mathbf{v}_P$  weiterhin die Geschwindigkeit gemessen aus Sicht des Laborsystems ist.

Indem wir zwischen der im körperfesten und der im Laborsystem beobachteten zeitlichen Änderung ( $\frac{d_k}{dt}$  und  $\frac{d}{dt}$ ) unterscheiden, lässt sich die Gleichung der Geschwindigkeit auch als

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r} = \frac{d_k}{dt} \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d_k}{dt} \mathbf{r} = \frac{d}{dt} \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1.5)$$

schreiben.

Diese Beziehung ist nicht nur auf den Ortsvektor  $\mathbf{r}$  beschränkt. Es gilt

$$\frac{d}{dt} \mathbf{b} = \frac{d_k}{dt} \mathbf{b} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d_k}{dt} \mathbf{b} = \frac{d}{dt} \mathbf{b} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} \quad (1.6)$$

für jede vektorwertige Funktion  $\mathbf{b}(\mathbf{t})$ .

Da die Basisvektoren aus Sicht des körperfesten Systems konstant sind, sind ihre körperfesten Ableitungen  $\frac{d_k}{dt}\mathbf{e}_i = 0$  und die Ableitung aus Sicht des Laborsystems

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \frac{d}{dt}\mathbf{e}_i = \frac{d_k}{dt}\mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \quad (1.7)$$

ist nur über die Winkelgeschwindigkeiten  $\boldsymbol{\omega}$  und die Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  selbst gegeben.

Wichtig ist hier noch einmal zu betonen, dass während der Ortsvektor  $\mathbf{r}$  in beiden Bezugssystemen gleich, nur anders dargestellt ist, ist die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}'$  eines Punktes  $\mathbf{P}$  aus Sicht des körperfesten Systems gemessen, eine andere, als die aus Sicht des Laborsystems gemessene Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ .

Man kann aber trotzdem die im Laborsystem gemessene Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \tilde{v}_1\mathbf{e}_1 + \tilde{v}_2\mathbf{e}_2 + \tilde{v}_3\mathbf{e}_3 = v_1\mathbf{n}_1 + v_2\mathbf{n}_2 + v_3\mathbf{n}_3 \quad (1.8)$$

in körperfesten Komponenten genauso wie in Komponenten des Laborsystems darstellen. Trotzdem ist  $\mathbf{v}^k = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)^T$  nicht gleich der aus Sicht des körperfesten Systems gemessenen Geschwindigkeit  $\mathbf{v}' \neq \mathbf{v} = \mathbf{v}^k$ .

## 1.2 Energie und Trägheitstensor

Die kinetische Energie  $E_{kin}$  eines starren Körpers können wir in einen Anteil bezüglich Translation und einen bezüglich Rotation aufteilen

$$E_{kin} = E_{trans} + E_{rot} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_S^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}, \quad (1.9)$$

wobei  $m$  die Gesamtmasse des Körpers und

$$\mathbf{I} = \iiint \rho(x, y, z) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} dV \quad (1.10)$$

der Trägheitstensor ist.

In körperfesten Komponenten bleibt der Trägheitstensor konstant und nimmt für den Wackelstein die charakteristische Form

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

an. Da der Wackelstein keine homogene Massenverteilung hat, stimmen die Trägheitsachsen nicht mit den körperfesten Achsen überein. Das ist der Grund wieso der Trägheitstensor keine Diagonalgestalt hat.

Die potenzielle Energie eines starren Körpers hängt von der Höhe  $d$  des Schwerpunktes über dem Nullpunkt des Laborsystems ab und lässt sich als

$$E_{pot} = mgd \quad (1.12)$$

schreiben, wobei  $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$  die Erdbeschleunigung ist.

### 1.3 Drehimpuls und Drehmoment

Der Drehimpuls eines starren Körpers ist das Analogon des Impulses für die Rotation und wird durch die Beziehung

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \quad (1.13)$$

definiert.

Analog ist das Drehmoment das entsprechende Konzept zur Kraft für die Rotation. Und ebenso wie die Kraft die zeitliche Änderung des Impulses ist, ist das Drehmoment die zeitliche Änderung des Drehimpulses.

Mit Formel 1.6 lässt sich das Drehmoment

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt}\mathbf{L} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \frac{d_k}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) \quad (1.14)$$

einfach berechnen.

Eine andere, aber äquivalente Art das Drehmoment zu definieren ist über die externen Kräfte, die auf den Körper wirken. Das Drehmoment ist dann

$$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i, \quad (1.15)$$

wobei  $\mathbf{r}_i$  der Ortsvektor des i-ten Punktes und  $\mathbf{F}_i$  die dazugehörige Kraft ist.

Diese beiden Definitionen des Drehmomentes, für den vereinfachten Fall von nur einer externen Kraft, ergeben dann folgende Gleichung:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) \quad (1.16)$$

Somit haben wir nun alle Grundlagen zusammen, um die Bewegungsgleichungen des Wackelsteines herzuleiten.



## 2 Die Beschreibung nach Schömer

Im Folgenden wollen wir nachvollziehen wie die Bewegungsgleichungen für den Wackelstein ursprünglich von Elmar Schömer hergeleitet wurden. Wir betrachten den Wackelstein aus Sicht des stationären Laborsystems und bekommen am Ende ein System von 13 Differentialgleichungen erster Ordnung.

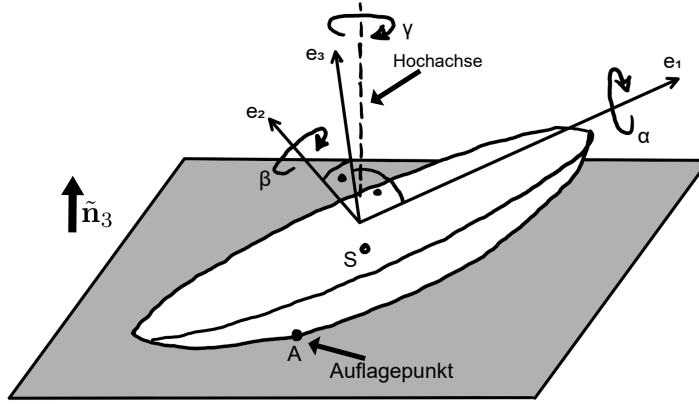


Abbildung 2.1: Schematische Skizze des Wackelsteines. Die Abbildung ist eine eigenständig erstellte Zeichnung basierend auf [5, Abbildung 5], wobei der Basisvektor  $\tilde{\mathbf{n}}_3 = (0, 0, +1)^T$  nach oben zeigt. Aus urheberrechtlichen Gründen wurde in der Online-Version dieser Bachelorarbeit nicht die Originalabbildung verwendet.

### 2.1 Beschreibung des Systems

Den Ursprung der Koordinatensysteme legen wir in den Mittelpunkt des *hypothetischen Vollellipsoids* und damit um die Höhe  $h$  über den Schwerpunkt des Wackelsteines.

Die Gesamtmasse ist mit  $m$  gegeben und  $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$  beschreibt die Erdbeschleunigung.  $\mathbf{r}_S$  ist die Position des Schwerpunktes in Laborsystem-Komponenten und  $\mathbf{r}_{\overrightarrow{SA}}$  ist der Vektor, der vom Schwerpunkt  $S$  des Wackelsteines zum Auflagepunkt  $A$  zeigt.  $\omega^L := \omega$  sind die drei Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des Wackelsteines aus Sicht des Laborsystems.

Die drei Koordinatenachsen des körperfesten Systems  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{e}_3$  stimmen mit den geometrischen Halbachsen  $a, b$  und  $c$  des Ellipsoids überein.

Damit definieren wir die Matrix  $\mathbf{R}^L = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , welche uns die Orientierung des Wackelsteines im Laborsystem beschreibt.

Das Laborsystem selbst ist durch  $\tilde{\mathbf{n}}_3 = (0, 0, +1)^T$  orientiert.

Der Trägheitstensor im körperfesten Bezugssystem

$$\mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

hat die bekannte Form aus Gleichung 1.11 und ist konstant.

Im Laborsystem ist der Trägheitstensor dann durch  $\mathbf{I} = \mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{R}^T$  gegeben.

## 2.2 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Die 13 Variablen, mit denen wir nun den Wackelstein beschreiben wollen, sind die Position  $\mathbf{r}_S$  und Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_S$  des Schwerpunktes, die Winkelgeschwindigkeiten  $\boldsymbol{\omega}$  und die Orientierung, ausgedrückt mithilfe von Quaternionen  $\mathbf{q}$ .

Nun wollen wir für alle diese Variablen Differentialgleichungen herleiten.

### 2.2.1 Position des Schwerpunktes

Die Ableitung des Schwerpunktes  $\dot{\mathbf{r}}_S$  ist gleich der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_S$ . Da wir den Wackelstein ohne Schlupf modellieren, wissen wir, dass der Auflagepunkt

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SA} = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

in Ruhe ist und somit ist die Änderung des Schwerpunktes

$$\dot{\mathbf{r}}_S = \mathbf{v}_S = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SA} \quad (2.3)$$

einfach zu berechnen.

### 2.2.2 Geschwindigkeit des Schwerpunktes

Die Ableitung der Geschwindigkeit des Schwerpunktes

$$\dot{\mathbf{v}}_S = -\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{SA} - \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_{SA} \quad (2.4)$$

berechnen wir mithilfe der Produktregel.

### 2.2.3 Quaternionen

Die Änderung der Quaternionen

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{q} \quad (2.5)$$

wird als bekannt vorausgesetzt und hier nicht hergeleitet, wobei

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

das Quaternion ist, welches die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  beschreibt.

Eine ausführliche Herleitung dieser Gleichung findet sich unter anderem im Paper *Quaternions and dynamics* von Basile Graf [3].

#### 2.2.4 Winkelgeschwindigkeiten

Die Herleitung der Winkelbeschleunigungen  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  ist eine etwas längere Rechnung, jedoch nicht kompliziert. Wir werden im Folgenden für bessere Lesbarkeit den Vektor  $\mathbf{r}_{\overrightarrow{SA}}$  mit  $\mathbf{r}$  abkürzen.

Die am Auflagepunkt  $\mathbf{A}$  wirkende Kraft

$$\mathbf{F}_A = m\dot{\mathbf{v}}_S + mg\tilde{\mathbf{n}}_3 = m(-\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + mg\tilde{\mathbf{n}}_3 \quad (2.7)$$

ist gegeben durch die am Schwerpunkt wirkende Kraft  $m\dot{\mathbf{v}}_S$  und die am Auflagepunkt wirkende Zwangskraft  $\mathbf{Z}_A = mg\tilde{\mathbf{n}}_3$ , welche verhindert, dass der Wackelstein in den Tisch hinein fällt.

Damit gilt, mithilfe von Formel 1.16, die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_A \\ &= \mathbf{r} \times (m(-\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + mg\tilde{\mathbf{n}}_3) \\ &= \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

für das Drehmoment.

Ausmultipliziert und nach Termen mit  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  umgestellt, bekommen wir

$$(\mathbf{I} - m\mathbf{r} \times \mathbf{r} \times) \dot{\boldsymbol{\omega}} = m g \mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{n}}_3 - m \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}), \quad (2.9)$$

wobei der Ausdruck  $\mathbf{r} \times \mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}$  sich durch  $\mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\omega}}$  mit einer Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  darstellen lässt. Dies wollen wir mithilfe der Levi-Civita-Schreibweise für das Kreuzprodukt kurz nachrechnen und dabei  $\mathbf{M}$  bestimmen. Für vereinfachte Lesbarkeit nutzen wir die einsteinsche Summenkonvention.

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}))_i &= \epsilon_{ijk} r_j (\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}})_k = \epsilon_{ijk} r_j \epsilon_{klm} r_l \dot{\omega}_m \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} r_j r_l \dot{\omega}_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) r_j r_l \dot{\omega}_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} r_j r_l - \delta_{im} \delta_{jl} r_j r_l) \dot{\omega}_m \\ &= \underbrace{(r_i r_m - \delta_{im} r_j r_j)}_{\text{Matrix}} \dot{\omega}_m = ((\mathbf{r}\mathbf{r}^T + (\mathbf{r}^T \mathbf{r})\mathbb{1}) \dot{\boldsymbol{\omega}})_i \quad \square \end{aligned} \quad (2.10)$$

Somit lässt sich die Differentialgleichung für die Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{I} - m\mathbf{r}\mathbf{r}^T + m(\mathbf{r}^T \mathbf{r})\mathbb{1})^{-1} (m g \mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{n}}_3 - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) - m \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}})) \quad (2.11)$$

leicht berechnen.

## 2.3 Berechnung des Vektors $\mathbf{r}_{\overrightarrow{SA}}$ und seiner Ableitung

Nun bleibt uns nur noch übrig, den Vektor  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\overrightarrow{SA}}$  und dessen Ableitung zu bestimmen, um damit dann die Differentialgleichungen lösen zu können.

