Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls (*1933f*)

Man kann den Heytingschen Aussagenkalkül mittels der Begriffe des gewöhnlichen Aussagenkalküls und des Begriffes "p ist beweisbar" (bezeichnet mit Bp) interpretieren,[1] wenn man für den letzteren das folgende Axiomensystem $\mathfrak{S}$ annimmt:

1. $Bp \rightarrow p$
2. $Bp \rightarrow . B(p \rightarrow q) \rightarrow Bq$
3. $Bp \rightarrow BBp$.

Außerdem sind für die Begriffe $\rightarrow$, $\sim$, $.$, $\vee$ die Axiome und Schlußregeln des gewöhnlichen Aussagenkalküls anzunehmen, ferner die neue Schlußregel: Aus A darf auf BA geschlossen werden.

Die Heytingschen Grundbegriffe sind folgendermaßen zu übersetzen:

$\neg p$	$\sim Bp$
$p \supset q$	$Bp \rightarrow Bq$
$p \vee q$	$Bp \vee Bq$
$p \wedge q$	$p . q$.

Mit dem selben Erfolg könnte man auch $\neg p$ durch $B{\sim}Bp$ und $p \wedge q$ durch $Bp . Bq$ übersetzen. Die Übersetzung einer beliebigen im Heytingschen System gültigen Formel folgt aus $\mathfrak{S}$, dagegen folgt aus $\mathfrak{S}$ nicht die Übersetzung von $p \vee \neg p$ und allgemein keine Formel der Gestalt $BP \vee BQ$, für die nicht schon entweder BP oder BQ aus $\mathfrak{S}$ beweisbar ist. Vermutlich gilt eine Formel im Heytingschen Kalkül dann und nur dann, wenn ihre Übersetzung aus $\mathfrak{S}$ beweisbar ist.

Das System $\mathfrak{S}$ ist mit dem Lewisschen System of Strict Implication äquivalent, wenn Bp durch Np übersetzt wird (vgl. *Parry 1933a*), und wenn man das Lewissche System durch das folgende Beckersche Zusatzaxiom $Np < NNp$ ergänzt.[2]

Es ist zu bemerken, daß für den Begriff "beweisbar in einem bestimmten formalen System S" die aus $\mathfrak{S}$ beweisbaren Formeln nicht alle gelten. Es

[1] Eine etwas andere Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls gab Kolmogoroff (*1932*) ohne allerdings einen präzisen Formalismus anzugeben.

[2] *Becker 1930*, S. 497.

An interpretation of the intuitionistic propositional calculus (*1933f*)

One can interpret[1] Heyting's propositional calculus by means of the notions of the ordinary propositional calculus and the notion 'p is provable' (written Bp) if one adopts for that notion the following system $\mathfrak{S}$ of axioms:

$$1.\ Bp \rightarrow p,$$
$$2.\ Bp \rightarrow .\, B(p \rightarrow q) \rightarrow Bq,$$
$$3.\ Bp \rightarrow BBp.$$

In addition, for the notions $\rightarrow$, $\sim$, $.$, $\vee$ the axioms and rules of inference of the ordinary propositional calculus are to be adopted, as well as the new rule of inference: From A, BA may be inferred.

Heyting's primitive notions are to be translated as follows:

$\neg p$	$\sim Bp$
$p \supset q$	$Bp \rightarrow Bq$
$p \vee q$	$Bp \vee Bq$
$p \wedge q$	$p \cdot q$.

One could also translate $\neg p$ by $B{\sim}Bp$ and $p \wedge q$ by $Bp\,.\,Bq$ with equal success. The translation of an arbitrary formula that holds in Heyting's system is derivable in $\mathfrak{S}$; on the other hand, the translation of $p \vee \neg p$ is not derivable in $\mathfrak{S}$, nor in general is any formula of the form $BP \vee BQ$ for which neither BP nor BQ is already provable in $\mathfrak{S}$. Presumably a formula holds in Heyting's calculus if and only if its translation is provable in $\mathfrak{S}$.

The system $\mathfrak{S}$ is equivalent to Lewis' system of strict implication if Bp is translated by Np (see *Parry 1933a*) and one supplements Lewis' system by the following additional axiom[2] of Becker: $Np < NNp$.

It is to be noted that for the notion "provable in a certain formal system S" not all of the formulas provable in $\mathfrak{S}$ hold. For example, $B(Bp \rightarrow p)$

[1]Kolmogorov (*1932*) has given a somewhat different interpretation of the intuitionistic propositional calculus, without, to be sure, specifying a precise formalism.

[2]*Becker 1930*, p. 497.

gilt z. B. für ihn $B(Bp \rightarrow p)$ niemals, d. h. für kein System S, das die Arithmetik enthält. Denn andernfalls wäre | beispielsweise $B(0 \neq 0) \rightarrow 0 \neq 0$ und daher auch $\sim B(0 \neq 0)$ in S beweisbar, d. h. die Widerspruchsfreiheit von S wäre in S beweisbar.

Bemerkung über projektive Abbildungen (*1933g*)

Jede eineindeutige Abbildung ϕ der reellen projektiven Ebene E in sich, welche Gerade in Gerade überführt, ist eine Kollineation. Bezeichnet man für jeden Kegelschnitt der Ebene als die zugehörige *Kegelschnittumgebung* die Menge aller Punkte p von E, für welche jede p enthaltende Gerade genau zwei Punkte mit dem Kegelschnitt gemein hat, so ist das System $\mathfrak{K}$ aller Kegelschnittumgebungen ein unbegrenzt feines Überdeckungssystem[1] von E. Da jeder Kegelschnitt durch zwei Geradenbüschel erzeugt werden kann, welche projektiv (d. h. durch eine endliche Kette von Perspektivitäten) auf einander bezogen sind, und da perspektiv auf einander bezogene Geradenbüschel bei jeder eineindeutigen Abbildung, die Gerade in Gerade überführt, in perspektiv auf einander bezogene Geradenbüschel übergehen, so wird durch die Abbildung ϕ jeder Kegelschnitt auf einen Kegelschnitt abgebildet. Ferner wird wegen der Eineindeutigkeit von ϕ und der obigen Definition einer Kegelschnittumgebung jede Kegelschnittumgebung durch ϕ in eine Kegelschnittumgebung übergeführt. Es wird demnach $\mathfrak{K}$ durch ϕ in sich übergeführt. Da $\mathfrak{K}$ ein unbegrenzt feines Überdeckungssystem von E ist, so ist also ϕ eine *stetige* Abbildung und daher nach einem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie eine Kollineation.

[1] So heißt nach Menger ein System von offenen Mengen, in welchem zu jedem Punkt p des Raumes und zu jeder Umgebung U von p eine p enthaltende offene Menge $\subset U$ existiert.

never holds for that notion, that is, it holds for no system S that contains arithmetic. For otherwise, for example, $B(0 \neq 0) \rightarrow 0 \neq 0$ and therefore also $\sim B(0 \neq 0)$ would be provable in S, that is, the consistency of S would be provable in S.

Remark concerning projective mappings (*1933g*)

⟦The introductory note to *Gödel 1933g*, as well as to related items, can be found on page 272, immediately preceding *1933b*.⟧

Every one-to-one mapping ϕ of the real projective plane E into itself that carries straight lines into straight lines is a collineation. If for each conic section in the plane one designates as the corresponding *conic-section neighborhood* the set of all points p of E for which every straight line containing p has exactly two points in common with the conic section, then the system $\mathfrak{K}$ of all conic-section neighborhoods is an unboundedly fine covering system[1] of E. Since every conic section can be generated by two pencils of straight lines that are projectively correspondent to each other (that is, correspondent by a finite chain of perspectivities) and since perspectively correspondent pencils of straight lines are transformed, by every one-to-one mapping that carries straight lines into straight lines, into perspectively correspondent pencils of straight lines, every conic section is mapped onto a conic section by the mapping ϕ. Furthermore, on account of the one-to-oneness of ϕ and the above definition of a conic-section neighborhood, every conic-section neighborhood is transformed by ϕ into a conic-section neighborhood. Accordingly, $\mathfrak{K}$ is transformed into itself by ϕ. Since $\mathfrak{K}$ is an unboundedly fine covering of E, ϕ is a *continuous* mapping and therefore, by a fundamental theorem of projective geometry, a collineation.

[1]Menger so calls a system of open sets in case there exists in it, for each point p of the space and for each neighborhood U of p, an open subset of U that contains p.