### 2.3.1 Berechnung von $\mathbf{r}_{\overrightarrow{SA}}$

Dafür definieren wir uns die Matrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}\mathbf{B}_0\mathbf{R}^T = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{pmatrix} \mathbf{R}^T. \quad (2.12)$$

Dank der Ellipsoidgleichung gilt

$$\mathbf{r}_A^T \mathbf{B} \mathbf{r}_A = 1, \quad (2.13)$$

für alle Vektoren, die vom Ursprung zum Rand des Ellipsoids zeigen, also insbesondere auch für den Vektor  $\mathbf{r}_A$  der zum Auflagepunkt hinzeigt.

Der Normalenvektor des Ellipsoids steht senkrecht bei  $\mathbf{A}$ ,

$$\nabla(\mathbf{r}_A^T \mathbf{B} \mathbf{r}_A) = 2\mathbf{B} \mathbf{r}_A \stackrel{!}{=} \lambda \tilde{\mathbf{n}}_3. \quad (2.14)$$

Diese Gleichung können wir von links mit  $\mathbf{r}_A^T$  skalar multiplizieren und erhalten

$$\mathbf{r}_A^T \frac{\lambda}{2} \tilde{\mathbf{n}}_3 = 1, \quad (2.15)$$

dank Bedingung 2.13.

Diesen Ausdruck stellen wir auf  $\lambda$  um und setzen ihn in Gleichung 2.14 ein:

$$\mathbf{B} \mathbf{r}_A = \frac{1}{\tilde{\mathbf{n}}_3^T \mathbf{r}_A} \tilde{\mathbf{n}}_3. \quad (2.16)$$

Dies können wir erst mit  $\mathbf{B}^{-1}$  und dann von links mit  $\tilde{\mathbf{n}}_3^T$  multiplizieren

$$\tilde{\mathbf{n}}_3^T \mathbf{r}_A = \frac{1}{\tilde{\mathbf{n}}_3^T \mathbf{r}_A} \tilde{\mathbf{n}}_3^T \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{n}}_3. \quad (2.17)$$

Daraus folgt der Ausdruck für den Vektor

$$\mathbf{r}_A = -\frac{\mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{n}}_3}{\sqrt{\tilde{\mathbf{n}}_3^T \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{n}}_3}}, \quad (2.18)$$

wobei wir beim Ziehen der Wurzel das negative Vorzeichen wählen, da der Auflagepunkt unterhalb des Schwerpunktes liegt.

Um mithilfe des Vektors  $\mathbf{r}_A$  den Vektor

$$\mathbf{r}_{\overrightarrow{SA}} = \mathbf{r}_A + h\mathbf{R}\tilde{\mathbf{n}}_3 \quad (2.19)$$

zu bestimmen, müssen wir nur noch die Höhe  $h$  zum Schwerpunkt addieren.

### 2.3.2 Berechnung von $\dot{\mathbf{r}}_{\overrightarrow{SA}}$

Wie in Gleichung 2.11 gesehen, benötigen wir nicht nur den Vektor  $\mathbf{r}_{\overrightarrow{SA}}$  selbst, sondern auch dessen Ableitung. Um diese zu bestimmen, berechnen wir zuerst die Ableitung des Vektors  $\mathbf{r}_A$ .

Dazu nehmen wir Ausdruck 2.17 ohne  $\tilde{\mathbf{n}}_3^T$  und leiten diesen mithilfe der Produktregel ab

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}_A = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{n}}_3}{\tilde{\mathbf{n}}_3^T \mathbf{r}_A} \right) = \frac{(\dot{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{n}}_3)(\tilde{\mathbf{n}}_3^T \mathbf{r}_A) - (\mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{n}}_3)(\tilde{\mathbf{n}}_3^T \dot{\mathbf{r}}_A)}{(\tilde{\mathbf{n}}_3^T \mathbf{r}_A)^2}, \quad (2.20)$$

wobei die Ableitung der inversen Matrix  $\dot{\mathbf{B}}^{-1}$  angewandt auf einen Testvektor  $\vec{x}$  mit der Relation 1.7 zu

$$\frac{d(\mathbf{B}^{-1})}{dt}\vec{x} = \dot{\mathbf{B}}^{-1}(\vec{x}) = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{B}^{-1}(\vec{x})) - \mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{\omega} \times \vec{x}) \quad (2.21)$$

berechnet wird.

Damit lässt sich die Bedingung

$$\tilde{\mathbf{n}}_3^T \dot{\mathbf{r}}_A = \tilde{\mathbf{n}}_3^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A) \quad (2.22)$$

berechnen.

Somit haben wir alles zusammen, um die Ableitung des Vektors  $\mathbf{r}_A$  zu berechnen. Diese ist dann durch

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} - \frac{\mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{n}}_3)}{\tilde{\mathbf{n}}_3^T \mathbf{r}_A} - \frac{\tilde{\mathbf{n}}_3^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A)}{\tilde{\mathbf{n}}_3^T \mathbf{r}_A} \mathbf{r}_A \quad (2.23)$$

gegeben.

Die Ableitung

$$\dot{\mathbf{r}}_{\overrightarrow{SA}} = \dot{\mathbf{r}}_A + h\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}\tilde{\mathbf{n}}_3) \quad (2.24)$$

des Vektors  $\mathbf{r}_{\overrightarrow{SA}}$  folgt direkt aus Gleichung 2.19.

## 2.4 Die Bewegungsgleichungen

Zusammengefasst haben wir nun die folgenden 13 Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_S &= \mathbf{v}_S = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{v}}_S &= -\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2}\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{q} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= (\mathbf{I} - m\mathbf{r}\mathbf{r}^T + m(\mathbf{r}^T \mathbf{r})\mathbf{1})^{-1} (m\mathbf{g}\mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{n}}_3 - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}})) \end{aligned}$$

### 3 Die Beschreibung nach Kuypers

#### 3.1 Beschreibung des Systems

Wie wir in Abschnitt 1.1 gelernt haben, ist die Bewegung eines starren Körpers mit sechs Freiheitsgraden vollständig beschrieben. Daher wollen wir nun auch eine Beschreibung des Wackelsteines finden, welche mit maximal sechs Variablen auskommt. Diese Herleitung orientiert sich stark an Friedhelm Kuypers [5].

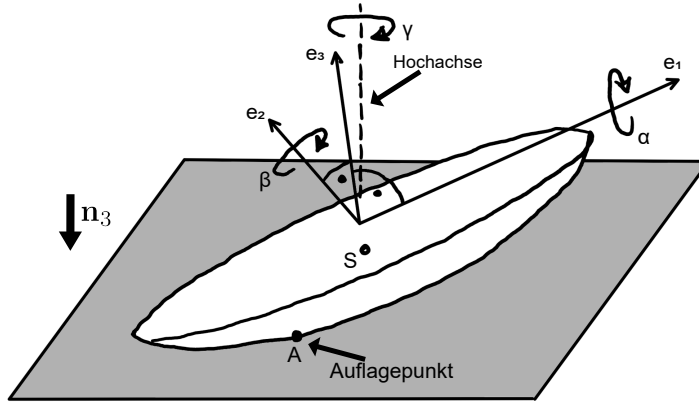


Abbildung 3.1: Schematische Skizze des Wackelsteines. Die Abbildung ist eine eigenständig erstellte Zeichnung basierend auf [5, Abbildung 5], wobei der Vektor  $\mathbf{n}_3 = (0, 0, -1)^T$  nach unten zeigt. Aus urheberrechtlichen Gründen wurde in der Online-Version dieser Bachelorarbeit nicht die Originalabbildung verwendet.

Der Ursprung der Koordinatensysteme liegt wieder im Mittelpunkt des *hypothetischen Vollellipsoids*.

Diese sechs Variablen zur Beschreibung der Bewegung werden die drei Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  und die drei Komponenten der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$  sein.

Dabei ist zu beachten, dass nur die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  mit den Längs- und Querachsen  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  des Ellipsoids übereinstimmen. Der Winkel  $\gamma$  beschreibt eine Drehung um die inertielle Hochachse.

Die Orientierung der Winkelgeschwindigkeiten hingegen stimmen mit den drei Halbachsen  $a, b$  und  $c$  des Ellipsoids überein und hängen über die Relation

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta \\ \dot{\beta} + \dot{\gamma} \sin \alpha \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

mit den Winkeln und ihren Ableitungen zusammen.

### 3.2 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Zuerst wollen wir die körperfesten Komponenten des Auflagepunktes  $x_1, x_2, x_3$  in Abhängigkeit der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  darstellen. Also  $x_i = x_i(\alpha, \beta)$ .

Danach bestimmen wir die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_S$  und Beschleunigung  $\mathbf{a}_S$  des Schwerpunktes aus Sicht des Laborsystems in körperfesten Komponenten und damit dann die am Auflagepunkt  $\mathbf{A}$  wirkende Kraft  $\mathbf{F}_A$ .

Damit können wir dann mithilfe von Gleichung 1.16 die Bewegungsgleichungen für den Wackelstein aufstellen. Diese werden ein System von sechs Differentialgleichungen erster Ordnung bilden.

#### 3.2.1 Die Koordinaten des Auflagepunktes

Diese Herleitung hat eine ähnliche Idee wie die in Kapitel 2.3, nur wollen wir die Koordinaten des Auflagepunktes nun in den körperfesten Koordinaten bestimmen.

Da der Auflagepunkt auf dem Rand des Ellipsoids liegt, wissen wir, dass die Ellipsoidgleichung

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \quad (3.2)$$

gelten muss.

Somit können wir uns die Hilfsfunktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (3.3)$$

definieren.

Da der Normalenvektor des Ellipsoids senkrecht bei  $\mathbf{A}$  stehen muss, muss die Bedingung

$$\nabla f|_{\mathbf{A}} = 2\lambda \mathbf{n}_3 \quad (3.4)$$

erfüllt sein, wobei  $\lambda$  ein unbekanntes Skalar ist. Nach Einsetzen und durch zwei dividieren, erhält man die Gleichung

$$\frac{x_1}{a^2} \mathbf{e}_1 + \frac{x_2}{b^2} \mathbf{e}_2 + \frac{x_3}{c^2} \mathbf{e}_3 = \lambda \mathbf{n}_3. \quad (3.5)$$

Diese können wir nacheinander mit den Vektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  und  $\mathbf{n}_3$  multiplizieren und somit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{x_1}{a^2} \mu_1 + \frac{x_2}{b^2} \mu_2 + \frac{x_3}{c^2} \mu_3, \\ \frac{x_1}{a^2} &= \lambda \mu_1, \quad \frac{x_2}{b^2} = \lambda \mu_2, \quad \frac{x_3}{c^2} = \lambda \mu_3, \end{aligned} \quad (3.6)$$

aufstellen. Dabei definieren wir:  $\mu_i := \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}_3$  und  $p := \sqrt{(a\mu_1)^2 + (b\mu_2)^2 + (c\mu_3)^2}$ .

Dieses System besitzt die Lösung

$$x_1 = \frac{1}{p}a^2\mu_1, \quad x_2 = \frac{1}{p}b^2\mu_2, \quad x_3 = \frac{1}{p}c^2\mu_3, \quad (3.7)$$

welche sich einfach durch Einsetzen überprüfen lässt.

Nun müssen wir nur noch den Vektor  $\mathbf{n}_3^L = (0, 0, -1)^T$  in körperfesten Komponenten bestimmen, um die Koordinaten des Auflagepunktes zu kennen.

Dies machen wir, indem wir den Vektor mit dem Winkel  $\alpha$  um die  $\mathbf{e}_1$ -Achse und mit dem Winkel  $\beta$  um die  $\mathbf{e}_2$ -Achse drehen

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_3^k &= \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \\ -\cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} = \cos \alpha \sin \beta \mathbf{e}_1 - \sin \alpha \mathbf{e}_2 - \cos \alpha \cos \beta \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die einzelnen Komponenten

$$\mu_1 = \cos \alpha \sin \beta, \quad \mu_2 = -\sin \alpha, \quad \mu_3 = -\cos \alpha \cos \beta, \quad (3.9)$$

können wir nun einfach ablesen. Somit haben wir alles zusammen, um mithilfe von Gleichung 3.7 die Koordinaten des Auflagepunktes in Abhängigkeit von  $\alpha$  und  $\beta$  zu schreiben.

### 3.2.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung des Schwerpunktes

Da wir weiterhin den Wackelstein ohne Schlupf modellieren, ist auch bei Kuypers der Auflagepunkt in Ruhe. Daher gilt wieder Gleichung 2.2 und

$$\mathbf{v}_S = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SA} \quad (3.10)$$

beschreibt wieder die Geschwindigkeit des Schwerpunktes aus Sicht des Laborsystems, wobei der Vektor

$$\mathbf{r}_{SA} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 + h \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

wieder vom Auflagepunkt zum Schwerpunkt zeigt und in körperfesten Komponenten angegeben ist. Dabei ist  $h$  wieder der Abstand vom Nullpunkt zum Schwerpunkt.

Die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_S = \begin{pmatrix} \omega_3 x_2 - \omega_2 (x_3 + h) \\ \omega_1 (x_3 + h) - \omega_3 x_1 \\ \omega_2 x_1 - \omega_1 x_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$



können wir somit in körperfesten Komponenten darstellen.

Die Beschleunigung

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_S &= \frac{d}{dt} \mathbf{v}_S = \frac{d_k}{dt} \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_S \\
&= \begin{pmatrix} \dot{\omega}_3 x_2 - \dot{\omega}_2 (x_3 + h) \\ \dot{\omega}_1 (x_3 + h) - \dot{\omega}_3 x_1 \\ \dot{\omega}_2 x_1 - \dot{\omega}_1 x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_3 \dot{x}_2 - \omega_2 \dot{x}_3 \\ \omega_1 \dot{x}_3 - \omega_3 \dot{x}_1 \\ \omega_2 \dot{x}_1 - \omega_1 \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dot{\omega}_3 x_2 - \dot{\omega}_2 (x_3 + h) \\ \dot{\omega}_1 (x_3 + h) - \dot{\omega}_3 x_1 \\ \dot{\omega}_2 x_1 - \dot{\omega}_1 x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_3 (\dot{x}_2 - v_2) - \omega_2 (\dot{x}_3 - v_3) \\ \omega_1 (\dot{x}_3 - v_3) - \omega_3 (\dot{x}_1 - v_1) \\ \omega_2 (\dot{x}_1 - v_1) - \omega_1 (\dot{x}_2 - v_2) \end{pmatrix} \\
&:= \begin{pmatrix} \dot{\omega}_3 x_2 - \dot{\omega}_2 (x_3 + h) \\ \dot{\omega}_1 (x_3 + h) - \dot{\omega}_3 x_1 \\ \dot{\omega}_2 x_1 - \dot{\omega}_1 x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

berechnen wir mithilfe von Formel 1.6.

### 3.2.3 Zwangskraft und Drehmoment

Die am Auflagepunkt  $\mathbf{A}$  wirkende Kraft

$$\mathbf{F}_A = m \mathbf{a}_S - m g \mathbf{n}_3 \tag{3.14}$$

ist wieder durch die Kraft am Schwerpunkt  $m \mathbf{a}_S$  und die am Auflagepunkt wirkende Zwangskraft  $\mathbf{Z}_A = -m g \mathbf{n}_3$  gegeben.

Weiterhin ist  $m$  die Gesamtmasse des Wackelsteines und  $g$  die Erdbeschleunigung. Somit erhalten wir mit der Formel  $\mathbf{N} = \mathbf{r}_{\overline{SA}} \times \mathbf{F}_A$  die folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
N_1 &= m \left[ -\dot{\omega}_1 \left\{ x_2^2 + (x_3 + h)^2 \right\} + x_1 \left\{ \dot{\omega}_2 x_2 + \dot{\omega}_3 (x_3 + h) \right\} + \right. \\
&\quad \left. + k_3 x_2 - k_2 (x_3 + h) - g \left\{ (x_3 + h) \sin \alpha - x_2 \cos \alpha \cos \beta \right\} \right], \\
N_2 &= m \left[ -\dot{\omega}_2 \left\{ x_1^2 + (x_3 + h)^2 \right\} + x_2 \left\{ \dot{\omega}_1 x_1 + \dot{\omega}_3 (x_3 + h) \right\} \right. \\
&\quad \left. + k_1 (x_3 + h) - k_3 x_1 - g \cos \alpha \left\{ x_1 \cos \beta + (x_3 + h) \sin \beta \right\} \right], \\
N_3 &= m \left[ -\dot{\omega}_3 \left\{ x_1^2 + x_2^2 \right\} + (x_3 + h) \left\{ \dot{\omega}_1 x_1 + \dot{\omega}_2 x_2 \right\} + \right. \\
&\quad \left. + k_2 x_1 - k_1 x_2 + g (x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \sin \beta) \right].
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Im Gegensatz zur Beschreibung von Schömer haben wir bei Kuypers noch die Möglichkeit laminare Luftreibung mitzumodellieren. Dies machen wir mit den

Reibungsmomenten

$$\mathbf{N}_R = \begin{pmatrix} N_{R1} \\ N_{R2} \\ N_{R3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1\omega_1 \\ -c_2\omega_2 \\ -c_3\omega_3 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

wobei  $c_i$  die drei Reibungszahlen sind.

Der Trägheitstensor

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

für den Wackelstein ist hier ausschließlich im körperfesten Koordinatensystem gegeben und hat weiterhin die bekannte charakteristische Form.

Mithilfe von Formel 1.14 bekommen wir einen weiteren Ausdruck für das Drehmoment. Dieses errechnet sich für diesen Trägheitstensor zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \\ &= \begin{pmatrix} A\dot{\omega}_1 - F\dot{\omega}_2 \\ -F\dot{\omega}_1 + B\dot{\omega}_2 \\ C\dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A\omega_1 - F\omega_2 \\ -F\omega_1 + B\omega_2 \\ C\omega_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A\dot{\omega}_1 - F\dot{\omega}_2 \\ -F\dot{\omega}_1 + B\dot{\omega}_2 \\ C\dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (C-B)\omega_2\omega_3 \\ (A-C)\omega_1\omega_3 \\ (B-A)\omega_1\omega_2 \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} \omega_1\omega_3 \\ -\omega_2\omega_3 \\ \omega_2^2 - \omega_1^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

### 3.3 Die Bewegungsgleichungen

Somit haben wir nun alles zusammen für die Bewegungsgleichungen, indem wir die beiden Ausdrücke für die Drehmomente

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_{\overrightarrow{SA}} \times \mathbf{Z}_A = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \quad (3.19)$$

gleichsetzen.

Wir addieren noch die Reibungsmomente  $\mathbf{N}_R$  und erhalten das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} N_1 + N_{R1} &= A\dot{\omega}_1 - F\dot{\omega}_2 &+& (C-B)\omega_2\omega_3 + F\omega_1\omega_3 \\ N_2 + N_{R2} &= B\dot{\omega}_2 - F\dot{\omega}_1 &+& (A-C)\omega_1\omega_3 - F\omega_2\omega_3 \\ N_3 + N_{R3} &= C\dot{\omega}_3 &+& (B-A)\omega_1\omega_2 + F(\omega_2^2 - \omega_1^2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Das Gleichungssystem ist zu lange und kompliziert um es per Hand fehlerfrei auf  $\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_i(\alpha, \beta, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  freistellen zu können. Daher verwenden wir ein Computeralgebrasystem. Die Lösung ist zu lange um hier abgedruckt zu werden, ist aber in dieser Bachelorarbeit beigefügtem GitHub-Repository zu finden.

Nun fehlen uns nur noch die drei Gleichungen für die Ableitungen der Winkel. Diese bekommen wir, indem wir die Gleichung 3.1 nach  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$  freistellen.

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= (-\omega_1 \sin \beta + \omega_3 \cos \beta) \frac{1}{\cos \alpha} \\ \dot{\alpha} &= \omega_1 \cos \beta + \omega_3 \sin \beta \\ \dot{\beta} &= (\omega_1 \sin \beta - \omega_3 \cos \beta) \tan \alpha + \omega_2\end{aligned}\tag{3.21}$$

Diese drei Differentialgleichungen besitzen Singularitäten bei  $\alpha = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ . Da wir jedoch an keinen Simulationen interessiert sind, bei denen sich der Wackelstein auf die Seite legt oder gar überschlägt, spielen diese Singularitäten für unsere Modellierung keine Rolle.

## 4 Vergleich der beiden Beschreibungen

### 4.1 Parameter des Wackelsteines

Beide Beschreibungen von Kuypers und von Schömer, nutzen  $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$  für die Erdbeschleunigung und die Parameter  $a, b$  und  $c$  für die Halbachsen des Wackelsteines.

#### 4.1.1 Parameter bei Kuypers

Bei *Kuypers* wählt man eine Gesamtmasse  $m$  des Wackelsteines und den Abstand  $h$  des Schwerpunktes zum Mittelpunkt des *hypothetischen Vollellipsoids*.

Der Trägheitstensor des Wackelsteines

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

ist gegeben durch die drei Hauptträgheitsmomente  $I_1, I_2$  und  $I_3$  und den Winkel  $\delta$  zwischen den horizontalen Hauptachsen des Ellipsoids und den horizontalen Hauptträgheitsachsen.

Damit hat der Trägheitstensor die wie in (1.11) definierte charakteristische Form und die einzelnen Komponenten

$$\begin{aligned} A &:= \frac{1}{2} (I_1 + I_2) + \frac{1}{2} (I_1 - I_2) \cos(2\delta), \\ B &:= \frac{1}{2} (I_1 + I_2) - \frac{1}{2} (I_1 - I_2) \cos(2\delta), \\ F &:= -\frac{1}{2} (I_1 - I_2) \sin(2\delta) \text{ und} \\ C &:= I_3 \end{aligned} \quad (4.2)$$

lassen sich einfach berechnen.

Die Physik des Wackelsteines ist somit vollständig beschrieben, nur die genaue Dichteverteilung des Wackelsteines ist bei Kuypers nicht bekannt.

#### 4.1.2 Parameter bei Schömer

Bei Schömer hingegen wird der Wackelstein modelliert als ein homogenes Halbellipsoid mit Masse  $m_H$  und zwei Punktmassen  $m_p$  an den Orten  $\mathbf{p}$  und  $-\mathbf{p}$ . Die Gesamtmasse ist somit  $m = m_H + 2m_p$  und  $h = \frac{m_H}{m} \frac{3c}{8}$  ist der Abstand des Schwerpunktes zum *hypothetischen Vollellipsoid*.

Der Trägheitstensor des homogenen Halbellipsoides ist durch

$$\mathbf{I}_H = \begin{pmatrix} \frac{m_H}{5} (b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_H}{5} (a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_H}{5} (a^2 + b^2) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

gegeben.

Mit den beiden Hilfsmatrizen  $\mathbf{P} = (\mathbf{p}^T \mathbf{p}) \mathbf{1} - \mathbf{p} \mathbf{p}^T$  und  $\mathbf{H} = (\mathbf{h}^T \mathbf{h}) \mathbf{1} - \mathbf{h} \mathbf{h}^T$ , wobei gilt  $\mathbf{h} = (0, 0, -h)$  lässt sich der Trägheitstensor des Wackelsteines

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_H + 2m_p \mathbf{P} - m \mathbf{H} \quad (4.4)$$

im körperfesten Koordinatensystem berechnen.

Für  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, 0)$  hat dieser auch wieder die Form wie in (1.11), mit den Einträgen  $I_{13} = I_{31} = I_{23} = I_{32} \equiv 0$ .

## 4.2 Koordinatensysteme und Variablen der Beschreibungen

Wie schon in Abschnitten 2 und 3 gezeigt wurde, unterscheiden sich die beiden Modelle nicht nur in der Wahl der Koordinatenbasis (ob in körperfesten- oder Laborsystem-Komponenten gegeben), sondern auch in der Anzahl ihrer Variablen.

### 4.2.1 Variablen bei Kuypers

Bei Kuypers wurden die drei Winkel  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  und die drei Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1, \omega_2$  und  $\omega_3$  zur Beschreibung des Systems gewählt, wobei das System invariant unter Drehungen  $\gamma$  um die inertielle Hochachse ist. Das bedeutet, dass beim Lösen der Bewegungsgleichungen der Winkel  $\gamma$  nicht von Relevanz ist und somit nur fünf Gleichungen benötigt werden. Dies stimmt auch überein mit den sechs Freiheitsgraden eines starren Körpers abzüglich der einen Zwangsbedingung, dass der Auflagepunkt des Wackelsteines in Ruhe ist.

Beim Modellieren selbst wurde jedoch auch mit dem Winkel  $\gamma$  gerechnet, da dies keine signifikante Performanceeinbuße hat und wir so nicht im Nachhinein aufwendig die Werte des Winkels  $\gamma$  berechnen müssen, sondern ihn direkt aus der Lösung der Differentialgleichungen erhalten.

### 4.2.2 Variablen bei Schömer

Da bei Schömer Quaternionen anstatt Winkel zur Beschreibung des Systems gewählt wurden, würden wir hier erwarten, dass wir mit nur einer Variablen mehr als bei Kuypers auskommen könnten. Also sieben anstatt 13 Variablen.

Dies ist auch der Fall. Wir können das Modell von Schömer so weit verkleinern, dass wir nur noch mithilfe der vier Quaternionen und der drei Winkelgeschwindigkeiten, welche weiterhin wie in Gleichungen 4.2.2 definiert sind, das System vollständig beschreiben.

Der Ort des Schwerpunktes

$$\mathbf{r}_S(t) = \int_0^t \mathbf{v}_S(\tau) d\tau = \int_0^t (-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})(\tau) d\tau, \quad (4.5)$$

ist durch das gegebene Integral genau bestimmt und das Gleiche gilt auch für die Geschwindigkeit des Schwerpunktes  $\mathbf{v}_S$ .

Um den Wackelstein jetzt zu simulieren, könnten wir das Differentialgleichungssystem mit den sieben Variablen lösen und anschließend den Ort mithilfe von numerischer Integration berechnen.

Dies ist jedoch zusätzlicher Aufwand in der Implementierung, der gar nicht notwendig ist. Anstelle dessen können wir den Ort des Schwerpunktes  $\mathbf{r}_S$  mithilfe unseres schon vorhandenen Verfahrens zum Lösen von Differentialgleichungen integrieren, indem wir

$$\dot{\mathbf{r}}_S = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (4.6)$$

als zusätzliche Differentialgleichung in das System hinzufügen.

Somit definieren wir das Modell *Schömer reduziert*, beziehungsweise *Schömer red.*, welches zehn Variablen besitzt.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_S &= -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2} \mathfrak{w} \cdot \mathbf{q} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= (\mathbf{I} - m\mathbf{r}\mathbf{r}^T + m(\mathbf{r}^T\mathbf{r})\mathbf{1})^{-1} (m\mathbf{g}\mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{n}}_3 - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}})) \end{aligned}$$

Der größte Unterschied zwischen *Schömer red.* und *Schömer* ist, dass wir bei *Schömer red.* den Ort des Schwerpunktes  $\mathbf{r}_S$  direkt über die Relation  $\dot{\mathbf{r}}_S = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  berechnen, anstatt ihn aus der Lösung der Differentialgleichung von  $\mathbf{v}_S$ , welche über die Relation  $\dot{\mathbf{v}}_S = -\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$  berechnet wird, zu bestimmen.

Ein genauerer Vergleich der Modelle findet sich in Kapitel 5.2.

### 4.3 Lösung der Bewegungsgleichungen

Wenn im folgenden nicht weiter spezifiziert ist, ob es sich um das Modell *Schömer* oder *Schömer red.* handelt, liegt das daran, dass bei strikten Toleranzen die Unterschiede zwischen den beiden Modellen mit bloßem Auge nicht erkennbar sind.

Trotz der unterschiedlichen Beschreibungen zeigen die Modelle *Kuypers* und *Schömer* dasselbe qualitative Verhalten. Dies ist hier exemplarisch gezeigt für

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \beta(0) = \gamma(0) = 0.0 \\ \omega_1(0) &= 0.01, \quad \omega_2(0) = -0.02, \quad \omega_3(0) = -2.0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

in Kuypers-Variablen, beziehungsweise für

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (1, 0, 0, 0)^T \\ \omega_1(0) &= 0.01, \quad \omega_2(0) = -0.02, \quad \omega_3(0) = -2.0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

in Schömer-Variablen als Anfangsbedingungen. Die Winkel sind dabei im Bogenmaß angegeben und die Winkelgeschwindigkeiten stets in  $\text{rad s}^{-1}$ .

Für den einfachen Fall von keiner ursprünglichen Neigung des Wackelsteines ist es trivial die Winkel aus den Quaternionen zu berechnen. Der deutlich kompliziertere allgemeine Fall von beliebigen Winkeln wurde hier nicht weiter betrachtet. Dies liegt daran, dass wir die beiden Modelle auch so gut vergleichen können, da sich das qualitativ andere Bewegungsverhalten des Wackelsteines deutlich sensitiver mit Änderungen der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_i(0)$  als mit Änderungen der Winkel  $\alpha(0), \beta(0)$  und  $\gamma(0)$  untersuchen lässt. Mehr dazu findet sich in Kapitel 5.1.

Die geometrischen Parameter des Wackelsteines sind:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{(1 + \sqrt{5})}{2}, \quad b = 1, \quad c = 1 \\
 m_E &= 0.1, \quad m_p = 0.05, \quad m = m_E + 2m_p = 0.2 \\
 h &= \frac{3c \cdot m_E}{8m} = 0.1875, \quad g = 9.81 \\
 A &= 0.05796875, \quad B = 0.0903294297749979 \\
 C &= 0.12236067977499791, \quad F = 0.025
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Wobei alle Parameter in den passenden SI-Einheiten gegeben sind, auch wenn die Einheiten nicht explizit dazugeschrieben wurden.

Dies ergibt die folgenden Lösungen der Bewegungsgleichungen, wobei wir in den Abbildungen nur die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1, \omega_2$  und  $\omega_3$  im Laufe der Simulation betrachten.

Es ist klar an der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_3$  zu erkennen, dass der Wackelstein seine Drehrichtung um die Achse  $\mathbf{e}_3$  im Verlauf der Zeit ändert. Während dieser Änderung der Drehrichtung fängt das charakteristische Wackeln um die Achsen  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  an des Wackelsteines an und hört dann wieder auf.

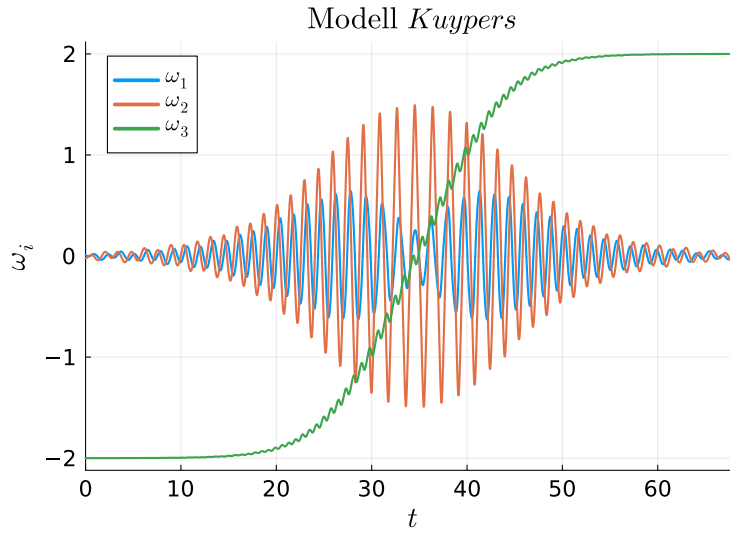


Abbildung 4.1: Lösung der Bewegungsgleichungen mit gegebenen Anfangsbedingungen, mithilfe des Modells *Kuypers* und Toleranzen von  $\tau = 10^{-12}$ .

Da bei *Schömer* die Winkelgeschwindigkeiten in Laborsystem-Komponenten berechnet werden, wurden diese noch in die körperfesten Komponenten umgerechnet. Dabei gilt  $\boldsymbol{\omega}^k := \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}^L$ .



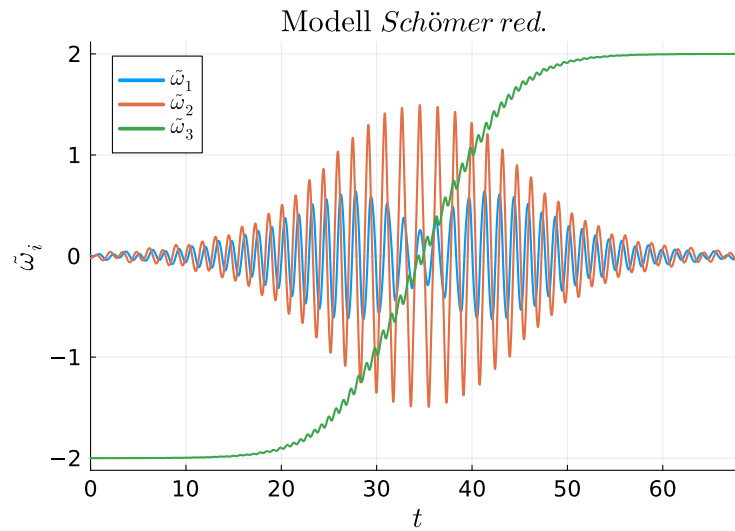


Abbildung 4.2: Lösung der Bewegungsgleichungen mit gegebenen Anfangsbedingungen, mithilfe des Modells *Schömer red.* und Toleranzen von  $\tau = 10^{-12}$ , wobei die Winkelgeschwindigkeiten nach dem Lösen in körperfeste Komponenten umgerechnet wurden.

Mit dem bloßen Auge ist kein Unterschied zwischen den beiden Lösungen zu erkennen. Eine genauere Betrachtung der Unterschiede der Modelle findet sich in Kapitel 5.2.

## 5 Analyse der Modelle

### 5.1 Qualitatives Verhalten der Lösungen

Im Folgenden wollen wir überprüfen, ob die Modelle auch bei anderen Anfangsbedingungen das Verhalten des Wackelsteines, wie man es aus der realen Welt kennt, beschreiben.

In diesem Unterkapitel betrachten wir, bei Verwendung von „vernünftigen“ Anfangsbedingungen, nur die Lösungen des *Kuypers*-Modells, da mit dem bloßen Auge bei den hier verwendeten absoluten und relativen Toleranzen von jeweils  $\tau_a = \tau_r = \tau = 10^{-12}$  keine Unterschiede zwischen den Modellen erkennbar sind. In dem dieser Bachelorarbeit beigefügten GitHub-Repository finden sich jedoch auch die Lösungen des *Schömer*-Modells.

#### 5.1.1 Anschubsen in die bevorzugte Drehrichtung

Zuerst wollen wir untersuchen, was passiert, wenn wir den Wackelstein in seine bevorzugte Drehrichtung anschubsen.

Dazu betrachten wir dieselben geometrischen Parameter und Anfangsbedingungen wie in Kapitel 4.3, nur anstelle von  $\omega_3(0) = -2.0$  setzen wir  $\omega_3(0) = +2.0$ .

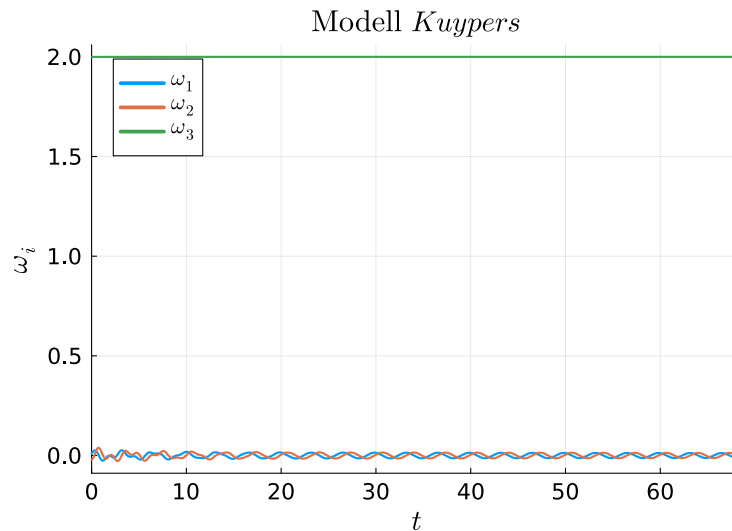


Abbildung 5.1: Lösung der Bewegungsgleichungen mithilfe des Modells *Kuypers*, wobei der Wackelstein in seine bevorzugte Drehrichtung angeschubst wurde.

Wie man es von dem realen Wackelstein erwarten würde, behält der Wackelstein seine ursprüngliche Drehrichtung bei und ändert diese nicht.

### 5.1.2 Anschubsen nach unten

Nun wollen wir untersuchen, was passiert, wenn wir dem Wackelstein auf seiner langen Hauptachse  $a$  einen Stoß nach unten geben. Wir benutzen wieder dieselben geometrischen Parameter für den Wackelstein und ändern nur die Winkelgeschwindigkeiten

$$\omega_1(0) = 0.01, \quad \omega_2(0) = -1.0, \quad \omega_3(0) = -0.02. \quad (5.1)$$

Dabei entspricht der initiale Stoß nach unten der Bedingung  $\omega_2(0) = -1.0$ .

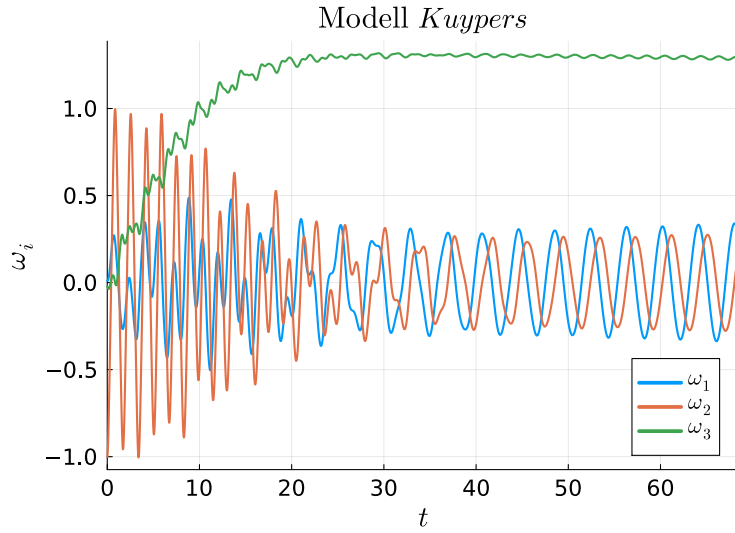


Abbildung 5.2: Lösung der Bewegungsgleichungen mithilfe des Modells *Kuypers*, wobei der Wackelstein auf seiner langen Hauptachse  $a$  einen Stoß nach unten bekommen hat.

Wie zu erwarten, wackelt der Wackelstein erst um die  $\mathbf{e}_1$ - und  $\mathbf{e}_2$ -Achse und fängt dann an, sich in seine bevorzugte Drehrichtung zu drehen.

Die Tatsache, dass die Modelle das Verhalten des Wackelsteines in der realen Welt widerspiegeln, gibt uns Vertrauen in die Modelle selbst und auch in ihre korrekte Implementierung.

### 5.1.3 Die Grenzen des Modells

Wenn wir den Wackelstein jedoch zu stark anschubsen, verlieren die Modelle ihre Gültigkeit. Dies liegt unter anderem daran, dass dann die Annahme, dass der Wackelstein ohne Schlupf rollt, also dass die Bedingung

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SA}, \quad (5.2)$$

gilt, in der realen Welt nicht mehr erfüllt ist.

Wenn man dem realen Wackelstein einen zu festen Stoß nach unten gibt, springt dieser etwa in die Luft. Dieses Verhalten können die Modelle nicht beschreiben. Somit sind die Lösungen der Modelle für solche Anfangsbedingungen nicht mehr sinnvoll.

Dies ist hier exemplarisch gezeigt für dieselben Parameter wie eben in Kapitel 5.1.2, nur wird der Wackelstein jetzt zehnmal so stark, also mit  $\omega_2(0) = -10.0$  angeschubst.

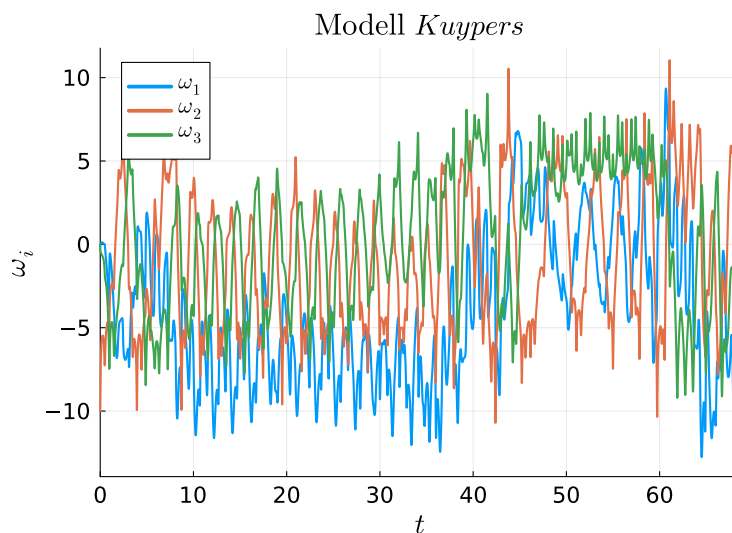


Abbildung 5.3: Die Grenzen des Modells. Die Lösung der Bewegungsgleichungen mithilfe des Modells *Kuypers* ergeben keinen Sinn mehr, nachdem der Wackelstein zu stark angestoßen wurde.

Interessanterweise zeigt hier das Modell *Schömer red.* ab Sekunde 60 ein leicht anderes Verhalten als das Modell *Kuypers*. Ein möglicher Grund wäre, dass die in Kapitel 3.3 angesprochenen Singularitäten zum Tragen kommen. Da hier die Modelle aber nicht weiter aussagekräftig sind, wurde dies nicht weiter untersucht. Bei „vernünftigen“ Anfangsbedingungen ist diese Abweichung zwischen den Modellen bei allen für diese Bachelorarbeit getesteten Probleme nicht vorgekommen.

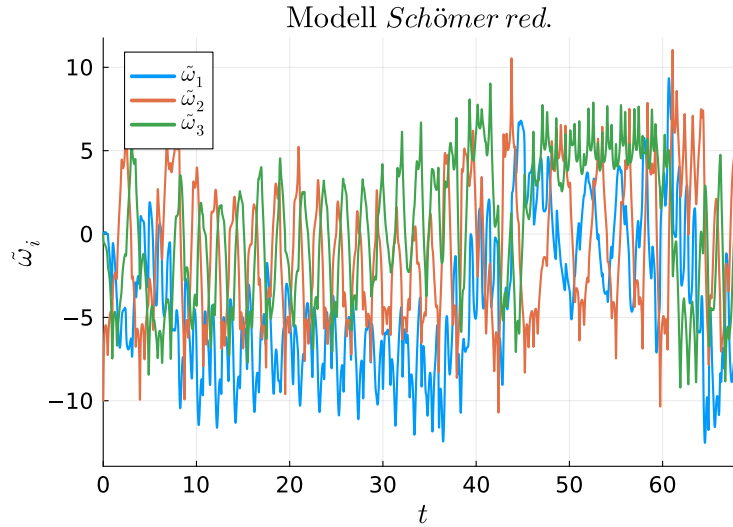


Abbildung 5.4: Auch die Lösung der Bewegungsgleichungen mithilfe des Modells *Schömer red.* ergeben keinen Sinn mehr, nachdem der Wackelstein zu stark angestoßen wurde und zeigen zudem noch leicht andere Ergebnisse als das Modell *Kuypers*.

## 5.2 Stabilität der Modelle

In diesem Abschnitt wollen wir uns die Stabilität der verschiedenen Modelle genauer anschauen. Da wir den Wackelstein ohne Luftreibung modellieren, sollte die Gesamtenergie  $E_{ges}$  erhalten bleiben. Da wir die Bewegungsgleichungen jedoch nicht exakt lösen, sondern immer nur numerisch approximieren können, wird auch die Gesamtenergie nicht exakt erhalten bleiben.

Dies machen wir uns zu Nutze und nehmen die Abweichung der Gesamtenergie von der Anfangsenergie  $E_{ges}(0)$  als Maß für die Stabilität der Lösung.

### 5.2.1 Vergleich der Modelle *Kuypers*, *Schömer red.* und *Schömer*

Dazu betrachten wir wieder den Wackelstein mit den geometrischen Parametern und Anfangsbedingungen wie in Kapitel 4.3 und lösen diese mit den Modellen *Kuypers*, *Schömer red.* und *Schömer*.

Mit anderen Anfangsbedingungen sind die im Folgenden abgebildeten Ergebnisse ähnlich, jedoch teilweise nicht ganz so prononciert. Wenn nichts weiter angegeben ist, wurde die Methode *Tsit5* und absolute und relative Toleranzen von jeweils  $\tau = 10^{-5}$  gewählt.

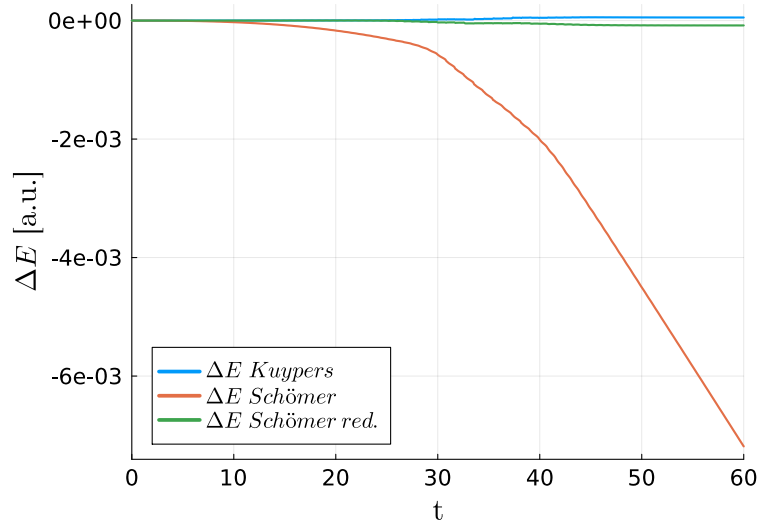


Abbildung 5.5: Abweichungen der Gesamtenergie von der Anfangsenergie  $E_{\text{ges}}(0)$  im Laufe der Simulation für die Modelle *Kuypers*, *Schömer red.* und *Schömer* unter Verwendung von *Tsit5* und Toleranzen von  $\tau = 10^{-5}$ .

Es ist eindeutig zu erkennen, dass die Abweichungen der Gesamtenergie beim Modell *Schömer* am größten sind. So groß sogar, dass die Abweichungen der Modelle *Kuypers* und *Schömer red.* kaum noch ersichtlich sind.

Dabei ist es auch egal welche Toleranzen und Methoden zum Lösen der Differentialgleichungen gewählt wurden, dieses Verhalten zeigt sich dabei immer. Auch wenn dies hier nicht abgebildet ist, lässt es sich in dem diesem Kapitel entsprechenden Julia-Skript austesten, welches im GitHub-Repository zu finden ist.

### 5.2.2 Vergleich der Modelle *Kuypers* und *Schömer red.*

Um die Unterschiede zwischen den Modellen *Kuypers* und *Schömer red.* erkennbar zu machen, müssen wir uns die Abbildung 5.5 noch einmal genauer anschauen.

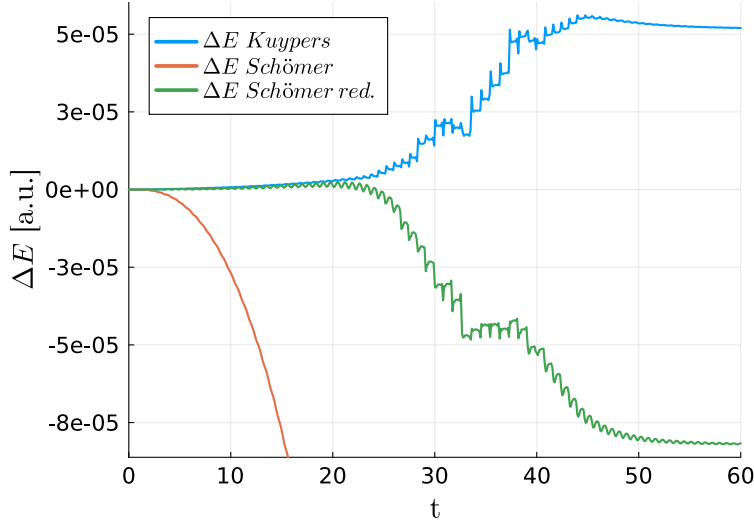


Abbildung 5.6: Abweichungen der Gesamtenergie von der Anfangsenergie  $E_{ges}(0)$  im Laufe der Simulation für die Modelle *Schömer red.* und *Kuypers* unter Verwendung von *Tsit5* und Toleranzen von  $\tau = 10^{-5}$ .

Wie klar zu erkennen ist, haben die Abweichungen des Modells *Kuypers* und *Schömer red.* dieselbe Größenordnung. In diesem Fall, bei Toleranzen von  $\tau = 10^{-5}$ , sind die Abweichungen bei *Kuypers* etwas geringer als bei *Schömer red.* Welches Modell das bessere ist, hängt jedoch von den jeweils gewählten Toleranzen ab, wobei die Unterschiede zwischen den Modellen immer sehr gering sind.

Somit lässt sich sagen, dass einerseits die beiden Modelle *Kuypers* und *Schömer red.* deutlich stabiler sind als das Modell *Schömer* und zudem zwischen den beiden Modellen selbst kein eindeutiger „Gewinner“ identifizierbar ist.

### 5.2.3 Vergleich der Modelle mit impliziten Methoden

Interessant scheint noch zu erwähnen, dass implizite Methoden nicht stabiler scheinen als explizite Methoden, wobei Stabilität weiterhin über die Erhaltung der Energie definiert wurde. Insbesondere für striktere Toleranzen ( $\tau \lesssim 10^{-6}$ ) weisen implizite Methoden deutlich schlechtere Ergebnisse als explizite Methoden auf.

Dies ist in Abbildung 5.7 für die implizite Methode *Rodas5* und die explizite Methode *Tsit5* und in Abbildung 5.8 für die implizite Methode *RadauIIA5* und die explizite Methode *DP5* mit Toleranzen von jeweils  $\tau = 10^{-10}$  gezeigt.

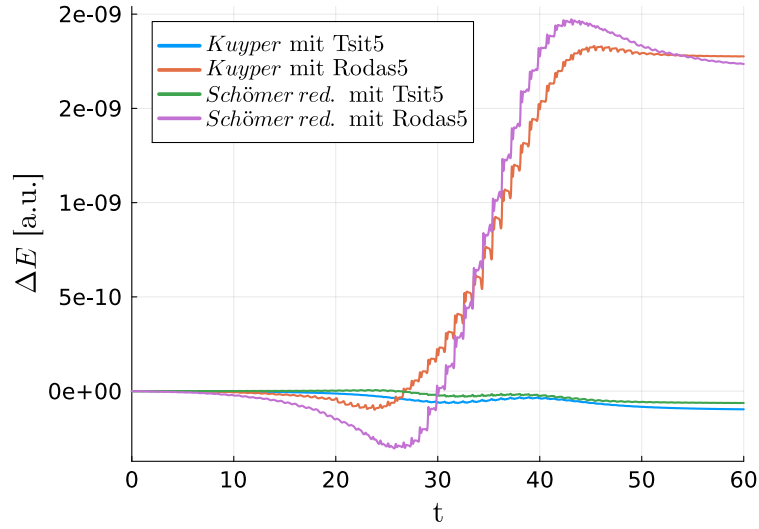


Abbildung 5.7: Abweichungen der Gesamtenergie im Laufe der Simulation für die Modelle *Schömer red.* und *Kuypers* jeweils unter Verwendung der expliziten Methode *Tsit5* und der impliziten Methode *Rodas5* und unter Verwendung von Toleranzen von  $\tau = 10^{-10}$ .

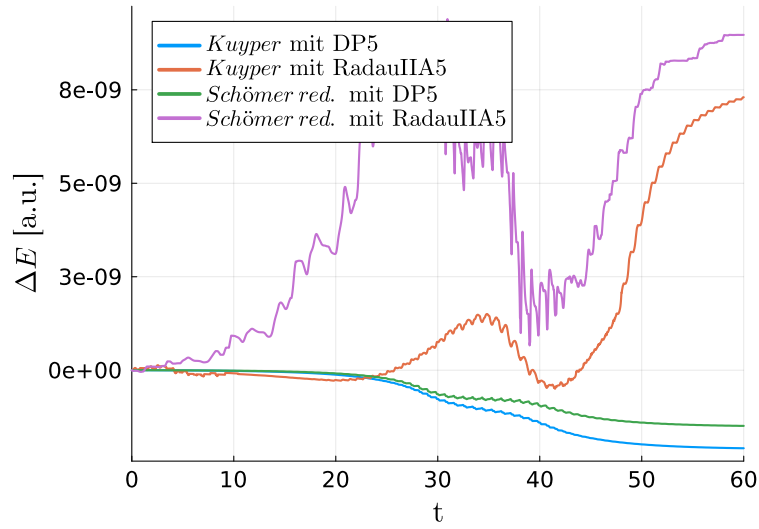


Abbildung 5.8: Abweichungen der Gesamtenergie im Laufe der Simulation für die Modelle *Schömer red.* und *Kuypers* jeweils unter Verwendung der expliziten Methode *DP5* und der impliziten Methode *RadauIIA5* und unter Verwendung von Toleranzen von  $\tau = 10^{-10}$ .



### 5.3 Work-Precision-Diagramm

Nicht nur sind die expliziten Methoden stabiler in Bezug auf die Energieerhaltung als die impliziten Methoden, sie sind auch um einiges schneller. Dies wurde mithilfe eines *Work-Precision*-Diagramms für die Methoden *Tsit5*, *DP5*, *Rodas5* und *RadauIIA5* errechnet.

Die Referenzlösung wurde mit der Methode *Vern9* und absoluten und relativen Toleranzen von jeweils  $\tau = 10^{-14}$  berechnet.

Der Fehler in Bezug auf diese Lösung wurde einerseits in der  $L^2$ -Norm und andererseits in der  $L^\infty$ -Norm berechnet. Die Ergebnisse zwischen der  $L^2$ -Norm und der  $L^\infty$ -Norm unterscheiden sich jedoch nicht sonderlich. Für die Abbildungen hier wurde die  $L^2$ -Norm gewählt, die Abbildungen für die  $L^\infty$ -Norm sind jedoch im GitHub-Repository zu finden.

Die Modelle *Kuypers* und *Schömer red.* zeigen für die verschiedenen Methoden qualitativ ähnliche Ergebnisse, wobei das Modell *Schömer red.* etwa um den Faktor 3 schneller zu sein scheint als das Modell *Kuypers* in seiner jetzigen Implementierung.

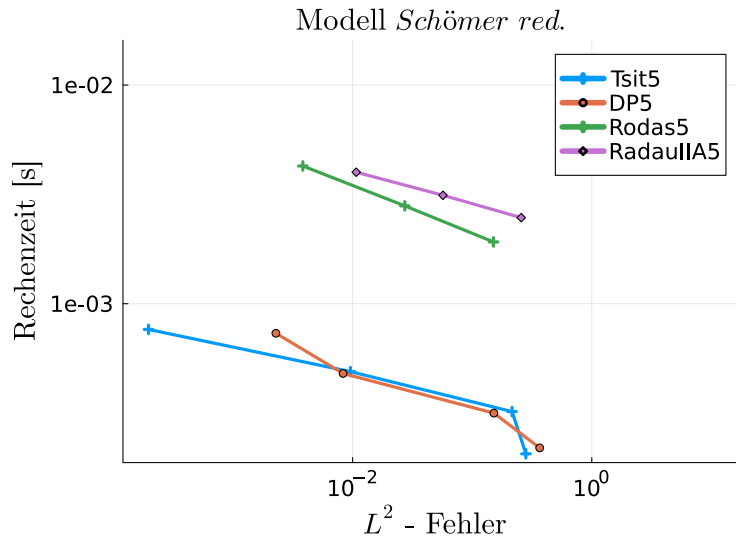


Abbildung 5.9: *Work-Precision*-Diagramm für das Modell *Schömer red.* und die vier Methoden *Tsit5*, *DP5*, *Rodas5* und *RadauIIA5*. Der Fehler wurde in der  $L^2$ -Norm berechnet und die Rechenzeiten wurden mit dem Prozessor *11th Gen Intel(R) Core(TM) i7-1185G7 @ 3.00GHz* gemessen.

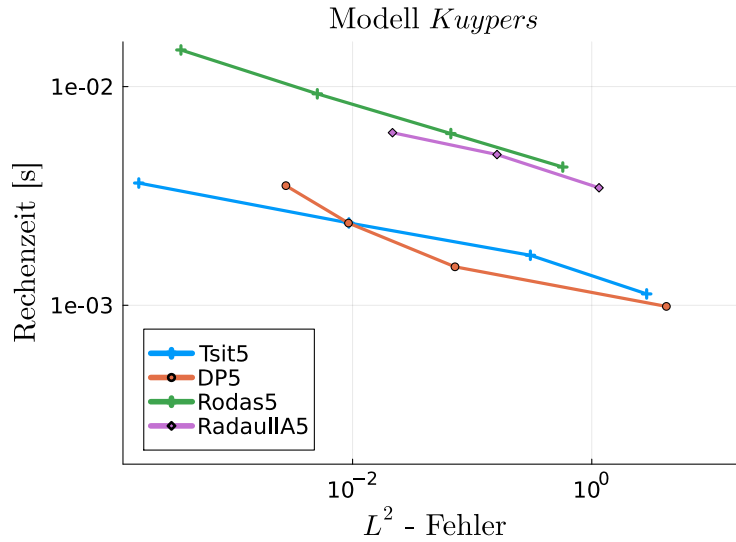


Abbildung 5.10: *Work-Precision*-Diagramm für das Modell *Kuypers* und die vier Methoden *Tsit5*, *DP5*, *Rodas5* und *RadauIIA5*. Der Fehler wurde wieder in der  $L^2$ -Norm berechnet und die Rechenzeiten wurden mit dem Prozessor *11th Gen Intel(R) Core(TM) i7-1185G7 @ 3.00GHz* gemessen.

#### 5.4 Betrachtung der Schrittweiten

Auch interessant zu betrachten ist, wie sich die Größe der Schrittweite im Laufe der Simulation verhält. Dies wurde in Abbildung 5.11 für die Modelle *Kuypers* und *Schömer red.* unter der Verwendung der Methode *Tsit5* und Toleranzen von  $\tau = 10^{-5}$  gezeigt. Weiterhin wurden dieselben Parameter und Anfangsbedingungen wie in Kapitel 4.3 genutzt.

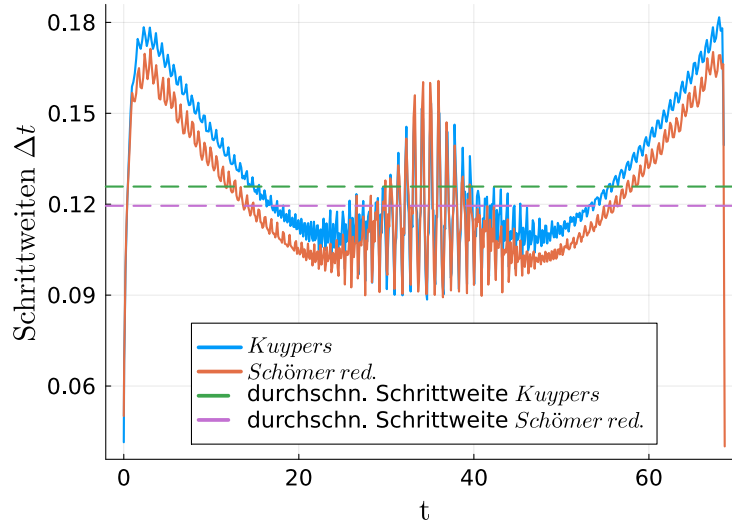


Abbildung 5.11: Größe der Schrittweiten  $\Delta t$  im Laufe der Simulation für die Modelle *Schömer red.* und *Kuypers*.

Man sieht, dass die Schrittweite zur Änderung der Drehrichtung des Wackelsteines kleiner wird, während des Vorganges selbst dabei aber sehr stark schwankt.

Zudem ist zu erkennen, dass die durchschnittlichen Schrittweiten egal ob bei *Kuypers* oder *Schömer red.* nicht sonderlich größer sind, als die „kleinste Schrittweite“ in der Simulation. Wobei mit der „kleinsten Schrittweite“ nicht die Schrittweiten am Anfang der Simulation, während sich die Schrittweiten noch kalibrieren, und auch nicht die letzte Schrittweite gemeint ist. In dem Beispiel von Abbildung 5.11 ist die kleinste Schrittweite also in etwa 0.09s.

Dies ist noch einmal genauer in Abbildung 5.12 zu sehen. Hier wurden das Verhältnis zwischen der durchschnittlichen Schrittweite und der kleinsten Schrittweite für verschiedene Toleranzen aufgetragen.

Das ist äquivalent zu dem Verhältnis aus der Anzahl an Schritten die bei der Lösung mit einem Verfahren mit adaptiver Schrittweitenkontrolle gemacht wurden, zu der Anzahl an Schritten die das selbe Verfahren mit konstanter kleinsten Schrittweite machen würde.

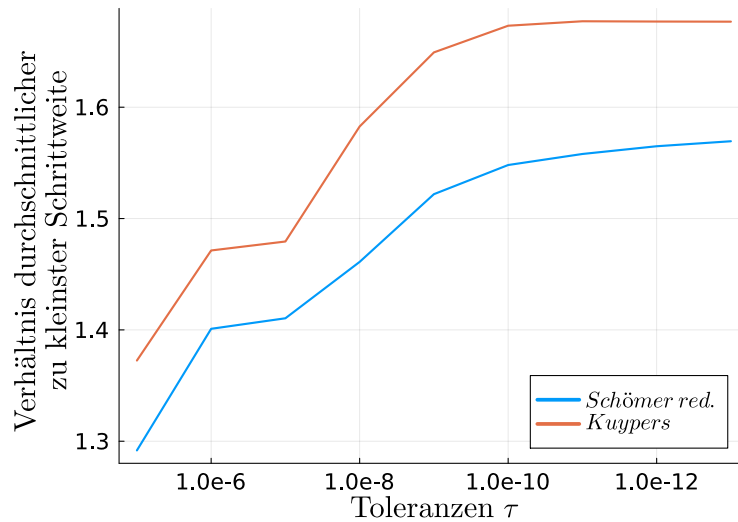


Abbildung 5.12: Das Verhältnis zwischen durchschnittlicher und kleinster Schrittweite bei verschiedenen Toleranzen.

Der Performancevorteil eines Verfahrens mit adaptiver Schrittweitenkontrolle im Vergleich zu einem Verfahren, welches konstant die kleinste Schrittweite des adaptiven Verfahrens nutzt, scheint nicht besonders groß.

Wenn man also seinen eigenen Differentialgleichungslöser implementieren muss, um die Bewegungsgleichungen des Wackelsteines zu lösen, scheint es somit nicht zwingend notwendig adaptive Schrittweitenkontrolle zu implementieren. Wenn man jedoch die Wahl hat, sollte man immer adaptive Schrittweitenkontrolle nutzen, alleine schon, da man nur so die Möglichkeit hat, die gewünschten Toleranzen vorzugeben.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Bachelorarbeit wurde das Bewegungsverhalten des Wackelsteines simuliert. Dafür wurden die Beschreibungen und Herleitungen der Bewegungsgleichungen der zwei Modelle *Schömer* und *Kuypers* nachvollzogen und das Modell *Kuypers* wurde in *Julia* implementiert.

Anschließend wurden die beiden Modelle sowohl hinsichtlich ihrer Beschreibung als auch ihrer numerischen Eigenschaften miteinander verglichen.

Das ursprüngliche Modell *Schömer* betrachtet den Wackelstein aus Sicht des Laborsystems und die 13 Variablen zur Beschreibung des Wackelsteines sind alle in Komponenten des Laborsystems gegeben. Das Modell *Kuypers* betrachtet den Wackelstein auch aus Sicht des Laborsystems, hier sind die sechs Variablen des Modells jedoch in körperfesten Komponenten ausgedrückt.

Beide Modelle, trotz der unterschiedlichen Beschreibungen, zeigten bei der Simulation des Wackelsteines nicht nur das gleiche qualitative Verhalten, die Modelle modellieren den Wackelstein auch so, wie man es von einem realen Wackelstein erwarten würde.

Es wurde zudem gezeigt, dass das Modell *Schömer*, im Gegensatz zum Modell *Kuypers*, keine guten Stabilitätseigenschaften besitzt. Daher wurde das Modell *Schömer red.* entwickelt, welches in etwa dieselben Stabilitätseigenschaften wie *Kuypers* hat.

Zudem wurden die Rechenzeiten und der Verlauf der Schrittweiten beider Modelle *Schömer red.* und *Kuypers* untersucht und verglichen.

Abschließend lässt sich sagen, dass die beiden Modelle *Schömer red.* und *Kuypers* den Wackelstein gut beschreiben und sich gut für die Simulation des Wackelsteines eignen. Das Modell *Schömer red.* hat bei einer möglichen Animation der Ergebnisse noch den Vorteil, dass die Position des Schwerpunktes des Wackelsteines direkt mitberechnet wird. Bei *Kuypers* muss man die Position entweder im Nachhinein berechnen oder man passt das Modell entsprechend an.

## 7 Anhang

### 7.1 Reproduktion von Kuypers' ursprünglichen Ergebnissen

Um die Implementierung des Modells von *Kuypers* zu validieren oder zumindest zu überprüfen, dass in der Implementierung nichts grob falsches gemacht wurde, wurde versucht die ursprünglichen Ergebnisse von Kuypers aus [5] zu reproduzieren.

Kuypers hat die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= \beta(0) = -0.02, & \gamma(0) &= 0.0 \\ \omega_1(0) &= \omega_2(0) = 0.0, & \omega_3(0) &= -8.0\end{aligned}\tag{7.1}$$

und die geometrischen Parameter

$$\begin{aligned}m &= 1.0, & I_1 &= 2 \cdot 10^{-4}, & I_2 &= 1.6 \cdot 10^{-3}, & I_3 &= 1.7 \cdot 10^{-3} \\ a &= 0.2, & b &= 0.03, & c &= 0.02, & \delta &= 0.1 \\ h &= 1 \cdot 10^{-3}, & c_1 &= c_2 = c_3 = 1 \cdot 10^{-4}, & g &= 9.81\end{aligned}\tag{7.2}$$

verwendet. Wieder sind alle Parameter in den passenden SI-Einheiten gegeben, auch wenn die Einheiten nicht explizit dazugeschrieben wurden.

Mit diesen Anfangsbedingungen und Parametern bekommt Kuypers, unter Verwendung von *ode113* in Matlab, die folgenden Ergebnisse. Interessant ist hier noch zu erwähnen, dass der Wackelstein, für die gegebenen Anfangsbedingungen und geometrischen Parameter, mehrmals seine Drehrichtung ändert.

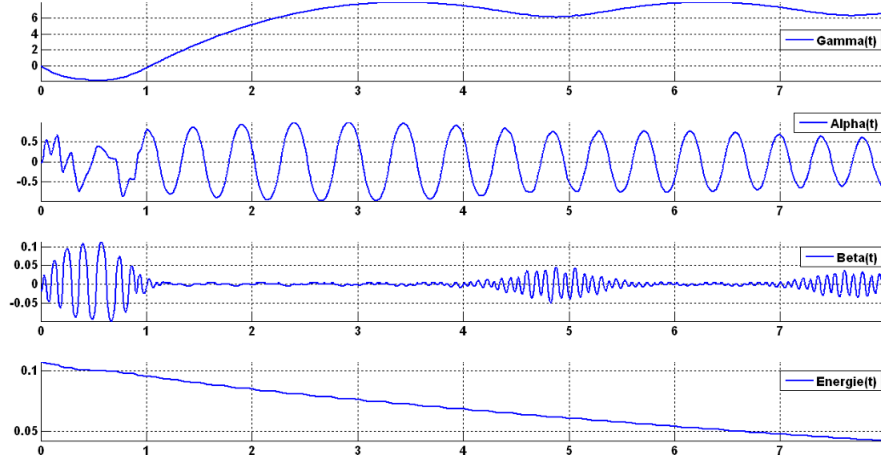


Abbildung 7.1: Die Lösung der Anfangsbedingungen durch Friedhelm Kuypers, wie sie in [5, Abbildung 4] zu finden ist.

Mit den gleichen Anfangsbedingungen und Parametern wurde in der Implementierung in *Julia* gerechnet und unter Verwendung der Methode *VCABM*, welche das äquivalent von *ode113* in *OrdinaryDiffEq.jl* ist, die Abbildung 7.2 erzeugt.

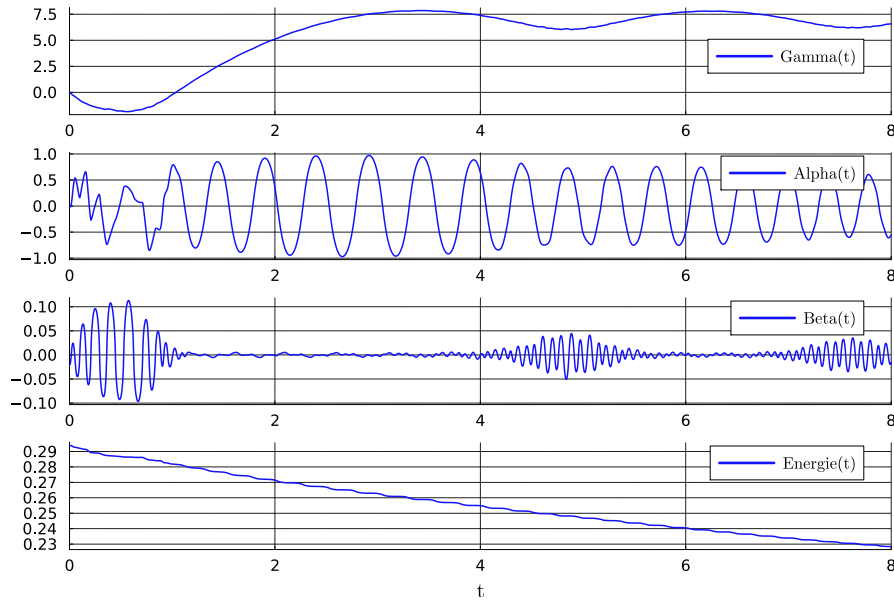


Abbildung 7.2: Reproduktion von Kuypers' ursprünglichen Ergebnissen mit der im Rahmen dieser Bachelorarbeit erarbeiteten Implementierung in *Julia*.

Es ist klar zu erkennen, dass die Ergebnisse von Kuypers und die von der Implementierung in *Julia* übereinstimmen. Den einzigen erkennbaren Unterschied gibt es in der absoluten Skalar der Energie. Dies liegt daran, dass wir unseren Referenzpunkt für die potentielle Energie in den Auflagepunkt des Wackelsteines, beziehungsweise den Tisch gelegt haben, während Kuypers den Referenzpunkt in den ursprünglichen Schwerpunkt des Wackelsteines gelegt hat. Der Grund dafür, dass die Energie nicht konstant ist, liegt an den Reibungszahlen  $c_i \neq 0$ .

Dieser Fakt und die Tatsache, dass die Implementierung nach Kuypers dieselben Ergebnisse liefert wie die in Laborsystem-Komponenten hergeleitete Implementierung von Schömer, gibt uns weiteres Vertrauen in die Richtigkeit der Implementierung und des Modells allgemein.

## 7.2 Der Versuch einer Lagrange- und Hamilton Formulierung

### 7.2.1 Die Energien des Systems

In Kapitel 1.2 wurde die kinetische und potenzielle Energie eines starren Körpers beschrieben. Diese wollen wir nun auf das Kuypers System anwenden, mit der

Hoffnung eine Lagrange- oder Hamilton-Formulierung zu finden.

Die Translationsenergie  $E_{trans}$  bekommen wir über die Bewegung des Schwerpunktes des Wackelsteines. Diese haben wir in Formel 3.12 bestimmt.

Die Rotationsenergie  $E_{rot}$  bekommen wir über die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1, \omega_2$  und  $\omega_3$  und den Trägheitstensor  $\mathbf{I}$ .

Und zuletzt bekommen wir die potenzielle Energie  $E_{pot}$  über den Abstand  $h$  des Schwerpunktes zum Auflagepunkt. Dies berechnen wir, indem wir den Vektor  $\mathbf{r}_{\vec{SA}}$  mit dem Vektor  $\mathbf{n}_3$  skalar multiplizieren.

Zusammengenommen erhalten wir so die Gesamtenergie

$$E_{ges} = E_{trans} + E_{rot} + E_{pot} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_S^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + mgr_{SA}^T \cdot \mathbf{n}_3 \quad (7.3)$$

des Wackelsteines.

Diese Formel können wir auch experimentell „überprüfen“, indem wir uns die Gesamtenergie des Systems im Laufe der Simulation anschauen. Da ohne Reibung die Energieerhaltung gilt, sollte  $E_{ges}$  konstant sein. Dies ist in Abbildung 7.3 klar zu sehen.

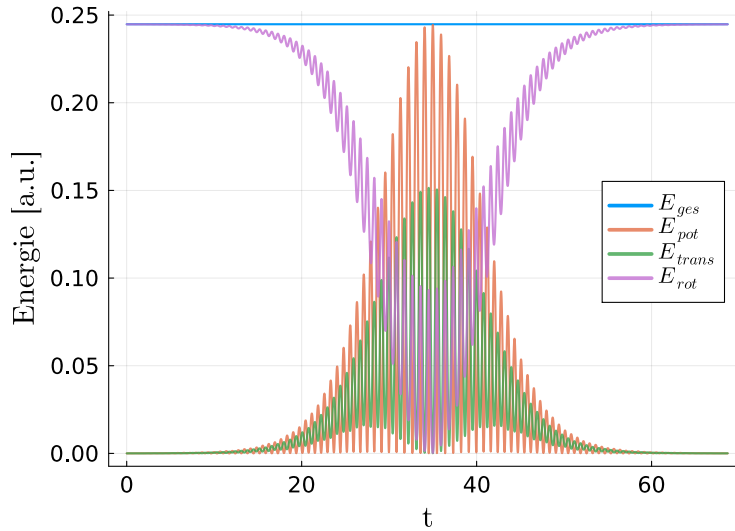


Abbildung 7.3:  $E_{ges}, E_{trans}, E_{rot}$  und  $E_{pot}$  im Laufe der Simulation, wobei die potentielle Energie für eine bessere Visualisierung um einen konstanten Betrag verschoben wurde. Die Gesamtenergie des Systems ist erhalten.

### 7.2.2 Eine naive Lagrange-Formulierung

Alle Terme in Gleichung 7.3 sind nur in Abhängigkeit von den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  und den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1, \omega_2$  und  $\omega_3$  gegeben. Mithilfe der Relation



3.1 können wir die Energie somit ausschließlich in Abhängigkeit von den Winkeln  $\alpha$ , und  $\beta$  und deren Ableitungen  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  und  $\dot{\gamma}$  schreiben.

Damit haben wir alles zusammen für eine naive Lagrange-Formulierung. Die Lagrangefunktion ist leider zu lang um hier abgedruckt werden zu können, ist aber in dem dieser Bachelorarbeit beigefügtem GitHub Repository zu finden.

Mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen und einem Computeralgebrasystem (CAS) wie *Mathematica* können wir die Bewegungsgleichungen für  $\ddot{\alpha}$ ,  $\ddot{\beta}$  und  $\ddot{\gamma}$  bestimmen und uns mit der Funktion *FortranForm* und ein paar *search and replace*-Befehlen die Gleichungen in ein Format bringen, mit welchem wir in *Julia* gut rechnen können.

Im Vergleich mit den Lösungen des Modells *Kuypers*, sehen die Lösungen der Lagrange-Formulierung im ersten Moment recht ähnlich aus.

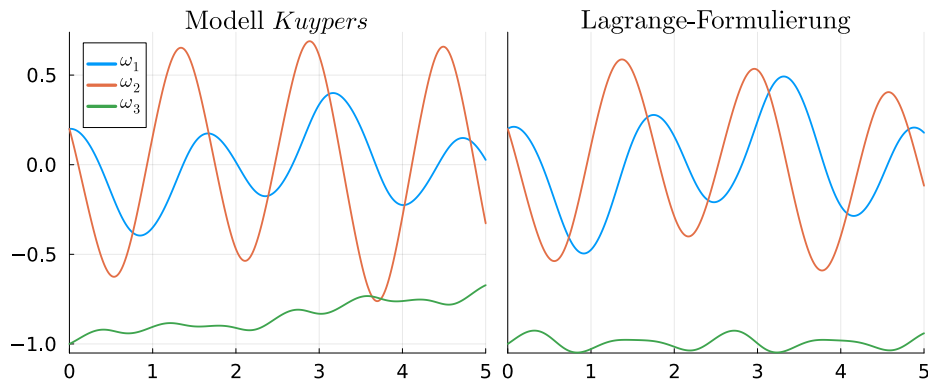


Abbildung 7.4: Ein Vergleich der Lösung der Anfangsbedingungen  $\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = 0.1$ ,  $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0.1$ ,  $\omega_3(0) = -1.0$  und denselben geometrischen Parametern wie in 4.9 zwischen dem Modell *Kuypers* und der naiven Lagrange-Formulierung.

Wenn man sich jedoch das Verhalten über einen Zeitraum von 50 Sekunden, anstatt 5 Sekunden anschaut, fällt der Unterschied auf. Insbesondere spiegelt die Lagrange-Formulierung nicht das charakteristische Verhalten des Wackelsteines, dass sich seine Drehrichtung umdreht, wider.

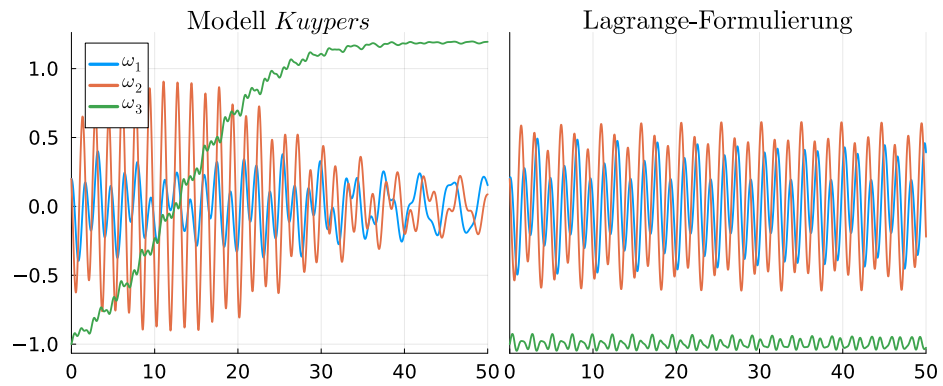


Abbildung 7.5: Ein Vergleich der Lösung der selben Anfangsbedingungen zwischen dem Modell *Kuypers* und der naiven Lagrange-Formulierung über 50 Sekunden.

Die naive Hamilton-Formulierung liefert dieselben falschen Ergebnisse wie die naive Lagrange-Formulierung.

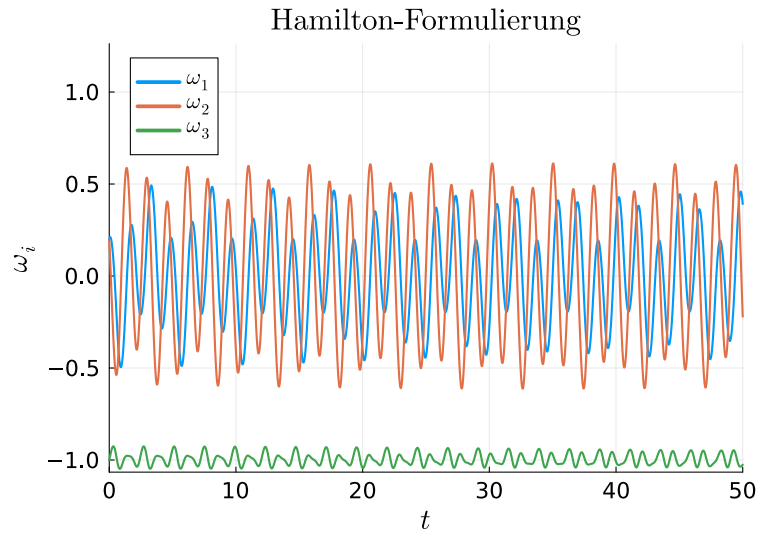


Abbildung 7.6: Lösung der selben Anfangsbedingungen mit der naiven Hamilton-Formulierung über 50 Sekunden. Die Ergebnisse sind dieselben wie bei der naiven Lagrange-Formulierung.

### 7.2.3 Das Problem der naiven Formulierungen

Unter genauerer Betrachtung der Euler-Lagrange-Gleichungen, sieht man schnell, dass sich die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = 0 \quad (7.4)$$

durch das Fehlen der Variable  $\gamma$  in der Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}$  zu

$$p_\gamma := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}} = \text{konstant} \quad (7.5)$$

vereinfacht.

$p_\gamma$  ist jedoch nur eine Konstante in der Lagrange- und Hamilton-Formulierung, nicht aber im Modell *Kuypers* oder *Schömer*.

Somit spricht alles dafür, dass in der Lagrange- und Hamilton-Formulierung ein Fehler gemacht wurde.

Das Problem der naiven Formulierungen liegt daran, dass wir alle Energien aus Sicht des Laborsystems betrachten, diese jedoch in körperfesten Koordinaten ausgedrückt haben. Wenn wir jedoch den Lagrange-Formalismus verwenden wollen, der zwar allgemein auch in beschleunigten Bezugssystemen funktioniert, müssen wir entweder die Energien aus Sicht des körperfesten Bezugssystems bestimmen und in körperfesten Koordinaten ausdrücken, oder weiterhin die Energie aus Sicht des Laborsystems betrachten, diese jedoch auch in Laborkoordinaten ausdrücken. Mehr dazu findet sich in dem kurzen Skript von Herr Simon [7].

Da die naiven und falschen Bewegungsgleichungen in ihrer jetzigen Form ausgedrückt jedoch schon um die 100 Seiten lang sind und da wir mit *Kuypers* und *Schömer red.* bereits zwei Modelle haben, welche die Bewegung des Wackelsteines gut beschreiben, wurde eine richtige Lagrange- und Hamilton-Formulierung nicht weiterverfolgt.

## 7.3 Verwendung von KI-Tools in dieser Bachelorarbeit

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit wurden die KI-Tools GitHub Copilot und ChatGPT verwendet.

### 7.3.1 Nutzung von GitHub Copilot

GitHub Copilot wurde beim Programmieren genutzt, um einfache und repetitive Aufgaben zu automatisieren. So etwa beim Erstellen der Abbildung 7.3. Nachdem der Code zum plotten der Gesamtenergie geschrieben wurde, konnte Copilot den Code zum plotten der Translations-, Rotations- und potentiellen Energie vorschlagen. Dieser Code wurde dann überprüft und angepasst übernommen.

Bei komplizierteren Aufgaben, wie etwa beim Bestimmen der Formel für die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = mg(x_1 \cos(\alpha) \sin(\beta) - x_2 \sin(\alpha) - (x_3 + h) \cos(\alpha) \cos(\beta))$$

bei Kuypers, war Copilot leider nicht mehr hilfreich. Hier waren alle Vorschläge von Copilot falsch.

Zudem wurde GitHub Copilot auch beim Schreiben der LaTeX-Dateien für diese Bachelorarbeit genutzt, insbesondere bei Gleichungen. Nachdem zum Beispiel in Kapitel 2.2.1 die Geschwindigkeit des Auflagepunktes aufgeschrieben wurde, konnte Copilot im nächsten Schritt die Formel auf die Geschwindigkeit des Schwerpunktes umstellen und den richtigen LaTeX-Code vorschlagen. Dies ist keine mathematisch schwierige Aufgabe, spart aber insbesondere bei stark annotierten Variablen Zeit.

Allerdings stößt Copilot auch schnell an seine Grenzen, bei komplizierten Umformungen wie etwa bei Gleichung 2.9 waren die Vorschläge für die Umformung falsch.

### 7.3.2 Nutzung von ChatGPT

ChatGPT wurde zum Beispiel genutzt um *SymPy*-Code in *Mathematica* umzuschreiben, nachdem sich herausgestellt hat, dass *SymPy* nicht mächtig genug war, um die in der naiven Lagrange- und Hamilton-Formulierungen benötigten Gleichungen zu bestimmen.

Außerdem wurde ChatGPT benutzt, um Fragen zur Syntax zu beantworten.

### 7.3.3 Fazit zur Nutzung von KI-Tools in dieser Arbeit

Allgemein lässt sich sagen, dass die KI-Tools GitHub Copilot und ChatGPT eine große Hilfe waren, um einfache Aufgaben zu automatisieren oder zu beschleunigen, ihre Antworten wurden jedoch immer sehr genau überprüft. Wenn es nicht möglich war die Antwort zu überprüfen, wurde die Antwort nicht verwendet.

So war es im Rahmen der Lagrange-Formulierung etwa nötig eine etwa 100-seitige, in *Fortran* geschriebene Gleichung, in *Julia* zu übersetzen. Da man sich nicht darauf verlassen kann, dass ChatGPT das fehlerfrei macht und es schwer ist die Antwort von ChatGPT nachzuprüfen, wurde ChatGPT hier **nicht** verwendet.

## 7.4 GitHub-Repository

Die Implementierung der Modelle *Kuypers*, *Schömer red.* und *Schömer*, so wie die Implementierung der naiven Lagrange- und Hamilton-Formulierung, sowie alle in dieser Bachelorarbeit gezeigten Plots, die zusätzlichen Plots und der Code um diese Plots zu reproduzieren, ist in folgendem GitHub-Repository zu finden: [https://github.com/cwittens/Bachelors\\_Thesis\\_Mathematics](https://github.com/cwittens/Bachelors_Thesis_Mathematics)

## Literatur

1. Commons, W. *Datei: Celt with weights of gemstone turtles-01.jpg* — *Wikimedia Commons, the free media repository* [Online; Stand 16. Oktober 2024]. [https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Celt\\_with\\_weights\\_of\\_gemstone\\_turtles-01.jpg&oldid=852273053](https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Celt_with_weights_of_gemstone_turtles-01.jpg&oldid=852273053).
2. in. *Theoretische Physik 1: Mechanik Von den Newton'schen Gesetzen zum deterministischen Chaos* 1–77 (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2007). ISBN: 978-3-540-71379-1. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-71379-1\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-71379-1_1).
3. Graf, B. *Quaternions and dynamics* 2008. arXiv: 0811.2889 [math.DS]. <https://arxiv.org/abs/0811.2889>.
4. Kuypers, F. *Klassische Mechanik* 10. Aufl. de (Wiley-VCH Verlag, Weinheim, Germany, Apr. 2016).
5. Kuypers, F. *Wackelstein\_1.pdf* Zu finden in Anmerkungen.zip im Online-Zusatzmaterial zu Klassische Mechanik, 10. Auflage; Stand 16. Oktober 2024. PDF verfügbar im Online-Zusatzmaterial zu Klassische Mechanik, 10. Auflage. 2016. <https://application.wiley-vch.de/books/sample/students/p00.php?p=3527339604&lang=dt>.
6. Schoemer, E. *Rattleback - Bewegungsgleichungen für ein rollendes Ellipsoid* 2024.
7. Simon, P. *Klassische Theoretische Physik: Mechanik* [Online; Stand 16. Oktober 2024]. Nov. 2013. <https://astro.uni-bonn.de/~psimon/docs/physik-220-LA/vorlesung-mechanik-6.pdf>.